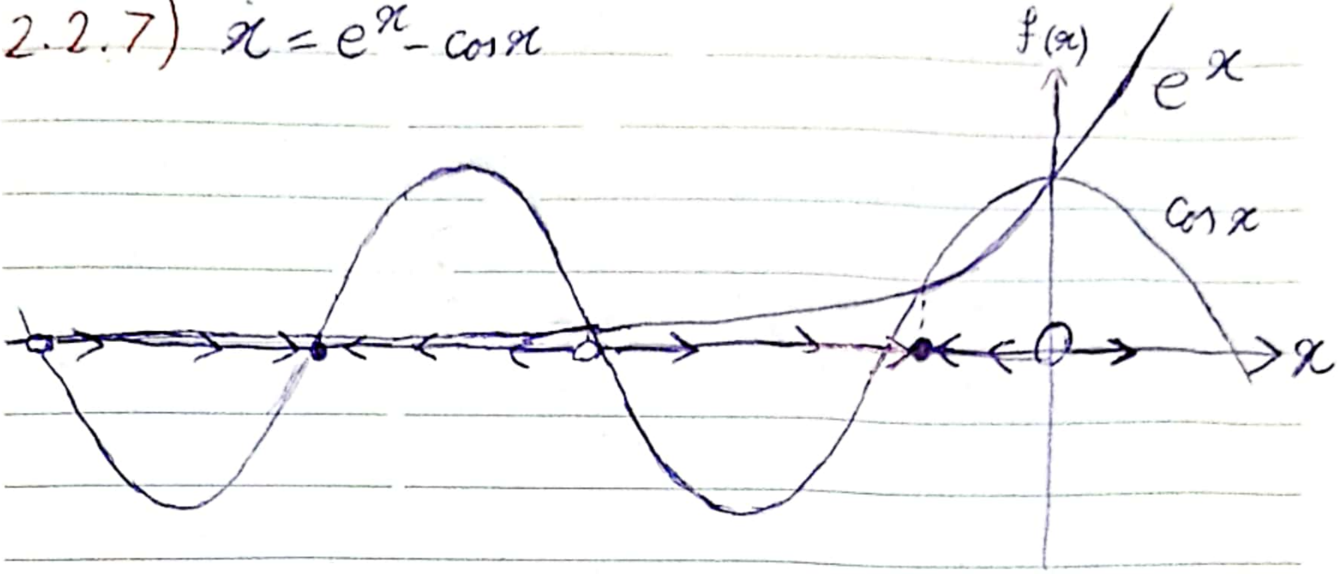
تمرین سری اول دینامیک غیرخطی و آشوب

۹۸۱۰۰۸۷۲ مائده شاملو احمدی

2.2.7) $\dot{x}=e^{x}-\cos x$



نقاط توخالی تعادل ناپایدار و نقاط توپر تعادل پایدار را نشان می‌دهند. در $x>0$ ، $\dot{x}>0$ و متحرک تا بی‌نهایت دور می‌شود. در $x<<0$ ، $e^{x}\approx 0$ و نقاط $x\approx(\frac{1}{2}-n)\pi$ تعادل پایدار را نشان می‌دهند.

2.2.13) a) $m\frac{dv}{dt}=mg-kv^2 \longrightarrow \int_{v_0}^{v}\frac{dv}{g-\frac{k}{m}v^2}=\int_0^t dt$

$$\frac{1}{g-\frac{k}{m}v^2}=\frac{1}{2\sqrt{g}}\left(\frac{1}{\sqrt{g}-\sqrt{\frac{k}{m}}v}+\frac{1}{\sqrt{g}+\sqrt{\frac{k}{m}}v}\right) \longrightarrow$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{gk}}\ln\left(\frac{\left(1-\sqrt{\frac{k}{mg}}v_0\right)\left(1+\sqrt{\frac{k}{mg}}v\right)}{\left(1-\sqrt{\frac{k}{mg}}v\right)\left(1+\sqrt{\frac{k}{mg}}v_0\right)}\right)=t \longrightarrow \frac{1+\sqrt{\frac{k}{mg}}v}{1-\sqrt{\frac{k}{mg}}v}=C_{(v_0)}e^{2\sqrt{\frac{gk}{m}}t}$$

$$\longrightarrow \boxed{v=\sqrt{\frac{mg}{k}}\,\frac{C_{(v_0)}e^{\sqrt{gk/m}\,t}-1}{C_{(v_0)}e^{\sqrt{gk/m}\,t}+1},\quad C_{(v_0)}=\frac{1-\sqrt{\frac{k}{mg}}v_0}{1+\sqrt{\frac{k}{mg}}v_0}}$$

$$v_0=0 \longrightarrow C_{(v_0)}=1 \longrightarrow \boxed{v=\sqrt{\frac{mg}{k}}\tanh\left(\sqrt{\frac{gk}{m}}t\right)}$$

b) $\boxed{v_{(t\to\infty)}=\sqrt{\frac{mg}{k}}}$

c) در $t\to\infty$ ، متحرک یک بعدی به نقطه تعادل $\dot{x}=0$ می‌رسد. پس در اینجا در $t\to\infty$ ، مقدار $\frac{dv}{dt}$ برابر صفر می‌شود. در نتیجه طبق معادله حرکت: $mg-kv^2=0 \rightarrow v=\sqrt{\frac{mg}{k}}$

d) $v_{avg} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \longrightarrow \boxed{v_{avg} \simeq 253\ ft/s}$

e) $\frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{mg}{k}} \tanh\left(\sqrt{\frac{gk}{m}}\,t\right) \xrightarrow{s(0)=0} s(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}} \int_0^t \tanh\left(\sqrt{\frac{gk}{m}}\,t\right) dt$

$\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x \longrightarrow \tanh x\, dx = \frac{\sinh x\, dx}{\cosh x} = \frac{d(\cosh x)}{\cosh x}$

$s(t) = \frac{m}{k} \int_0^{\cosh\left(\sqrt{\frac{gk}{m}}t\right)} \frac{1}{u}\, du \longrightarrow \boxed{s(t) = \frac{m}{k} \ln\left(\cosh\left(\sqrt{\frac{gk}{m}}\,t\right)\right)}$

$V = \sqrt{\frac{mg}{k}} \longrightarrow \boxed{s(t) = \frac{V^2}{g} \ln\left(\cosh\left(\frac{gt}{V}\right)\right)}$

$x \gg 1 : \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \simeq \frac{e^x}{2} \longrightarrow \ln(\cosh x) \simeq x - \ln(2)$

$\xrightarrow{\frac{gt}{V} \gg 1} s \simeq \frac{V^2}{g}\left(\frac{gt}{V} - \ln(2)\right) \longrightarrow \boxed{V \simeq \frac{gt}{2\ln 2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4s}{gt^2}\ln 2}\right)}$

(با توجه به اینکه با ثابت ماندن t و بزرگ شدن s، باید V بزرگ شود، جواب منفی معادله درجه دو قابل قبول است). با جایگذاری مقادیر g و s و t، به دست می‌آوریم $\boxed{v \simeq 266\ \frac{ft}{s}}$

2.3.6) a) $s(1-x)x^a - (1-s)x(1-x)^a = 0$: نقاط ثابت

$$\begin{cases} \left(\frac{1-x_1}{x_1}\right)^{a-1} = \frac{s}{1-s} \longrightarrow \boxed{x_1 = x^* = \left(1 + \left(\frac{s}{1-s}\right)^{\frac{1}{a-1}}\right)^{-1}} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

پس سه نقطه ثابت در $x=0$، $x=1$ و $x=x^*$ داریم.

b) $\frac{d\dot{x}}{dx} = -sx^a + as(1-x)x^{a-1} - (1-s)(1-x)^a + a(1-s)x(1-x)^{a-1}$

$\longrightarrow \frac{d\dot{x}}{dx} = sx^{a-1}\left[a - (1+a)x\right] + (1-s)(1-x)^{a-1}\left[(1+a)x - 1\right]$

پس در $x=0$، $\frac{d\dot{x}}{dx} = s-1<0$ و در $x=1$، $\frac{d\dot{x}}{dx} = -a<0$. پس هردوی این نقاط پایدار هستند.

طبق این نتیجه، در ابتدا $\dot{x}$ منفی و در انتهای بازه $(0,1)$، $\dot{x}$ مثبت است ($\dot{x}$ در 0 و 1 برابر 0 است)

پس علامت $\dot{x}$ در x^* (داخل بازه $(0,1)$) باید محور x را با شیب مثبت قطع کند که یعنی نقطه ناپایدار است.