تمرین سری یازده دینامیک غیرخطی و آشوب

صالح شاملو احمدی

۲۷ اردیبهشت ۱۴۰۲

۱ مسئله 8.4.4

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \dot{y} & \text{(آ۱)} \\ \dot{y} = (\mu\cos\theta - 1)y - \sin\theta & \text{(ب۱)} \end{cases}$$

با خطی‌سازی،

$$J_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\mu y\sin\theta - \cos\theta & \mu\cos\theta - 1 \end{pmatrix}, \tag{۲}$$

پس در مبدأ

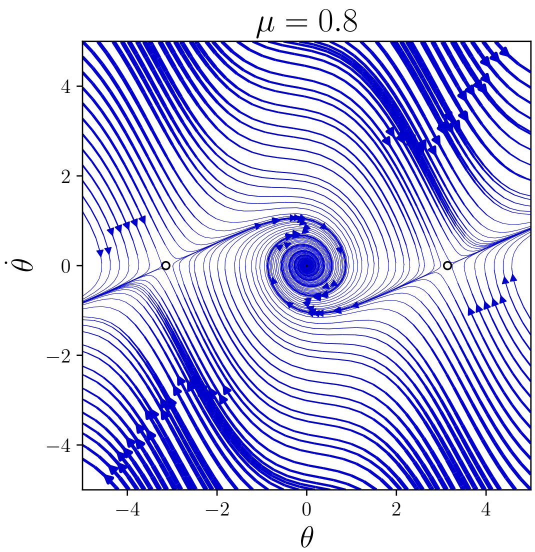
$$J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu - 1 \end{pmatrix}. \tag{۳}$$

با استفاده از رد و دترمینان، ویژه مقادیر را بدست می‌آوریم.

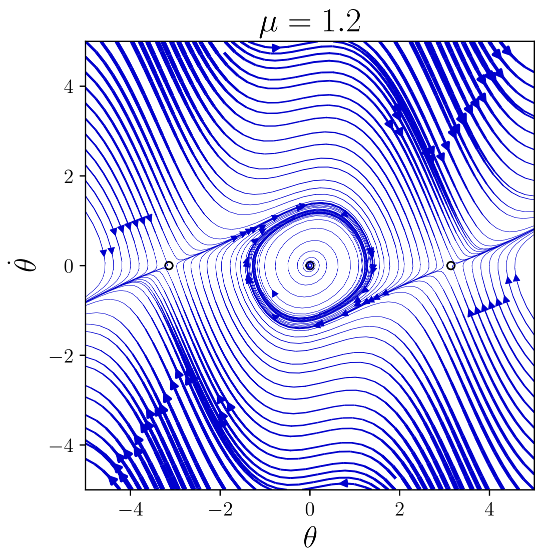
$$\begin{cases} \tau = \mu - 1 & \text{(۴)} \\ \Delta = 1 & \text{(۵)} \end{cases} \implies \lambda^2 + (1-\mu)\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda = \frac{\mu - 1 \pm \sqrt{\mu^2 - 2\mu - 3}}{2} \tag{۶}$$

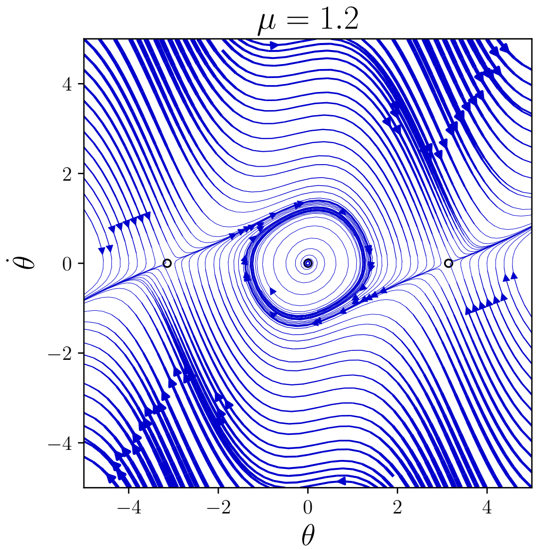
در $\mu = 1$ نقطه ثابت مبدأ از حالت پایدار به حالت ناپایدار تبدیل می‌شود. با توجه به رابطه مربوط به ویژه‌مقادیر آن، این یک دوشاخگی Hopf می‌دهد، چراکه دو ویژه مقدار مختلط و با بخش حقیقی یکسان هستند که در $\mu = 1$ از محور موهومی عبور می‌کنند. با حل عددی و رسم شکل فضای فاز، این دوشاخگی واضح می‌شود.



(آ) قبل دوشاخگی



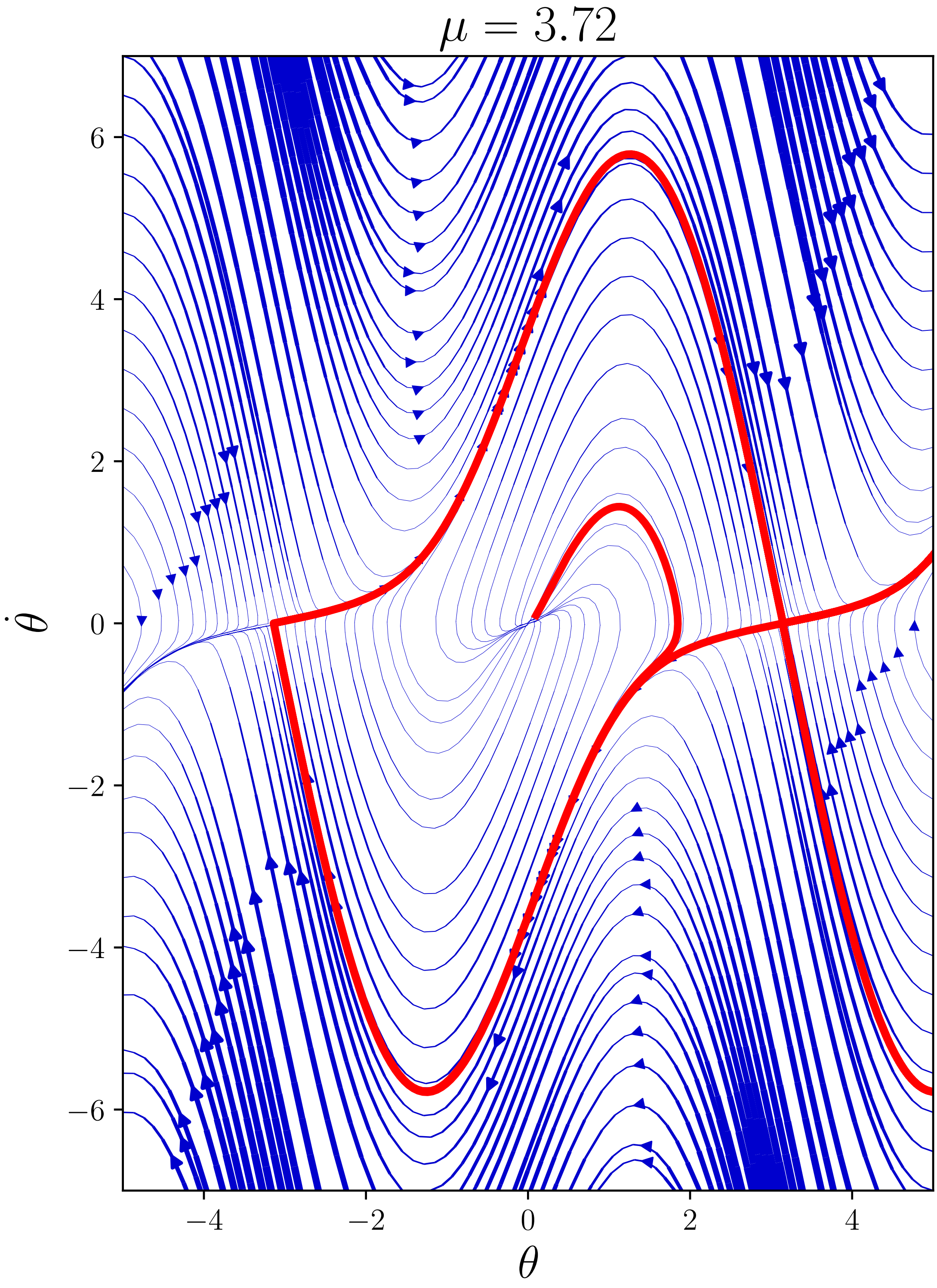
(ب) بعد دوشاخگی



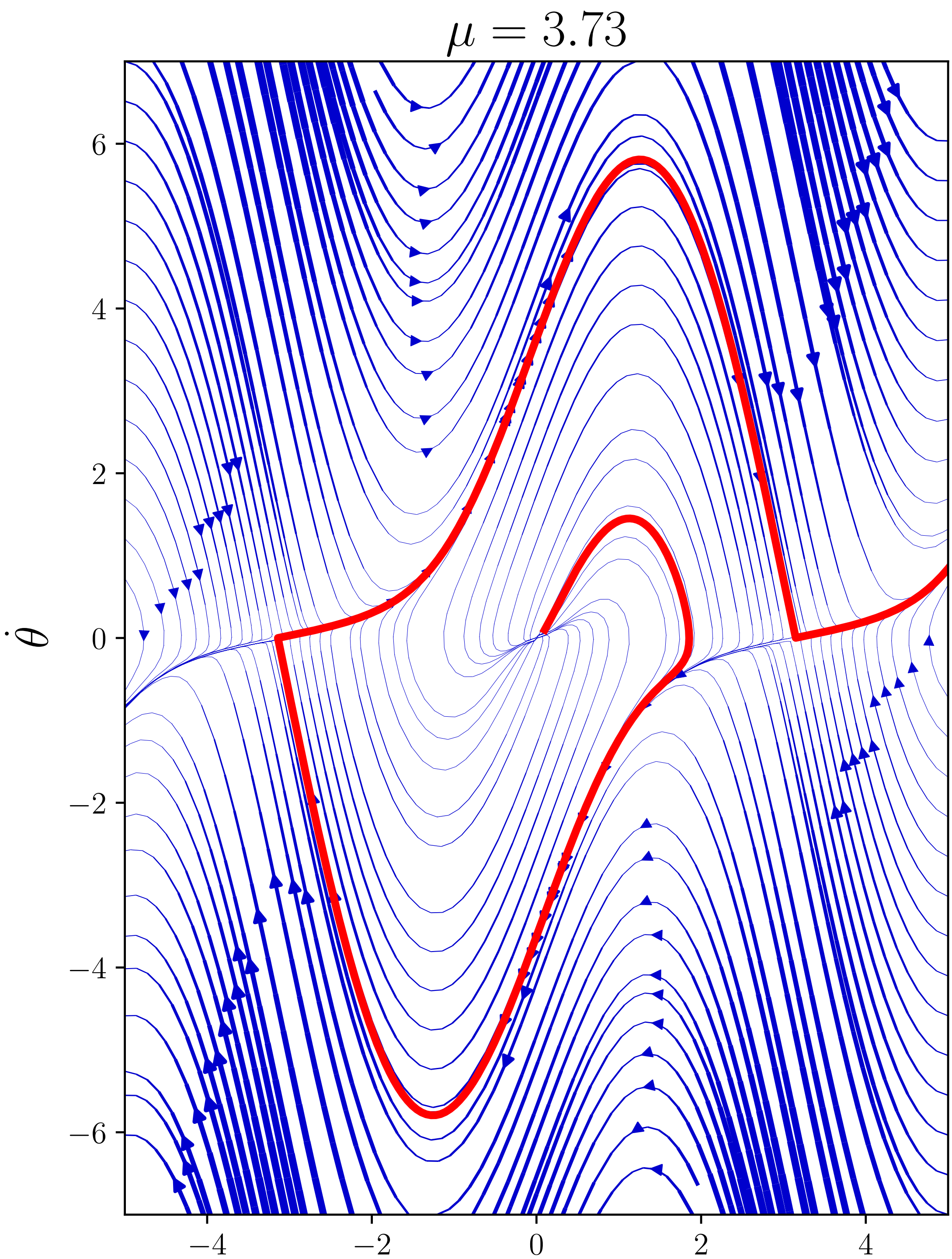
(ج) روی دوشاخگی

شکل ۱: دوشاخگی Hopf در $\mu = 1$

با افزایش μ، چرخه حدی درست شده رشد می‌کند تا به نقاط ثابت $(\theta, \dot{\theta}) = (-\pi, 0)$ و $(\theta, \dot{\theta}) = (\pi, 0)$ برسد و از بین برود. در جایی که این اتفاق می‌افتد، دوشاخگی هوموکلینیک داریم. با حل عددی به نظر می‌رسد مقدار μ در این دوشاخگی بین 3.72 و 3.73 است.



شکل ۲: قبل دوشاخگی هوموکلینیک



شکل ۳: بعد دوشاخگی هوموکلینیک

۲ مسئله 8.7.3

۱.۲ a

$$x+\dot{x}=F(t) \xRightarrow{\times e^t} xe^t+\dot{x}e^t=F(t)e^t \tag{۷}$$

$$\frac{dxe^t}{dt}=F(t) \implies \int_0^T \frac{dxe^t}{dt}\,dt=\int_0^T F(t)e^t\,dt \tag{۸}$$

$$\left(xe^t\right)\Big|_0^T=\int_0^{T/2} Ae^t\,dt-\int_{T/2}^T Ae^t\,dt \tag{۹}$$

$$x(T)e^T-x(0)=A\left(e^{T/2}-1\right)-A\left(e^T-e^{T/2}\right) \tag{۱۰}$$

$$x(T)e^T=x_0+A\left(2e^{T/2}-e^T-1\right) \tag{۱۱}$$

$$x(T)=x_0e^{-T}-Ae^{-T}\left(e^{T/2}-1\right)^2 \tag{۱۲}$$

$$x(T)=x_0e^{-T}-A\left(1-e^{-T/2}\right)^2 \tag{۱۳}$$

۲.۲ b

شرط تناوبی بودن جواب، $x(T)=x(0)$ است. بنابراین با استفاده از نتیجه بخش قبل،

$$x(0)e^{-T}-A\left(1-e^{-T/2}\right)^2=x(0) \tag{۱۴}$$

$$\begin{aligned}
x(0)&=-A\frac{\left(1-e^{-T/2}\right)^2}{1-e^{-T}} && (۱۵)\\
&=-A\frac{e^{T/2}\left(1-e^{-T/2}\right)^2}{e^{T/2}-e^{-T/2}} && (۱۶)\\
&=-A\frac{\left(e^{T/4}-e^{-T/4}\right)^2}{(e^{T/4}-e^{-T/4})(e^{T/4}+e^{-T/4})} && (۱۷)\\
&=-A\frac{e^{T/4}-e^{-T/4}}{e^{T/4}+e^{-T/4}} && (۱۸)\\
&=-A\tanh\left(\frac{T}{4}\right). && (۱۹)
\end{aligned}$$

۳.۲ c

طبق نتیجه بخش a،

$$\lim_{T\to 0} x(T) = x_0, \tag{۲۰}$$

$$\lim_{T\to \infty} x(T) = -A. \tag{۲۱}$$

در حد $T \to 0$ عامل $F(t)$ زمان کافی برای تغییر x را ندارد، بنابراین $x(t) \approx x_0$. در حد $T \to \infty$ عامل $F(t)$ مقدار x را به $-A$ می‌رساند و به دلیل بی‌نهایت بودن دوره تناوب، x را همان‌جا نگه می‌دارد.

۴.۲ d & e

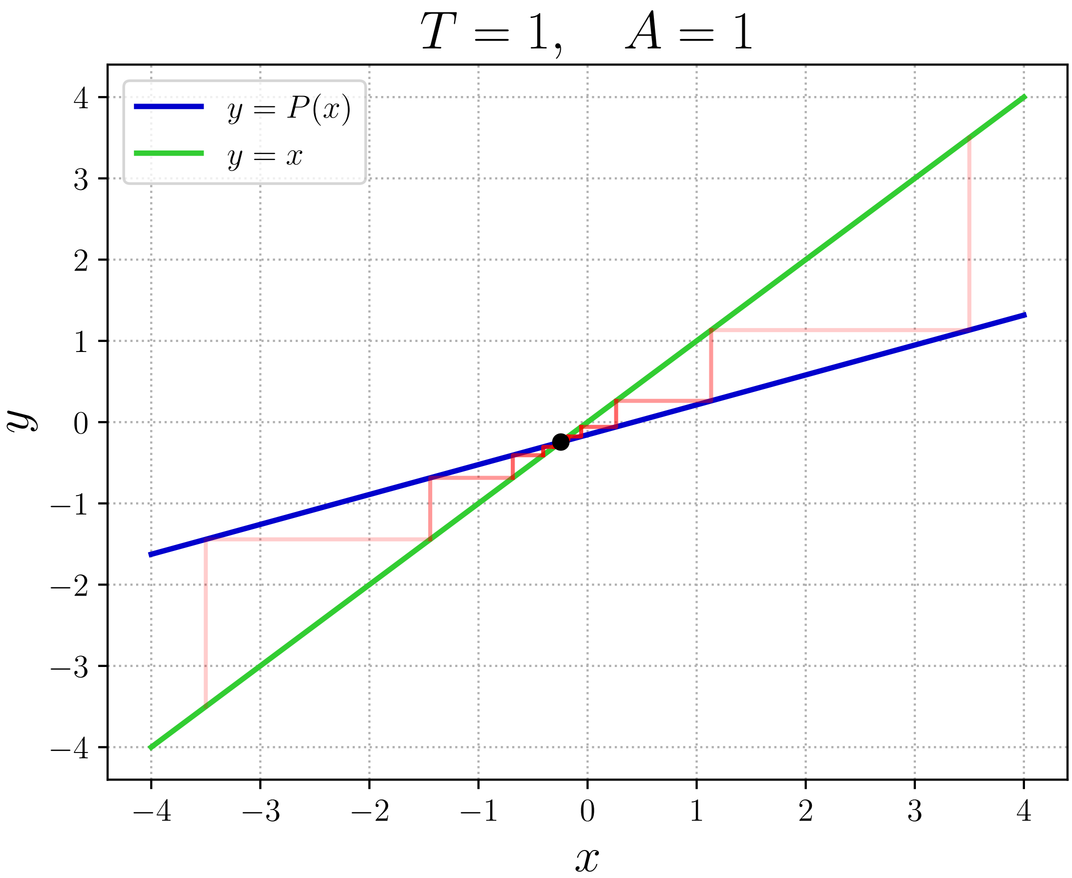
شرط لازم و کافی برای پایدار بودن نقطه ثابت نگاشت پوانکاره، کمتر بودن شیب خط $P(x)$ از 1 در نقطه ثابت (تقاطع $y = P(x)$ و $y = x$) است. از طرفی

$$P(x) = xe^{-T} - A\big(1 - e^{-T/2}\big) \tag{۲۲}$$

که به ازای مقادیر مثبت برای T و A همواره خطی با شیب کمتر از یک و عرض از مبدأ منفی است. بنابراین نقطه

$$P(x^*) = x^* \implies x^* = -A\tanh\left(\frac{T}{4}\right) \tag{۲۳}$$

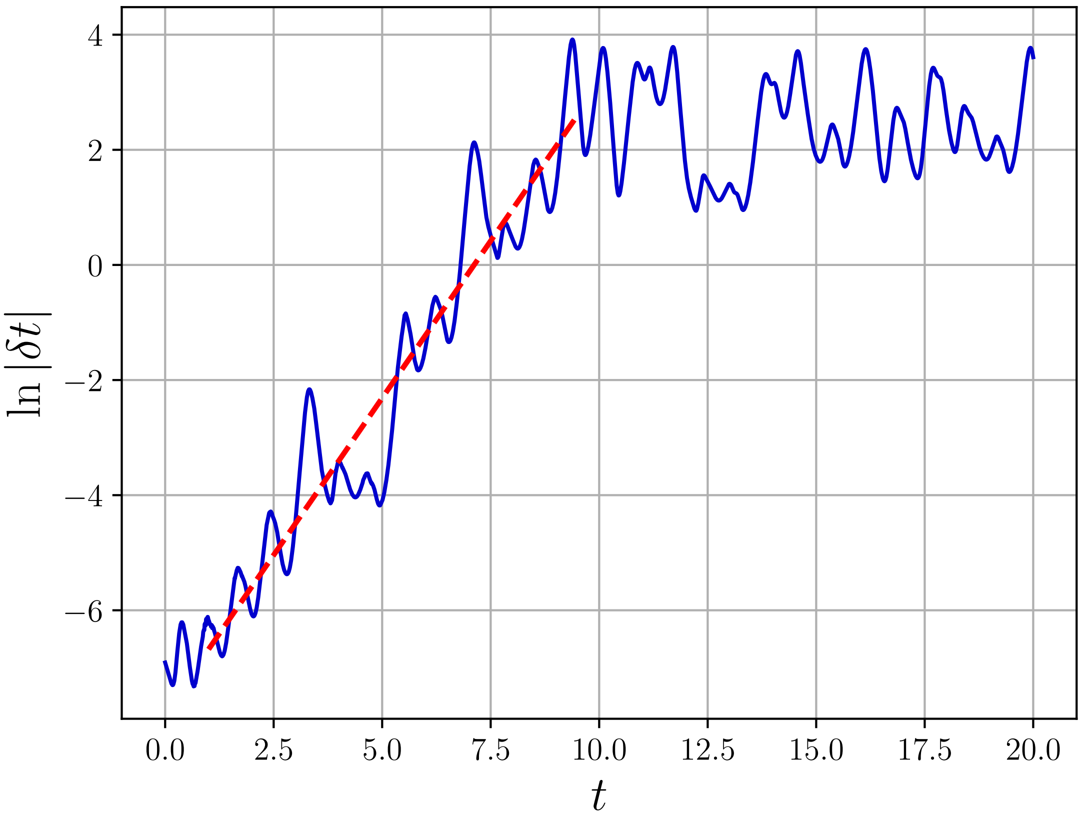
(از نتیجه بخش ب) یک نقطه ثابت پایدار برای نگاشت پوانکاره است. همچنین به دلیل یکنوا بودن نگاشت پوانکاره برحسب x، این تنها نقطه ثابت و به‌صورت سراسری پایدار است.



شکل ۴: نمودار تارعنکبوتی. خط‌ها با بالا رفتن تعداد قدم n به تدریج پررنگ می‌شوند.

۳ مسئله 9.3.9

با فیت کردن خط‌های متعدد به فاصله مسیرها در شرایط اولیه متفاوت و میانگین‌گیری از شیب‌ها، مقدار λ را بدست می‌آوریم؛ شرایط اولیه $(x_0, y_0, z_0) = (0.896, 1.561, 11.264)$ را انتخاب می‌کنیم (از آن استفاده می‌کنیم چون در ابتدای مسیر اختلال کمتری دارد). سپس مسیر دیگری با شرایط اولیه‌ای در کره‌ای با شعاع 0.001 حول نقطه اول به صورت تصادفی انتخاب می‌کنیم. این مراحل را به دفعات زیادی تکرار می‌کنیم تا λ «اصلی» را بدست بیاوریم. با این روش λ حدود 0.956 بدست می‌آید که همچنان اختلاف به نسبت زیادی با مقدار اصلی که 0.906 است دارد که به دلیل اختلال بالای مسئله است.



شکل ۵: نمونه فیت که روی بازه به نسبت خطی انجام شده.