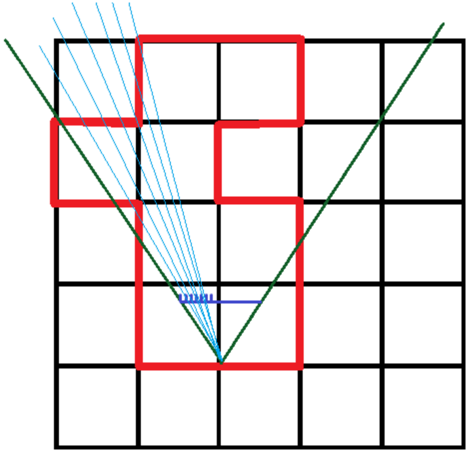
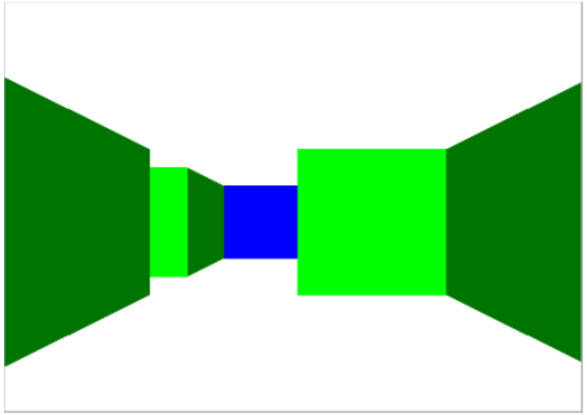
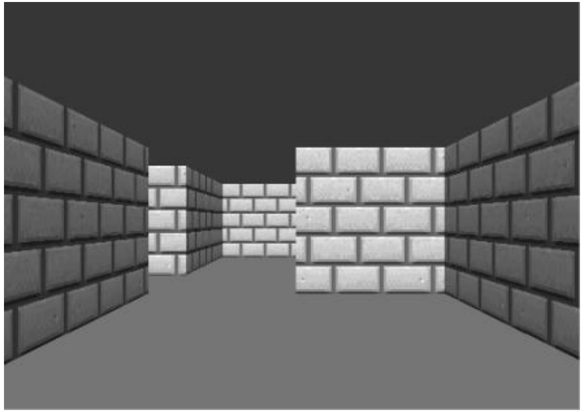
Трассировка лучей
Введение

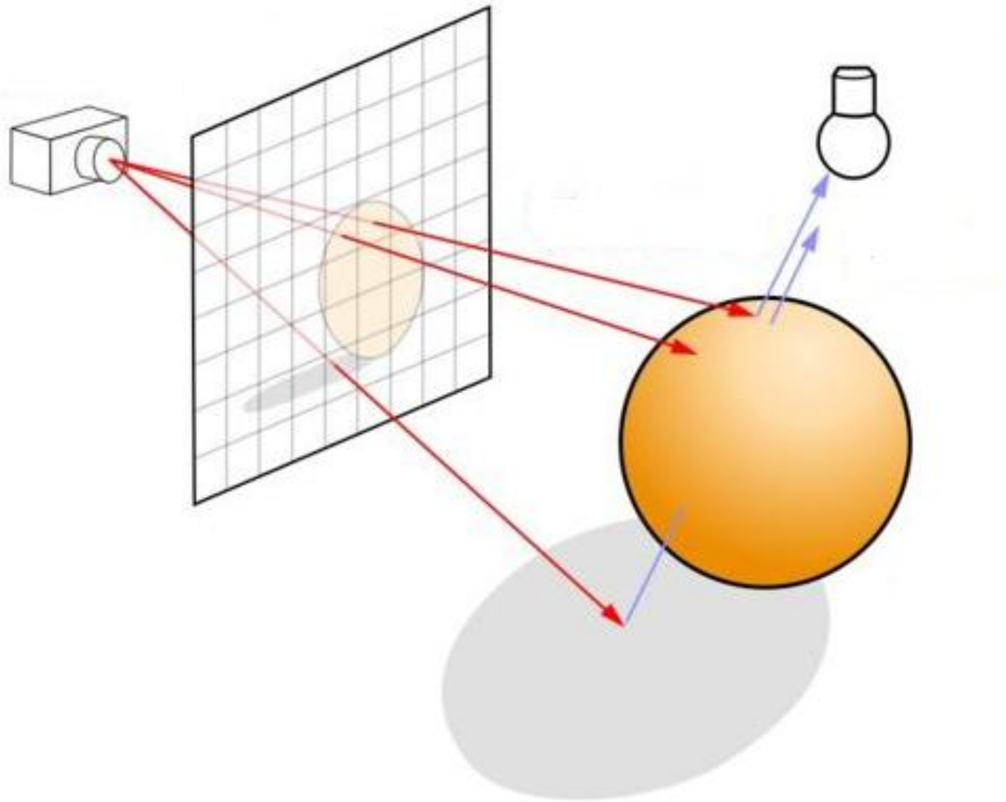
материалы занятий: https://compsciclub.ru/courses/graphics2018/2018-autumn/classes/
дублируются на сайте: http://www.school30.spb.ru/cgsg/cgc2018/



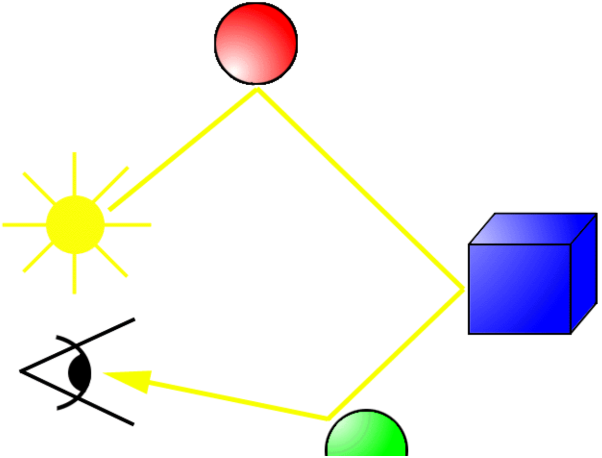


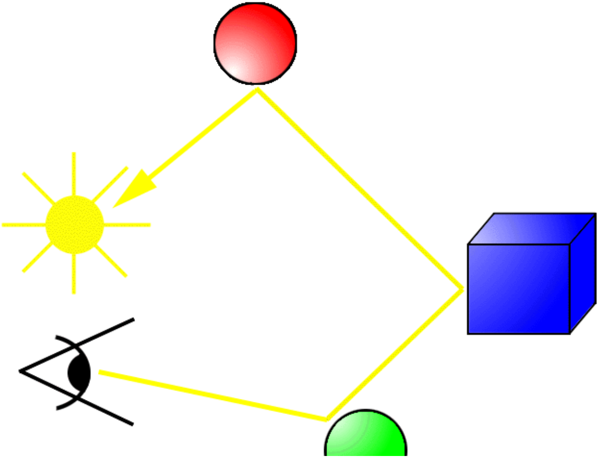


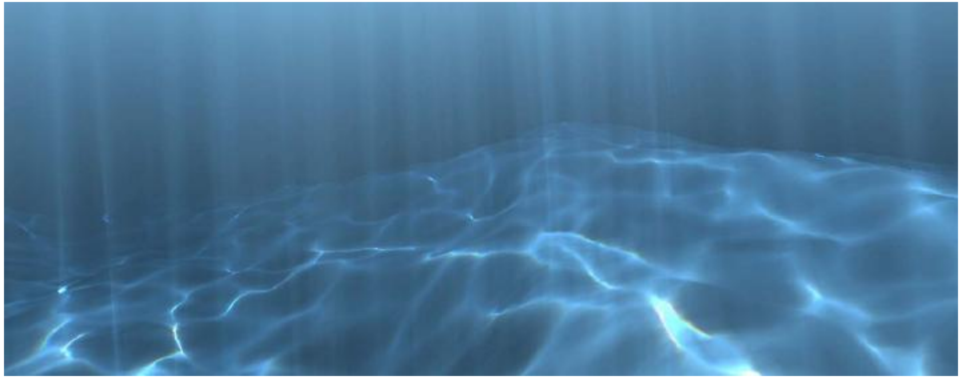
Ray Tracing

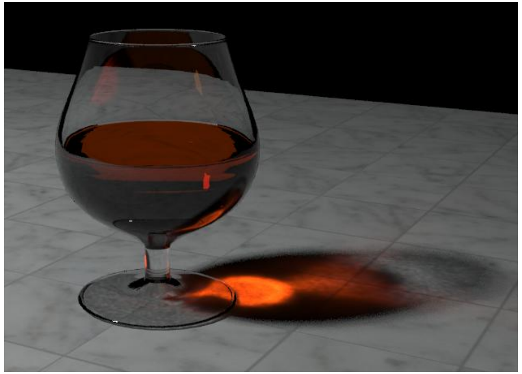


Forward vs. Backward





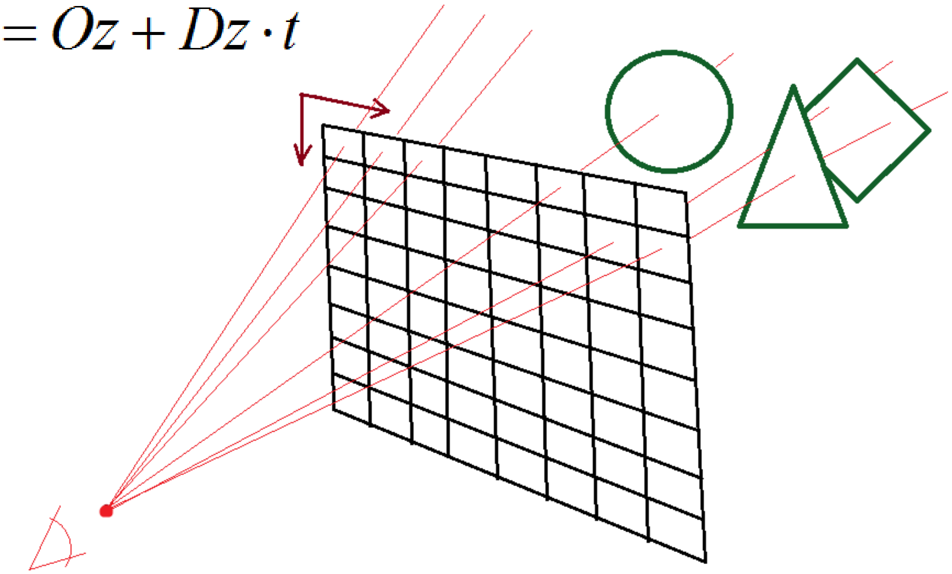


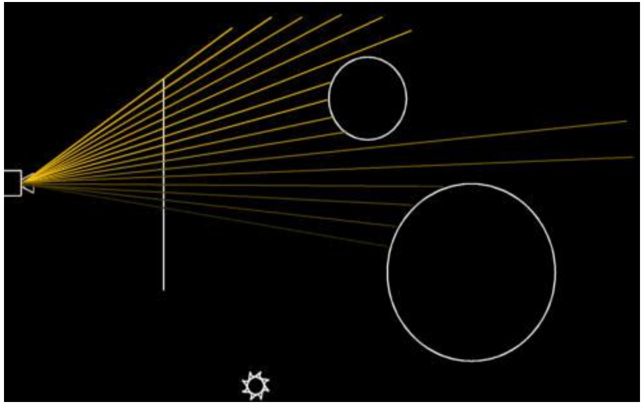


Алгоритм

$$\text{Луч}: \vec{P} = \vec{O} + \vec{D} \cdot t$$

$$\begin{cases} x = Ox + Dx \cdot t \\ y = Oy + Dy \cdot t \\ z = Oz + Dz \cdot t \end{cases}$$





Камера & построение луча

$$\vec{A} = \vec{N} \cdot Dist,$$

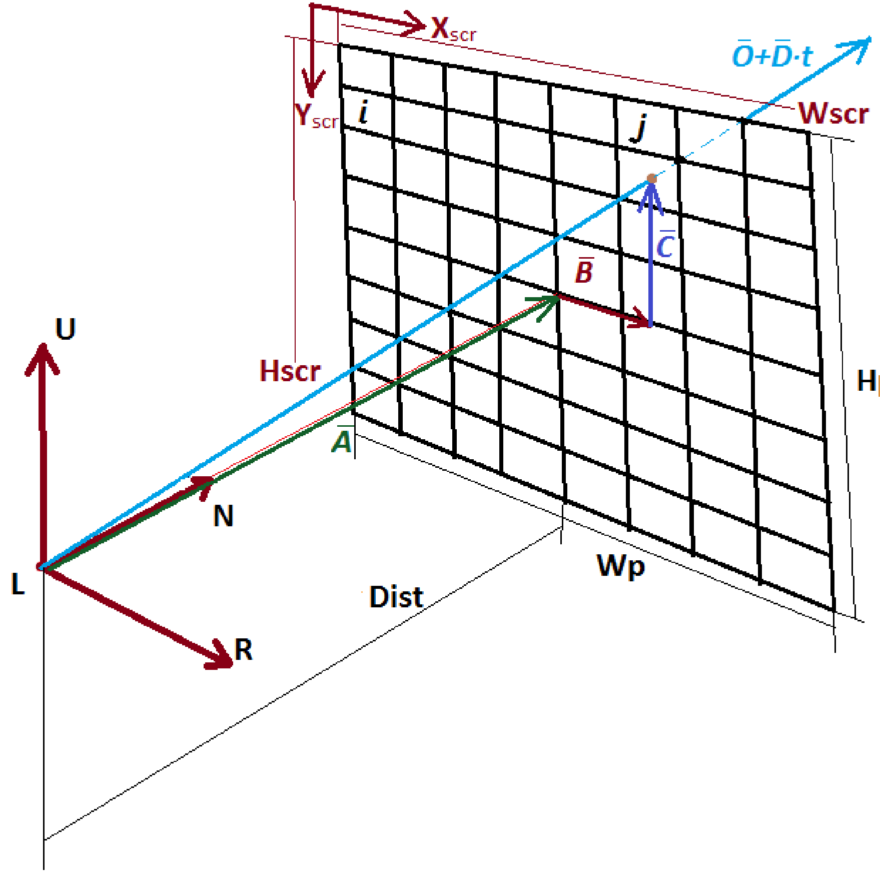
$$\vec{B} = \vec{R} \cdot \frac{(j + 0.5 - Wscr/2)}{Wscr} \cdot Wp$$

$$\vec{C} = \vec{U} \cdot \frac{(-(i + 0.5) + Hscr/2)}{Hscr} \cdot Hp$$

$$\vec{X} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$$

$$\vec{O} = \vec{L} + \vec{X}$$

$$\vec{D} = Normalize(\vec{X})$$



Поиск пересечений (intersections)

- Объекты вида:

$$F(x, y, z) = 0$$

- Подставляем уравнение луча:

$$F(Ox + Dx \cdot t, Oy + Dy \cdot t, Oz + Dz \cdot t) = 0$$

- И решаем относительно *t (t>0)*

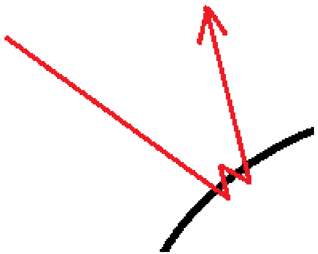
Intersect Threshold

```
if (value == 0)
  ...
if (value > 0)
  ...
```

```
Threshold = 0.000001;
if (ABS(value) < Threshold)
  ...
if (value > Threshold)
  ...
```

$$\cancel{Ray = \vec{P}_{пересечения} + \vec{R}_{отраженный} \cdot t}$$

$$Ray = (\vec{P}_{пересечения} + \vec{R}_{отраженный} \cdot Threshold) + \vec{R}_{отраженный} \cdot t$$



Пересечение с плоскостью

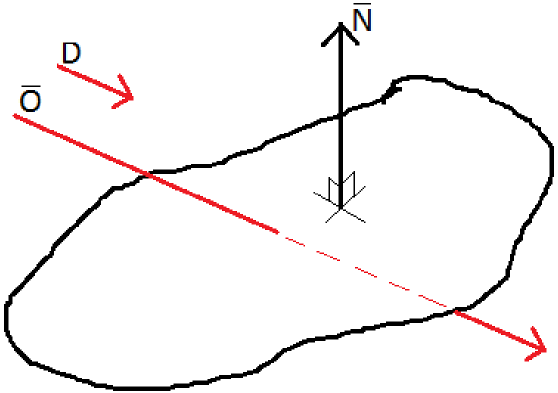
$$\vec{N} = (A, B, C)$$

$$\vec{P} = (x, y, z)$$

$$F(x, y, z) = A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$$

$$A \cdot (Ox + Dx \cdot t) + B \cdot (Oy + Dy \cdot t) + C \cdot (Oz + Dz \cdot t) + D = 0$$

$$t = \frac{-(A \cdot Ox + B \cdot Oy + C \cdot Oz + D)}{A \cdot Dx + B \cdot Dy + C \cdot Dz}, \qquad t = \frac{-(\vec{N} \cdot \vec{P} + D)}{\vec{N} \cdot \vec{D}}$$



Пересечение со сферой

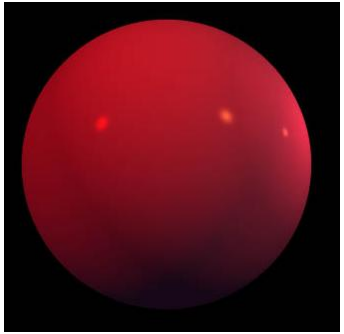
$$F(x,y,z) = (x - Cx)^2 + (y - Cy)^2 + (z - Cz)^2 - R^2 = 0$$

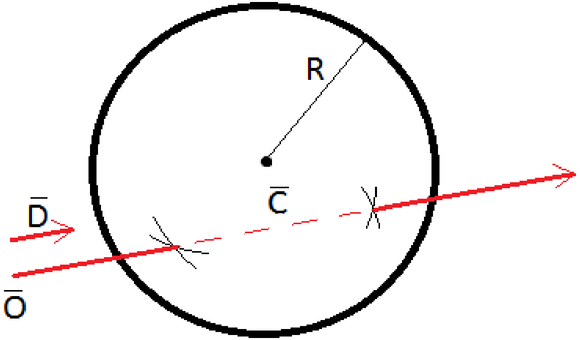
$$(\vec{P} - \vec{C})^2 - R^2 = 0$$

$$(\vec{O} + \vec{D} \cdot t - \vec{C})^2 - R^2 = 0$$

$$\vec{D}^2 \cdot t^2 + 2 \cdot (\vec{D} \cdot (\vec{O} - \vec{C})) \cdot t + (\vec{O} - \vec{C})^2 - R^2 = 0$$

$$t_{0,1} = -\vec{D} \cdot (\vec{O} - \vec{C}) \pm \sqrt{(\vec{D} \cdot (\vec{O} - \vec{C}))^2 - (\vec{O} - \vec{C})^2 + R^2}$$





Геометрическое решение

$$\vec{a} = (\vec{C} - \vec{O})$$

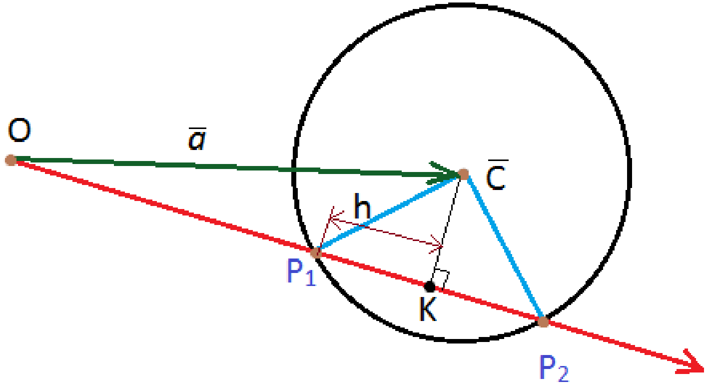
$$OC^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$$

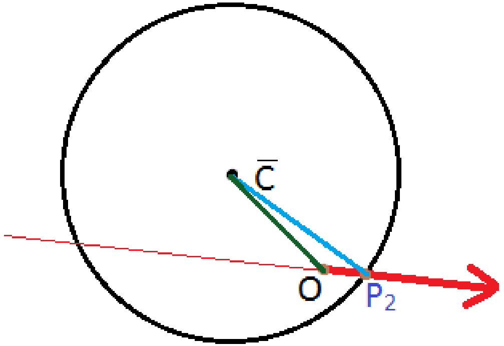
$$OK = \vec{a} \cdot \vec{D}$$

$$OK^2 = (\vec{a} \cdot \vec{D})^2$$

$$h2 = R^2 - (OC^2 - OK^2)$$

```
// Луч стартует внутри сферы
if (OC2 < R2)
{
  t = OK + sqrt(h2);
  return TRUE;
}
// Луч оставляет центр сферы "позади"
if (OK < 0)
  return FALSE;
// Луч проходит мимо сферы
if (h2 < 0)
  return FALSE;
// Луч стартует извне сферы
t = OK - sqrt(h2);
return TRUE;
```

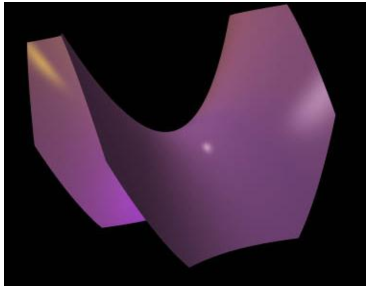
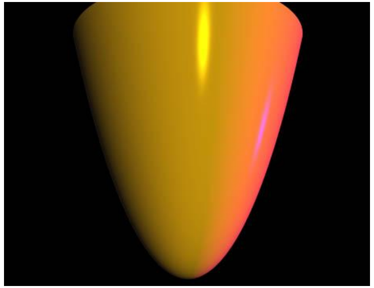
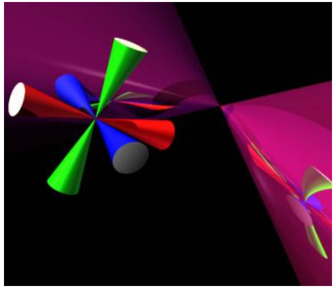
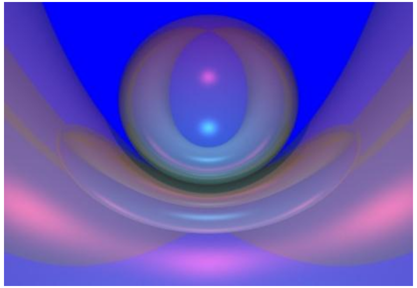




Поверхности второго порядка (quadrics)

$$\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & E & F & G \\ C & F & H & I \\ D & G & I & J \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} F(x,y,z) = A\cdot x^2 + 2\cdot B\cdot x\cdot y + 2\cdot C\cdot x\cdot z + 2\cdot D\cdot x + \\ E\cdot y^2 + 2\cdot F\cdot y\cdot z + 2\cdot G\cdot y + \\ H\cdot z^2 + 2\cdot I\cdot z + J = 0 \end{aligned}$$

Поверхности второго порядка (quadrics)

$$a = A \cdot Dx^2 + 2 \cdot B \cdot Dx \cdot Dy + 2 \cdot C \cdot Dx \cdot Dz + E \cdot Dy^2 + 2 \cdot F \cdot Dy \cdot Dz + H \cdot Dz^2$$

$$b = 2 \cdot (A \cdot Ox \cdot Dx + B \cdot (Ox \cdot Dy + Dx \cdot Oy) + C \cdot (Ox \cdot Dz + x \cdot Oz) + D \cdot Dx + E \cdot Oy \cdot Dy + F \cdot (Oy \cdot Dz + Dy \cdot Oz) + G \cdot Dy + H \cdot Oz \cdot Dz + I \cdot Dz)$$

$$c = A \cdot Ox^2 + 2 \cdot B \cdot Ox \cdot Oy + 2 \cdot C \cdot Ox \cdot Oz + 2 \cdot D \cdot Ox + E \cdot Oy^2 + 2 \cdot F \cdot Oy \cdot Oz + 2 \cdot G \cdot Oy + H \cdot Oz^2 + 2 \cdot I \cdot Oz + J$$

$$t_{0,1} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

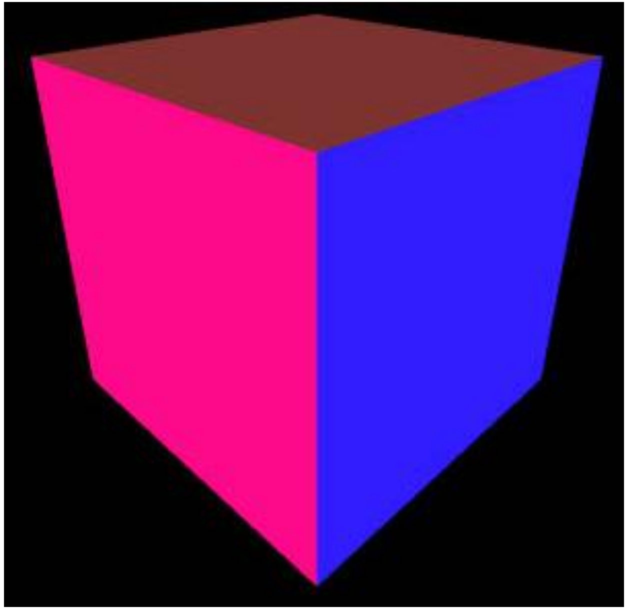
Параллелепипед (box)

- определяется:

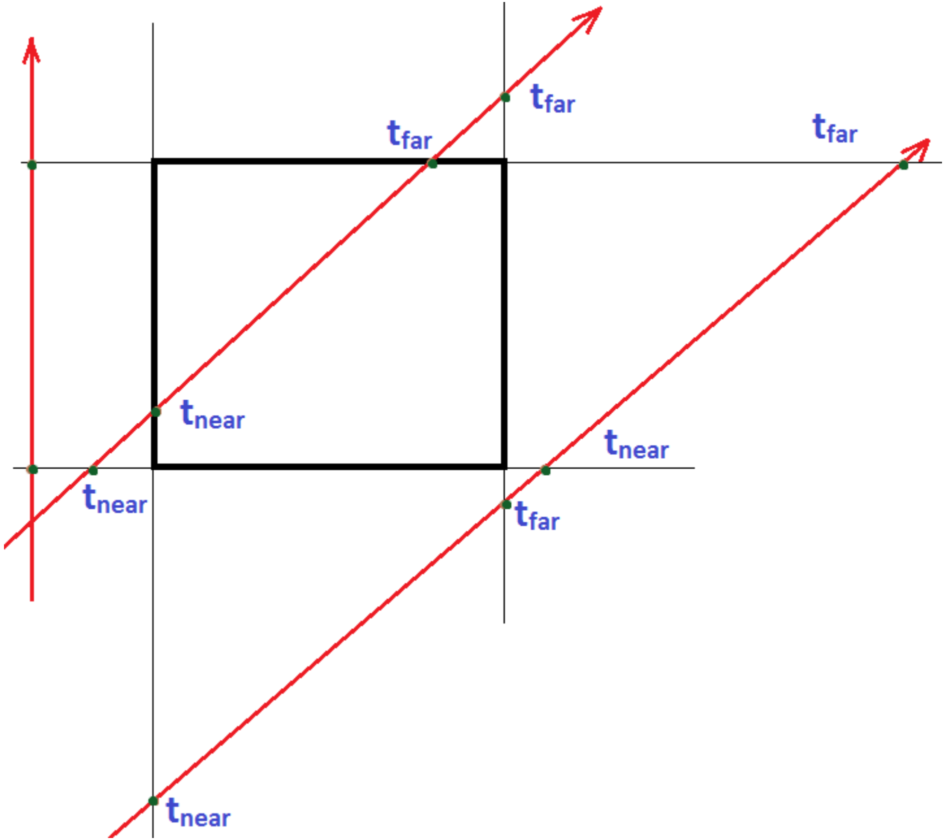
$$B_1 = (X_1, Y_1, Z_1), B_2 = (X_2, Y_2, Z_2)$$

- алгоритм

```
если Dx = 0 то
  если Ox < X1 или Ox > X2 то пересечений нет
иначе
  вычисляем пересечения:
  t0 = (X1 - Ox) / Dx, t1 = (X2 - Ox) / Dx
  если t0 > t1 то Swap(t0,t1)
  если t0 > tnear то установить tnear в t0
  если t1 < tfar то установить tfar в t1
  если tnear > tfar то луч проходит мимо
  если tfar < 0 то параллелепипед "сзади" луча
переход к следующей оси
ответ tnear
```



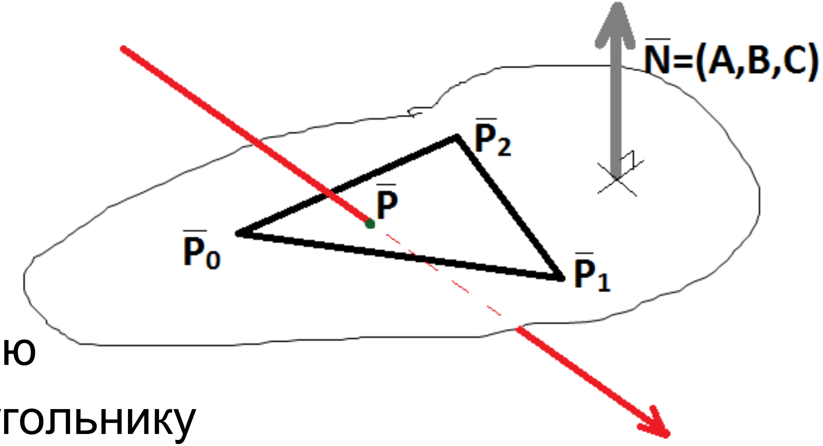
Параллелепипед



Треугольник

$$\vec{N} = (\vec{P}_1 - \vec{P}_0) \times (\vec{P}_2 - \vec{P}_0)$$

$$D = \vec{N} \cdot \vec{P}_0$$



- алгоритм:
  - ищем P – пересечение с плоскостью
  - проверяем принадлежность P треугольнику

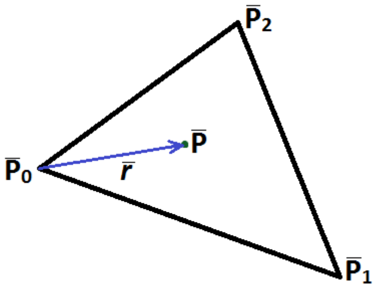
$$\vec{r} = \vec{P} - \vec{P}_0$$

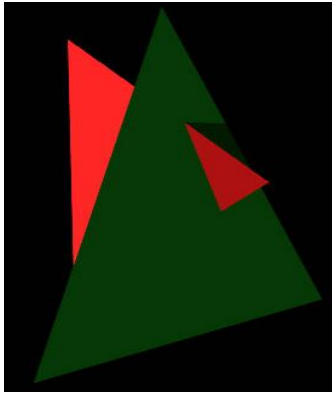
$$\vec{s}_1 = \vec{P}_1 - \vec{P}_0$$

$$\vec{s}_2 = \vec{P}_2 - \vec{P}_0$$

$$\vec{r} = \vec{s}_1 \cdot u + \vec{s}_2 \cdot v$$

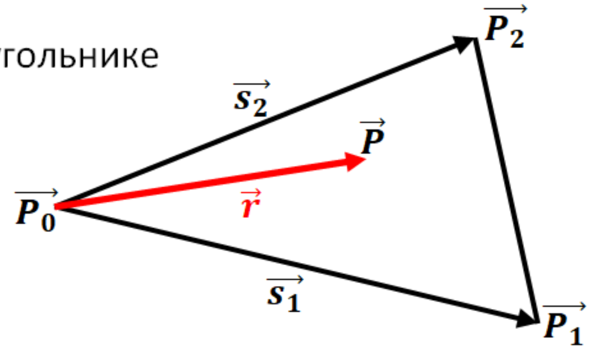
$$\text{если } u \ge 0 \text{ и } v \ge 0 \text{ и } (u+v) \le 1 \text{ то } P \in \Delta$$





Треугольник

Если $0 \le u \le 1$ и $0 \le v \le 1$ и $u + v \le 1$, то точка $\vec{P}$ лежит в треугольнике



$$u = \frac{u'}{|\overrightarrow{s_1}|}$$

$$u' = \frac{u''}{\cos\left(\overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_1'}\right)} = \frac{u''}{\frac{\left(\left(\overrightarrow{s_1} \cdot \overrightarrow{s_1'}\right)\right)}{|\overrightarrow{s_1}| \cdot \left|\overrightarrow{s_1'}\right|}}$$

здесь:

$$u'' = \frac{\vec{r} \cdot \overrightarrow{s_1'}}{\left|\overrightarrow{s_1'}\right|}$$

находим $\overrightarrow{s_1'}$ $[\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})]$:

$$\overrightarrow{s_1'} = \overrightarrow{s_2} \times (\overrightarrow{s_1} \times \overrightarrow{s_2}) = \overrightarrow{s_1} \cdot (\overrightarrow{s_2} \cdot \overrightarrow{s_2}) - \overrightarrow{s_2} \cdot (\overrightarrow{s_2} \cdot \overrightarrow{s_1})$$

Треугольник

$$u = \frac{u'}{|\overrightarrow{s_1}|} = \frac{\dfrac{\dfrac{u''}{\left(\left(\overrightarrow{s_1}\cdot\overrightarrow{s_1'}\right)\right)}}{|\overrightarrow{s_1}|\cdot\left|\overrightarrow{s_1'}\right|}}{|\overrightarrow{s_1}|} = \frac{u''\cdot|\overrightarrow{s_1}|\cdot\left|\overrightarrow{s_1'}\right|}{|\overrightarrow{s_1}|\cdot\left(\overrightarrow{s_1}\cdot\overrightarrow{s_1'}\right)} = \frac{u''\cdot\left|\overrightarrow{s_1'}\right|}{\left(\overrightarrow{s_1}\cdot\overrightarrow{s_1'}\right)}$$

$$u = \frac{u''\cdot\left|\overrightarrow{s_1'}\right|}{\left(\overrightarrow{s_1}\cdot\overrightarrow{s_1'}\right)} = \frac{\vec{r}\cdot\overrightarrow{s_1'}}{\left|\overrightarrow{s_1'}\right|}\cdot\frac{\left|\overrightarrow{s_1'}\right|}{\left(\overrightarrow{s_1}\cdot\overrightarrow{s_1'}\right)} = \frac{\vec{r}\cdot\overrightarrow{s_1'}}{\left(\overrightarrow{s_1}\cdot\overrightarrow{s_1'}\right)} =$$

$$= \frac{\left((\vec{r}\cdot\overrightarrow{s_1})\cdot(\overrightarrow{s_2}\cdot\overrightarrow{s_2}) - (\vec{r}\cdot\overrightarrow{s_2})\cdot(\overrightarrow{s_2}\cdot\overrightarrow{s_1})\right)}{(\overrightarrow{s_1}\cdot\overrightarrow{s_1})\cdot(\overrightarrow{s_2}\cdot\overrightarrow{s_2}) - (\overrightarrow{s_1}\cdot\overrightarrow{s_2})\cdot(\overrightarrow{s_2}\cdot\overrightarrow{s_1})} =$$

$$= \frac{\left((\vec{r}\cdot\overrightarrow{s_1})\cdot(\overrightarrow{s_2}\cdot\overrightarrow{s_2}) - (\vec{r}\cdot\overrightarrow{s_2})\cdot(\overrightarrow{s_2}\cdot\overrightarrow{s_1})\right)}{\overrightarrow{s_1}^2\cdot\overrightarrow{s_2}^2 - (\overrightarrow{s_1}\cdot\overrightarrow{s_2})^2}$$

Треугольник

$\vec{r} = \vec{P} - \overrightarrow{P_0}$:

$$u = \vec{P} \cdot \frac{\left(\overrightarrow{s_1} \cdot \overrightarrow{s_2}^2 - \overrightarrow{s_2} \cdot (\overrightarrow{s_1} \cdot \overrightarrow{s_2})\right)}{\overrightarrow{s_1}^2 \cdot \overrightarrow{s_2}^2 - (\overrightarrow{s_1} \cdot \overrightarrow{s_2})^2} - \overrightarrow{P_0} \cdot \frac{\left(\overrightarrow{s_1} \cdot \overrightarrow{s_2}^2 - \overrightarrow{s_2} \cdot (\overrightarrow{s_1} \cdot \overrightarrow{s_2})\right)}{\overrightarrow{s_1}^2 \cdot \overrightarrow{s_2}^2 - (\overrightarrow{s_1} \cdot \overrightarrow{s_2})^2}$$

или

$$u = \left(\vec{P} \cdot \overrightarrow{U_1}\right) - u_0$$

здесь:

$$u_0 = \left(\overrightarrow{P_0} \cdot \overrightarrow{U_1}\right), \overrightarrow{U_1} = \frac{\overrightarrow{s_1} \cdot \overrightarrow{s_2}^2 - \overrightarrow{s_2} \cdot (\overrightarrow{s_1} \cdot \overrightarrow{s_2})}{\overrightarrow{s_1}^2 \cdot \overrightarrow{s_2}^2 - (\overrightarrow{s_1} \cdot \overrightarrow{s_2})^2}$$

Аналогично:

$$v = \vec{P} \cdot \frac{\left(\overrightarrow{s_2} \cdot \overrightarrow{s_1}^2 - \overrightarrow{s_1} \cdot (\overrightarrow{s_1} \cdot \overrightarrow{s_2})\right)}{\overrightarrow{s_1}^2 \cdot \overrightarrow{s_2}^2 - (\overrightarrow{s_1} \cdot \overrightarrow{s_2})^2} - \overrightarrow{P_0} \cdot \frac{\left(\overrightarrow{s_2} \cdot \overrightarrow{s_1}^2 - \overrightarrow{s_2} \cdot (\overrightarrow{s_1} \cdot \overrightarrow{s_2})\right)}{\overrightarrow{s_1}^2 \cdot \overrightarrow{s_2}^2 - (\overrightarrow{s_1} \cdot \overrightarrow{s_2})^2}$$

$$v = \left(\vec{P} \cdot \overrightarrow{V_1}\right) - v_0$$

$$v_0 = \left(\overrightarrow{P_0} \cdot \overrightarrow{V_1}\right), \overrightarrow{V_1} = \frac{\overrightarrow{s_2} \cdot \overrightarrow{s_1}^2 - \overrightarrow{s_1} \cdot (\overrightarrow{s_1} \cdot \overrightarrow{s_2})}{\overrightarrow{s_1}^2 \cdot \overrightarrow{s_2}^2 - (\overrightarrow{s_1} \cdot \overrightarrow{s_2})^2}$$

Для поиска пересечения луча с треугольником необходимо хранить:
$\overrightarrow{\boldsymbol{N}}$, $\boldsymbol{D}$ – для уравнения плоскости;
$\overrightarrow{\boldsymbol{U_1}}, \boldsymbol{u_0}, \overrightarrow{\boldsymbol{V_1}}, \boldsymbol{v_0}$ – для поиска u и v.

Треугольник. Барицентрические координаты.

Выше получили: $\vec{r} = \vec{s_1} \cdot u + \vec{s_2} \cdot v$

Подставляем радиус-вектора точек:

$$\vec{P} - \vec{P_0} = (\vec{P_1} - \vec{P_0}) \cdot u + (\vec{P_2} - \vec{P_0}) \cdot v$$

Раскрываем и решаем относительно $\vec{P}$:

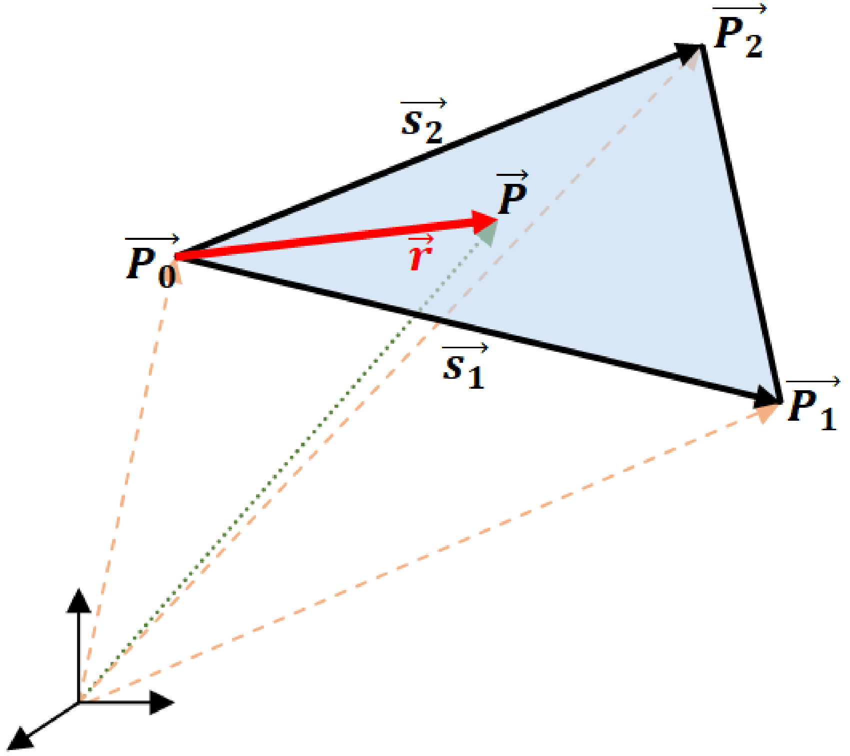
$$\vec{P} = \vec{P_0} + \vec{P_1} \cdot u - \vec{P_0} \cdot u + \vec{P_2} \cdot v - \vec{P_0} \cdot v$$

$$\vec{P} = \vec{P_0} \cdot (1 - u - v) + \vec{P_1} \cdot u + \vec{P_2} \cdot v$$

или

$$\vec{P} = \vec{P_0} \cdot w + \vec{P_1} \cdot u + \vec{P_2} \cdot v$$

(w, u, v) — барицентрические координаты

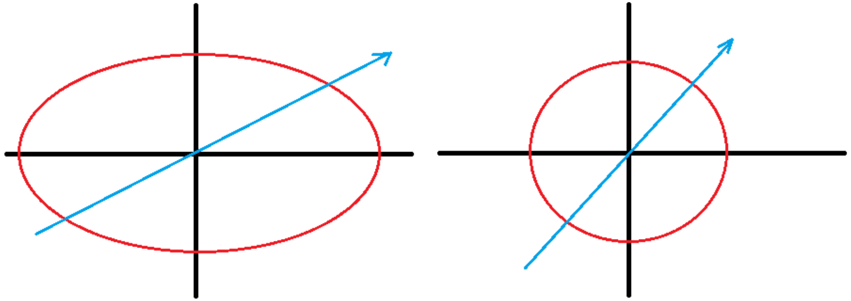


Пересечение с трансформированными объектами

- Луч:

$$\vec{P} = \vec{O} + \vec{D} \cdot t$$

- Точки объекта подвергаются преобразованию M

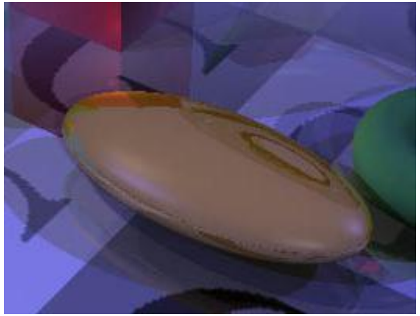


- Луч преобразуется:

$$\vec{P}' = \vec{O}' + \vec{D}' \cdot t$$

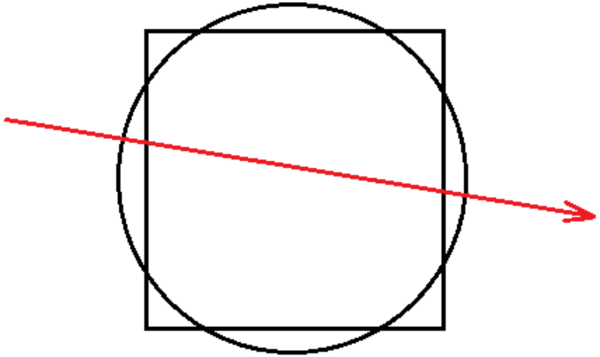
$$\vec{O}' = \vec{O} \cdot \mathbf{M}^{-1}$$

$$\vec{D}' = Normalize(\vec{D} \cdot \mathbf{M}_{3x3}^{-1})$$



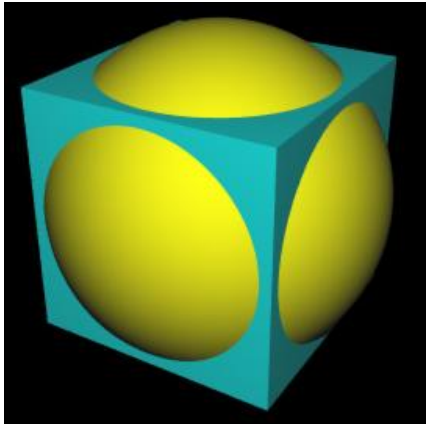
- Ищем пересечение (*t*)
- Найденное *t* сокращаем на длину вектора

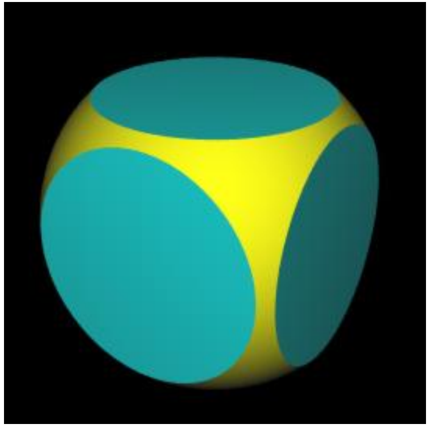
$$\vec{D} \cdot \mathbf{M}_{3x3}^{-1}$$

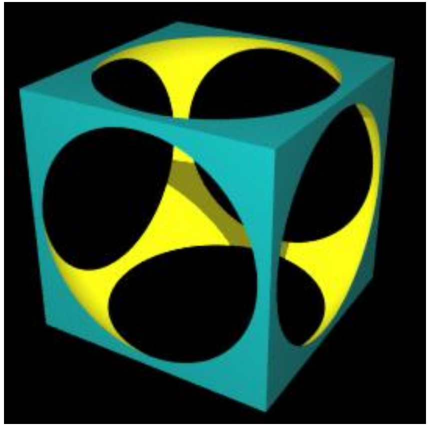


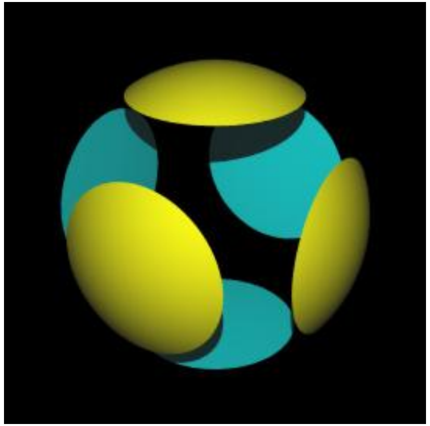
Необходим поиск ВСЕХ пересечений объекта с лучом

- пример:
  - пересечение:
    - остаются все пересечения, принадлежащие внутренности второго объекта, из получившегося списка берем ближайшее

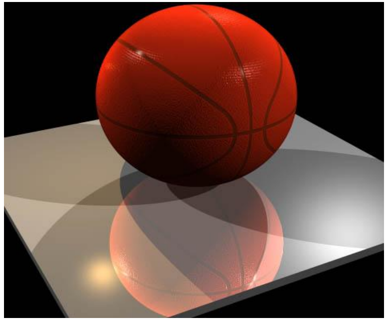


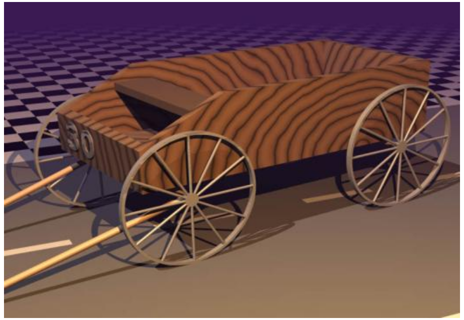


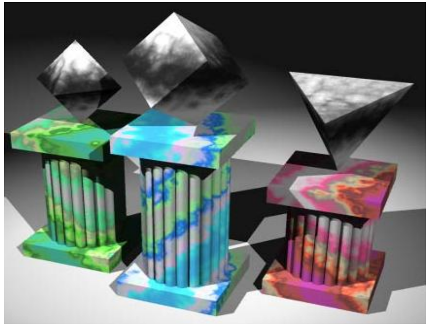


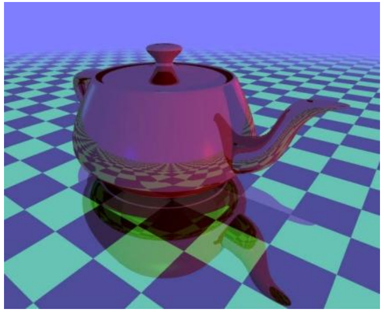


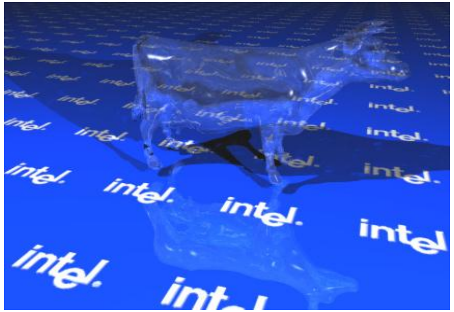
- Bound (box, sphere, ...)
- Регулярные воксельные сетки
- Воксельные деревья



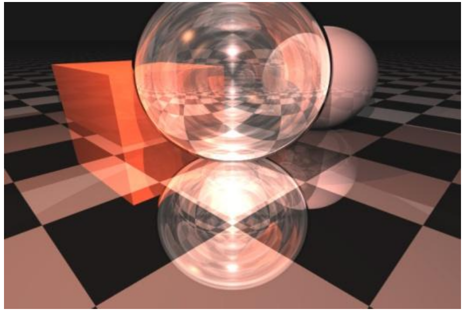


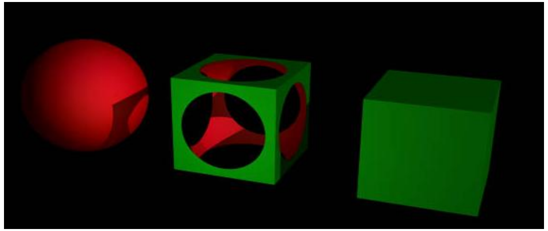


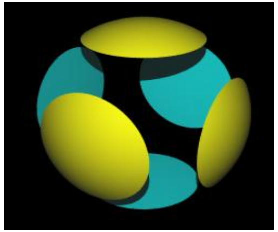




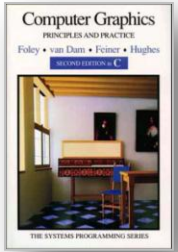
intel.



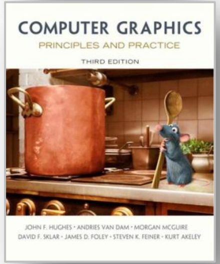




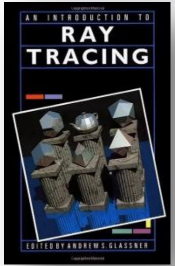
Литература



James D.Foley, Andries van Dam, Steven K. Feiner, John Hughes, ***«Computer Graphics: Principles and Practice in C (2nd ed.)»***, Addison-Wesley, 1995



Andries van Dam, David F. Sklar, James D. Foley, John F. Hughes, Kurt Akeley, Morgan McGuire, Steven K. Feiner, ***«Computer Graphics: Principles and Practice, 3rd Edition»***, Addison-Wesley Professional, 2013



Andrew S. Glassner (ed.), Eric Haines, Pat Hanrahan, Robert L. Cook, James Arvo, David Kirk, Paul S. Heckbert, ***«An Introduction to Ray Tracing (The Morgan Kaufmann Series in Computer Graphics)»***, Academic Press, 1989.

Е.В.Шикин, А.В.Боресков. ***«Компьютерная графика. Динамика, реалистические изображения»***. М.: Диалог-МИФИ, 1995.

В.П.Иванов, А.С.Батраков. ***«Трехмерная компьютерная графика»***. Москва: Радио и связь, 1995.