

PSO收敛性问题

- 1) 基于离散时间线性系统理论的分析
- 2) 微粒群算法的代数分析
- 3) 微粒群算法的解析分析
- 4) 基本/随机情况下**PSO**的收敛性
- 5) **PSO**群体行为分析



1) 基于离散时间线性系统理论的分析

PSO速度和位置更新公式如下：

$$v_{id}(t+1) = \omega v_{id}(t) + c_1 rand()(p_{id} - x_{id}(t)) + c_2 Rand()(p_{gd} - x_{id}(t))$$

$$x_{id}(t+1) = x_{id}(t) + v_{id}(t+1)$$



不失一般性，假设为一维优化问题

$$v_i(t+1) = \omega v_i(t) + c_1 r_1 (p_i(t) - x_i(t)) + c_2 r_2 (p_g(t) - x_i(t))$$

$$x_i(t+1) = x_i(t) + v_i(t+1)$$

定义 $\varphi_1 = c_1 r_1$, $\varphi_2 = c_2 r_2$, $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ 可得:

$$v_i(t+1) = \omega v_i(t) - \varphi x_i(t) + \varphi_1 p_i(t) + \varphi_2 p_g(t)$$

$$x_i(t+1) = \omega v_i(t) + (1 - \varphi) x_i(t) + \varphi_1 p_i(t) + \varphi_2 p_g(t)$$

状态空间表达式如下

$$\begin{bmatrix} v_i(t+1) \\ x_i(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega & -\varphi \\ \omega & 1-\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i(t) \\ x_i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1 & \varphi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_i(t) \\ p_g(t) \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} v_i(t) \\ x_i(t) \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} p_i(t) \\ p_g(t) \end{bmatrix}$$

假设 ω , ϕ 为常数, 也就是说标准**PSO**算法为线性定常离散系统, 其状态运动的表达式为:

$$\begin{bmatrix} v_i(t) \\ x_i(t) \end{bmatrix} = G^t \begin{bmatrix} v_i(0) \\ x_i(0) \end{bmatrix} + \sum_{j=0}^{t-1} G^{t-j-1} B \begin{bmatrix} p_i \\ p_g \end{bmatrix}$$


$$p_i(t) = \begin{cases} p_i(t-1) & f(x_i(t)) \geq f(p_i(t-1)) \\ x_i(t) & f(x_i(t)) < f(p_i(t-1)) \end{cases}$$

$$p_g(t) = \arg \min \{f(p_0(t)), f(p_0(t)), f(p_1(t)), \dots, f(p_m(t)), \}$$

若 ω , ϕ 在迭代过程中自适应变化, $r1$, $r2$ 本身属于随机变量也就是说 ϕ 随着迭代在 $(0, c1+c2)$ 区间内随机变化。这时, $G=G(t)$ 属于时变矩阵, 则


$$\begin{bmatrix} v_i(t) \\ x_i(t) \end{bmatrix} = \Phi(t,0) \begin{bmatrix} v_i(0) \\ x_i(0) \end{bmatrix} + \sum_{i=0}^{t-1} \Phi(t,i+1) B \begin{bmatrix} p_i(t) \\ p_g(t) \end{bmatrix}$$

$$\phi(t+1,i) = G(t) \phi(t,i)$$

- 
- 如果 ω , ϕ 为常数, 则系统稳定 (即 $t \rightarrow \infty$ 时, $\mathbf{v}_i(t), \mathbf{x}_i(t)$ 趋于某一定值) 的充分必要条件是, \mathbf{G} 的全部特征值 λ_1, λ_2 的幅值均小于1。

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \omega & -\phi \\ \omega & 1 - \phi \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 + \omega - \phi \pm \sqrt{(\phi - \omega - 1)^2 - 4\omega}}{2}$$



当 $|\varphi - \omega - 1| < 2$ 时, 即 $-3 < \omega - \varphi < 1$,
且满足 $1 + \omega - \sqrt{2 + 2\omega} < \varphi < 1 + \omega + \sqrt{2 + 2\omega}$

系统是渐近稳定的, 也就是说, **PSO算法收敛**

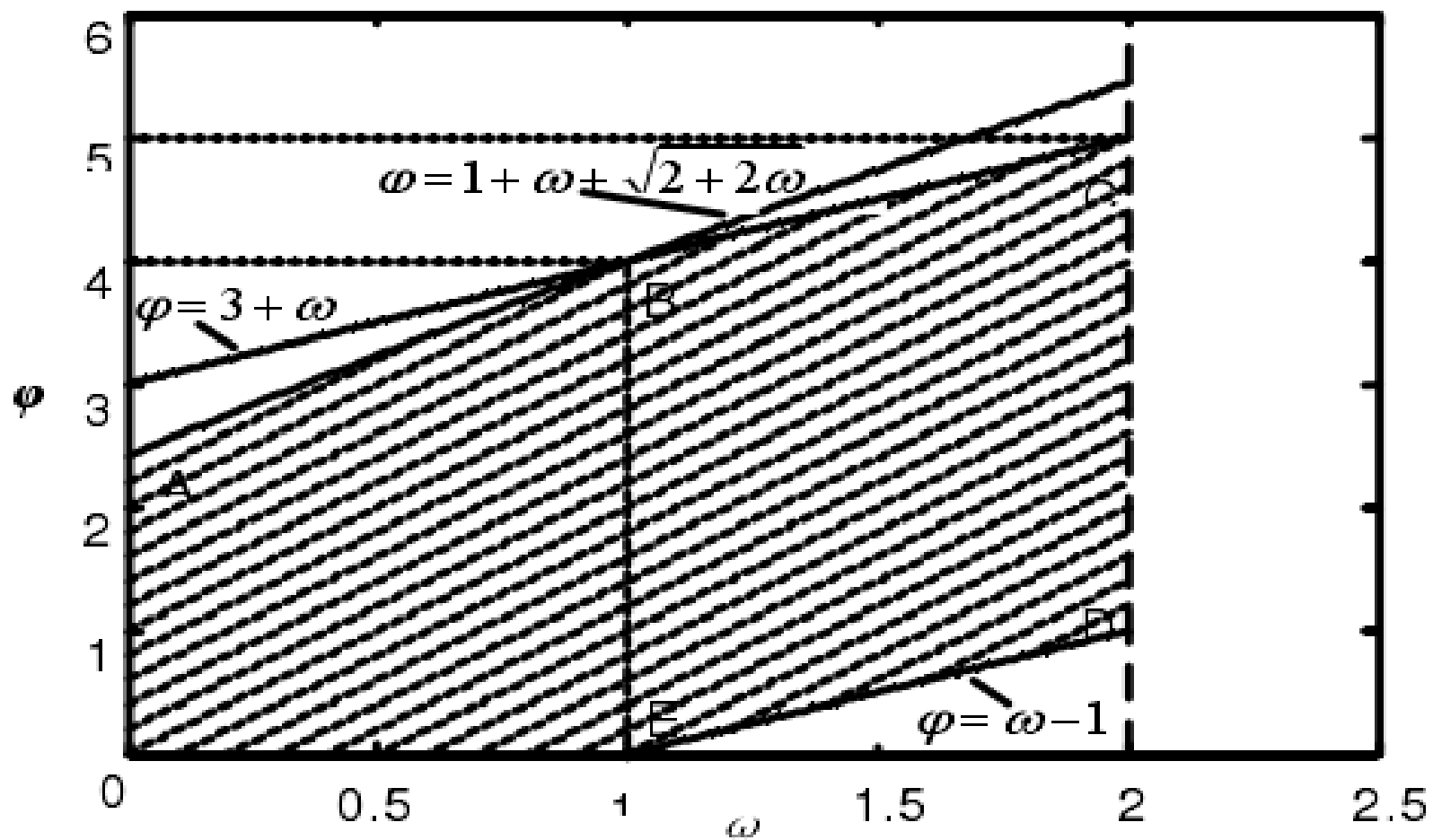


图 4.1 ω, ϕ 的取值区域

时变系统讨论

设 $y(t) = \begin{bmatrix} v_i(t) \\ x_i(t) \end{bmatrix}$, 定义一标量函数 $v(y(t)) = \|y(t)\|$, 则

i). $v(y(t)) \geq 0$ 正定;

ii). $\Delta v(y(t)) = v(y(t+1)) - v(y(t)) = \|y(t+1)\| - \|y(t)\| \leq \|G(t)\| \|y(t)\| - \|y(t)\| = (\|G(t)\| - 1) \|y(t)\|$, 只

要 ω 、 φ 满足 (4.12) 式, $G(t)$ 的特征根的幅值均小于 1, 因而 $\Delta v(y(t))$ 负定;

iii). $\|y(t)\| \rightarrow \infty$ 时, 显然有 $v(y(t)) \rightarrow \infty$, 所以, 即使 ω 、 φ 为时变函数, 只要满足 (4.12)

式, 即可保证 PSO 算法渐近收敛。

$$\Phi(t+1, i) = G(t)\Phi(t, i)$$

■ 在满足一定的条件下, PSO 算法具有渐近收敛特性

2) 微粒群算法的代数分析

假设

- 1) 用 p_{id} 取代 $\frac{\varphi_1 p_{id} + \varphi_2 p_{gd}}{\varphi_1 + \varphi_2}$ ，且为常数，设为 p ；
- 2) $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ ，常数且 $\varphi > 0$ ；
- 3) 搜索空间为 1 维空间，从而可去掉下标；
- 4) 种群数为 1，即只有一个微粒。



简化的微粒群算法的进化方程

$$\begin{cases} V(t+1) = V(t) + \varphi(p - V(t)) \\ X(t+1) = X(t) + V(t+1) \end{cases}$$

$$\text{令 } y_t = P - X_t$$

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{t+1} = V_t + \varphi y_t \\ y_{t+1} = -V_t + (1 - \varphi)y_t \end{cases}$$



矩阵形式

$$P_t = \begin{bmatrix} V_t \\ y_t \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & \varphi \\ -1 & 1 - \varphi \end{bmatrix}$$

可得

$$P_{t+1} = MP_t$$

相应解为：

$$P_{t+1} = M^{t+1} P_0$$

M的两个特征根

$$\begin{cases} e_1 = 1 - \frac{\varphi}{2} + \frac{\sqrt{\varphi^2 - 4\varphi}}{2} \\ e_2 = 1 - \frac{\varphi}{2} - \frac{\sqrt{\varphi^2 - 4\varphi}}{2} \end{cases}$$



讨论 ϕ 的取值范围, $\phi < 4$, $\phi = 4$, $\phi > 4$, 可得到不同情况, 可得到 P_t 的估计值。

本例情况可看作 $w=1$ 时第一种方法的讨论。



微粒群算法的解析分析

其基本思想是将差分方程看成连续系统

$$\mathbf{v}_{t+2} + (\varphi - 2)\mathbf{v}_{t+1} + \mathbf{v}_t = 0$$

特征方程为

$$\lambda^2 + (\varphi - 2)\lambda + 1 = 0$$



特征根为

$$\begin{cases} e_1 = 1 - \frac{\varphi}{2} + \frac{\sqrt{\varphi^2 - 4\varphi}}{2} \\ e_2 = 1 - \frac{\varphi}{2} - \frac{\sqrt{\varphi^2 - 4\varphi}}{2} \end{cases}$$



收敛条件

- 为了保证系统收敛，必须下式成立

$$\begin{cases} |e_1| < 1 \\ |e_2| < 1 \end{cases}$$

进一步讨论可参考《微粒群优化》一书。



变系数

$$v_{t+1} = w * v_t + \phi 1 * (p_i - x_t) + \phi 2 * (p_g - x_t)$$

$$x_{t+1} = x_t + v_{t+1}$$

速度

$$v_{t+2} + (\phi 1 + \phi 2 - w - 1) * v_{t+1} + w * v_t = 0$$


位置

$$x_{t+2} + (\phi 1 + \phi 2 - w - 1) * x_{t+1} + w * x_t = \phi 1 * p_i + \phi 2 * p_g$$

稳定性

定理3.1: 当 w, ϕ_1, ϕ_2 为时变函数时, 若存在某常数 a , 满足公式(2.7)时, 则粒子轨迹趋于稳定。

$$\left\{ \begin{array}{l} -1 < w < 1 \\ 0 < \phi_1(t) + \phi_2(t) \leq 2(1 + w) \\ |\Delta\Phi_t| \leq \frac{\sqrt{97} - 9}{8} (1 - w)[(1 + w^2) - a^2] \end{array} \right. \quad (2.7)$$



- 令 $\Phi_{t+1} = \phi1(t) + \phi2(t) - 1 - w$

$$v_{t+2} + \Phi_{t+1} * v_{t+1} + w * v_t = 0$$

状态方程形式

$$\begin{cases} v_{t+1} = -\Phi_t v_t + y_t \\ y_{t+1} = -w * v_t \end{cases}$$



■ 选Lyapunov备选函数


$$V_t(v, y) = (1+w)(1+w^2)v_t^2 - 2\Phi_t(1+w^2)v_t y_t + [2(1+w) + (w-1)\Phi_t^2]y_t^2$$

■ 可证 $V(x,y)$ 正定,

$$\begin{aligned}\Delta V = & \{-(1-w)[(1+w^2) - \Phi_t^2] - \Delta\Phi_t[2b\Phi_t + w^2(\Phi_t + \Phi_{t+1}) - w^3\Delta\Phi_t]\}v_t^2 \\ & + 2w(1+w^2)\Delta\Phi_t v_t y_t \\ & - (1-w)[(1+w^2) - \Phi_t^2]y_t^2\end{aligned}$$

$|\Phi_t| \leq a \leq 1+w, \quad p \neq 0 \quad \text{时}$

$$\begin{aligned}\Delta V \leq & \{-(1-w)[(1+w^2) - a^2] + (9+2p^2)|\Delta\Phi_t|\}v_t^2 \\ & - \{(1-w)[(1+w^2) - a^2] + \frac{2}{p^2}|\Delta\Phi_t|\}y_t^2\end{aligned}$$



$$\Delta V \leq \{-(1-w)[(1+w^2)-a^2] + \frac{8}{\sqrt{97}-9} |\Delta\Phi_t|\}(v_t^2 + y_t^2)$$

$$|\Delta\Phi_t| = |\Phi_{t+1} - \Phi_t| \leq \frac{\sqrt{97}-9}{8} (1-w)[(1+w^2)-a^2] \quad \text{时, } \Delta V \text{ 负定}$$

注：选择不同的Lyapunov函数，会得到不同的条件。



随机过程下的粒子的动态行为分析

单个粒子的速度和位置更新方程不仅是一个离散变系数差分方程，而且其时变系数为满足0-1均匀分布的随机变量。采用离散时变系统的理论进行分析存在缺陷。



定理3.2

- 假定粒子群算法中 w, P_i, P_g 不变, $c1=c2=c$,

$$p = \frac{c1 * p_i + c2 * p_g}{c1 + c2} = \frac{p_i + p_g}{2}$$

最优粒子 $P'=P_i=P_g$,则粒子群优化算法中的粒子的位置序列以均方收敛。



证明见word文档

思路:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} E(\|x_t - p\|^2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (E(x_t^2 + p^2 - 2px_t)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} E(x_t^2) + p^2 - 2p \lim_{n \rightarrow \infty} E(x_t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} E(\|x_t - p\|^2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} E(x_t^2) + p^2 - 2p \lim_{n \rightarrow \infty} E(x_t) \\ &= p^2 + p^2 - 2p \cdot p \\ &= 0\end{aligned}$$



随机算法的收敛准则

随机算法基本框架：

Step0: 随机选择初始点 $z_0 \in S$ ，并置 $k=0$ ；

Step1: 在样本空间 (R^n, B, μ_k) 上生成向量 ξ_k ；

Step2: 计算 $z_{k+1} = D(z_k, \xi_k)$ ，选择 μ_{k+1} ，令 $k=k+1$ ，并转 Step1。

D 是算法迭代方式，用以产生下一代个体。

随机算法应满足下列假设


假设 5.1、 $f(D(z, \xi)) \leq f(z)$ ，并且如果 $\xi \in S$ ，则 $f(D(z, \xi)) \leq f(\xi)$ 。

随机算法的全局收敛意味着序列 $\{f(z_k)\}_{k=1}^{\infty}$ 应收敛于 ψ 。

假设 5.2、对于 S 的任意 Borel 子集 A ，若其测度 $\nu(A) > 0$ ，则有

$$\prod_{k=0}^{\infty} (1 - \mu_k(A)) = 0$$

其中， $\mu_k(A)$ 是由测度 μ_k 所得到的 A 的概率。



定理 5.1、假设目标函数 f 为可测函数, 区域 S 为可测子集, 并且假设 5.1、5.2 满足, 设 $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$


为算法所生成的解序列, 则

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} P[z_k \in R_\varepsilon] = 1 \quad (5.11)$$

其中, $P[z_k \in R_\varepsilon]$ 是第 k 步算法生成的解 $z_k \in R_\varepsilon$ 的概率。

证明: 由假设 5.1, 如果 $z_k \in R_\varepsilon$, 或者

$\xi_k \in R_\varepsilon$, 则对于任意的 $k' > k$, 有 $z_{k'} \in R_\varepsilon$



$$P(z_k \in R_\varepsilon) = 1 - P(z_k \in S \setminus R_\varepsilon) \geq 1 - \prod_{t=0}^{k-1} (1 - \mu_t(R_\varepsilon))$$

取极限，并考虑 μ_k 为概率测度，得到

$$1 \geq \lim_{k \rightarrow +\infty} P(z_k \in R_\varepsilon) \geq 1 - \lim_{k \rightarrow +\infty} \prod_{t=0}^{k-1} (1 - \mu_t(R_\varepsilon))$$

由假设 2，我们有 $\prod_{k=0}^{\infty} (1 - \mu_k(A)) = 0$ ，因此，

$$1 \geq \lim_{k \rightarrow +\infty} P(z_k \in R_\varepsilon) \geq 1 - 0 = 1$$



基本微粒群算法的收敛性分析

定理5.3、基本微粒群算法满足假设5.1。

证明：定义函数 D 为

$$D(p_{g,k}, x_{i,k}) = \begin{cases} p_{g,k}, & \text{if } (f(g(x_{i,k})) \geq f(p_{g,k})) \\ g(x_{i,k}), & \text{otherwise} \end{cases}$$

其中，符号 $g(x)$ 表示基本微粒群算法的更新方程，
具体为

$$x_{i,k+1} = g(x_{i,k}) = g_1(x_{i,k}) + g_2(x_{i,k}) + g_3(x_{i,k})$$




$$g_1(x_{i,k}) = x_{i,k} + wv_{i,k}$$

$$g_2(x_{i,k}) = c_1 r_1(p_{i,k} - x_{i,k})$$

$$g_3(x_{i,k}) = c_2 r_2(p_{g,k} - x_{i,k})$$

$x_{i,k}$ 表示第k代时的微粒i的位置。

按照这里定义的函数D，基本微粒群算法满足假设1。



定理 5.4、任取 $\varepsilon > 0$ ，存在 $N \geq 1$ ，使得对于任意的 $n \geq N$ ，如果选择 w, ϕ_1, ϕ_2 ，使得

$\max(\|\alpha\|, \|\beta\|) < 1$ ，则有 $\|g^n(x_{i,k}) - g^{n+1}(x_{i,k})\| < \varepsilon$ 。

证明：由于

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} X(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (k_1 + k_2 \alpha^t + k_3 \beta^t) = \frac{\phi_1 P + \phi_2 P_g}{\phi_1 + \phi_2}$$

且 $X(t+1) - X(t) = V(t+1)$ ，因此，当 $\max(\|\alpha\|, \|\beta\|) < 1$ 时，下式成立

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} V(t+1) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} (X(t+1) - X(t)) \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} k_2 \alpha^t (\alpha - 1) + k_3 \beta^t (\beta - 1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

这表明 $\lim_{t \rightarrow +\infty} X(t+1) = \lim_{t \rightarrow +\infty} X(t)$ 。同时,

$$\begin{aligned} X(t+1) &= X(t) + V(t+1) \\ &= X(t) + wV(t) - X(t)(\phi_1 + \phi_2) + P\phi_1 + P_g\phi_2 \end{aligned}$$

两边取极限, 从而有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} X(t) = P = P_g$$

通过上面的定理 5.4, 可以看出当所有的微粒最终收敛于 $\lim_{t \rightarrow +\infty} X(t) = P = P_g$ 的位置时, 算法

将停止运行。因此, 如果算法在收敛之前没有搜索到全局 (或局部) 最优解, 将导致过早收敛。从而表明基本微粒群算法不是局部收敛算法。

定理5.5 基本微粒群算法不满足假设5.2。

证明：如果假设2成立，则等同于证明基本微粒群算法满足下式

$$S \subseteq \bigcup_{i=1}^t M_{i,k}$$

其中， $M_{i,k}$ 表示在算法第k代时微粒i的支撑集。由于

$$\begin{aligned} X(t+1) &= X(t) + wV(t) - X(t)(\phi_1 + \phi_2) + P\phi_1 + P_g\phi_2 \\ &= X(t) + w(X(t) - X(t-1)) - X(t)(\phi_1 + \phi_2) + P\phi_1 + P_g\phi_2 \\ &= (1 + w - \phi_1 - \phi_2)X(t) - wX(t-1) + P\phi_1 + P_g\phi_2 \end{aligned}$$



因此，代入可以得到 M_{ik} ,为

$$\begin{aligned} M_{i,k} &= (1 + w - \phi_1 - \phi_2)x_{i,j,k-1} - wx_{i,j,k-2} + \phi_1 P + \phi_2 P_g \\ &= x_{i,j,k-1} + w(x_{i,j,k-1} - x_{i,j,k-2}) + \phi_1(P - x_{i,j,k-1}) + \phi_2(P_g - x_{i,j,k-1}) \end{aligned}$$

其中， $0 \leq \phi_1 \leq c_1$ ， $0 \leq \phi_2 \leq c_2$ ， x_{ijk} 表示微粒 i 在第 k 代时第 j 维分量的值。显然， M_{ik} 表示一个由 ϕ_1 ， ϕ_2 所确定的超矩形，其中一个端点为 $\phi_1 = \phi_2 = 0$ ，另一个为 $\phi_1 = c_1$ ， $\phi_2 = c_2$ 。


当 $\max(c_1 |P - x_{i,j,k}|, c_2 |P_g - x_{i,j,k-1}|) < 0.5 \times \text{diam}_j(S)$ 成立时，显然有

$v(M_{i,k} \cap S) < v(S)$ 。其中， $\text{diam}_j(S)$ 表示 S 在第 j 维分量的长度。由于 $x_i \rightarrow \frac{c_1 P + c_2 P_g}{c_1 + c_2}$ ，因

而 $\lim_{k \rightarrow +\infty} M_{i,k} = 0$ 。从而，随着迭代次数 k 的增加， $v(M_{i,k})$ 在不断减少，其并 $v(\bigcup_{i=1}^t M_{i,k})$ 也在减

少。从而 $v(\bigcup_{i=1}^t M_{i,k} \cap S) < v(S)$ ，这表明存在整数 k' ，使得当 $k > k'$ 时，存在集合 $A \subset S$ ，使

得 $\sum_{i=1}^t \mu_{i,k}(A) = 0$ ，这表明基本微粒群算法不满足假设 5.2。



结论

- 基本微粒群算法满足假设**5.1**，不满足假设**5.2**，不是全局收敛算法。

PSO的Markov链描述分析

通过计算机模拟可知，“PSO”算法也能收敛到最优值，却不能总是收敛。由于算法是从一个初始状态开始，以一定的概率转移到下一步。而结果不依赖初始状态，仅依赖当前状态，因此对应于一个马尔科夫链。

算法的马尔科夫链可用有向图 $H=(V,E)$ 表示，其中 V 为所有状态构成的顶点集， $E=\{(i,j)|i,j \in V, j \in N_i\}$ 为边集。

记 g_{ij} 为状态 i 到 j 的概率，则

$$g_{ij} = \begin{cases} g(i,j)/g(i) \in N_i \\ 0, j \notin N_i \end{cases}$$
，其中 $g(i)=\sum_{j \in N_i} g(i,j)$ ，若新状态在当前状态的邻域中以等同概率产生，则 $g(i,j)/g(i)=1/N_i$ ， N_i 为状态 i 的邻域状态总数，即粒子第 i 步到第 j 步的所有可能。

PSO的Markov链描述分析

定义转移概率: $p_{ij}(t)=g_{ij}$, 定义状态转移矩阵 $P=(p_{ij})_{G \times G}$, G 为所有粒子群所对应的整个状态空间, 令 Ω 为所有粒子形成的有限空间, G 的维数为 $G=\Omega^m$ 。

显然, $\sum_{j=1}^G p_{ij} = 1$, $p_{i,j} \geq 0$, 所以 $P > 0$ 。

定理3.1:“PSO”不能以概率1收敛的全局最优值。

证明:令 $P(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)\}$ 为算法的第 t 代粒子, 其最优适配值为

$Z_t = \max\{f(x_k(t)), k=1, 2, \dots, m\} = f(p_g)$, 设 f_{max} 为全局最优适配值。

而 $\lim_{t \rightarrow \infty} p_i^t = p_i^\infty > 0 \quad \therefore \lim_{t \rightarrow \infty} P\{Z_t = f_{max}\} < 1 - p_i^\infty < 1$

说明不保留历史最优值的“PSO”不能以概率1收敛到全局最优值。



PSO的Markov链描述分析

定理3.1说明不保留历史最优值的算法不能够都收敛到全局最优值，如果保留其历史最优值，那算法将收敛。而PSO算法是保留的，故有以下定理：

定理3.2:PSO以概率1收敛到全局最优值。

证明:PSO保留历史最优值，将最优值放在下一代粒子的首位，即第t代粒子为：

$P(t) = \{x(t-1), x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)\}$, $x(t-1)$ 即为 p_g 。

对应马尔科夫链状态空间维数变为 Ω^{m+1} 。

记新的状态转移矩阵为 $P^+ = \text{diag}(p, p, \dots, p)$ 。在状态转移前，算法要将当前粒子群的最优值与上一代保留下来的最优值进行比较，此操作用 $U = (u_{ij})$ 表示。

PSO的Makrov链描述分析

状态 $Y(t) = \{x(t-1), x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)\}$, 转移到
 $Y(t+1) = \{x(t), x_1(t+1), x_2(t+1), \dots, x_m(t+1)\}$ 的概率为

$$P(Y(t+1)|Y(t)) = \begin{cases} 1, & \text{if } \max(f(x_1(t)), f(x_2(t)), \dots, f(x_m(t))) = f(x(t)) \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

可知, U 每一行均有且只有一个元素为1, 其他为0, 所以 U 为下三

$$U = \begin{pmatrix} U_{11} & & & \\ U_{21} & U_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ U_{\Omega 1} & U_{\Omega 2} & \cdots & U_{\Omega \Omega} \end{pmatrix}$$

其中, U_{ij} 为 $\Omega^m \times \Omega^m$ 阶矩阵, 且 U_{11} 为单位矩阵。



其它两种改进的微粒群算法

一种是保证收敛的微粒群算法（**Guaranteed Convergence Particle Swarm Optimizer**,简称**GCPSO**）的。

另一种是保证全局收敛的随机微粒群算法（**Guaranteed Global Convergence Stochastic Particle Swarm Optimizer**,简称**GGCSPSO**）。

GCPSO是一种局部收敛算法，

GGCSPSO是一种全局收敛算法。



粒子群的群体动力学分析

以往分析的缺陷：粒子的gbest和pbest固定不变，也即适应值不再改进，粒子群中所有粒子对这个粒子的影响被简化为了一个固定不变的常量。

PSO优化过程中种群内所有粒子是一个相互合作协同优化的过程，群体的合作行为才是粒子群运动的特点。各个粒子通过相互共享各自找到的最优解信息，从而希望找到全局最优解。

每个粒子所受到的其它粒子对它的影响也是实时变化的，只研究单个粒子的运动而将粒子群中所有粒子对这个粒子的影响简化为一个常量的做法有一定局限性。



分几种情况

1) 每个粒子的个体极值 P_i 每次迭代都更新

- 粒子的每次位置更新都可以作为自己的个体极值

- 非最优个体粒子的更新公式

$$V_i(t+1) = W * V_i(t) + c_2 * r_2 * (p_g - x_i(t))$$

$$p_i^*(t+1) = p_i(t) + \frac{\phi}{2} p_g(t)$$



最优粒子 P_i 的更新

$$p_i^*(t+1) = p_i(t) + w \cdot v(t)$$

在这种情况下，粒子群群体运动和当前最优个体相关，非最优粒子直接向当前最优粒子靠近，而当前最优粒子是否向全局极值前进取决其前一步速度，若当前最优粒子搜索到全局最优解，则种群所有粒子将迅速靠近，种群将收敛。



2) 每个粒子的 p_i 停滞没有更新，实际上粒子间没有信息交互。

■ 最终位置

$$x_i = \frac{c1 \cdot p_i + c2 \cdot p_g}{c1 + c2}$$

3) 每个粒子的 p_i 有时是粒子的当前位置，有时停滞。

- 在这种情况下， p_i 处于以上两种情况之间，也即有时进行了更新，有时没有更新，这是粒子群优化算法中粒子运动最一般的情况。
- 若全局最优点（**global best point, Gbp**）位于搜索空间中心，粒子初始位置关于全局最优点球中心对称。
- 当粒子 i 的位置 x_i 满足 $|x_i - Gbp| \leq |p_i - Gbp|$ 时该粒子的个体最优 p_i 才进行更新，即,在这种情况下，所有粒子的个体极值的更新趋向于全局最优点，整个种群的逐渐收敛。



小结

- 1) 基本PSO不是全局收敛的算法
- 2) 可改进PSO到达全局收敛
- 3) 一般情况的PSO的收敛性仍然是一个open问题
- 4) 对研究中提出的改进PSO方法进行收敛性研究必要且有意义