École Nationale Supérieure
d'Électrotechnique, d'Électronique, d'Informatique,
d'Hydraulique et des Télécommunications

Institut National Polytechnique

Recherche Opérationnelle
Projet 3 et Projet 4

Omar Bennani - Florent Dubois - Noah Jay - Pierre Jeanjean -
Sacha Liguori - Luc Sapin

Table des matières

Introduction

Cette seconde série de projets nous a confronté à des cas d'étude plus fréquemment rencontrés dans la réalité.

Nous nous sommes tout d'abord intéressé à la théorie des jeux, et plus précisément au duopole de Cournot. Notre objectif a été ici l'optimisation de gains en suivant un modèle économique réaliste.

Le second projet consistait également en une optimisation de bénéfices, ainsi qu'une minimisation de coûts, par la mise en place d'un système de gestion de stock automatisé. Cela aura nécessité l'utilisation de chaînes de Markov.

Répartition des rôles :

— Chef de Projet : Luc Sapin
— Responsable Qualité : Pierre Jeanjean
— Equipe : Omar Bennani, Florent Dubois, Noah Jay, Sacha Liguori

1 Duopole de Cournot

Le duopole de Cournot est un modèle économique basé sur la situation suivante :

— Plusieurs entreprises sont en concurrence
— Chaque entreprise vend le même produit, au même prix
— La concurrence se fait sur la quantité du produit mis en vente
— Les entreprises mettent leurs produits en vente en même temps
— Les entreprises veulent maximiser leur profit, donc leur quantité vendue

1.1 Stratégie pénalise

1.1.1 Principe

Cette stratégie distingue deux types de comportement chez son adversaire :

— Un comportement coopératif, où l'entreprise maximise ses profits en coopérant avec son adversaire
— Un comportement non coopératif, où l'entreprise tente de prendre l'ascendant sur son adversaire

Dans le cas où l'adversaire présente un comportement coopératif, cette stratégie va faire de même afin que les deux entreprises puissent maximiser leur profit.

Cependant, pour chaque tentative de l'adversaire à être non coopératif, on va suivre la stratégie *Stackelberg* (une stratégie offensive qui nous est donnée) afin de le punir de plus en plus : s'il joue une fois de façon agressive, il sera pénalisé 1 tour sur 2, s'il le fait deux fois ce sera 2 tours sur 3, etc...

1.1.2 Algorithme

Pseudo-code de notre stratégie pénalise

$nbPenalites = 0$
Pour chaque partie précédente **Faire**
  Si l'adversaire n'a pas été coopératif **Alors**
    $nbPenalites++$
  Fin Si
Fin Pour

i = le numéro de la partie actuelle -1
Tant Que on n'a pas été coopératif à la partie i **Faire**
  $nbPenalites--$
  $i--$
Fin Tant Que

Si $nbPenalites > 0$ **Alors**
  Stratgéie Stackelberg
Sinon
  Stratégie coopérative
Fin Si

1.1.3 Résultats

Cette stratégie gagne contre toutes les stratégies non coopératives données, et obtient de très bons gains avec la stratégie coopérative. Elle a également réalisé de très bons résultats en compétition face aux stratégies d'autres groupes.

1.2 Répartition du travail

Chaque membre de l'équipe a participé à l'analyse du problème et a travaillé sur des stratégies différentes. La stratégie retenue a été écrite par Omar Bennani.

2 Gestion de stock

La situation est ici la suivante :
— Un magasin propose à la vente un seul article
— Il commande à son fournisseur à la semaine
— Chaque article possède un coût de stockage à la semaine
— Des frais de ports s'ajoute au coût de la commande
— Une commande a lieu si le nombre d'articles en stock est inférieur à s
— Chaque commande doit reconstituer le stock maximal S

Le nombre d'articles demandés par les clients chaque semaine suit une variable aléatoire de loi connue. De plus, on considère également les coûts liés aux pénuries de l'article.

L'objectif est ici d'optimiser le gain du magasin en fonction des variables s et S.

Soit (X_n) la suite correspondant au nombre d'articles restant en stock à la fin de chaque semaine. Au vu de la situation décrite plus haut, on a besoin de seulement X_n pour obtenir X_{n+1}, d'où on remarque que (X_n) est une chaîne de Markov homogène, finie à valeurs dans $[\![0, S]\!]$.

2.1 Matrice de transition

La première étape dans la résolution du problème a alors été d'obtenir la matrice de transition P de la suite (X_n).

On pose α_i la probabilité que la demande de la semaine soit de i articles.

On peut séparer les différentes transitions (d'un état j vers une état k) en 4 cas différents :

2.1.1 $j \geq s$ et $k > 0$

Dans ce cas, la probabilité de passer de l'état j à l'état k est tout simplement la probabilité que $j - k$ articles aient été demandés dans la semaine.

On a donc $P(j,k) = \alpha_{j-k}$ si $j - k \geq 0$, et $P(j,k) = 0$ sinon.

2.1.2 $j \geq s$ et $k = 0$

En ce qui concerne une transition vers un état d'arrivée 0, on prend également en compte la possibilité d'une pénurie (une demande plus grande que la quantité en stock).

La probabilité est alors la somme de toutes les probabilités α_i telles que $i \geq j$, d'où $P(j,k) = \sum\limits_{i=j}^{+\infty} \alpha_i$.

2.1.3 $j < s$ et $k > 0$

Si la quantité d'articles possédés en fin de semaine dernière j était inférieure à s, une commande de $S - j$ articles aura eu lieu. La semaine débutera donc forcément avec un stock de S articles.

D'où $P(j,k) = \alpha_{S-k}$

2.1.4 $j < s$ et $k = 0$

Enfin, dans ce dernier cas, on débute la semaine avec un stock de S articles et on prend en compte la possibilité de pénurie :

$P(j,k) = \sum_{i=S}^{+\infty} \alpha_i.$

2.2 Convergence

Maintenant que nous avons définie la matrice de transition, nous souhaiterions obtenir sa distribution limite. Commençons par vérifier son existence :

2.2.1 Démonstration

Par définition, une chaîne convergente est apériodique, irréductible et finie.

Or, on sait déjà que la chaîne de Markov décrite par la matrice de transition P est à valeurs dans $[\![0, S]\!]$, donc qu'elle est finie. Afin de montrer qu'elle est également irréductible et apériodique, nous allons utiliser la propriété suivante :

Une chaîne de Markov dont la matrice de transition a tous ses termes non nuls est irréductible.

En ce qui concerne P, nous avons vu auparavant qu'elle contient des termes nuls. Cependant, elle n'a aucune colonne totalement nulle, d'où on déduit que tous les états de la chaîne communiquent. La chaîne finira donc forcément par boucler, ce qui nous permet ici de considérer $P(n)$ au lieu de P.

On peut alors démontrer que $P(n)$ n'a plus aucun terme nul à partir d'un certain n ($n = 2$). $P(n|n \geq 2)$ est donc apériodique, irréductible et finie, et par conséquent elle converge vers une distribution limite Π^*.

2.2.2 Distribution limite

Soit Π^k la distribution de la semaine k. On a $\Pi^{(k+1)T} = \Pi^{(k)T} P$.

Pour $k \to +\infty$, on a donc $\Pi^{(*)T} = \Pi^{(*)T} P$.

$$\Pi^{(*)T} - \Pi^{(*)T} P = 0 \iff \Pi^{(*)T}(I - IP) = 0 \iff \Pi^{(*)T}(I - P) = 0$$

On va donc rechercher le vecteur x tel que $\sum x_i = 1$ qui est solution de l'équation $(I - P)^T = 0$. En d'autres termes, avec $A = I - P$ suivi d'une colonne de 1s, et B un vecteur nul terminé par un 1, $\Pi^* = x$ tel que $A^T x = B$.

2.3 Répartition du travail

L'obtention de la matrice de transition a été réalisée par Sacha Liguori et Luc Sapin.

La démonstration de l'existence de la distribution limite a été effectuée par Luc Sapin.

Omar Bennani et Florent Dubois ont travaillé sur la distribution limite.

Le calcul des revenus a été rédigé par Noah Jay et Pierre Jeanjean.