COURS 1

SUITES REELLES

PARTIE 1

M2202 : ANALYSE

Sommaire

1. Premières notions sur les suites

Définition : soit E un ensemble quelconque. On appelle suite d'éléments de E, une application f de $I \subset \mathbb{N}$ dans E.

$$\begin{aligned} f : I &\to E \\ n &\to f(n) \end{aligned}$$

Remarques et exemples :

1. I peut être un ensemble fini ou infini.

2. E peut être n'importe quel ensemble :
   - $E = \mathbb{C}$ (ensemble des nombres complexes) :
     - Soit la suite complexe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $x_n = i^n$
     - Soit la suite complexe $(y_n)_{n\in N}$ de terme général $y_n = 1 + ni$
   - $E = C^{\infty}(R)$ (ensemble des fonctions continument indéfiniment dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
     - Soit la suite $(f_n)_{n\in N}$ de terme général f_n tel que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$
     - Soit la suite $(g_n)_{n\in N}$ de terme général g_n tel que $\forall x \in \mathbb{R} \quad g_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}$
   - $E = M_2(R)$ (ensemble des matrices carrées d'ordre 2)
     - Soit la suite $(A_n)_{n\in N}$ de terme général $A_n = \begin{pmatrix} 2^n & 1 \\ (\sqrt{2})^n & 3^{-n} \end{pmatrix}$

Comment définir une suite ?

- Par une formule explicite :
  - $u_n = 3n - 1$ ou $v_n = \dfrac{1}{n+1}$ sont les termes généraux de deux suites numériques réelles définies en fonction de n
  -
- Par une formule de récurrence :
  - $u_n = 2u_{n-1}$ ou $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$ sont les termes généraux de suites récurrentes.

2. Définitions – Suites bornées

2.1 Définition d'une suite et opérations :

Définition 1 : **Suite**
Une suite réelle est une application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
Au lieu de noter cette application sous la forme standard, on la note sous forme indicielle :
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou encore (u_n) où u_n représente l'image de l'entier n par l'application u
On note S($\mathbb{K}$) ou $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ou complexes ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

Remarque 1 : On dira qu'une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ définie à partir d'un certain rang n_0 est aussi une suite.
Remarque 2 :

(u_n) désigne une suite, c'est donc une application
u_n désigne un terme de la suite, c'est donc un réel ou un complexe.

Définition 2 : Opérations sur les suites
On définit les lois suivantes sur l'ensemble des suites :
1. Addition de deux suites : $(u_n)+(v_n)=(u_n+v_n)$
2. Multiplication de deux suites : $(u_n)\times(v_n)=(u_n\times v_n)$
3. Multiplication d'une suite par un scalaire : $\forall\lambda\in\mathbb{K}$, $\lambda(u_n)=(\lambda u_n)$

Remarque : $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$

2.2 Suites majorées, minorées, bornées

Définition 3 : Suites bornées
On dit qu'une suite (u_n) est majorée ssi $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n \le M$
On dit qu'une suite (u_n) est minorée ssi $\exists m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n\in\mathbb{N}$, $m \le u_n$
On dit qu'une suite (u_n) est bornée si et seulement si elle est majorée et minorée
On dit qu'une suite (u_n) est bornée si et seulement si $(|u_n|)$ est majorée
Cette définition est valable dans $\mathbb{C}$, le module du nombre complexe se substituant à la valeur absolue du réel.

l'ordre des quantificateurs est important dans les définitions précédentes

Exemples :

- La suite $(u_n)_{n\ge1}$ définie par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ est une suite bornée ($\forall n\in\mathbb{N}^*$, $|u_n|\le 1$)
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = i^n$ est une suite bornée ($\forall n\in\mathbb{N}$, $|u_n| = 1$)

Remarque :

- La négation d'une suite bornée est donnée par : $\forall M \in\mathbb{R}$, $\exists n\in\mathbb{N}$, $|u_n|\ge M$

  La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = 2^n$ n'est pas bornée. Pour tout réel positif M il suffira de prendre $n \ge \dfrac{\ln M}{\ln 2}$ pour que $|u_n| \ge M$

Proposition 1:
L'ensemble B des suites numériques bornées est un sous espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$

Implication :
Addition : si (u_n) et (v_n) sont deux éléments de *B*, c'est-à-dire deux suites bornées, alors leur somme $(u_n + v_n)$ est également un élément de *B*, c'est-à-dire une suite bornée
Multiplication par un scalaire : soient (u_n) une suite bornée et λ un élément de $\mathbb{K}$, alors la suite (λu_n) est encore un élément de *B*, soit une suite bornée.

De plus :
Multiplication : si (u_n) et (v_n) sont deux éléments de *B*, alors $(u_n)\times(v_n)$ est encore un élément de *B*.

2.3 Monotonie d'une suite

Définition 4 : Suites monotones
On dit qu'une suite (u_n) est croissante ssi $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n \le u_{n+1}$
On dit qu'une suite (u_n) est décroissante ssi $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n \ge u_{n+1}$
On dit qu'une suite (u_n) est monotone ssi elle est décroissante ou croissante
On dit qu'une suite (u_n) est stationnaire ssi elle est constante à partir d'un certain rang.

Méthodes pour démontrer la monotonie d'une suite

Méthode 1 : Pour déterminer le sens de variation d'une suite, on pourra étudier le signe de la différence

$$u_{n+1} - u_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Méthode 2 : Pour déterminer le sens de variation d'une suite de termes strictement positifs, on pourra comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1 pour tout $n \in \mathbb{N}$

2.4 Propriété vraie à partir d'un certain rang

Définition 5 : Propriété vraie à partir d'un certain rang
On dit qu'une propriété $p(n)$ est vérifiée à partir d'un certain rang si et seulement si :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \forall n \ge n_0, \quad \text{la propriété } p(n) \text{ est vraie.}$$

3. Limite d'une suite

3.1 Convergence : Définitions

Définition 6 : Limite finie d'une suite
On dit que la suite (u_n) **converge** vers un réel $l \in \mathbb{R}$ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \forall n \geq n_0, \quad |u_n - l| \leq \varepsilon$$

On note alors :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = l \quad \text{ou} \quad u_n \to l$$

la limite l d'une suite (u_n) est un nombre réel indépendant de l'indice n

Définition 7 : On peut étendre la notion de limite d'une suite à $\overline{\mathbb{R}}$
1. $u_n \to +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, \quad u_n \geq A$
2. $u_n \to -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, \quad u_n \leq A$

Dans ces deux cas, on dit que (u_n) **diverge** vers $+\infty$ ou $-\infty$

Méthodes :

1. Pour montrer que $u_n \to l$ à l'aide de la définition :
On commence par poser $\varepsilon > 0$ et on cherche un rang n_0 à partir duquel : $|u_n - l| \leq \varepsilon$

2. Pour montrer que $u_n \to +\infty$ à l'aide de la définition :
On commence par poser $A > 0$ et on cherche un rang n_0 à partir duquel : $A \leq u_n$

Remarques :
1. S'il existe un réel l tel que la suite converge vers l, on dit que la suite est *convergente*
2. S'il n'existe pas de réel l vérifiant la propriété ci-dessus, on dit que la suite *diverge*

Ainsi, une suite divergente soit n'admet pas de limite, soit tend vers l'infini.

3. Démontrer que $u_n \to l$ revient à démontrer que $u_n - l \to 0$
4. Pour étudier la limite d'une suite, nous utiliserons plutôt les théorèmes généraux de convergence ainsi que la convergence ou la divergence des suites de référence. Cependant il sera parfois utile de revenir à la méthode issue de la définition.

3.2 Propriétés des suites convergentes

Théorème 1 : Unicité de la limite
Si elle existe, la limite d'une suite (u_n) est unique
On peut alors la noter : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ ou $\lim u_n$

Théorème 2 : Une suite convergente est bornée
Toute suite réelle convergente est bornée

Théorème 3 : Encadrement des termes d'une suite convergente
Soit (u_n) convergeant vers un réel l
Alors pour tous $k, k' \in \mathbb{R}$ tels que $k < l < k'$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad k < u_n < k'$$

Remarque : On en déduit que si une suite (u_n) converge vers une limite $l > 0$, alors cette suite est à termes strictement positifs à partir d'un certain rang.

Théorème 4 : Suites qui convergent vers 0
1. L'ensemble des suites convergeant vers 0 est un $\mathbb{R}$ **espace vectoriel** :
   L'ensemble des suites réelles convergeant vers 0 est stable pour l'addition et par multiplication par un réel.
2. Le produit de deux suites convergeant vers 0 est une suite qui converge vers 0
3. Le produit d'une suite qui tend vers 0 par une suite bornée est une suite qui tend vers 0.

3.3 Passage aux limites

Théorème 5 : Passage à la limite dans les inégalités
Soient deux suites réelles (u_n) et (v_n) :

Si $\quad u_n \leq v_n \quad$ à partir d'un certain rang et $\begin{cases} u_n \to l \\ v_n \to l' \end{cases}$ alors : $l \leq l'$

Théorème 6 : Théorème de la majoration (Etude de convergence 1)
Soit une suite (u_n) et un réel l

Si il existe une suite (α_n) et un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que : $\begin{cases} \forall n \geq n_0, \quad |u_n - l| \leq \alpha_n \\ \alpha_n \to 0 \end{cases}$ alors $u_n \to l$

Théorème 7 : Théorème de l'encadrement (Etude de convergence 2)
On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n)

1. Si : $\begin{cases} v_n \leq u_n \leq w_n \text{ à partir d'un certain rang} \\ (v_n) \text{ et } (w_n) \text{ convergent vers la même limite } l \end{cases}$

alors la suite (u_n) converge vers l

2. Si : $\begin{cases} v_n \leq u_n \text{ à partir d'un certain rang} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty \end{cases}$

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

1. Même si à partir d'un certain rang $\alpha_n \leq u_n \leq \beta_n$ et $\begin{cases} \alpha_n \to l_1 \\ \beta_n \to l_2 \end{cases}$, on ne peut pas en conclure que (u_n) converge vers une limite l vérifiant : $l_1 \leq l \leq l_2$

2. En revanche si on sait que la suite (u_n) converge vers l, alors on a bien $l_1 \leq l \leq l_2$. Il s'agit d'un simple passage aux limites dans l'inégalité.

3.4 Théorèmes généraux sur les limites de suites

Théorème 8 : Théorèmes généraux
Soient (u_n) une suite convergeant vers un réel l et (v_n) une suite convergeant vers un réel l'. Alors :

1. La suite $(|u_n|)$ converge vers $|l|$
2. La suite $(u_n + v_n)$ converge vers $l + l'$
3. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la suite (λu_n) converge vers λl
4. La suite $(u_n v_n)$ converge vers ll'
5. Si $l' \neq 0$, la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers $\dfrac{l}{l'}$

Théorème 9 : Cas des suites fonctionnelles (Etude de convergence 3)
Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = f(n)$ où $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$

Si $\quad f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} l \in \overline{\mathbb{R}} \quad$ alors $\quad u_n \to l$

4. Suites monotones

Théorème 10 : Théorème de la limite monotone (Etude de convergence 4)
Soit (u_n) une suite croissante. On a alors :

Si (u_n) est majorée alors (u_n) converge vers une limite finie
Si (u_n) n'est pas majorée alors (u_n) diverge vers $+\infty$

Remarques :
- Une suite décroissante minorée converge
- Une suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$

5. Suites adjacentes

Définition 8 : Suite adjacentes
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On dit qu'elles sont adjacentes lorsque :
1. Les deux suites sont monotones et de sens contraire
2. La suite $(v_n - u_n)$ converge vers 0

Théorème 11 : Convergence des suites adjacentes (Etude de convergence 5)
Deux suites adjacentes convergent et ont la même limite

Remarque : Si (u_n) croissante et (v_n) décroissante sont adjacentes, alors leur limite commune *l* vérifie :
$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq l \leq v_n$

6. Suites extraites

Définition 9 : Suite extraite
On dit qu'une suite (v_n) est une suite extraite d'une suite (u_n) s'il existe une application φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall n \in N, \quad v_n = u_{\varphi(n)}$

Exemple :
Les suites $\begin{cases} v_n = u_{2n} \\ w_n = u_{2n+1} \end{cases}$ sont extraites de la suite (u_n)

Théorème 12 : Suite extraite d'une suite ayant une limite (Etude de convergence 6)
Si une suite (u_n) admet une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ alors toute suite extraite de (u_n) a aussi pour limite *l*.

Remarque :
1. On peut ainsi prouver qu'une suite converge en montrant qu'il s'agit d'une suite extraite d'une suite convergente.
2. Ce théorème est surtout utile pour démontrer qu'une suite diverge

Méthode : Utilisation des suites extraites pour prouver la divergence d'une suite
Cas 1 : si (u_n) est une suite dont on peut extraire deux suites convergeant vers des limites différentes, alors (u_n) est divergente.
Cas 2 : si de (u_n) on peut extraire une suite divergente alors (u_n) diverge

Théorème 13 : Application pour prouver la convergence (Etude de convergence 7)
Soit une suite (u_n)
Si les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite $l \in \mathbb{R}$ alors $(u_n) \to l$

Théorème 14 : Théorème de Bolzano-Weierstrass
De toute suite réelle bornée, on peut extraire une suite convergente