$k(x, x') = f(x)k_1(x, x')f(x')$ $where\ f(x)\ is\ any\ function\ on\ x \in \Re^d$

$\exists \phi: \Re^d \to H$

$k_1(x, x')$ $is\ positvie$ semi-definite $\to$ $k_1(x, x') = \phi_1(x)^T \phi_1(x')$

$k(x, x')$

$= f(x)k_1(x, x')f(x')$

$= f(x)\phi_1(x)^T \phi_1(x')f(x')$

$Let\ \phi(x)^T = f(x)\phi_1(x)^T, \phi(x') = \phi_1(x')f(x')$

$k(x, x') = \phi(x)^T \phi(x')$

$Thus, k(x, x') = f(x)k_1(x, x')f(x')\ is\ a\ valid\ kernel.$