

# حل عددی معادلات ماکسول با روش تفاضل محدود حوزه زمان\*

صالح شاملو احمدی  
دانشگاه صنعتی شریف، دانشکده فیزیک

## چکیده

روش تفاضل محدود حوزه زمان (به اختصار FDTD) روشی نسبتاً ساده برای حل عددی معادلات ماکسول است. این روش با گسسته‌سازی میدان‌ها و فضازمان، مقدار میدان‌ها را در هر لحظه از زمان با کمک معادلات ماکسول به صورت موضعی به روزرسانی می‌کند. در این مقاله روش پیاده‌سازی و کاربرد FDTD را بررسی می‌کنیم.

## ۱ معادلات ماکسول

معادلات ماکسول عبارت‌اند از

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (\text{قانون گاوس}) \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (\text{قانون مغناطیسی گاوس}) \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (\text{قانون فارادی}) \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (\text{قانون آمپر-ماکسول}) \quad (4)$$

[Gri13] در این شکل از معادلات ماکسول،  $\rho$  و  $\mathbf{J}$  چگالی بار آزاد و چگالی جریان آزاد را نشان می‌دهند. پس در محیط‌های خطی در نقاطی که منبع (بار و جریان آزاد) وجود ندارد

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad (6)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (7)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (8)$$

---

\*Finite-Difference Time-Domain

در مختصات دکارتی و به صورت گسسته

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon \frac{\Delta E_x}{\Delta t} = \frac{\Delta H_z}{\Delta y} - \frac{\Delta H_y}{\Delta z}, \\ \epsilon \frac{\Delta E_y}{\Delta t} = \frac{\Delta H_x}{\Delta z} - \frac{\Delta H_z}{\Delta x}, \\ \epsilon \frac{\Delta E_z}{\Delta t} = \frac{\Delta H_y}{\Delta x} - \frac{\Delta H_x}{\Delta y}, \end{array} \right. \quad (9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \frac{\Delta H_x}{\Delta t} = \frac{\Delta E_y}{\Delta z} - \frac{\Delta E_z}{\Delta y}, \\ \mu \frac{\Delta H_y}{\Delta t} = \frac{\Delta E_z}{\Delta x} - \frac{\Delta E_x}{\Delta z}, \\ \mu \frac{\Delta H_z}{\Delta t} = \frac{\Delta E_x}{\Delta y} - \frac{\Delta E_y}{\Delta x}. \end{array} \right. \quad (10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \frac{\Delta H_x}{\Delta t} = \frac{\Delta E_y}{\Delta z} - \frac{\Delta E_z}{\Delta y}, \\ \mu \frac{\Delta H_y}{\Delta t} = \frac{\Delta E_z}{\Delta x} - \frac{\Delta E_x}{\Delta z}, \\ \mu \frac{\Delta H_z}{\Delta t} = \frac{\Delta E_x}{\Delta y} - \frac{\Delta E_y}{\Delta x}. \end{array} \right. \quad (11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \frac{\Delta H_x}{\Delta t} = \frac{\Delta E_y}{\Delta z} - \frac{\Delta E_z}{\Delta y}, \\ \mu \frac{\Delta H_y}{\Delta t} = \frac{\Delta E_z}{\Delta x} - \frac{\Delta E_x}{\Delta z}, \\ \mu \frac{\Delta H_z}{\Delta t} = \frac{\Delta E_x}{\Delta y} - \frac{\Delta E_y}{\Delta x}. \end{array} \right. \quad (12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \frac{\Delta H_x}{\Delta t} = \frac{\Delta E_y}{\Delta z} - \frac{\Delta E_z}{\Delta y}, \\ \mu \frac{\Delta H_y}{\Delta t} = \frac{\Delta E_z}{\Delta x} - \frac{\Delta E_x}{\Delta z}, \\ \mu \frac{\Delta H_z}{\Delta t} = \frac{\Delta E_x}{\Delta y} - \frac{\Delta E_y}{\Delta x}. \end{array} \right. \quad (13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \frac{\Delta H_x}{\Delta t} = \frac{\Delta E_y}{\Delta z} - \frac{\Delta E_z}{\Delta y}, \\ \mu \frac{\Delta H_y}{\Delta t} = \frac{\Delta E_z}{\Delta x} - \frac{\Delta E_x}{\Delta z}, \\ \mu \frac{\Delta H_z}{\Delta t} = \frac{\Delta E_x}{\Delta y} - \frac{\Delta E_y}{\Delta x}. \end{array} \right. \quad (14)$$

مرسوم است که در الکترومغناطیس محاسباتی به جای میدان  $B$ ، میدان  $H$  محاسبه شود. این کمیت در کار تجربی (آزمایشگاهی و صنعتی) سودمندتر است.

## ۲ روش FDTD

روش تفاضل محدود حوزه زمان (FDTD) اولین بار توسط کین شی-گونگ یی<sup>۱</sup> در سال ۱۹۶۶ ارائه شد [Yee66]. دلیل این نامگذاری برای روش این است که میدان‌ها با اختلاف میدان‌های نقاط مجاور به صورت موضعی بدست می‌آیند و همچنین حل روی دامنه زمانی انجام می‌شود و تحول زمانی سیستم را نشان می‌دهد.

### ۱۰.۲ گسسته‌سازی

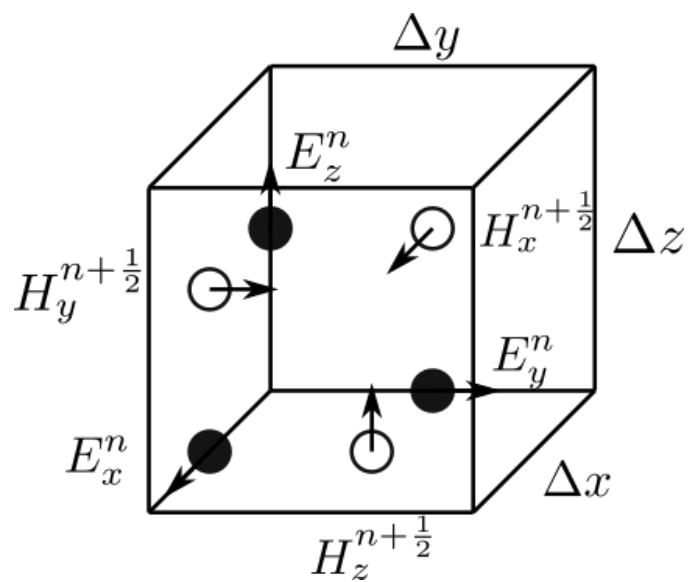
برای دقت بالاتر محاسبات، گسسته‌سازی مطابق شکل به صورت یک در میان برای میدان‌ها انجام می‌شود. با تقسیم فضا به تعدادی مکعب، میدان الکتریکی را وسط اضلاع و میدان مغناطیسی را وسط وجهه سلول‌های مکعبی فضا حساب می‌کنیم. در شکل‌های <sup>۱</sup> و <sup>۲</sup> می‌توانید شکل شبکه ایجاد شده در فضا را مشاهده کنید. این روش گسسته‌سازی، شبکه یی<sup>۳</sup> یا نگاشت یی<sup>۴</sup> نامیده می‌شود. با این روند با استفاده از خصوصیات هر سلول مکعبی از فضا، میدان‌های مربوط به هر سلول را محاسبه می‌کنیم.

اگر مختصات گسسته نقاط (شماره آنها بین کل نقاط) را با اعداد  $(l, m, n)$ ، فاصله زمانی لحظات شبیه‌سازی را با  $\Delta t$  و فاصله نقاط شبکه (طول ضلع سلول مکعبی شبکه) را با  $\delta$  نشان دهیم، با گسسته

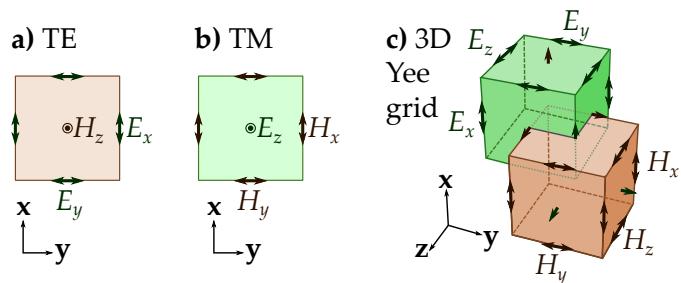
<sup>1</sup>Kane Shee-Gong Yee

<sup>2</sup>Yee Lattice/Yee Grid

<sup>3</sup>Yee's Scheme



شکل ۱: یک سلوول در شبکه یی



شکل ۲: شکل شبکه یی

سازی معادلات ماکسول (در محیط خطی در جایی که بار و جریان آزاد نداریم)

$$E_x^{l,m,n}(t + \Delta t) = E_x^{l,m,n}(t) + \frac{\Delta t}{\epsilon} \left( \frac{H_z^{l,m+1/2,n} - H_z^{l,m-1/2,n}}{\delta_y} - \frac{H_y^{l,m,n+1/2} - H_y^{l,m,n-1/2}}{\delta_z} \right), \quad (15)$$

$$E_y^{l,m,n}(t + \Delta t) = E_y^{l,m,n}(t) + \frac{\Delta t}{\epsilon} \left( \frac{H_x^{l,m,n+1/2} - H_x^{l,m,n-1/2}}{\delta_z} - \frac{H_z^{l+1/2,m,n} - H_z^{l-1/2,m,n}}{\delta_x} \right), \quad (16)$$

$$E_z^{l,m,n}(t + \Delta t) = E_z^{l,m,n}(t) + \frac{\Delta t}{\epsilon} \left( \frac{H_y^{l+1/2,m,n} - H_y^{l-1/2,m,n}}{\delta_x} - \frac{H_x^{l,m+1/2,n} - H_x^{l,m-1/2,n}}{\delta_y} \right), \quad (17)$$

$$H_x^{l,m,n}(t + \Delta t) = H_x^{l,m,n}(t) + \frac{\Delta t}{\mu} \left( \frac{E_y^{l,m,n+1/2} - E_y^{l,m,n-1/2}}{\delta_z} - \frac{E_z^{l,m+1/2,n} - E_z^{l,m-1/2,n}}{\delta_y} \right), \quad (18)$$

$$H_y^{l,m,n}(t + \Delta t) = H_y^{l,m,n}(t) + \frac{\Delta t}{\mu} \left( \frac{E_z^{l+1/2,m,n} - E_z^{l-1/2,m,n}}{\delta_x} - \frac{E_x^{l,m,n+1/2} - E_x^{l,m,n-1/2}}{\delta_z} \right), \quad (19)$$

$$H_z^{l,m,n}(t + \Delta t) = H_z^{l,m,n}(t) + \frac{\Delta t}{\mu} \left( \frac{E_x^{l,m+1/2,n} - E_x^{l,m-1/2,n}}{\delta_y} - \frac{E_y^{l+1/2,m,n} - E_y^{l-1/2,m,n}}{\delta_x} \right). \quad (20)$$

این معادلات را بر حسب سرعت نور در خلا  $c = 1/(\sqrt{\mu_0 \epsilon_0})$ ، امپدانس خلا  $Z_0 := \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ ، ضریب دیالکتریک  $\epsilon_r := \epsilon/\epsilon_0$ ، ضریب پذیرفتاری نسبی  $\mu_r := \mu/\mu_0$  و عدد

کورانت<sup>۴</sup> بازنویسی می‌کنیم (فرض می‌کنیم فواصل شبکه در تمام جهات یکسان هستند):

$$\begin{aligned} E_x^{l,m,n}(t + \Delta t) &= E_x^{l,m,n}(t) \\ &+ \frac{C_0 Z_0}{\epsilon_r} [(H_z^{l,m+1/2,n} - H_z^{l,m-1/2,n}) - (H_y^{l,m,n+1/2} - H_y^{l,m,n-1/2})], \end{aligned} \quad (۲۱)$$

$$\begin{aligned} E_y^{l,m,n}(t + \Delta t) &= E_y^{l,m,n}(t) \\ &+ \frac{C_0 Z_0}{\epsilon_r} [(H_x^{l,m,n+1/2} - H_x^{l,m,n-1/2}) - (H_z^{l+1/2,m,n} - H_z^{l-1/2,m,n})], \end{aligned} \quad (۲۲)$$

$$\begin{aligned} E_z^{l,m,n}(t + \Delta t) &= E_z^{l,m,n}(t) \\ &+ \frac{C_0 Z_0}{\epsilon_r} [(H_y^{l+1/2,m,n} - H_y^{l-1/2,m,n}) - (H_x^{l,m+1/2,n} - H_x^{l,m-1/2,n})], \end{aligned} \quad (۲۳)$$

$$\begin{aligned} H_x^{l,m,n}(t + \Delta t) &= H_x^{l,m,n}(t) \\ &+ \frac{C_0}{Z_0 \mu_r} \left[ (E_y^{l,m,n+1/2} - E_y^{l,m,n-1/2}) - \frac{E_z^{l,m+1/2,n} - E_z^{l,m-1/2,n}}{\delta_y} \right], \end{aligned} \quad (۲۴)$$

$$\begin{aligned} H_y^{l,m,n}(t + \Delta t) &= H_y^{l,m,n}(t) \\ &+ \frac{C_0}{Z_0 \mu_r} [(E_z^{l+1/2,m,n} - E_z^{l-1/2,m,n}) - (E_x^{l,m,n+1/2} - E_x^{l,m,n-1/2})], \end{aligned} \quad (۲۵)$$

$$\begin{aligned} H_z^{l,m,n}(t + \Delta t) &= H_z^{l,m,n}(t) \\ &+ \frac{C_0}{Z_0 \mu_r} [(E_x^{l,m+1/2,n} - E_x^{l,m-1/2,n}) - (E_y^{l+1/2,m,n} - E_y^{l-1/2,m,n})]. \end{aligned} \quad (۲۶)$$

با استفاده مکرر از این معادلات در هر گام زمانی، می‌توانیم تحول میدان‌ها را شبیه‌سازی کنیم و وضعیت سیستم را در زمان‌های مختلف پیدا کنیم.

دقت کنید که محاسبه کامل میدان در هر سلول نیازمند دو پله زمانی است؛ به عنوان مثال میدان الکتریکی در هر سلول وابسته به میدان مغناطیسی آن سلول است، اما برای بدست آوردن میدان مغناطیسی آن سلول به میدان الکتریکی نیاز داریم. برای تکمیل این وابستگی، دو پله زمانی نیاز داریم تا تأثیر میدان‌ها روی هم کامل محاسبه شود. برای بالا بردن دقیقیت محاسبات، می‌توانیم پله‌های زمانی مربوط به هر میدان را نیز یکی در میان در نظر بگیریم؛ یعنی پله‌های زمانی عدد صحیح  $n$  را برای  $E$  و پله‌های زمانی  $n + 1/2$  را برای  $H$  در نظر بگیریم.

---

<sup>۴</sup>Courant Number

## ۲۰۲ پایداری

طبق شرط همگرایی کورانت-فردیشز-لوی<sup>۵</sup>، شرط پایداری الگوریتم FDTD این است که عدد کورانت کوچک‌تر مساوی عکس رادیکال بُعد فضا باشد. یعنی به عنوان مثال در سه بعد  $C_0 \leq 1/\sqrt{3}$ . این یک شرط محاسباتی مربوط به حل عددی معادلات دیفرانسیل است، اما به صورت فیزیکی نیز می‌توانیم آن را تعبیر کنیم: اطلاعات با سرعت نور انتقال پیدا می‌کند، پس در هر مرحله میدان‌های سلول‌هایی که فاصله آنها از  $c\Delta t$  کمتر باشد باید توسط یک نقطه بهروزرسانی شوند؛ اگر عدد کورانت از مقدار حداکثری که برایش تعریف کردیم بزرگ‌تر باشد، باید علاوه بر سلول‌های همسایه، سلول‌های دورتری نیز بهروزرسانی شوند؛ اما در روش FDTD فقط سلول‌های همسایه در هر گام زمانی بهروزرسانی می‌شوند، پس در این حالت الگوریتم FDTD به مشکل می‌خورد.

دقت کنید که اگر عدد کورانت کوچک‌تر از مقدار حداکثر خود باشد، مقدار بهروزرسانی شده برای سلول همسایه تقریبی از مقدار میدان در فضای بین خود سلول و همسایه‌اش خواهد بود، چراکه نور در این حالت در یک گام فرصت ندارد فاصله دو سلول را طی کند. بنابراین هرچقدر عدد کورانت به مقدار حداکثر خود نزدیک‌تر باشد، دقتش جواب بالاتر خواهد بود.

## ۳۰۲ منبع میدان

تا اینجا معادلات را بدون بار و جریان آزاد در نظر گرفتیم. در حالت کلی‌تر، چگالی بار و جریان منابعی برای تولید میدان هستند.

## ۴۰۲ جریان

اگر در یک نقطه از فضا چگالی جریان  $\mathbf{J}$  داشته باشیم

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (27)$$

یا به شکل گسسته

$$\Delta \mathbf{E} = -\frac{\Delta t}{\epsilon} \mathbf{J} + \Delta t \nabla \times \mathbf{H}. \quad (28)$$

بدین ترتیب می‌توانیم تغییرات میدان را به دو بخش تقسیم کنیم:

$$\Delta \mathbf{E} = \Delta \mathbf{E}_s + \Delta \mathbf{E}_H \quad (29)$$

جمله  $\Delta \mathbf{E}_H$  مربوط به اثر میدان مغناطیسی است که در بخش قبل گسسته‌سازی کردیم. جمله  $\Delta \mathbf{E}_s$  مربوط به اثر چگالی جریان است که در نقاطی که جریان داریم به مقدار قبلی اضافه می‌شود. بنابراین جمله مربوط به چگالی جریان مانند یک منبع برای میدان الکتریکی عمل می‌کند.

---

<sup>5</sup>Courant–Friedrichs–Lowy Convergence Condition

شاید کمی عجیب به نظر بیاید که چگالی جریان به جای میدان مغناطیسی منبع میدان الکتریکی باشد، چراکه معادلات ماکسول تصویر دیگری ارائه می‌دهند. نکته قابل توجه این است که در سیستم‌های واقعی (که آنها را با روش‌های عددی شبیه‌سازی می‌کنیم) جریان‌ها و میدان‌ها پایا نیستند (هرچند در طول زمان ممکن است به یک حالت پایدار برسند)، بنابراین در هر نقطه از فضا میدان الکتریکی و مغناطیسی متغیر داریم که روی هم تأثیر می‌گذارند. بنابراین یک منبع برای هر کدام از میدان‌های مغناطیسی و الکتریکی، باعث تولید میدان دیگر هم می‌شود. در کل در فرمالیسم کامل الکترومغناطیس نمی‌توان میدان الکتریکی و مغناطیسی را از هم جدا کرد؛ با در نظر گرفتن نسبیت خاص، این دو میدان دو بخش مختلف از یک تansور هستند که به طور کامل برهم‌کنش الکترومغناطیسی را توصیف می‌کند.

## ۵.۲ بار

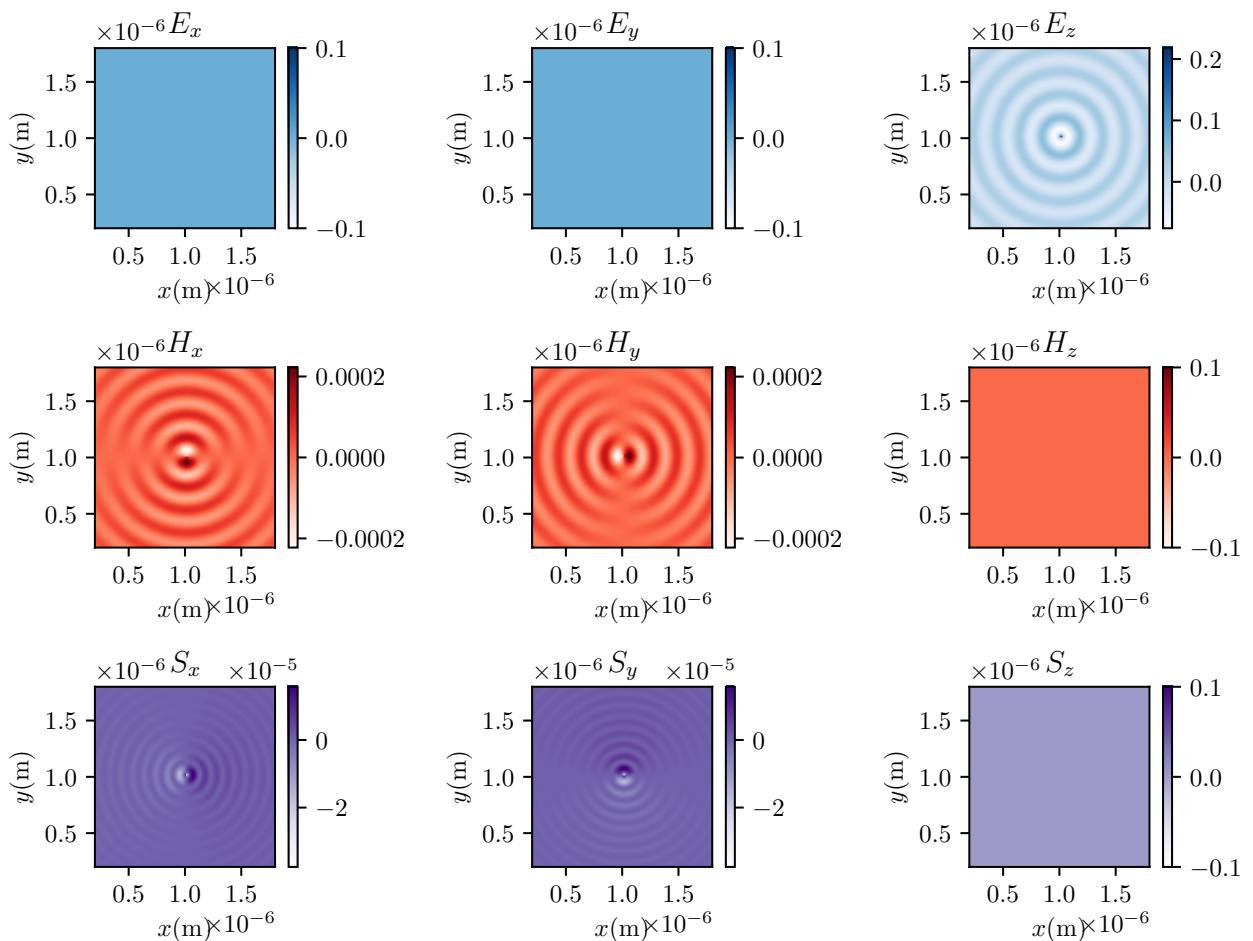
طبق قانون گاووس در محیط‌های خطی

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon}. \quad (30)$$

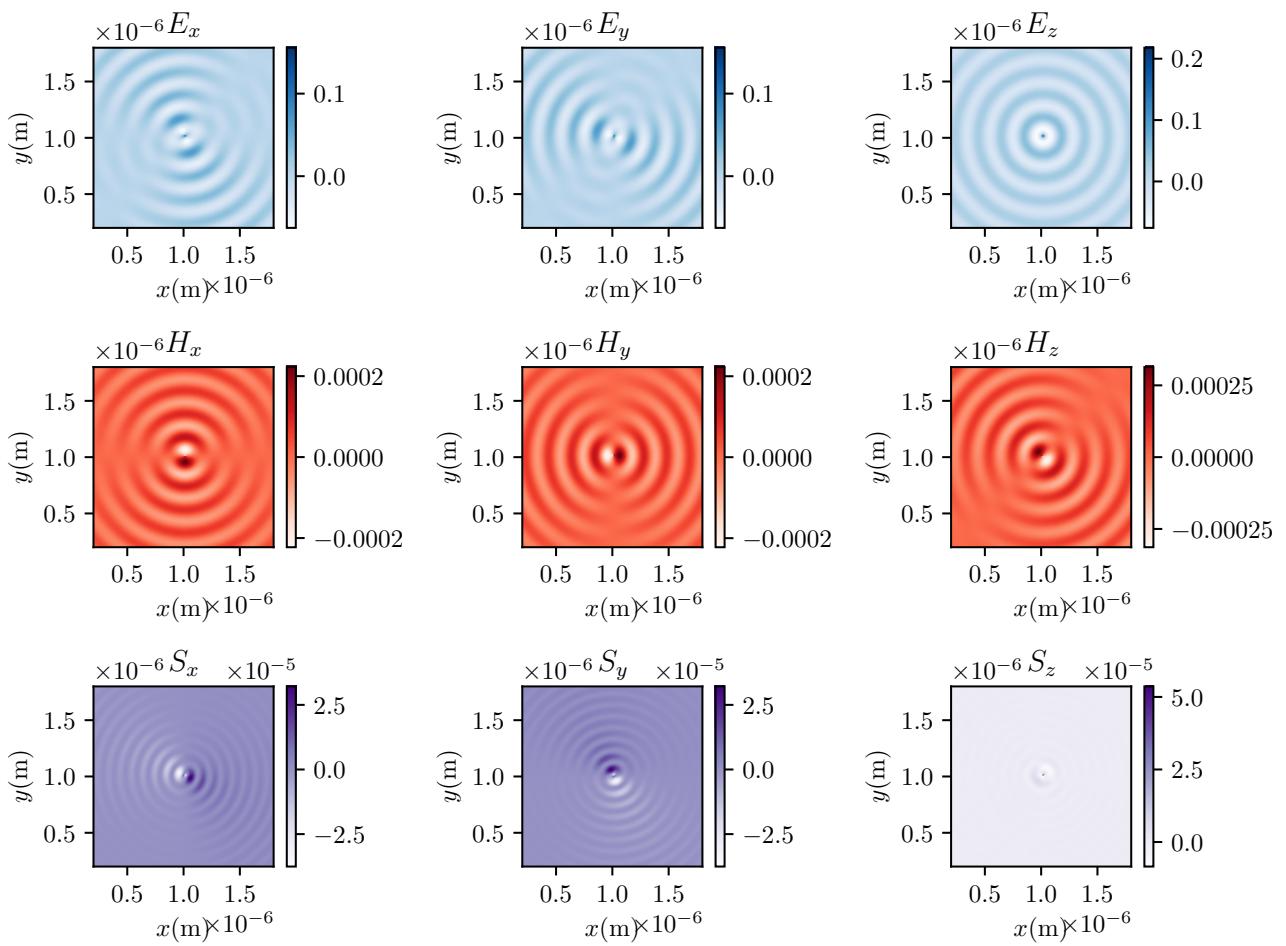
مشابه چگالی جریان، بار نیز مثل یک منبع برای میدان الکتریکی عمل می‌کند، با این تفاوت که اثر آن به طور ثابت به میدان اضافه می‌شود؛ یعنی با گذر زمان اثر آن روی میدان افزایش پیدا نمی‌کند و تنها در فضا پخش می‌شود.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_s : \text{در نقاط حاوی بار} \quad (31)$$

طبق نتایج بدست آمده، در حالت کلی با اضافه شدن منبع، یک جمله میدان منبع به معادلات اضافه می‌شود.



شکل ۳: جریان نقطه‌ای



شکل ۴: بار نقطه‌ای

### ۳ ماده رسانا (محیط اقلافی)

در محیط رسانایی که از قانون اهم پیروی می‌کند

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad (32)$$

پس با جایگذاری  $\mathbf{J}$  در رابطه (۲۸)

$$\Delta \mathbf{E} = -\frac{\sigma \Delta t}{\epsilon} \mathbf{E} + \Delta t \nabla \times \mathbf{H}. \quad (33)$$

بنابراین میدان الکتریکی هر سلول در یک پله زمانی خاص، به میدان الکتریکی در پله زمانی میدان مغناطیسی آن سلول نیز وابسته می‌شود. اما با یکی در میان در نظر گرفتن پله‌های زمانی

$$\mathbf{E}(t + \Delta t) - \mathbf{E}(t) = -\frac{\sigma \Delta t}{\epsilon} \mathbf{E}\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) + \Delta t \nabla \times \mathbf{H}\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) \quad (34)$$

و به این مشکل بر می‌خوریم که برای به روزرسانی، میدان الکتریکی در پله‌های زمانی مناسب را محاسبه نکردیم. بنابراین باید میدان الکتریکی را در پله‌های زمانی مورد نظر درون‌یابی<sup>۶</sup> کنیم؛ می‌توانیم اثر میدان در پله زمانی میانی  $t + \Delta t/2$  را در دو پله زمانی  $t$  و  $t + \Delta t$  به طور مساوی پخش کنیم:

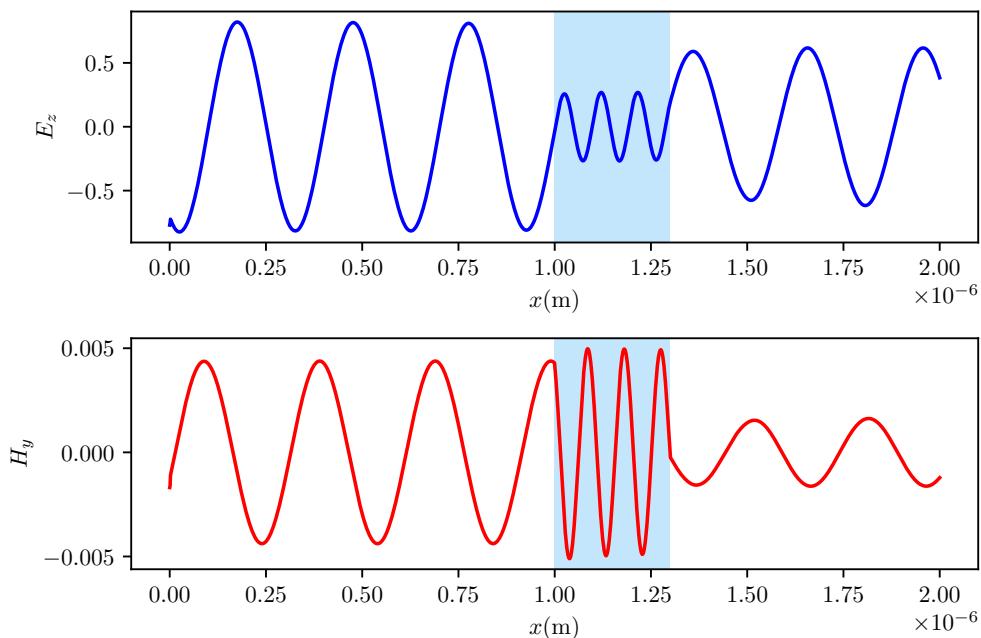
$$\mathbf{E}(t + \Delta t) - \mathbf{E}(t) = -\frac{\sigma \Delta t}{2\epsilon} \mathbf{E}\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) - \frac{\sigma \Delta t}{2\epsilon} \mathbf{E}(t) + \Delta t \nabla \times \mathbf{H}\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) \quad (35)$$

$$\mathbf{E}(t + \Delta t) = \frac{1 - \frac{\sigma \Delta t}{2\epsilon}}{1 + \frac{\sigma \Delta t}{2\epsilon}} \mathbf{E}(t) + \frac{\Delta t \nabla \times \mathbf{H}\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right)}{1 + \frac{\sigma \Delta t}{2\epsilon}} \quad (36)$$

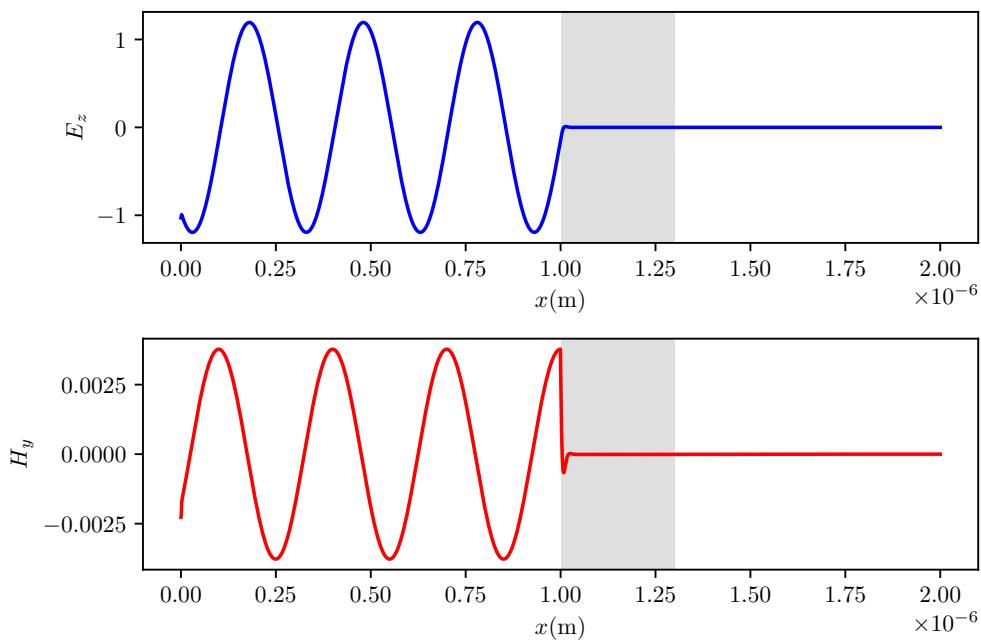
بدین ترتیب معادله به روزرسانی میدان الکتریکی تصحیح می‌شود.

---

<sup>6</sup>interpolate

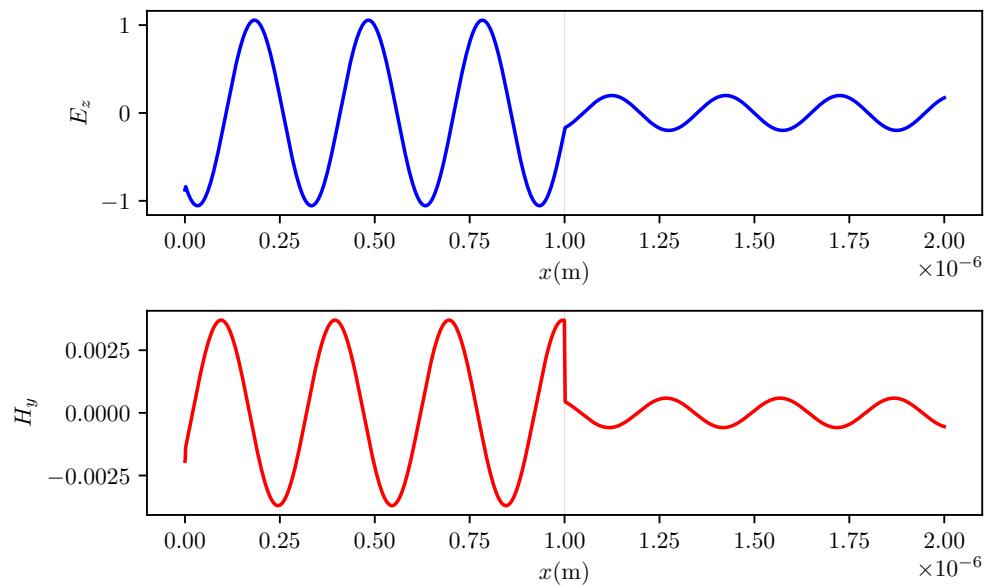


شکل ۵: برهمکنش میدان‌ها با ماده غیررسانا



شکل ۶: برهمکنش میدان‌ها با ماده رسانا (رسانایی بسیار کم)  
 $(\sigma = 2.0 \text{ S m}^{-1})$

$x = 1.00 \mu\text{m}$ , Thickness = 2.0 nm,  $\epsilon_r = 3.0$ ,  $\sigma = 2.0 \text{ S/m}$



شکل ۷: حتی لایه‌ای با ضخامت از مرتبه نانومتر و رسانایی بسیار کم جلوی عبور مقدار زیادی از میدان را می‌گیرد.

## ۴ شرایط مرزی

[Sch10] اگر در مرزهای فضای شبیه‌سازی تغییری اعمال نکنیم و میدان را در آنجا برابر صفر قرار دهیم، این مرزها مانند آینه عمل می‌کنند و میدان‌ها را بازتاب می‌کنند. در شبیه‌سازی سیستم‌ها به طور معمول سیستم‌ها را داخل فضای آزاد بررسی می‌کنیم؛ یعنی محیط به نسبت سیستم مورد بررسی خیلی بزرگ‌تر است و انگار داریم یک بخش کوچک از فضا را بررسی می‌کنیم. بنابراین مرزهای بازتاب‌کننده برای بیشتر شبیه‌سازی‌ها مناسب نیستند.

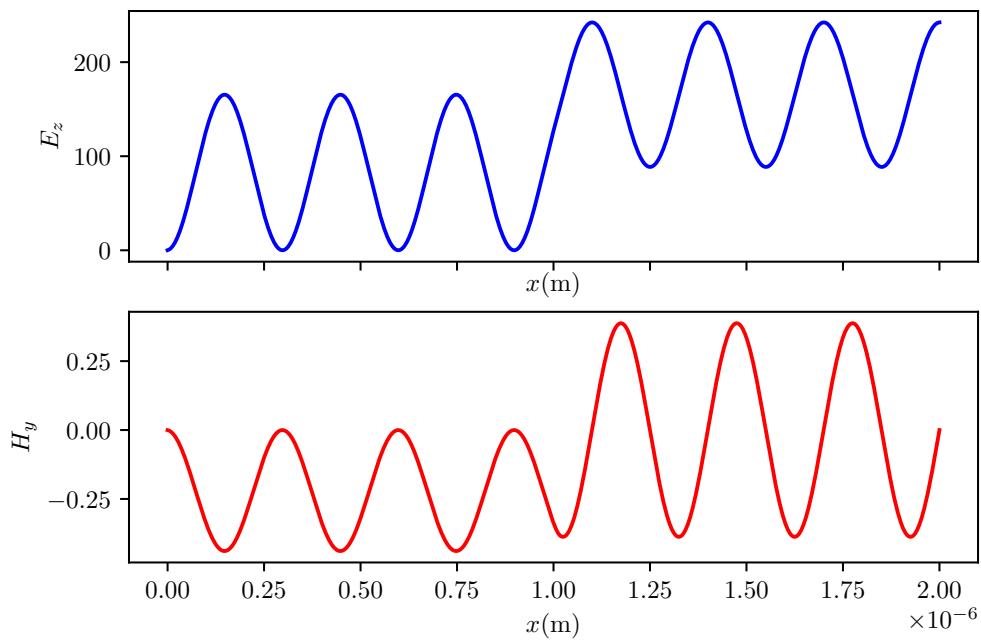
برای شبیه‌سازی یک سیستم داخل فضای آزاد باید از شرایط مرزی جذب کننده<sup>7</sup> استفاده کنیم؛ دیواره‌ها با این نوع شرایط مرزی با تقلید میدان‌ها در نقاط همسایه خود می‌توانند میدان‌ها را جذب کنند و از بازتاب شدن آنها جلوگیری کنند. انگار که سیگنانل از دیواره‌ها عبور کرده و وارد فضای آزاد شده. پیاده‌سازی شرایط مرزی جذب‌کننده فقط در یک بُعد به طور دقیق ممکن است و در ابعاد بالاتر به طور تقریبی امکان پذیر است.

### ۱۰۴ شرایط مرزی جذب کننده دقیق در یک بُعد

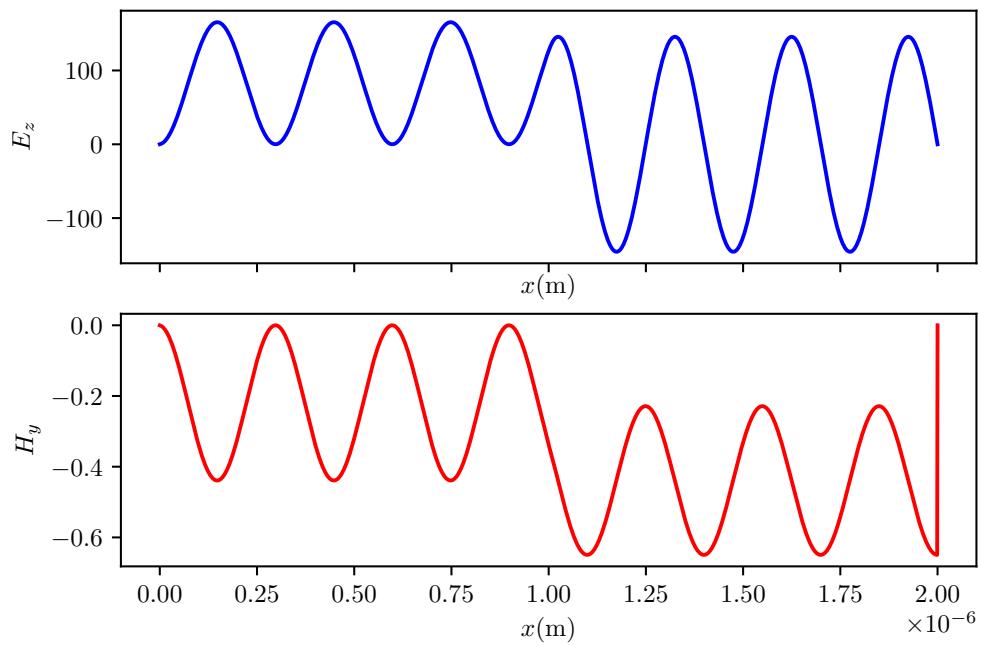
همان طور که اشاره شد، هر سیگنانل دو پله زمانی طول می‌کشد تا یک سلول حرکت کند. پس کافیست یک پله زمانی در میان، در مرزهای شبیه‌سازی میدان را مشابه سلول‌های مجاور مرز کنیم تا با تقلید سیگنانل، دیواره آن را جذب کند.

---

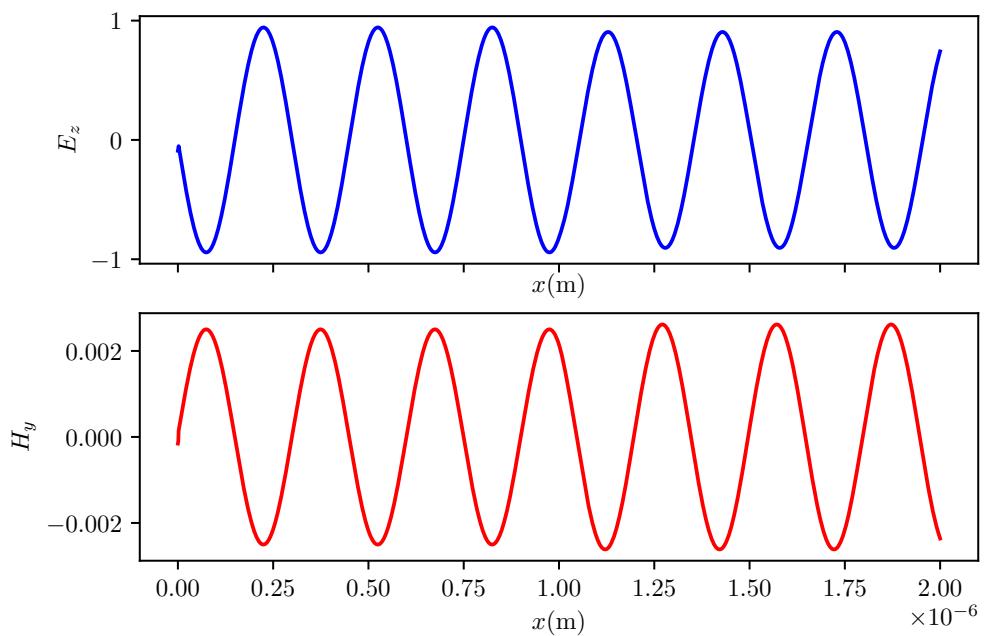
<sup>7</sup>Absorbing Boundary Conditions



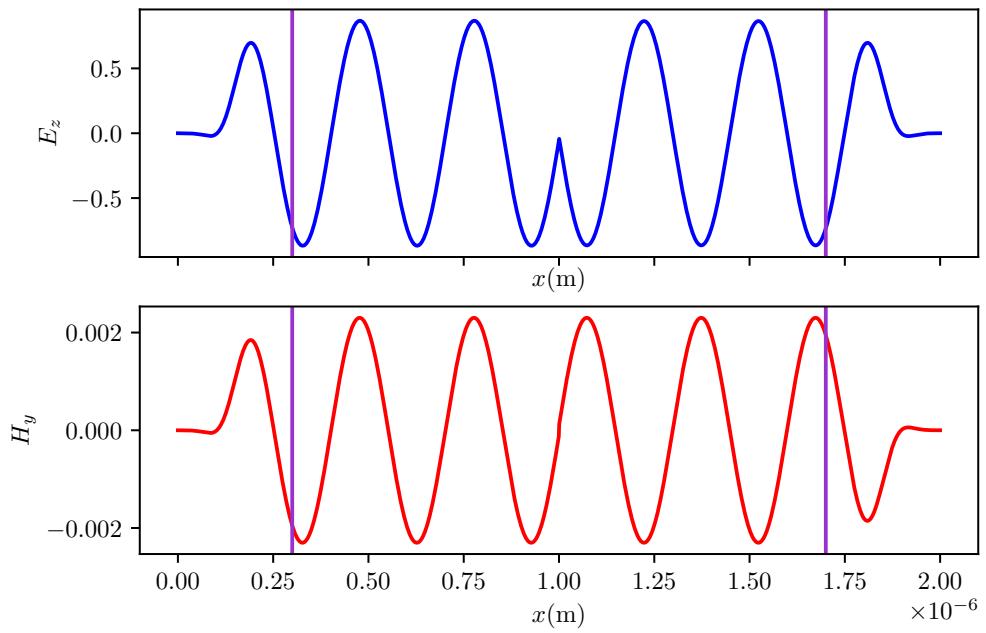
شکل ۸: بازتاب میدان از مرزها بدون اعمال شرایط مرزی (شرایط مرزی نیمه بازتابی) در یک بعد



شکل ۹: بازتاب میدان از مرزها با برابر صفر قرار دادن هر دو میدان در تمام مرزها (شرایط مرزی بازتابی) در یک بعد

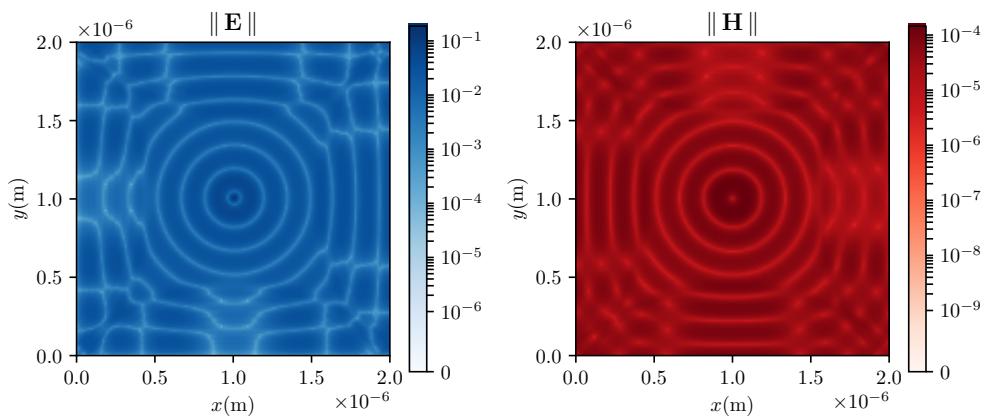


شکل ۱۰: شرایط مرزی جذب کننده دقیق

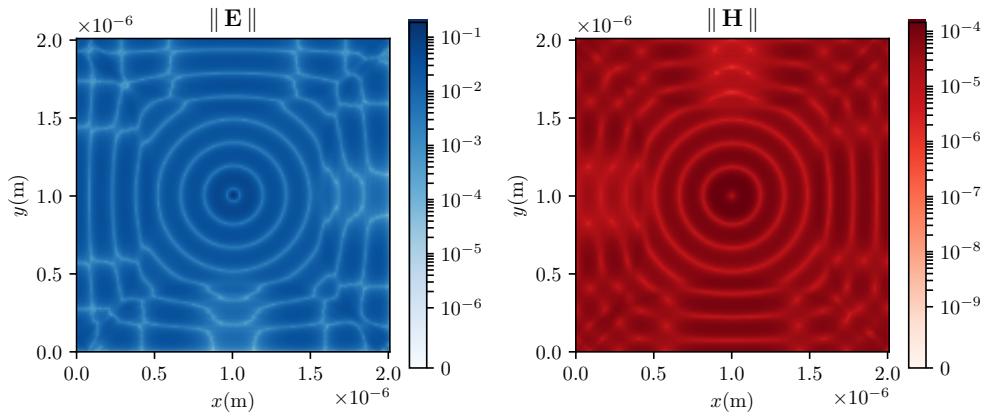


شکل ۱۱: لایه همساز کامل در یک بعد. لایه همساز خارج خطهای بنفس مشخص شده قرار دارد.

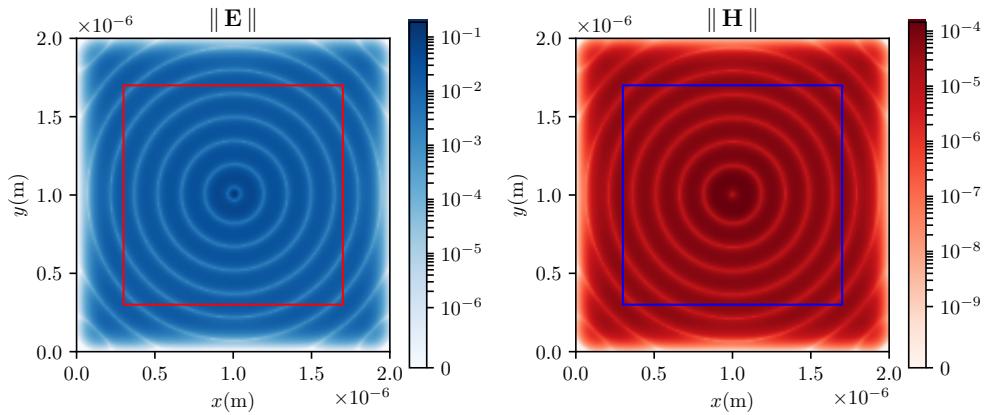
۲۰۴ لایه همساز کامل



شکل ۱۲: بازتاب میدان از مرزها بدون اعمال شرایط مرزی (شرایط مرزی نیمه بازتابی) در دو بعد



شکل ۱۳: بازتاب میدان از مرزها با برابر صفر قرار دادن هر دو میدان در تمام مرزها (شرایط مرزی بازتابی) در دو بعد



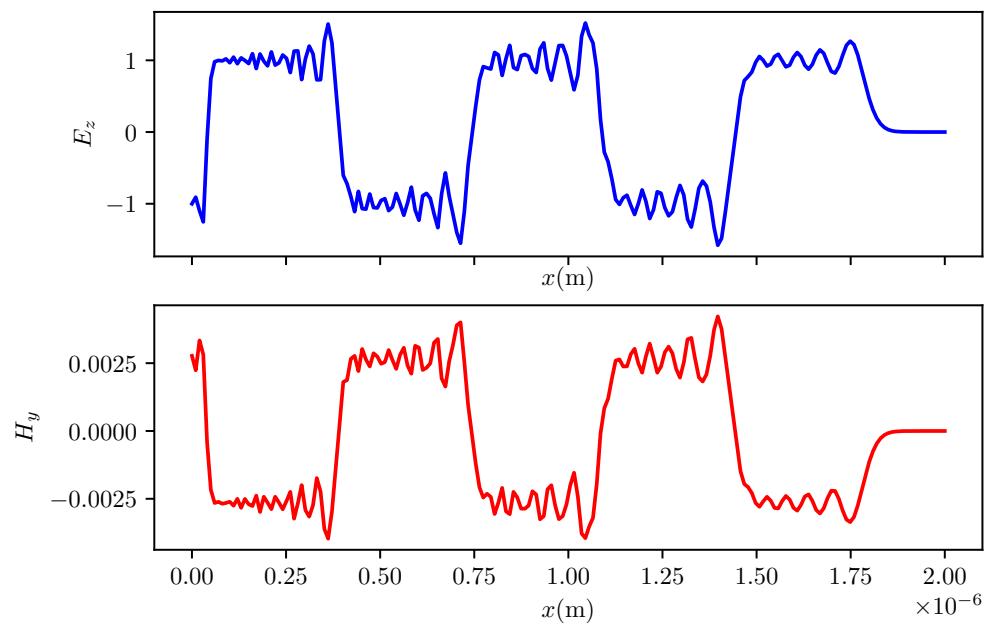
شکل ۱۴: لایه همساز کامل در دو بعد. لایه همساز خارج کادرهای رنگی مشخص شده قرار دارد.

## ۵ نقاط قوت FDTD

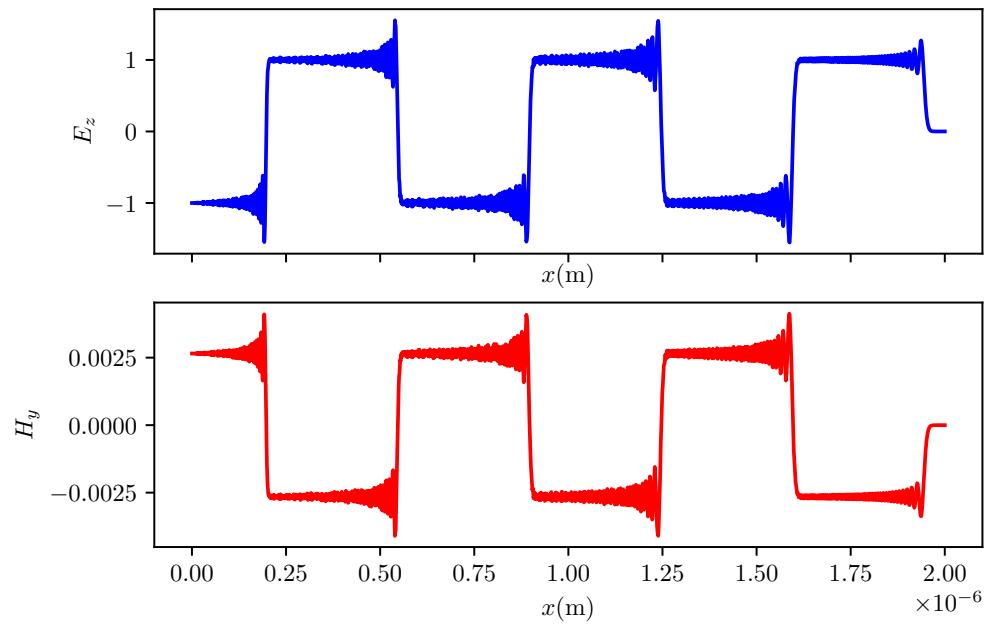
۱. این روش نسبت به بقیه روش‌های حل معادلات ماکسول ساده‌تر است و پیاده‌سازی آن نسبتاً آسان است
۲. چون جواب‌ها بر حسب زمان هستند (برخلاف بعضی روش‌ها که جوابشان بر حسب فرکانس است)، می‌توان دامنه وسیعی از فرکانس‌ها را در یک شبیه‌سازی بررسی کرد
۳. تعمیم این روش برای جزئیات مختلف برای فضا و محیط‌های غیر خطی ساده است

## ۶ نقاط ضعف FDTD

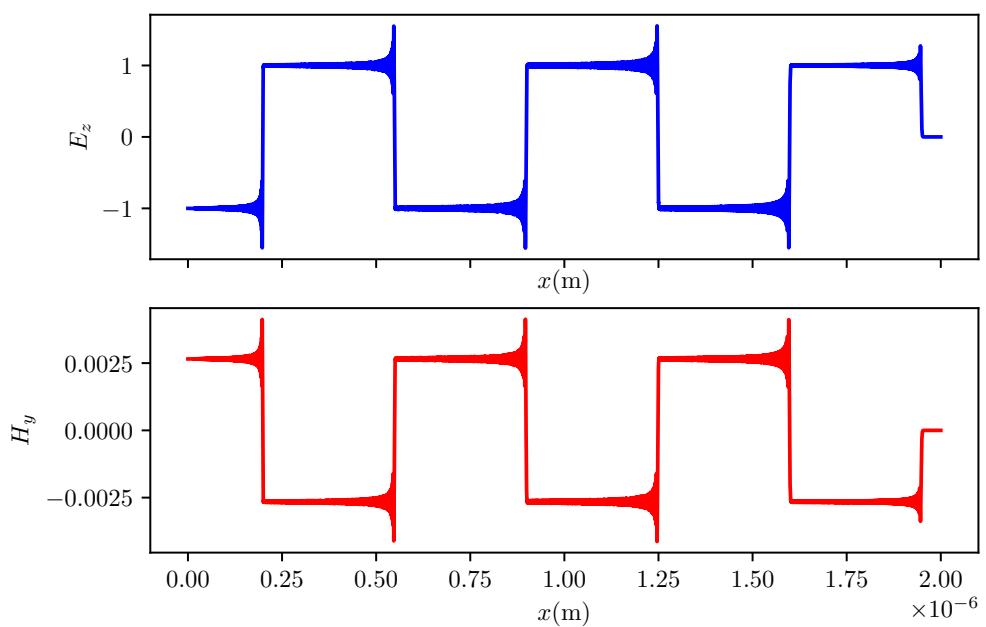
۱. به دلیل روش گسسته‌سازی به کار رفته، در مواردی که میدان تغییر ناگهانی دارد در جواب اختلالاتی به وجود می‌آید (پدیده گیس)
۲. فاصله نقاط شبکه در این روش باید هم از کوچک‌ترین جزئیات سیستم و هم از کوچک‌ترین طول موج کوتاه‌تر باشد. در بعضی موارد مثل سیم‌های نازک این موضوع باعث می‌شود محاسبات بسیار سنگین شود.



شکل ۱۵ : پدیده گیس با طول سلول ده نانومتر

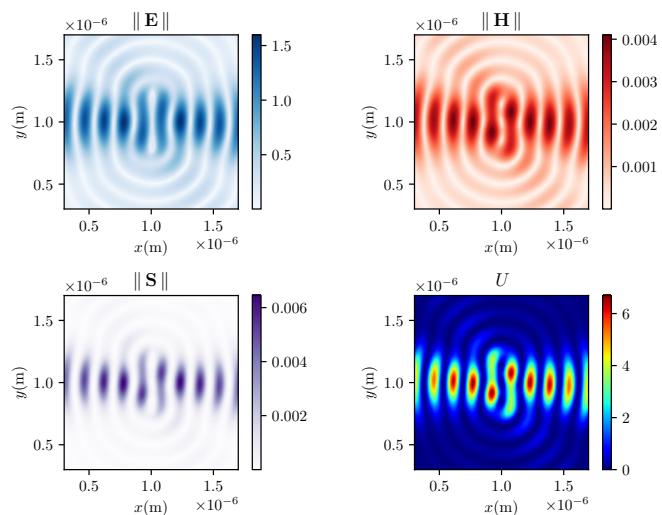


شکل ۱۶ : پدیده گیس با طول سلول یک نانومتر

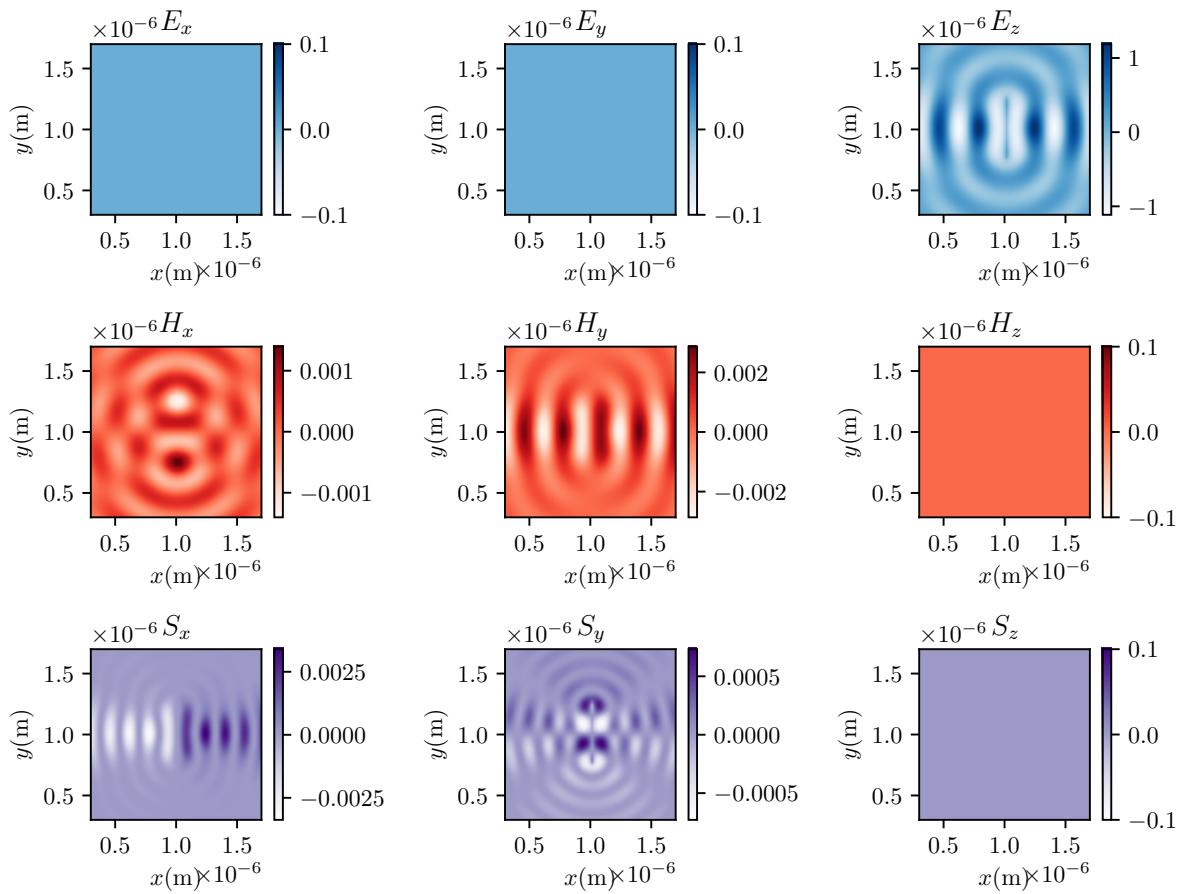


شکل ۱۷: پدیده گیبس با طول سلول یک دهم نانومتر. همانطور که می‌بینید کوتاه کردن طول سلول به حذف خطای پدیده گیبس کمکی نمی‌کند.

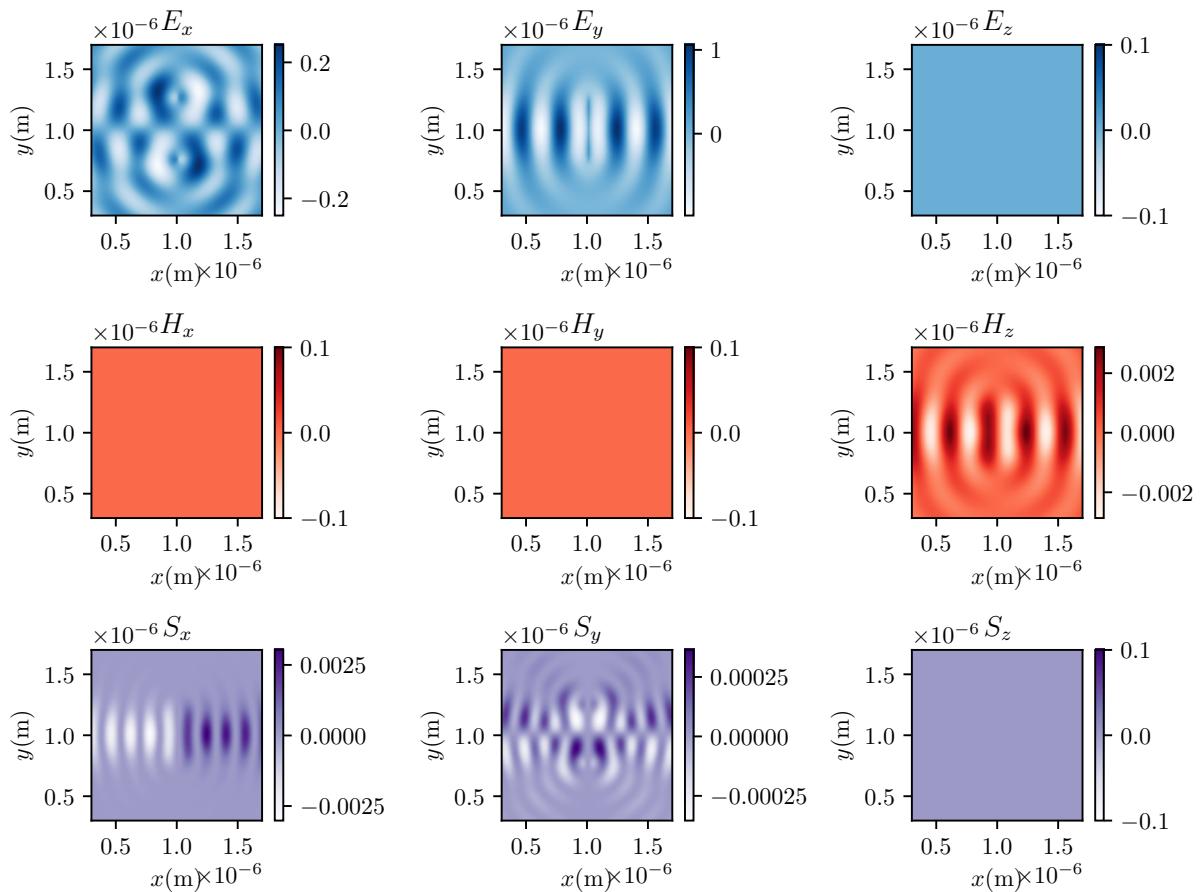
## ۷ شبیه‌سازی‌ها



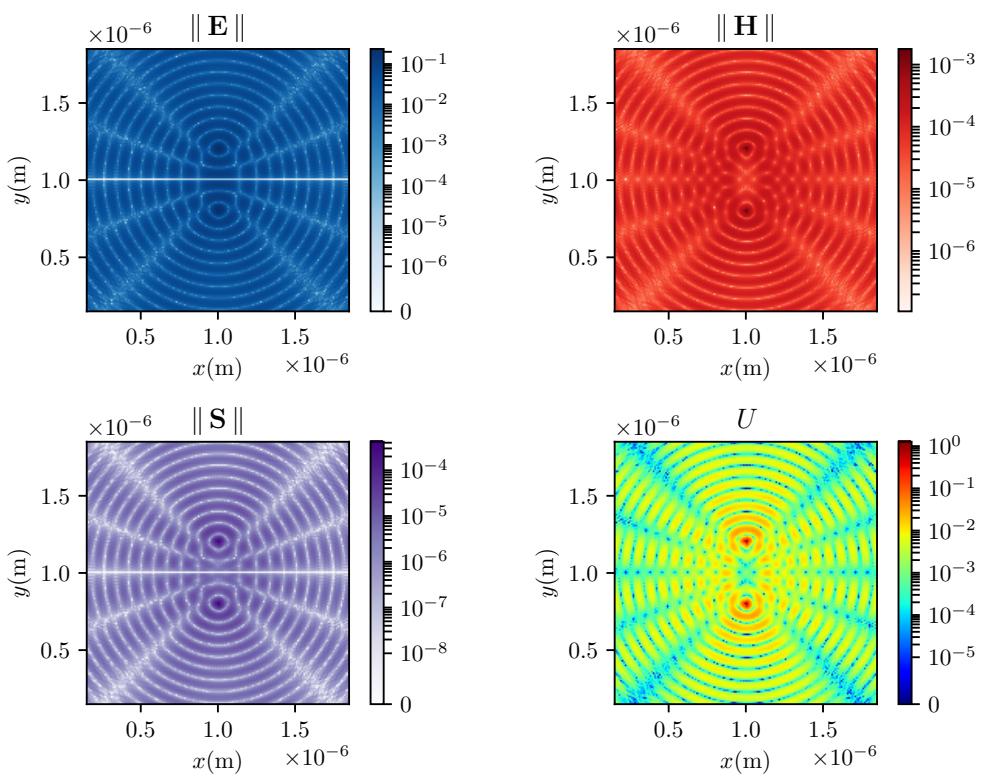
شکل ۱۸: میله باردار



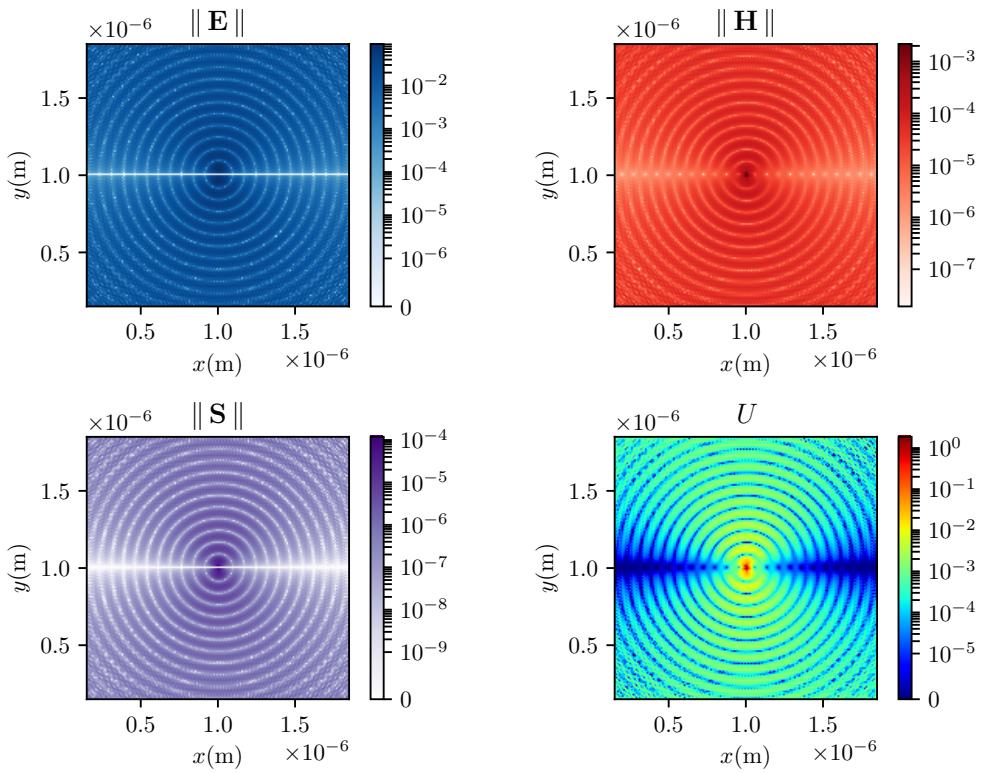
شکل ۱۹: میله جریان. جریان در جهت  $z$  است.



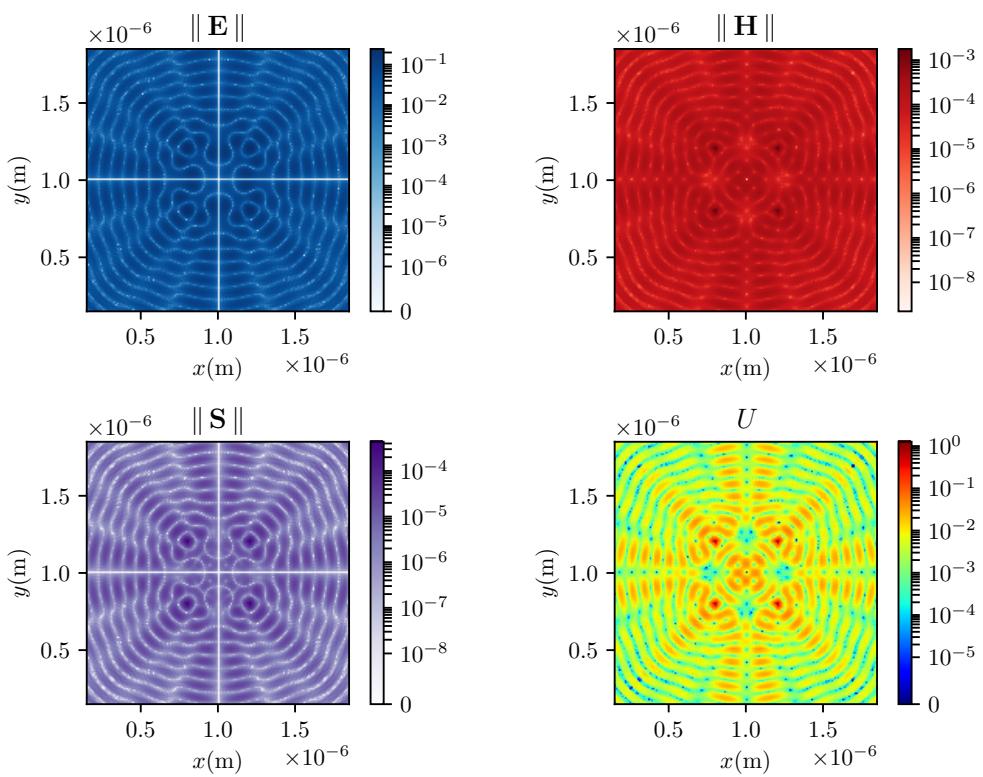
شکل ۲۰: میله جریان. جریان در جهت  $y$  است.



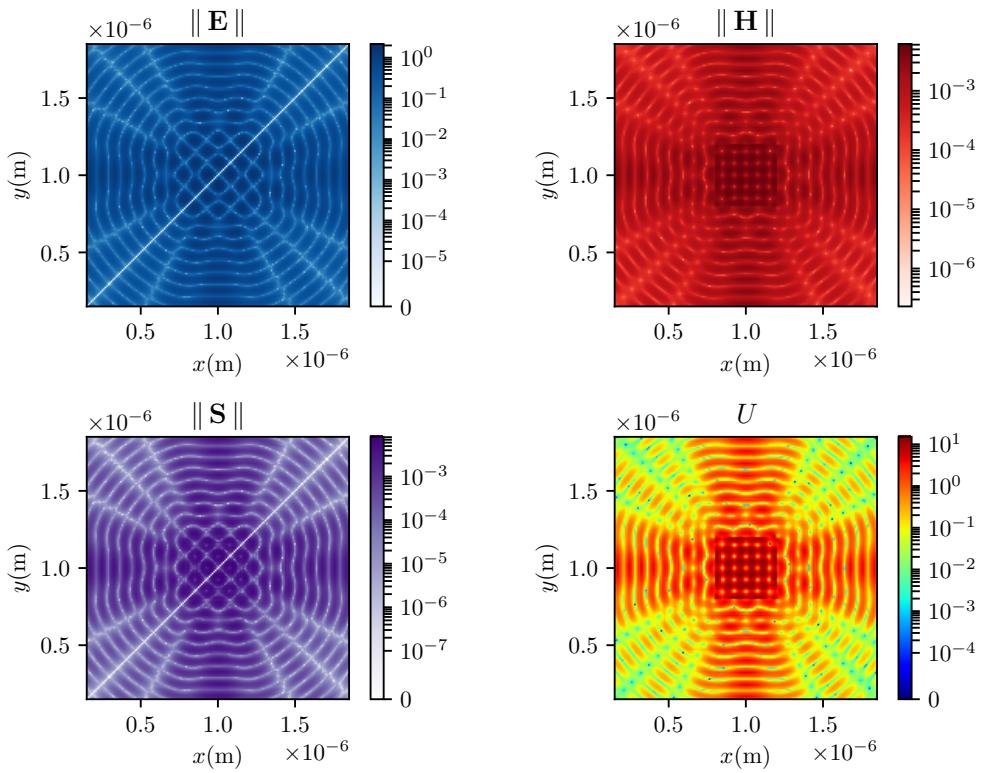
شکل ۲۱: دوقطبی با فاصله نسبتاً زیاد



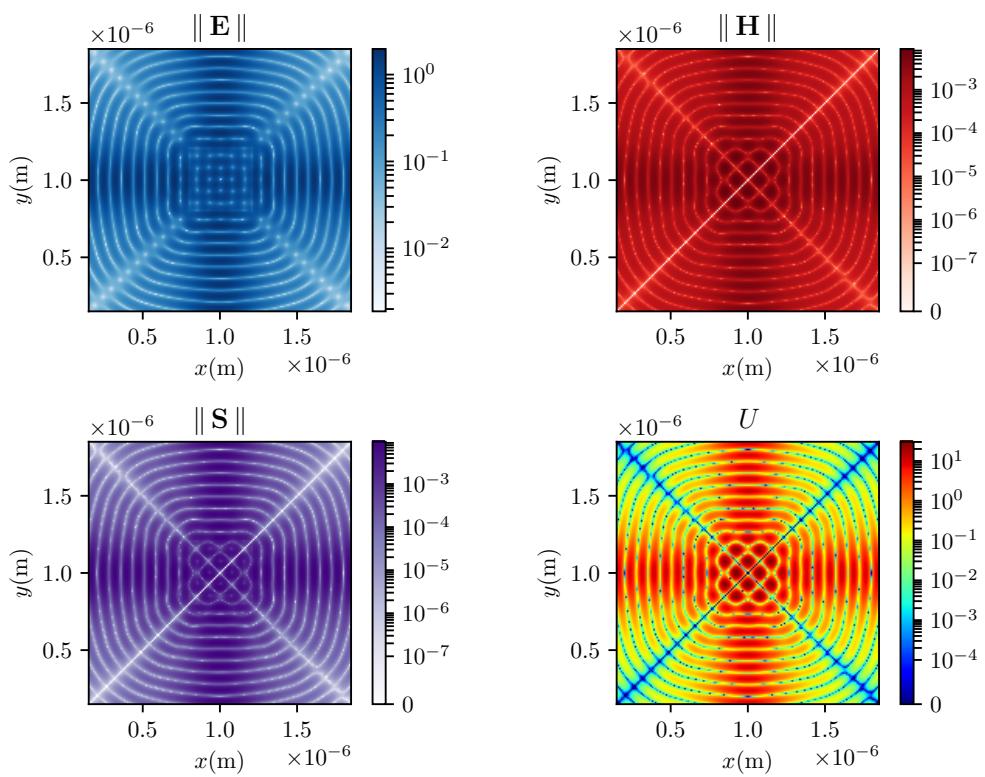
شکل ۲۲: دوقطبی با فاصله کم



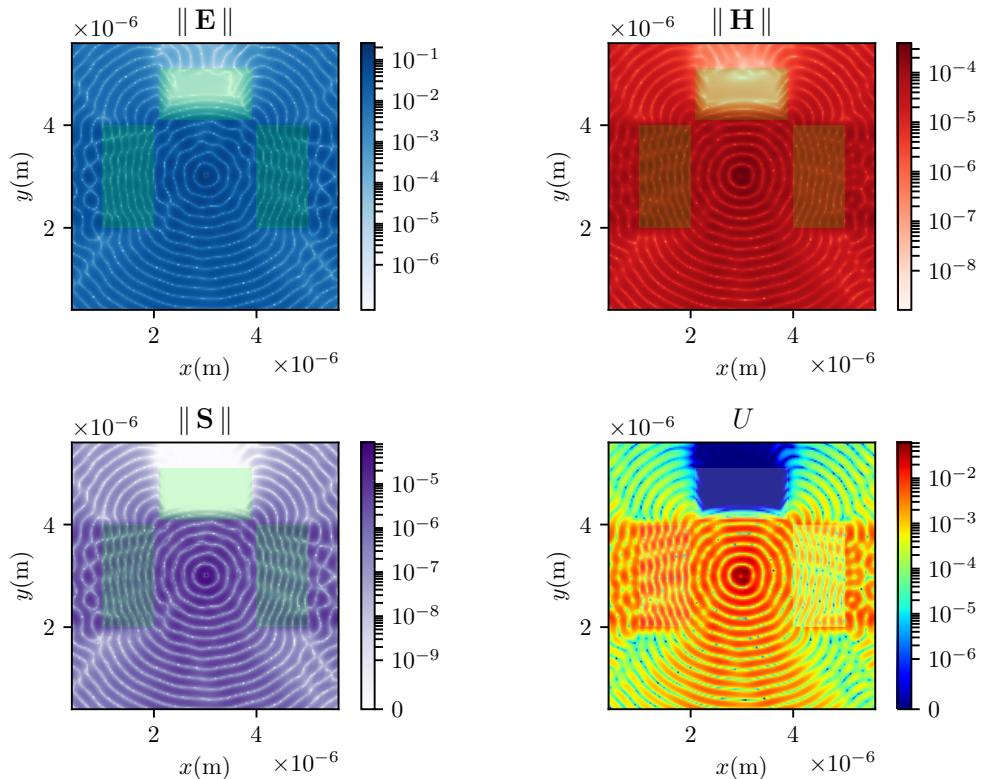
شکل ۲۳: چهارقطبی



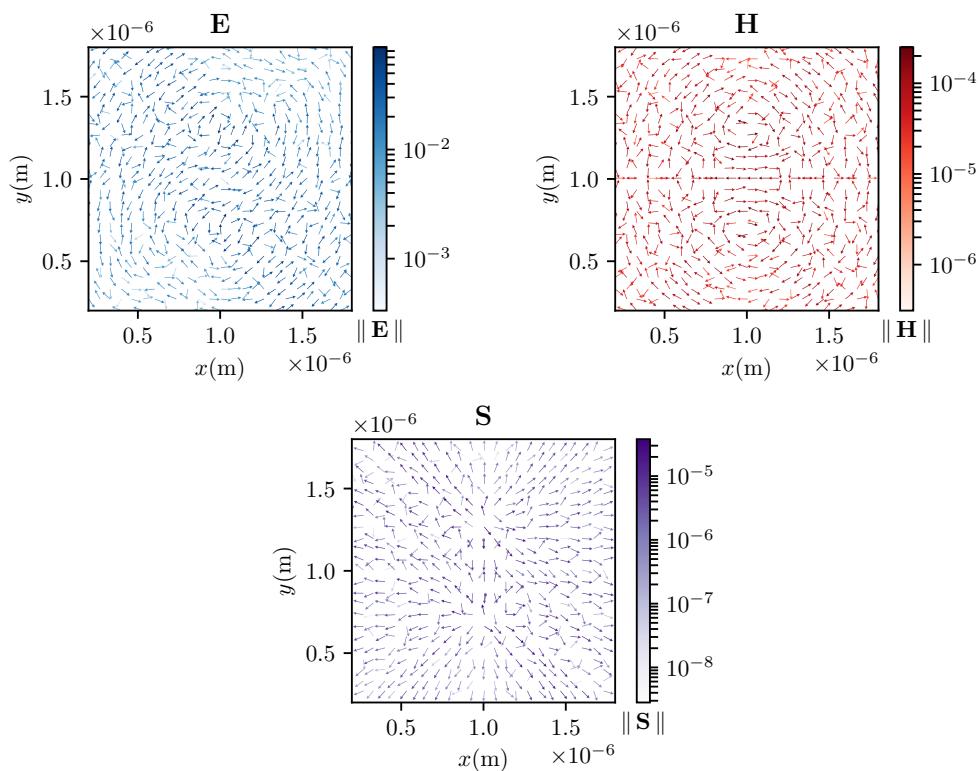
شکل ۲۴: مربع جریان. جریان در راستای  $z$  است.



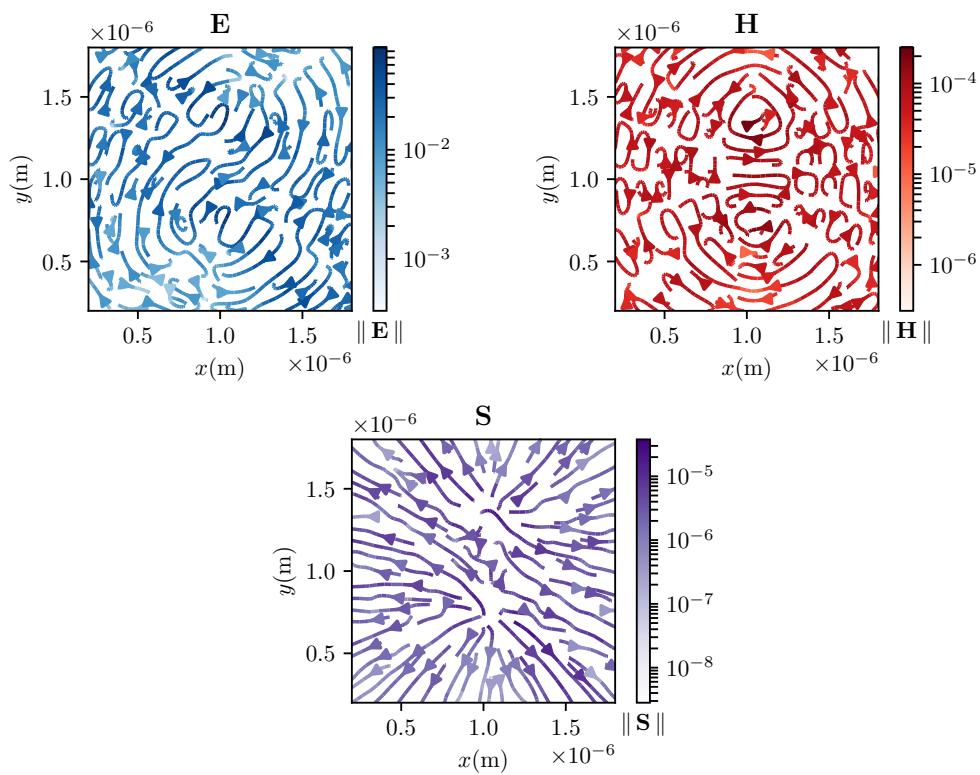
شکل ۲۵: حلقه مربعی جریان. جریان پاد ساعتگرد در راستای اضلاع حلقه است.



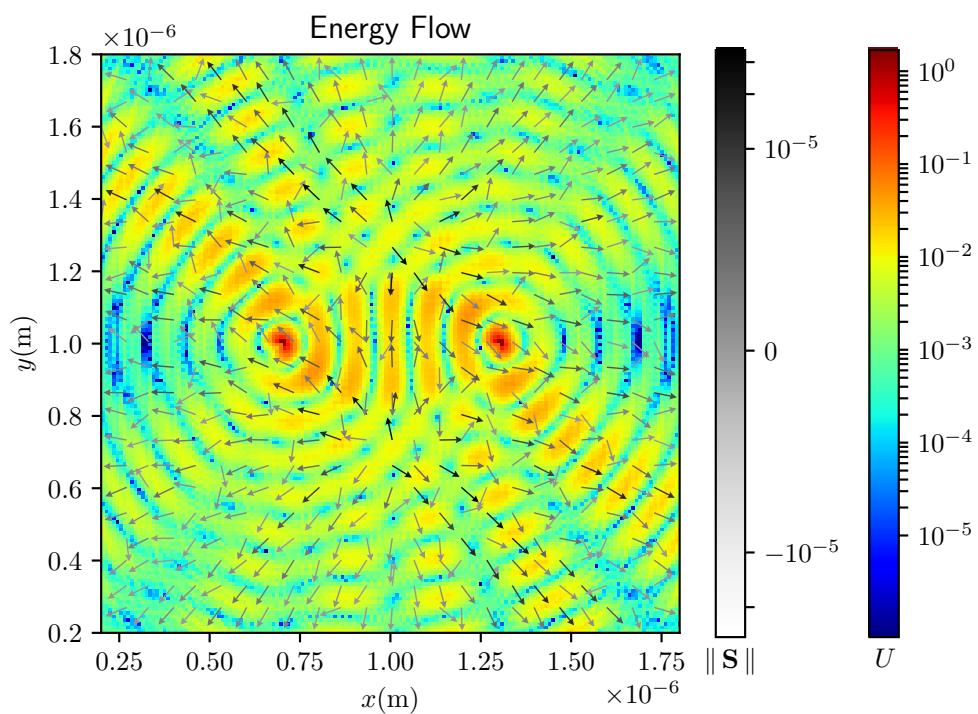
شکل ۲۶: عبور میدان‌ها از ماد در دو بعد. ماده بالا رسانا، ماده چپ ماده با ضریب دی الکتریک بزرگ‌تر از یک ماده راست ماده مغناطیسی بدون ضریب دی الکتریک بزرگ‌تر از یک است



شکل ۲۷: نمودار برداری دوقطبی.



شکل ۲۸: خطوط میدان دو قطبی.



شکل ۲۹: جریان انرژی و تکانه دوقطبی؛ بردار پوینتینگ با بردار و انرژی با رنگ مشخص شده است.

## مراجع

- [Gri13] David J. Griffiths, *Introduction to electrodynamics; 4th ed.*, Pearson, Boston, MA, 2013, Re-published by Cambridge University Press in 2017.
- [Sch10] John B. Schneider, *Understanding the finite-difference time-domain method*, <https://eecs.wsu.edu/~schneidj/ufdtd>, 2010, Accessed: 2021-08-18.
- [Yee66] Kane Yee, *Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell's equations in isotropic media*, IEEE Transactions on Antennas and Propagation **14** (1966), no. 3, 302–307.

## منابع شکل‌ها

شکل ۱ :

[https://en.wikipedia.org/wiki/File:Yee\\_cell.png](https://en.wikipedia.org/wiki/File:Yee_cell.png)

شکل ۲ :

[https://en.wikipedia.org/wiki/File:FDTD\\_Yee\\_grid\\_2d-3d.svg](https://en.wikipedia.org/wiki/File:FDTD_Yee_grid_2d-3d.svg)