Задачи на собственные значения и собственные вектора матриц

С.В. Лемешевский (sergey.lemeshevsky@gmail.com)

Институт математики НАН Беларуси

Nov 13, 2018

Содержание

Аннотация

Важной и трудной задачей линейной алгебры является нахождение собственных значений и собственных векторов матриц. Рассматриваются проблема устойчивости собственных значений по отношению к малым возмущениям элементов матрицы. Для приближенного нахождения отдельных собственных значений широко используется степенной метод в различных модификациях. Для решения полной проблемы для симметричных матриц применяется итерационный метод Якоби и QR-алгоритм.

1. Свойства собственных значений

Рассматриваются проблемы нахождения собственных значений и собственных векторов квадратной вещественной матрицы A. *Собственным числом* называется число λ такое, что для некоторого ненулевого вектора (*собственного вектора*) x имеет место равенство:

$$Ax = \lambda x \tag{1}$$

С учетом того, что ищется нетривиальное решение уравнения (1), то

$$\det(A - \lambda I) = 0. \tag{2}$$

Тем самым собственные значения λ матрицы A являются корнями характеристического многочлена n-ой степени (2). Задача отыскания собственных значений и собственных векторов матрицы сводится к построению характеристического многочлена, отысканию его корней и последующему нахождению нетривиальных решений уравнения (1) для найденных собственных значений.

Квадратная вещественная матрица порядка n имеет n собственных значений, при этом каждое собственное значение считается столько раз, какова его кратность как корня характеристического многочлена. Для симметричной матрицы A собственные значения вещественны, а собственные вектора, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны, т.е. $(x^i, x^j) = 0$, если $i \neq j$. Отметим также некоторые свойства собственных значений и собственных векторов для сопряженной матрицы A^T:

$$A^T y = \mu y \tag{3}$$

Для задач (1) и (3) имеем

$$\lambda_i = \mu_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$(x^i, y^i) = 0, \quad i \neq j.$$

Две квадратные матрицы A и B одинаковых размеров называются *подобными*, если существует такая невырожденная матрица P, что $A = P^1 BP$.

Подобные матрицы имеют одни и те же собственные значения, так как из (1) непосредственно следует

$$Bx = \lambda z, \quad z = Px.$$

Ряд стандартных программ вычисления собственных значений выполняют последовательность преобразования подобия P, обладающих тем свойством, что матрицы $P_k^{-1} P$ становятся «более диагональными». Возникает, естественно, вопрос: «Насколько хорошо диагональные элементы матрицы аппроксимируют ее собственные значения?» Любое собственное значение матрицы A лежит по крайней мере в одном из кругов (*круги Гершгорина*)

$$|\lambda - a_{ii}| \le \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Приведем теперь некоторые сведения о возмущении собственных значений при возму- щении элементов матрицы. Помимо (1) рассмотрим задачу

$$\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{\lambda}\tilde{x}. \tag{4}$$

Ограничимся случаем, когда все собственные значения простые. С точностью до членов второго порядка возмущение собственных значений за счет возмущения матрицы дается оценкой

$$|\tilde{\lambda}_i - \lambda_i| \le c_i \|\tilde{A} - A\|, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{5}$$

Мерой устойчивости собственного значения λ_i служит величина

$$c_i = \frac{\|x^{(i)}\| \|y^{(i)}\|}{|(x^{(i)}, y^{(i)})|} \tag{6}$$

которая называется *коэффициентом перекоса* матрицы A, соответствующим данному собственному значению. Здесь $y^{(i)}$ — собственный вектор матрицы A^T. Для нормированных собственных векторов задач (1) и (4) соответствующая оценка устойчивости имеет вид

$$\|\tilde{x}^{(i)} - x^{(i)}\| \le \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} \frac{c_i}{|\lambda_i - \lambda_j|} \|\tilde{A} - A\|.$$

В частности, для симметричной матрицы все коэффициенты перекоса равны единице и оценки устойчивости вычисления собственных значений оптимальны.

2. Степенной метод

Пусть матрица A диагонализуема, $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, все ее собственные значения простые и

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots |\lambda_n|.$$

Для заданного вектора $q^{(0)}$, имеющего единичную евклидову норму, *степенной метод* генерирует последовательность векторов $q^{(k)}$ следующим образом

```
for k in [1, 2, ...]:
    z[k] = A q[k+1]
    q[k] = z[k] / np.linalg.norm(z[k])
    lmbda[k] = np.dot(np.dot(A, q[k]), q[k])
```

Тем самым при использовании степенного метода находится максимальное по модулю собственное значение матрицы A.

Учитывая, что собственные значения матрицы A^1 есть $1/\lambda_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, используя последовательности (*обратные итерации*)

$$y^{k+1} = A^{-1} y^k, \quad k = 0, 1, \ldots$$

находится минимальное по модулю собственное значение матрицы A.

3. QR-алгоритм

Прямые и обратные итерации хорошо приспособлены для определения отдельных собственных значений и собственных векторов. Для решения спектральной задачи в целом используется QR алгоритм. Он основан на представлении матрицы A в виде произведения $A = QR$, где Q — ортогональная $Q^T Q = E$, а R — верхняя треугольная матрицы

4. Задачи

Задача 1: Нахождение максимального собственного значения степенным методом

Написать программу для нахождения максимального по модулю собственного значения и соответствующего собственного вектора симметричной матрицы с помощью степенного метода. С ее помощью найдите максимальное по модулю собственное значение матрицы Гильберта A, когда

$$a_{ij} = \frac{1}{i + j - 1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

при значениях n от 2 до 10.

Задача 2: Решение полной задачи на собственные значения

Написать программу для вычисления собственных значений трехдиагональной вещественной матрицы A с использованием QR алгоритма. Найти собственные числа трехдиагональной матрицы A, для которой

$$a_{ii} = 2, \quad a_{ii+1} = -1 - \alpha, \quad a_{ii-1} = -1 + \alpha, \quad i = 1, 2 \ldots, n - 1,$$

$$a_{00} = 2, \quad a_{01} = -1 - \alpha, \quad a_{n-1n} = -1 + \alpha, \quad a_{nn} = 2,$$

при различных значениях n и параметра α ($0 \leq \alpha \leq 1$). Сравнить найденные собственные значения с точными.

Предметный указатель