Математика в компьютерной графике

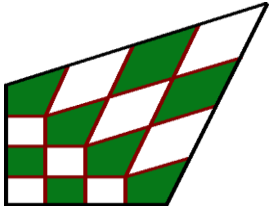
материалы занятий: https://compsciclub.ru/courses/graphics2018/2018-autumn/classes/
дублируются на сайте: http://www.school30.spb.ru/cgsg/cgc2018/

Базовые понятия

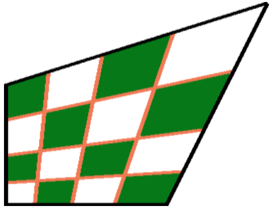
- свободные векторы, радиус векторы, операции с векторами, скалярное и векторное произведение векторов (vector dot & cross production)
- базис, координаты, декартова система координат
- матрицы, операции с матрицами, обращение матриц

Преобразования (transformations)

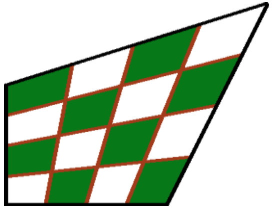
- Аффинные



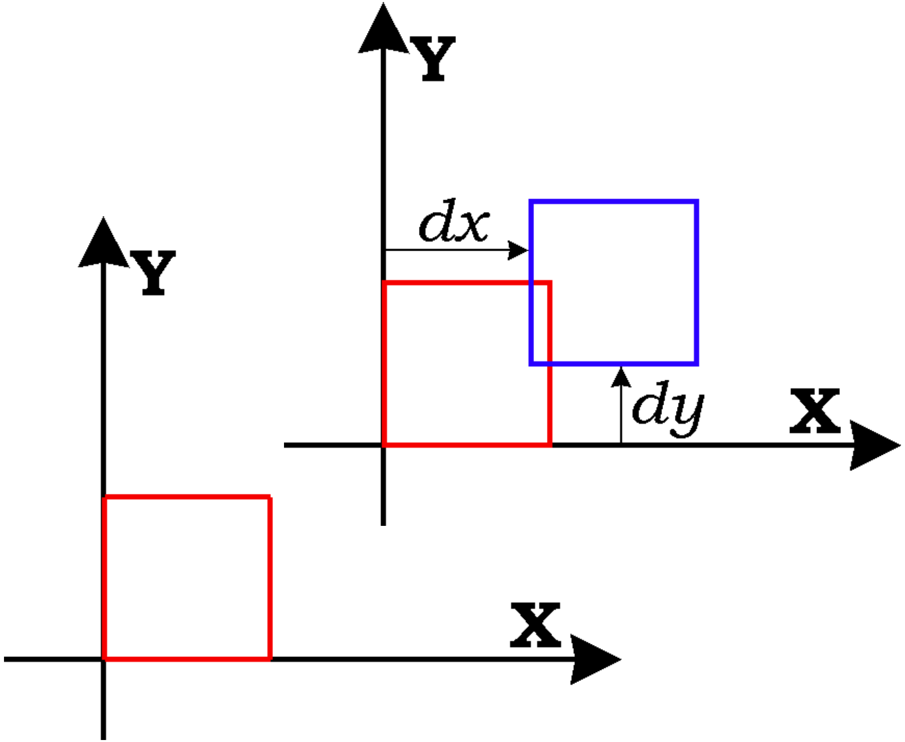
- Перспективные



- Билинейные

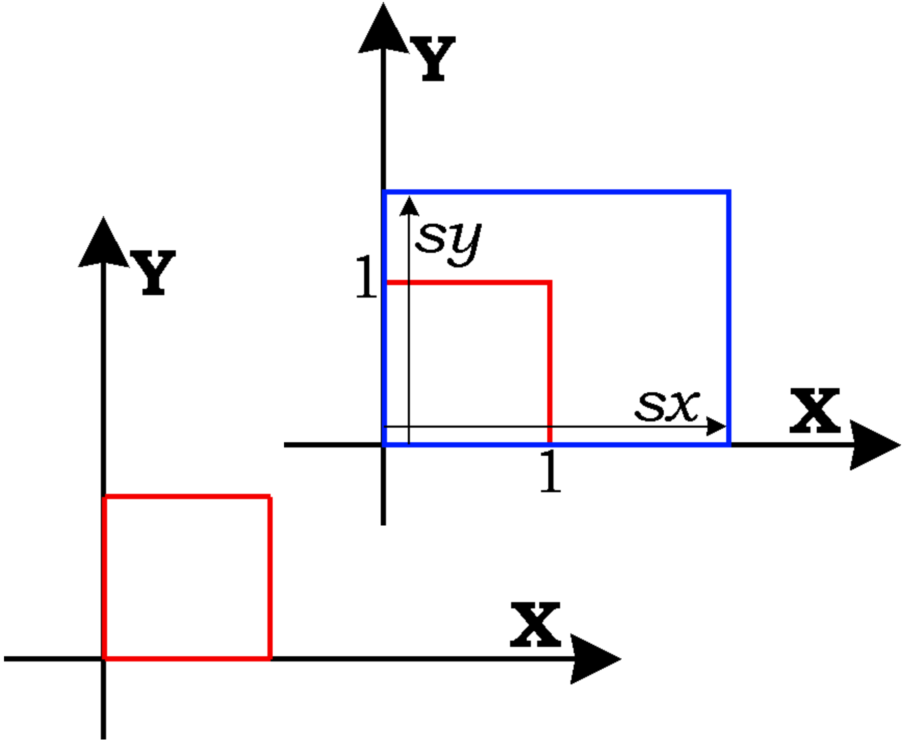


- *Параллельный перенос (translation)*



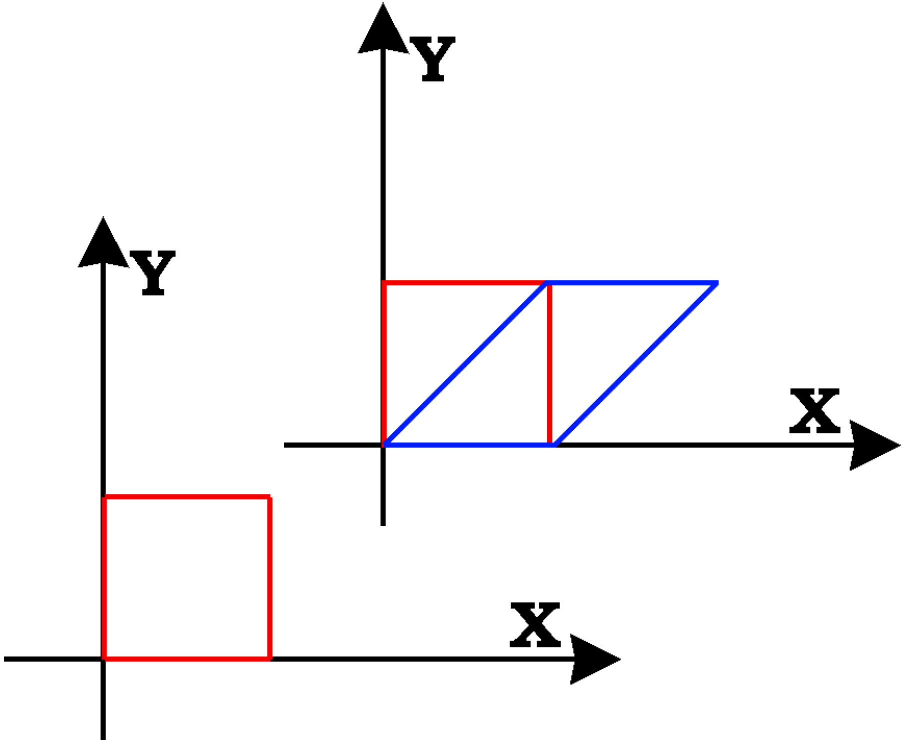
$$\begin{cases} x' = x + dx \\ y' = y + dy \end{cases}$$

- *Масштабирование (scaling)*

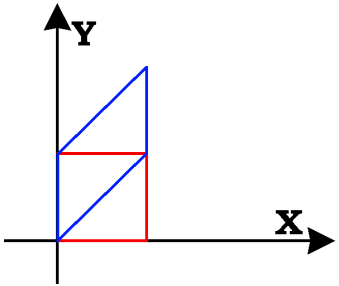


$$\begin{cases} x' = x \cdot sx \\ y' = y \cdot sy \end{cases}$$

- *Сдвиг (shearing)*

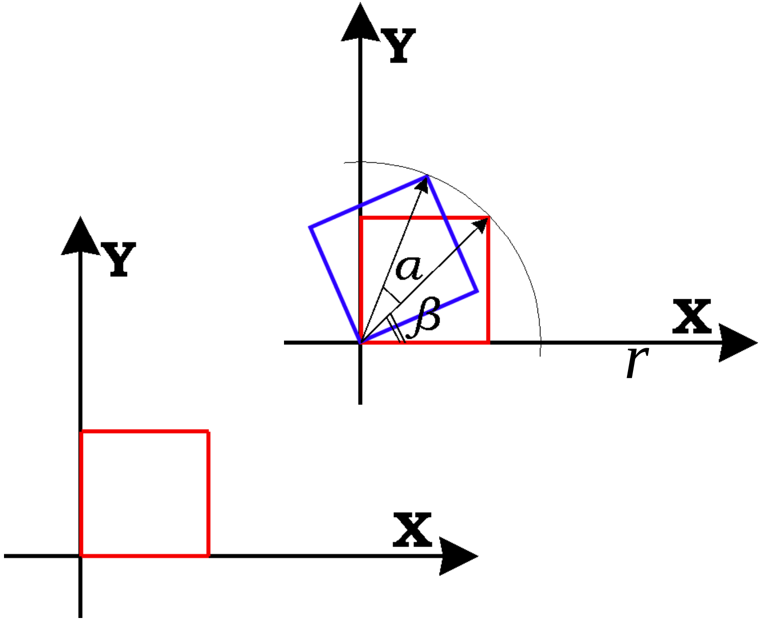


$$\begin{cases} x' = x + y \cdot sh_x \\ y' = y \end{cases}$$



$$\begin{cases} x' = x \\ y' = x \cdot sh_y + y \end{cases}$$

- *Поворот относительно начала координат (rotation)*



$$\begin{cases} x = r\cdot\cos(\beta) \\ y = r\cdot\sin(\beta) \end{cases}, \begin{cases} x' = r\cdot\cos(\alpha+\beta) \\ y' = r\cdot\sin(\alpha+\beta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = \underline{r}\cdot\cos(\alpha)\cdot\underline{\cos(\beta)} - \underline{r}\cdot\sin(\alpha)\cdot\underline{\sin(\beta)} \\ y' = \underline{r}\cdot\cos(\alpha)\cdot\underline{\sin(\beta)} + \underline{r}\cdot\sin(\alpha)\cdot\underline{\cos(\beta)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x\cdot\cos(\alpha) - y\cdot\sin(\alpha) \\ y' = x\cdot\sin(\alpha) + y\cdot\cos(\alpha) \end{cases}$$

- Перепишем в матричном виде общую запись аффинных преобразований:

$$\begin{cases} x' = x \cdot a + y \cdot b + l \\ y' = x \cdot c + y \cdot d + m \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l & m \end{pmatrix}$$

Однородные координаты (homogeneous coordinates)

- представим координаты на плоскости (2D) трехкомпонентной вектор-строкой:

$$(x, y) = \begin{pmatrix} X/w & Y/w & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Y & w \end{pmatrix}$$

- будем полагать $w = 1$

$$(x, y) = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix}$$

- перепишем преобразование в общем виде:

$$\begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ l & m & 1 \end{pmatrix}$$

Матричный вид аффинных преобразований

~ translation

$$T(dx,dy)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\dx&dy&1\end{pmatrix}$$

~ scaling

$$S(sx,sy)=\begin{pmatrix}sx&0&0\\0&sy&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

~ shear by x

$$Shx(sh_x)=\begin{pmatrix}1&0&0\\sh_x&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

~ rotation

$$R(\alpha)=\begin{pmatrix}\cos\alpha&\sin\alpha&0\\-\sin\alpha&\cos\alpha&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

~ shear by y

$$Shy(sh_y)=\begin{pmatrix}1&sh_y&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Композиция преобразований

- подвергнем точку последовательным преобразованиям системы координат:

$$\begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \cdot M_1$$
$$\begin{pmatrix} x'' & y'' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} \cdot M_2$$
$$\begin{pmatrix} x''' & y''' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'' & y'' & 1 \end{pmatrix} \cdot M_3$$

- перепишем:

$$\begin{pmatrix} x''' & y''' & 1 \end{pmatrix} = \left(\left(\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \cdot M_1 \right) \cdot M_2 \right) \cdot M_3$$

- в силу ассоциативности:

$$\begin{pmatrix} x''' & y''' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \cdot (M_1 \cdot M_2 \cdot M_3)$$
$$\begin{pmatrix} x''' & y''' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \cdot M_{transform}$$

Обратные аффинные преобразования

$$\begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \cdot M_{transform}$$

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} \cdot M_{transform}^{-1}$$

$$M_{transform} = \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ l & m & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{transform}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -c & 0 \\ -b & a & 0 \\ bm - ld & lc - am & ad - bc \end{pmatrix}$$

Преобразование точек, векторов и нормалей

- точка (радиус-вектор) (*p*):

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix}$$

- вектор (*v*) и нормаль (*n*) (только направление):

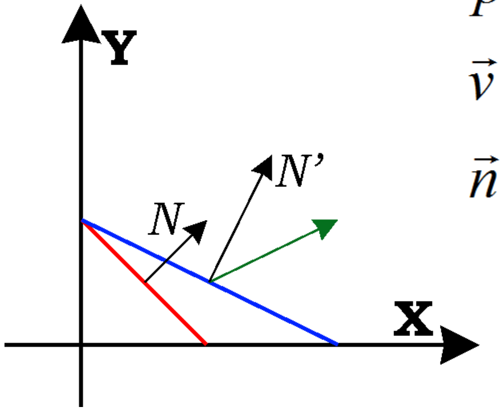
$$\begin{pmatrix} x & y & 0 \end{pmatrix}$$

- преобразования:

$$\vec{p}' = \vec{p} \cdot M_{transform} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \cdot M_{transform}$$

$$\vec{v} = \vec{v} \cdot M_{transform} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' & y' & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & 0 \end{pmatrix} \cdot M_{transform}$$

$$\vec{n} = \vec{n} \cdot Q_{transform} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' & y' & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & 0 \end{pmatrix} \cdot Q_{transform}$$



$$\vec{n}' = \vec{n} \cdot Q_{transform} \qquad \vec{v}' = \vec{v} \cdot M_{transform}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \qquad \vec{n}' \cdot \vec{v}' = 0 \\ \left(\vec{n} \cdot Q_{transform}\right) \cdot \left(\vec{v} \cdot M_{transform}\right) = 0 \end{array}}$$

$$\vec{n} = (A, B) \quad \vec{v} = (x, y)$$

$$\begin{pmatrix} A & B & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y & 0 \end{pmatrix}^T = 0$$

$$(\begin{pmatrix} A & B & 0 \end{pmatrix} \cdot Q_{transform}) \cdot (\begin{pmatrix} x & y & 0 \end{pmatrix} \cdot M_{transform})^T = 0$$

$$\begin{pmatrix} A & B & 0 \end{pmatrix} \cdot (Q_{transform} \cdot M^T_{transform}) \cdot \begin{pmatrix} x & y & 0 \end{pmatrix}^T = 0$$

$$Q_{transform} \cdot M^T_{transform} = E \Rightarrow \boxed{Q_{transform} = {M^{-1}_{transform}}^T}$$

Нотации записи: столбец или строка

Одно преобразование:

$$\begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ l & m & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & l \\ c & d & m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Композиция преобразований:

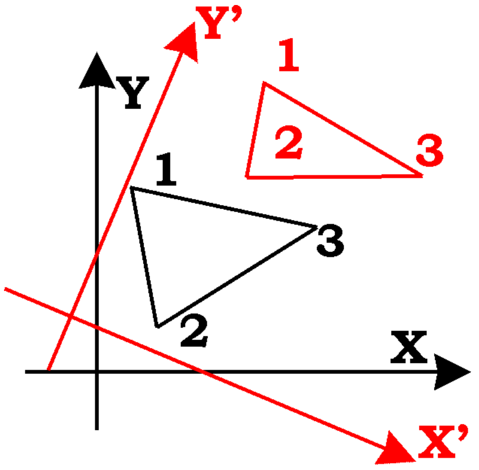
$$\begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \cdot (M_1 \cdot M_2 \cdot M_3)$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = (M_3 \cdot M_2 \cdot M_1) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Пример: привязка систем координат

- заданы точки соответствия

$$\begin{pmatrix} x_0 & y_0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x'_0 & y'_0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x'_1 & y'_1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x_2 & y_2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x'_2 & y'_2 \end{pmatrix}$$



- найти «матрицу перехода»

$$P = P' \cdot M, \quad M = ?$$

Пример: привязка систем координат

$$\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_0 & y'_0 & 1 \\ x'_1 & y'_1 & 1 \\ x'_2 & y'_2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ l & m & 1 \end{pmatrix}$$

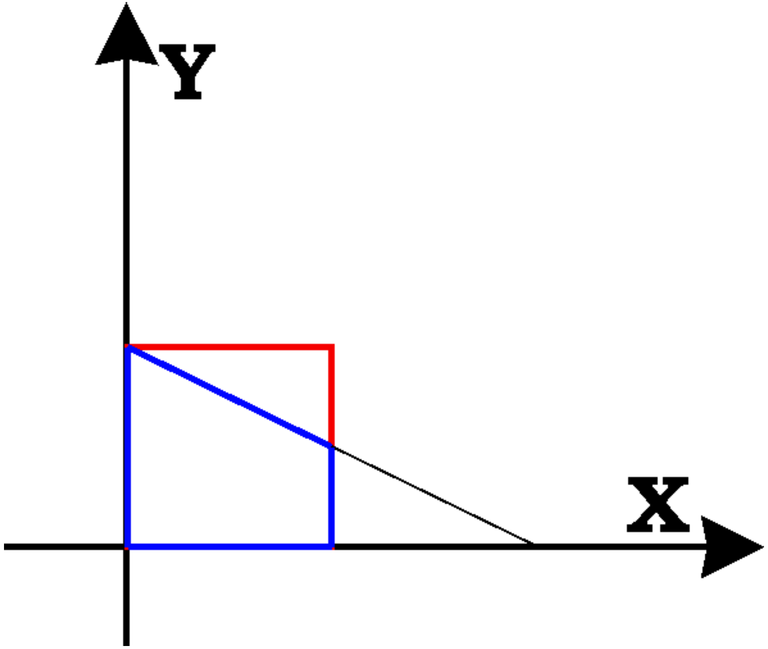
$$G = G' \cdot M$$

$$\begin{pmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ l & m & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det G'} \cdot \begin{pmatrix} y'_1 - y'_2 & y'_2 - y'_0 & y'_0 - y'_1 \\ x'_2 - x'_1 & x'_0 - x'_2 & x'_1 - x'_0 \\ x'_1 y'_2 - x'_2 y'_1 & x'_2 y'_0 - x'_0 y'_2 & x'_2 y'_1 - x'_1 y'_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{здесь}: \ \det G' = x'_0 \cdot (y'_1 - y'_2) - y'_0 \cdot (x'_1 - x'_2) + (x'_1 y'_2 - x'_2 y'_1)$$

Перспективные преобразования

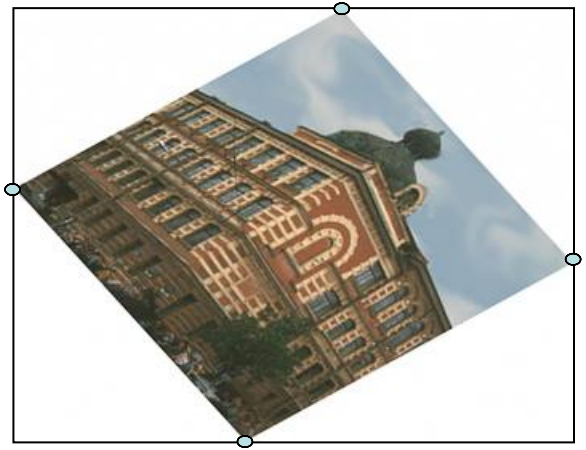
$$\begin{pmatrix} a & c & p \\ b & d & q \\ l & m & 1 \end{pmatrix}$$



Пример: преобразование изображений

=> Прямое отображение (direct mapping) =>

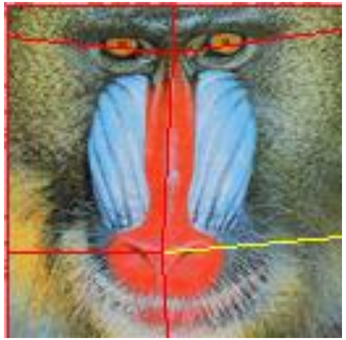
Поворот и масштабирование

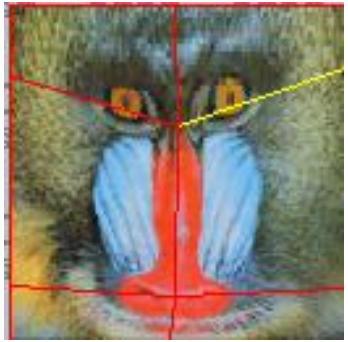


<= Обратное отображение (inverse mapping) <=

Пример: warping (1)

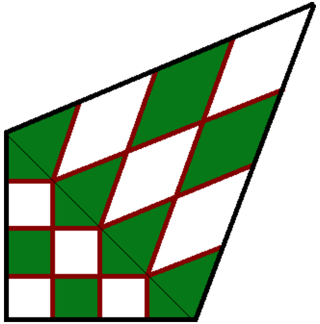
- Регулярная сетка для областей соответствия



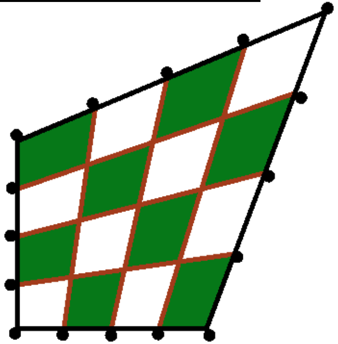


Пример: warping (2)

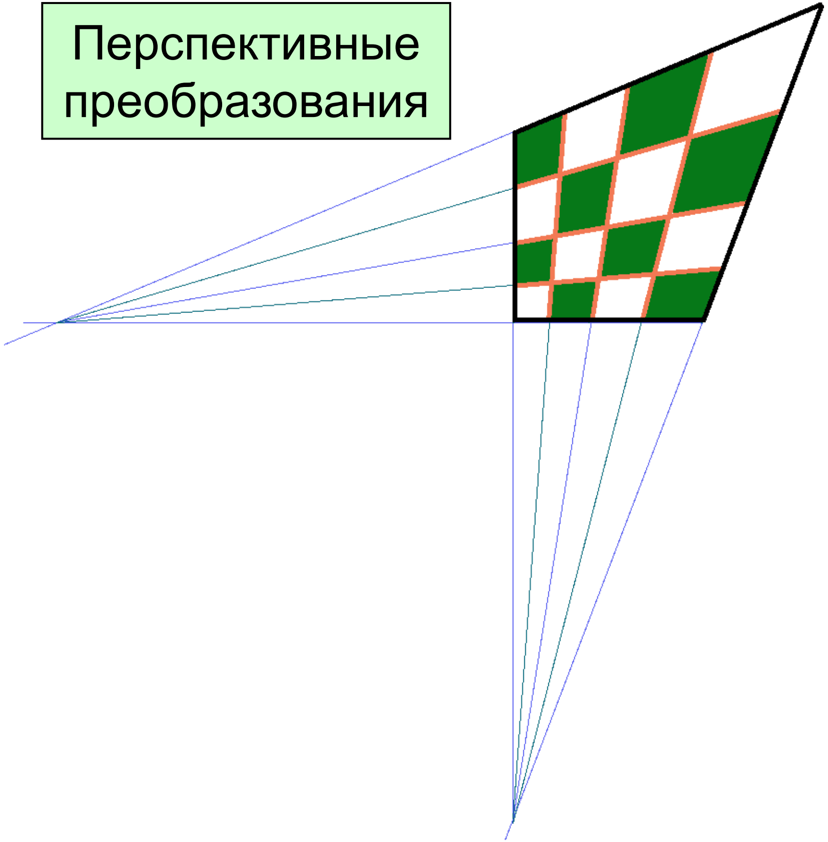
Аффинные преобразования



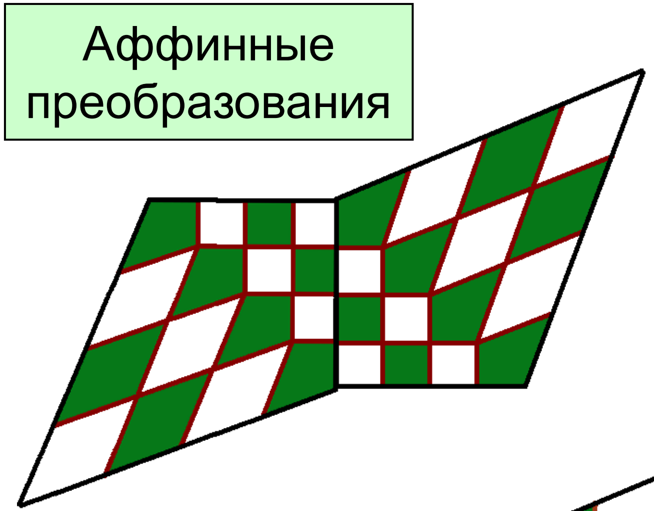
Билинейные преобразования

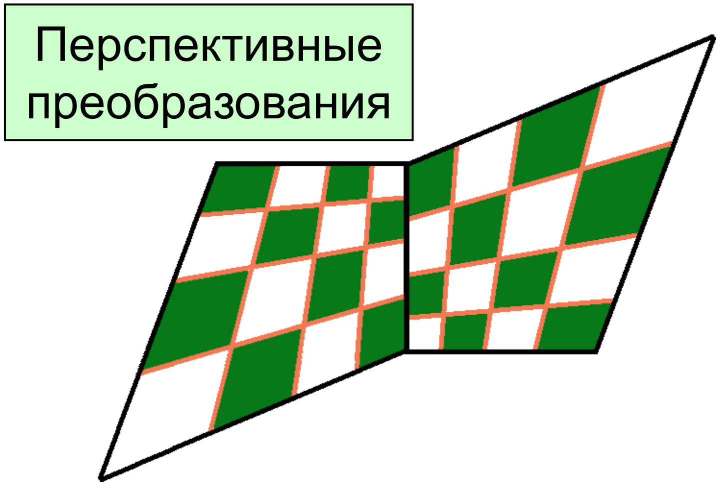


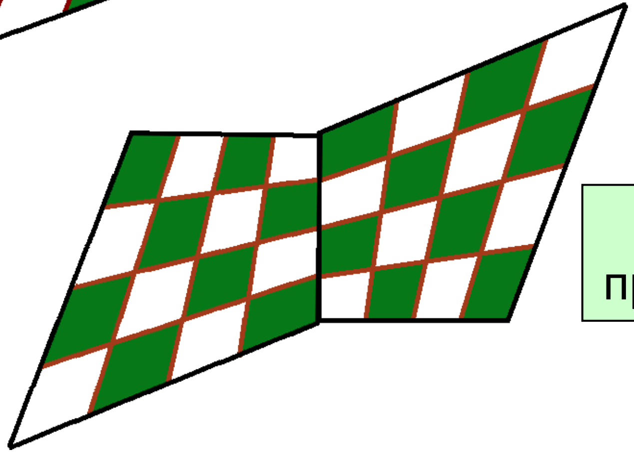
Перспективные преобразования



Пример: warping (3)

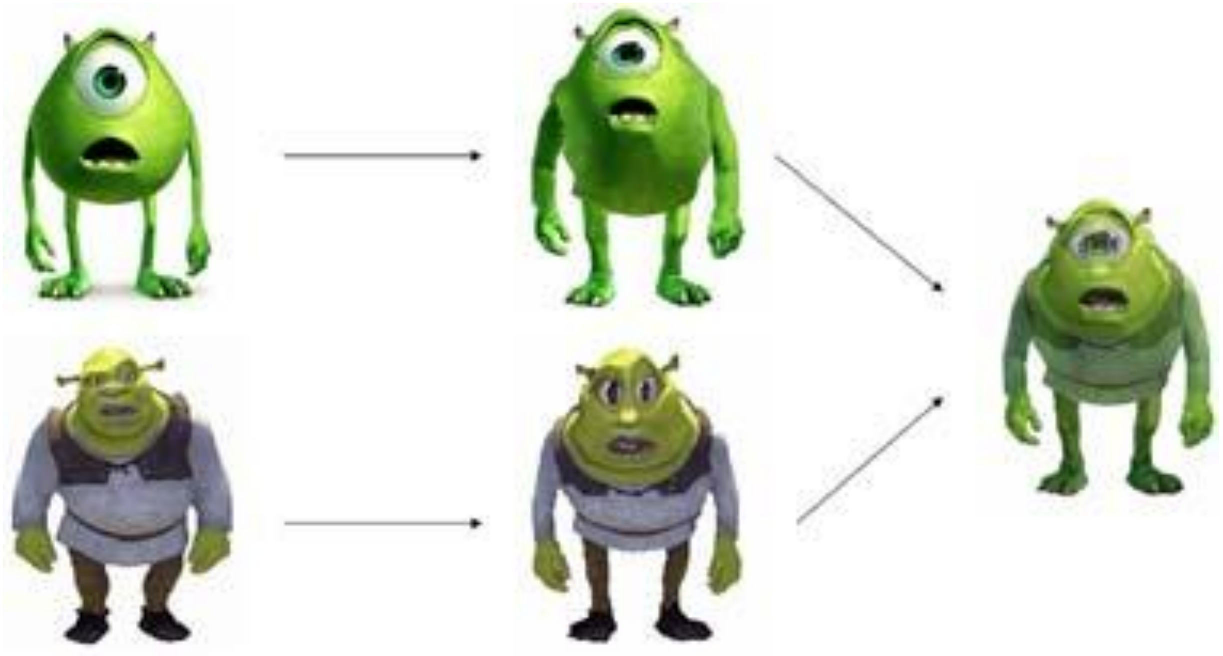






Пример: morphing

morphing = warping + интерполяция цвета



Аффинные преобразования в пространстве

- Аналогично случаю 2D вводим однородные координаты:

$$(x, y, z) = \begin{pmatrix} X/w & Y/w & Z/w & 1 \end{pmatrix}$$

- и преобразования в общем случае:

$$\begin{pmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 1 \end{pmatrix}$$

Матрицы 3D преобразований (перенос, масштаб)

~ translation

$$T(dx, dy, dz) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ dx & dy & dz & 1 \end{pmatrix}$$

~ scaling

$$S(sx, sy, sz) = \begin{pmatrix} sx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & sz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрицы 3D преобразований (поворот вокруг осей)

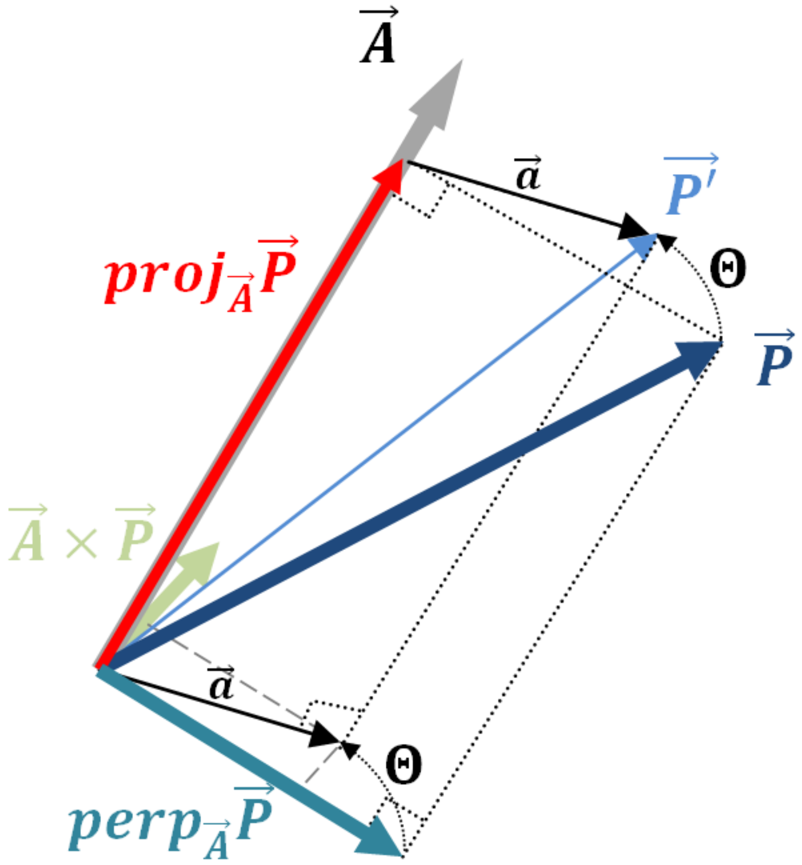
~ rotation

$$Rz(\alpha)=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0\\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$Rx(\alpha)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0\\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$Ry(\alpha)=\begin{pmatrix}\cos\alpha & 0 & -\sin\alpha & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Поворот вектора вокруг произвольной оси



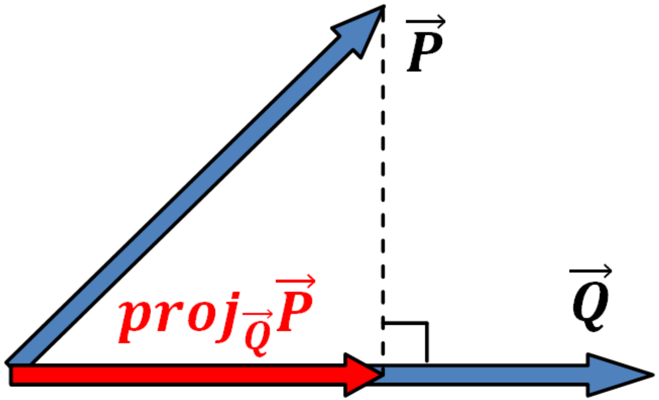
$$\vec{P'} = Rotate_{\vec{A}(a_x,a_y,a_z)}(\theta) \cdot \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

Проецирование

$$proj_{\vec{Q}}\vec{P} = \frac{(\vec{P}\cdot\vec{Q})}{\|\vec{Q}\|}\cdot\frac{\vec{Q}}{\|\vec{Q}\|} = \frac{1}{\|\vec{Q}\|^2}\cdot(p_xq_x + p_yq_y + p_zq_z)\cdot\begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\|\vec{Q}\|^2}\cdot\begin{pmatrix} p_xq_xq_x + p_yq_yq_x + p_zq_zq_x \\ p_xq_xq_y + p_yq_yq_y + p_zq_zq_y \\ p_xq_xq_z + p_yq_yq_z + p_zq_zq_z \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\|\vec{Q}\|^2}\cdot\begin{pmatrix} q_x^2 & q_yq_x & q_zq_x \\ q_xq_y & q_y^2 & q_zq_y \\ q_xq_z & q_yq_z & q_z^2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

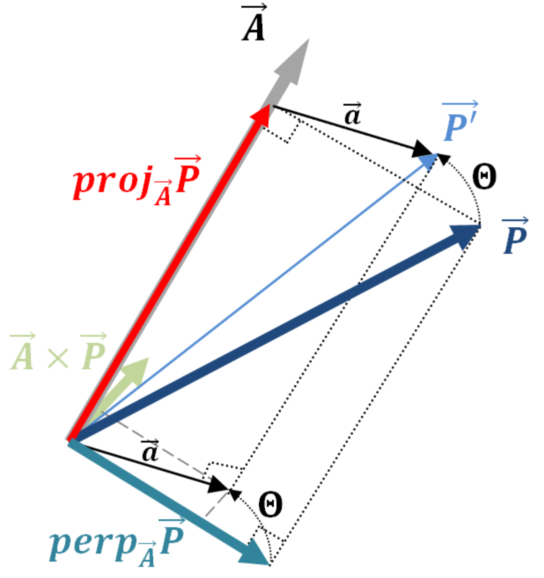


Векторное произведение

$$\vec{P} \times \vec{Q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p_x & p_y & p_z \\ q_x & q_y & q_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} p_y q_z - p_z q_y \\ p_z q_x - p_x q_z \\ p_x q_y - p_y q_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & q_z & -q_y \\ -q_z & 0 & q_x \\ q_y & -q_x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

Поворот вектора вокруг произвольной оси

] $\vec{A}$ — единичный вектор, вокруг которого вращаем вектор $\vec{P}$ на угол θ



$$\vec{P} = proj_{\vec{A}}\vec{P} + perp_{\vec{A}}\vec{P}$$

$$\begin{aligned}\vec{P'} &= proj_{\vec{A}}\vec{P} + (\vec{A} \times \vec{P}) \cdot \sin\theta + perp_{\vec{A}}\vec{P} \cdot \cos\theta \\ &= proj_{\vec{A}}\vec{P} + (\vec{A} \times \vec{P}) \cdot \sin\theta + (\vec{P} - proj_{\vec{A}}\vec{P}) \cdot \cos\theta \\ &= \vec{P} \cdot \cos\theta + proj_{\vec{A}}\vec{P} \cdot (1 - \cos\theta) + (\vec{A} \times \vec{P}) \cdot \sin\theta\end{aligned}$$

Поворот вектора вокруг произвольной оси

$$\vec{P}\cdot \cos\theta + proj_{\vec{A}}\vec{P}\cdot(1-\cos\theta) + (\vec{A}\times\vec{P})\cdot \sin\theta =$$

$$\left(\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot \cos\theta\right)\cdot\begin{pmatrix}p_x\\ p_y\\ p_z\end{pmatrix}+$$

$$\left(\frac{1}{\|\vec{A}\|^2}\cdot\begin{pmatrix}a_x^2 & a_y a_x & a_z a_x\\ a_x a_y & a_y^2 & a_z a_y\\ a_x a_z & a_y a_z & a_z^2\end{pmatrix}\cdot(1-\cos\theta)\right)\cdot\begin{pmatrix}p_x\\ p_y\\ p_z\end{pmatrix}+$$

$$+\left(\begin{pmatrix}0 & -a_z & a_y\\ a_z & 0 & -a_x\\ -a_y & a_x & 0\end{pmatrix}\cdot \sin\theta\right)\cdot\begin{pmatrix}p_x\\ p_y\\ p_z\end{pmatrix}$$

вычислим матрицу перед $\vec{P}$ ($\|\vec{A}\| = 1$):

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} a_x^2\cdot(1-\cos\theta) & a_y a_x\cdot(1-\cos\theta) & a_z a_x\cdot(1-\cos\theta) \\ a_x a_y\cdot(1-\cos\theta) & a_y^2\cdot(1-\cos\theta) & a_z a_y\cdot(1-\cos\theta) \\ a_x a_z\cdot(1-\cos\theta) & a_y a_z\cdot(1-\cos\theta) & a_z^2\cdot(1-\cos\theta) \end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} 0 & -a_z\cdot\sin\theta & a_y\cdot\sin\theta \\ a_z\cdot\sin\theta & 0 & -a_x\cdot\sin\theta \\ -a_y\cdot\sin\theta & a_x\cdot\sin\theta & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta + a_x^2\cdot(1-\cos\theta) & a_y a_x\cdot(1-\cos\theta) - a_z\cdot\sin\theta & a_z a_x\cdot(1-\cos\theta) + a_y\cdot\sin\theta \\ a_x a_y\cdot(1-\cos\theta) + a_z\cdot\sin\theta & \cos\theta + a_y^2\cdot(1-\cos\theta) & a_z a_y\cdot(1-\cos\theta) - a_x\cdot\sin\theta \\ a_x a_z\cdot(1-\cos\theta) - a_y\cdot\sin\theta & a_y a_z\cdot(1-\cos\theta) + a_x\cdot\sin\theta & \cos\theta + a_z^2\cdot(1-\cos\theta) \end{pmatrix}$$

Поворот вектора вокруг произвольной оси

Итоговая матрица поворота:

$$\boldsymbol{Rotate}_{\vec{A}(a_x,a_y,a_z)}(\theta) = \begin{pmatrix} c + a_x^2(1-c) & a_y a_x(1-c) - a_z s & a_z a_x(1-c) + a_y s \\ a_x a_y(1-c) + a_z s & c + a_y^2(1-c) & a_z a_y(1-c) - a_x s \\ a_x a_z(1-c) - a_y s & a_y a_z(1-c) + a_x s & c + a_z^2(1-c) \end{pmatrix}$$

здесь $c = \cos\theta$ и $s = \sin\theta$.

Это для нотации вектор-столбцов — $\vec{P} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \Longrightarrow \vec{P}' = \boldsymbol{Rotate}_{\vec{A}(a_x,a_y,a_z)}(\theta) \cdot \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$.

Для нотации вектор-строк — $\vec{P} = (p_x \quad p_y \quad p_z)$ — матрица транспонируется:

$$\boldsymbol{Rotate'}_{\vec{A}(a_x,a_y,a_z)}(\theta) = \begin{pmatrix} c + a_x^2(1-c) & a_x a_y(1-c) + a_z s & a_x a_z(1-c) - a_y s \\ a_y a_x(1-c) - a_z s & c + a_y^2(1-c) & a_y a_z(1-c) + a_x s \\ a_z a_x(1-c) + a_y s & a_z a_y(1-c) - a_x s & c + a_z^2(1-c) \end{pmatrix}$$

$$\vec{P}' = (p_x \quad p_y \quad p_z) \cdot \boldsymbol{Rotate}_{\vec{A}(a_x,a_y,a_z)}(\theta)$$

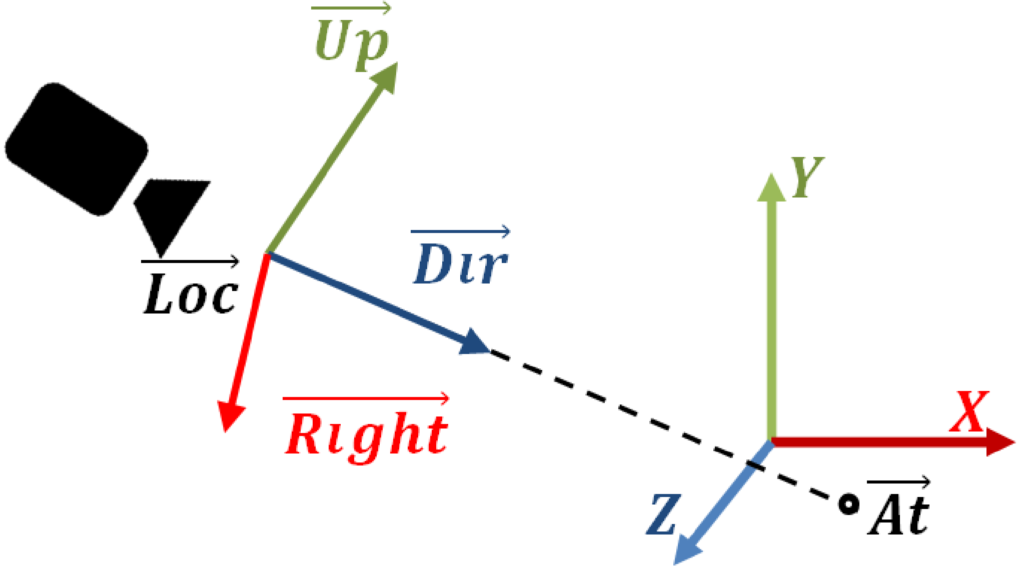
~ rotation

Построение матрицы камеры (видового преобразования)

$$\overrightarrow{Loc} \text{ — позиция,}$$

$$\overrightarrow{Right}, \overrightarrow{Up}, \overrightarrow{Dir} \text{ — ортонормированный базис}$$

$$\left(\overrightarrow{Dir} = \frac{\overrightarrow{At} - \overrightarrow{Loc}}{\left\| \overrightarrow{At} - \overrightarrow{Loc} \right\|} \right)$$



Построение матрицы камеры

Будем искать преобразования как комбинацию параллельного переноса и поворота:

$M = M_{translation} \cdot M_{rotation}$

параллельный перенос – матрица $M_{translation}$:

$$M_{translation} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -L_x & -L_y & -L_z & 1 \end{pmatrix}$$

поворот - матрица $M_{rotation}$:

$$(Rx\ Ry\ Rz\ 0) \cdot M_{rotation} = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$
$$(Ux\ Uy\ Uz\ 0) \cdot M_{rotation} = (0 \quad 1 \quad 0 \quad 0)$$
$$(Dx\ Dy\ Dz\ 0) \cdot M_{rotation} = (0 \quad 0 \quad -1 \quad 0)$$

перепишем в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} Rx & Ry & Rz & 0 \\ Ux & Uy & Uz & 0 \\ Dx & Dy & Dz & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ? & ? & ? & 0 \\ ? & ? & ? & 0 \\ ? & ? & ? & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Построение матрицы камеры

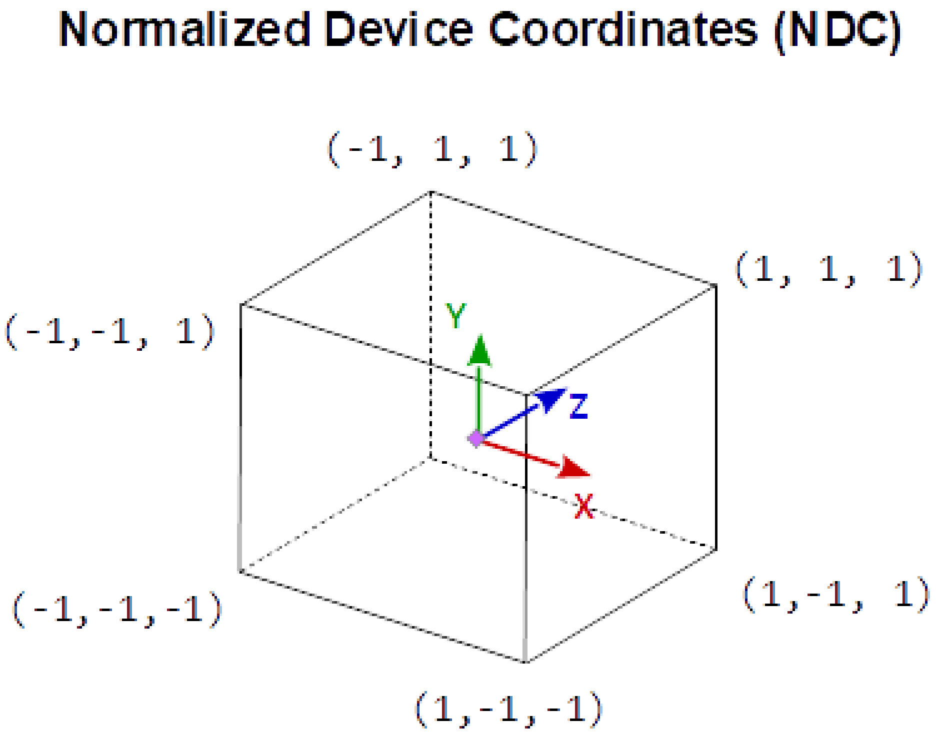
$$\begin{pmatrix} Rx & Ry & Rz & 0 \\ Ux & Uy & Uz & 0 \\ Dx & Dy & Dz & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Rx & Ux & -Dx & 0 \\ Ry & Uy & -Dy & 0 \\ Rz & Uz & -Dz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Итог:

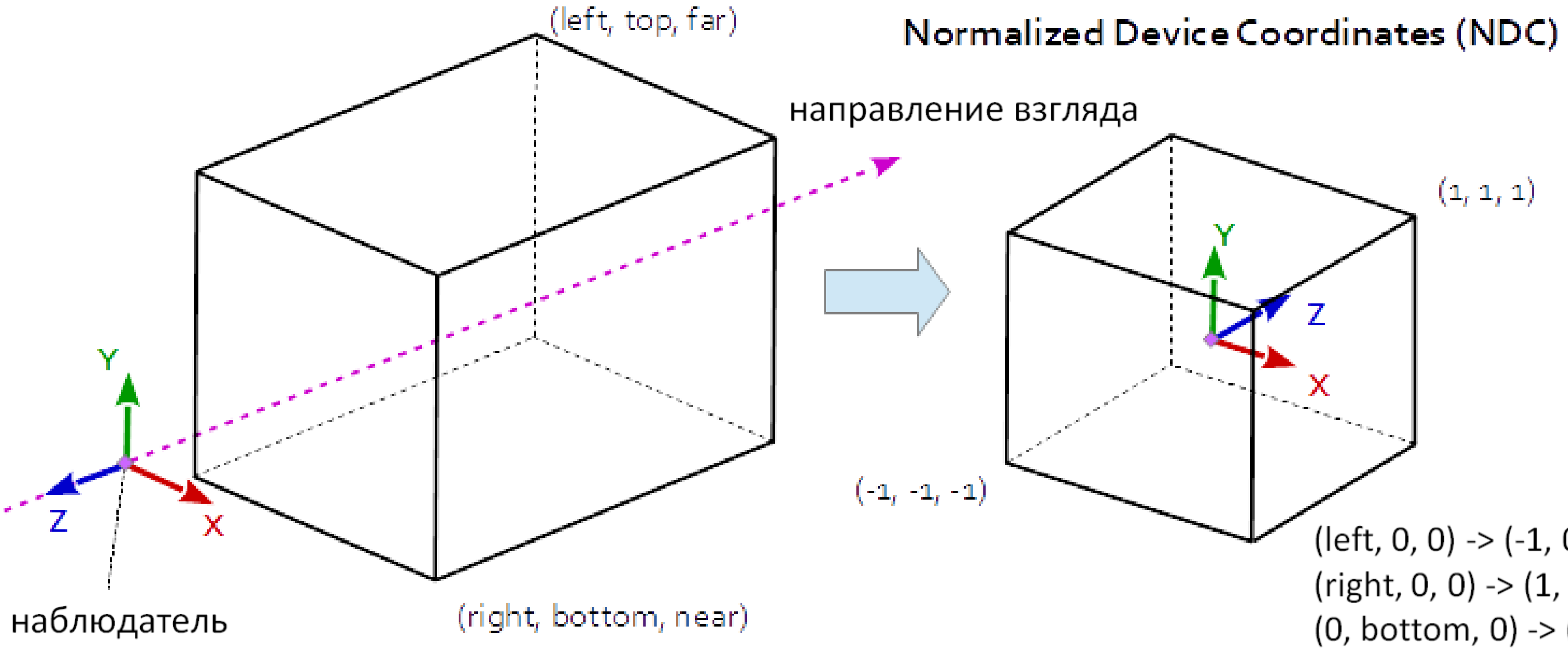
$$M_{translation} \cdot M_{rotation} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -L_x & -L_y & -L_z & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R_x & U_x & -D_x & 0 \\ R_y & U_y & -D_y & 0 \\ R_z & U_z & -D_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} R_x & U_x & -D_x & 0 \\ R_y & U_y & -D_y & 0 \\ R_z & U_z & -D_z & 0 \\ -\vec{L} \cdot \vec{R} & -\vec{L} \cdot \vec{U} & \vec{L} \cdot \vec{D} & 1 \end{pmatrix}$$

Построение матрицы проекции



Построение матрицы параллельной проекции



(left, 0, 0) -> (-1, 0, 0)
(right, 0, 0) -> (1, 0, 0)
(0, bottom, 0) -> (0, -1, 0)
(0, top, 0) -> (0, 1, 0)
(0, 0, far) -> (0, 0, 1)
(0, 0, near) -> (0, 0, -1)

Построение матрицы параллельной проекции

x-> x_{ndc}

$$\frac{x_{ndc} - (-1)}{1 - (-1)} = \frac{x - left}{right - left}$$

$$x_{ndc} = 2 \cdot \frac{x - left}{right - left} - 1$$

y-> y_{ndc}

$$y_{ndc} = 2 \cdot \frac{y - bottom}{top - bottom} - 1$$

z-> z_{ndc}

$$z_{ndc} = 2 \cdot \frac{-z - near}{far - near} - 1$$

$$x_{ndc} = 2 \cdot \frac{x - left}{right - left} - 1 = x \cdot \left(\frac{2}{right - left}\right) + \left(\frac{(-2 \cdot left)}{right - left} - 1\right) =$$
$$= x \cdot \left(\frac{2}{right - left}\right) + \left(-\frac{right + left}{right - left}\right)$$

$$y_{ndc} = y \cdot \left(\frac{2}{top - bottom}\right) + \left(-\frac{top + bottom}{top - bottom}\right)$$

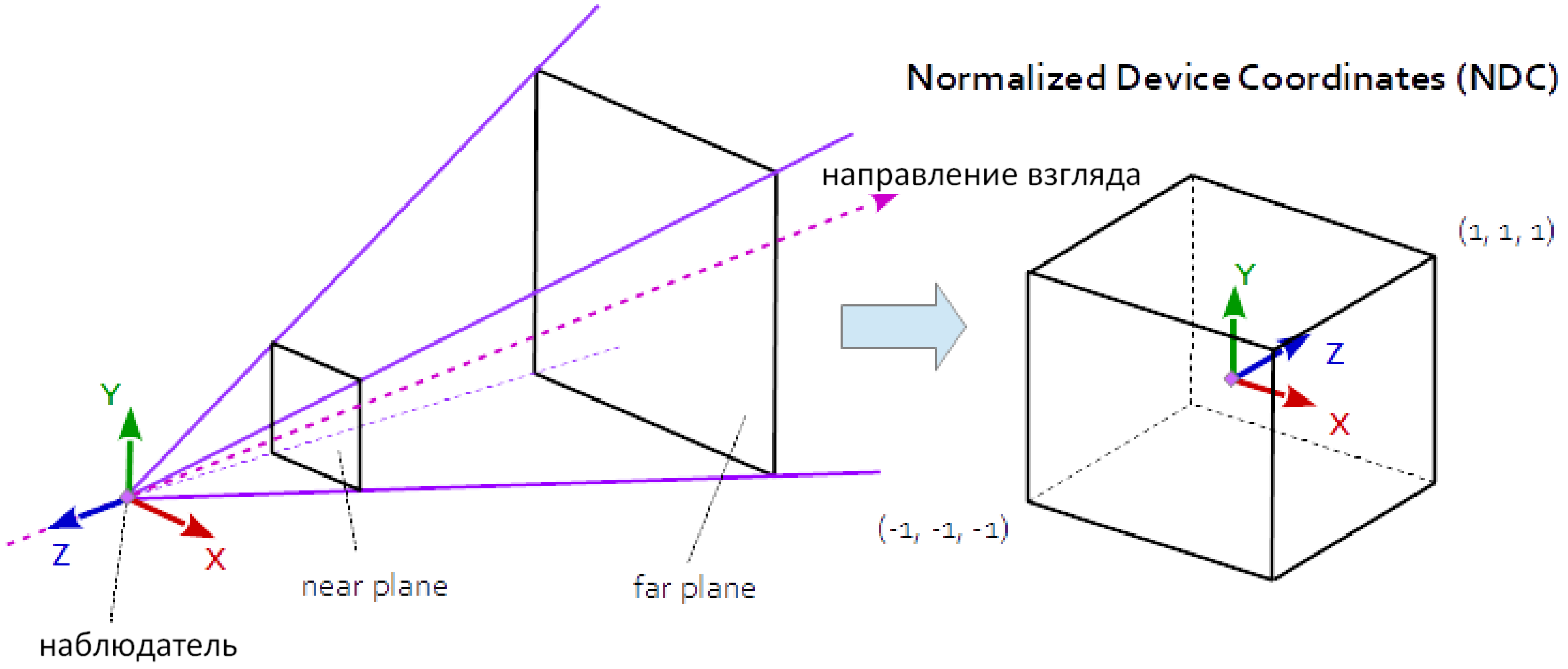
$$z_{ndc} = z \cdot \left(-\frac{2}{far - near}\right) + \left(-\frac{far + near}{far - near}\right)$$

Построение матрицы параллельной проекции (ortho)

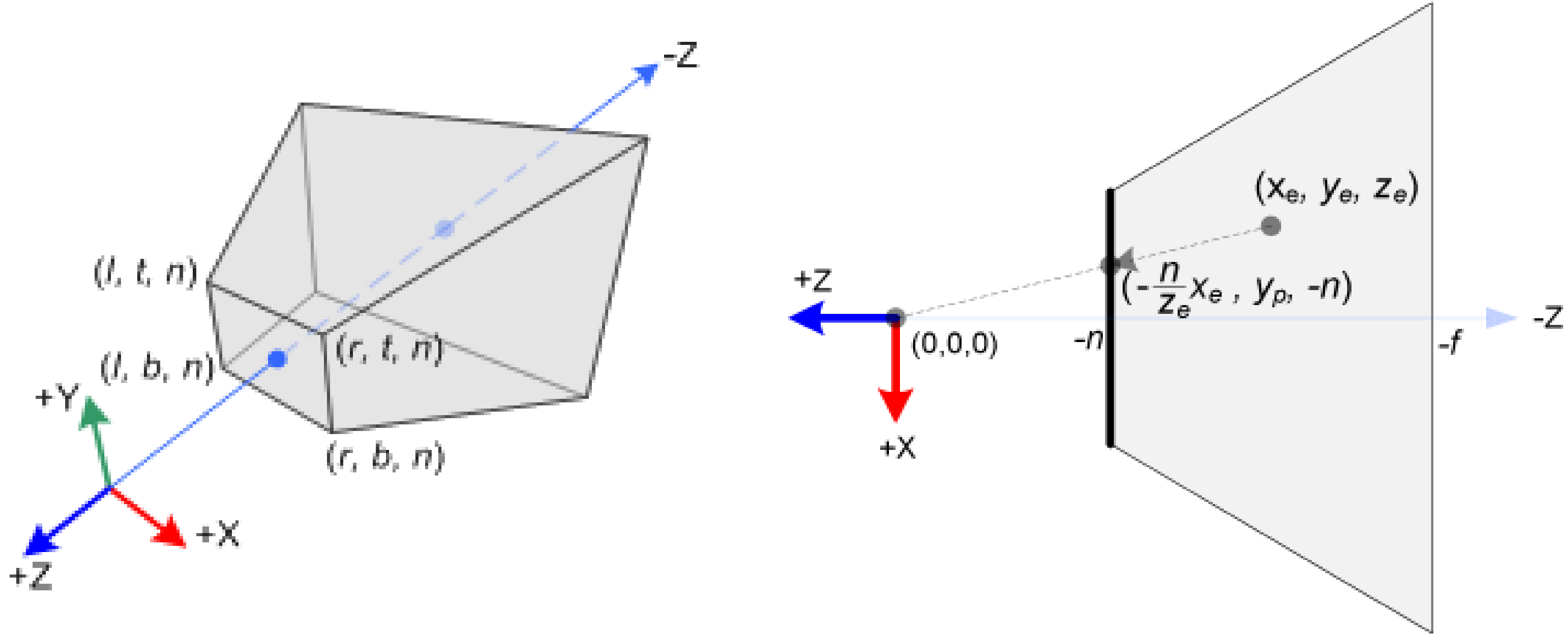
$$P_{ndc} = P \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{right-left} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{top-bottom} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{far-near} & 0 \\ -\frac{right+left}{right-left} & -\frac{top+bottom}{top-bottom} & -\frac{far+near}{far-near} & 1 \end{pmatrix}$$

$$|left| = |right| = \frac{W_p}{2}, |top| = |bottom| = \frac{H_p}{2} \rightarrow P_{ndc} = P \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{W_p} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{H_p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{far-near} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{far+near}{far-near} & 1 \end{pmatrix}$$

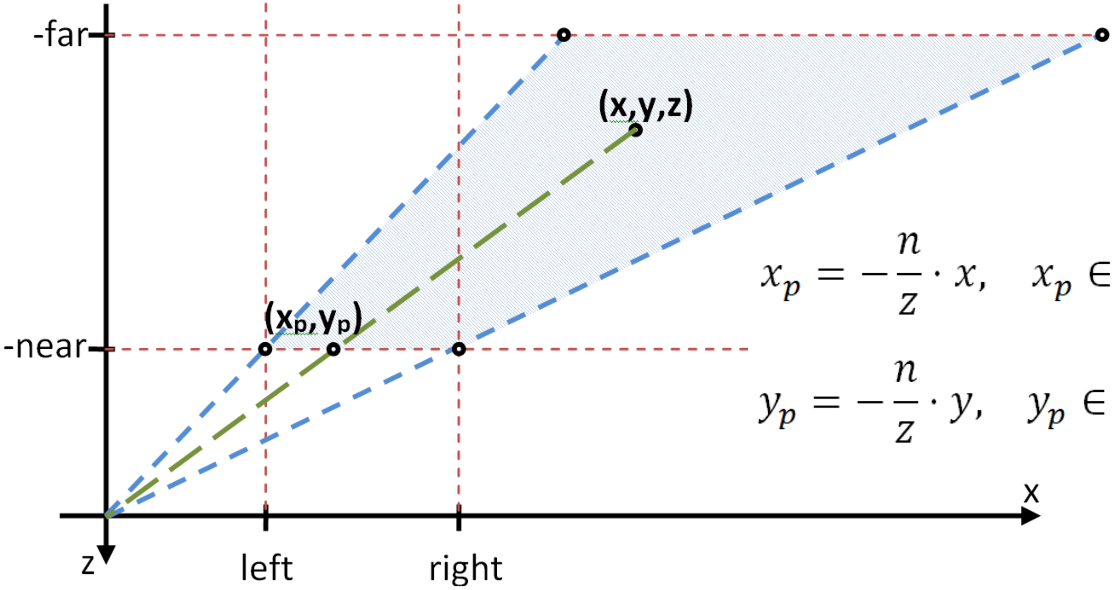
Построение матрицы центральной проекции



Построение матрицы центральной проекции



Построение матрицы центральной проекции



$$x_p = -\frac{n}{z}\cdot x, \quad x_p \in [l..r] \to x' \in [-1..1], \quad x' = 2\cdot\frac{x_p - l}{r - l} - 1$$

$$y_p = -\frac{n}{z}\cdot y, \quad y_p \in [b..t] \to y' \in [-1..1], \quad y' = 2\cdot\frac{y_p - b}{t - b} - 1$$

подставляем x_p и y_p:

$$x' = 2\cdot\frac{-\frac{n}{z}\cdot x - l}{r - l} - 1 = \frac{2\cdot n}{r - l}\cdot\left(-\frac{x}{z}\right) - \frac{r + l}{r - l}$$

$$y' = 2\cdot\frac{-\frac{n}{z}\cdot y - b}{t - b} - 1 = \frac{2\cdot n}{t - b}\cdot\left(-\frac{y}{z}\right) - \frac{t + b}{t - b}$$

Построение матрицы центральной проекции

z' будем искать от $\frac{1}{z}$:

$$z' = \frac{A}{z} + B$$

известно, что:

$$z = -n \rightarrow z' = -1$$

$$z = -f \rightarrow z' = 1$$

получаем:

$$-1 = \frac{A}{-n} + B$$

$$1 = \frac{A}{-f} + B$$

вычтем из 2-го первое:

$$2 = \frac{A}{-f} - \frac{A}{-n}$$

$$2 = A \cdot \frac{f - n}{f \cdot n}$$

Получаем:

$$A = \frac{2 \cdot n \cdot f}{f - n}$$

подставляем A для B:

$$1 = \frac{\frac{2 \cdot n \cdot f}{f - n}}{-f} + B$$

$$1 + \frac{\frac{2 \cdot n \cdot f}{f - n}}{f} = B$$

$$B = \frac{f + n}{f - n}$$

подставляем для z':

$$z' = \frac{2 \cdot n \cdot f}{f - n} \cdot \frac{1}{z} + \frac{f + n}{f - n}$$

Построение матрицы центральной проекции

мы работаем с однородными координатами:

$$x' = \frac{x''}{w''}$$

$$y' = \frac{y''}{w''}$$

$$z' = \frac{z''}{w''}$$

$$1 = \frac{w''}{w''}$$

формула преобразования:

$$(x'', y'', z'', w'') = (x, y, z, 1) \cdot \begin{pmatrix} ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

будем искать при $w'' = -z$

$$(w'' \cdot x', w'' \cdot y', w'' \cdot z', w'')$$

$$((-z) \cdot x', (-z) \cdot y', (-z) \cdot z', (-z))$$

Построение матрицы центральной проекции (frustum)

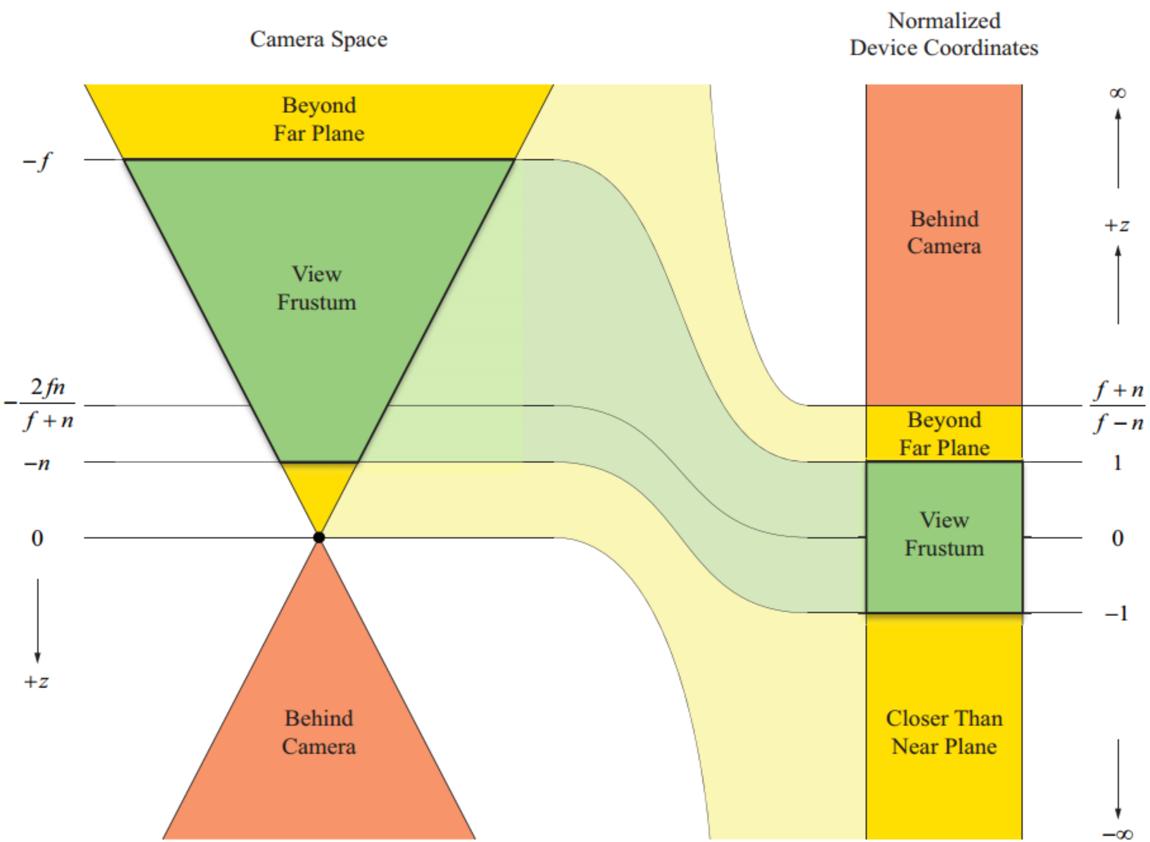
$$(-z)\cdot x' = \frac{2\cdot n}{r-l}\cdot x + \frac{r+l}{r-l}\cdot z$$

$$(-z)\cdot y' = \frac{2\cdot n}{t-b}\cdot y + \frac{t+b}{t-b}\cdot z$$

$$(-z)\cdot z' = -\frac{2\cdot n\cdot f}{f-n} - \frac{f+n}{f-n}\cdot z$$

$$(-z)\cdot 1 = -z$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2\cdot n}{r-l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\cdot n}{t-b} & 0 & 0 \\ \frac{r+l}{r-l} & \frac{t+b}{t-b} & -\frac{f+n}{f-n} & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{2\cdot n\cdot f}{f-n} & 0 \end{pmatrix}$$


Camera Space
Normalized Device Coordinates
Beyond Far Plane
View Frustum
Behind Camera
$-f$
$-\frac{2fn}{f+n}$
$-n$
0
$+z$
Behind Camera
Beyond Far Plane
View Frustum
Closer Than Near Plane
∞
$+z$
$\frac{f+n}{f-n}$
1
0
-1
$-\infty$

При отрисовки объектов:

$$P1 = P \cdot (M_{World} \cdot M_{View} \cdot M_{Projection})$$

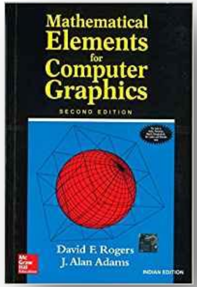
рисуем на экран (применяем *Viewport transformation*):

```
POINT((P1.X + 1) * Wscreen / 2, (-P1.Y + 1) * Hscreen / 2);
```

Задание

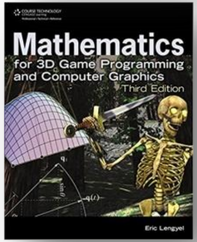
- Реализовать warping изображений:
  - все изображение трансформируется билинейным преобразованием (один элемент соответствия)
  - Изображение разделяется на треугольники – зоны соответствия. Искажение получается в соответствии с изменением сетки треугольников.
- Подготовить библиотеку работы с пространственной графикой. Включает в себя:
  - Хранение векторов, матриц преобразования (4x4)
  - Основные операции над векторами (плюс умножение векторов на матрицы: как радиус вектор, как свободный вектор, с учетом однородной координаты)
  - Операции над матрицами, построение матриц преобразований

Литература

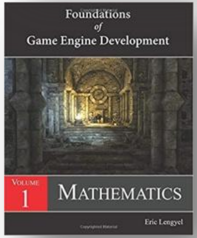


David F. Rodgers, J. van Adams. "Mathematical Elements for Computer Graphics", 2nd ed., McGraw-Hill Publishing Company, 1990.

Роджерс Д., Адамс Дж. Математические основы машинной графики. М.: Мир, 2001. 604 с.



Eric Lengyel, "Mathematics for 3D Game Programming and Computer Graphics, Third Edition 3rd Edition", Cengage Learning PTR, 2011



Eric Lengyel, "Foundations of Game Engine Development, Volume 1: Mathematics", Terathon Software LLC, 2016.

Привязка с перспективным преобразованием (1)

- общая формула:

$$\begin{pmatrix} x & y & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' & w' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- прямое отображение:

$$x = a_{11}x' + a_{21}y' + a_{31}w'$$
$$y = a_{12}x' + a_{22}y' + a_{32}w'$$
$$w = a_{13}x' + a_{23}y' + a_{33}w'$$

- полагаем w'=1, итоговая формула для координат:

$$\frac{x}{w} = \frac{a_{11}x' + a_{21}y' + a_{31}}{a_{13}x' + a_{23}y' + a_{33}}$$
$$\frac{y}{w} = \frac{a_{12}x' + a_{22}y' + a_{32}}{a_{13}x' + a_{23}y' + a_{33}}$$

Привязка с перспективным преобразованием (2)

- получаем матрицу обратного отображения
- определитель присутствует и в числителе и в знаменателе – вычислять не нужно:

$$(x' \quad y' \quad w') = (x \quad y \quad w)\cdot \breve{M} = (x \quad y \quad w)\cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

- находим присоединенную матрицу:

$$\breve{M} = \begin{pmatrix} a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} & a_{32}a_{13} - a_{12}a_{33} & a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} \\ a_{32}a_{31} - a_{33}a_{21} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} & a_{13}a_{21} - a_{11}a_{21} \\ a_{21}a_{31} - a_{31}a_{22} & a_{31}a_{12} - a_{11}a_{32} & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{pmatrix}$$

Привязка с перспективным преобразованием (3)

- Задача привязки: по 4 точкам соответствия определить матрицу перехода:

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_0 & y_0 \end{pmatrix} &\leftrightarrow \begin{pmatrix} x'_0 & y'_0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} &\leftrightarrow \begin{pmatrix} x'_1 & y'_1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} x_2 & y_2 \end{pmatrix} &\leftrightarrow \begin{pmatrix} x'_2 & y'_2 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} x_3 & y_3 \end{pmatrix} &\leftrightarrow \begin{pmatrix} x'_3 & y'_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$P = P' \cdot M, \quad M = ?$$

Привязка с перспективным преобразованием (4)

- запишем зависимость (выразим координаты x и y):

$$x = a_{11}x' + a_{21}y' + a_{31} - a_{13}x'x - a_{23}y'x$$
$$y = a_{12}x' + a_{22}y' + a_{32} - a_{13}x'y - a_{23}y'y$$

- выпишем в матричной форме 8 уравнений:

$$\begin{pmatrix} x_0' & y_0' & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_0'x_0 & -y_0'x_0 \\ x_1' & y_1' & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_1'x_1 & -y_1'x_1 \\ x_2' & y_2' & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_2'x_2 & -y_2'x_2 \\ x_3' & y_3' & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_3'x_3 & -y_3'x_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_0' & y_0' & 1 & -x_0'y_0 & -y_0'y_0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1' & y_1' & 1 & -x_1'y_1 & -y_1'y_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_2' & y_2' & 1 & -x_2'y_2 & -y_2'y_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_3' & y_3' & 1 & -x_3'y_3 & -y_3'y_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Привязка с перспективным преобразованием (5)

- для упрощения задачи переход ищем из единичного квадрата:

$$
\begin{aligned}
(x_0 \quad y_0) &\leftrightarrow (0 \quad 0)\\
(x_1 \quad y_1) &\leftrightarrow (1 \quad 0)\\
(x_2 \quad y_2) &\leftrightarrow (1 \quad 1)\\
(x_3 \quad y_3) &\leftrightarrow (0 \quad 1)
\end{aligned}
$$

- получаем:

$$
\begin{aligned}
&a_{31} = x_0\\
&a_{11} + a_{31} - a_{13}x_1 = x_1\\
&a_{11} + a_{21} + a_{31} - a_{13}x_2 - a_{23}x_2 = x_2\\
&a_{21} + a_{31} - a_{23}x_3 = x_3\\
&a_{32} = y_0\\
&a_{12} + a_{32} - a_{13}y_1 = y_1\\
&a_{12} + a_{22} + a_{32} - a_{13}y_2 - a_{23}y_2 = y_2\\
&a_{22} + a_{32} - a_{23}y_3 = y_3
\end{aligned}
$$

Привязка с перспективным преобразованием (6)

- обозначаем:

$$\Delta x_1 = x_1 - x_2 \quad \Delta x_2 = x_3 - x_2 \quad \Delta x_3 = x_0 - x_1 + x_2 - x_3$$
$$\Delta y_1 = y_1 - y_2 \quad \Delta y_2 = y_3 - y_2 \quad \Delta y_3 = y_0 - y_1 + y_2 - y_3$$

- и находим решение:

$$a_{13} = \frac{\begin{vmatrix} \Delta x_3 & \Delta x_2 \\ \Delta y_3 & \Delta y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta x_1 & \Delta x_2 \\ \Delta y_1 & \Delta y_2 \end{vmatrix}} \qquad a_{23} = \frac{\begin{vmatrix} \Delta x_1 & \Delta x_3 \\ \Delta y_1 & \Delta y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta x_1 & \Delta x_2 \\ \Delta y_1 & \Delta y_2 \end{vmatrix}}$$

$$a_{11} = x_1 - x_0 + a_{13}x_1$$
$$a_{21} = x_3 - x_0 + a_{23}x_3$$
$$a_{31} = x_0$$
$$a_{12} = y_1 - y_0 + a_{13}y_1$$
$$a_{22} = y_3 - y_0 + a_{23}y_3$$
$$a_{32} = y_0$$