

Voorlopige versie [GJ] 28/3

Grafen

Algoritme van Floyd

Lesweek 9

Samenvatting van (een gedeelte van) de cursusnota's

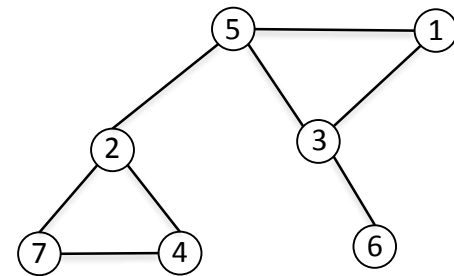
Datastructuren

- **Lineair:** de elementen vormen een rij.

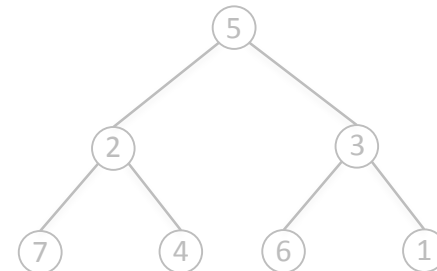


- **Niet-lineair:** de elementen vormen geen rij.

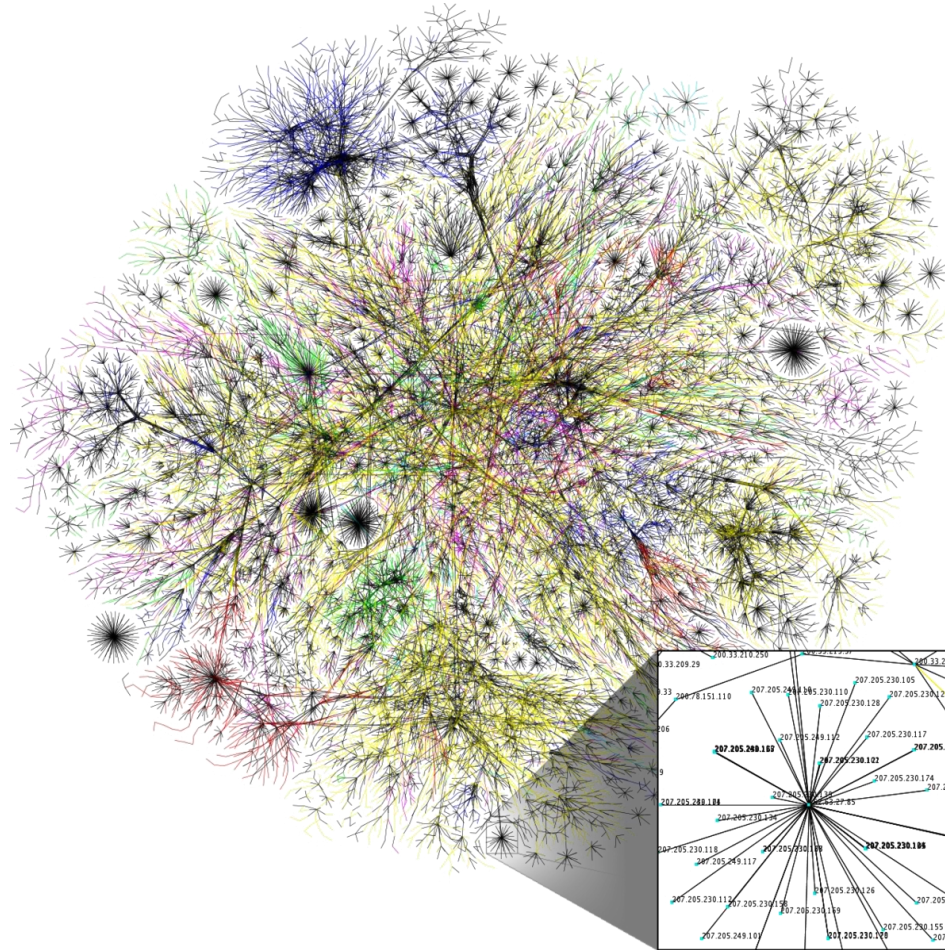
- **Graaf:** lussen zijn toegelaten.



- **Boom:** lussen zijn niet toegelaten.



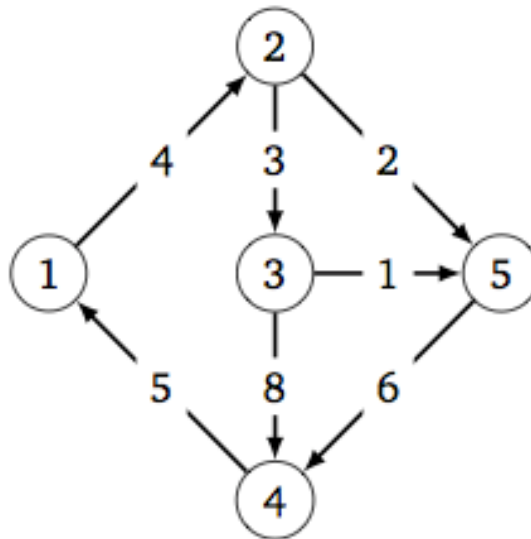
Definitie



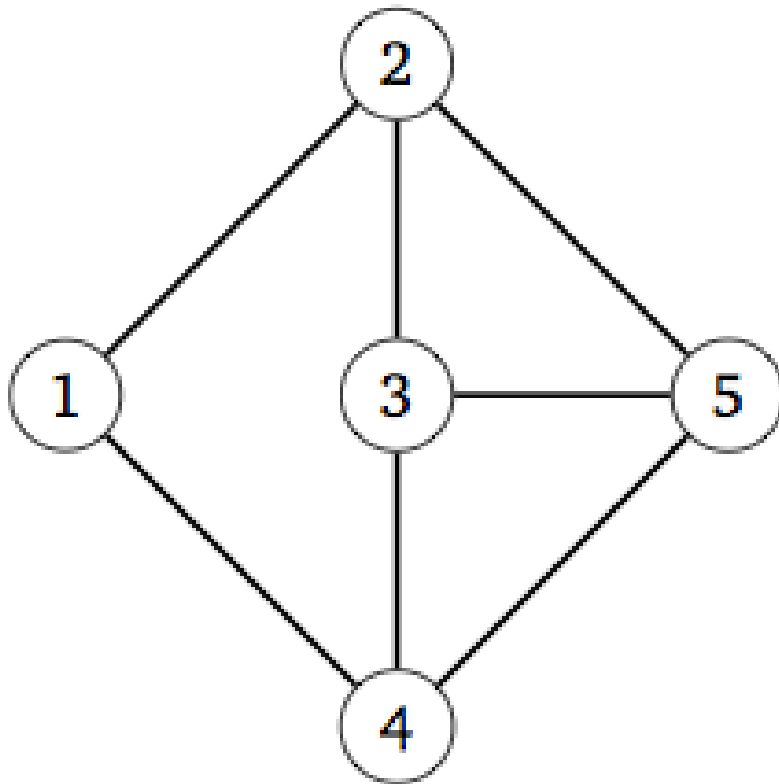
Graaf = verzameling knooppunten die met mekaar verbonden zijn

Definitions

netwerk (gewogen) graaf

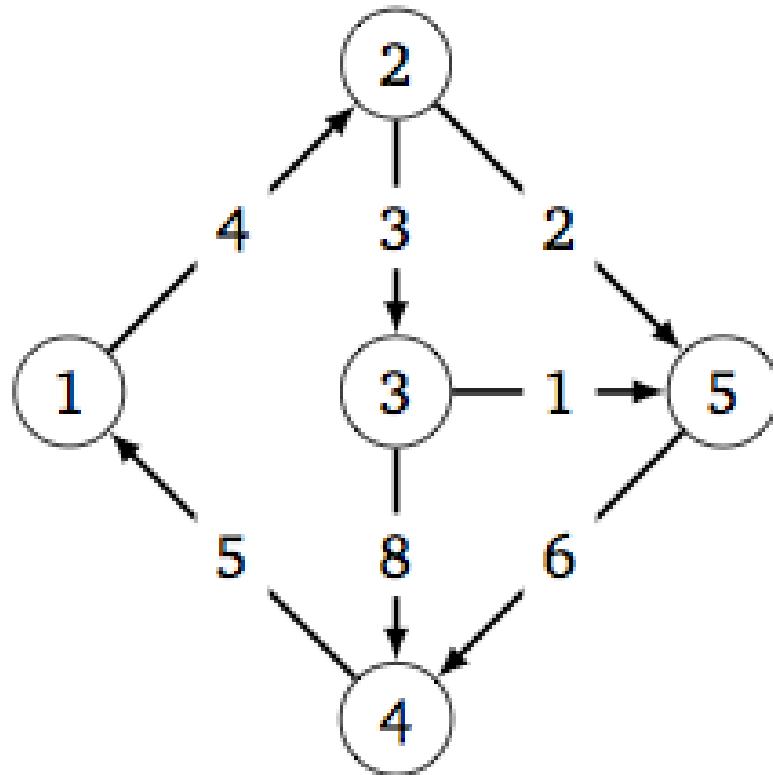


Verbindingsmatrix



		naar				
		1	2	3	4	5
van	1	0	1	0	1	0
	2	1	0	1	0	1
	3	0	1	0	1	1
	4	1	0	1	0	1
	5	0	1	1	1	0

Gewichtenmatrix



	naar				
	1	2	3	4	5
1	0	4	∞	∞	∞
2	∞	0	3	∞	2
3	∞	∞	0	8	1
4	5	∞	∞	0	∞
5	∞	∞	∞	6	0

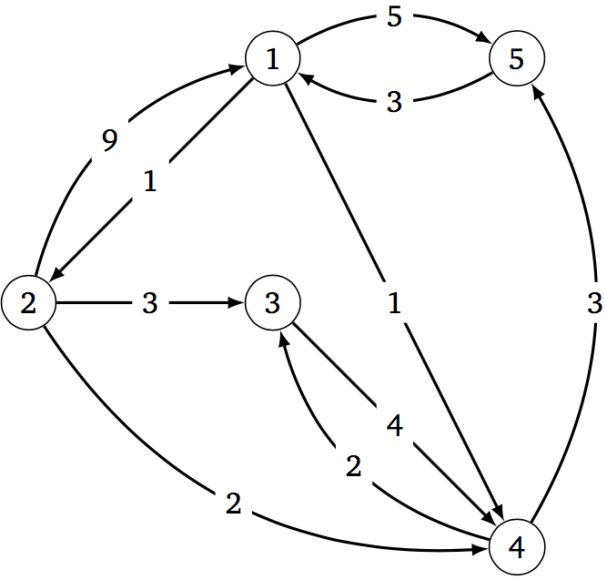
Algoritme van Floyd

- Netwerk (gewogen graaf)
- Zoekt paden met **kleinste gewicht**
- Geeft lijst met “kortste” paden tussen eender welke twee knooppunten van graaf

BFS: “kortste” pad is pad met minst aantal knooppunten

Gewichtenmatrix: toont afstanden tussen knooppunten zonder “tussenstation”

		naar				
		1	2	3	4	5
van	1	0	1	∞	1	5
	2	9	0	3	2	∞
	3	∞	∞	0	4	∞
	4	∞	∞	2	0	3
	5	3	∞	∞	∞	0



Algoritme van Floyd

Systematisch één knooppunt meer toelaten als 'tussenstation' om afstanden te optimaliseren

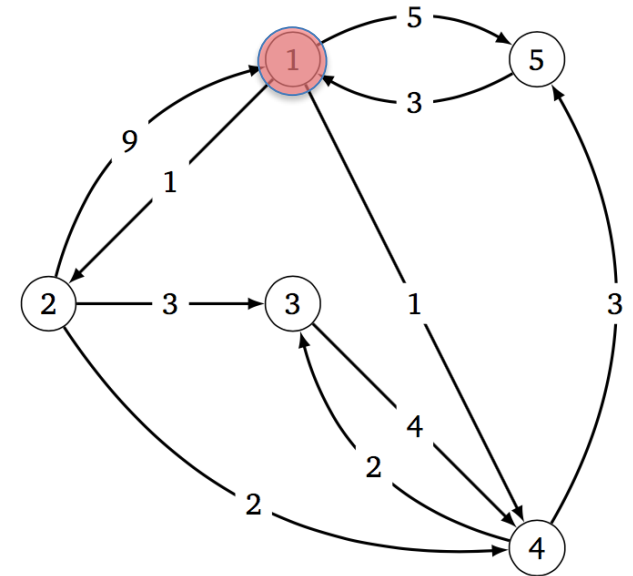
- Eerst knooppunt 1, dan knooppunt 2 enz (i.e. systematisch)
- Telkens je een knooppunt als tussenstation toelaat, afstanden optimaliseren
- Gebruikte tussenstations noteren in Pointermatrix

Eindresultaat:

- Pointermatrix met gebruikte tussenstations

Stap 1: knoop 1 als tussenstep toelaten indien afstand korter wordt

		naar				
		1	2	3	4	5
van	1	0	1	∞	1	5
	2	9	0	3	2	∞
	3	∞	∞	0	4	∞
	4	∞	∞	2	0	3
	5	3	∞	∞	∞	0

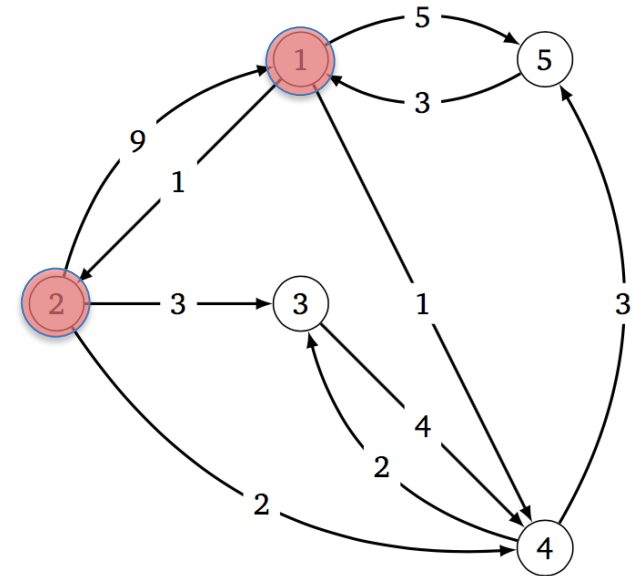


$$D^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \infty & 1 & 5 \\ 9 & 0 & 3 & 2 & 14 \\ \infty & \infty & 0 & 4 & \infty \\ \infty & \infty & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & \infty & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Stap 2:

niet alleen knoop 1 als tussenstap toelaten,
maar ook knoop 2 indien afstand korter wordt

$$D^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \infty & 1 & 5 \\ 9 & 0 & 3 & 2 & 14 \\ \infty & \infty & 0 & 4 & \infty \\ \infty & \infty & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & \infty & 4 & 0 \end{bmatrix}$$



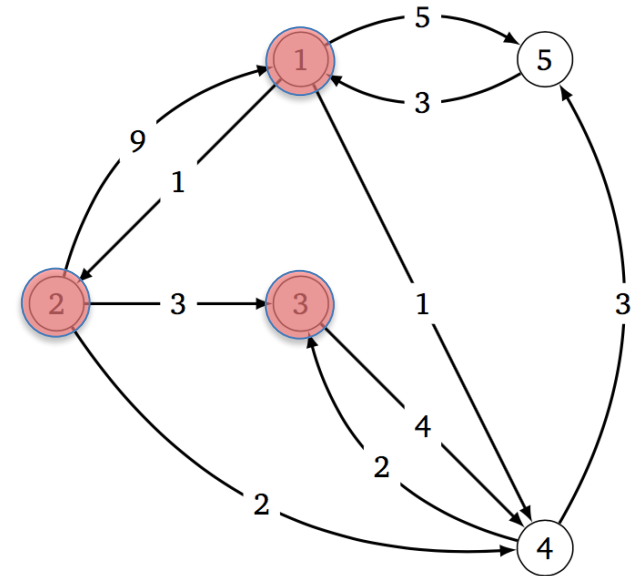
$$D^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 & 5 \\ 9 & 0 & 3 & 2 & 14 \\ \infty & \infty & 0 & 4 & \infty \\ \infty & \infty & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 7 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Stap 3:

niet alleen knoop 1 en 2 als tussenstap toelaten,
maar ook knoop 3 indien afstand korter wordt

$$D^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 & 5 \\ 9 & 0 & 3 & 2 & 14 \\ \infty & \infty & 0 & 4 & \infty \\ \infty & \infty & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 7 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

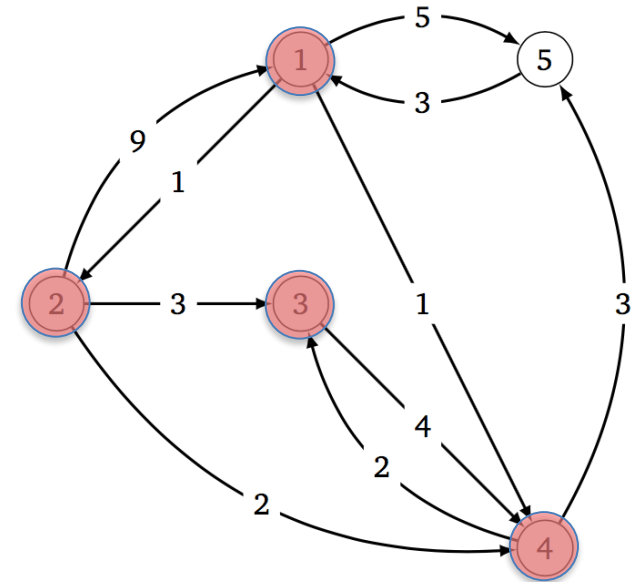


$$D^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 & 5 \\ 9 & 0 & 3 & 2 & 14 \\ \infty & \infty & 0 & 4 & \infty \\ \infty & \infty & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 7 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Stap 4:

niet alleen knoop 1, 2 en 3 als tussenstation toelaten,
maar ook knoop 4 indien afstand korter wordt

$$D^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 & 5 \\ 9 & 0 & 3 & 2 & 14 \\ \infty & \infty & 0 & 4 & \infty \\ \infty & \infty & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 7 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

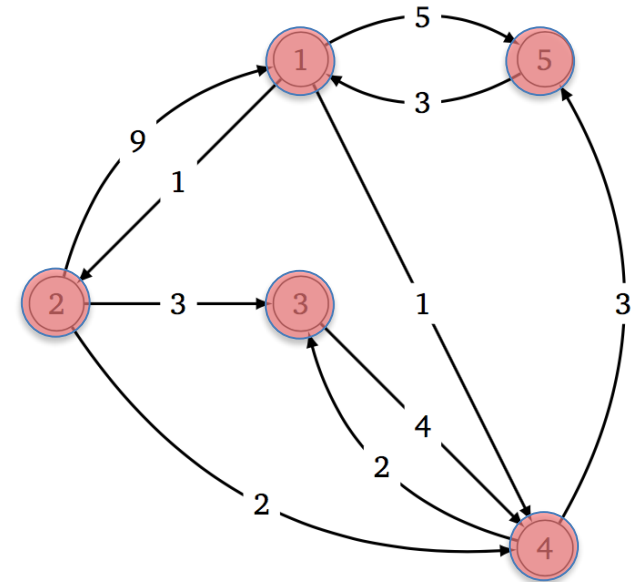


$$D^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 9 & 0 & 3 & 2 & 5 \\ \infty & \infty & 0 & 4 & 7 \\ \infty & \infty & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 6 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Stap 5:

ook knoop 5 indien afstand korter wordt

$$D^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 9 & 0 & 3 & 2 & 5 \\ \infty & \infty & 0 & 4 & 7 \\ \infty & \infty & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$



$$D^{(5)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ \mathbf{8} & 0 & 3 & 2 & 5 \\ \mathbf{10} & \mathbf{11} & 0 & 4 & 7 \\ \mathbf{6} & \mathbf{7} & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 6 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 5 & 5 & 0 & 0 & 4 \\ 5 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pad aflezen uit pointermatrix

Voorbeeld: kortste pad van knoop 3 naar knoop 1:

3 ... 1

- Stap 1: rij 3 kolom 1 van P-matrix = 5 →
voorganger van 1 in kortste pad van 3 naar 1 is
knoop met nummer 5

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 5 & 5 & 0 & 0 & 4 \\ 5 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dus van 3 naar 1 : 3 ... 5 ... 1

Pad aflezen uit pointermatrix

Voorbeeld: kortste pad van knoop 3 naar knoop 1

- Stap 2: kortste pad van 3 naar 5: rij 3 kolom 5 van P-matrix = 4 → voorganger van 5 in kortste pad van 1 naar 3 is knoop 4

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 5 & 5 & 0 & 0 & 4 \\ 5 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dus van 3 naar 1 : 3 ... 4 ... 5 ... 1

Pad aflezen uit pointermatrix

Voorbeeld: kortste pad van knoop 3 naar knoop 1

- Stap 3: kortste pad van 3 naar 4: rij 3 kolom 4 van P-matrix = 0 dus geen tussenliggende stap tussen 3 en 4 in kortste pad van 3 naar 1

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 5 & 5 & 0 & 0 & 4 \\ 5 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dus van 3 naar 1 : 3 → 4 ... 5 ... 1

Pad aflezen uit pointermatrix

Voorbeeld: kortste pad van knoop 3 naar knoop 1

- Stap 4: kortste pad van 4 naar 5: rij 4 kolom 5 van P-matrix = 0 dus geen tussenliggende stap

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 5 & 5 & 0 & 0 & 4 \\ 5 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dus van 3 naar 1 : 3 → 4 → 5 ... 1

Pad aflezen uit pointermatrix

Voorbeeld: kortste pad van knoop 3 naar knoop 1

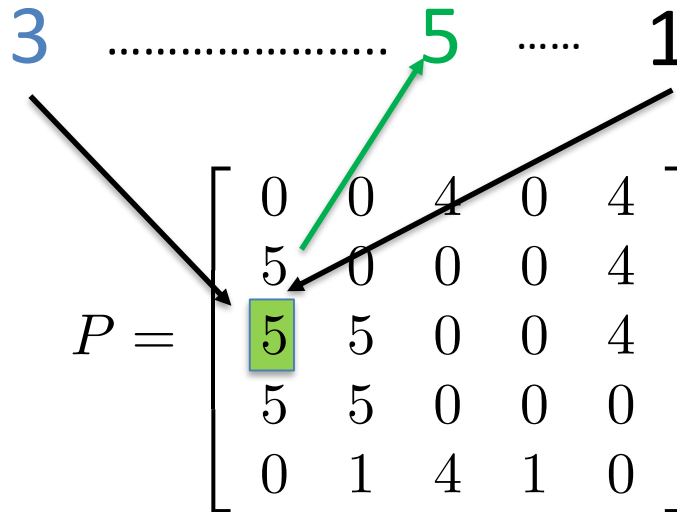
- Stap 5: kortste pad van 5 naar 1: rij 5 kolom 1 van P-matrix = 0 dus geen tussenliggende stap
- Alle tussenliggende stappen zijn gecontroleerd, dus pad is gevonden

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 5 & 5 & 0 & 0 & 4 \\ 5 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ \text{0} & 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dus van 3 naar 1 : 3 → 4 → 5 → 1

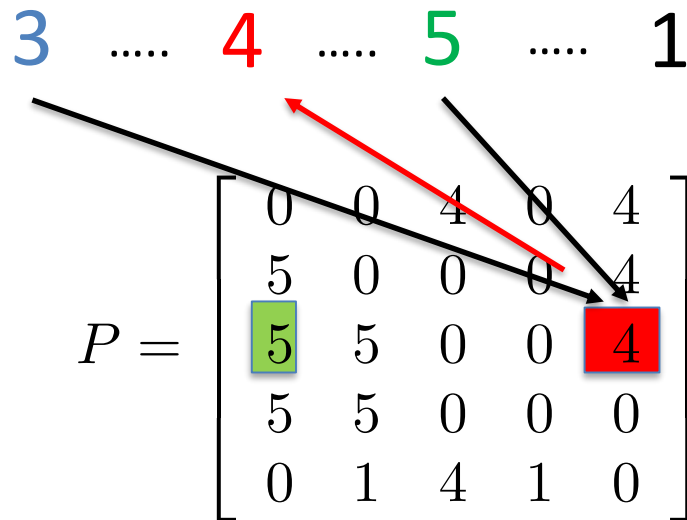
Pad aflezen uit pointermatrix

- Voorbeeld: kortste pad van knoop 3 naar knoop 1



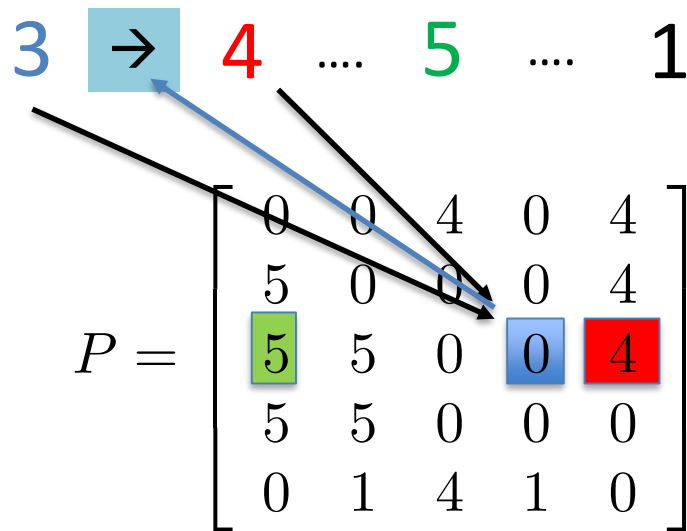
Pad aflezen uit pointermatrix

- Voorbeeld: kortste pad van knoop 3 naar knoop 1



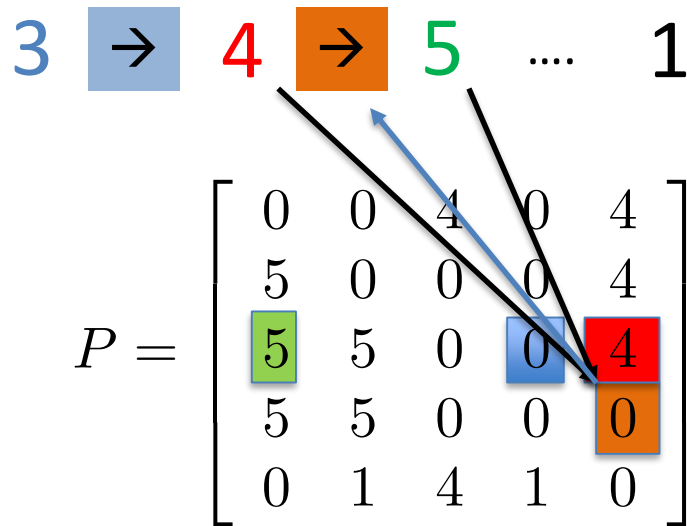
Pad aflezen uit pointermatrix

- Voorbeeld: kortste pad van knoop 3 naar knoop 1



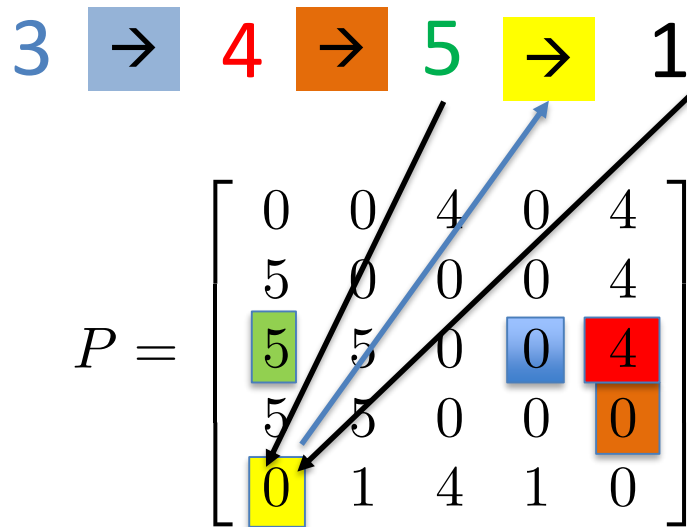
Pad aflezen uit pointermatrix

- Voorbeeld: kortste pad van knoop 3 naar knoop 1



Pad aflezen uit pointermatrix

- Voorbeeld: kortste pad van knoop 3 naar knoop 1



Lengte van pad berekenen

- Afstanden tussen knooppunten berekenen uit gewichtenmatrix
- Voorbeeld: pad van knoop 3 naar knoop 1 is:

$3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 1$ en

heeft gewicht

$$4 + 3 + 3 = 10$$

		naar				
		1	2	3	4	5
van	1	0	1	∞	1	5
	2	9	0	3	2	∞
	3	∞	∞	0	4	∞
	4	∞	∞	2	0	3
	5	3	∞	∞	∞	0

Als je D-matrices bewaart, kan je daar ook de lengte van de paden aflezen