Projeto de Sistemas de Controle pela Resposta em Frequência

Geralmente, as especificações de desempenho de um sistema são dadas em termos de resposta transitória. Resposta em frequência fornece a informação sobre a resposta transitória apenas indiretamente. Isto é, o desempenho da resposta transitória é especificado em termos da margem de fase, margem de ganho, amplitude de pico de ressonância (estas dão uma avaliação do amortecimento do sistema); frequência de cruzamento de ganho, frequência de ressonância e a banda passante (estas dão uma estimativa da velocidade da resposta transitória); e constante de erro estático (estas fornecem a precisão em regime permanente). As especificações no domínio de frequência podem ser facilmente encontradas pelo método do diagrama de Bode.

Depois de projetar a malha aberta pela técnica de resposta em frequência, os pólos e os zeros de malha fechada podem ser encontrados. As características da resposta transitória devem ser verificadas para avaliar se o sistema projetado satisfaz os requisitos no domínio de tempo. Se isso não ocorrer, o compensador deverá ser modificado e a análise da resposta transitória devera ser repetida até que seja obtido um resultado satisfatório.

Basicamente, há duas técnicas de projeto no domínio de frequência: diagramas de Bode e gráficos polares. O uso de diagramas de Bode é mais conveniente.

Os requisitos da resposta em frequência de malha aberta:

- o ganho na região de baixa frequência deve ser suficientemente elevado para garantir o erro estacionário especificado;
- a inclinação da assíntota da curva Lm deve ser -20 dB/década nas vizinhanças da frequência de cruzamento de ganho para garantir uma margem de fase adequada;
- na região de alta frequência, o ganho deve ser atenuado tão rapidamente quando possível, para minimizar os efeitos de ruído.

A compensação por avanço de fase melhora a velocidade da resposta transitória, porém ela pode acentuar os efeitos dos ruídos de alta frequência. A compensação por atraso de fase aumenta a precisão do regime estacionário, porém aumenta o tempo de acomodação. A compensação por atraso-avanço de fase combina as características da compensação por avanço de fase e da compensação por atraso de fase. Essa compensação aumenta a ordem do sistema em duas unidades (a menos que ocorra o cancelamento entre os zeros do compensador e os pólos da planta), o que significa que o sistema fica mais complexo e fica mais difícil controlar o comportamento da resposta transitória.

Compensação por Avanço de Fase

A função de transferência do compensador por avanço de fase:

$$G_C(s) = K \cdot \frac{(T \cdot s + 1)}{(\alpha \cdot T \cdot s + 1)} \qquad 0 < \alpha < 1 \qquad (1)$$

As frequência de canto são:

$\omega_1 = \dfrac{1}{T}$ corresponde ao zero do compensador;

$\omega_2 = \dfrac{1}{\alpha \cdot T}$ corresponde ao polo do compensador.

Para $K = 0{,}1$; $\alpha = 0{,}1$; $\omega_1 = 1$ e $\omega_2 = 10$, os gráficos logarítmicos do compensador por avanço de fase são mostrados na Fig. 1. A inclinação da assíntota entre as frequência de canto é +20dB/década. A frequência na qual ocorre o maior ângulo de fase do compensador, φ_m, é denominada ω_m. A seguir é deduzida a fórmula para a determinação de ω_m.

$$G_c(j \cdot \omega) = K \cdot \frac{(T \cdot j \cdot \omega + 1)}{(\alpha \cdot T \cdot j \cdot \omega + 1)} = K \cdot \frac{(T \cdot j \cdot \omega + 1) \cdot (-\alpha \cdot T \cdot j \cdot \omega + 1)}{(\alpha \cdot T \cdot j \cdot \omega + 1) \cdot (-\alpha \cdot T \cdot j \cdot \omega + 1)} =$$

$$= K \cdot \frac{\left(\alpha \cdot T^2 \cdot \omega^2 + T \cdot j \cdot \omega - \alpha \cdot T \cdot j \cdot \omega + 1\right)}{\left[1 + (\alpha \cdot T \cdot \omega)^2\right]} = K \cdot \frac{\left(1 + \alpha \cdot T^2 \cdot \omega^2\right) + T \cdot \omega \cdot j \cdot (1 - \alpha)}{\left[1 + (\alpha \cdot T \cdot \omega)^2\right]}$$

$$\angle G_c(j\omega) = a\tan\left[\frac{T \cdot \omega \cdot (1 - \alpha)}{1 + \alpha \cdot T^2 \cdot \omega^2}\right] \qquad (2)$$

A função arco-tangente cresce monotonamente, por isso, para achar o valor de ω que maximiza o ângulo de fase, pode-se deduzir a derivada primeira do seu argumento em relação a ω e iguala-la a zero:

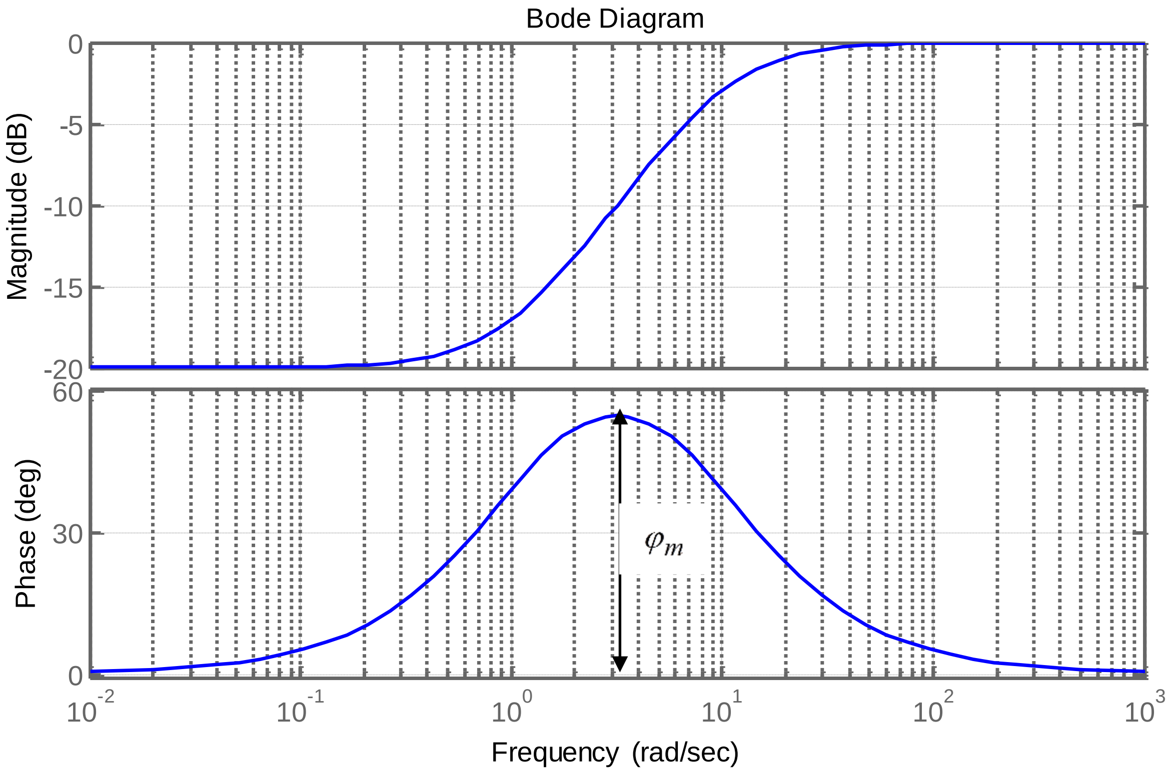


Fig. 1. Gráficos logarítmicos do compensador por avanço de fase; φ_m ocorre na frequência ω_m.

$$\frac{d}{d\omega}\left[\frac{T\cdot\omega\cdot(1-\alpha)}{1+\alpha\cdot T^2\cdot\omega^2}\right]=\frac{T\cdot(1-\alpha)\cdot\left(1+\alpha\cdot T^2\cdot\omega^2\right)-T\cdot\omega\cdot(1-\alpha)\cdot\frac{d}{d\omega}\left(1+\alpha\cdot T^2\cdot\omega^2\right)}{\left(1+\alpha\cdot T^2\cdot\omega^2\right)^2}=$$

$$=\frac{T\cdot(1-\alpha)\cdot\left(1+\alpha\cdot T^2\cdot\omega^2\right)-T\cdot\omega\cdot(1-\alpha)\cdot 2\cdot\omega\cdot\alpha\cdot T^2}{\left(1+\alpha\cdot T^2\cdot\omega^2\right)^2}=0$$

Igualando o numerador ao zero, obtém-se:

$$T\cdot(1-\alpha)\cdot\left(1+\alpha\cdot T^2\cdot\omega^2\right)-T\cdot\omega\cdot(1-\alpha)\cdot 2\cdot\omega\cdot\alpha\cdot T^2=0$$
$$1+\alpha\cdot T^2\cdot\omega^2-2\cdot\alpha\cdot T^2\cdot\omega^2=0$$
$$1-\alpha\cdot T^2\cdot\omega^2=0$$
$$\omega^2=\frac{1}{\alpha\cdot T^2}$$
$$\omega_m=\frac{1}{\sqrt{\alpha}\cdot T} \qquad (3)$$

Na frequência ω_m ocorre φ_m, o máximo ângulo de fase do compensador $G_c(j\omega)$.
Cálculo de $sen(\varphi_m)$:

$$tg(\varphi_m)=\left.\frac{T\cdot\omega\cdot(1-\alpha)}{\left(1+\alpha\cdot T^2\cdot\omega^2\right)}\right|_{\omega=\omega_m=\frac{1}{\sqrt{\alpha}\cdot T}}=\frac{T\cdot\frac{1}{\sqrt{\alpha}\cdot T}\cdot(1-\alpha)}{1+\alpha\cdot T^2\cdot\frac{1}{\sqrt{\alpha}\cdot T}}=\frac{1-\alpha}{2\cdot\sqrt{\alpha}}=\frac{c}{d} \qquad (4)$$

Empregando a interpretação geométrica:

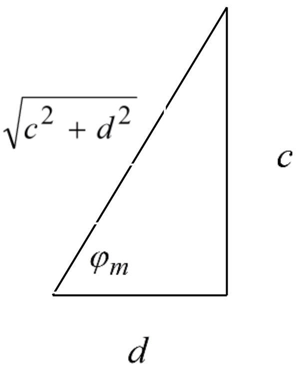


Fig. 2.

e (4), obtém-se:

$$d = \frac{c \cdot 2 \cdot \sqrt{\alpha}}{(1-\alpha)}$$

Da Fig. 2, têm-se:

$$sen(\varphi_m) = \frac{c}{\sqrt{c^2 + d^2}} = \frac{c}{\sqrt{c^2 + \dfrac{4 \cdot c^2 \cdot \alpha}{(1-\alpha)^2}}} = \frac{c \cdot (1-\alpha)}{\sqrt{a^2 \cdot (1-\alpha)^2 + 4 \cdot c^2 \cdot \alpha}} =$$

$$= \frac{c \cdot (1-\alpha)}{\sqrt{c^2 \cdot (1+\alpha)^2}} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

$$sen(\varphi_m) = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \qquad (5)$$

Calcular o acréscimo da magnitude que ocorre na frequência ω_m em relação à magnitude de $G_c(j \cdot \omega)$ em frequências baixas conforme mostrado na Fig. 3:

$$b = 20 \cdot \left(\log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha} \cdot T} \right) - \log_{10}\left(\frac{1}{T} \right) \right) = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \right) = -20 \cdot \log_{10}\left(\sqrt{\alpha} \right) \quad (6)$$

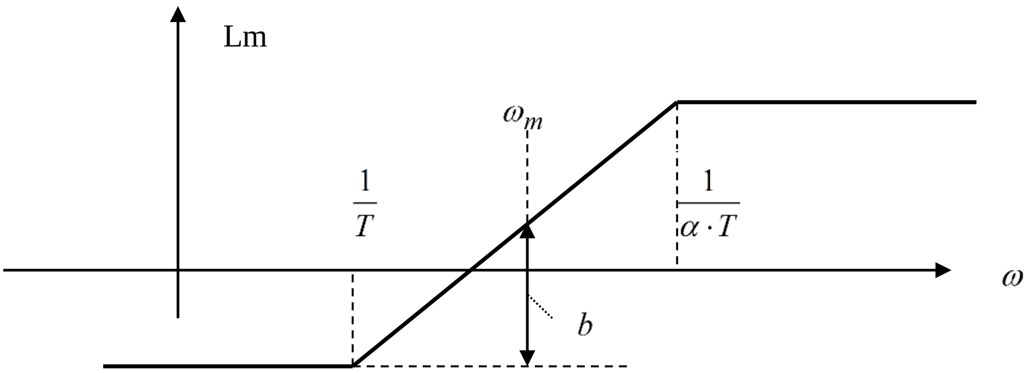


Fig. 3. Gráfico de Lm do compensador por avanço de fase.

Projeto de compensador por avanço de fase

Aqui é considerado o projeto de um compensador por avanço de fase que é colocado em série com a planta (Fig. 4).

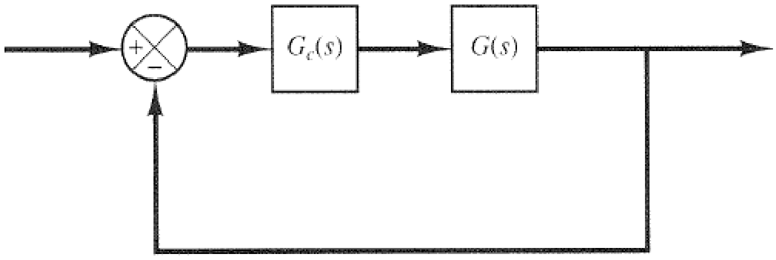


Fig. 4. Sistema de controle

As especificações de desempenho são dadas em termos de margem de fase, margem de ganho e constantes de erro estático.

A função de transferência da planta é $G(s)$.

1. Admitir que a função de transferência do compensador por avanço de fase é:

$$G_c(s) = K \cdot \frac{(T \cdot s + 1)}{(\alpha \cdot T \cdot s + 1)} \qquad 0 < \alpha < 1$$

A função de transferência de malha aberta do sistema compensado é:

$$G_c(s) \cdot G(s) = K \cdot \frac{(T \cdot s + 1)}{(\alpha \cdot T \cdot s + 1)} \cdot G(s) = \frac{(T \cdot s + 1)}{(\alpha \cdot T \cdot s + 1)} \cdot G_1(s)$$

onde $G_1(s) = K \cdot G(s)$.

Aqui $G_1(s)$ é a função de transferência do sistema não compensado, mas com o ganho ajustado. Inicialmente, o compensador será projetado com o ganho unitário. Determinar o ganho *K* para satisfazer a especificação do erro estático.

2. Usando o ganho *K* assim determinado, desenhar os gráficos logarítmicos de $G_1(j \cdot \omega)$. Avaliar a margem de fase.

3. Determinar o ângulo de avanço de fase, φ, necessário para ser acrescentado ao sistema. Esse ângulo, acrescido de 5º a 12º, é φ_m, ou seja, o ângulo máximo de avanço de fase do compensador a ser projetado.

4. Determinar o fator α pelo uso da equação:

$$sen(\varphi_m) = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$$

Logo:

$$\alpha = \frac{1 - sen(\varphi_m)}{1 + sen(\varphi_m)}$$

5. Determinar a frequência na qual o valor de $20 \cdot \log_{10}[G_1(j \cdot \omega)]$ é igual a $-20 \cdot \log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)$. Selecionar esta frequência como a nova frequência de cruzamento de ganho, ω'_{cg}. A frequência ω_m é escolhida igual a ω'_{cg} é nela que ocorre o ângulo máximo de fase do compensador por avanço de fase. Então:

$$\omega'_{cg} = \frac{1}{\sqrt{\alpha} \cdot T}$$

Logo:

$$T = \frac{1}{\sqrt{\alpha} \cdot \omega'_{cg}}$$

6. Escrever a função de transferência do compensador:

$$G_c(s) = K \cdot \frac{(T \cdot s + 1)}{(\alpha \cdot T \cdot s + 1)}$$

7. Desenhar os gráficos logarítmicos do sistema compensado, isto é, de $G(j \cdot \omega) \cdot G_c(j \cdot \omega)$ e verificar a margem de ganho e a margem de fase. A faixa de tolerância é de ± 2 dB para a margem de ganho (m.g.) e $\pm 2^o$ para a margem de fase (m.f.).

Se

m.g. = m.g. especificada – 2 dB
m.f. > m.f. especificada + 2º

então aceitar o projeto.

Se

m.g. > m.g. especificada + 2 dB
m.f. = m.f. especificada - 2º

então aceitar o projeto. Em todas as outras situações, quando pelo menos uma das margens está fora da faixa de tolerância para menos, o projeto deve ser refeito. Por exemplo, se a m.f. está dentro da faixa de tolerância, mas a m.g. está maior do que o valor máximo admitido, então, ao refazer o projeto, um acréscimo menor deve ser usado no cálculo de φ_m. Outra situação: a m.f. está menor do que o valor mínimo admitido, mas a m.g. está maior do que o valor máximo admitido. Neste caso, ao refazer o projeto, um acréscimo maior deve ser usado no cálculo de φ_m.

8. Simular a resposta transitória do sistema compensado e verificar o valor do erro estático. Se o valor do erro estático não for igual ao especificado, verificar o cálculo do ganho *K*.

Um compensador por avanço de fase é eficiente se o ângulo de fase da planta em frequências altas não cai abaixo de -180º. Isto significa que um compensador por avanço de fase somente pode ser projetado para as plantas com $(q - p) \leq 2$, onde q é o grau do polinômio do denominador e p é o grau do polinômio do numerador da função de transferência da planta.

Exemplo (Exemplo 9.1 do livro de Ogata, 4ª Ed.)

Projetar um compensador por avanço de fase para a planta cuja função de transferência, $G(s)$, é:

$$G(s) = \frac{4}{s \cdot (s + 2)}$$

Os requisitos do projeto:

- margem de fase (m.f.) 50º;
- margem de ganho (m.g.) 10 dB;
- coeficiente do erro K_V = 25 s^{-1}.

<u>Solução:</u>

A função de transferência do compensador por avanço de fase:

$$G_C(s) = K_C \cdot \frac{(T \cdot s + 1)}{(\alpha \cdot T \cdot s + 1)}$$

Calcular K_C:

$$K_V = \lim_{s \to 0} \left(s \cdot \frac{(T \cdot s + 1)}{(\alpha \cdot T \cdot s + 1)} \cdot \frac{4 \cdot K_C}{s \cdot (s + 2)} \right) = \frac{4 \cdot K_C}{2} = 2 \cdot K_C = 25$$

Logo:

$$K_C = 12{,}5$$

No MATLAB:
Introduzir a função de transferência do sistema não compensado, mas com ganho ajustado $G_1(s)$:

```
>> Kc = 12.5;
>> num = Kc*4;
>> den = [1,   2 ,   0];
>> sys1 = tf(num, den)
```

Transfer function:
  50
----
s^2 + 2 s

>> bode(sys1)   % desenhar os gráficos logarítmicos do sistema não compensado, mas
% o ganho é ajustado

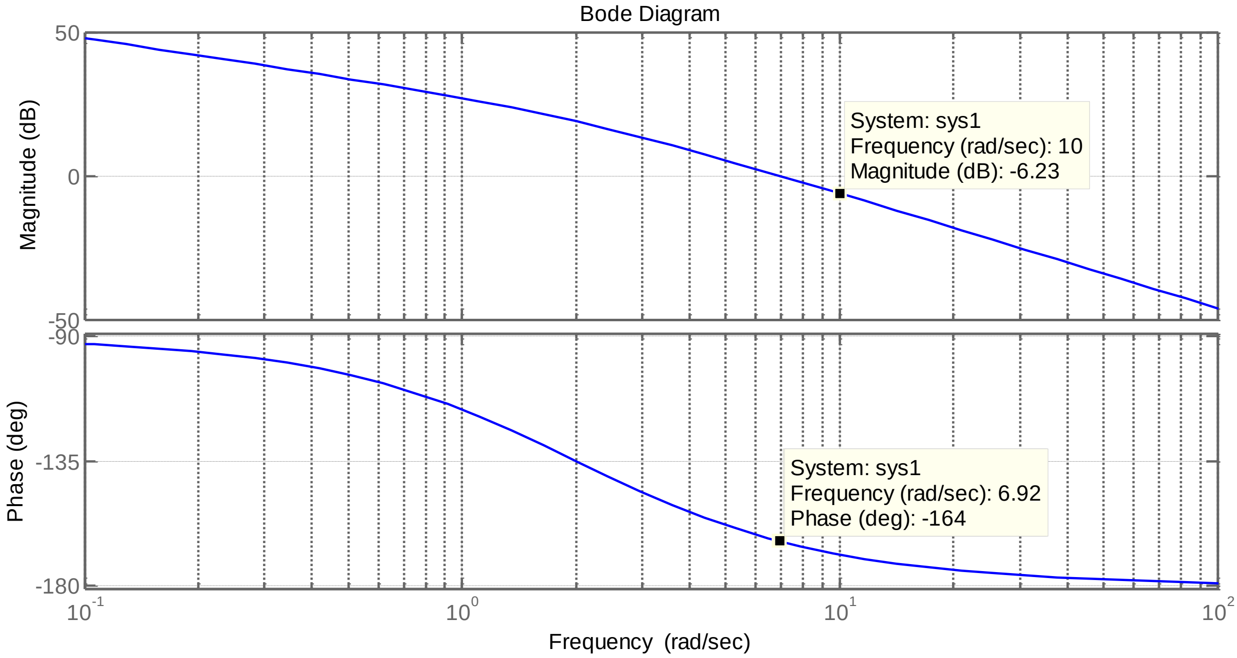


Fig. 5. Sistema não compensado, mas o ganho é ajustado.

Pode ser utilizado o comando margin para achar as margens e as frequências de cruzamento.
Aqui a margem de fase foi definida com base no gráfico (Fig. 25).

>> 50 – 16   % a m.f. especificada menos a m.f. obtida
ans =
    34

>> Fim = 34 + 5   % acrescentar 5º para compensar o aumento de ω_{cg} (frequência de
% cruzamento de ganho)

Fim =
    39   % φ_m

>> a = sin(Fim*pi/180)

a =
  0.6293

```
>> alfa = (1 - a)/(1 + a)

alfa =
         0.2275

>> b = 20*log10(1/sqrt(alfa))

b =
        6.4301              %  pelo gráfico na Fig. 5, Lm= -6,4301 dB ocorre na frequência
                            % de ± 10,1 rad/s; então, a nova wcg = 10.1

>> wcg = 10.1;
>> T = 1/(sqrt(alfa)*wcg)

T =
      0.2076

>> alfa*T

ans =
        0.0472

>> num_c = Kc*[T,    1]                 % numerador do compensador

num_c =
             2.5947   12.5000

>> den_c = [alfa*T,   1]                % denominador do compensador

den_c =
            0.0472    1.0000

>> sys_c = tf(num_c, den_c)             % função de transferência do compensador

Transfer function:
2.595 s + 12.5
--------------
0.04723 s + 1

>> sys = tf([4], [1,   2,   0])         % função de transferência da planta

Transfer function:
    4
---------
s^2 + 2 s

>> sys_comp = series(sys_c, sys)        % conectar o compensador em série com a planta
```

Transfer function:
10.38 s + 50

0.04723 s^3 + 1.094 s^2 + 2 s

```
>> figure
>> bode(sys_comp)    % gráficos logarítmicos do sistema compensado ( malha aberta)
```

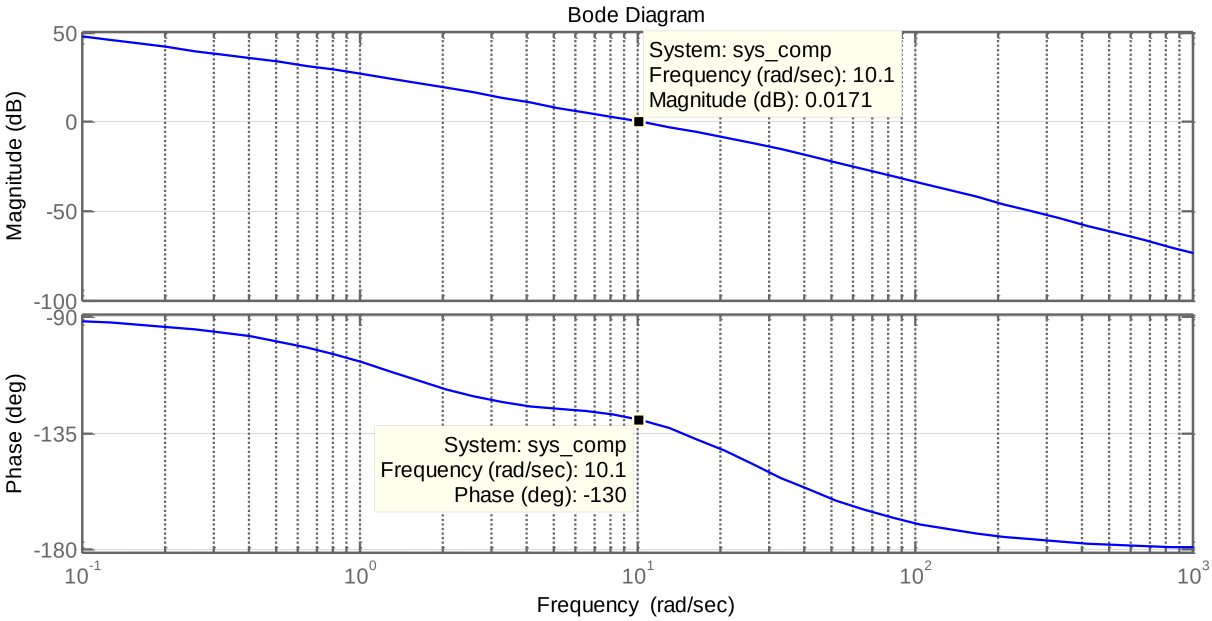


Fig. 6. Sistema compensado (malha aberta).

A m.f. é de 50^{o} e a m.g. é infinita.

```
>> figure
>> sys_cl = feedback(sys_comp, 1)
```

Transfer function:
10.38 s + 50

0.04723 s^3 + 1.094 s^2 + 12.38 s + 50

```
>> integrador = tf(1, [1,   0])
```

Transfer function:
1
-
s

```
>> sys_ramp=series(sys_cl, integrador)    % inserir um integrador para poder calcular a resposta
                                          % a rampa unitária através do comando STEP
```

Transfer function:
              10.38 s + 50

0.04723 s^4 + 1.094 s^3 + 12.38 s^2 + 50 s

>> step(sys_ramp)   % resposta a rampa unitária

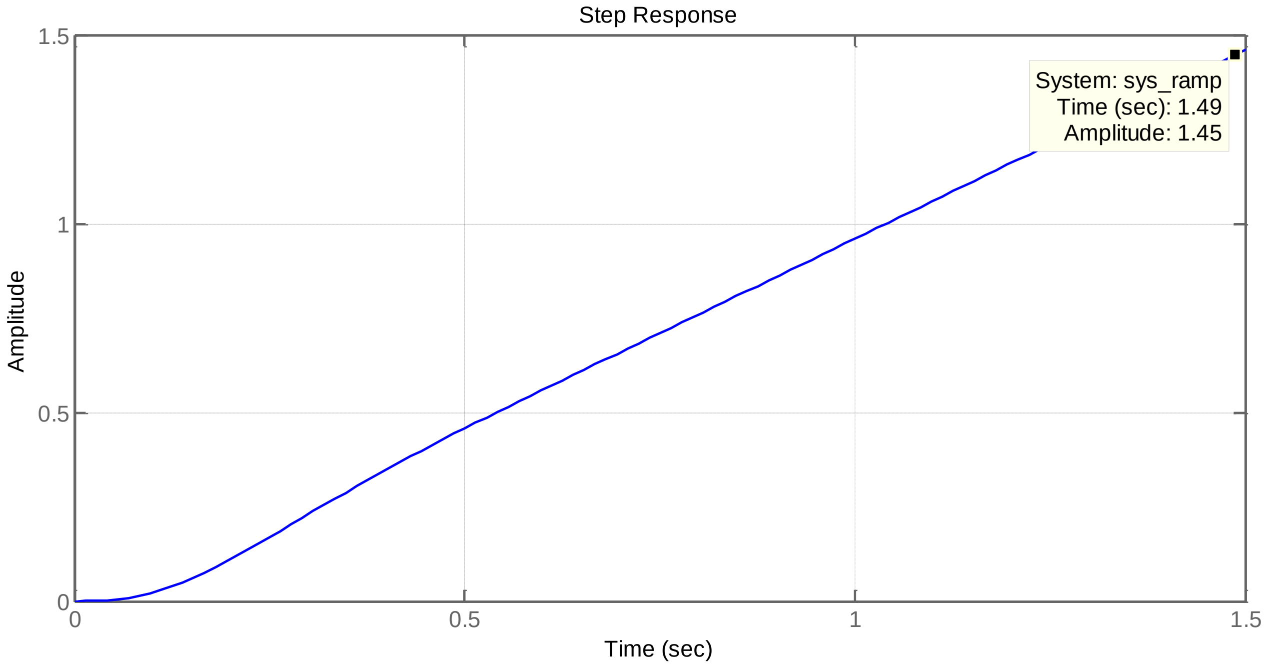


Fig. 7. Resposta à rampa unitária.

>> ess = 1.49 - 1.45   % o erro de velocidade estático medido no gráfico acima

ess =
        0.0400

>> erro_especificado = 1/25   % o erro calculado com base em K_V

erro_especificado =
        0.400   % fechou

Projeto de compensador por atraso de fase

Aqui é considerado o projeto de um compensador por atraso de fase que é colocado em série com a planta (Fig. 4). As especificações de desempenho são dadas em termos de margem de fase, margem de ganho e constantes de erro estático.

1. A função de transferência do compensador por atraso de fase é a seguinte:

$$G_c(s) = K_c \cdot \frac{(T \cdot s + 1)}{(\beta \cdot T \cdot s + 1)} \qquad \beta > 1 \qquad (8)$$

A função de transferência de malha aberta do sistema compensado é:

$$G_c(s) \cdot G(s) = K_c \cdot \frac{(T \cdot s + 1)}{(\beta \cdot T \cdot s + 1)} \cdot G(s) = \frac{(T \cdot s + 1)}{(\beta \cdot T \cdot s + 1)} \cdot G_1(s)$$

onde:

$$G_1(s) = K_c \cdot G(s)$$

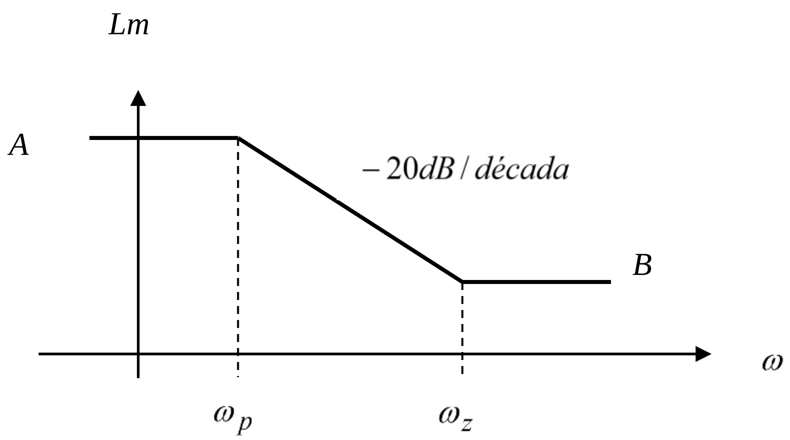
Determinar o ganho K_c para satisfazer o requisito sobre a constante de erro estático.

2. Desenhar os gráficos logarítmicos de $G_1(j \cdot \omega)$ e determinar a margem de fase e a margem de ganho. Se as margens obtidas não preencherem as suas especificações, então projetar um compensador por atraso de fase.

Achar o ponto de frequência onde o ângulo de fase de $G_1(j \cdot \omega)$ for igual a -180º mais a margem de fase especificada. Acrescentar a este valor de 5 a 12º. Este acréscimo deve ser feito devido ao atraso de fase do compensador. Escolher esta frequência como nova frequência de cruzamento de ganho, ω_{cg}.

3. Para evitar os efeitos negativos de atraso de fase devido ao compensador por atraso de fase, o pólo e o zero do compensador devem estar localizados substancialmente mais baixo do que a nova ω_{cg}. Portanto, escolher a frequência de canto $\omega_z = \frac{1}{T}$ (correspondente ao zero do compensador) uma oitava para uma década abaixo da nova ω_{cg}.

4. Determinar a atenuação necessária para que a curva de logaritmo-módulo passe por 0 dB na nova ω_{cg}. Observando que esta atenuação é $-20 \cdot \log_{10}(\beta)$, achar o valor de β. Então, a outra frequência de canto (correspondente ao polo do compensador por atraso de fase) é determinada a partir de $\omega_p = \frac{1}{\beta \cdot T}$. Dedução:



Pode-se escrever:

$$20\cdot\log_{10}\left(\frac{K}{\omega_z}\right)-20\cdot\log_{10}\left(\frac{K}{\omega_p}\right)=B-A$$
$$20\cdot\log_{10}\left(\frac{\omega_p}{\omega_z}\right)=B-A$$
$$20\cdot\log_{10}\left(\frac{1}{\beta}\right)=B-A$$

Logo a atenuação é -B= $-20\cdot\log_{10}(\beta)$.

5. Escrever a função de transferência do compensador. Desenhar os gráficos logarítmicos de malha aberta do sistema compensado e verificar as margens. Se for necessário, refazer o projeto. Se uma das margens for insuficiente, a frequência ω_z pode ser deslocada mais para a esquerda na nova ω_{cg}. Outro método é aumentar o acréscimo (entre 5 e 12º) utilizado para escolher a nova ω_{cg}.

Exemplo (exemplo 9.2 do livro de Ogata, 4ª Ed., porém a solução aqui é diferente):

A função de transferência da planta é:

$$G(s)=\frac{1}{s\cdot(s+1)\cdot(0{,}5\cdot s+1)}$$

Pede-se projetar um compensador em série para que o coeficiente de erro estático de velocidade, K_v, seja 5 s^{-1}, a m.f. seja 40º e a m.g. seja 10 dB.

Solução:
Um compensador por avanço de fase não seria eficiente, pois $q-p=3$, ou seja, em freqüências altas o ângulo de fase é -270º. Será projetado um compensador por atraso de fase.

Achar o ganho do compensador. Usar o cálculo simbólico.

No MATLAB:

```
>> syms    s    Kc    T    beta
>> G = 1/s/(s + 1)/(0.5*s + 1)                % f. de tr. da planta

G =
     1/s/(s+1)/(1/2*s+1)

>> Gc = Kc*(T*s + 1)/(beta*T*s + 1)         % f. de tr. do compensador

Gc =
        Kc*(T*s+1)/(beta*T*s+1)


>> Kv = limit(s*G*Gc, s, 0)            % calcular o limite quando s → 0

Kv =
      Kc
```

Aqui termina o cálculo simbólico; é aconselhável limpar todas as variáveis.

```
>> clear
>> Kv = 5;
>> Kc = Kv;
>> num = 1;
>> den = conv([1, 1, 0], [0.5, 1])

den =

   0.5000    1.5000    1.0000        0

>> sys1 = Kc*tf(num, den)



Transfer function:
         5
---------------------
0.5 s^3 + 1.5 s^2 + s

>> bode(sys1)
```

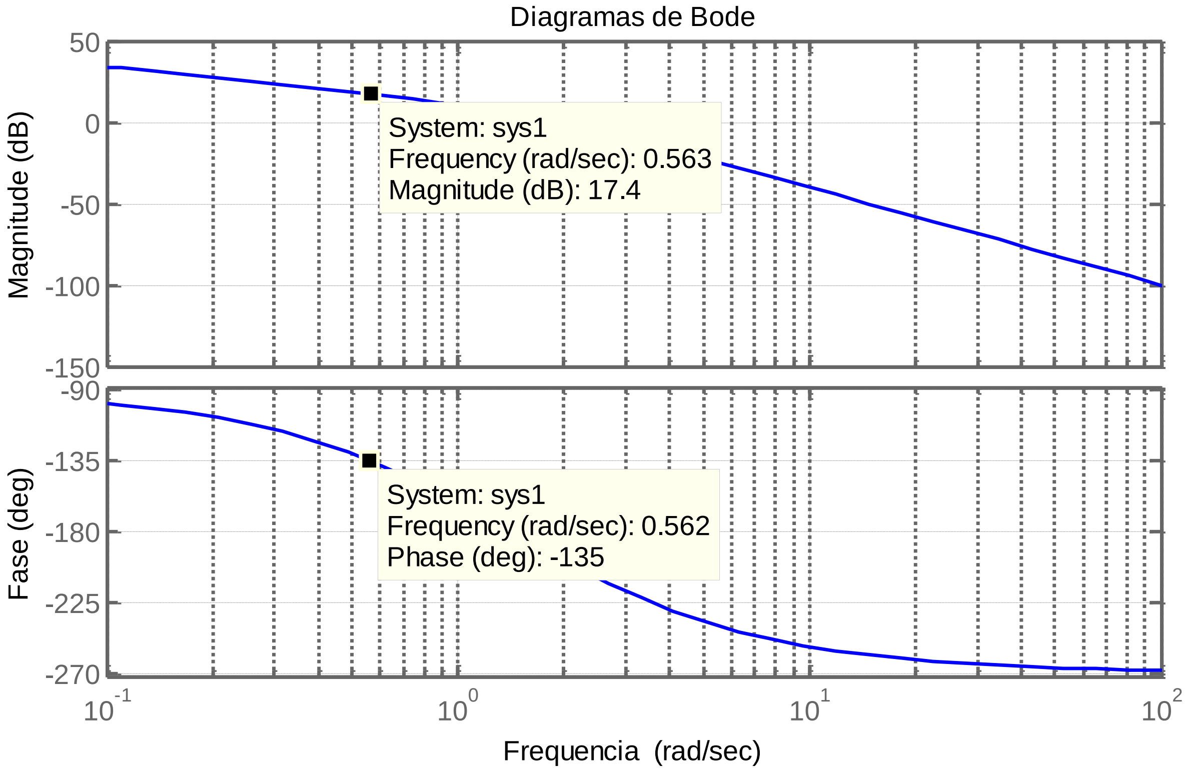


Fig. 8. Sistema não compensado, mas o ganho é ajustado.

```
>> -180 + 40 + 5
ans =
     -135
```

Com base na Fig. 15, achar a frequência na qual o ângulo de fase é -135º. Esta frequência é 0,562 rad/s.

```
>> wcg = 0.562;
>> wz = 0.1*wcg                    % frequência do zero do compensador

wz =
    0.0680

>> T = 1/wz

T =
    14.6962
```

Calcular o fator beta com base na equação 20*log(beta) = 17,4 dB

```
beta = 10^(17.4/20)

beta =
     7.4131
```

```
>> % compensador
num_c = [T, 1]

num_c =
        14.6962    1.0000

>> den_c = [beta*T, 1]

den_c =
       108.9446    1.0000

>> comp = tf(num_c, den_c)

Transfer function:
14.7 s + 1
-----------
108.9 s + 1

>> sys_comp = series(sys1, comp)

Transfer function:
            73.48 s + 5
-------------------------------------
54.47 s^4 + 163.9 s^3 + 110.4 s^2 + s

>> [Gm, Pm, wcf, wcg] = margin(sys_comp)

Gm =
    4.0538              % não é em dB

Pm =
    38.6382             % a m.f.

wcf =
    1.3503

wcg =
    0.5681

>> Gm_dB = 20*log10(Gm)          % recalcular a m.g. para dB

Gm_dB =
       12.1574                   % a m.f. em dB
```

Aceitar o projeto. Verificar a resposta transitória.

```
>> sys_cl = feedback(sys_comp, 1)
```

```
Transfer function:
                 73.48 s + 5
-----------------------------------------------
54.47 s^4 + 163.9 s^3 + 110.4 s^2 + 74.48 s + 5

>> figure
>> step(sys_cl)                    % Fig. 36
```

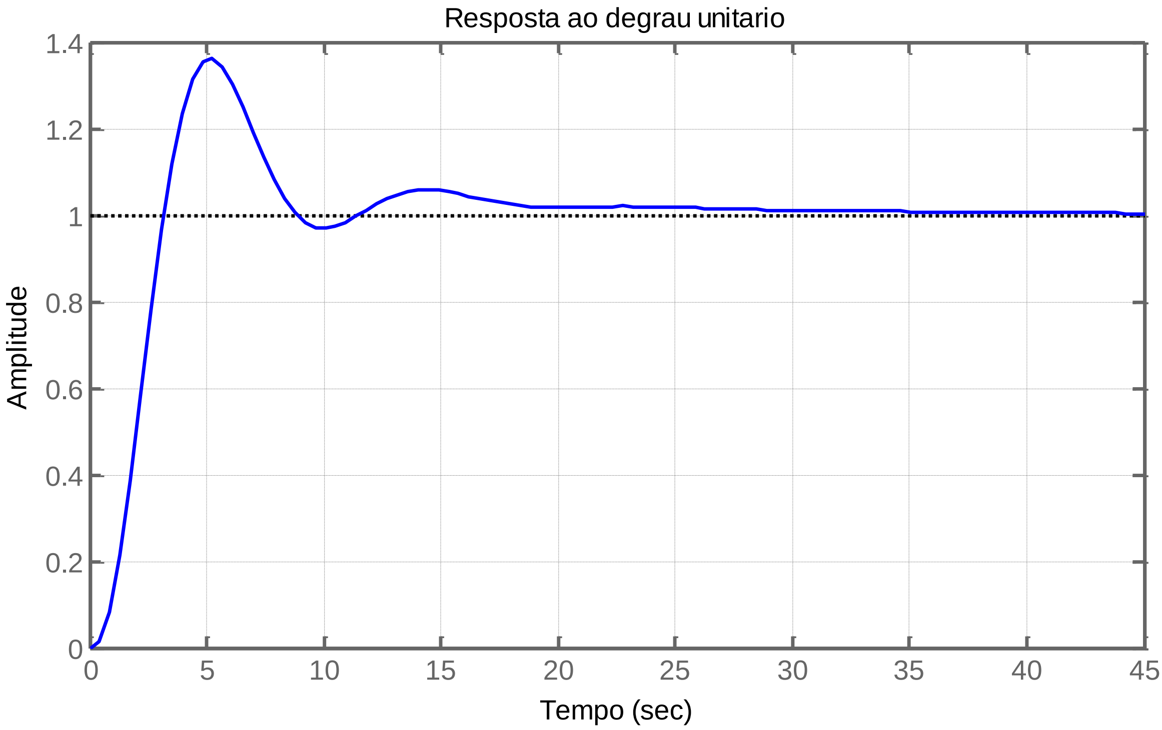


Fig. 9. Resposta ao degrau unitário.

```
>> integrador = tf(1, [1, 0])
Transfer function:
1
-
s

>> sys_ramp  = series(sys_cl, integrador)

Transfer function:
                   73.48 s + 5
--------------------------------------------------
54.47 s^5 + 163.9 s^4 + 110.4 s^3 + 74.48 s^2 + 5 s

>> [y, t] = step(sys_ramp);              % resposta à rampa unitária

>> size(y)

ans =
```

```
        2501          1

>> ess = t(2501) - y(2501)

ess =
        0.2000              % o erro estático de velocidade obtido

>> erro_especificado = 1/Kv

erro_especificado =
                          0.2000     % o erro estático de velocidade especificado
```

Projeto de compensador por atraso-avanço de fase

Aqui é considerado o projeto de compensador por atraso-avanço de fase que é colocado em série com a planta (Fig. 4). As especificações de desempenho são dadas em termos de margem de fase, margem de ganho e constantes de erro estático. Será visto o método de projeto do compensador por atraso-avanço de fase com a estrutura simétrica, isto é, a sua função de transferência é:

$$G_c(s) = K_c \cdot \frac{(T_1 \cdot s + 1)\cdot(T_2 \cdot s + 1)}{(\alpha \cdot T_1 \cdot s + 1)\cdot(\beta \cdot T_2 \cdot s + 1)} \qquad (9)$$

sendo que $\alpha = \frac{1}{\beta}; \quad 0 < \alpha < 1; \quad T_2 > T_1.$

O método de projeto:

1. Achar o ganho K_c do compensador para satisfazer a especificação do erro estático. A função de transferência de malha aberta do sistema compensado é:

$$G_c(s)\cdot G(s) = K_c \cdot \frac{(T_1 \cdot s + 1)\cdot(T_2 \cdot s + 1)}{(\alpha \cdot T_1 \cdot s + 1)\cdot(\beta \cdot T_2 \cdot s + 1)} \cdot G(s) =$$

$$= \frac{(T_1 \cdot s + 1)\cdot(T_2 \cdot s + 1)}{(\alpha \cdot T_1 \cdot s + 1)\cdot(\beta \cdot T_2 \cdot s + 1)} \cdot G_1(s)$$

onde

$$G_1(s) = K_c \cdot G(s)$$

Desenhar os gráficos logarítmicos de $G_1(j \cdot \omega)$ e verificar as margens. Se as margens não são iguais às especificadas, levando em consideração as tolerâncias, então projetar um compensador por atraso-avanço.

2. Escolher a frequência na qual o ângulo de fase de $G_1(j \cdot \omega)$ é igual a -180º. Esta será a nova frequência de cruzamento de ganho, ω_{cg}.

3. Projetar a parcela por atraso de fase do compensador. Escolher a frequência do zero desta parcela uma década abaixo da nova ω_{cg}:

$$\omega_{z\_at} = \frac{\omega_{cg}}{10}$$

Calcular o valor do máximo ângulo de fase, φ_m, como:

$$\varphi_m = m.f.especificada + \left(5 \ldots 12^o\right)$$

Calcular o fator de atenuação β:

$$\beta = \frac{1 + sen(\varphi_m)}{1 - sen(\varphi_m)}$$

Calcular a frequência do polo da parcela por atraso de fase:

$$\omega_{p\_at} = \frac{\omega_{z\_at}}{\beta}$$

Escrever a função de transferência da parcela por atraso de fase:

$$G_{at}(s) = \frac{\left(\dfrac{s}{\omega_{z\_at}} + 1\right)}{\left(\dfrac{s}{\omega_{p\_at}} + 1\right)}$$

Achar a atenuação máxima da parcela por atraso de fase, b:

$$b = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{1}{\beta}\right)$$

4. Projetar a parcela por avanço de fase do compensador. Determinar a atenuação necessária para que o Lm de $G_1(j \cdot \omega)$ passe por 0 dB na nova ω_{cg}. Seja esta atenuação a. Traçar uma assíntota com uma inclinação de -20 dB/década, passando pelo ponto (ω_{cg} , -a) . O ponto de cruzamento desta assíntota com a reta horizontal de –b dB define a frequência do zero da parcela por avanço de fase, ω_{z_av}. O ponto de cruzamento desta assíntota com a reta horizontal de 0 dB define a frequência do polo da parcela por avanço de fase, ω_{p_av}.
Escrever a função de transferência da parcela por avanço de fase:

$$G_{av}(s) = \frac{\left(\dfrac{s}{\omega_{z\_av}} + 1\right)}{\left(\dfrac{s}{\omega_{p\_av}} + 1\right)}$$

5. Escrever a função de transferência do compensador por atraso-avanço de fase:

$$G_c(s) = \frac{\left(\frac{s}{\omega_{z\_at}} + 1\right)}{\left(\frac{s}{\omega_{p\_at}} + 1\right)} \cdot \frac{\left(\frac{s}{\omega_{z\_av}} + 1\right)}{\left(\frac{s}{\omega_{p\_av}} + 1\right)}$$

Escrever a função de transferência de malha aberta do sistema compensado, $G_c(s) \cdot G_1(s)$ e desenhar os gráficos logarítmicos. Verificar as margens de fase e de ganho. Caso necessário, reprojetar o compensador.

6. Definir a função de transferência de malha fechada do sistema compensado e simular a resposta transitória. Verificar o valor do erro estacionário. Se o erro estacionário não for igual ao especificado, verificar o cálculo do ganho K_c.

7. Implementar o compensador projetado.

Exemplo:

Pede-se projetar um compensador para o objeto de controle, cuja função de transferência é:

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)(s+10)}$$

O sistema compensado deve responder às seguintes especificações:

- erro estacionário e_{ss} = 0.02,
- margem de fase = 50^o;
- margem de ganho= 10 dB.

<u>Solução:</u>

Projetemos um compensador por atraso-avanço de fase, simétrico, cuja função de transferência é de acordo com (9):

$$G_c(s) = K_c \cdot \frac{(T_1 \cdot s + 1) \cdot (T_2 \cdot s + 1)}{(\alpha \cdot T_1 \cdot s + 1) \cdot (\beta \cdot T_2 \cdot s + 1)}$$

Digitar na janela de comandos do MATLAB:

```
>> num = 1;
>> den = conv([1  1], conv([1  3], [1  10]))
>> erss = 0.02;                    % erss = 1/(1 + Kp) ( o objeto é tipo 0), logo Kp=(1 –
erss)/erss
>> Kp = (1 – erss)/erss

Kp =
        49       % coeficiente de erro de posição estático

% Kp = lim  Kc*G(s)      logo   Kc/30 = Kp
```

```
%         s->0

>> Kc = 30*Kp

Kc =
       1470

>> sys1 =  Kc *tf(num, den)            % sistema não compensado, mas com o ganho
ajustado

Transfer function:
         1470
------------------------
s^3 + 14 s^2 + 43 s + 30

>> bode(sys1)                          % os gráficos são mostrados na Fig.10
>> w = logspace(0, 2, 500);            % ajustar a faixa de frequência
>> [mag, fase, w] = bode(sys1, w);
```

Analisando os valores dos elementos de "fase" e "w", pode-se achar o valor de "w" na qual o valor de "fase" é igual a -180º .

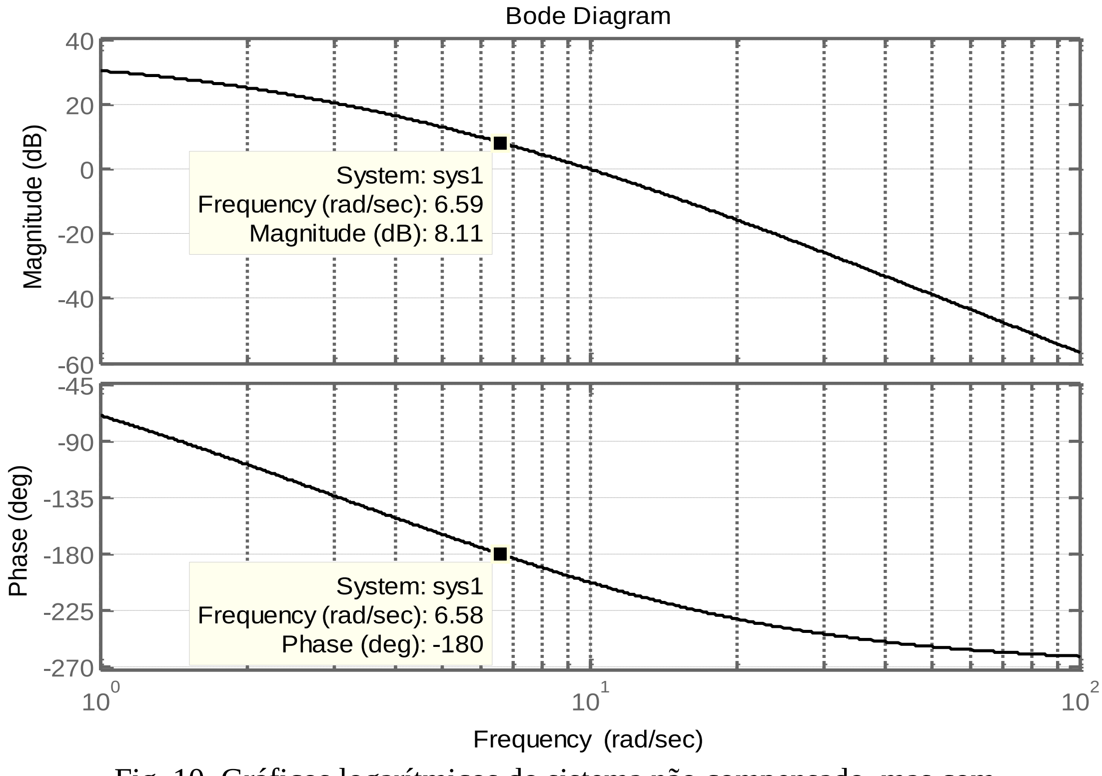


Fig. 10. Gráficos logarítmicos do sistema não compensado, mas com o ganho ajustado.

```
>> wcg = 6.58;                 % esta será a nova frequência de cruzamento de ganho,
```
ω_{cg} .

Em ω_{cg}, a parte por avanço do compensador terá que contribuir com +50º, o que é o avanço máximo de fase. Se o valor de α for 0,1, o ângulo de avanço máximo será 54,9°. Escolhendo esse valor para α, então o valor de β é igual a 1/0.1 = 10. O cálculo mais preciso é:

$\varphi_m = 50^o + 5^o = 55^o$.

```
>> fim = 50 + 5;

% Projeto da parcela por atraso do compensador

>> beta  = (1 + sin(fim*pi/180))/(1 - sin(fim*pi/180))

beta =
        10.0590

>> alfa = 1/beta                    % o compensador é simétrico

alfa  =
        0.0994

>> w_z_at=wcg/10    % a frequência do zero do compensador por atraso de fase
                    % é escolhida uma década abaixo de wcg
w_z_at =
          0.6580

>> w_p_at = w_z_at/beta      % a frequência do polo da parcela por atraso de fase

w_p_at =
             0.0654

>> num_at = [1/w_z_at     1];
>> den_at = [1/w_p_at      1];
>> comp_at = tf(num_at, den_at)              % parcela por atraso de fase

Transfer function:
1.52 s + 1
-----------
15.29 s + 1

>> aten_max_at = 20*log10(1/beta)            % atenuação máxima da parcela por
                                             % atraso (dB)
aten_max_at =
                    -20.0511
```

Projetar a parcela por avanço de fase

Na frequência wcg = 6.58 o compensador por avanço deve contribuir com -8.11 dB. O projeto do compensador por avanço é explicado na Fig.11.

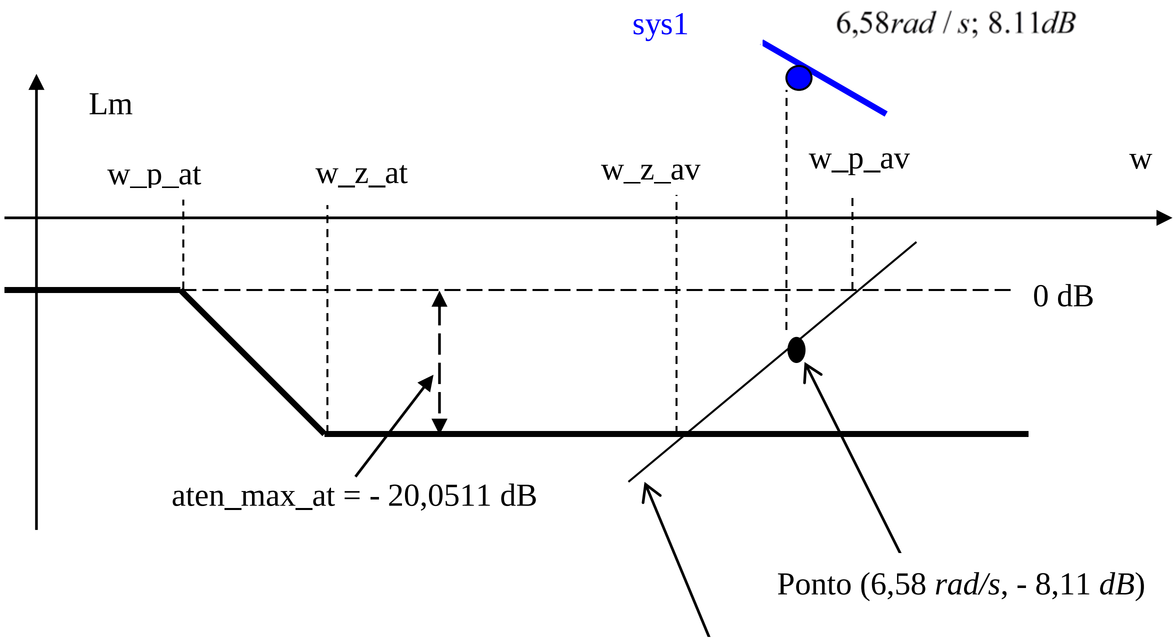


Fig.11. Projeto da parcela por avanço de fase.

A assíntota com uma inclinação de +20 dB/déc. deve passar pelo ponto (6.58, -8.11). A equação dessa assíntota é Kd·s, então, para achar o valor de Kd é preciso resolver a seguinte equação:

$$20\cdot\log(|Kd\cdot j\cdot w|) = -8.11 \quad \text{para } w = 6.58$$

Logo

$$Kd\cdot 6.58 = 10^{-8.11/20}$$

No MATLAB:

```
>> Kd=10^(-8.11/20)/6.58

Kd =
        0.0597
```

Agora, para achar as frequências de canto do compensador por avanço, é preciso resolver as seguintes equações (veja Fig. 11):

$$20\cdot\log(|Kd\cdot j\cdot w\_z\_av|) = aten\_max\_at$$

$$20\cdot\log(|Kd\cdot j\cdot w\_p\_av|) = 0$$

No MATLAB:

```
>> w_z_av = 10^( aten_max_at /20)/Kd

w_z_av =
          1.6641

>> w_p_av = 10^(0/20)/Kd

w_p_av =
         16.7389
```

Outro método de cálculo das frequências de canto da parcela por avanço de fase:

$$\text{aten\_max\_at} = 20 \cdot \log\left(\frac{1}{\beta}\right)$$

$$a = 10^{\frac{MAG}{20}} = 10^{\frac{8,11}{20}} = 2.5439$$

em que *MAG* é a magnitude em wcg (Fig. 10)

$$20 \cdot log(K_d \cdot \omega_{cg}) = -20 \cdot log(a)$$

$$K_d \cdot \omega_{cg} = \frac{1}{a}$$

$$K_d = \frac{1}{a \cdot \omega_{cg}}$$

$$20 \cdot log(K_d \cdot w\_p\_av) = 0$$

$$K_d \cdot w\_p\_av = 1$$

$$w\_p\_av = \frac{1}{K_d}$$

Substituindo nesta última equação a expressão obtida para K_d, obtém-se:

$$w\_p\_av = a \cdot \omega_{cg}$$

Outra frequência é calculada assim:

$$w\_z\_av = w\_p\_av \cdot \alpha$$

No MATLAB:

```
>> a=10^(8.11/20)

a =
   2.5439

>> w_p_av1=wcg*a

w_p_av1 =
```

16.7389 % w_p_av =16.7389

>> w_z_av1=w_p_av1*alfa

w_z_av1 =

1.6641 % w_z_av =1.6641

A parcela por avanço de fase:

```
>> num_av = [1/w_z_av    1];
>> den_av = [1/w_p_av     1];

>> comp_av = tf(num_av, den_av)
```

Transfer function:
0.6009 s + 1

0.05974 s + 1

>> comp = series(comp_at, comp_av) % função de transferência do compensador
% Pode ser feito também assim: comp = comp_at*comp_av

Transfer function:
0.9133 s^2 + 2.121 s + 1

0.9133 s^2 + 15.35 s + 1

```
>> figure
>> bode(comp, 'k')           %  Gráficos logarítmicos do compensador  Fig.12.
>> title('Compensador em atraso-avanço')
```

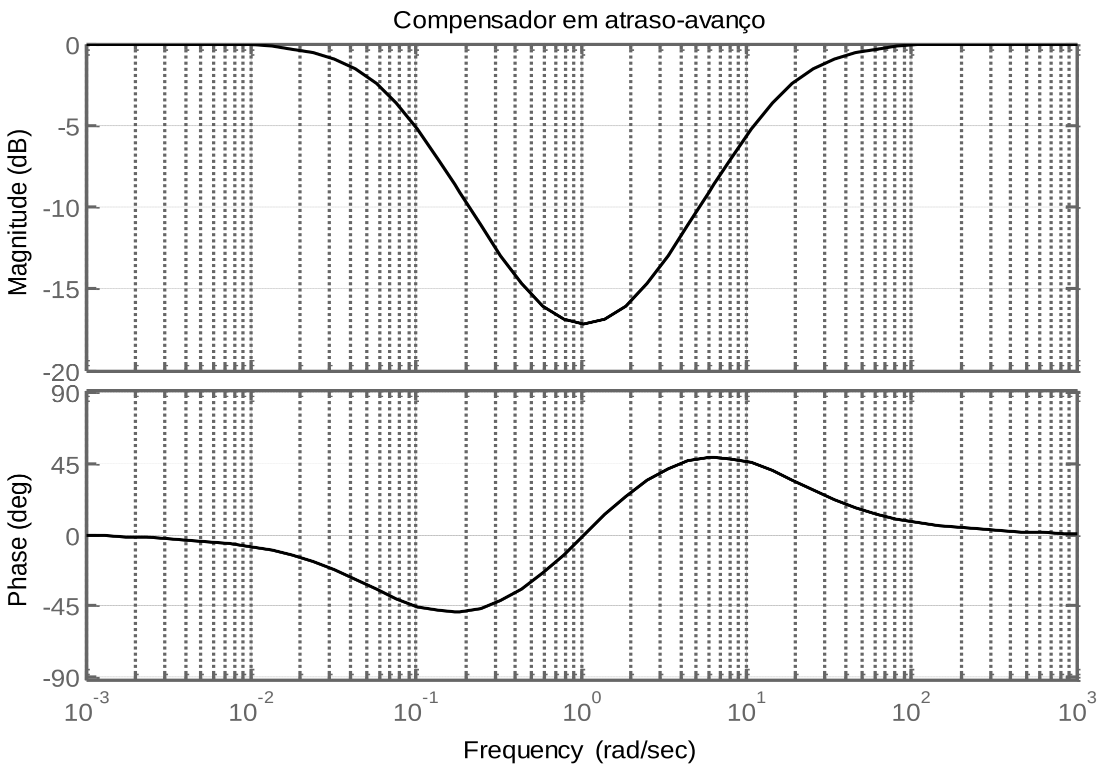


Fig.12. Gráficos logarítmicos do compensador por atraso-avanço.

```
>> sys_comp = series(sys1, comp)            % sistema compensado
% Pode ser feito também assim:                sys_comp = sys1*comp



Transfer function:
              1343 s^2 + 3117 s + 1470
------------------------------------------------------------
0.9133 s^5 + 28.13 s^4 + 255.1 s^3 + 701.3 s^2 + 503.4 s + 30

>> figure(3)
>> bode(sys_comp)                   % gráficos logarítmicos do sistema compensado
Fig.13.
>> w = logspase(0, 2, 500);         % ajustar a faixa de frequência
>> title('Sistema compensado')
```

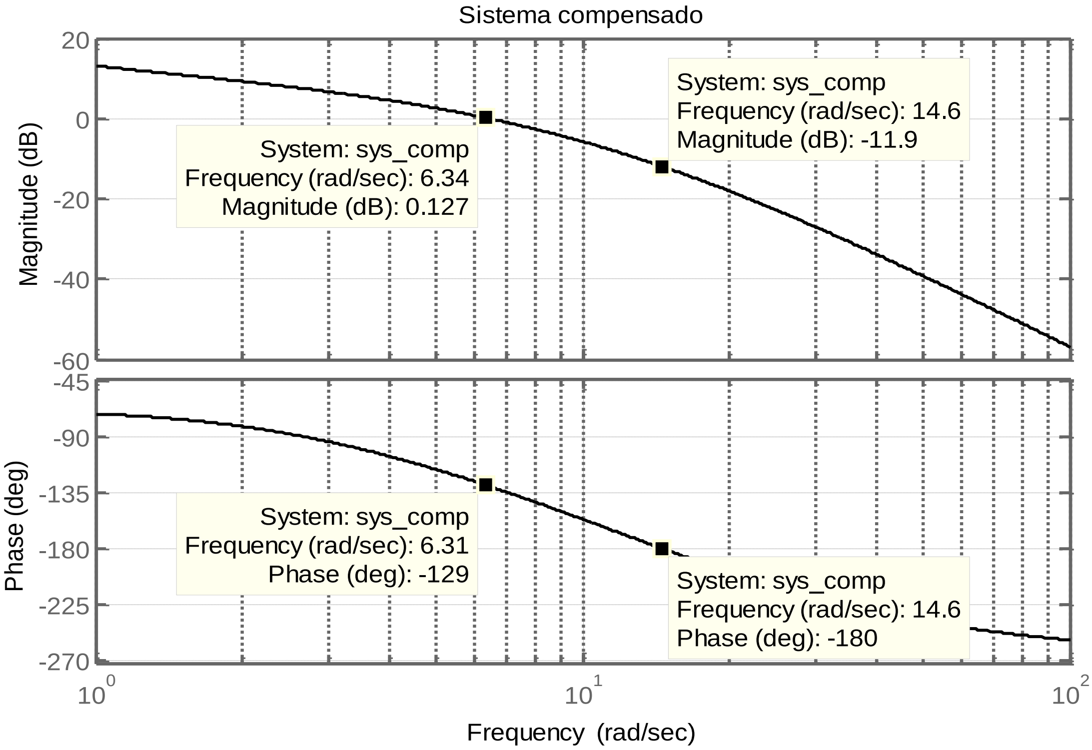


Fig. 13. Sistema compensado.

A margem de fase: 180º - 129º = 51º
A margem de ganho = 11.9 dB
Assim as especificações de margem de ganho e de margem de fase foram atendidas.

```
% para obter a resposta ao degrau unitário do sistema em malha fechada
>> sys_fb = feedback(sys_comp,1)

Transfer function:

               1343 s^2 + 3117 s + 1470
-----------------------------------------------------------
0.9133 s^5 + 28.13 s^4 + 255.1 s^3 + 2044 s^2 + 3621 s + 1500


>> figure(4)

>> step(sys_fb)                    % Veja o gráfico Fig. 14.
```

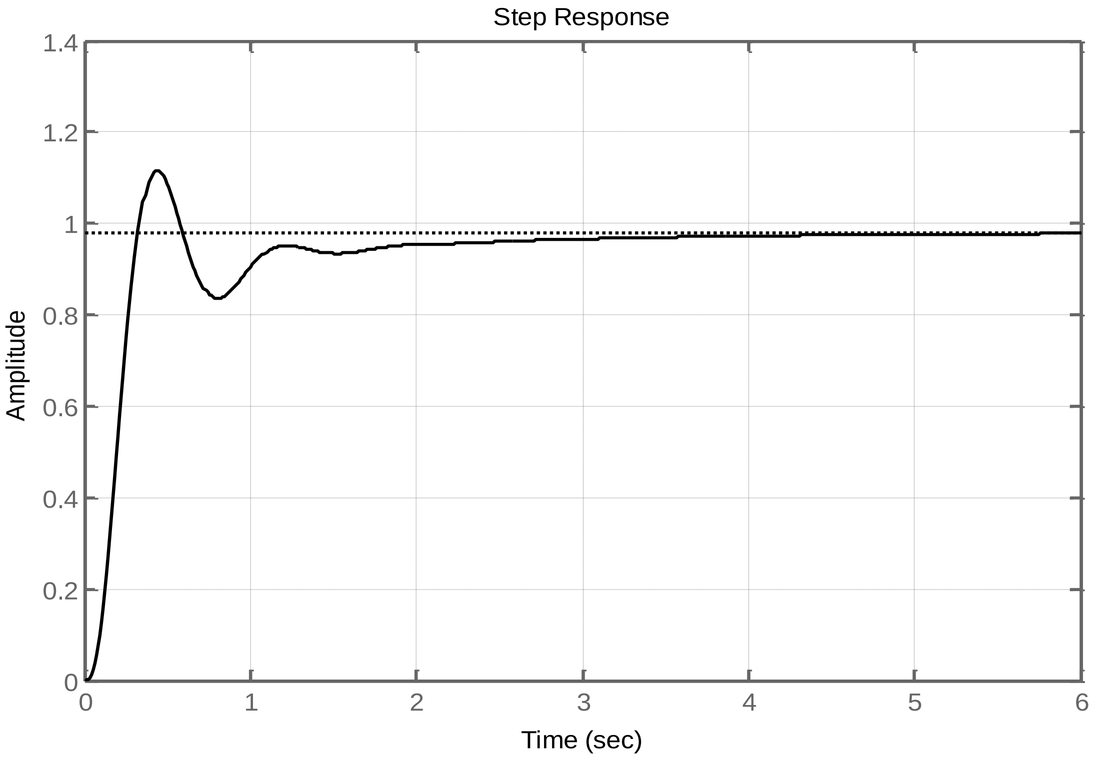


Fig. 14. Resposta do sistema compensado ao degrau unitário.

Para obter o valor exato do erro em regime estacionário:

```
>> t = linspace(0, 10, 200);
>> [y, t] = step(sys_fb,t);
>> erro_estac = 1 - y(200)

erro_estac =

    0.0202          % o erro em 10 segundos, o valor especificado é 0.02.
```

A função de transferência do compensador, incluindo o ganho Kc, é:

```
>> comp_K = Kc*comp

Transfer function:
1343 s^2 + 3117 s + 1470
------------------------
0.9133 s^2 + 15.35 s + 1
```