تمرین سری چهارده دینامیک غیرخطی و آشوب

صالح شاملو احمدی

۲۶ خرداد ۱۴۰۲

۱ اسفنج و ابراسفنج منژر (مسئله **11.3.9**)

برای اسفنج منژر (Menger sponge) به ازای هر شش وجه و مرکز، یک زیرمکعب کاهش می یابد. پس $m = 27 - 6 - 1 = 20$. از طرفی هر زیرمکعب سه برابر از مکعب اصلی کوچک‌تر است. پس

$$d = \frac{\ln m}{\ln r} = \frac{\ln 20}{\ln 3} \approx 2.73. \tag{۱}$$

چون حجم اسفنج منژر به صفر میل می‌کند اما سطح آن به بی‌نهایت میل می‌کند، بُعد آن باید بین 2 و 3 باشد که نشان می‌دهد عددی که برای بُعد بدست آوردیم منطقی است.

برای ابراسفنج منژر (Menger hypersponge) در N بُعد، همچنان $r = 3$ و برای پیدا کردن m باید الگویی برای تعداد زیر–ابرمکعب‌هایی که از 3^N زیر–ابرمکعب باقی می‌مانند پیدا کنیم. برای این منظور، هندسه مسئله را به مختصات تبدیل می‌کنیم تا به نوعی بتوانیم آن را کمّی کنیم. برای فرش سرپینسکی، یک عدد به ردیف و یک عدد به ستون نسبت می‌دهیم، طوری که جفت عدد (x, y) مکان هر مربع را توصیف کند. در این صورت مربع $(2, 2)$ حذف می‌شود. اگر همین کار را برای اسفنج منژر با سه عدد (x, y, z) تکرار کنیم، مکعب‌هایی حذف می‌شوند که حداقل دو عدد 2 در مختصات خود داشته باشند. این معادل این است که هر مکعبی روی صفحه‌ای دو بُعدی در وسط قرار بگیرد، حذف می‌شود. این روش ساختن هر نوع ابراسفنج منژر است؛ در N بُعد، اگر مختصات با حداقل دو عدد 2 حذف شوند، مختصات باقی مانده مربوط به یک عدد 2 و هیچ عدد 2 است. برای اولی باید یک مختصه را انتخاب کنیم و برابر 2 قرار دهیم و بقیه مختصات را برابر عدد 1 یا 3 قرار دهیم. برای دومی باید تمام مختصات را برابر عدد 1 یا 3 قرار دهیم. در این صورت، با استفاده از ترکیبیات،

$$m_N = \binom{N}{1} 2^{N-1} 2^{N-1} + 2^N = 2^{N-1}(N + 2), \tag{۲}$$

پس

$$d_N = \frac{\ln m_N}{\ln r} = \frac{\ln\bigl(2^{N-1}(N + 2)\bigr)}{\ln 3} = \frac{(N - 1)\ln 2 + \ln(N + 2)}{\ln 3}. \tag{۳}$$

با استفاده از این رابطه، مطابق انتظار

$$d_2 = \frac{\ln(2^{2-1}(2+2))}{\ln 3} = \frac{\ln 8}{\ln 3}, \quad \checkmark \tag{۴}$$

$$d_3 = \frac{\ln(2^{3-1}(3+2))}{\ln 3} = \frac{\ln 20}{\ln 3}, \quad \checkmark \tag{۵}$$

و به عنوان مثال در $N = 4$

$$d_4 = \frac{\ln(2^{4-1}(4+2))}{\ln 3} = \frac{\ln 48}{\ln 3}. \tag{۶}$$

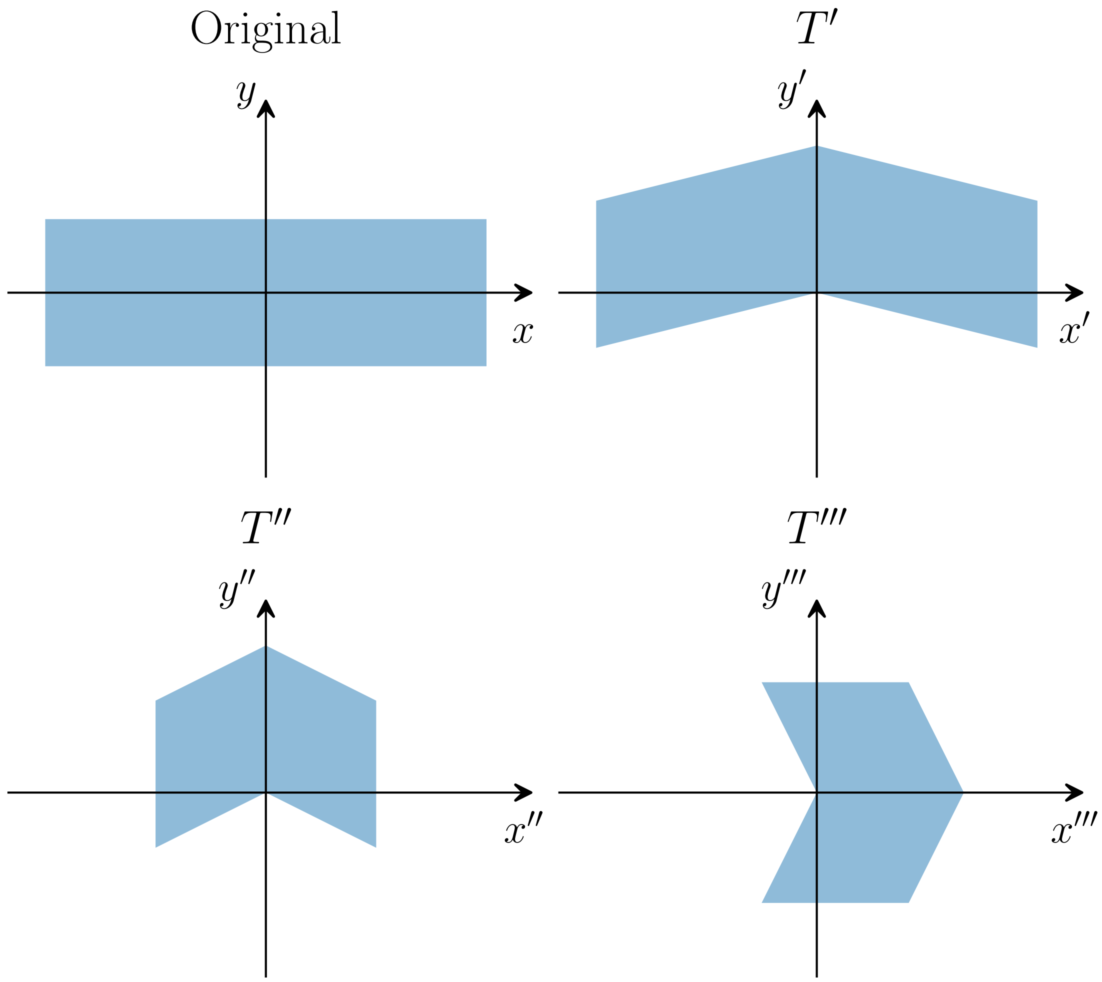
۲ نگاشت لُزی (Lozi)

$$x_{n+1} = 1 + y_n - a|x_n|, \qquad y_{n+1} = bx_n \tag{۷}$$

۱.۲ 12.2.14

مشابه نگاشت هنون (Hénon) تبدیل‌های T تشکیل‌دهنده نگاشت را تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} T' : x' = x, \quad y' = 1 + y - a|x| & \text{(۸آ)} \\ T'' : x'' = bx', \quad y'' = y' & \text{(۸ب)} \\ T''' : x''' = y'', \quad y''' = x'' & \text{(۸ج)} \end{cases}$$



شکل ۱: مراحل اعمال نگاشت لُزی روی یک مستطیل سه در یک برای $a = 0.25$ و $b = 0.5$

۲.۲ 12.2.15

ژاکوبی نگاشت لُزی برابر است با

$$J = \begin{pmatrix} -a\,\mathrm{sgn}(x) & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}, \tag{۹}$$

پس دترمینان J که نسبت مساحت بعد به قبل اعمال نگاشت است برابر است با

$$\det(J) = -b. \tag{۱۰}$$

نگاشت در حالتی که $|\det(J)| < 1$ مساحت‌ها را کوچک می‌کند. این یعنی

$$-1 < b < 1 \tag{۱۱}$$

۳.۲ 12.2.16

در نقاط ثابت $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_n, y_n) = (x^*, y^*)$. پس

$$\begin{cases} x^* = 1 + y^* - a|x^*|, & (۱۲) \\ y^* = bx^*, & (۱۳) \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} x^* > 0: \quad x^* = 1 + bx^* - ax^* \implies x^* = \dfrac{1}{1+a-b}, & (\text{۱۴آ}) \\ x^* < 0: \quad x^* = 1 + bx^* + ax^* \implies x^* = \dfrac{1}{1-a-b}. & (\text{۱۴ب}) \end{cases}$$

در آخر با رعایت خودسازگاری،

$$(x^*, y^*) = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{1+a-b}, \dfrac{b}{1+a-b}\right), \quad a > b - 1, & (\text{۱۵آ}) \\ \left(\dfrac{1}{1-a-b}, \dfrac{b}{1-a-b}\right), \quad a > 1 - b. & (\text{۱۵ب}) \end{cases}$$

با استفاده از ویژه‌مقادیر ماتریس ژاکوبی برای خطی‌سازی، برای هر دو نقطه

$$\lambda_{\pm} = \frac{-a\,\mathrm{sgn}(x) \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2} \tag{۱۶}$$

حال نامعادله مربوط به پایداری $|\lambda_{\pm}| < 1$ را حل می‌کنیم.

$$\left|a\,\mathrm{sgn}(x) \pm \sqrt{a^2 + 4b}\right| < 2 \tag{۱۷}$$

با حالت‌بندی و حل این معادله (محاسبات آن تکرار زیاد دارد و نیازی نمی‌بینم در اینجا آن را کامل بنویسم)،

$$\begin{cases} b - 1 < a < 1 - b, & (۱۸) \\ \quad -1 < b < 1. & (۱۹) \end{cases}$$

این محدوده در صفحه $a - b$ یک مثلث با رأس‌های $(-1, 2)$، $(-1, -2)$ و $(1, 0)$ است. داخل این مثلث هر دو نقطه پایدار و خارج آن هر دو نقطه ناپایدار هستند.

۴.۲ 12.2.17

در چرخه دوتایی $(x_{n+2}, y_{n+2}) = (x_n, y_n) = (x, y)$، پس

$$\begin{cases} x = 1 + bx - a|1 + y - a|x||, & (۲۰) \\ y = b(1 + y - a|x|), & (۲۱) \end{cases}$$

با حل این معادلات

$$(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{1-a-b}{a^2+(b-1)^2}, \frac{b(1+a-b)}{a^2+(b-1)^2}\right), \quad a > 1 - b, & (\text{۲۲آ}) \\ \left(\frac{1+a-b}{a^2+(b-1)^2}, \frac{b(1-a-b)}{a^2+(b-1)^2}\right), \quad a > b - 1. & (\text{۲۲ب}) \end{cases}$$

این بار ژاکوبی برابر است با

$$J = \begin{pmatrix} b + a^2 \operatorname{sgn}(x(1 + y - a|x|)) & -a \operatorname{sgn}(x) \\ -ab \operatorname{sgn}(x) & b \end{pmatrix} \quad (۲۳)$$

که در نقطه اول برابر است با

$$J_1 = \begin{pmatrix} b - a^2 & -a \\ ab & b \end{pmatrix} \quad (۲۴)$$

و در نقطه دوم برابر است با

$$J_1 = \begin{pmatrix} b - a^2 & a \\ -ab & b \end{pmatrix}. \quad (۲۵)$$

با بدست آوردن ویژه‌مقادیر

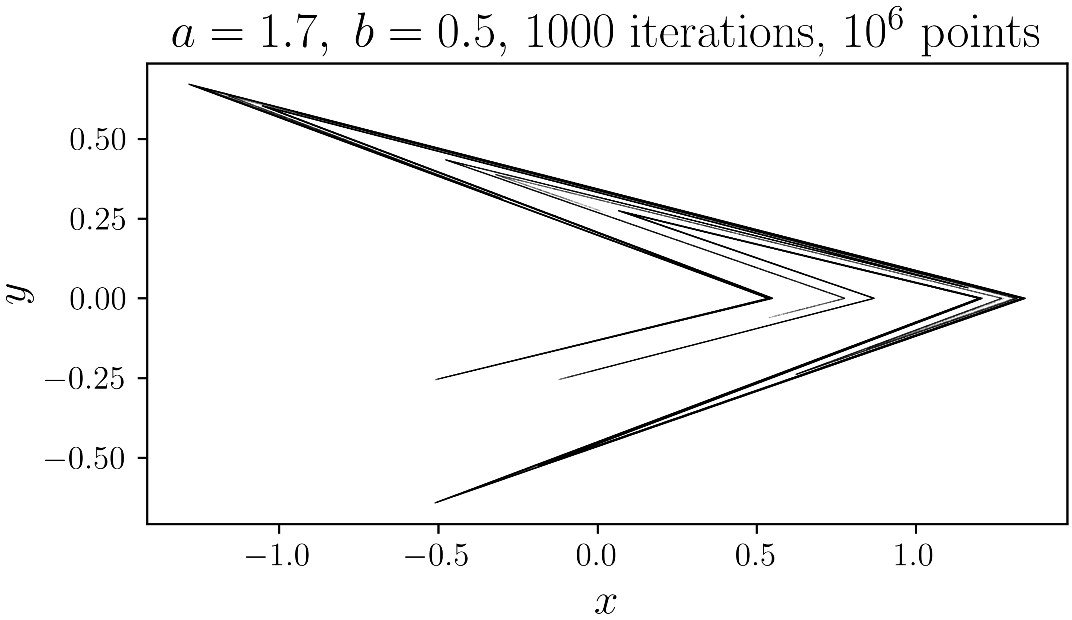
$$\lambda_{\pm} = \frac{-a^2 + 2b \pm a\sqrt{a^2 - 4b}}{2} \quad (۲۶)$$

و با حل نامعادله پایداری $|\lambda_{\pm}| < 1$ محدوده پایداری بدست می‌آید

$$\begin{cases} 1 - b < a < 1 + b, & (۲۷) \\ \quad 0 < b < 1, & (۲۸) \end{cases}$$

که در صفحه $a - b$ مثلثی است با رأس‌های $(1, 0)$، $(1, 2)$ و $(0, 1)$.

۵.۲ 12.2.18



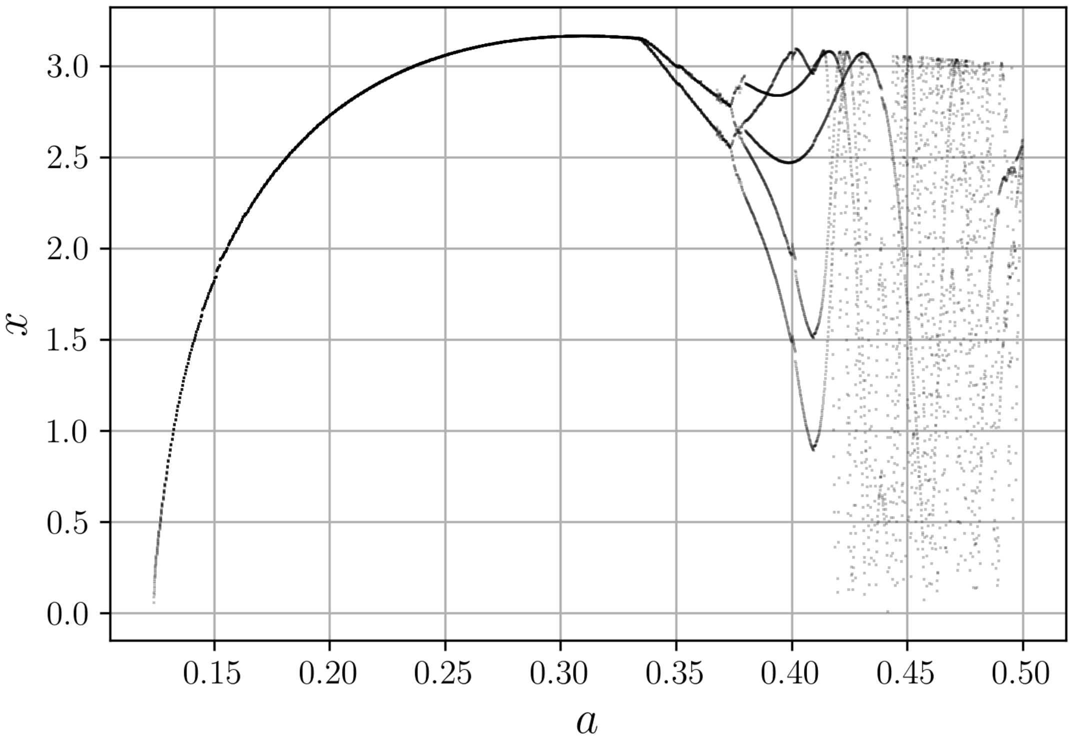
شکل ۲: ساختار فراکتالی مربوط به رباینده عجیب در شکل دیده می‌شود.

۳ سیستم روسلر

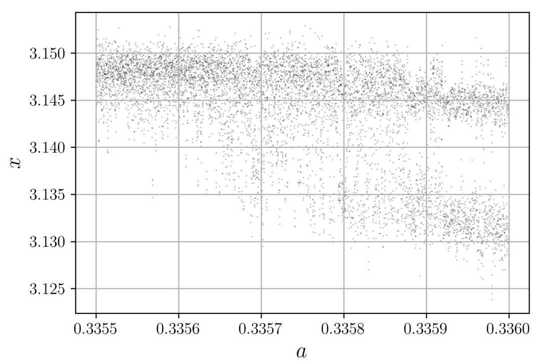
۱.۳ 12.3.1, a)

برای درست کردن نمودار دوشاخگی، xهای مثبتی که در آن‌ها y تغییر علامت می‌دهد را برحسب a رسم می‌کنیم. این نوعی مقطع از سیستم می‌دهد که تحلیل آن را ساده‌تر می‌کند.

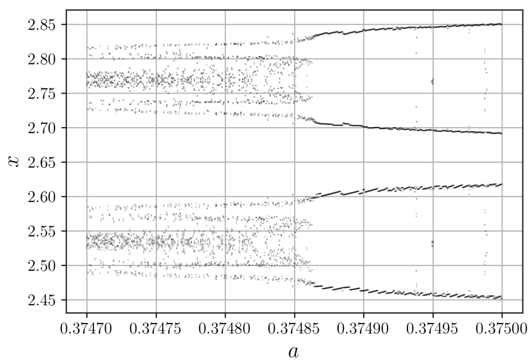
با توجه به نمودار و زومی که روی آن انجام شده، دوشاخگی Hopf در حدود $a = 0.3357$ است و اولین دوشاخگی دوبرابرکننده دوره تناوب در حدود $a = 0.37483$ است.



شکل ۳: نمودار دوشاخگی

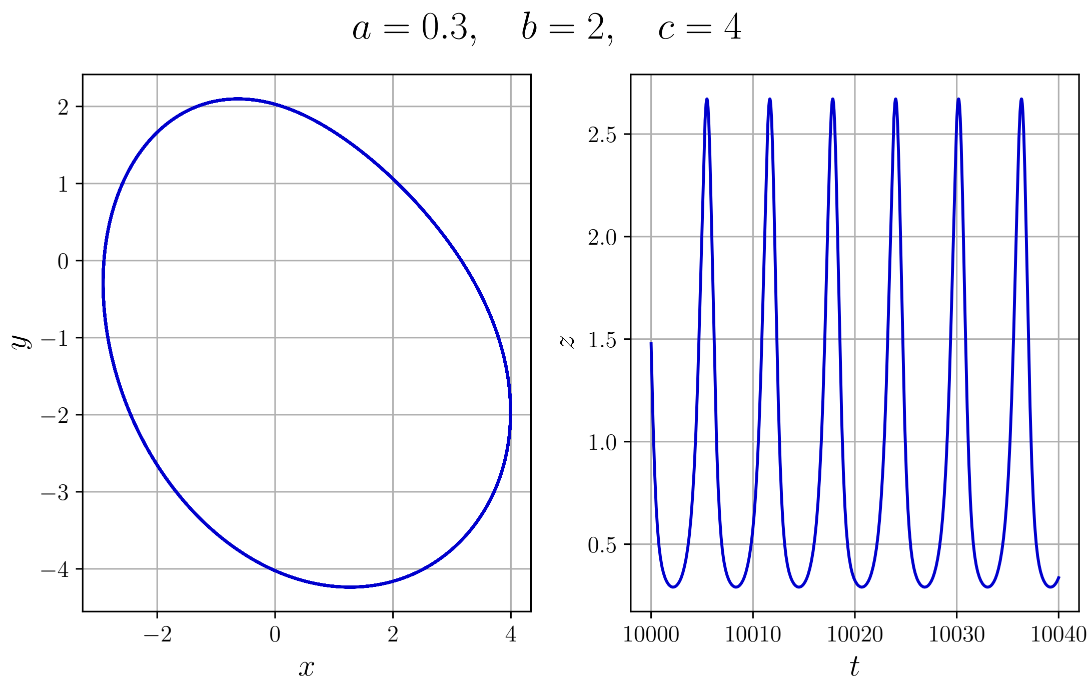


(آ) زوم روی دوشاخگی Hopf

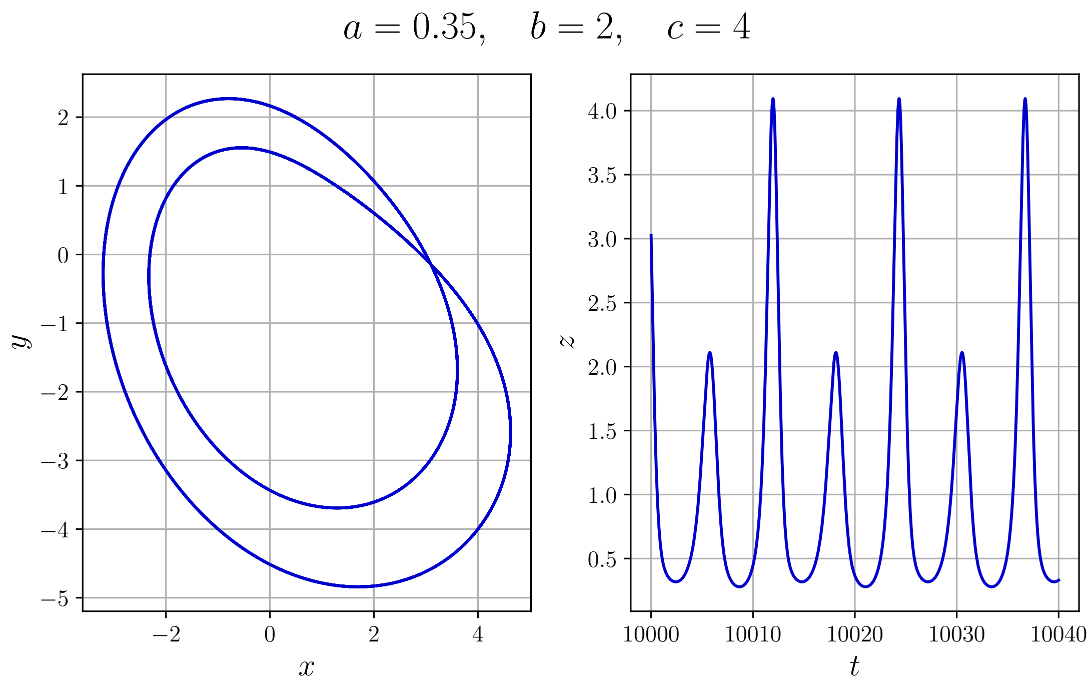


(ب) زوم روی اولین دوشاخگی دوبرابرکننده دوره تناوب.

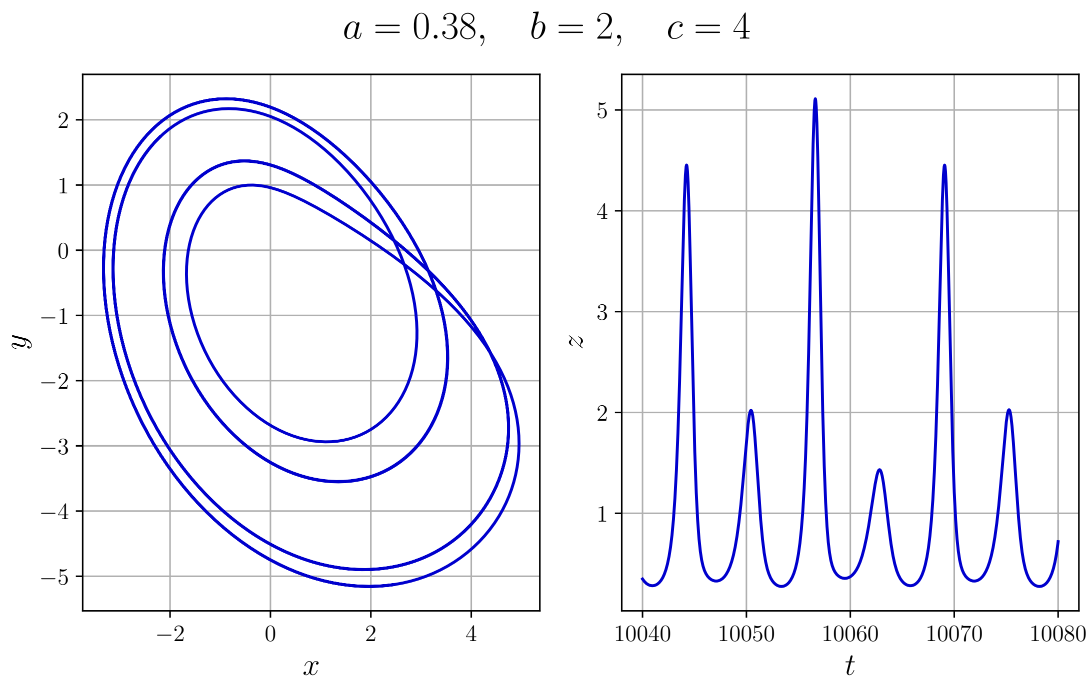
۲.۳ 12.3.1, b)



شکل ۵: قبل از دوشاخگی Hopf



شکل ۶: بعد از دوشاخگی Hopf و قبل از دوشاخگی دوبرابرکننده دوره تناوب.



شکل ۷: بعد از اولین دوشاخگی دوبرابرکننده دوره تناوب.