تمرین سری دوازده دینامیک غیرخطی و آشوب

صالح شاملو احمدی

۷ خرداد ۱۴۰۲

۱ مسئله 9.2.1

۱.۱ a

برای پیدا کردن $C^{\pm}$ باید سیستم معادلات $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (0, 0, 0)$ را حل کنیم. یعنی

$$\begin{cases} \sigma(y - x) = 0, & \text{(آ۱)} \\ rx - xz - y = 0, & \text{(ب۱)} \\ xy - bz = 0, & \text{(ج۱)} \end{cases}$$

پس، به ترتیب از معادله اول تا سوم نتیجه می‌گیریم

$$x = y, \tag{۲}$$

$$z = r - 1, \tag{۳}$$

$$x = y = \pm\sqrt{b(r - 1)}. \tag{۴}$$

پس در کل

$$C^{\pm} = \Big(\pm\sqrt{b(r - 1)}, \pm\sqrt{b(r - 1)}, r - 1\Big). \tag{۵}$$

حال ماتریس ژاکوبی را محاسبه می‌کنیم.

$$J = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix} \implies J_{C^{\pm}} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & \mp\sqrt{b(r - 1)} \\ \pm\sqrt{b(r - 1)} & \pm\sqrt{b(r - 1)} & -b \end{pmatrix} \tag{۶}$$

معادله مشخصه ویژه مقادیر این ماتریس از $\det(J_{C^\pm} - \lambda\mathbb{I}) = 0$ بدست می‌آید.

$$\det\begin{pmatrix} -\sigma-\lambda & \sigma & 0 \\ 1 & -1-\lambda & \mp\sqrt{b(r-1)} \\ \pm\sqrt{b(r-1)} & \pm\sqrt{b(r-1)} & -b-\lambda \end{pmatrix} = 0 \tag{۷}$$

$$(-\sigma-\lambda)[(-1-\lambda)(-b-\lambda)+b(r-1)] - \sigma[(-b-\lambda)+b(r-1)] = 0 \tag{۸}$$

$$\lambda^3 + (\sigma+b+1)\lambda^2 + b(\sigma+r)\lambda + 2\sigma b(r-1) = 0 \tag{۹}$$

۲.۱ b

$$-i\omega^3 - (\sigma+b+1)\omega^2 + ib(\sigma+r)\omega + 2\sigma b(r-1) = 0 \tag{۱۰}$$

با جداسازی بخش حقیقی و موهومی،

$$\begin{cases} -\omega^3 + b(\sigma+r)\omega = 0 & (۱۱) \\ -(\sigma+b+1)\omega^2 + 2\sigma b(r-1) = 0 & (۱۲) \end{cases}$$

تنها راهی که هر دو معادله همزمان برقرار باشند، باید ω^2ی که از دو معادله بدست می‌آید را برابر قرار دهیم. پس

$$b(\sigma+r) = \frac{2\sigma b(r-1)}{\sigma+b+1}. \tag{۱۳}$$

حال این معادله را برای r حل می‌کنیم.

$$b(\sigma+r_H)(\sigma+b+1) = 2\sigma b(r_H-1) \tag{۱۴}$$

$$r_H = \frac{\sigma+b+3}{\sigma-b-1} \tag{۱۵}$$

چون $r > 0$، برای پیدا شدن $r = r_H$ باید $\sigma > b+1$.

۳.۱ c

$$\omega = \pm\omega_0 = \pm\sqrt{b(\sigma+r)} \implies (\lambda - i\omega_0)(\lambda + i\omega_0)(\lambda - \lambda_3) = 0 \tag{۱۶}$$

$$\left(\lambda^2 - \omega_0^2\right)(\lambda-\lambda_3) = 0 \implies \left[\lambda^2 - b(\sigma+r)\right](\lambda-\lambda_3) = 0 \tag{۱۷}$$

$$\lambda^3 - \lambda_3\lambda^2 - b(\sigma+r)\lambda + b\lambda_3(\sigma+r) = 0 \tag{۱۸}$$

با مقایسه این رابطه با معادله مشخصه،

$$\boxed{\lambda_3 = -(\sigma + b + 1).} \tag{۱۹}$$

۲ مسئله 10.3.6

$$x_{n+1} = f(x_n) = rx_n - x_n^3 \tag{۲۰}$$

۱.۲ a

$$x^* = rx^* - x^{*3} \implies \begin{cases} x^* = 0; \quad \text{همه } r\text{های ممکن} & (۲۱) \\ x^* = \pm\sqrt{r-1}; \quad r > 1 & (۲۲) \end{cases}$$

$$f'(x) = r - 3x^2 \implies \begin{cases} f'(0) = r & (۲۳) \\ f'\big(\pm\sqrt{r-1}\big) = 3 - 2r & (۲۴) \end{cases}$$

اگر $|f'(x)| > 1$، نقطه ثابت ناپایدار و اگر $|f'(x)| < 1$، نقطه ثابت پایدار است.

$$x^* = 0 \begin{cases} |r| < 1: \quad \text{پایدار} & (۲۵) \\ |r| > 1: \quad \text{ناپایدار} & (۲۶) \end{cases}$$

$$x^* = \pm\sqrt{r-1} \begin{cases} 1 < r < 2: \quad \text{پایدار} & (۲۷) \\ r > 2,\ r < 1: \quad \text{ناپایدار} & (۲۸) \end{cases}$$

۲.۲ b

p و q جواب‌های معادله $x = f(f(x))$ هستند که معادل است با

$$x = r\big(rx - x^3\big) - \big(rx - x^3\big)^3, \tag{۲۹}$$

$$x\Big[\big(r - x^2\big)\Big(r - x^2\big(r - x^2\big)^2\Big) - 1\Big] = 0. \tag{۳۰}$$

برای فاکتورگیری و ساده‌سازی، تعریف می‌کنیم $u := r - x^2$. در این صورت

$$x\big[u\big(r - x^2u^2\big) - 1\big] = 0. \tag{۳۱}$$

با حذف r از معادله،

$$x\big[u\big(u + x^2 - x^2u^2\big) - 1\big] = 0, \tag{۳۲}$$
$$x\big[u^2 - 1 + ux^2(1 - u^2)\big] = 0, \tag{۳۳}$$
$$x\big(u^2 - 1\big)\big(1 - ux^2\big) = 0, \tag{۳۴}$$
$$x(u-1)(u+1)\big(1 - ux^2\big) = 0 \tag{۳۵}$$

با ضرب دو منفی در عبارات مزدوج و باز کردن u برحسب x و r،

$$x\big(x^2 - r + 1\big)\big(x^2 - r - 1\big)\big(x^4 - rx^2 + 1\big) = 0. \tag{۳۶}$$

سه جمله اول این عبارت نقاط ثابت را می‌دهند، جز حالتی که $(p,q) = \big(-\sqrt{1+r}, \sqrt{1+r}\big)$. پس بقیه p و q جواب‌های جمله آخر هستند. آن‌ها عبارتند از

$$(p,q) = \pm\left(\sqrt{\frac{r + \sqrt{r^2-4}}{2}}, \sqrt{\frac{r - \sqrt{r^2-4}}{2}}\right) \tag{۳۷}$$

۳.۲ c

$$\frac{d}{dx}f(f(x)) = f'(x)f'(f(x)) = f'(p)f'(q) \tag{۳۸}$$
$$= \big(r - 3p^2\big)\big(r - 3q^2\big) \tag{۳۹}$$
$$= r^2 - 3r(p^2 + q^2) + 9p^2q^2 \tag{۴۰}$$

$$(p,q) = \Big(-\sqrt{1+r}, \sqrt{1+r}\Big) : \ \frac{d}{dx}f(f(x)) = (2r+3)^2 \geq 0 \tag{۴۱}$$

چون در $r < -1$ مقدار ریشه‌های موهومی می‌شود و برای اینکه قدر مطلق $\frac{d}{dx}f(f(x))$ از یک کوچک‌تر باشد، باید حتماً r از -1 کوچک‌تر باشد، در تمام حالات این چرخه ناپایدار است.

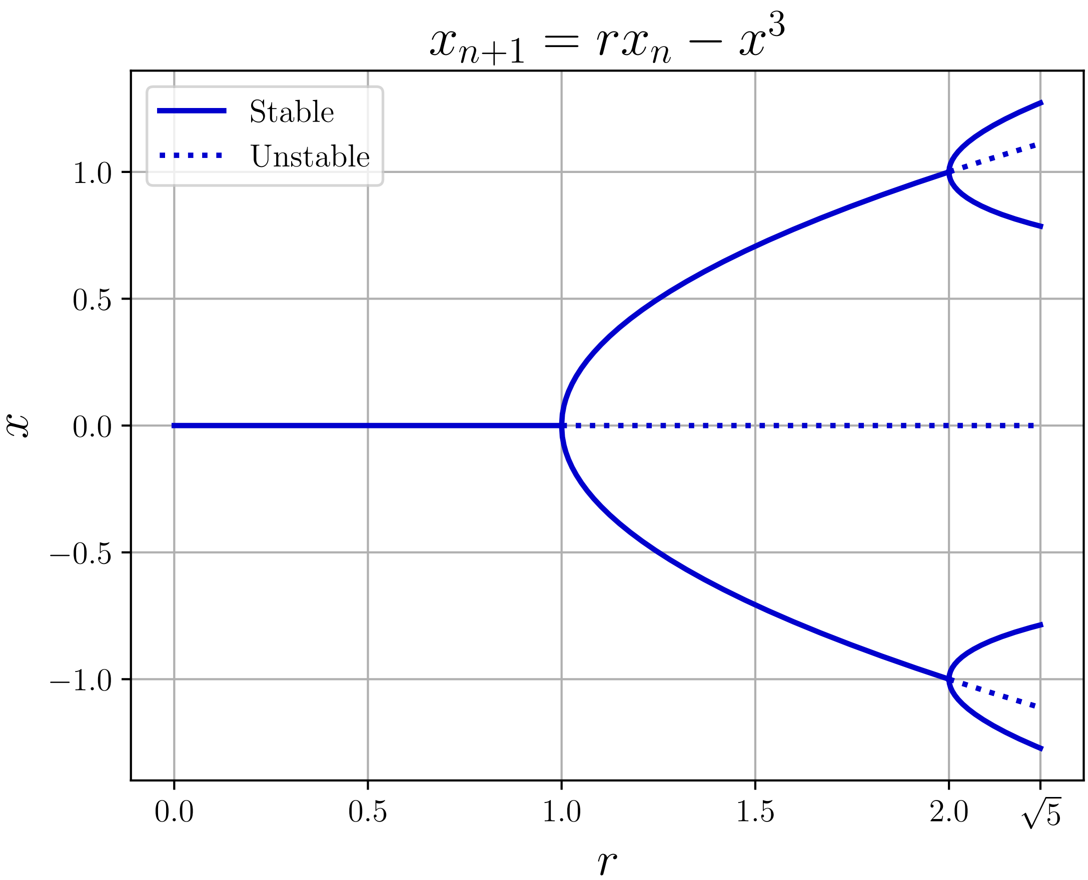
$$(p,q) = \pm\left(\sqrt{\frac{r + \sqrt{r^2-4}}{2}}, \sqrt{\frac{r - \sqrt{r^2-4}}{2}}\right) \begin{cases} p^2 + q^2 = r & \text{(۴۲آ)} \\ p^2q^2 = 1 & \text{(۴۲ب)} \end{cases}$$

$$\implies \frac{d}{dx}f(f(x)) = -2r^2 + 9 \qquad (۴۳)$$

شرط پایدار بودن این است که قدر مطلق این تابع از یک کوچک‌تر باشد، یا به عبارتی دیگر بین منفی یک و یک باشد. بنابراین در این p و q

$$\begin{cases} 2 < |r| < 5 \implies \text{پایدار} & (\text{۴۴آ}) \\ |r| < 2, \quad |r| > 5 \implies \text{ناپایدار} & (\text{۴۴ب}) \end{cases}$$

۴.۲ d

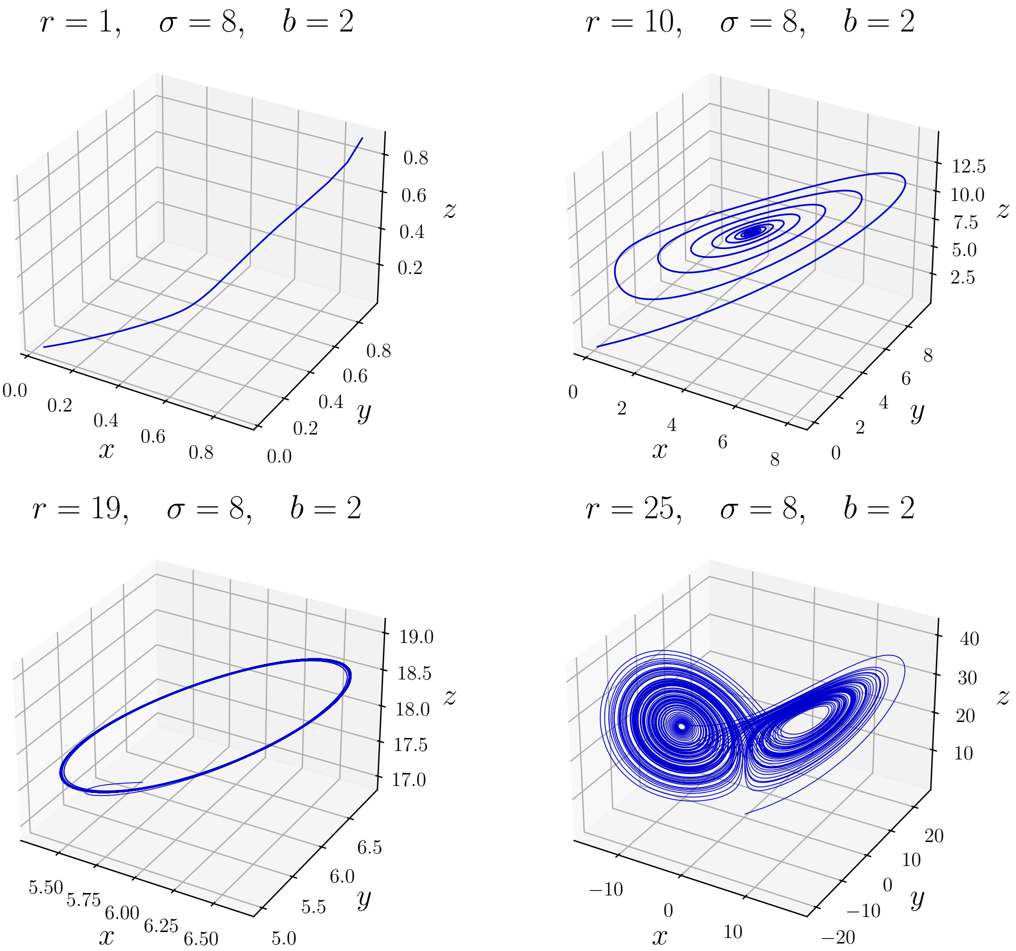


شکل ۱: نمودار دوشاخگی تا r بررسی‌شده

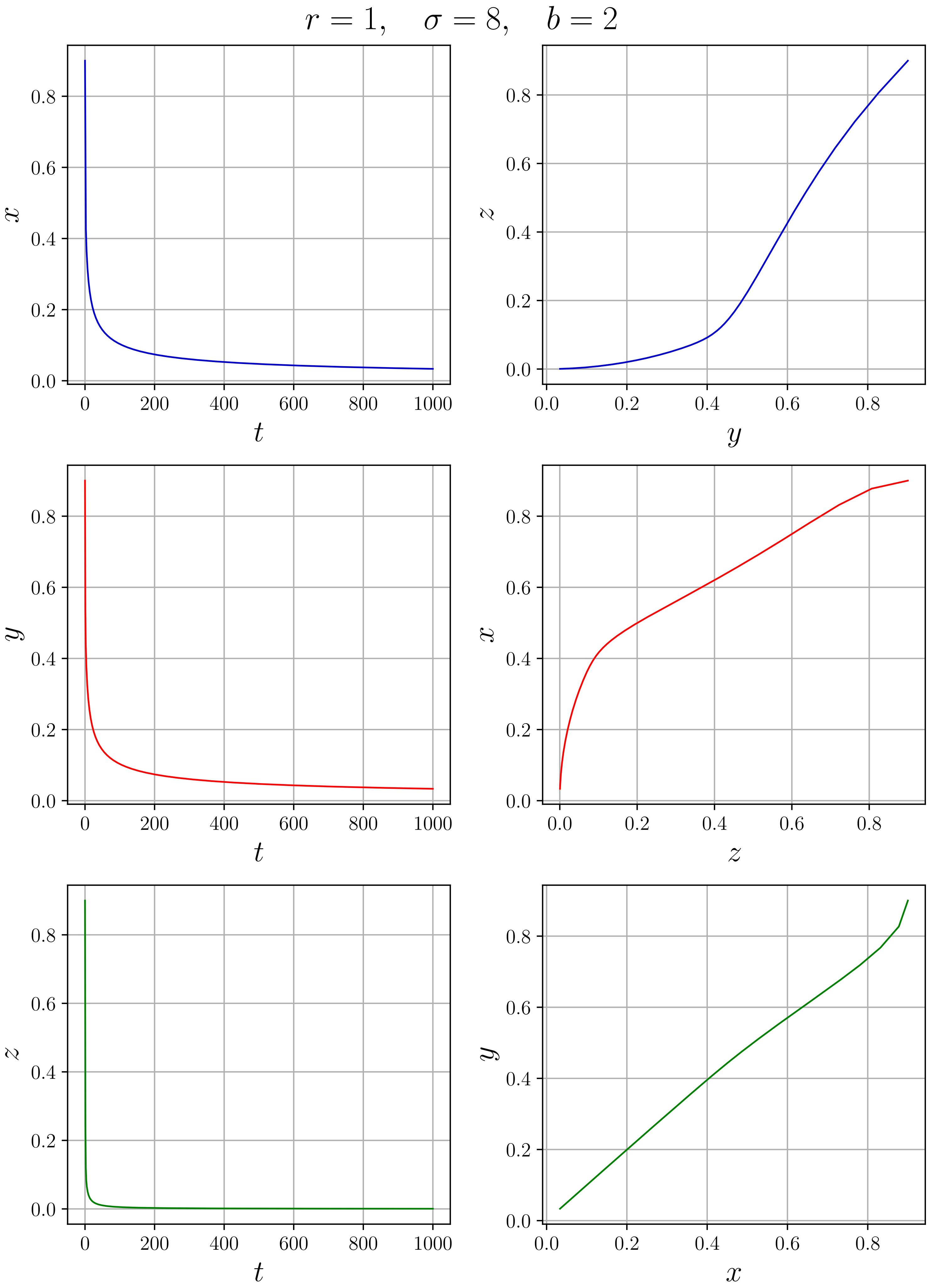
۳ نگاشت لورنتس

۱.۳ آ و ب

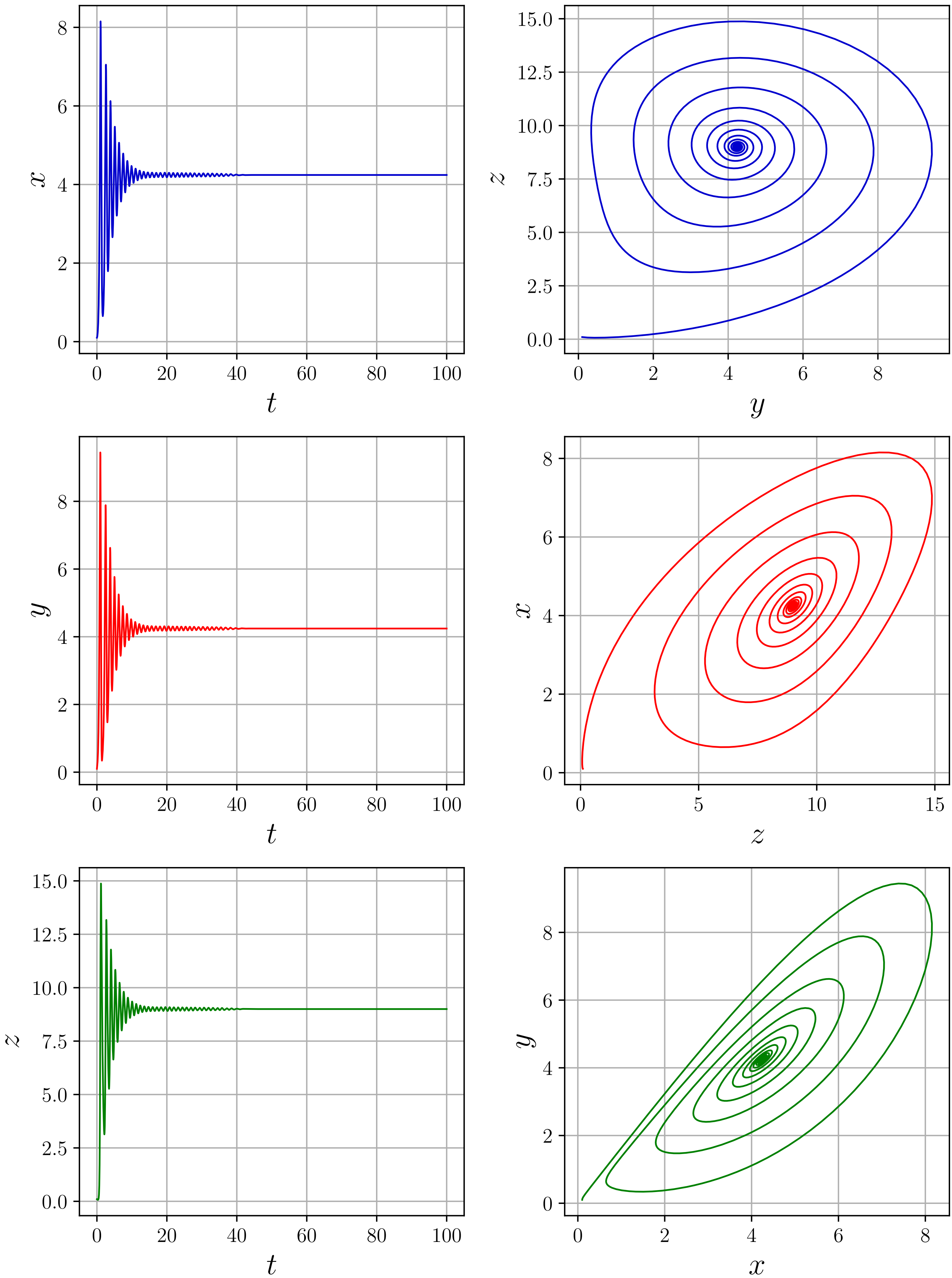
مقادیر $\sigma = 8$ و $b = 2$ را انتخاب می‌کنیم. در این حالت $r_H = 20.8$. در $r > r_H$ هنگامی که بیرون چرخه حدی قرار بگیریم، رباینده عجیب داریم که در $r > r_H$ در حالی که r زیاد هم بزرگ نباشد، همواره این شرط برقرار است.



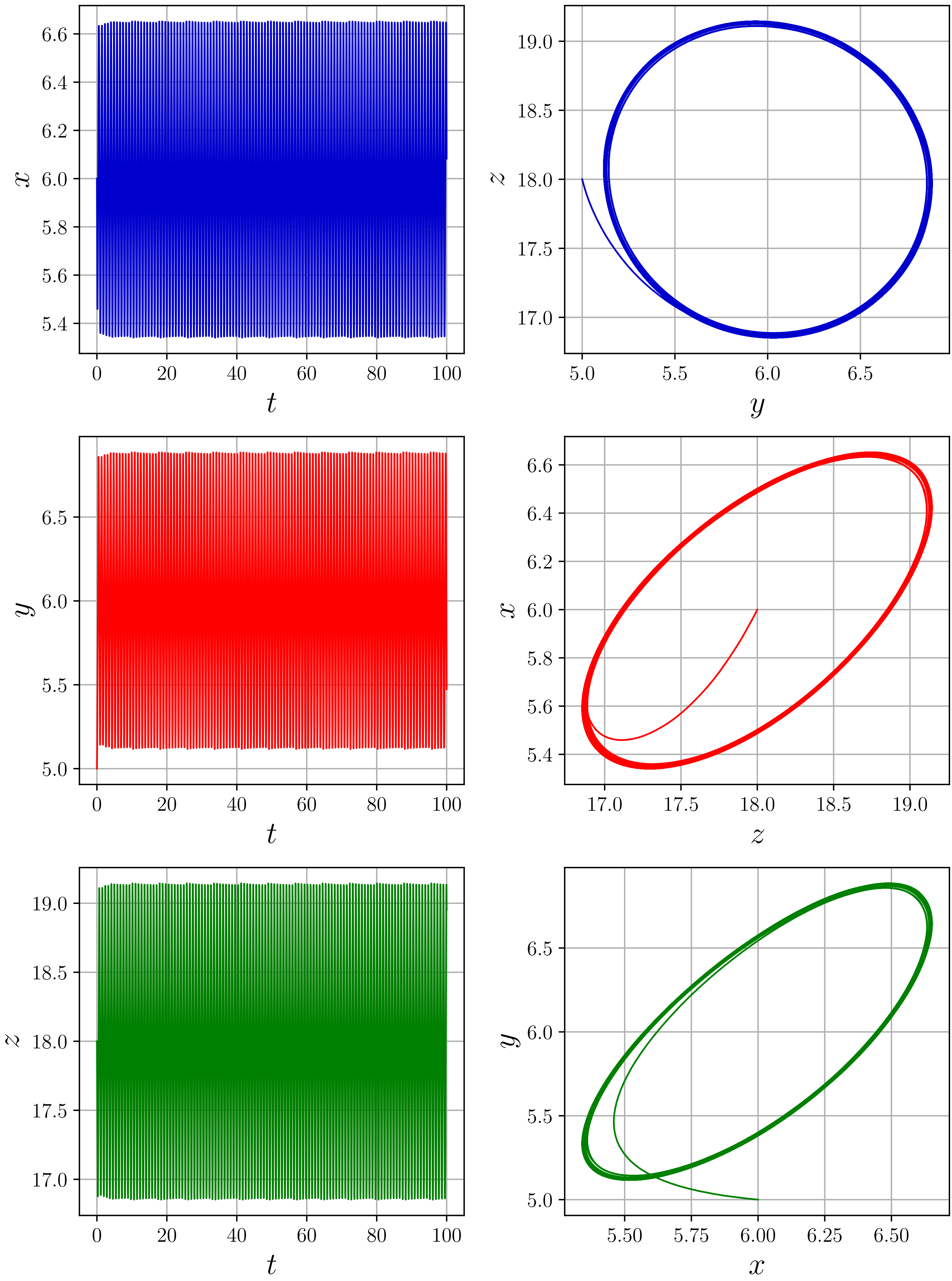
شکل ۲: نمودار سه‌بُعدی نگاشت لورنتس به ازای rهای مختلف.

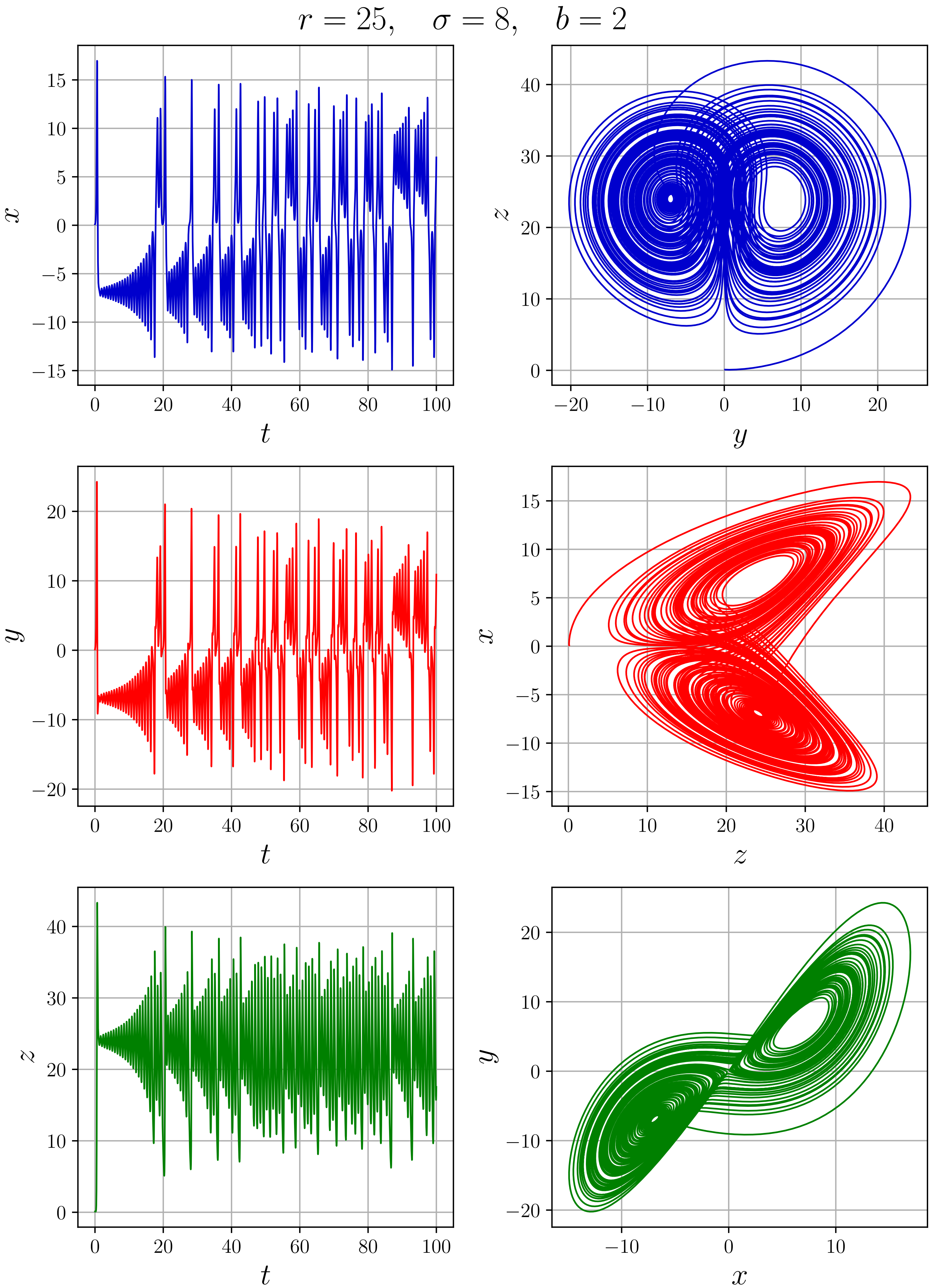

$r = 1, \quad \sigma = 8, \quad b = 2$
x
t
z
y
y
t
x
z
z
t
y
x
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
0
200
400
600
800
1000

$r = 10, \quad \sigma = 8, \quad b = 2$



$r = 19, \quad \sigma = 8, \quad b = 2$



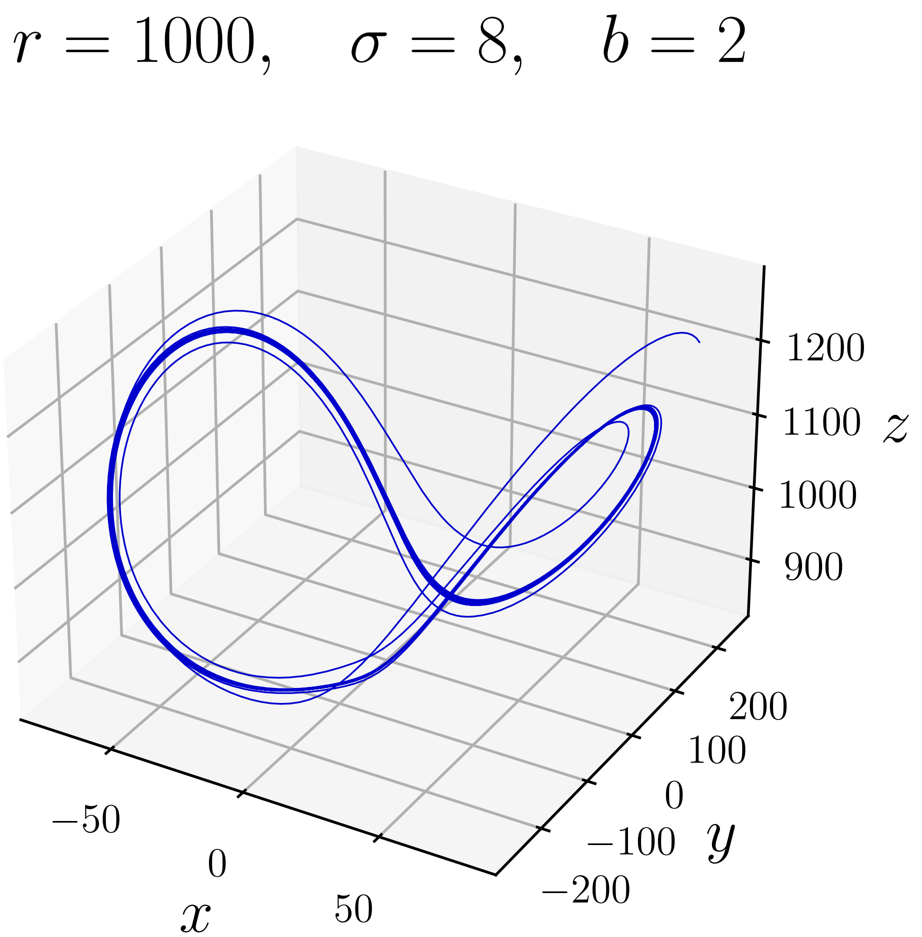


$r = 25, \quad \sigma = 8, \quad b = 2$
x
t
z
y
y
t
x
z
z
t
y
x

۲.۳ پ

از کُد استفاده‌شده در سری تمرین قبلی دوباره استفاده کردم. بدست می‌آید که $\lambda \approx 1.06$.

۳.۳ ت



$r = 1000, \quad \sigma = 8, \quad b = 2$