Engenharia
Transferência de Calor e Mecânica dos Sólidos

Insper

APS 4 – ANÁLISE DA DIFUSÃO DE UM POLUENTE EM UM RIO COM CORRENTEZA

OBJETIVO GERAL

O objetivo da atividade é simular a difusão de um poluente em um rio usando diferenças finitas para solução numérica da equação de Burgers.

CRONOGRAMA

- O grupo deverá executar as análises e responder cada uma das questões diretamente nesse documento.
- Salve no formato **PDF** e submeta no blackboard até o dia **05/06** às **23:59** com o nome "**G_00_RelatórioAPS4.pdf"**, sendo 00 o número do seu grupo. Apenas um aluno do grupo deve enviar.
- Indique na folha as seguintes informações:

Grupo:	11

Integrantes:

João Pedro Meirelles
Rafael Almada
Rafael dos Santos

Engenharia
Transferência de Calor e Mecânica dos Sólidos

Insper

Tarefa 1 (2,0 pontos): Substitua as derivadas da equação de Burgers pelas aproximações de diferenças finitas. Use diferença central para as derivadas em X e Y e diferença avançada para a derivada no tempo.

Usando diferenças centrais para o cálculo das derivadas espaciais:

$$\frac{\partial C_{(x,y,t)}}{\partial t} = \frac{(C_{i,j}^{l+1} - C_{i,j}^{l})}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial C_{(x,y,t)}}{\partial x} = \frac{(C_{i+1,j}^{l} - C_{i-1,j}^{l})}{2\Delta x}$$

$$\frac{\partial C_{(x,y,t)}}{\partial y} = \frac{(C_{i,j+1}^{l} - C_{i,j-1}^{l})}{2\Delta y}$$

$$\frac{\partial^2 C_{(x,y,t)}}{\partial x^2} = \frac{(C_{i+1,j}^{l} - 2 \cdot C_{i,j}^{l} + C_{i-1,j}^{l})}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial^2 C_{(x,y,t)}}{\partial y^2} = \frac{(C_{i,j+1}^{l} - 2 \cdot C_{i,j}^{l} + C_{i,j-1}^{l})}{\Delta y^2}$$

Como temos a equação de *Burger*:

$$\frac{\partial C_{(x,y,t)}}{\partial t} + u(x,y) \cdot \frac{\partial C_{(x,y,t)}}{\partial x} + v(x,y) \cdot \frac{\partial C_{(x,y,t)}}{\partial y} - K \cdot \left(\frac{\partial^2 C_{(x,y,t)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_{(x,y,t)}}{\partial y^2}\right) = \dot{q_c} = \frac{\dot{Q}}{\Delta x \cdot \Delta y}$$

Sendo:

$$u(x,y) = \alpha$$

$$v(x,y) = \alpha \cdot \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{5} \cdot x\right)$$

Substituindo:

$$\dot{q_c} = \frac{\dot{Q}}{\Delta x \cdot \Delta y} = \frac{(C_{i,j}^{l+1} - C_{i,j}^{l})}{\Delta t} + \alpha \cdot \frac{(C_{i+1,j}^{l} - C_{i-1,j}^{l})}{2\Delta x} + \alpha \cdot \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{5} \cdot x\right) \cdot \frac{(C_{i,j+1}^{l} - C_{i,j-1}^{l})}{2\Delta y} - K \cdot \left(\frac{(C_{i+1,j}^{l} - 2 \cdot C_{i,j}^{l} + C_{i-1,j}^{l})}{\Delta x^2} + \frac{(C_{i,j+1}^{l} - 2 \cdot C_{i,j}^{l} + C_{i,j-1}^{l})}{\Delta y^2}\right)$$

Tarefa 2 (2,0 pontos): Manipule algebricamente a equação obtida no item "a" e encontre a expressão da concentração em um ponto genérico (x, y) no instante futuro $t + 1$ em função das concentrações no instante atual t.

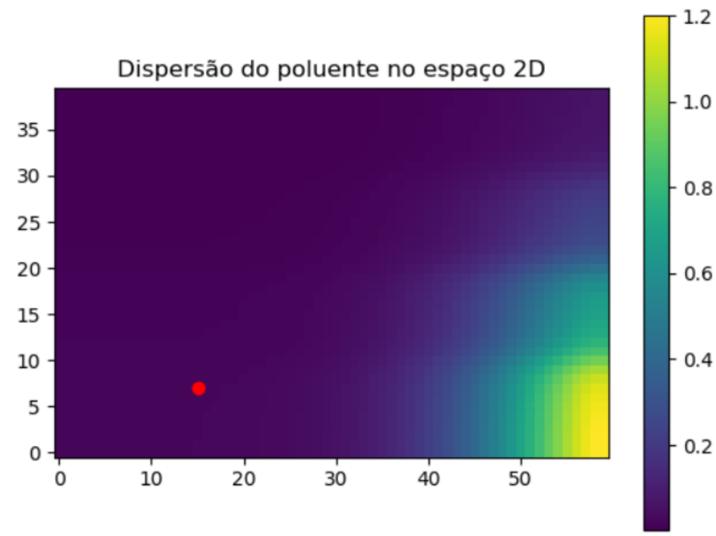
Isolando agora o termo da concentração futura que se encontra na primeira equação da tarefa 1:

$$C_{i,j}^{l+1} = \Delta t \cdot \left(\frac{\dot{Q}}{\Delta x \cdot \Delta y} - \alpha \cdot \frac{(C_{i+1,j}^{l} - C_{i-1,j}^{l})}{2\Delta x} - \alpha \cdot \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{5} \cdot x\right) \cdot \frac{(C_{i,j+1}^{l} - C_{i,j-1}^{l})}{2\Delta y} + K \cdot \left(\frac{(C_{i+1,j}^{l} - 2 \cdot C_{i,j}^{l} + C_{i-1,j}^{l})}{\Delta x^2} + \frac{(C_{i,j+1}^{l} - 2 \cdot C_{i,j}^{l} + C_{i,j-1}^{l})}{\Delta y^2}\right)\right) + C_{i,j}^{l}$$

Considerando que *x = i* e *y = j.*

Tarefa 3 (2,0 pontos): Considerando $K = 1m^2/s$, $\alpha = 1m/s$, $T = 3s$, $Q^{\cdot} = 100kg/ms$, $L_X = 30m$, $L_Y = 20m$, $a = \frac{n}{1{,}4}$ e $b = \frac{60}{n+5}$, sendo n o número do grupo, obtenha a solução pelo método das diferenças finitas para um tempo total de $10T$. Obedeça à condição de convergência $\frac{\Delta t}{\Delta X^2} < \frac{1}{4K}$ (para $\Delta X = \Delta Y$) para discretizar o tempo.

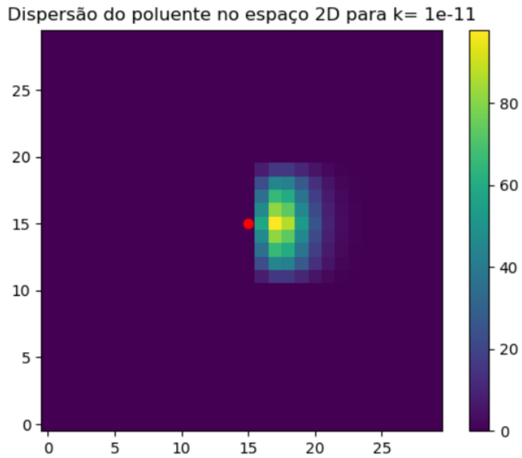
A dispersão no último instante do poluente no rio é, considerando que o ponto vermelho representa o nosso ponto (a,b) de despejo:



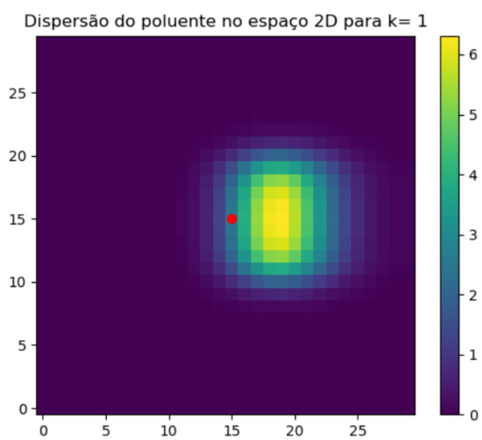
Tarefa 4 (2,0 pontos): Verifique a influência do coeficiente de difusão K no transporte: use diferentes valores de K e argumente com imagens qual o impacto dessas alterações.

O impacto de K se dá no espalhamento do poluente pelo rio.

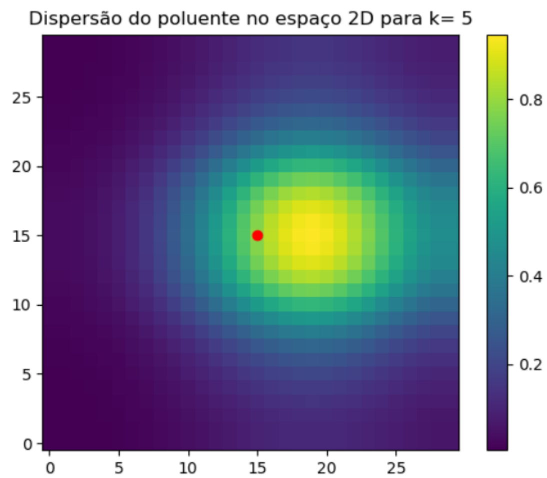
Caso $K = 10^{-11}$ (difusão muito baixa):



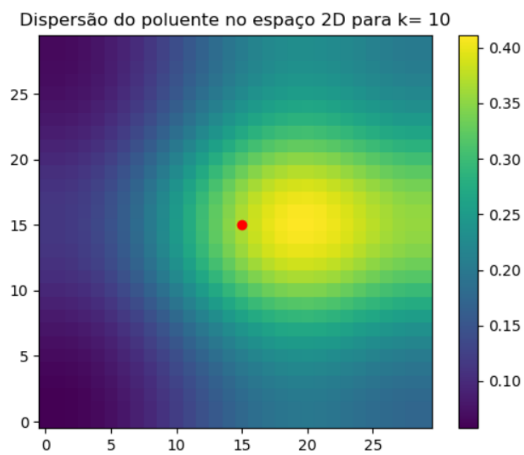
Caso $K = 1$ (difusão baixa):



Caso $K = 5$ (difusão média):



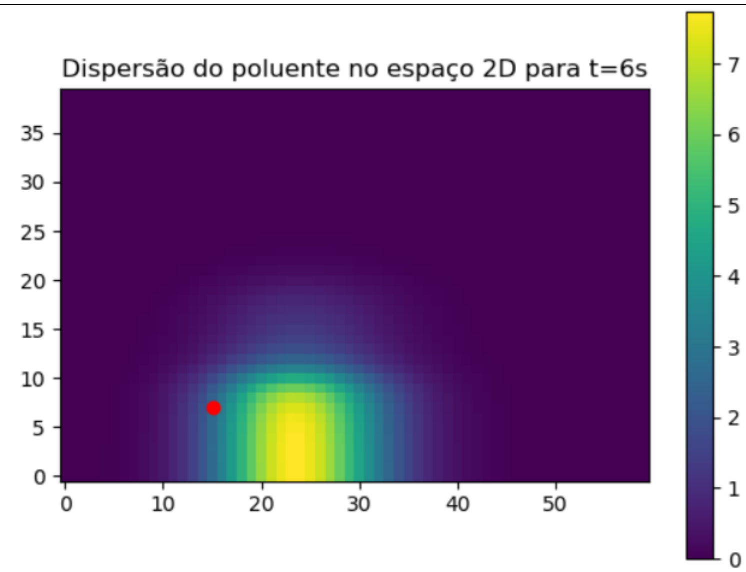
Caso $K = 10$ (difusão alta):



Tarefa 5 (2,0 pontos): Durante o tempo total de simulação, qual foi a primeira fronteira a ser atingida por uma concentração de poluente diferente de zero? Argumente com imagens.

A primeira fronteira a ser atingida por uma concentração de poluente diferente de zero é a fronteira de baixo, onde

y = 0:


Dispersão do poluente no espaço 2D para t=6s
35
30
25
20
15
10
5
0
0
10
20
30
40
50
7
6
5
4
3
2
1
0