Université Paris 5 – René Descartes
**UFR de Mathématiques et Informatique**
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

**Statistique des Processus**
**M.S.T.2 , 2003-2004**

# Fiche de TD/TP : Modélisation

## Modèles ARMA, ARIMA et SARIMA

**Ex.1.** Soit le processus $ARMA(p,q)$ défini par $\Phi(B)X_t = \Theta(B)\varepsilon_t$, avec $\varepsilon = (\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ bruit blanc de var $\sigma^2$, de représentation causale $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$ (avec $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$).

Vérifier que

$$\gamma(k) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+|k|}; \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

**Ex.2.**
Simuler sous SAS un processus AR de votre choix, ainsi qu'un processus MA.

**Ex.3.**
Quelles transformations pouvez-vous proposer pour stationnariser (si besoin) les séries de l'exercice 1 de la fiche -Introduction- ?

**Ex.4.**
Soit $X = (X_t)_{t>0}$ processus ARIMA(0,2,1) sans constante.

1. Ecrire l'équation du modèle en ayant soin de préciser les conditions liées aux différents paramètres.
2. Donner l'écriture autorégressive du modèle, puis son écriture moyenne mobile.

**Ex.5.**
Considérons $X$ un processus $SARIMA(1,1,1)(0,1,0)_4$.

1. Ecrire l'équation du modèle.
2. Calculer $E[X]$.
3. Quel type de séries peut-on modéliser avec ce processus ?

## Le problème des racines unités.

**Ex.6.**
On part du modèle

$X_t - \mu = -\Phi_1(X_{t-1} - \mu) - ... - \Phi_p(X_{t-p} - \mu) + \varepsilon_t$,

avec $(\varepsilon_t)$ b.b. de var $\sigma^2$.

Montrer qu'on peut l'écrire sous la forme

$\triangledown X_t = \Phi_0^* + \Phi_1^* X_{t-1} + \Phi_2^* \nabla X_{t-1} + ... + \Phi_p^* \nabla X_{t-p+1} + \varepsilon_t$

avec : $\Phi_0^* := \mu(1 + \sum_{i=1}^{p} \Phi_i)$, $\Phi_1^* := -1 - \sum_{i=1}^{p} \Phi_i$ et $\Phi_j^* := \sum_{i=j}^{p} \Phi_i$, $2 \le j \le p$.

**Ex.7.**

1. A l'aide de SAS, constituer un fichier de 200 observations $(x_1, ..., x_{200})$ d'un modèle $ARIMA(1,1,0)$ $(X_t)$ défini par

   $(1-0.8B)(1-B)X_t = \varepsilon_t$

   avec $(\varepsilon_t)$ b.b. de var $\sigma^2 = 1$.
   En établir le graphe des données, de l'ACF (sample AutoCorrelation Function) et de la PACF (sample Partial AutoCorrelation Function).
2. On choisit de modéliser $X$ par un $AR(2)$. Tester alors la présence d'une racine unité en utilisant le test de Dickey-Fuller. Conclusion.

**Ex.8.** Soit $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc de variance $\sigma^2$. On définit le processus $X$ vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{Z}, X_t - \frac{7}{2}X_{t-1} + \frac{3}{2}X_{t-2} = \varepsilon_t.$$

1. On pose $\Phi(\mathbb{X}) = (1 - 7/2\mathbb{X} + 3/2\mathbb{X}^2)$. Factoriser $\Phi$ et décomposer $1/\Phi$ en éléments simples.
2. En déduire qu'il existe une suite $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ telle que

   $$X_t = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i \varepsilon_{t-i}.$$

   En déduire que $\varepsilon_t$ n'est pas l'innovation du processus $X$.
3. Soit $\Theta(\mathbb{X}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k \mathbb{X}^k$, avec $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\alpha_k| < \infty$. Soit $Y$ un processus stationnaire quelconque. Montrer que le processus $Z = \Theta(B)Y$ existe et est stationnaire. Montrer que sa densité spectrale $f_Z$ vérifie

   $$\forall \omega \in \mathbb{R}, f_z(\omega) = |\Theta(\exp(i\omega))|^2 f_Y(\omega),$$

   où $f_Y$ désigne la densité spectrale de $Y$. (Indication : considérer d'abord le cas où $\Theta$ est un polynôme de degré 1, puis un polynôme de degré $n$, puis une fraction rationnelle)
4. En déduire qu'il existe un polynôme $\Phi^*$ de degré 2 avec toutes ses racines en-dehors du cercle unité, et qu'il existe un bruit blanc $\eta$ tel que

   $$\Phi^*(B)X = \eta,$$

   en déduire l'existence d'une suite $b_k$ telle que

   $$X_t = \sum_{k\in\mathbb{N}} b_k \eta_{t-k},$$

   et que $\eta$ est l'innovation de $X$.
5. Quelle est la prévision linéaire optimale de $X$ sur son passé ?

**Ex.9.** On considère un processus stationnaire du second ordre vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{Z}, X_t = 2X_{t-1} = \varepsilon_t.$$

$\varepsilon$ est un bruit blanc de variance $\sigma_\varepsilon^2$. $X$ n'est pas observé, on observe $Y = X + \eta$, où $\eta$ est un bruit blanc non corrélé avec $\varepsilon$, de variance $\sigma_\eta^2 = \rho\sigma_\varepsilon^2$.

1. Montrer que $\varepsilon + (1-B)\eta$ est un MA(1).
2. Montrer que $Y$ est un ARMA(1,1) et donner sa représentation canonique.
3. Montrer qu'il existe une suite absolument convergente $a_k$ telle que

   $$\forall t \in \mathbb{Z}, Y_t = e_t + \sum_{k\in\mathbb{N}^*} a_k Y_{t-k},$$

   où $e$ désigne l'innovation de $Y$. Intérêt d'une telle représentation ?