Subject:
Date


تمرین سری هفتم دینامیک غیرخطی و آشوب

صالح شاملو احمدی ۹۸۱۰۰۸۷۲


6.5.7) a) $\frac{dv}{d\theta}+u=\alpha+\varepsilon u^2 \quad , \quad \frac{du}{d\theta}=v$

b) $\frac{du}{d\theta}=0 \longrightarrow \boxed{v^*=0} \qquad \frac{dv}{d\theta}=0 \longrightarrow \varepsilon u^2-u+\alpha=0 \longrightarrow \boxed{u^*=\frac{1\pm\sqrt{1-4\varepsilon\alpha}}{2\varepsilon}}$

c) $\begin{pmatrix}\dot u\\ \dot v\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix} \longrightarrow A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2\varepsilon u-1 & 0\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases}\lambda_1+\lambda_2=0 \xrightarrow{\text{نقاط تعادل، مرکز هستند}} \\ \lambda_1\lambda_2=1-2\varepsilon u\end{cases}$

$\longrightarrow \begin{cases} u=\frac{1+\sqrt{1-4\varepsilon\alpha}}{2\varepsilon} : \lambda_1\lambda_2=-\sqrt{1-4\varepsilon\alpha} \longrightarrow \text{زین-گره} \\ u=\frac{1-\sqrt{1-4\varepsilon\alpha}}{2\varepsilon} : \lambda_1\lambda_2=\sqrt{1-4\varepsilon\alpha} \longrightarrow \text{مرکز خطی}\end{cases}$

پس نقطه $(u,v)=\left(\frac{1-\sqrt{1-4\varepsilon\alpha}}{2\varepsilon},0\right)$ یک مرکز خطی است. برای تست کردن اینکه آیا مرکز غیرخطی نیز هست، کافیست انرژی را حساب کنیم و چک کنیم این نقطه در کمینه انرژی قرار دارد یا نه. برای بدست آوردن انرژی تعمیم یافته در این حالت، کافیست $x$ را با $u$ و $t$ را با $\theta$ جابجا کنیم.

$E=\frac{1}{2}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2-\int\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)du=\frac{v^2}{2}-\int(\alpha+\varepsilon u^2-u)\,du \longrightarrow$

$E=\frac{v^2}{2}-\frac{\varepsilon u^3}{3}+\frac{u^2}{2}-\alpha u \qquad \vec{\nabla}E=\begin{pmatrix}\varepsilon u^2-u+\alpha\\ v\end{pmatrix} \longrightarrow (\vec{\nabla}E=0)$ اکسترمم انرژی همان تعریف نقاط ثابت است.

$\begin{vmatrix}E_{uu} & E_{uv}\\ E_{vu} & E_{vv}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2\varepsilon u-1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=2\varepsilon u-1=-\lambda_1\lambda_2$

پس نقطه $(u,v)=\left(\frac{1-\sqrt{1-4\varepsilon\alpha}}{2\varepsilon},0\right)$ مرکز غیرخطی است (در کمینه $E$ است) و نقطه ثابت دیگر، مرکز غیرخطی هم نیست چون در بیشینه انرژی قرار دارد.

d) $u=\frac{1}{r} \xrightarrow[\text{نقاط ثابت}]{\text{در}} r=\frac{2\varepsilon}{1-\sqrt{1-4\varepsilon\alpha}}=\text{constant} \longrightarrow$ شعاع در نقاط ثابت، خود ثابت است پس این نقاط مسیر دایره‌ای را نشان می‌دهند.

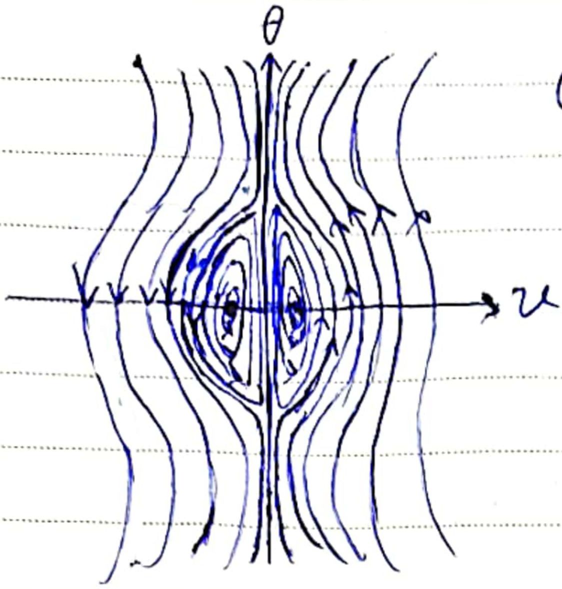
6.5.14) a) $E=v^3-3v\cos\theta \longrightarrow \frac{dE}{dt}=3\dot v v^2-3\dot v\cos\theta+3v\dot\theta\sin\theta$

$\xrightarrow{v\dot\theta=-\cos\theta+v^2} \dot E=3\dot v v^2-3\dot v\cos\theta-3\sin\theta\cos\theta+3v^2\sin\theta \xrightarrow[(D=0)]{\dot v=-\sin\theta}$

$\dot E=3\left(-v^2\sin\theta+\sin\theta\cos\theta-\sin\theta\cos\theta+v^2\sin\theta\right) \longrightarrow \dot E=0$ ✓

P4PCO

Subject :
Date




در مرکزها
$$\begin{cases} \dfrac{dE}{d\theta}=0 \rightarrow v\sin\theta = 0 \\ \dfrac{dE}{dv}=0 \rightarrow v^2-\cos\theta=0 \end{cases}$$

پس مرکزها $(v,\theta)=(\pm 1, 0)$ هستند.

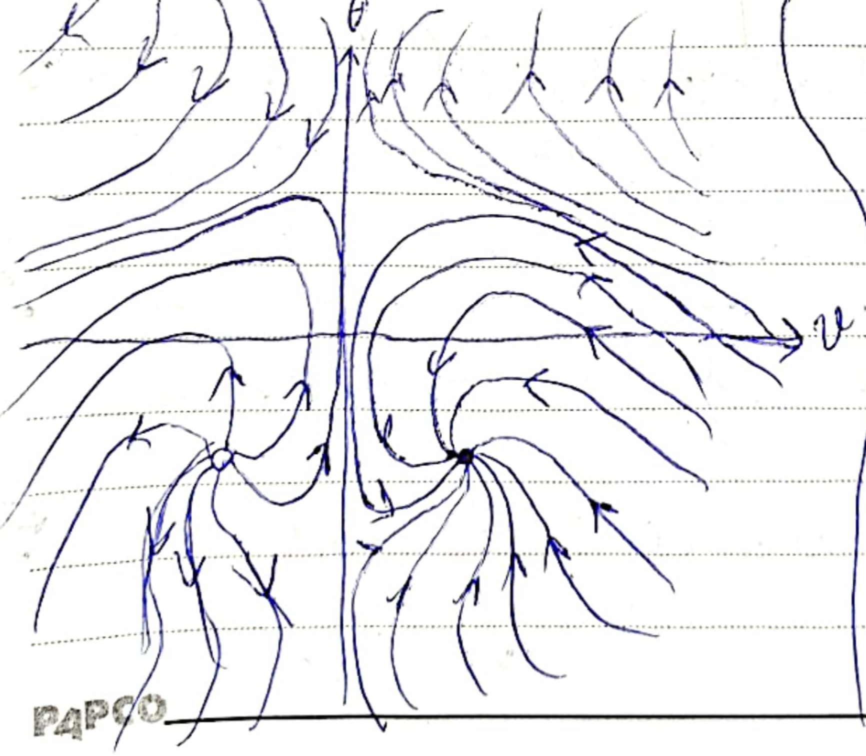
در نقاط نزدیک به مرکزها، گلایدر به صورت موجی زاویه خود را کم و زیاد می‌کند اما جهت سرعت خود را حفظ می‌کند و به یک سمت حرکت می‌کند. در نقاط دورتر، دور یک نقطه دوری می‌زنند (در یک حلقه حرکت می‌کند)

b) نقاط ثابت
$$\begin{cases} \dot v = 0 \rightarrow Dv^2=-\sin\theta \\ \dot\theta = 0 \rightarrow v^2=\cos\theta \end{cases} \rightarrow D=-\tan\theta \rightarrow \theta=-\tan^{-1}D$$
$$\rightarrow v=\pm\sqrt{\cos(\tan^{-1}D)}$$

$$\begin{pmatrix}\dot v\\ \dot\theta\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -2Dv & -\cos\theta \\ \frac{\cos\theta}{v^2}+1 & \frac{\sin\theta}{v}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} v\\ \theta\end{pmatrix} \rightarrow \lambda_1+\lambda_2=\frac{\sin\theta-2Dv^2}{v}=\frac{3\sin\theta}{v} \xrightarrow{\theta^*<0} \begin{cases} v^*>0 : \text{پایدار} \\ v^*<0 : \text{ناپایدار}\end{cases}$$

$$\lambda_1\lambda_2=-2D\sin\theta+\cos\theta+\frac{\cos^2\theta}{v^2} \rightarrow \tau^2-4\Delta=\frac{9\sin^2\theta}{v^2}+8D\sin\theta-4\cos\theta-\frac{4\cos^2\theta}{v^2} \rightarrow$$
$$\rightarrow \tau^2-4\Delta=-D\sin\theta-8\cos\theta=\cos\theta(-D\tan\theta-8)=\cos\theta(D^2-8)<0$$

نقاط تعادل، مارپیچ هستند.




پس در حالت $D>0$، تعادل در حالتی است که گلایدر با زاویه‌ای پایین بیاید که انرژی اتلافی با انرژی گرانشی جبران شود تا سرعت ثابت بماند. این نقطه تعادل، جاذب است و از هر زاویه و سرعتی شروع کنیم به همان می‌رسیم. دقت کنید که $v<0$ فیزیکی نیست (اندازه سرعت طبق تعریف مثبت است)