

Autour de l'inégalité isopérimétrique

Simon Lemal

28 décembre 2020

Table des matières

1 Définitions préliminaires	1
1.1 Courbe fermée	1
1.2 Longueur d'un arc régulier de courbe	2
1.3 Aire enclose par une courbe fermée	3
2 En route vers l'inégalité isopérimétrique	5
3 Un théorème de Fenchel	7

1 Définitions préliminaires

1.1 Courbe fermée

Dans cette section, nous posons les définitions dont nous aurons besoin pour la suite. Les démonstrations des équivalences entre les différentes définitions peuvent être trouvées dans [1].

Définition 1.1. Un *arc régulier de courbe* de \mathbb{R}^n est un couple (I, f) où I est un intervalle ouvert de \mathbb{R} et $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une immersion de classe C^1 .

Définition 1.2. Deux arcs réguliers de courbes (I, f) et (J, g) sont équivalents si il existe un difféomorphisme C^1 bijectif $\theta: I \rightarrow J$ tel que $f = g \circ \theta$.

Définition 1.3. Une *courbe fermée simple et régulière* de \mathbb{R}^n est une sous-variété C^1 de \mathbb{R}^n , de dimension 1, connexe et compacte. De manière équivalente, une courbe fermée simple et régulière de \mathbb{R}^n est une partie de \mathbb{R}^n difféomorphe à S^1 .

Dans la suite, nous omettrons l'expression "simple et régulière" et parlerons simplement de *courbe fermée*.

Nous pouvons donner une définition équivalente, plus utile en pratique.

Définition 1.4. Une *courbe fermée simple et régulière* de \mathbb{R}^n est une classe d'équivalence d'arcs réguliers de courbe pouvant être représentée par un paramétrage (\mathbb{R}, f) où f est T -périodique et injectif sur $[0, T[$.

Dans la suite, nous identifierons régulièrement la courbe à son paramétrage T -périodique. Ce faisant, nous choisissons une orientation de la courbe. Lorsque dans la suite nous définirons l'aire (orientée) d'une courbe, son signe dépendra de l'orientation choisie.

1.2 Longueur d'un arc régulier de courbe

Définition 1.5. Étant donné un arc régulier de courbe $C = (I, f)$, on définit sa *longueur* par

$$\int_I |f'(t)| dt.$$

Cette intégrale est toujours strictement positive mais peut éventuellement être infinie.

Proposition 1.1. Si (I, f) et (J, g) sont deux paramétrages équivalents, ils ont la même longueur.

Démonstration. Soit $\theta: I \rightarrow J$ un difféomorphisme C^1 bijectif telle que $f = g \circ \theta$. Alors $\int_I |f'(t)| dt = \int_I |g'(\theta(t))| |\theta'(t)| dt = \int_J |g'(s)| ds$ par le théorème de changement de variable. \square

Définition 1.6. Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une courbe fermée, on définit sa *longueur* comme étant la longueur de l'arc de courbe $(]0, T[, f)$. Il est évident que cette quantité est égale à

$$\int_{[0, T]} |f'(t)| dt.$$

Puisqu'il s'agit de l'intégrale sur un compact d'une fonction continue, cette quantité est finie.

Proposition 1.2. La longueur d'une courbe fermée est indépendante du paramétrage choisi.

Démonstration. Soient $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ deux paramétrages d'une même courbe et T, T' les périodes respectives de f, g . Il existe $t_0 \in [0, T[$ tel que $f(t_0) = g(0)$. Alors, comme f est T -périodique, on a

$$\int_0^T |f'(t)| dt = \int_{t_0}^{t_0+T} |f'(t)| dt = \int_0^{T'} |g'(s)| ds$$

où la deuxième égalité a lieu car $(]t_0, t_0 + T[, f)$ et $(]0, T'[, g)$ sont deux paramétrages équivalents. \square

Exemple. Calculons la longueur du cercle de rayon r . Un paramétrage classique est $f(t) = (r \cos(t), r \sin(t))$. On a $f'(t) = (-r \sin(t), r \cos(t))$ donc $|f'(t)| = r$ pour tout t . De plus f est 2π -périodique, donc la longueur du cercle vaut

$$\int_0^{2\pi} |f'(t)| dt = 2\pi r.$$

La définition de longueur peut s'interpréter à la Cauchy-Riemann. La proposition suivante et sa preuve sont un cas particulier de la proposition 1.5.3 de [4].

Proposition 1.3 (Cauchy-Riemann). Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe fermée de longueur L . Si pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a un découpage

$$0 = t_{m,0} < t_{m,1} < \dots < t_{m,J_m} = T$$

de $[0, T]$ tel que

$$\sup_{1 \leq j \leq J_m} |t_{m,j} - t_{m,j-1}| \rightarrow 0$$

quand $m \rightarrow \infty$, alors

$$\sum_{j=1}^{J_m} |f(t_{m,j}) - f(t_{m,j-1})| \rightarrow L$$

quand $m \rightarrow \infty$.

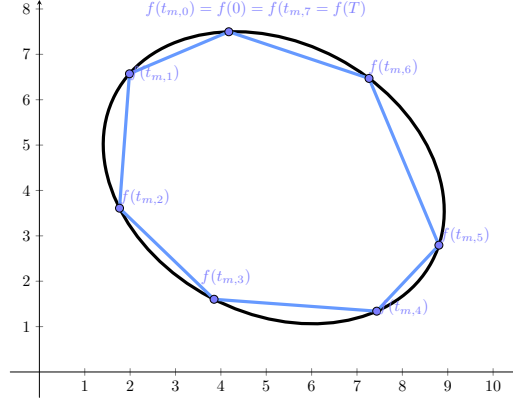


FIGURE 1 – Illustration de l'interprétation de la longueur

Démonstration. On a

$$\sum_{j=1}^{J_m} |f(a_{m,j}) - f(a_{m,j-1})| = \int_a^b \sum_{j=1}^{J_m} \frac{|f(a_{m,j}) - f(a_{m,j-1})|}{a_{m,j} - a_{m,j-1}} \chi_{[a_{m,j-1}, a_{m,j}[}$$

Posons

$$g_m(t) = \sum_{j=1}^{J_m} \frac{|f(a_{m,j}) - f(a_{m,j-1})|}{a_{m,j} - a_{m,j-1}} \chi_{[a_{m,j-1}, a_{m,j}[}$$

Soit $t \in [0, T[$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe un unique j_m tel que $t \in [t_{m,j-1}, t_{m,j}[$ et

$$g_m(t) = \frac{|f(t_{m,j_m}) - f(t_{m,j_m-1})|}{t_{m,j_m} - t_{m,j_m-1}}.$$

Les suites t_{m,j_m} et t_{m,j_m-1} convergent vers t donc

$$\frac{|f(t_{m,j}) - f(t_{m,j-1})|}{t_{m,j} - t_{m,j-1}} \rightarrow f'(t), \quad \text{i.e.} \quad g_m(t) \rightarrow f'(t).$$

De plus

$$|g_m(t)| \leq \sup_{[0,T]} |f'|$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, T[$. La conclusion résulte donc du théorème de la convergence dominée de Lebesgue. \square

1.3 Aire enclose par une courbe fermée

Nous définissons la notion d'aire enclose par une courbe fermée. Bien que la définition suivante semble peu intuitive, elle est motivée par la formule de Green-Riemann.

Définition 1.7. Étant donné une courbe orientée (\mathbb{R}, f) de \mathbb{R}^2 , on définit l'*aire orientée enclose* par la courbe par

$$\frac{1}{2} \int_0^T f_1(t)f_2'(t) - f_2(t)f_1'(t) dt.$$

Remarque. L'expression $f_1(t)f_2'(t) - f_2(t)f_1'(t)$ correspond au volume des vecteurs $f(t)$ et $f'(t)$, habituellement noté $\text{vol}(f(t), f'(t))$.

Proposition 1.4. *Si (\mathbb{R}, f) et (\mathbb{R}, g) sont deux paramétrages équivalents d'une courbe orientée, ils définissent la même aire.*

Démonstration. Soient T et T' les périodes respectives de f et g . Soit $\theta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un difféomorphisme tel que $f = g \circ \theta$. Quitte à translater, $f(0) = g(0)$. Alors,

$$\begin{aligned} \int_0^T f_1(t)f_2'(t) - f_2(t)f_1'(t)dt &= \int_0^T (g_1(\theta(t))g_2'(\theta(t)) - g_2(\theta(t))g_1'(\theta(t)))\theta'(t)dt \\ &= \int_0^{T'} g_1(t)g_2'(t) - g_2(t)g_1'(t)dt. \end{aligned}$$

□

Exemple. Calculons l'aire enclose par le cercle de rayon r . En reprenant le paramétrage de l'exemple précédent, on a $\text{vol}(f, f') = r^2(\cos^2(t) + \sin^2(t)) = r^2$. Ainsi l'aire vaut

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 dt = \pi r^2.$$

Cette définition peut s'interpréter à la Cauchy-Riemann. La démonstration est identique à celle de la section précédente.

Proposition 1.5 (Cauchy-Riemann). *Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe fermée d'aire orientée A . Si pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a un découpage*

$$0 = t_{m,0} < t_{m,1} < \dots < t_{m,J_m} = T$$

de $[0, T]$ tel que

$$\sup_{1 \leq j \leq J_m} |t_{m,j} - t_{m,j-1}| \rightarrow 0$$

quand $m \rightarrow \infty$, alors

$$\sum_{j=1}^{J_m} \frac{1}{2} [f_1(t_{m,j-1})(f_2(t_{m,j}) - f_2(t_{m,j-1})) - f_2(t_{m,j-1})(f_1(t_{m,j}) - f_1(t_{m,j-1}))] \rightarrow A$$

quand $m \rightarrow \infty$.

Proposition 1.6. *Si (\mathbb{R}, f) est une courbe fermée, on a*

$$\int_0^T f_1(t)f_2'(t)dt = - \int_0^T f_2(t)f_1'(t)dt.$$

En particulier, l'aire orientée enclose par f vaut

$$\int_0^T f_1(t)f_2'(t)dt = - \int_0^T f_2(t)f_1'(t)dt.$$

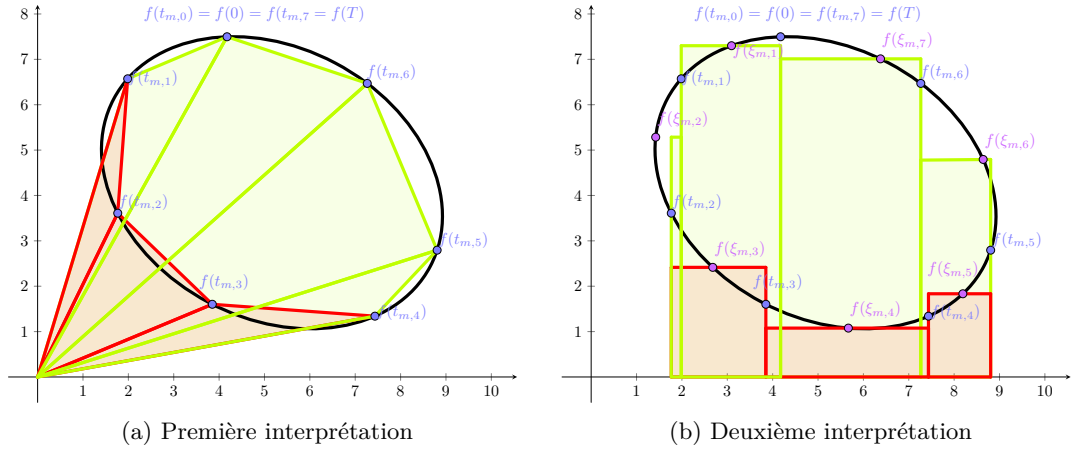


FIGURE 2 – Illustration des interprétations de l'aire

Démonstration. $f_1(t)f_2(t)$ est une primitive de $f_1(t)f_2'(t) + f_1'(t)f_2(t)$ donc

$$\int_0^R f_1(t)f_2'(t) + f_1'(t)f_2(t)dt = [f_1(t)f_2(t)]_0^T = 0.$$

On conclut par linéarité de l'intégrale. □

Cette nouvelle définition peut aussi s'interpréter à la Cauchy-Riemann.

Proposition 1.7 (Cauchy-Riemann). *Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe fermée d'aire orientée A . Si pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a un découpage*

$$0 = t_{m,0} < t_{m,1} < \dots < t_{m,J_m} = T$$

de $[0, T]$ tel que

$$\sup_{1 \leq j \leq J_m} |t_{m,j} - t_{m,j-1}| \rightarrow 0$$

quand $m \rightarrow \infty$. Fixons des points $\xi_{m,j} \in [t_{m,j-1}, t_{m,j}]$. Alors

$$\sum_{j=1}^{J_m} -f_2(\xi_{m,j})(f_1(t_{m,j}) - f_1(t_{m,j-1})) \rightarrow A$$

quand $m \rightarrow \infty$.

2 En route vers l'inégalité isopérimétrique

Nous sommes maintenant en mesure de formuler et démontrer l'inégalité isopérimétrique pour les courbes fermées. La preuve présentée est due à E. Schmidt et peut être trouvée dans [2].

Théorème 2.1. *Soit (\mathbb{R}, f) une courbe fermée de \mathbb{R}^2 d'aire (orientée) A et de longueur L . Alors, on a*

$$A \leq \frac{L^2}{4\pi}$$

avec égalité si et seulement si la courbe est un cercle (orienté dans le sens trigonométrique).

Lemme 2.2. Si (\mathbb{R}, f) est une courbe fermée de \mathbb{R}^n (resp. de \mathbb{R}^2), sa longueur (resp. son aire orientée) est indépendante du repère orthonormé (resp. du repère orthonormé orienté) choisi.

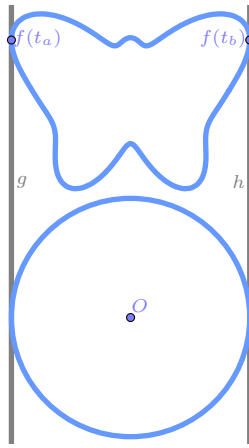
Démonstration. Pour la longueur, f' est indépendant de l'origine et $|f'|$ est indépendant de la base choisie.

Pour l'aire, comme

$$\int_0^T f'_1(t)dt = f_1(T) - f_1(0) = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^T f'_2(t)dt = f_2(T) - f_2(0) = 0,$$

l'aire est indépendante de l'origine. Comme $f_1 f'_2 - f_2 f'_1 = \text{vol}(f, f')$, elle est également indépendante de la base choisie. \square

Démonstration de l'inégalité isopérimétrique. Fixons un repère orthonormé. Étant continu et périodique, f_1 atteint des extrema globaux $a < b$ en $t_a, t_b \in [0, T[$. On définit les droites g et h ayant respectivement pour équation $x = a$ et $x = b$. Clairement ces deux droites sont tangentes à la courbe car f'_1 s'annule en ses extrema. La courbe est coincée entre ces deux droites. On construit un cercle tangent à ces deux droites et on dénote son rayon par r .



Sans perte de généralité, on peut supposer que f est paramétré par la longueur d'arc, que $t_a = 0$ et que le centre du cercle est l'origine du repère. Soit $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ un paramétrage du cercle dans le sens trigonométrique tel que $\gamma_1 = f_1$. Alors,

$$\gamma_2(t) = \begin{cases} -\sqrt{r^2 - f_1^2(t)} & 0 \leq t \leq t_b, \\ \sqrt{r^2 - f_1^2(t)} & t_b \leq t \leq T. \end{cases}$$

On sait, par définition de l'aire enclose, que

$$\begin{aligned} A &= \int_0^L f_1(t) f'_2(t) dt = \int_0^L \gamma_1(t) f'_2(t) dt, \\ \pi r^2 &= - \int_0^L \gamma_2(t) \gamma'_1(t) dt = - \int_0^L \gamma_2(t) f'_1(t) dt. \end{aligned}$$

En additionnant ces deux équations, on a

$$A + \pi r^2 = \int_0^L \gamma_1(t) f'_2(t) - \gamma_2(t) f'_1(t) dt \leq \int_0^L |\gamma(t)| \cdot |f'(t)| dt = \int_0^L r dt = Lr$$

par Cauchy-Schwarz et par définition d'un paramétrage par la longueur d'arc. Par l'inégalité des moyennes arithmétiques et géométriques, on a $\sqrt{A\pi r^2} \leq \frac{1}{2}Lr$, qui est équivalent à $A \leq \frac{L^2}{4\pi}$.

Clairement, si la courbe f considérée est un cercle, on a égalité puisque $A = \pi r^2$ et $L = 2\pi r$. Réciproquement, on a égalité seulement si $A = \pi r^2$ (cas d'égalité de l'inégalité des moyennes) et $f_1 = \lambda f'_2, \gamma_2 = -\lambda f'_1$ pour $\lambda = \frac{|\gamma|}{|f'|} = r$. La première égalité implique que r est indépendant du repère. La seconde implique en particulier que $f_1 = r f'_2$. En travaillant dans le repère $(O; e_2, -e_1)$, cette même condition implique $f_2 = -r f'_1$. Comme $f_1'^2 + f_2'^2 = 1$, on a $|f| = f_1^2 + f_2^2 = r^2$ donc la courbe f est un cercle. \square

Remarque. L'inégalité isopérimétrique se généralise à l'espace euclidien de dimension n \mathbb{R}^n de la manière suivante. Si S est une hypersurface fermée (une sous-variété difféomorphe à S^{n-1}), $V = \text{vol}^n S$ son volume enclos et $A = \text{surf}^{n-1} S$ son aire, on a

$$\left(\frac{A}{\text{surf}^{n-1} S^{n-1}} \right)^n \geq \left(\frac{V}{\text{vol}^n S^{n-1}} \right)^{n-1}.$$

En d'autres termes, parmi toutes les hypersurfaces fermées d'aire donnée, c'est la sphère qui enclose le plus grand volume.

Cela explique notamment pourquoi les bulles de savons et les gouttes d'eau prennent une forme sphérique lorsqu'elles ne sont soumises à aucune contrainte.

Remarque. Il existe également des résultats d'isopérimétrie pour les polygones. Les philosophes grecs savaient que parmi tous les n -gones de périmètre donné, c'est le n -gone régulier qui enclose la plus grande surface.

Ces résultats d'isopérimétrie expliquent pourquoi de nombreuses villes ont des remparts circulaires ou en forme de polygones réguliers.

3 Un théorème de Fenchel

Définition 3.1. Soit (\mathbb{R}, f) une courbe fermée de \mathbb{R}^n de classe C^2 paramétrée par la longueur d'arc. La *courbure* de f en t est définie par $\kappa(t) = |f''(t)|$.

La *courbure totale* de f est définie par

$$\tau = \int_0^L \kappa(t) dt.$$

Définition 3.2. Une *courbe rectifiable* est une courbe (c'est à dire l'image continue d'un intervalle) pour laquelle il est possible de définir une notion de longueur. Cette définition étant fort générale, nous nous restreindrons à une classe de fonctions plus facile à manipuler.

Nous appellerons *courbe fermée rectifiable* la donnée d'une fonction $g: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 telle que $g(0) = g(T)$. La notion de courbe fermée rectifiable est donc plus générale que la notion de courbe fermée puisque l'on n'impose pas la non annulation de la dérivée.

En procédant comme pour les courbes fermées, on peut définir une notion de longueur pour les courbes rectifiables.

Dans la suite, on va régulièrement confondre une courbe fermée rectifiable $g: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ et son image $\Gamma = g([0, T])$.

Remarque. Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une courbe fermée de classe C^2 , $f': [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une courbe fermée rectifiable. Si f est paramétrée par la longueur d'arc, f' est une courbe fermée rectifiable de S^{n-1} . De plus, la longueur de f' est la courbure totale de f .

Le théorème de Fenchel s'énonce comme suit.

Théorème 3.1. Soit (\mathbb{R}, f) une courbe fermée de \mathbb{R}^n de courbure totale τ . Alors, on a

$$\tau \geq 2\pi$$

avec égalité si et seulement si f est une courbe plane convexe.

Nous ne démontrerons pas le cas d'égalité, il demande des outils non développés ici. La démonstration complète est disponible dans [2].

Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 3.2. Si $\Gamma = \gamma([0, T])$ est une courbe fermée rectifiable de la sphère S^{n-1} (vue comme sous-variété de \mathbb{R}^n), de longueur $L < 2\pi$, alors il existe un point $m \in S^{n-1}$ tel que pour tout $x \in \Gamma$, la distance géodésique entre m et x , notée \overline{mx} , est inférieure à $\frac{L}{4}$.

Remarque. Si a, b sont deux points de S^{n-1} tels que $\overline{ab} < \pi$, on définit leur milieu comme étant le point $m \in S^{n-1}$ vérifiant $\overline{am} = \overline{bm} = \frac{1}{2}\overline{ab}$. Si x est un point de S^{n-1} tel que $\overline{mx} \leq \frac{\pi}{2}$ et x' son symétrique par rapport à m , on a

$$\overline{x'a} = \overline{xb} \quad \text{et} \quad \overline{x'x} = 2\overline{mx}.$$

Par l'inégalité triangulaire, on a

$$2\overline{mx} = \overline{x'x} \leq \overline{x'a} + \overline{ax} = \overline{ab} + \overline{bx}.$$

Démonstration. Soient a, b deux points de Γ séparant la courbe en deux arcs de même longueur. Si \widehat{ab} désigne la longueur d'arc entre a et b le long de Γ , on a $\overline{ab} \leq \widehat{ab} \leq \frac{L}{2} < \pi$. Prenons m milieu de l'arc ab . On a $\overline{ma} = \overline{mb} \leq \frac{L}{4} < \frac{\pi}{2}$.

Si $x \in \Gamma$ est tel que $\overline{mx} \leq \frac{\pi}{2}$, alors, par la remarque précédant cette preuve, on a

$$2\overline{mx} \leq \overline{ax} + \overline{bx} \leq \widehat{ax} + \widehat{bx} \leq \frac{L}{2} < \pi.$$

Ainsi, la fonction (continue) $x \mapsto 2\overline{mx}$, définie sur Γ , est à valeur dans $[0, \frac{L}{2}] \cup]\pi, 2\pi]$. Or Γ est connexe, $a \in \Gamma$ et $2\overline{ma} < \pi$ donc la fonction est en fait à valeur dans $[0, \frac{L}{2}]$. \square

Démonstration du théorème de Fenchel. Comme nous l'avons déjà remarqué, f' est une courbe fermée rectifiable de S^{n-1} dont la longueur vaut τ .

Soit $v \in S^{n-1}$ et considérons l'application $\langle f, v \rangle$. Cette application est C^1 et L périodique donc par le Lemme de Rolle, il existe $t_v \in [0, L[$ tel que $\langle v, f'(t_v) \rangle = 0$. Cela signifie que la distance géodésique entre v et $f'(t_v)$ est égale à $\frac{\pi}{2}$. En contraposant le lemme, on en déduit que la longueur de la courbe f' est supérieure ou égale à 2π , i.e. $\tau \geq 2\pi$. \square

Références

- [1] Marcel BERGER et Bernard GOSTIAUX. *Géométrie différentielle*. Maîtrise de Mathématiques. Paris : Armand Colin, 1972.
- [2] S. S. CHERN. « Curves and Surfaces in Euclidean Space ». In : *Studies in Global Geometry and Analysis*. Sous la dir. de S. S. CHERN. MAA Studies in Mathematics 4. Washington, DC : Mathematical Association of America, 1967.
- [3] *Isopérimétrie*. URL : <https://fr.wikipedia.org/wiki/Isop%C3%A9rim%C3%A9trie> (visité le 02/12/2020).
- [4] Jean-Pierre SCHNEIDERS. « Analyse Complexe ». Notes de cours. 2020.