Subject:
Date

تمرین سری ۹ دینامیک غیرخطی و آشوب

۹۸۱۰۰۸۷۲ صالح شاملو احمدی

7.2.19) a) جمله اول نشان می دهد با افزایش علاقه خودشان، نرخ رشد علاقه‌شان کم می‌شود. جمله دوم نشان می دهد فارغ از عوامل دیگر، یک علاقه پایه به هم دارند. جمله آخر یک بیشینه دارد، بنابراین نشان می دهد علاقه طرف مقابل در یک مقدار بهینه، نرخ رشد علاقه را بیشینه می کند و در کمتر و بیشتر از آن، تأثیر کمتری دارد، به هر حال هر علاقه‌ای از طرف مقابل، علاقه را افزایش می دهد.

---

b) اگر روی $S=0$، $\dot{S}$ نامنفی باشد و روی $R=0$، $\dot{R}$ نامنفی باشد، اگر به مرزهای ناحیه اول برسیم به داخل آن رانده می شویم و بنابراین نمی توانیم از این ناحیه خارج شویم. حال نشان می دهیم این شرط ها برقرار هستند.

$$S=0:\ \dot{S}=A_R+kRe^{-R}\xrightarrow{A_R,k,R>0}\dot{S}>0$$

$$R=0:\ \dot{R}=A_S+kSe^{-S}\xrightarrow{A_S,k,S>0}\dot{R}>0$$

از نظر روانشناسی، این یعنی این دو نفر اگر عاشق هم شوند، دیگر هرگز از هم متنفر نمی شوند.

---

c) $g(R,S)=1\longrightarrow\vec{\nabla}\cdot(g\dot{\vec{x}})=-1-1=-2<0\longrightarrow$ شرط دولاک برقرار است

7.3.5) $\dot{r}=\dot{x}\cos\theta+\dot{y}\sin\theta=\dfrac{\dot{x}x+\dot{y}y}{r}=\dfrac{x^4+2y^4+3x^2y^2-x^2-y^2}{r}$

$$\longrightarrow\dot{r}=\frac{x^2(x^2+y^2)+2y^2(x^2+y^2)-(x^2+y^2)}{r}=\frac{(x^2+2y^2-1)r^2}{r}$$

$$\longrightarrow\dot{r}=r(r^2+y^2-1)\longrightarrow\begin{cases}r>1\text{ در}: & \dot{r}>0\\ r\ll1\text{ در}: & \dot{r}<0\end{cases}$$

پس اگر $t\to-t$، ناحیه‌ای وجود دارد که متحرک در آن گیر بیفتد، پس طبق قضیه بندیکسون-پوانکاره، جواب تناوبی وجود دارد، و با تبدیل دوباره $-t\to t$ همچنان این جواب تناوبی وجود دارد.

7.5.5) مشابه درسنامه: $F(x):=x\left(\dfrac{|x|}{2}-1\right)$, $w:=\dot{x}+\mu F(x)\longrightarrow$

$$\begin{cases}\dot{x}=w-\mu F(x)\\ \dot{w}=-x\end{cases}\xrightarrow{y:=\frac{w}{\mu}}\begin{cases}\dot{x}=\mu(y-F(x))\\ \dot{y}=-\dfrac{x}{\mu}\end{cases}$$

Subject:
Date

مشابه معادله وان دِر پُل، متحرک با سرعت به خم پیچ می‌چسبد و بنابراین مقدار اصلی زمان چرخه مربوط به خزیدن روی خم پیچ است. در آنجا

$$y \approx F(x) \longrightarrow \frac{dy}{dt} \approx \frac{dx}{dt}\frac{dF}{dx} = \dot{x}(|x|-1) \xrightarrow[\bar{y}=-\frac{x}{\mu}]{} \frac{dx}{dt} = \frac{x}{\mu(1-|x|)}$$

نصف چرخه از جایی است که $F(x)$ به اکسترمم رسیده باشد تا جایی که $F(x)$ برابر مقدار آن در اکسترمم دیگر باشد. در این سؤال چون $F(x)$ مثل معادله وان دِر پُل فرد است، می‌توانیم زمان نصف چرخه را پیدا کنیم و برای به دست آوردن دوره تناوب کل، آن را ضرب در دو کنیم.

$$\frac{dF}{dx} = 0 \longrightarrow |x|-1=0 \longrightarrow x=\pm 1 \qquad F(-1)=\frac{1}{2} \rightarrow F_{(x_2>1)} = \frac{1}{2}$$

$$\longrightarrow x_2\left(\frac{|x_2|}{2}-1\right) = \frac{1}{2} \xrightarrow{x_2>0} x_2^2 - 2x_2 - 1 = 0 \longrightarrow x_2 = 1+\sqrt{2}$$

$$\frac{T}{2} = \left|\int_{x_1}^{x_2} \frac{\mu(1-|x|)}{x}\,dx\right| \xrightarrow{x>0} T = 2\left|\int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{\mu(1-x)}{x}\,dx\right| \longrightarrow$$

$$T = 2\mu(\ln x - x)\Big|_{1+\sqrt{2}}^{1} = \boxed{2\mu\left(\sqrt{2} - \ln(1+\sqrt{2})\right)}$$

7.6.15) $\ddot{x} + \sin x \approx \ddot{x} + x - \frac{x^3}{6} = 0 \longrightarrow \ddot{x} + x + \epsilon h(x) = 0,$

a)

تابع فرد

$$h(x) = -x^3,\ \epsilon = \frac{1}{6} \longrightarrow \begin{cases} r' = \langle h\sin\theta\rangle = \langle -r^3\cos^3\theta\sin\theta\rangle = 0 \\ r\varphi' = \langle h\cos\theta\rangle = \langle -r^3\cos^4\theta\rangle = -\frac{3}{8}r^3 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} r = r_0 \\ \varphi = \varphi_0 - \frac{3r_0^2 T}{8} \end{cases},\quad \omega = \frac{d\theta}{dt} = 1 + \epsilon\varphi' \longrightarrow \omega = 1 - \frac{3\epsilon a^2}{8} \xrightarrow{\epsilon=\frac{1}{6}}$$

$$\omega = 1 - \frac{a^2}{16}$$ ✓

---

b) $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{1-\frac{a^2}{16}} \xrightarrow{a \ll 1} T = 2\pi\left(1 + \frac{a^2}{16} + O(a^4)\right)$ ✓