Основы комбинаторики - I

1 Основные понятия теории множеств

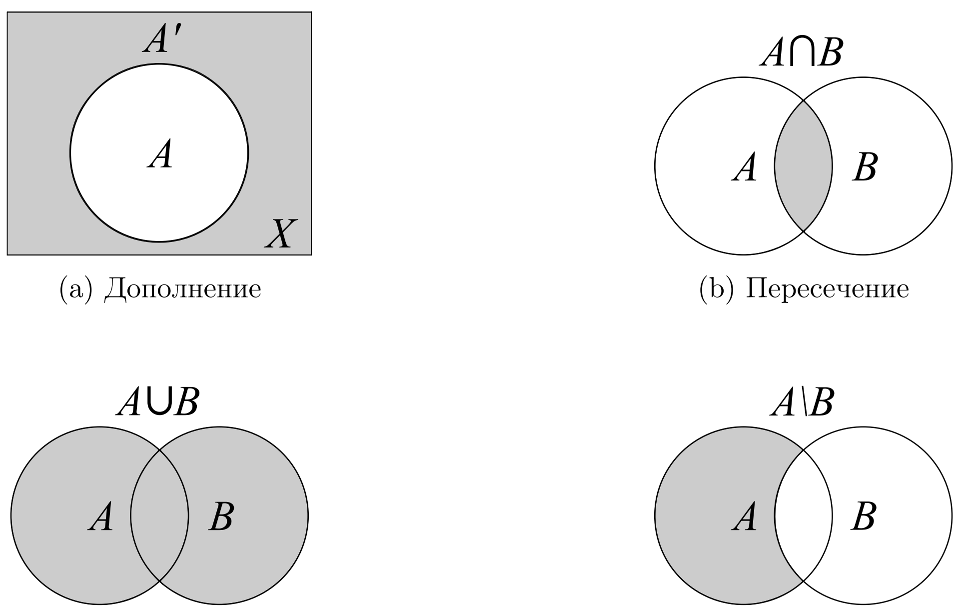
1.1. Начнем мы изложение комбинаторики с очень краткого напоминания основных понятий теории множеств.

Определение 1.1. Множеством $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ называется совокупность различимых объектов x_i, $i = 1, \ldots, n$, объединенных по некоторому признаку.

В качестве характерного примера можно рассмотреть, например, множество X всех студентов, находящихся в данной аудитории. Действительно, все студенты различимы, отличны друг от друга и объединены по признаку “собрались в данной аудитории”.

Определение 1.2. Мощностью $|X|$ множества X называется количество элементов в нем. Как правило, мы будем рассматривать конечные множества, в которых $|X| = n$, $n \in \mathbb{N}$, и называть их n-множествами.

1.1.1. Основные операции над множествами — это объединение $A \cup B$, пересечение $A \cap B$ и разность $A \setminus B$ двух множеств A и B. В случае, если множество A является подмножеством некоторого более широкого множества X, удобно также рассматривать операцию дополнения $A' := X \setminus A$ множества A.



(a) Дополнение (b) Пересечение

(c) Объединение (d) Разность

Рис. 1: Простейшие операции над множествами

1.1.2. Свойства операций над множествами удобно изучать графически, с использованием так называемых *диаграмм Эйлера-Венна* (смотри рис.1). Например, с их помощью достаточно просто проиллюстрировать справедливость законов де Моргана

$$A' \cap B' = (A \cup B)', \qquad A' \cup B' = (A \cap B)' \tag{1}$$

(смотри рис.2).

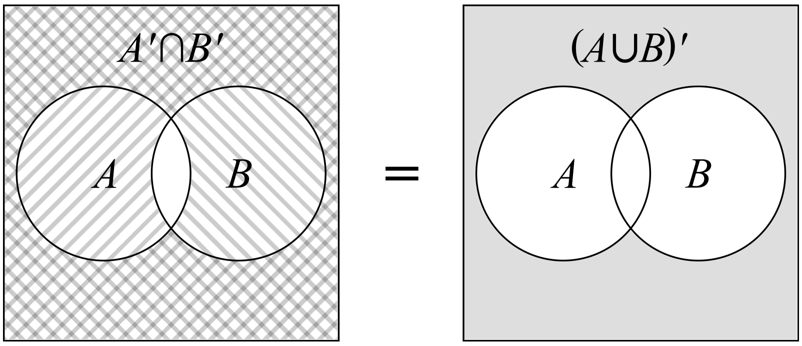


Рис. 2: Графическое доказательство закона де Моргана

1.1.3. В дальнейшем мы достаточно часто будем использовать понятие покрытия множества X семейством $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ множеств, а также всевозможные частные случаи этого понятия.

Определение 1.3. Семейство множеств $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ называется *покрытием* множества X, если их объединение дает нам все множество X:

$$X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_k = X.$$

Важным частным случаем покрытия является понятие разбиения множества.

Определение 1.4. Говорят, что семейство множеств $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ образует *разбиение* множества X, если

1. множества $X_i \neq \varnothing$, $i = 1, \ldots, n$;
2. $X_i \cap X_j = \varnothing \ \forall i \neq j$;
3. $X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_k = X$.

Элементы X_i этого семейства называются *блоками* разбиения.

В качестве характерного примера можно рассмотреть разбиение студентов данного курса на группы. Студенческие группы являются при этом блоками данного разбиения.

Если по каким-то причинам оказывается важным порядок следования блоков, то говорят об *упорядоченном разбиении* $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ множества X. Например, если мы выводим группы на сцену для вручения им дипломов, то важен порядок, в котором они туда выходят. Следовательно, в данном случае мы получаем упорядоченное разбиение студентов данного курса.

Наконец, еще одним частным случаем покрытия X семейством множеств $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ является понятие *разделения* множества X. Разделение есть аналог упорядоченного разбиения, в котором допускаются пустые блоки. Точное определение таково:

Определение 1.5. Разделением множества X называется упорядоченная последовательность $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ возможно пустых, попарно непересекающихся множеств, объединение которых дает все множество X.

1.1.4. Еще одной часто использующейся в комбинаторике операцией над множествами является операция декартова произведения множеств.

Определение 1.6. Декартовым произведением множеств A и B называется множество

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

всех упорядоченных пар (a, b), таких, что $a \in A$, $b \in B$.

В качестве простейшего примера декартова произведения множеств обычно приводят шахматную доску. Любая клетка шахматной доски имеет координаты "буква-цифра", например, $e5$ или $h4$. Иными словами, координаты клеток шахматной доски являются элементами декартова произведения множеств $A = \{a, b, \ldots, h\}$ и $B = \{1, 2, \ldots, 8\}$.

В частном случае множества A и B могут совпадать. В этом случае декартово произведение $A \times A$ обозначается через $A^{(2)}$.

Определение 1.7. Декартовым произведением k множеств $X_1, X_2, \ldots, X_k$ называется множество

$$X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k := \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \mid x_i \in X_i,\ \forall\ i = 1, \ldots, k\}$$

всевозможных упорядоченных k-элементных последовательностей вида $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$.

В частном случае $X_1 = X_2 = \ldots = X_k = X$ имеем декартову степень $X \times X \times \ldots \times X =: X^{(k)}$.

1.1.5. Любой элемент $X^{(k)}$ есть упорядоченный набор из k элементов множества X, в котором некоторые элементы могут повторяться. Если же в таком k-множестве порядок элементов не важен, говорят о *k-мультимножестве над множеством X.* Формальное определение k-мультимножества таково.

Определение 1.8. k-мультимножеством над n-элементным множеством X называется пара (X, φ), где $\varphi\colon X \to \{0, 1, \ldots, k\}$ есть функция, показывающая, сколько раз элемент $x \in X$ входит в k-мультимножество.

Пример 1.9. Возьмем множество $X = \{x, y\}$. Тогда 3-мультимножеством является один из четырех наборов вида

$$\{x, x, x\}, \qquad \{x, x, y\}, \qquad \{x, y, y, \}, \qquad \{y, y, y\}.$$

Формально каждое из этих мультимножеств задается следующими функциями φ_i:

$$\varphi_1(x) = 3,\ \varphi_1(y) = 0; \quad \varphi_2(x) = 2,\ \varphi_2(y) = 1; \quad \varphi_3(x) = 1,\ \varphi_3(y) = 2; \quad \varphi_4(x) = 0,\ \varphi_4(y) = 3.$$

Самый простой и понятный пример мультимножества — это монеты в кошельке. В этом примере в качестве множества X выступает множество из девяти монет разного достоинства:

$$X = \{1 \text{ копейка}, 5 \text{ копеек}, 10 \text{ копеек}, 50 \text{ копеек}, 1 \text{ рубль}, 2 \text{ рубля}, 5 \text{ рублей}, 10 \text{ рублей}\}.$$

Любой набор из этих монет в количестве k штук образует k-мультимножество над множеством X.

1.1.6. Теория множеств как раздел математики создавалась значительно позже комбинаторики. Поэтому некоторые наиболее важные понятия теории множеств исторически получили в комбинаторике свои, специфические названия. Именно,

1. k-сочетанием без повторений называется любое k-элементное подмножество n-элементного множества;

2. k-сочетанием с повторениями называется любое k-мультимножество над n-множеством;

3. k-перестановкой без повторений называется упорядоченное k-подмножество n-элементного множества;

4. k-перестановкой с повторениями называется любой элемент декартовой степени $X^{(k)}$.

2 Основные правила перечислительной комбинаторики

2.1. Теперь перейдем к двум самым простым, но в то же время достаточно важным правилам перечислительной комбинаторики — правилу суммы и правилу произведения.

2.1.1. Начнем с простейшего примера: пусть на одном блюде лежат три яблока, а на втором — две груши; сколькими способами можно выбрать один фрукт? Ответ очевиден: пятью способами.

Обобщающее этот пример простейшее *правило суммы* можно сформулировать так: если некоторый объект из множества A можно выбрать k способами, и, вне зависимости от выбора этого объекта, можно n способами выбрать некоторый элемент множества B, то выбор объекта из множества A *или* из множества B можно осуществить $k + n$ способами.

Очевидна переформулировка этого правила на языке теории множеств: пусть пересечение двух множеств A и B пусто; тогда

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

В частности, если $A \subset X$ и A' — дополнение множества A, то

$$|A| + |A'| = |X|. \tag{2}$$

В более общем случае, рассматривая произвольное разбиение множества X на блоки, имеем равенство вида

$$|X| = |X_1| + |X_2| + \ldots + |X_k|,$$

которое также называется правилом суммы в комбинаторике.

2.1.2. Под правилом произведения в комбинаторике понимается равенство

$$|X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k| = |X_1| \cdot |X_2| \cdot \ldots \cdot |X_k|.$$

Приведем простейший пример на применение этого правила в комбинаторике. Пусть в аудитории находятся 32 студента одной группы, 24 студента другой группы и 17 студентов третьей группы. В этом случае тройку, состоящую из представителей каждой группы, можно выбрать $32 \cdot 24 \cdot 17$ способами.

2.2. Наряду с правилом суммы, в элементарной комбинаторике также достаточно часто используется и несложное его обобщение — так называемый *принцип включения-исключения*. Если правило суммы связано с разбиением множества X, то принцип включения-исключения связан с некоторым произвольным покрытием этого n-множества семейством $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$. Сформулируем его для самого простого случая двух множеств.

2.2.1. Рассмотрим два конечных множества A и B, пересечение которых может быть и непусто. Тогда количество элементов в объединении этих множеств, очевидно, равно

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \tag{3}$$

Действительно, когда мы считаем количество $|A|$ элементов в множестве A и складываем его с количеством $|B|$ элементов в множестве B, мы любой элемент, принадлежащий как множеству A, так и множеству B, считаем дважды. Чтобы этот избыток убрать, нам нужно один раз вычесть количество элементов, содержащихся в пересечении этих двух множеств.

Равенство (3) можно называть обобщенным правилом суммы — оно обобщает правило суммы на случай, когда пересечение двух множеств не пусто.

2.2.2. Предположим теперь, что A и B являются подмножествами некоторого более широкого множества X. В этом случае у множества $A \subset X$ и множества $B \subset X$ имеются дополнения к ним — множества A' и B', причем $A \cup A' = B \cup B' = X$.

Рассмотрим теперь пересечение $A' \cap B'$ дополнений множеств A и B. Согласно одной из теорем де Моргана (1), $A' \cap B' = (A \cup B)'$. Следовательно, количество элементов в этом пересечении с учетом равенства (2) и обобщенного правила суммы (3) можно сосчитать так:

$$|A' \cap B'| = |(A \cup B)'| = |X| - |A \cup B| = |X| - |A| - |B| + |A \cap B|.$$

Равенство

$$|A' \cap B'| = |X| - |A| - |B| + |A \cap B|, \tag{4}$$

и называется в комбинаторике принципом включения-исключения.

2.2.3. Приведем простейший пример его использования. Пусть в аудитории находятся 30 человек, 20 человек из которых знают английский, 12 — французский, а 6 человек знают оба языка. Сколько человек не знает ни один из этих иностранных языков? Ответ, согласно принципу включения-исключения (4), следующий:

$$N = 30 - 20 - 12 + 6 = 4.$$

2.2.4. Несложно обобщить равенства (3) и (4) на случай большего количества множеств. Например, для трех множеств A, B, C соответствующие формулы выглядят так:

а) обобщенное правило суммы:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|; \tag{5}$$

б) принцип включения-исключения:

$$|A' \cap B' \cap C'| = |X| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|. \tag{6}$$

Действительно, рассмотрим, к примеру, левую часть равенства (5). Она подсчитывает количество элементов, принадлежащих объединению трех множеств (смотри рис.3). Если элемент

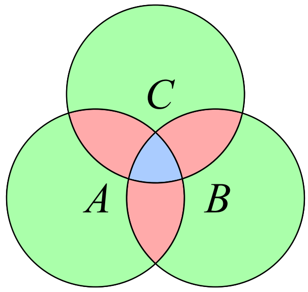


Рис. 3: Диаграмма Эйлера-Венна для трёх множеств

x_1, принадлежащий этому объединению, содержится в множестве A, но не содержится в множествах B и C, то он один раз подсчитывается в правой части равенства (5) (слагаемое $|A|$, отвечающее зеленой подобласти на рис.3). Если элемент x_2 принадлежит множествам A и B, но не принадлежит C (красная подобласть на рис.3), то в правой части (5) этот элемент входит в слагаемые $|A|$, $|B|$ и $-|A \cap B|$, то есть также подсчитывается ровно один раз. Наконец, если x_3 принадлежит пересечению всех трех множеств (зеленая подобласть на рис.3), то за этот элемент отвечают все слагаемые в правой части (5). Так как четыре из них входят со знаком плюс, а три — со знаком минус, то этот элемент также считается в правой части (5) лишь однажды.

3 Принцип Дирихле

3.1. Перейдем теперь к изложению очень простого принципа, который, однако, является весьма эффективным способом решения многих комбинаторных задач — принципа Дирихле (или в английском варианте — Pigeon-Hole Principle).

3.1.1. В своей простейшей формулировке он гласит следующее:

Утверждение 3.1. *Если в n ящиков положить $k > n$ предметов (в n клеток посадить $k > n$ голубей), то хотя бы в одном ящике будут лежать по крайней мере два предмета (будут сидеть по крайней мере два голубя).*

Доказательство. Несмотря на всю очевидность данного утверждения, все же дадим его формальное доказательство. Предположим, что утверждение неверно, то есть в каждом ящике находится не более одного предмета. Обозначим через m количество ящиков, в котором ничего не лежит. Очевидно, что $m \geqslant 0$. Тогда ровно по одному предмету лежит в $(n-m)$ ящиках. Это означает, собственно, что общее количество предметов равно $n - m \leqslant n < k$, что противоречит условию нашего утверждения. □

3.1.2. На первый взгляд совершенно непонятно, как такой настолько простой принцип может использоваться при решении каких-либо серьезных задач, ведь он кажется совершенно очевидным. Однако оказывается, что в конкретных задачах, использующих в своих решениях данный принцип, зачастую очень нелегко понять, где предметы, где ящики, и почему предметов больше, чем ящиков. Далее, далеко не всегда по формулировке самой задачи можно догадаться, что для ее решения следует воспользоваться данным принципом. И наконец, данный принцип дает нам неконструктивное доказательство какого-то факта — используя его, мы не можем сказать, в каком конкретно ящике находятся два предмета, мы знаем лишь, что такой ящик существует. Попытка же дать конструктивное доказательство, то есть попытка нахождения данного ящика, часто связана с очень большими трудностями. Тем не менее, данный принцип очень полезен, и с его помощью можно доказывать совершенно неочевидные на первый взгляд результаты.

3.1.3. Приведем вначале простейший пример на применение данного принципа.

Пример 3.2. Доказать, что в наборе из любого $(n+1)$-го положительного целого числа найдутся по крайней мере два числа, имеющих один и тот же остаток от деления на n.

Действительно, рассмотрим произвольный набор $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$ положительных целых чисел. Поделив их с остатком на n, мы получим набор $\{r_1, r_2, \ldots, r_n, r_{n+1}\}$ из $(n+1)$-го остатка от этого деления — набор неотрицательных целых чисел, каждое из которых меньше n. Но мы знаем, что имеется только лишь n неотрицательных целых чисел, меньших n. Следовательно, по принципу Дирихле, хотя бы два остатка из полученного набора должны совпадать.

3.1.4. Обычно в качестве примера применения принципа Дирихле дается чуть более сложная формулировка того же самого утверждения. Например, требуется доказать, что в последовательности чисел

$$7,\ 77,\ 777\ \ldots$$

один из первых 2014 членов данной последовательности делится на 2013.

Вначале ход рассуждений полностью повторяет рассуждения предыдущего примера. Именно, поделив с остатком первые 2014 членов выбранной числовой последовательности на 2013, мы получим 2014 остатков, значение каждого из которых меньше 2013. Следовательно, согласно принципу Дирихле существуют хотя бы два различных числа с одинаковыми остатками. Обозначим эти числа через a_i и a_j, и пусть для определенности $i < j$. Тогда

$$a_i = 2013 \cdot q_i + r, \qquad a_j = 2013 \cdot q_j + r,$$

а число $(a_j - a_i)$ делится без остатка на число 2013. Покажем теперь, что число a_{j-i} делится без остатка на 2013.

Действительно,

$$\begin{array}{rc} 7777777777777777777777777 & j \text{ цифр} \\ -77777777777777777 & i \text{ цифр} \\ = 7777777770000000000000000 & \begin{array}{c} j-i \text{ цифр, равных } 7, \\ i \text{ цифр, равных } 0, \end{array} \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad a_j - a_i = a_{j-i} \cdot 10^i.$$

Но 10^i и 2013 взаимно просты, поэтому a_{j-i} делится на 2013.

3.1.5. Рассмотрим еще один характерный пример.

Пример 3.3. Доказать, что среди нескольких находящихся в одной комнате человек хотя бы двое имеют одинаковое количество знакомых среди присутствующих в комнате.

Пусть в комнате находится n человек. Тогда для любого из них количество k с ним знакомых может принимать значения от нуля (ни с кем не знаком) до $n-1$ (со всеми знаком). Но отношение знакомства является взаимным: если a знаком с b, то и b знаком с a. Поэтому, к примеру, невозможен случай, когда в одной комнате имеются одновременно человек, у которого $(n-1)$ знакомых, и человек, у которого 0 знакомых: в первом случае у второго человека не может быть 0 знакомых, а во втором — у первого не может быть $(n-1)$ знакомый. Тем самым мы исключили вариант, когда у каждого находящегося в комнате свое, отличное от других, число знакомых. Иными словами, хотя бы для одного значения $k \in [0, n-1]$ в комнате нет человека с k знакомыми, и количество различных значений для k меньше числа n. Следовательно, согласно принципу Дирихле, хотя бы для двух из n находящихся в комнате человек значение k одно и то же.

Данная задача имеет многочисленные переформулировки. Например, если в комнату заходят n человек, и кто-то с кем-то здоровается за руку, то существует по крайней мере два человека, которые пожали одинаковое количество рук. Или если в шахматном турнире участвуют n человек, и любые два участника играют только по одной партии друг против друга, то в любой момент времени существует по меньшей мере два игрока, которые завершили одинаковое количество партий. С формальной же точки зрения все эти задачи равносильны утверждению о том, что в графе на n вершинах хотя бы две вершины имеют одинаковую степень.

4 Подсчет k-сочетаний из n элементов. Биномиальные коэффициенты.

4.1. Основная задача данного параграфа состоит в подсчете количества всех k-сочетаний из n элементов. Начнем мы с подсчета количества k-сочетаний из n элементов без повторений.

4.1.1. Число k-сочетаний без повторений известно в литературе под названием биномиальных коэффициентов. Ранее в советской литературе такие числа обозначались через C_n^k. В настоящее время для этих коэффициентов используется обозначение $\binom{n}{k}$ (читается "из n по k").

4.1.2. Обычно на вопрос, чему равны биномиальные коэффициенты, вспоминают формулу

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Эта формула не очень удачна с двух точек зрения — с вычислительной и с идейной. С вычислительной точки зрения ее затруднительно использовать для достаточно больших значений n и k. Например, при $n = 38$ и $k = 19$ числитель и знаменатель могут просто не уместиться в диапазон изменения целых чисел для того или иного языка программирования. С идейной же точки зрения эта формула неудобна потому, что она не позволяет обобщить понятие биномиальных коэффициентов на случай целых, вещественных или комплексных значений n. В следующем параграфе мы получим более удобное выражение для этих коэффициентов, допускающее такое обобщение. Здесь же мы с помощью правила суммы выведем рекуррентное соотношение для биномиальных коэффициентов, позволяющее эти биномиальные коэффициенты эффективно вычислять для достаточно больших значений n и k.

4.1.3. Для получения рекуррентного соотношения введем множество Σ_k всех k-элементных подмножеств n-элементного множества X. Например, для $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ множество $\Sigma_2 = \{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\}\}$. Заметим, что биномиальный коэффициент $\binom{n}{k}$ как раз и описывает мощность такого множества. Разобьем теперь множество Σ_k на два блока — блок $\Sigma_k^{(1)}$, k-элементные подмножества которого содержат элемент x_1, и блок $\Sigma_k^{(2)}$, подмножества которого этот элемент не содержат. Понятно, что это — непустые, непересекающиеся подмножества, объединение которых дает нам все множество Σ_k. Поэтому по правилу суммы мы получаем равенство вида

$$\binom{n}{k} = |\Sigma_k| = |\Sigma_k^{(1)}| + |\Sigma_k^{(2)}|.$$

Осталось выразить через биномиальные коэффициенты количество элементов в каждом из блоков $\Sigma_k^{(1)}$, $\Sigma_k^{(2)}$. А это делается довольно легко.

4.1.4. Действительно, во всех подмножествах первого блока элемент x_1 уже выбран, и нам из оставшегося $(n-1)$-элементного множества $X \setminus x_1$ остается выбрать $(k-1)$-элементные подмножества . Сделать это можно $\binom{n-1}{k-1}$ способами. Во втором блоке содержатся k-элементные подмножества множества $X \setminus x_1$, состоящего из $(n-1)$-го элемента. Их количество, очевидно, равно $\binom{n-1}{k}$. Таким образом окончательно имеем следующее рекуррентное соотношение:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \qquad k \geqslant 1, \quad n \geqslant 1. \tag{7}$$

4.1.5. Соотношение (7) следует дополнить начальными и граничными условиями. Так как k-элементных подмножеств n-элементного множества в случае $k > n$ не существует, то

$$\binom{n}{k} = 0 \qquad \text{при} \quad k > n.$$

Далее, пустое подмножество можно выбрать всегда и только одним способом; поэтому

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \forall\; n \geqslant 0.$$

Используя эти условия, можно шаг за шагом вычислить коэффициенты $\binom{n}{k}$. Часто их записывают в виде так называемого треугольника Паскаля:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & & & & \dots & & & &
\end{array}$$

4.1.6. Как видно, треугольник Паскаля симметричен, т.е. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Комбинаторное доказательство этого факта очевидно. Действительно, выбирая любое k-элементное множество, мы тем самым однозначно выбираем и дополнение к нему, т.е. $(n-k)$-элементное множество. Следовательно, количество k-элементных и $(n-k)$-элементных подмножеств совпадает.

4.2. Наряду с треугольником Паскаля биномиальные коэффициенты допускают и еще одно очень удобное графическое представление — представление на координатной плоскости (n, k)

4.2.1. Данное представление связано со следующей довольно интересной комбинаторной задачей. Рассмотрим плоскость (n, k) и нарисуем на этой плоскости пути, исходящие из начала координат, приходящие в точку с координатами (n, k), $n \geqslant 0$, $k = 0, \dots, n$, и состоящие из диагональных и вертикальных отрезков (рис.4). В самих точках (n, k) отметим количество таких путей, приходящих в эту точку из начала координат. Заметим теперь, что попасть в точку с

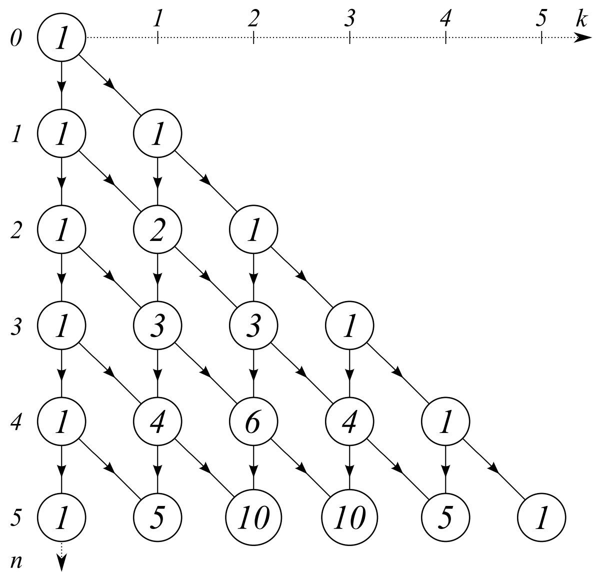


Рис. 4: Графическое представление чисел $\binom{n}{k}$ на координатной плоскости (n, k)

координатами (n, k) мы можем, пройдя только лишь через точку с координатами $(n-1, k)$ или через точку с координатами $(n-1, k-1)$. С комбинаторной точки зрения это означает, что количество путей $\binom{n}{k}$, приходящих в точку с координатами (n, k), равняется количеству $\binom{n-1}{k}$ путей, приходящих в точку с координатами $(n-1, k)$, плюс количество путей $\binom{n-1}{k-1}$, приходящих в точку с координатами $(n-1, k-1)$. Но равенство

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

есть основное тождество для биномиальных коэффициентов (7). А это означает, что мы получили новую комбинаторную интерпретацию таких коэффициентов. Именно, числа $\binom{n}{k}$ описывают количество путей, состоящих из диагональных $(1,1)$ и вертикальных $(1,0)$ отрезков, выходящих из начала координат — точки $(0,0)$, и оканчивающихся в точке с координатами (n, k).

4.2.2. Графическое представление чисел $\binom{n}{k}$ на плоскости (n, k) очень удобно для получения разного рода тождеств с биномиальными коэффициентами. В качестве первого примера зафиксируем какое-то конкретное значение параметра k и просуммируем биномиальные коэффициенты $\binom{m}{k}$ по m от k до некоторого фиксированного значения n. Например, выберем $k = 1$, $n = 4$. Складывая числа $1, 2, 3, 4$, мы получим число 10, то есть биномиальный коэффициент, стоящий правее и ниже рассмотренной цепочки биномиальных коэффициентов. Есть подозрение, что данный факт, а именно, равенство вида

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \ldots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1} \tag{8}$$

выполняется для любых значений параметров n и k.

4.2.3. Для формального доказательства тождества

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{m}{k} = \underbrace{\binom{0}{k} + \binom{1}{k} + \ldots + \binom{k-1}{k}}_{=0} + \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \ldots + \binom{n}{k} = \sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k} = \binom{n+1}{k+1},$$

называемого формулой суммирования биномиальных коэффициентов по верхнему индексу, применим рекуррентное соотношение (7) к коэффициенту $\binom{m+1}{k+1}$:

$$\binom{m+1}{k+1} = \binom{m}{k} + \binom{m}{k+1} \qquad \Longrightarrow \qquad \binom{m}{k} = \binom{m+1}{k+1} - \binom{m}{k+1}.$$

Просуммируем теперь полученное равенство по m от k до n:

$$\begin{aligned}\sum_{m=k}^{n}\binom{m}{k} &= \binom{n+1}{k+1} + \sum_{m=k}^{n-1}\binom{m+1}{k+1} - \sum_{m=k}^{n}\binom{m}{k+1} = \\ &= \binom{n+1}{k+1} + \sum_{m=k}^{n-1}\binom{m+1}{k+1} - \sum_{m=k+1}^{n}\binom{m}{k+1} = \\ &= \binom{n+1}{k+1} + \sum_{m'=k+1}^{n}\binom{m'}{k+1} - \sum_{m=k+1}^{n}\binom{m}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.\end{aligned}$$

4.2.4. Комбинаторное доказательство тождества (8) основано на следующем общем подходе: мы разбиваем множество Σ_{k+1} всех $(k+1)$-элементных подмножеств $(n+1)$-элементного множества X на блоки, подсчитываем количество элементов в каждом блоке, а затем пользуемся правилом суммы для подсчета числа $|\Sigma_{k+1}| = \binom{n+1}{k+1}$.

Для реализации этого подхода возьмем $(n+1)$-элементное множество

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}\}$$

и будем разбивать множество всех $(k+1)$-элементных подмножеств множества X следующим образом. В первый блок поместим все $(k+1)$-элементные подмножества, содержащие элемент x_{n+1}. Такие подмножества элемент x_{n+1} гарантированно содержат. Нам из оставшихся элементов $x_1, \ldots, x_n$ множества $X \setminus x_{n+1}$ нужно выбрать недостающие k элементов. По определению биномиального коэффициента, сделать мы это можем $\binom{n}{k}$ способами.

Теперь мы рассмотрим все $(k+1)$-элементные подмножества, которые не содержат элемент x_{n+1}, но обязательно содержат элемент x_n. Для того, чтобы любое такое подмножество сформировать, нам нужно из множества элементов $\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ выбрать недостающие k элементов. Это можно сделать $\binom{n-1}{k}$ количеством способов.

Затем рассмотрим все $(k+1)$-элементные подмножества, которые содержат в обязательном порядке элемент x_{n-1} и не содержат элементов x_{n+1} и x_n. Эти подмножества получаются выбором недостающих k элементов из множества элементов $\{x_1, \ldots, x_{n-2}\}$, и выбрать такие подмножества можно $\binom{n-2}{k}$ способами.

Продолжая далее, мы дойдем когда-то до ситуации, в которой нам нужно выбрать все $(k + {} + 1)$-элементные подмножества, которые содержат элемент x_{k+1} и не содержат элементы со старшими индексами. Так как элемент x_{k+1} у нас уже выбран, то нам остается из множества $\{x_1, \ldots, x_k\}$ выбрать k-элементное подмножество. Сделать мы это можем, очевидно, $\binom{k}{k} = 1$ способом.

Складывая теперь количество элементов в каждом блоке, мы и получаем тождество (8).

Пример 4.1. Пусть $n = 4$, $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $k = 2$, $k + 1 = 3$. Приведем список всех трехэлементных подмножеств этого множества:

$$\{x_1, x_2, x_3\}, \qquad \{x_1, x_2, x_4\}, \qquad \{x_1, x_2, x_5\}, \qquad \{x_1, x_3, x_4\}, \qquad \{x_1, x_3, x_5\},$$

$$\{x_1,x_4,x_5\},\qquad \{x_2,x_3,x_4\},\qquad \{x_2,x_3,x_5\},\qquad \{x_2,x_4,x_5\},\qquad \{x_3,x_4,x_5\}.$$

В первый блок разбиения этого множества подмножеств включим подмножества, содержащие элемент x_5; таковых имеется $\binom{4}{2}=6$ штук. Из *оставшегося* списка выберем все подмножества, содержащие x_4; их $\binom{3}{2}=3$ штуки. Наконец, у нас остается единственное подмножество элементов, не содержащих ни x_4, ни x_5, т.е. подмножество $\{x_1,x_2,x_3,\}$.

4.3. Название "биномиальные коэффициенты" связано с тем, что они, помимо всего прочего, встречаются в формуле бинома Ньютона

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\,y^{n-k}. \tag{9}$$

4.3.1. Комбинаторное доказательство этой формулы довольно элементарно: нужно просто расписать $(x+y)^n$ в виде произведения n сомножителей

$$(x+y)^n=\underbrace{(x+y)}_{1}\cdot\underbrace{(x+y)}_{2}\cdot\ldots\cdot\underbrace{(x+y)}_{n}$$

и пометить каждый из таких сомножителей числом в диапазоне от единицы до n. В результате мы имеем множество X, состоящее из n *различных* экземпляров сомножителей вида $(x+y)$.

После перемножения этих n скобок получается определенный набор слагаемых вида x^ky^{n-k}, $k=0,1,\ldots,n$. Для подсчета количества этих слагаемых при фиксированном значении параметра k заметим, что любое слагаемое x^ky^{n-k} можно получить так: выбрать в n-элементном множестве X k-элементное подмножество, взять в этом подмножестве в качестве сомножителей переменные x, а в оставшемся $(n-k)$-элементном подмножестве выбрать в качестве сомножителей переменные y. Как следствие, количество слагаемых x^ky^{n-k} совпадает с количеством способов выбрать k-элементное подмножество n-элементного множества X и равно $\binom{n}{k}$.

4.3.2. Формула (9) оказывается чрезвычайно полезной для вывода разного рода соотношений, связанных с биномиальными коэффициентами. Например, полагая в ней $x=y=1$, получаем тождество

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n. \tag{10}$$

Заметим теперь, что, суммируя биномиальные коэффициенты $\binom{n}{k}$ по k, мы подсчитываем *все* подмножества n-элементного множества. Иными словами, мы формально доказали тот факт, что количество всех подмножеств данного n-множества равно 2^n. Комбинаторное доказательство этого факта будет дано в следующем параграфе.

4.3.3. Далее, полагая в (9) $x=-1$, $y=1$, получаем важное тождество

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0,\qquad n>0. \tag{11}$$

Заметим, что в случае $n=0$ эта сумма оказывается равной единице. Для того, чтобы понять комбинаторный смысл равенства (11), перепишем его в следующем виде:

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\ldots=0\qquad\Longleftrightarrow\qquad\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\ldots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\ldots$$

В левой части последнего равенства стоит количество всех подмножеств, в которых содержится четное количество элементов, а в правой — число подмножеств, содержащих нечетное количество элементов. Иными словами, следствием равенства (11) является тот факт, что количество четных подмножеств любого множества, отличного от $\varnothing$, равняется количеству его нечетных подмножеств.

Наконец, отсюда же мы можем заключить, что количество, например, всех нечетных подмножеств ровно в два раза меньше общего количества всех подмножеств. С учетом (10) это означает, что количество всех нечетных подмножеств равно 2^{n-1}.

4.3.4. Наконец, продифференцируем (9) по x:

$$n\,(x+y)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1}\, y^{n-k}. \tag{12}$$

Подставляя в это равенство $x = y = 1$, получим еще одно полезное равенство:

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n\, 2^{n-1}.$$

4.4. Перейдем теперь к задачам, связанным с подсчетом k-сочетаний с повторениями.

4.4.1. Начнем с примера. Пусть множество X состоит из двух чисел 1 и 2. Выпишем все 3-сочетания с повторениями из 2-множества X:

$$\{1,1,1\}, \qquad \{1,1,2\}, \qquad \{1,2,2\}, \qquad \{2,2,2\}.$$

Как видно, таковых оказалось 4 штуки. Как подсчитать это количество в общем случае?

4.4.2. Для решения данной задачи воспользуемся чрезвычайно полезным и часто использующимся в комбинаторике *принципом биекции.* Формально этот принцип можно сформулировать следующим образом: пусть X, Y — пара конечных множеств, и пусть существует биекция $f\colon X \to Y$, т.е. такое отображение, что

$$\forall\, y \in Y \qquad\qquad \exists!\, x \in X : \qquad\qquad y = f(x).$$

Тогда количество элементов в множествах X и Y совпадают: $|X| = |Y| = n$.

4.4.3. Неформально использование принципа биекции можно проиллюстрировать на следующем примере. Предположим, что вы устраиваете вечеринку и приглашаете на нее довольно много друзей. Как гостеприимный хозяин, вы встречаете всех своих друзей на входе в дом, но запоминаете только пришедших к вам девушек. В какой-то момент вы решаете подсчитать, сколько парней пришло к вам на вечеринку. Вы знаете количество пришедших к вам девушек, и вам кажется, что количество девушек и парней одинаково. Как вам быстро проверить это предположение? Ответ достаточно очевиден: попросить каждую девушку взять ровно одного парня за руку. Если в результате этой процедуры все множество гостей разбилось на пары, то ваше предположение окажется верным. Тем самым вы сильно упростили себе жизнь — вам не пришлось проделывать довольно утомительную работу по пересчету пришедших к вам парней; вы просто воспользовались для их подсчета результатом уже проделанной работы по пересчету пришедших к вам девушек.

4.4.4. Вернемся теперь к задаче подсчета всех k-сочетаний с повторениями, т.е. всех k-мультимножеств над n-множеством X. Для подсчета количества $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ таких мультимножеств нам будет удобнее вначале конкретизировать n-множество X, а именно, взять в качестве X множество $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$ первых n натуральных чисел. Любое k-мультимножество такого множества можно записать, очевидно, в следующем виде:

$$1 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_k \leqslant n.$$

Например, 3-мультимножество $\{1, 1, 2\}$ над 2-множеством $X = \{1, 2\}$ можно записать так:

$$1 \leqslant (a_1 = 1) \leqslant (a_2 = 1) \leqslant (a_3 = 2) \leqslant (n = 2).$$

Теперь превратим в этой цепочке все нестрогие неравенства в строгие. Для этого мы к a_2 прибавим единицу, к a_3 — двойку, к a_4 — тройку, и так далее. К последнему числу a_n мы, таким образом, добавим число $(k-1)$. В результате получим цепочку строгих неравенств вида

$$1 \leqslant a_1 < a_2 + 1 < a_3 + 2 < a_4 + 3 < \ldots < a_k + (k-1) \leqslant n + (k-1).$$

В нашем примере

$$1 \leqslant (a_1 = 1) < (a_2 + 1 = 2) < (a_3 + 2 = 4) \leqslant (n + (3-1) = 4).$$

Заметим, что в результате этой операции мы получили некоторое k-элементное подмножество *различных* чисел вида $a_i + (i-1)$ множества $\widetilde{X} = [n+k-1]$ всех чисел от единицы до $n+k-1$. Иными словами, мы сопоставили любому k-мультимножеству над множеством $X = [n]$ вполне определенное k-подмножество множества $\widetilde{X} = [n+k-1]$. Очевидно, что это сопоставление взаимно-однозначно. Но количество всех k-подмножеств данного множества мы знаем — оно равно $\binom{n+k-1}{k}$. Следовательно, этому числу равно, по принципу биекции, и количество $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ всех k-мультимножеств над множеством $X = [n]$:

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \binom{n+k-1}{k}.$$

Справедливость этого равенства для произвольного n-элементного множества X вновь следует из принципа биекции.