Paul Erdős

Simon Lemal

13 octobre 2019

1 « My brain is open ! »

> I want to be giving a lecture, finishing up an important proof on the blackboard, when someone in the audience shouts out, 'What about the general case?'. I'll turn to the audience and smile, 'I'll leave that to the next generation,' and then I'll keel over. (Paul Erdős)

Paul Erdős (prononcé "air-dish") est née le 26 Mars 1913 à Budapest de parents Juifs et professeurs de mathématiques. À l'âge de quatre ans, il savait multiplier mentalement des nombres à trois chiffres et découvrait les nombres négatifs. Il est entré à l'université de Budapest à l'âge de 17 ans et à présenté en 1934 sa thèse de doctorat. La même année, il quittait la Hongrie suite à la montée de l'antisémitisme. Il a alors réalisé un post-doctorat de quatre ans à l'université de Manchester, avant d'émigrer aux États-Unis et de passer un an à l'Institut d'étude avancée de Princeton.

Figure 1 – Paul Erdős

Durant les années 1940, il a entamé sa vie de mathématicien nomade, voyageant d'une université à l'autre, dans plus de vingt pays, déclinant les offres d'emplois à plein temps afin de garder sa liberté d'aller où bon lui semblait, travaillant avec qui il souhaitait. Durant cette période, il ne transportait avec lui qu'une valise et ne vivait que du peu qu'il gagnait en donnant des conférences. Il avait pour habitude de débarquer sur le seuil de la maison de collègues mathématiciens en déclarant « My brain is open ! », et de rester loger et travailler avec celui-ci tant qu'il lui apportait des défis mathématiques (ce qui durait en général moins d'une semaine, Erdős travaillait environ vingt heures par jour et ses hôtes étaient rarement capables de suivre son rythme très longtemps). Au cours du demi-siècle qu'à duré sa vie de nomade, Erdős a publié pas moins de 1500 papiers avec 507 collaborateurs. Il est un contre-exemple à l'idée reçue selon laquelle il faut être jeune pour résoudre des problèmes mathématiques.

2 « Le désordre total n'existe pas. »

« Why are numbers beautiful? It's like asking why is Ludwig van Beethoven's Ninth Symphony beautiful. If you don't see why, someone can't tell you. I know numbers are beautiful. If they aren't beautiful, nothing is. » (Paul Erdős)

L'une des affinité d'Erdős était la théorie des nombres et les nombres premiers. En 1932, Erdős se fait un nom dans le monde mathématique en publiant une preuve élémentaire du théorème de Tchebychev. Cette preuve peut être trouvée dans [2].

Théorème (Postulat de Bertrand - Théorème de Tchebychev)**.** *Pour tout entier $n > 1$, il existe un nombre premier p tel que $n < p < 2n$.*

On peut également citer sa preuve par l'absurde de la divergence de la somme des inverses des nombres premiers, démontré par Euler. À nouveau, la preuve se lit facilement et est disponible dans [2].

Théorème. *La série* $\displaystyle\sum_{p \text{ premier}} \frac{1}{p}$ *diverge.*

En 1948, il publie, avec Atle Selberg, une preuve élémentaire du théorème des nombres premiers.

Théorème. *Si $\pi(x)$ désigne le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x, on a* $\pi(x) \sim \dfrac{x}{\ln(x)}$.

Un autre de ses centres d'intérêt était la théorie de Ramsey, branche de la combinatoire qui tente de répondre à des questions de la forme « Combien d'éléments d'une certaine structure doit-on considérer pour garantir qu'une certaine propriété soit vérifiée ? » ([5]). En voici un exemple.

Théorème (Erdős-Szekeres)**.** *Toute suite de $(r-1)(s-1)+1$ réels contient une sous-suite croissante de longueur r ou une sous-suite décroissante de longueur s.*

Démonstration. On désigne par n_i les éléments de la suite. Pour tout $i \in \{1, \ldots, (r-1)(s-1)+1\}$, soit a_i (resp. b_i) la longueur de la plus longue sous-suite croissante (resp. décroissante) se terminant en n_i. Si $n_{i+1} \geq n_i$, alors $a_{i+1} > a_i$. Sinon $n_{i+1} \leq n_i$ donc $b_{i+1} > b_i$. Ainsi, tous les n_i ont des coordonnées (a_i, b_i) différentes. Or, si on suppose l'énoncé faux, il n'y a que $(r-1)(s-1)$ coordonnées différentes pour $(r-1)(s-1)+1$ points. □

En 1932, Esther Klein a démontré le théorème suivant.

Théorème (Happy Ending theorem)**.** *Tout ensemble de cinq points du plan en position générale contient un sous-ensemble de quatre points formant les sommets d'un quadrilatère convexe.*

Démonstration. Si l'enveloppe convexe de l'ensemble est un pentagone ou un quadrilatère, c'est triviale. Sinon, c'est un triangle et il existe deux points à l'intérieur de l'enveloppe. La droite passant par ces deux points sépare le plan en deux parties, dont une contient forcement deux des trois sommets se trouvant à la frontière de l'enveloppe. Les deux points à l'intérieur et les deux à la frontière forment les sommets d'un quadrilatère convexe.

□

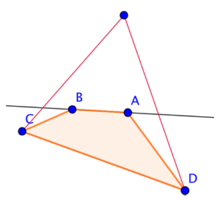

FIGURE 2 – La troisième configuration possible.

Erdős et Szekeres ont alors tenté de le généraliser. Bien qu'ils soient arrivés à traiter de petits cas, le cas général résiste toujours.

Conjecture (Erdős-Szekeres)**.** *Tout ensemble de* $1 + 2^{n-2}$ *points du plan en position générale contient un sous-ensemble de* n *points formant les sommets d'un polygone convexe.*

Néanmoins, Szekeres est tout de même parvenu à montrer que pour tout n, tout ensemble de taille assez grande vérifie cette propriété. Ce résultat fut suffisamment impressionnant pour lui faire gagner la main de Klein, d'où le nom de « Happy Ending problem ».

3 « Straight from the BOOK ! »

> Mathematical truth is immutable; it lies outside physical reality … This is our belief; this is our core motivating force. Yet our attempts to describe this belief to our nonmathematical friends are akin to describing the Almighty to an atheist. (Joel Spencer)

Erdős se classait dans l'école des platoniciens, c'est-à-dire des découvreurs. En effet, il pensait que le S.F. (le Fasciste Suprême, c'est comme ça qu'il appelait Dieu) possédait un livre transfini (i.e. dont les pages sont indexés par un ensemble de cardinal $\aleph_1$) contenant les plus belles démonstrations de tous les énoncés mathématiques possibles. Lorsqu'il voulait complimenter une preuve particulièrement élégante, il la qualifiait de « Straight from the BOOK ! », signifiant que cette preuve était probablement dans le livre du S.F.

Références

[1] Paul HOFFMAN. *The Man Who Loved Only Numbers*. Hachette Books, déc. 2014.

[2] Günter M. Ziegler MARTIN AIGNER. *Proofs from the BOOK*. 6e éd. Springer, juin 2018.

[3] *Paul Erdős | Hungarian mathematician | Britannica*. URL : `https://www.britannica.com/biography/Paul-Erdos` (visité le 13/10/2019).

[4] *The Mathematical Nomad, Paul Erdős - Cantor's Paradise - Medium*. URL : `https://medium.com/cantors-paradise/the-mathematical-nomad-paul-erd%C5%91s-3163b70a2863` (visité le 13/10/2019).

[5] *Wikipedia*. URL : `https://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page` (visité le 13/10/2019).