Subject:
Date

تمرین سری ششم آشوب
صالح شاملو احمدی ۹۸۱۰۰۸۷۲

5.2.2) a) $\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \longrightarrow A = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

$\det(A-\lambda I)=0 \longrightarrow \begin{vmatrix}1-\lambda & -1\\ 1 & 1-\lambda\end{vmatrix} = 0 \longrightarrow (1-\lambda)^2 = -1 \longrightarrow \lambda = 1 \pm i$

$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \longrightarrow \begin{cases} x_1 - y_1 = (1+i)x_1 \to y_1 = -ix_1 \\ x_2 - y_2 = (1-i)x_2 \longrightarrow y_2 = ix_1 \end{cases} \longrightarrow$

$\longrightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix},\ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}$ $\left(\vec{v}_2 = \begin{pmatrix}-i\\ 1\end{pmatrix}\right.$: یا مثل صورت سوال $\left.\right)$

b) $x(t) = c_1 e^{(1+i)t}\begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix} + c_2 e^{(1-i)t}\begin{pmatrix}-i\\ 1\end{pmatrix} = e^t\begin{pmatrix}(ic_1 - ic_2)\cos t + (-c_1 - c_2)\sin t\\ (c_1+c_2)\cos t + i(c_1-c_2)\sin t\end{pmatrix}$

$$\rightarrow \boxed{x(t) = e^t\left[(c_1+c_2)\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix} + i(c_1-c_2)\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}\right] = e^t\left[\tilde{c}_1\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix} + \tilde{c}_2\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}\right]}$$

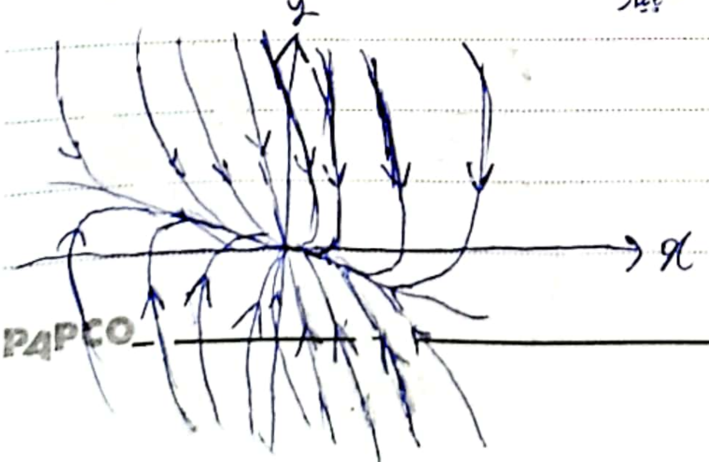
5.2.13) a) $\dot{x} \equiv y \longrightarrow \dot{y} = \ddot{x}$ $\quad \ddot{x} = \dfrac{-kx - b\dot{x}}{m} = -\dfrac{k}{m}x - \dfrac{b}{m}y$

$$\longrightarrow \boxed{\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}}$$

b) با استفاده از تکنیک به دست آوردن ویژه مقادیر ماتریس دو در دو،

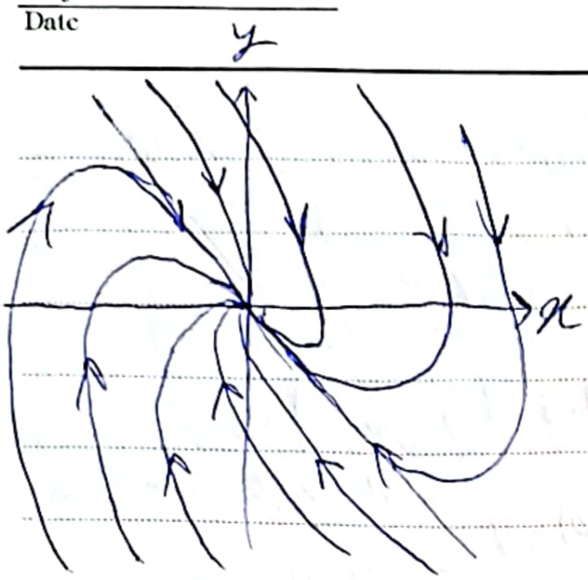
$$\left.\begin{aligned}\lambda_1+\lambda_2 &= -\frac{b}{m}\\ \lambda_1\lambda_2 = \det &= \frac{k}{m}\end{aligned}\right\} \longrightarrow \lambda^2 + \frac{b}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0 \longrightarrow \lambda = \frac{1}{2m}\left(-b \pm \sqrt{b^2-4mk}\right)$$

اگر $b^2-4mk>0$، چون عبارت زیر رادیکال از b^2 کوچک‌تر است، هر دو ویژه مقدار منفی خواهند بود و یک نقطه تعادل پایدار داریم. اگر $b^2-4mk=0$، نقطه تعادل تبهگن پایدار خواهد بود و اگر $b^2-4mk<0$، چون $b>0$، نقطه تعادل مارپیچ داریم.

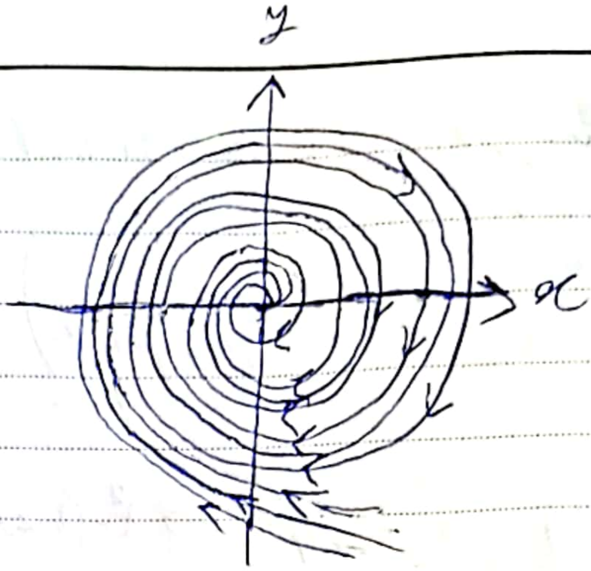


$b^2-4mk>0$

Subject:
Date



$b^2-4mk=0$



$b^2-4mk<0$

c) $b^2-4mk>0$ فوق میرا، $b^2-4mk=0$ میرای بحرانی و $b^2-4mk<0$ کم میرا است.

6.4.6) a) $t=u\tau\ ,\ N_1=vx\ ,\ N_2=wy$

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1}{dt}=r_1N_1\left(1-\dfrac{N_1}{K_1}\right)-b_1N_1N_2 \longrightarrow \dfrac{v}{u}\dfrac{dx}{d\tau}=r_1vx\left(1-\dfrac{vx}{K_1}\right)-b_1vwxy \\ \dfrac{dN_2}{dt}=r_2N_2\left(1-\dfrac{N_2}{K_2}\right)-b_2N_1N_2 \longrightarrow \dfrac{w}{u}\dfrac{dy}{d\tau}=r_2wy\left(1-\dfrac{wy}{K_2}\right)-b_2vwxy \end{cases}$$

$$u=\frac{1}{r_1}\ ,\ v=K_1\ ,\ w=\frac{r_1}{b_1} \longrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau}=x(1-x-y) \\ \dfrac{dy}{d\tau}=\dfrac{r_2}{b_1K_1}y\left(\dfrac{b_1K_2}{r_1}-y-\dfrac{b_1b_2K_1K_2}{r_1r_2}x\right) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \mu=\dfrac{r_2}{b_1K_2} \\ \rho=\dfrac{b_1K_2}{r_1} \\ K=\dfrac{b_1b_2K_1K_2}{r_1r_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}=x(1-x-y) \\ \dot{y}=\mu y(\rho-y-Kx) \end{cases}$$

پس سه متغیر بی بعد نیاز داریم. بدون محاسبه هم مشخص بود که با سه درجه آزادی در انتخاب بعد، می توانیم سه متغیر را از بین ببریم

b) ابتدا نقاط تعادل ممکن را پیدا می کنیم:

$\dot{x}=0 \rightarrow x(1-x-y)=0$

$\dot{y}=0 \rightarrow \mu y(\rho-y-Kx)=0 \Big\} \rightarrow \begin{cases} x=0:\ y(\rho-y)=0 \xrightarrow{y\neq 0} y=\rho \\ y=0:\ x(1-x)=0 \xrightarrow{x\neq 0} x=1 \end{cases}$

Subject:
Date

پس در تمام حالت‌ها $(0,0)$، $(0,\rho)$ و $(1,0)$ نقاط ثابت هستند. در این نقاط ژاکوبی را حساب می‌کنیم:

$$J=\begin{pmatrix}1-2x-y & -x\\ -Ky & \rho-2y-Kx\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{cases}(0,0): J=\begin{pmatrix}1&0\\0&\rho\end{pmatrix} & (1)\\ (0,\rho): J=\begin{pmatrix}1-\rho&0\\-K\rho&-\rho\end{pmatrix} & (2)\\ (1,0): J=\begin{pmatrix}-1&-1\\0&\rho-K\end{pmatrix} & (3)\end{cases}$$

نقطه (1) همیشه ناپایدار است.

$$(2):\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2=1-2\rho\\ \lambda_1\lambda_2=-\rho(1-\rho)\end{cases}\longrightarrow \lambda^2-(1-2\rho)\lambda-\rho(1-\rho)=0$$

$$\longrightarrow \lambda=\frac{1}{2}\left(1-2\rho\pm\sqrt{(1-2\rho)^2+4\rho(1-\rho)}\right)\longrightarrow\begin{cases}\lambda_1=1-\rho\\ \lambda_2=-\rho\end{cases}\quad(\rho>0)$$

اگر $\rho<1$، یکی از ویژه مقادیر مثبت خواهد بود و تعادل ناپایدار می‌شود. اگر $\rho\geq 1$، هر دو ویژه مقدار نامثبت اند و نقطه تعادل پایدار است.

$$(3):\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2=\rho-K-1\\ \lambda_1\lambda_2=K-\rho\end{cases}\longrightarrow \lambda^2-(\rho-K-1)\lambda+K-\rho=0\longrightarrow \lambda=\frac{1}{2}\left(\rho-K-1\pm\sqrt{(\rho-K-1)^2-4(K-\rho)}\right)$$

$$\longrightarrow \lambda=\frac{1}{2}\left(\rho-K-1\pm|K-\rho-1|\right)\longrightarrow\begin{cases}\lambda_1=-1\\ \lambda_2=\rho-K\end{cases}$$

اگر $K<\rho$، این نقطه ناپایدار و در غیر این صورت، این نقطه پایدار خواهد بود.

(4): این حالت همیشه پیش نمی‌آید؛ در این حالت: $y=1-x$

$$\hookrightarrow (1-x)(\rho-1+(1-K)x)=0\rightarrow x=\frac{1-\rho}{1-K}$$

این حالت فقط وقتی $K\neq 1$ به وجود می‌آید.

$$J=\begin{pmatrix}-x & -x\\ -K(1-x) & \rho-2+(2-K)x\end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow J=\begin{pmatrix}\frac{\rho-1}{1-K} & \frac{\rho-1}{1-K}\\ \frac{K(K-\rho)}{1-K} & \frac{K-\rho}{1-K}\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2=-1\\ \lambda_1\lambda_2=(\rho-1)(K-\rho)\end{cases}\longrightarrow$$

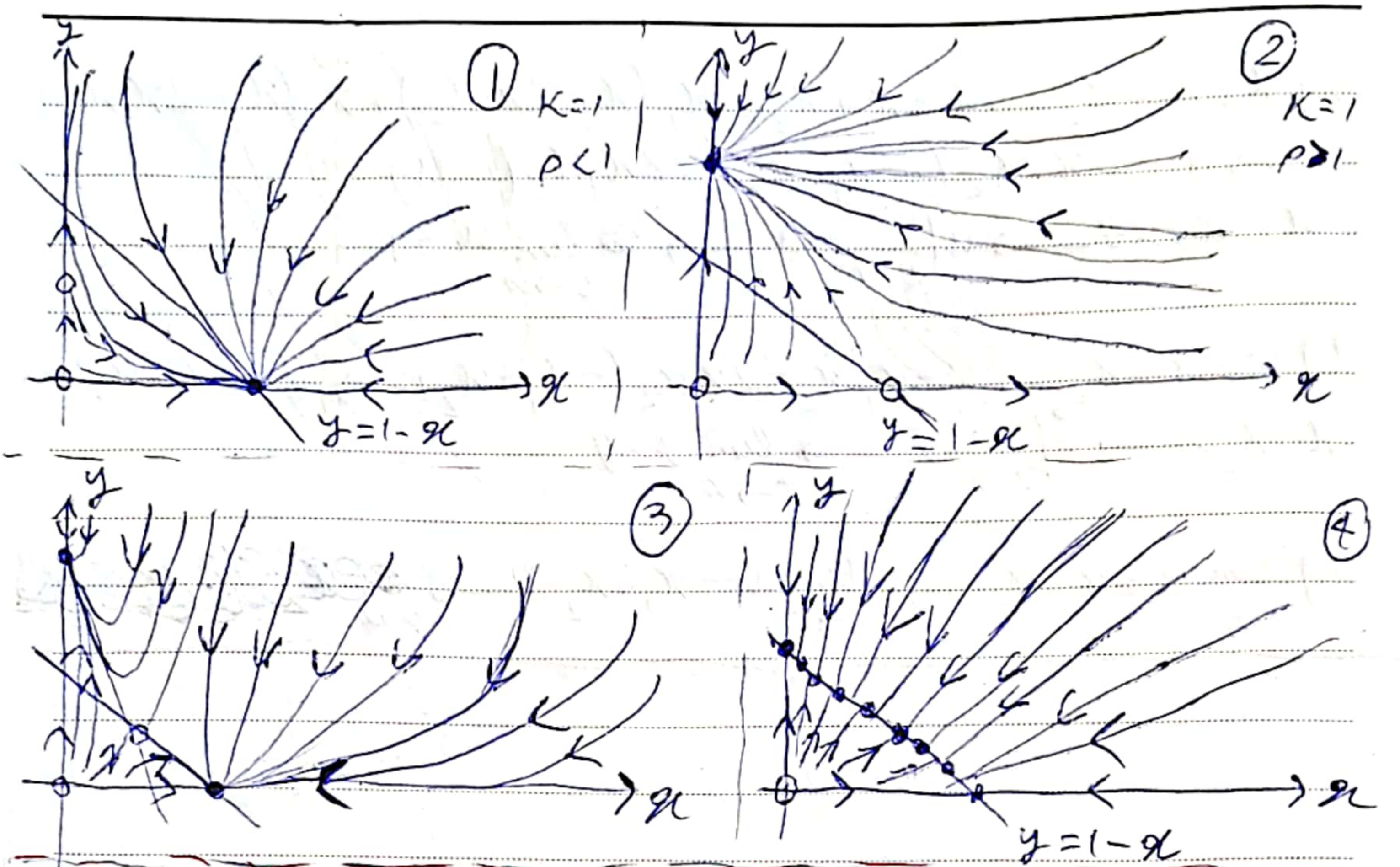
$$\lambda^2+\lambda+(1-\rho)(K-\rho)=0\longrightarrow$$ این حالت همیشه ناپایدار است.

(5): مطابق محاسبات حالت قبل، اگر $\rho=K=1$، خط $y=1-x$ تعادل پایدار دارد.

با توجه به نتایج بدست آمده، پنج حالت برای رفتار بلندمدت سیستم داریم: در یک حالت گونه اول زنده می‌ماند و گونه دوم منقرض می‌شود. در حالت دوم برعکس این. در حالت سوم، با توجه به شرایط اولیه سیستم، یک گونه زنده می‌ماند و گونه دیگر منقرض می‌شود. در حالت چهارم، هر دو گونه می‌توانند در تعادل با هم زنده بمانند (روی خط $y=1-x$). در حالت آخر، جمعیت هر دو گونه به بی‌نهایت میل می‌کند که منطقی نیست و نشان می‌دهد مدل خوبی انتخاب نکردیم.

P4PCO

Subject:
Date



C) تنها حالتی که هر دو گونه می‌توانند همزمان زنده بمانند، هنگامی است که $K=\rho=1$ است. در این حالت

$$\frac{b_1K_2}{r_1}=1 \ , \quad \frac{b_1b_2K_1K_2}{r_1r_2}=1 \longrightarrow \frac{b_2K_1}{r_2}=1$$

این یعنی نسبت نرخ رقابت درونی گونه‌ها به نرخ رشد گونه‌ها با نرخ رقابت بین گونه‌ها (فشار رقابتی گونه دیگر) برابر باشد. از نظر شهودی، این یعنی هر دو گونه یکدیگر را مثل گونه خود «ببینند».

6.4.10) a)
$$\dot{x}_1 = x_1(x_0 - x_1x_0 - x_2x_1) = x_1(x_2 - 2x_1x_2) = x_1x_2(1-2x_1)$$
$$\dot{x}_2 = x_2(x_1 - x_1x_0 - x_2x_1) = x_2(x_1 - 2x_1x_2) = x_1x_2(1-2x_2)$$

b)
$$\dot{x}_1 = 0 \longrightarrow x_1(x_2 - 2x_1x_2) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \ , \ x_2 \geq 0 \\ x_2 = 2x_1x_2 \begin{cases} x_2 = 0 , x_1 \geq 0 \\ x_1 = \frac{1}{2} \end{cases} \end{cases}$$

$$\dot{x}_2 = 0 \longrightarrow x_2(x_1 - 2x_1x_2) = 0 \begin{cases} x_2 = 0 \ , \ x_1 \geq 0 \\ x_1 = 2x_1x_2 \begin{cases} x_1 = 0 , x_2 \geq 0 \\ x_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \end{cases}$$

یعنی محورهای x_1 و x_2 و نقطه $(x_1, x_2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ نقاط ثابت سیستم را تشکیل می‌دهند.

Subject:

Date

c) $u = x_1 + x_2 \longrightarrow \dot{u} = \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = x_1(x_2 - 2x_1x_2) + x_2(x_1 - 2x_1x_2)$

$\longrightarrow \dot{u} = 2x_1x_2(1 - x_1 - x_2) = 2x_1x_2(1-u)$

$x_1, x_2 > 0 \longrightarrow u\big|_{\dot{u}=0} = 1 \longrightarrow \lim_{t\to\infty} u = 1$

d) $v = x_1 - x_2 \longrightarrow \dot{v} = \dot{x}_1 - \dot{x}_2 = 2x_1x_2(-x_1 + x_2) \longrightarrow \dot{v} = -2x_1x_2 v$

$x_1, x_2 > 0 \longrightarrow v\big|_{\dot{v}=0} = 0 \longrightarrow \lim_{t\to\infty} v = 0$

e) $\lim_{t\to\infty} u = x_1 + x_2 = 1 \;,\; \lim_{t\to\infty} v = x_1 - x_2 = 0 \longrightarrow \lim_{t\to\infty} x_1 = \lim_{t\to\infty} x_2 = \frac{1}{2}$

f) این شکل به دلیل تفاوت سرعت همگرایی در نقاط مختلف صفحه است.