تمرین سری چهارم دینامیک غیرخطی و آشوب

Subject:
Date:

۹۸۱۰۰۸۷۲ صالح شاملو احمدی

3.6.6) a) $\dot A(A=A^*)=0 \longrightarrow A^*(\varepsilon - gA^{*2})=0 \longrightarrow \begin{cases} A^*=0 & \text{:ناپایدار} \\ \boxed{A^*=\sqrt{\frac{\varepsilon}{g}}} \end{cases}$

$$\frac{d\dot A}{dA}=\varepsilon-3gA^{*2}$$

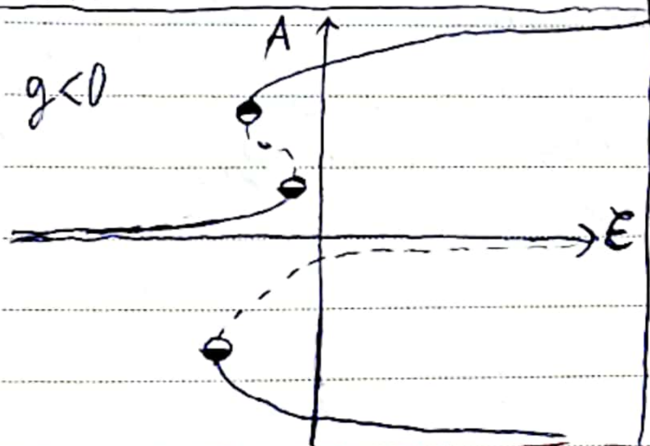
معادله لانداو هم پیش‌بینی مشابه آزمایش می‌کند.

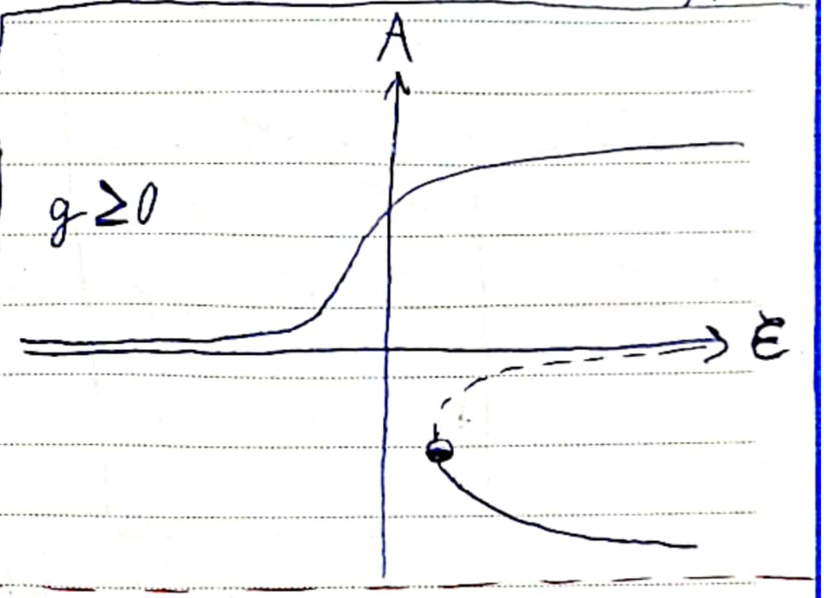
b) $\dot A(A=A^*)=0 \longrightarrow \varepsilon A^* - gA^{*3} - kA^{*5}=0 \xrightarrow{g=0} A^*(\varepsilon - kA^{*4})=0$

$$\frac{d\dot A}{dA}=\varepsilon-3gA^{*2}-5kA^{*4}=\varepsilon-5kA^{*4} \longrightarrow \boxed{A^*=\left(\frac{\varepsilon}{k}\right)^{1/4}}$$ حالت پایدار

c) $\dot A(A=A^*)=0 \longrightarrow h+\varepsilon A^* - gA^{*3}-kA^{*5}=0 \longrightarrow \varepsilon = kA^{*4}+gA^{*2}-\frac{h}{A^*}$

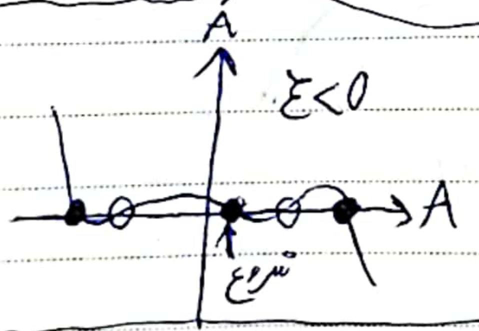
$$\frac{d\dot A}{dA}=\varepsilon-3gA^{*2}-5kA^{*4}$$

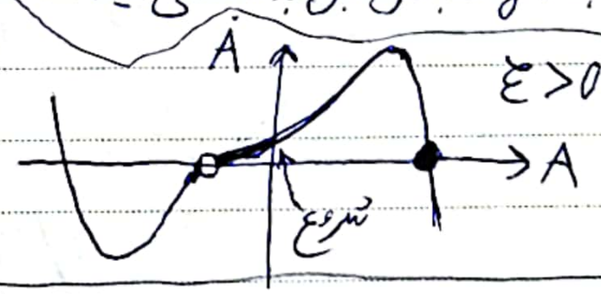




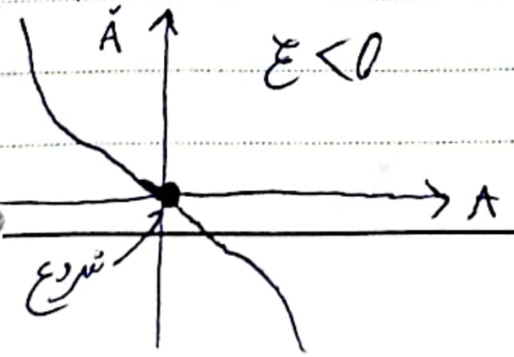
d) صاف شدن نمودار در ε های کوچک به دلیل کُند شدن حرکت نزدیک «روح» یک دوشاخگی زین-گره (در فصل ۴ در مورد آن توضیح داده شده) است. در εهای بزرگ، دیگر نزدیک دوشاخگی زین-گره نیستیم و حرکت کندی آنچنانی نخواهد داشت. همهٔ این استدلال‌ها از نمودار مربوط به $g<0$ در بخش قبل بدست می‌آید.

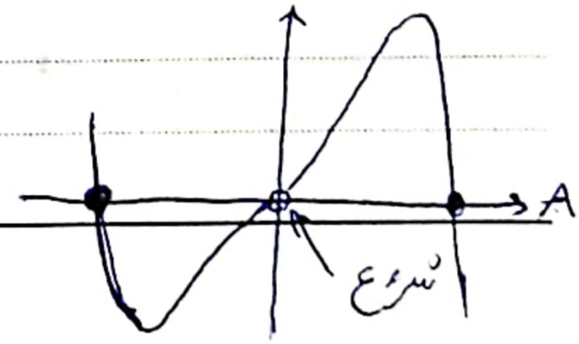
(ε کوچک)





(ε بزرگ)





Subject:
Date

3.7.5) a) $\dot{g} = k_1 S_0 - k_2 g + \frac{k_3 g^2}{k_4^2 + g^2} = k_3\left(\frac{k_1}{k_3} s_0 - \frac{k_2}{k_3} g + \frac{\frac{g^2}{k_4^2}}{1+\frac{g^2}{k_4^2}}\right)$

$$\boxed{x \equiv \frac{g}{k_4}} \longrightarrow \dot{x} = \frac{k_3}{k_4}\left(\frac{k_1}{k_3} s_0 - \frac{k_2 k_4}{k_3} x + \frac{x^2}{1+x^2}\right), \quad \left\{\boxed{\begin{array}{l} s \equiv \frac{k_1}{k_3} s_0 \\ r \equiv \frac{k_2 k_4}{k_3} \end{array}}\right. \longrightarrow$$

$$\dot{x} = s - rx + \frac{x^2}{1+x^2}, \quad \boxed{\tau \equiv \frac{k_3}{k_4} t} \longrightarrow \frac{dx}{d\tau} = s - rx + \frac{x^2}{1+x^2} \checkmark$$

---

b) $s = 0: \left.\frac{dx}{d\tau}\right|_{x=x^*} = 0 \longrightarrow -rx^* + \frac{x^{*2}}{1+x^{*2}} = 0 \longrightarrow \begin{cases} x^* = 0 \ (\text{پایدار}) \\ x^{*2} - \frac{x^*}{r} + 1 = 0 \end{cases}$

$$\longrightarrow \boxed{x^* = \frac{1}{2r}\left(1 \pm \sqrt{1-4r^2}\right)}$$

این دو نقطه فقط در صورتی وجود دارند که $r < \boxed{r_c = \frac{1}{2}}$ و چون $r>0$، هر دو مثبت هستند

---

c) نمودار $\frac{dx}{d\tau}$ را بالا می‌برد. با استفاده از این نکته می‌توانیم وضعیت سیستم را با توجه به نتایج بخش قبل تحلیل کنیم. اگر $r > \frac{1}{2}$، فقط یک نقطه تعادل پایدار داریم و سیستم به همین نقطه می‌چسبد. با زیاد شدن s، این نقطه جلو می‌رود و با صفر شدن دوباره آن، دوباره روی صفر می‌رود. در $r = \frac{1}{2}$، دو نقطه تعادل داریم که یکی از آن‌ها زین-گره‌ای و مثبت است. با زیاد شدن s، نقطه زین-گره به یک نقطه پایدار و یک نقطه ناپایدار تبدیل می‌شود و در نهایت فقط یک نقطه پایدار باقی می‌ماند. بنابراین، x ابتدا به نقطه تعادل نزدیک مبدأ می‌چسبد و سپس با حذف آن به نقطه تعادل دوم (دورتر از مبدأ) می‌چسبد. چون این نقطه دوم با صفر شدن دوباره s، به نقطه تعادل نیمه پایدار تبدیل می‌شود، با صفر شدن دوباره s مقدار x هم دوباره صفر می‌شود. در $r < \frac{1}{2}$، علاوه بر $x^* = 0$ یک نقطه تعادل پایدار دیگر نیز داریم (و یک نقطه تعادل ناپایدار دیگر). با زیاد شدن s و حذف نقطه تعادل پایدار اول، x به نقطه تعادل پایدار دوم می‌چسبد و با کم شدن s، چون این نقطه پایدار است، x در این نقطه می‌ماند. پس در کل فقط در صورتی که $r < \frac{1}{2}$ با صفر شدن دوباره s مقدار x مثبت می‌ماند.

---

d) با توجه به تحلیل های بخش قبل، دوشاخگی r و s هر دو از نوع زین-گره هستند. در دوشاخگی، $\frac{d}{dx}\left(\frac{dx}{d\tau}\right) = 0$ و $\frac{dx}{d\tau} = 0$، پس

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = 0 \longrightarrow s - rx + \frac{x^2}{1+x^2} = 0 \longrightarrow \boxed{s = \frac{x^2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}} \\ \frac{d}{dx}\left(\frac{dx}{d\tau}\right) = 0 \longrightarrow -r + \frac{2x}{(1+x^2)^2} = 0 \longrightarrow \boxed{r = \frac{2x}{(1+x^2)^2}} \end{cases}$$