تمرین سری ده دینامیک غیرخطی و آشوب

صالح شاملو احمدی

۱۷ اردیبهشت ۱۴۰۲

۱ مسئله 8.1.15

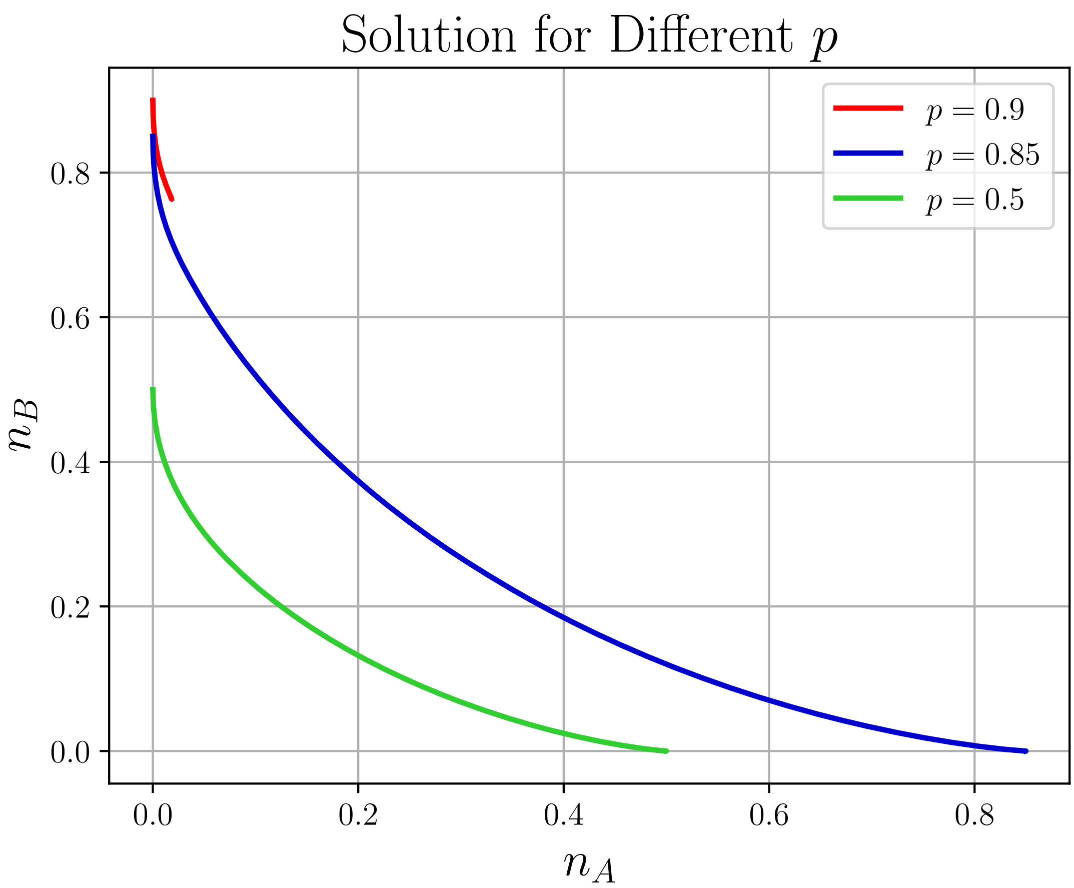
$$\begin{cases} \dot{n}_A = (p+n_A)n_{AB} - n_A n_B & \text{(۱آ)} \\ \dot{n}_B = n_B n_{AB} - (p+n_A)n_B & \text{(۱ب)} \\ n_{AB} = 1-(p+n_A)-n_B & \text{(۱ج)} \end{cases}$$

اشتباه تایپی سؤال مربوط به معادله (۱ب) است که در آن جمله دوم $-(p+n_A)n_{AB}$ چاپ شده. این جمله باید به شکل اول باشد چون تعدادی که از معتقدان B کم می‌شود، متناسب با تعداد معتقدان خود B است و به دسته بی‌طرف AB ربطی ندارد.

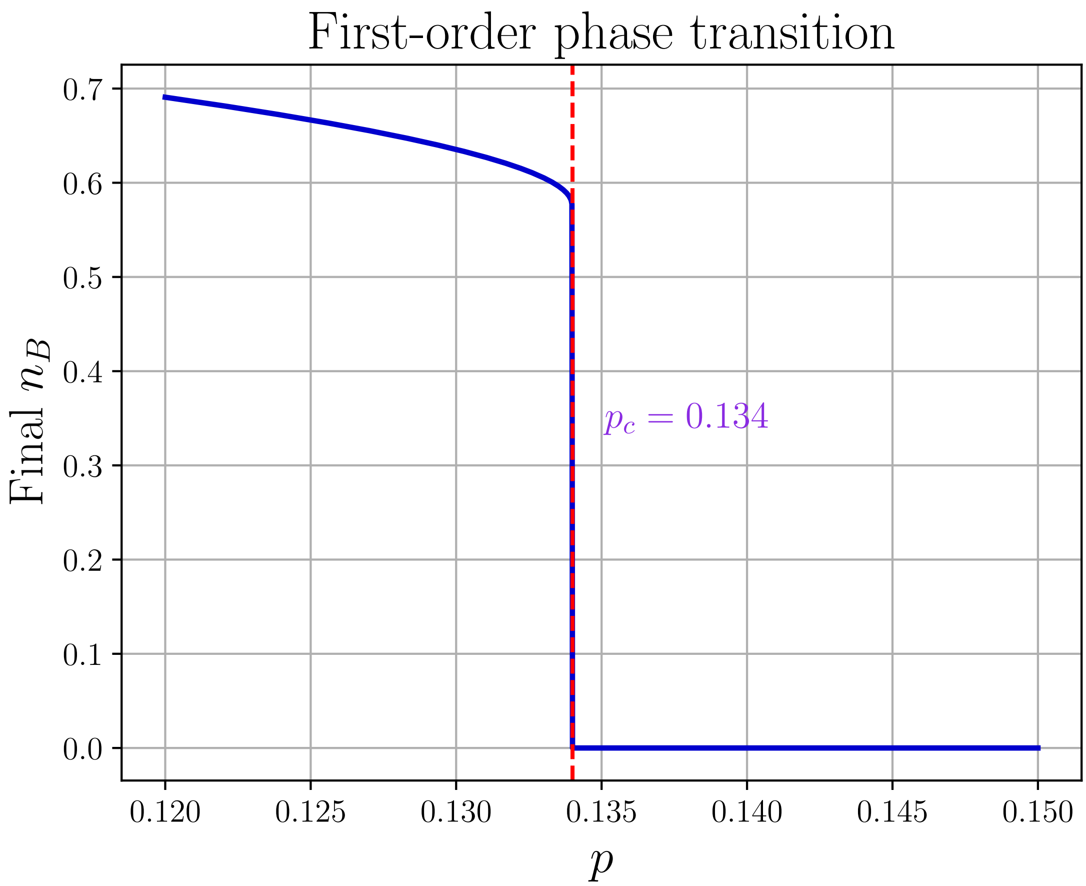
۱.۱ a

- جمله اول رابطه $\dot{n}_A$ (جمله $(p+n_A)n_{AB}$): متناسب با تعداد کل معتقدان A و دسته بی‌طرف AB، برهم‌کنش بین A و AB داریم که نتیجه آن افزایش تعداد معتقدان غیرمتعصب A است.
- جمله دوم رابطه $\dot{n}_A$ (جمله $-n_A n_B$): متناسب با تعداد معتقدان غیرمتعصب A و تعداد معتقدان B، برهم‌کنش بین A و B به شکلی داریم که B قانع‌کننده و A قانع‌شونده باشد که نتیجه آن افزایش تعداد دسته بی‌طرف AB و کم شدن از معتقدان غیرمتعصب A است.
- جمله اول رابطه $\dot{n}_B$ (جمله $n_B n_{AB}$): متناسب با تعداد معتقدان B و دسته بی‌طرف AB، برهم‌کنش بین B و AB داریم که نتیجه آن افزایش تعداد معتقدان B است.
- جمله دوم رابطه $\dot{n}_B$ (جمله $-(p+n_A)n_B$): متناسب با تعداد کل معتقدان A و تعداد معتقدان B، برهم‌کنش بین A و B به شکلی داریم که A قانع‌کننده و B قانع‌شونده باشد که نتیجه آن افزایش تعداد دسته بی‌طرف AB و کم شدن از معتقدان B است.

۲.۱ b



شکل ۱: حل تحول سیستم برای pهای مختلف



شکل ۲: دوشاخگی واقع در $p_c \approx 1.134$ که منجر به یک گذار فاز مرتبه اول می‌شود.

۳.۱ c

$$\dot{n}_B = 0 \implies \begin{cases} n_B = 0 & \text{(۲آ)} \\ n_{AB} = p + n_A \implies n_B = 1 - 2p - 2n_A & \text{(۲ب)} \end{cases}$$

(۳آ)

(۳ب)

$$\dot{n}_A = 0 \implies \begin{cases} n_A = 1 - p; \quad n_B = 0 \\ 3n_A^2 + (4p-1)n_A + p^2 = 0 \implies n_A = \dfrac{1 - 4p \pm \sqrt{4p^2 - 8p + 1}}{6} \end{cases}$$

بنابراین نقاط ثابت برابرند با

$$\begin{cases} (n_A^*, n_B^*) = (1-p, 0), & \text{(۴آ)} \\ \left(n_A^{*'}, n_B^{*'}\right) = (\dfrac{1-4p \pm \sqrt{4p^2-8p+1}}{6}, 1 - \dfrac{1+2p \pm \sqrt{4p^2-8p+1}}{6}). & \text{(۴ب)} \end{cases}$$

نقاط $n^{*'}$ وقتی با هم برابر می‌شوند که

$$4p^2 - 8p + 1 = 0 \xRightarrow{0<p<1} p = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, \tag{۵}$$

بنابراین در این p دوشاخگی داریم.

برای اینکه نشان دهیم در p بزرگ‌تر از $p_c = 1 - \sqrt{3}/2$ تحت هر شرایطی جمعیت متعصب معتقد به A در نهایت همه را معتقد به A می‌کنند، باید نشان دهیم در این مقدار p، نقطه ثابت (n_A^*, n_B^*) پایدار است. بدین منظور، ژاکوبی را در این نقطه محاسبه می‌کنیم.

$$J_{(n_A, n_B)} = \begin{pmatrix} 1 - 2(p + n_A + n_B) & -2(p + n_A) \\ -2n_B & 1 - p - 2(n_A + n_B) \end{pmatrix} \implies \tag{۶}$$

$$J_{(n_A^*, n_B^*)} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & p-1 \end{pmatrix} \implies \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = p - 1 \tag{۷}$$

بنابراین هر دو ویژه مقدار ژاکوبی در این نقطه در هر شرایطی منفی هستند، پس این نقطه ثابت پایدار است و در غیاب دو نقطه دیگر تمام مسیرها به آن ختم می‌شوند.

۴.۱ d

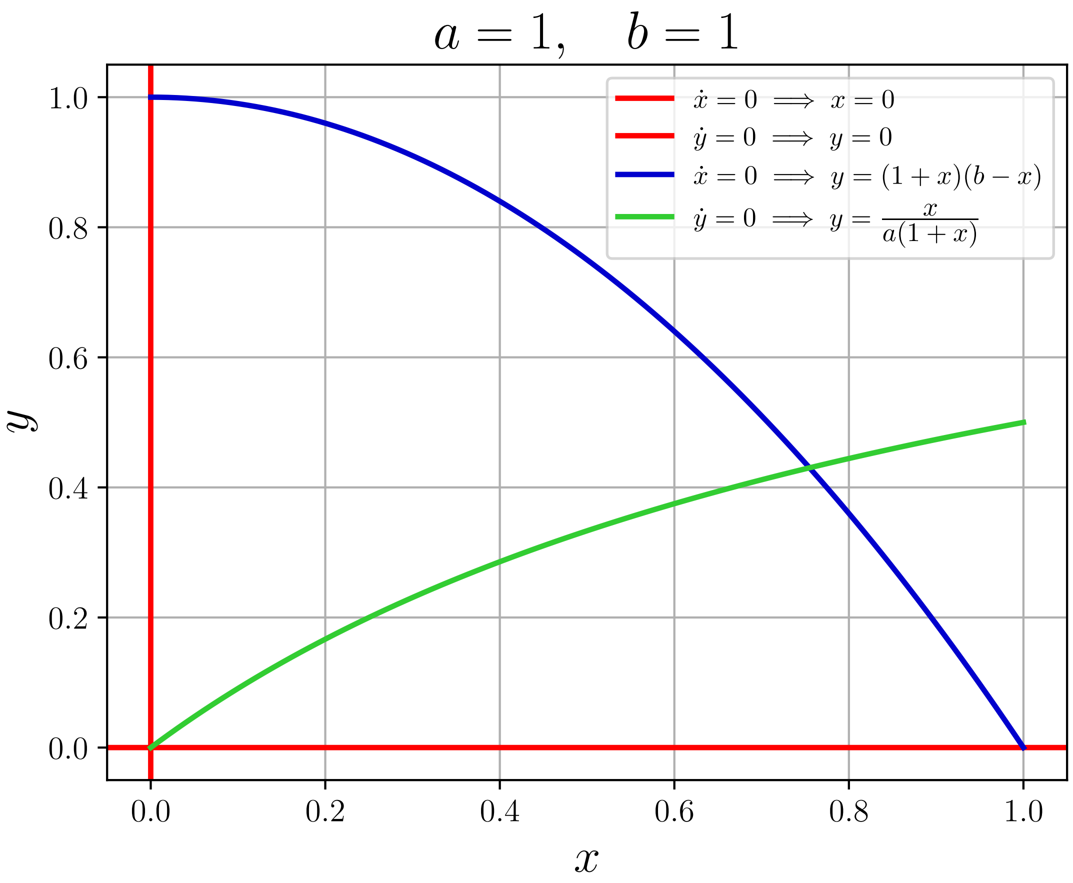
دوشاخگی از نوع زین–گره است چون دو نقطه ثابت نزدیک هم می‌شوند و همدیگر را نابود می‌کنند.

۲ مسئله 8.2.9

۱.۲ a

با توجه به نمودار، سه نقطه ثابت داریم: $(0,0)$، $(b,0)$ و یک نقطه که محل تقاطع خم‌های $y = x/a(1+x)$ و $y = (1+x)(b-x)$ است. حال پایداری نقاط ثابت را با محاسبه ژاکوبی بررسی می‌کنیم.

$$J = \begin{pmatrix} b - \dfrac{y}{(1+x)^2} - 2x & \dfrac{-x}{1+x} \\ \dfrac{y}{(1+x)^2} & \dfrac{x}{1+x} - 2ay \end{pmatrix} \tag{۸}$$



شکل ۳: خم‌های پوچ

$$J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{b>0} \text{ناپایدار} \tag{۹}$$

$$J_{(b,0)} = \begin{pmatrix} -b & \frac{-b}{1+b} \\ 0 & \frac{b}{1+b} \end{pmatrix} \implies \lambda_1 = -b < 0 < \frac{b}{1+b} = \lambda_2 \implies \text{ناپایدار} \tag{۱۰}$$

بنابراین این دو نقطه نمی‌توانند دوشاخگی داشته باشند. نقطه سوم هم فقط می‌تواند دوشاخگی Hopf داشته باشد چون همواره یک نقطه است و به چند نقطه تبدیل نمی‌شود.

۲.۲ b

خم پوچ $y=(1+x)(b-x)$ تقعر منفی و عرض از مبدأ مثبت دارد و خم پوچ $y=x/a(1+x)$ عرض از مبدأ صفر دارد و در $x>0$ اکیداً صعودی است، پس در یک و تنها یک نقطه همدیگر را قطع می‌کنند که تنها نقطه ثابت سیستم در $x>0$ و $y>0$ است که همواره هم وجود دارد.

۳.۲ c

$$\tau = b - \frac{y^*}{(1+x^*)^2} - 2x^* + \frac{x^*}{1+x^*} - 2ay^* \tag{۱۱}$$

با استفاده از روابط مربوط به خم‌های پوچ،

$$\tau = b - \frac{(1+x^*)(b-x^*)}{(1+x^*)^2} - 2x^* + \frac{x^*}{1+x^*} - \frac{2ax^*}{a(1+x^*)} \tag{۱۲}$$

$$= b - \frac{b-x^*}{1+x^*} - 2x^* + \frac{x^*}{1+x^*} - \frac{2x^*}{1+x^*} \tag{۱۳}$$

$$= b - 2x^* - \frac{b}{1+x^*}, \tag{۱۴}$$

$$\tau = 0 \implies x^* = \frac{b-2}{2}. \tag{۱۵}$$

حال با برابر قرار دادن خم‌های پوچ،

$$y = (1+x^*)(b-x^*) = \frac{x^*}{a(1+x^*)} \implies a = \frac{x^*}{(b-x^*)(1+x^*)^2} \tag{۱۶}$$

و با جایگذاری x^* از رابطه (۱۵)

$$a = \frac{\frac{b-2}{2}}{\left(\frac{b}{2}\right)^2\left(\frac{b+2}{2}\right)} = \frac{4(b-2)}{b^2(b+2)} = a_c. \tag{۱۷}$$

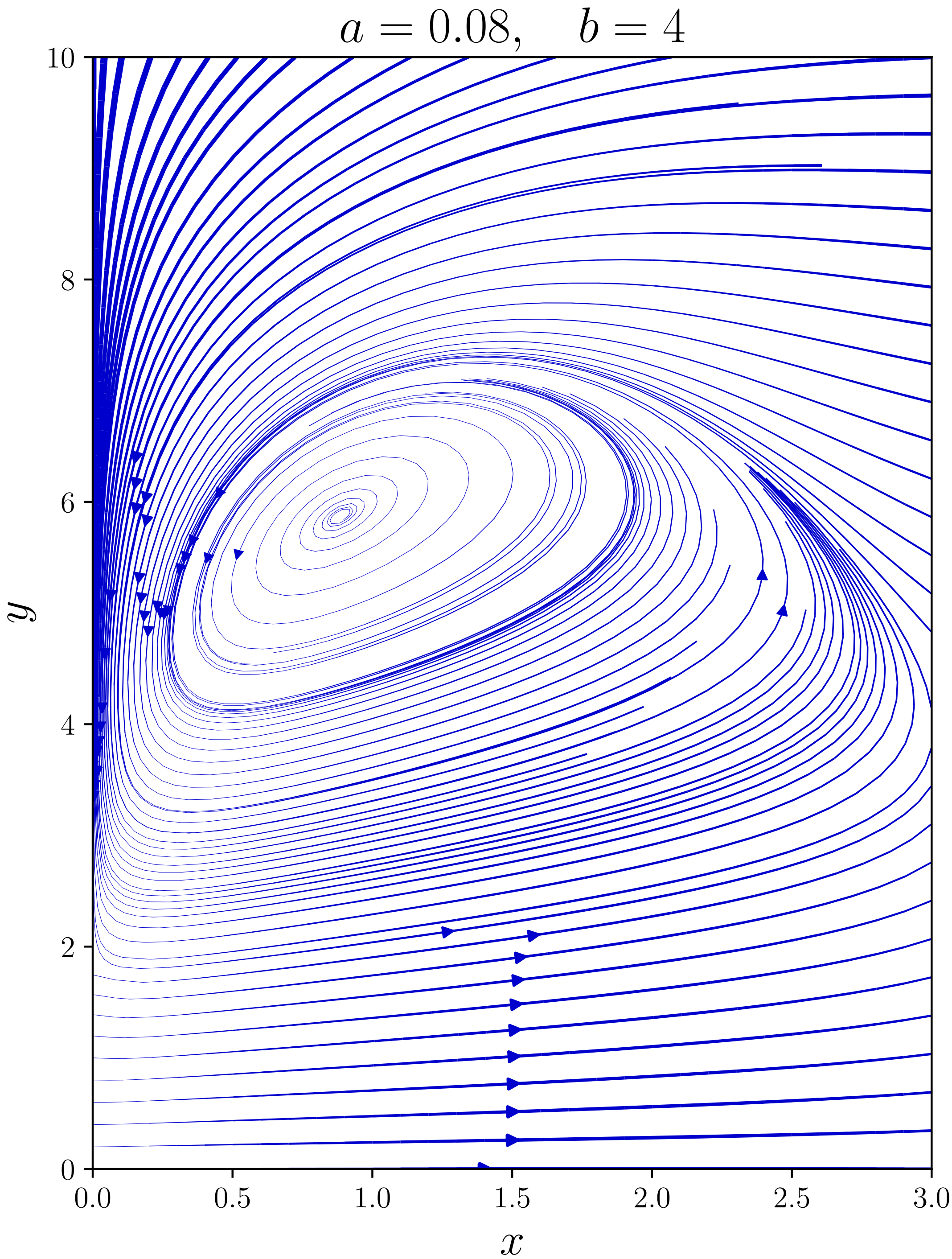
در آخر باید دترمینان ژاکوبی در نقطه ثابت مثبت باشد تا دوشاخگی Hopf داشته باشد. با جایگذاری y از روابط خم پوچ و b از رابطه (۱۵)،

$$J_{(x^*,y^*)} = \begin{pmatrix} b - \frac{b-x^*}{1+x^*} - 2x & \frac{-x^*}{1+x^*} \\ \frac{b-x^*}{1+x^*} & \frac{x^*}{1+x^*} - \frac{2x^*}{1+x^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x^*}{1+x^*} & \frac{-x^*}{1+x^*} \\ \frac{2+x^*}{1+x^*} & \frac{-x^*}{1+x^*} \end{pmatrix} \tag{۱۸}$$

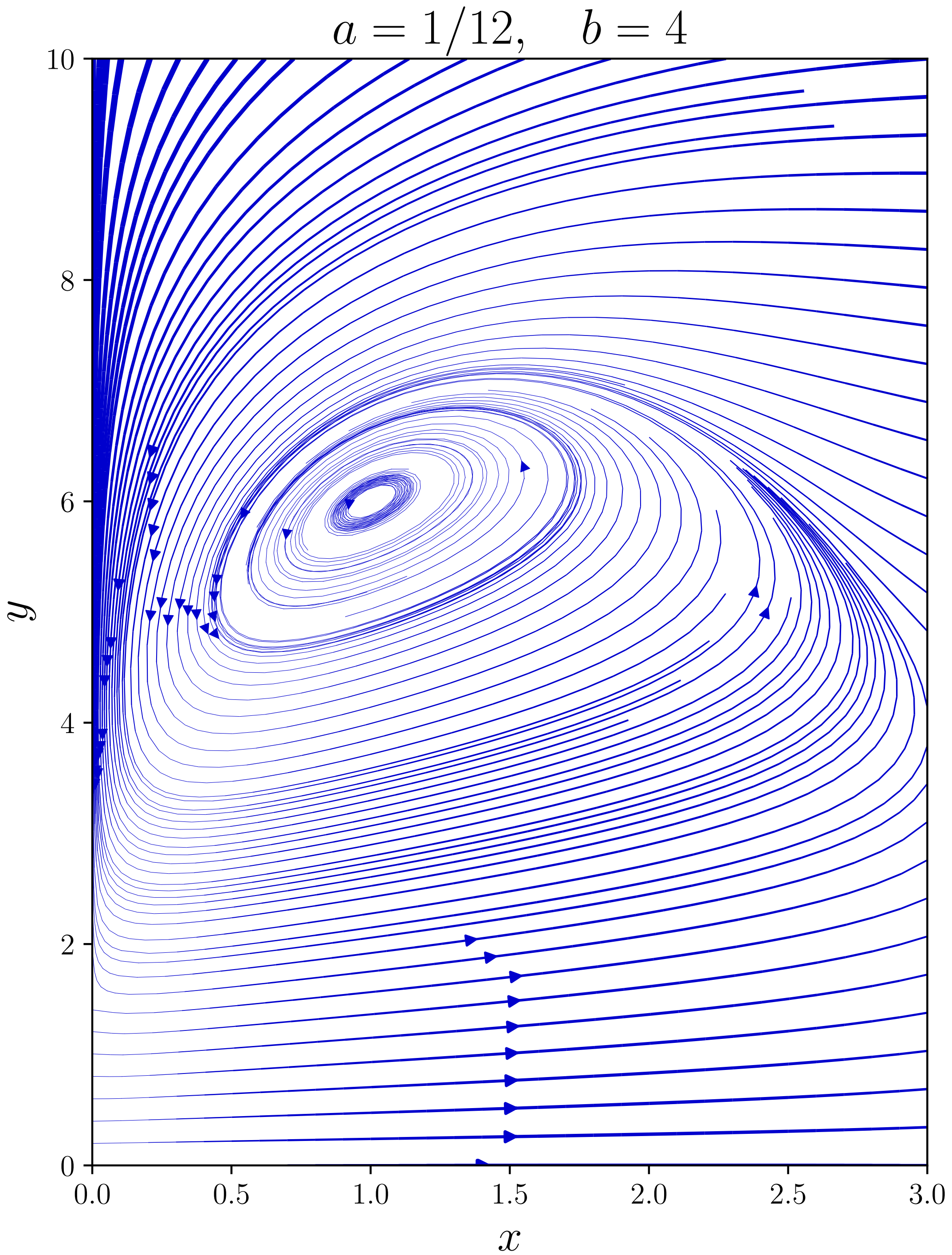
$$\Delta = \frac{2x^*}{(1+x^*)^2} > 0 \quad \checkmark \tag{۱۹}$$

۴.۲ d

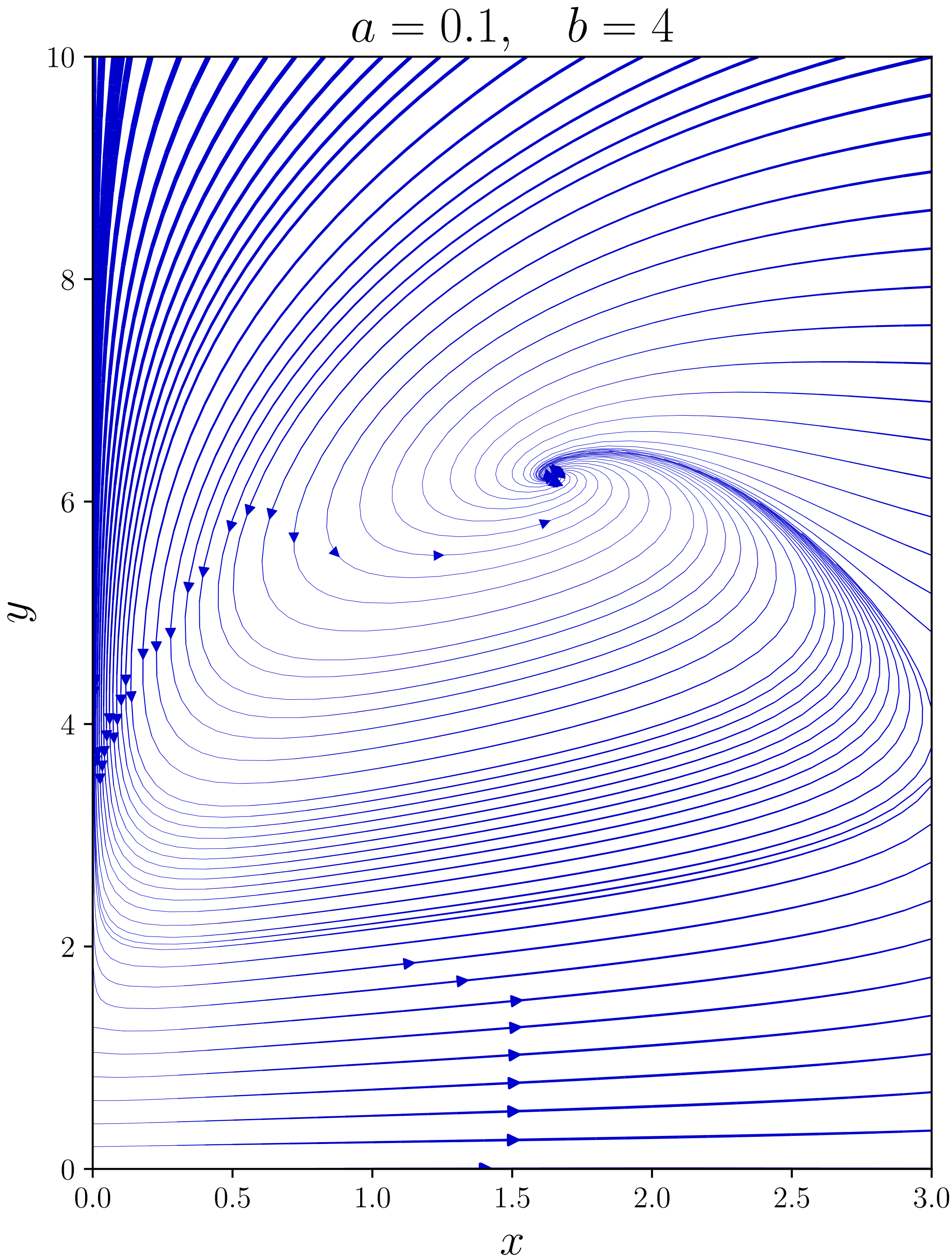
با توجه به نمودارها، دوشاخگی Hopf فرابحرانی است.



شکل ۴: بالای نقطه بحرانی



شکل ۵: نقطه بحرانی



شکل ۶: زیر نقطه بحرانی