

پروژه فصل ۲ مکانیک تحلیلی ۱

صالح شاملو، ارمیا اعتمادی

۲ آبان ۱۳۹۹

چکیده

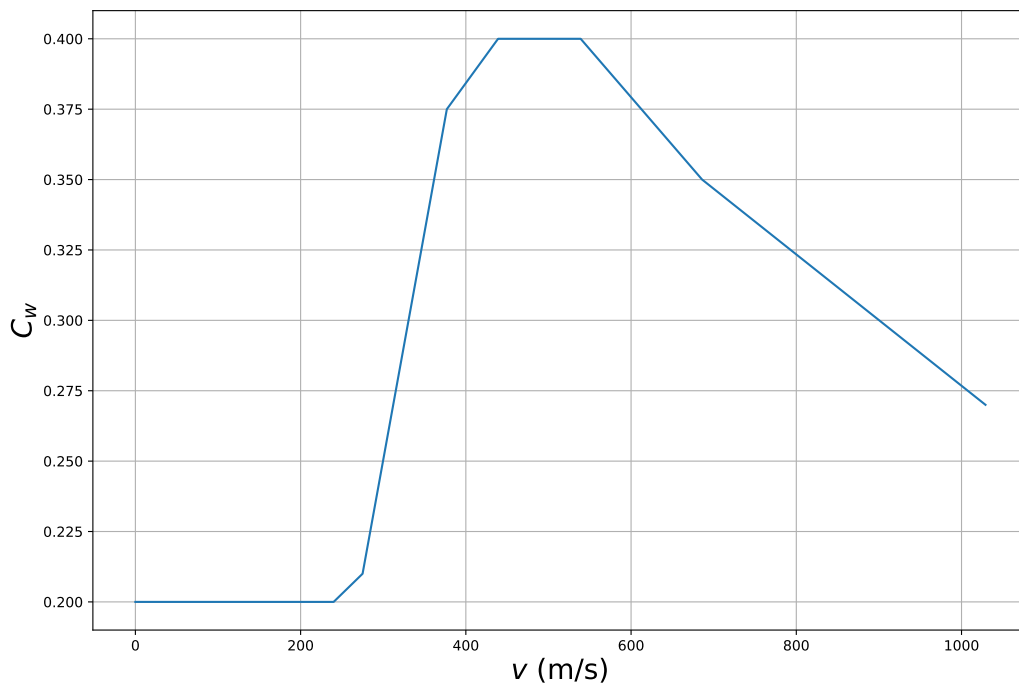
یک تقریب برای نیروی مقاومت هوا در برابر حرکت یک جسم در یک سیال به شکل زیر است:

$$f = \frac{1}{2} C_w \rho A v^2 \quad (۱)$$

که v سرعت جسم، ρ چگالی سیال، A سطح مقطع عمود بر جهت سرعت و C_w ثابتی وابسته به شکل جسم است. در سرعت‌های نزدیک به سرعت صوت و بیشتر از آن، مقدار C_w ثابت نیست. در این نوشته حرکت یک پرتابه با سرعت مافوق صوت را با استفاده از روش‌های عددی بررسی می‌کنیم.

۱ تقریب ضریب C_w

در کتاب دینامیک کلاسیک ذرات و سیستم‌ها^۱ نمودار تقریبی C_w بر حسب سرعت برای یک گلوله داده شده. از نموداری مشابه استفاده می‌کنیم.



شکل ۱: تقریب C_w

۲ معادلات حرکت

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (۲)$$

$$\mathbf{F}_g + \mathbf{f} = m\mathbf{a} \quad (۳)$$

$$m\mathbf{g} - \frac{1}{2}C_w\rho A v^2 \hat{\mathbf{v}} = m\mathbf{a} \quad (۴)$$

¹Classical Dynamics of Particles and Systems

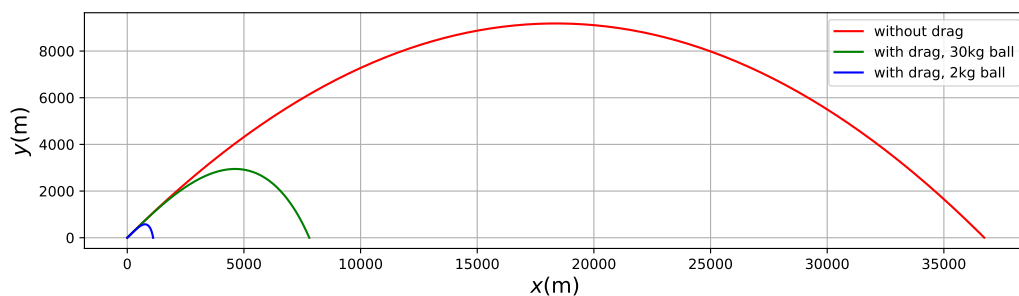
$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{C_w \rho A}{2m} v \dot{x} \\ \ddot{y} = -\frac{C_w \rho A}{2m} v \dot{y} - g \end{cases} \quad (5)$$

$$(6)$$

با استفاده از روش رونگه- کوتا^۲ معادلات دیفرانسیل را به صورت عددی حل می‌کنیم. تحلیل را برای یک گلوله با مقطع دایره به شعاع 10 cm انجام می‌دهیم. سه حالت را در نظر می‌گیریم:

۱. بدون مقاومت هوا
۲. گلوله ۳۰ کیلوگرمی (وزن تقریبی گلوله کرومی فولادی با شعاع ۱۰ سانتی‌متر) در مقاومت هوا
۳. گلوله ۲ کیلوگرمی (وزن تقریبی گلوله چوبی با شعاع ۱۰ سانتی‌متر) در مقاومت هوا

۳ مسیر حرکت پرتابه



شکل ۲: مسیر حرکت پرتابه‌ها

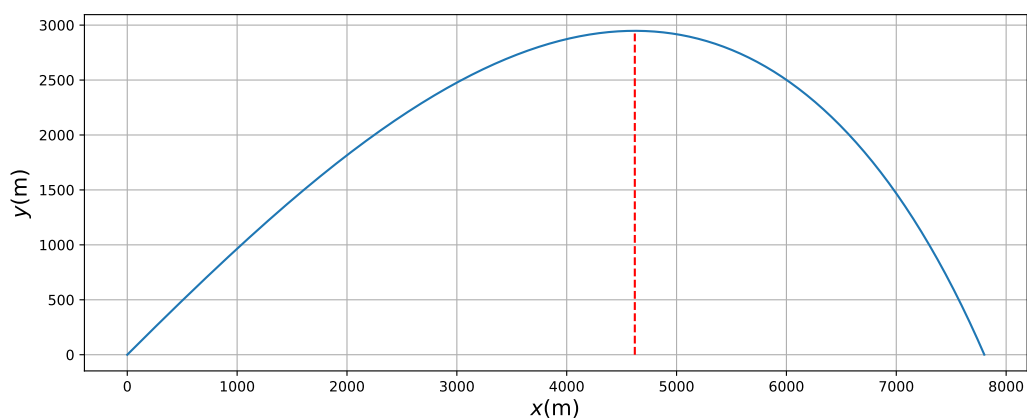
۱.۳ بُرد

$$R = 36\,732\text{ m} \quad \text{بدون مقاومت هوا} \quad (7)$$

$$\begin{cases} R_{30\text{kg}} = 7801.1\text{ m} \\ R_{2\text{kg}} = 1107.7\text{ m} \end{cases} \quad \text{با مقاومت هوا} \quad (8)$$

$$(9)$$

²Runge-Kutta



شکل ۳: مسیر حرکت پرتابه ۳۰ کیلوگرمی

۲.۳ ارتفاع بیشینه

$$H = 9183.7 \text{ m} \quad \text{بدون مقاومت هوا} \quad (۱۰)$$

$$\text{با مقاومت هوا} \begin{cases} H_{30\text{kg}} = 2948.1 \text{ m} \\ H_{2\text{kg}} = 575.92 \text{ m} \end{cases} \quad (۱۱)$$

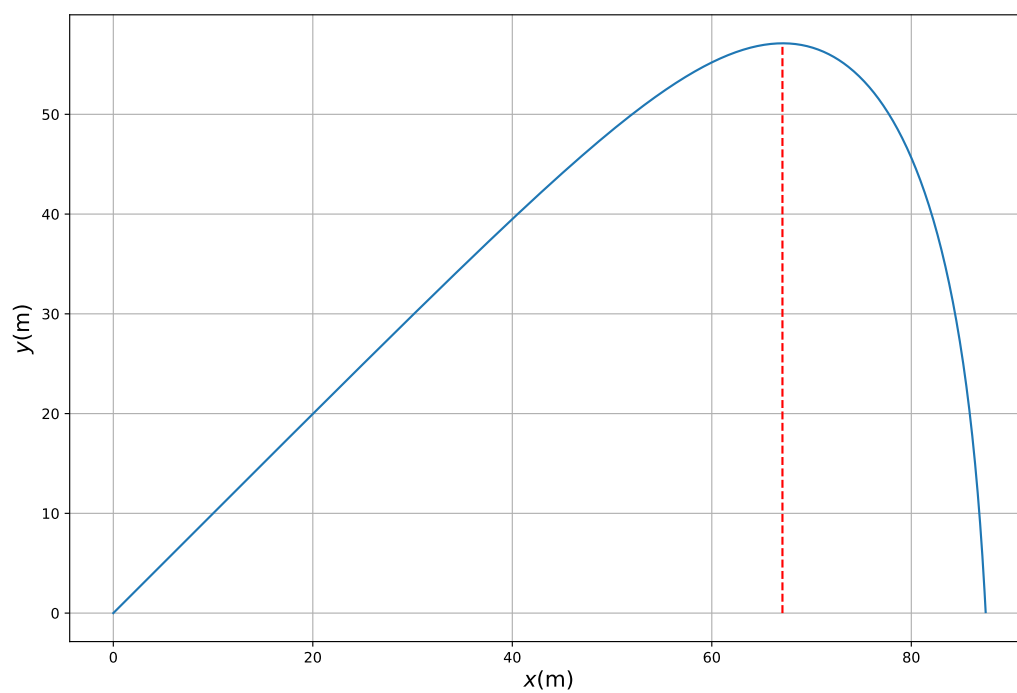
$$(۱۲)$$

۳.۳ زمان پرواز

$$T = 86.579 \text{ s} \quad \text{بدون مقاومت هوا} \quad (۱۳)$$

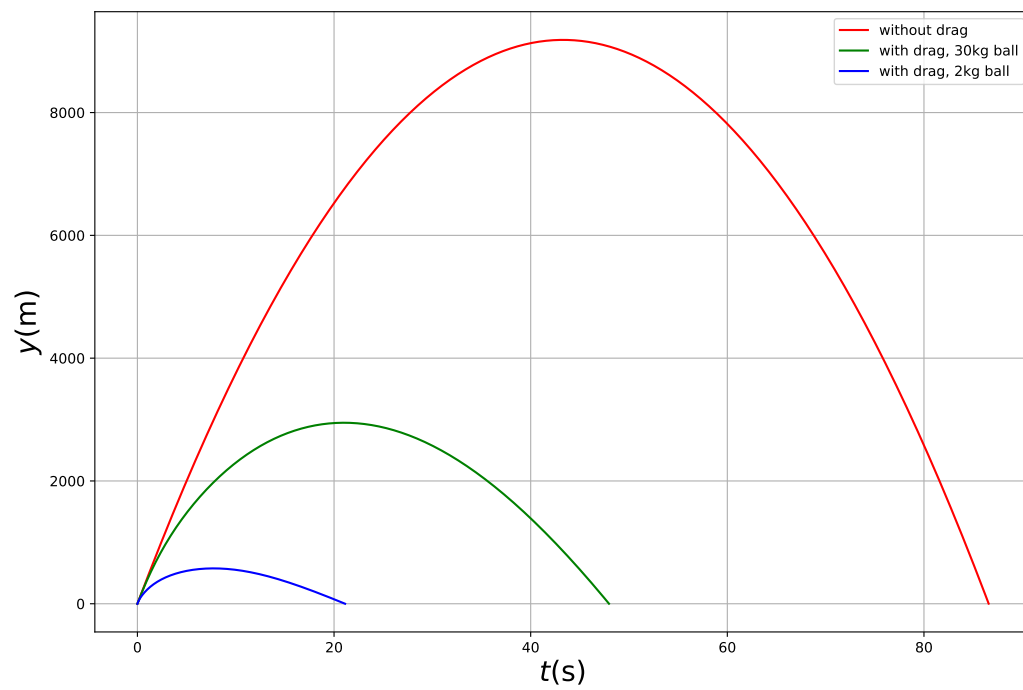
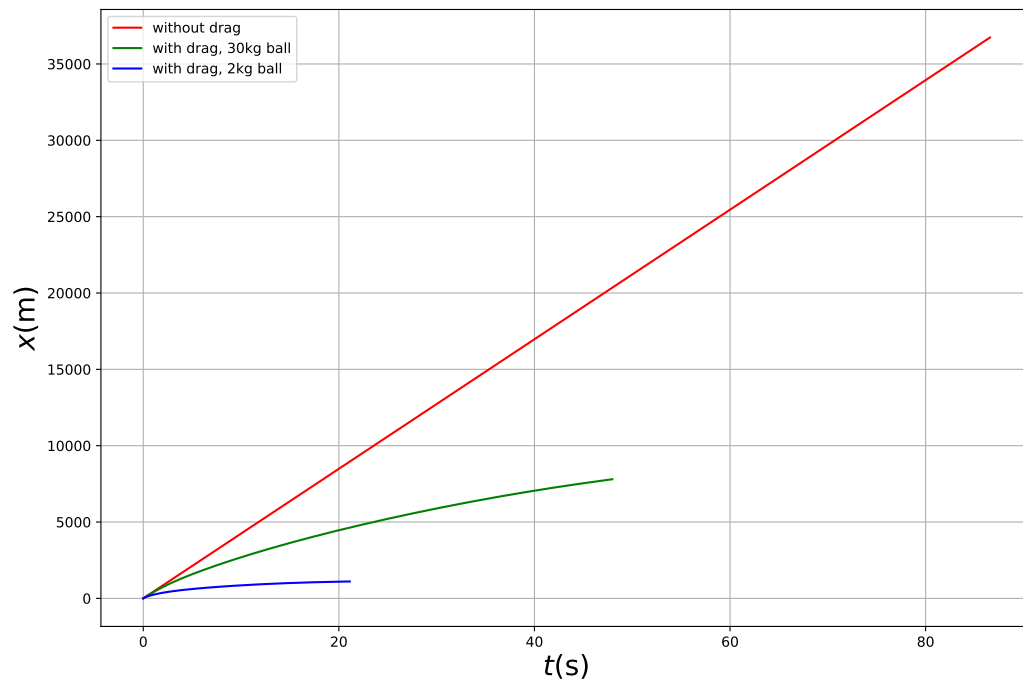
$$\text{با مقاومت هوا} \begin{cases} T_{30\text{kg}} = 47.965 \text{ s} \\ T_{2\text{kg}} = 21.122 \text{ s} \end{cases} \quad (۱۴)$$

$$(۱۵)$$

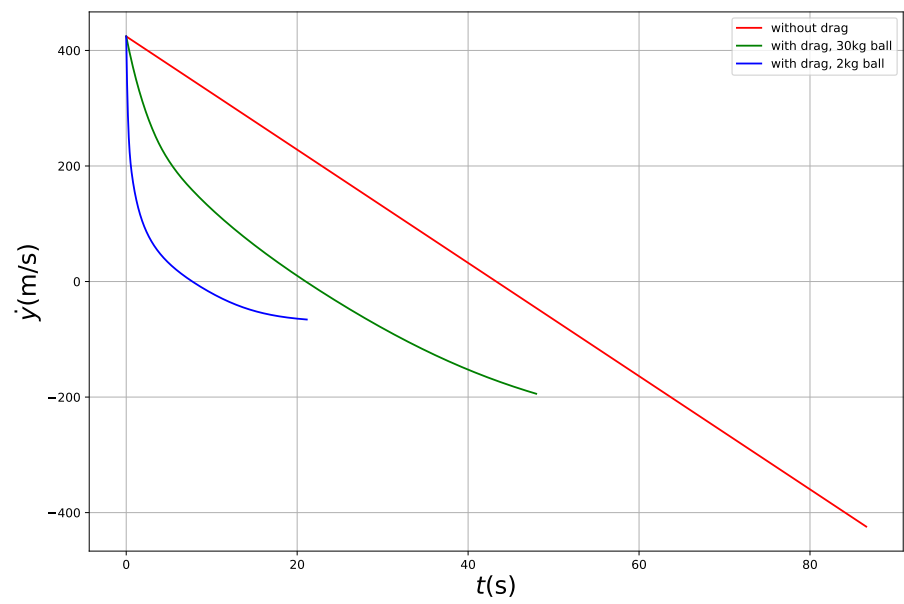
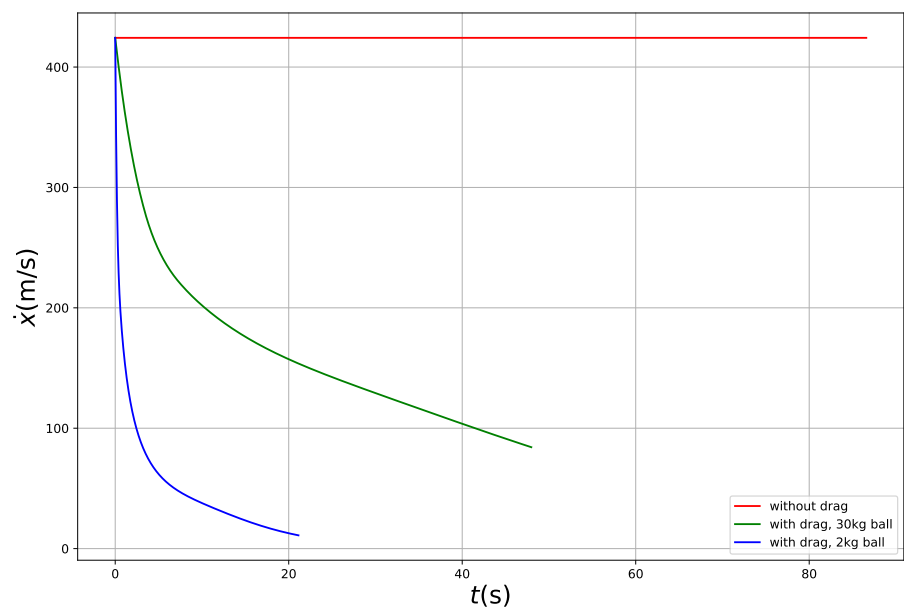


شکل ۴: مسیر حرکت پرتابه‌ای ۱۰۰ گرمی. در این نمودار اثرات مقاومت هوا راحت‌تر دیده می‌شود.

$$x(t), y(t) \quad ۴$$



$\dot{x}(t), \dot{y}(t)$ 5



v

$$\dot{x}(x), \dot{y}(y) \quad \text{9}$$

