# Линейная алгебра - часть I

## 1 Линейное пространство

**1.1.** Давайте начнем изучение основ линейной алгебры с определения линейного (или векторного) пространства.

**1.1.1.** Под линейным (векторным) пространством $V$ мы будем понимать некоторое множество элементов, называемых векторами, с введенными на этом множестве операциями сложения векторов и умножения этих векторов на скаляры — в простейшем случае, вещественные или комплексные числа. Операция сложения векторов должна удовлетворять следующим четырем аксиомам:

1. коммутативность сложения: $v + w = w + v$;
2. ассоциативность сложения: $(u + v) + w = u + (v + w)$;
3. существование нейтрального элемента $\mathbf{0} \in V$, такого, что $u + \mathbf{0} = \mathbf{0} + u = u$ для любого вектора $u$;
4. существование для любого $u \in V$ обратного элемента $u^{-1}$, такого, что $u + u^{-1} = u^{-1} + u = \mathbf{0}$.

Операция умножения вектора на скаляр (например, на вещественное число) должна подчиняться таким четырем аксиомам:

1. умножение любого вектора $v$ на $1 \in \mathbb{R}$ должно давать тот же самый вектор $v$;
2. ассоциативность операции умножения: $\alpha(\beta\, v) = (\alpha \cdot \beta)\, v$;
3. дистрибутивность относительно сложения векторов: $\alpha(v + w) = \alpha\, v + \alpha\, w$;
4. дистрибутивность относительно сложения скаляров: $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$.

**1.1.2.** В качестве простейшего примера линейного пространства можно рассмотреть хорошо нам известное со школы множество векторов (то есть направленных отрезков) на плоскости, исходящих из начала координат (рис.1,2). Сложение двух векторов $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ осуществляется по правилу параллелограмма (рис.1). Умножению вектора $\boldsymbol{v}$ на вещественное число $\alpha$ отвечает вектор $\alpha\,\boldsymbol{v}$, длина которого увеличена в $\alpha$ раз (рис.2). С физической точки зрения подобные векторы мы можем трактовать как силы, приложенные к расположенному в начале координат телу.

Обобщая этот пример, мы можем в качестве векторов выбрать наборы, состоящие из $n$ вещественных чисел вида $v = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, которые мы можем трактовать как направленные отрезки в $n$-мерном пространстве. Операция сложения таких векторов осуществляется покомпонентно, а операции умножения на скаляр $\alpha$ отвечает умножение каждой из компонент $v_i$ вектора $v$ на это число:

$$v + w = (\xi_1, \ldots, \xi_n) + (\eta_1, \ldots, \eta_n) = (\xi_1 + \eta_1, \ldots, \xi_n + \eta_n), \qquad \alpha \cdot v = (\alpha\,\xi_1, \ldots, \alpha\,\xi_n).$$

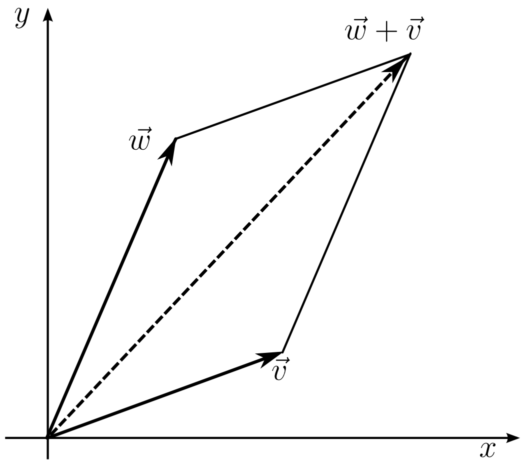


Рис. 1

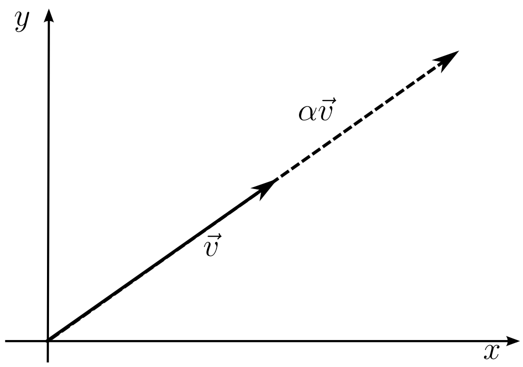


Рис. 2

В анализе в качестве векторов можно рассматривать вещественные непрерывные функции. Такие функции мы можем складывать между собой, а также умножать их на вещественные числа. Следовательно, по отношению к этим двум операциям множество непрерывных на $\mathbb{R}$ функций образует линейное пространство.

Еще один важный пример — это множество всех многочленов $P_n(x)$ степени не выше $n$ с обычными операциями сложения и умножения на число, также образующее линейное пространство таких многочленов. Заметим сразу, что множество многочленов степени, равной $n$, линейного пространства не образует (см. упражнение).

**1.2.** Основным понятием всей линейной алгебры является понятие линейной зависимости (независимости) векторов.

**1.2.1.** Рассмотрим в линейном пространстве $V$ набор, состоящий из $k$ векторов $v_1, \ldots, v_k$.

**Определение 1.1.** Говорят, что векторы $v_1, \ldots, v_k$ являются *линейно зависимыми,* если найдутся числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, такие, что хотя бы одно из этих чисел отлично от нуля, а сумма

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k = 0.$$

В этом случае также говорят, что существует равная нулю *линейная комбинация* этих векторов с коэффициентами, хотя бы один из которых отличен от нуля.

**Определение 1.2.** Набор векторов $v_1, \ldots, v_k$ называется *линейно независимым,* если линейная

комбинация
$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k = 0$$
тогда и только тогда, когда все коэффициенты $\alpha_i = 0$.

**1.2.2.** Предположим, что векторы $v_1, \ldots, v_k$ линейно зависимы, то есть существуют такие $\alpha_j$, что
$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k = 0,$$
и при этом существует хотя бы одно $i \in [k] = \{1, \ldots, k\}$, такое, что $\alpha_i \neq 0$. Перенесем тогда все векторы, отличные от $v_i$, в правую часть и поделим полученное выражение на $\alpha_i$. В результате получим, что
$$v_i = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \lambda_k v_k, \qquad \lambda_j = -\alpha_j / \alpha_i.$$
Иными словами, это означает, что мы в этом случае обязательно сможем выразить один из векторов через оставшиеся векторы нашего набора векторов.

**1.2.3.** Рассмотрим теперь в качестве примера векторы на плоскости. В данном случае любые два ненулевых неколлинеарных между собой вектора линейно независимы, а вот уже любые три оказываются линейно зависимыми — один из них мы всегда можем выразить через линейную комбинацию двух других.

Данный пример подводит нас к следующему важному определению.

**Определение 1.3.** Предположим, что в линейном пространстве $V$ существует $n$ линейно независимых векторов, а любой набор из большего количества векторов оказывается линейно зависимым. Тогда линейное пространство $V$ называется *конечномерным* (или $n$-мерным) линейным пространством, а число $n$ — *размерностью* этого пространства. В противном случае линейное пространство $V$ называется *бесконечномерным.*

Характерным примером бесконечномерного линейного пространства является пространство непрерывных на $\mathbb{R}$ функций. Такие пространства более подробно изучаются в других курсах, например, в курсе функционального анализа. Мы в данном курсе будем в основном заниматься конечномерными пространствами.

**1.2.4.** С понятием размерности тесно связано понятие базиса линейного пространства.

**Определение 1.4.** Базисом линейного $n$-мерного пространства $V$ называется любой набор, состоящий из $n$ линейно независимых векторов.

В простейшем примере векторов на плоскости базис образуют любые два вектора, не лежащих на одной и той же прямой. Для векторов в трехмерном пространстве базисом являются любые три вектора, не лежащие в одной плоскости.

**1.2.5.** Основной результат, связанный с понятием базиса, можно сформулировать с помощью следующей теоремы.

**Теорема 1.5.** *Пусть векторы $v_1, \ldots, v_n$ образуют базис в $n$-мерном линейном пространстве $V$. Тогда любой вектор $v$ этого пространства можно единственным образом представить в виде линейной комбинации базисных векторов:*
$$v = \xi^1 v_1 + \xi^2 v_2 + \ldots + \xi^n v_n.$$
*Коэффициенты $\xi^i$ в этом выражении называются координатами вектора $v$ в базисе $v_1, \ldots, v_n$, а само такое представление вектора $v$ называется разложением этого вектора по базису.*

Доказательство. Добавим к набору $v_1, \ldots, v_n$ базисных векторов вектор $v$. По определению $n$-мерного пространства, любые $(n+1)$ векторов в таком пространстве являются линейно зависимыми, то есть существуют вещественные числа $\alpha_i$, такие, что

$$\alpha_0 v + \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0,$$

и при этом хотя бы одно из $\alpha_i$ отлично от нуля. Заметим также, что коэффициент $\alpha_0$ гарантированно отличен от нуля — в противном случае мы из последнего равенства получили бы, что векторы $v_1, \ldots, v_n$ линейно зависимы. Тогда, перенося $\alpha_0 v$ в правую часть и деля полученное равенство на $\alpha_0 \neq 0$, мы получим, что

$$v = -\frac{\alpha_1}{\alpha_0} v_1 - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_0} v_n.$$

Обозначив через $\xi_i = -\alpha_i/\alpha_0$, мы получим разложение вектора $v$ по базису $v_1, \ldots, v_n$.

Осталось доказать единственность данного разложения. Для этого предположим, что существует еще одно разложение $v$ по базису вида

$$v = \eta_1 v_1 + \ldots + \eta_n v_n.$$

Вычитая из первого разложения второе, мы получим, что

$$0 = (\xi_1 - \eta_1) v_1 + \ldots + (\xi_n - \eta_n) v_n.$$

Так как векторы $v_1, \ldots, v_n$ линейно независимы, то из последнего выражения следуют равенства $\xi_i = \eta_i$. □

**1.3.** Последнее, о чем нам обязательно нужно сказать в этом параграфе — это о понятии подпространства линейного пространства.

**1.3.1.** Начнем с примера. Рассмотрим в трехмерном пространстве векторов $\mathbb{R}^3$ некоторый базис, состоящий из тройки векторов $v_1, v_2, v_3$. Выберем какие-то два из них, например, векторы $v_1$ и $v_2$, и рассмотрим всевозможные линейные комбинации этих векторов, то есть векторы вида

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2.$$

С геометрической точки зрения эти все эти векторы лежат в плоскости, проходящей через начало координат и содержащие два базисных вектора $v_1$ и $v_2$. Если мы отвлечемся от исходного трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$, то мы получим некоторое двумерное линейное пространство — пространство векторов на этой плоскости. Если же мы вспомним о том, что данная плоскость лежит в трехмерном пространстве, то по отношению к этому пространству наша плоскость, как говорят, является двумерным подпространством исходного трехмерного пространства векторов.

**1.3.2.** Теперь мы можем дать общее определение подпространства линейного пространства.

**Определение 1.6.** Подпространством $V'$ линейного пространства $V$ называется подмножество исходного множества векторов, которое образует линейное пространство относительно тех же самых операций сложения векторов и умножения векторов на числа, что и в исходном линейном пространстве $V$. Иными словами, это такое подмножество множества векторов, которое является замкнутым относительно операций сложения векторов и умножения на числа, введенных в исходном линейном пространстве: для любых $v' \in V'$ и $w' \in V'$ векторы

$$v' + w' \qquad \text{и} \qquad \alpha\, v'$$

также принадлежат тому же подмножеству $V'$ векторов.

**1.3.3.** Возьмем в $n$-мерном пространстве произвольный конечный набор векторов $v_1, \ldots, v_k$ и рассмотрим всевозможные их линейные комбинации

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k.$$

Ясно, что все такие линейные комбинации образуют некоторое подпространство исходного линейного пространства. Оно называется *подпространством, порожденным* набором векторов $v_1, \ldots, v_k$.

В случае, если векторы $v_1, \ldots, v_k$ являются линейно независимыми, данное подпространство является $k$-мерным подпространством, а сами эти векторы образуют в нем базис. При этом часто говорят, что это подпространство представляет собой *линейную оболочку, натянутую* на векторы $v_1, \ldots, v_k$.

# 2 Существование и единственность решений систем линейных алгебраических уравнений

**2.1.** Покажем теперь, как введенные ранее понятия помогают решать вопросы, связанные с существованием и единственностью решений систем линейных алгебраических уравнений.

**2.1.1.** Рассмотрим вначале наиболее простой и в то же время наиболее важный с практической точки зрения вид систем линейных алгебраических уравнений, а именно, системы, в которых количество $n$ неизвестных совпадает с количеством уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \qquad \qquad \ldots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n & = b_n \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $x_1, \ldots, x_n$ — неизвестные, которые мы должны из системы (1) определить, $a_{ij}$ — известные коэффициенты этой системы, $b_1, \ldots, b_n$ — известные числа, стоящие в правой части (1) (свободные члены системы).

Решением системы линейных алгебраических уравнений (1) называется набор чисел $c_1, \ldots, c_n$, подстановка которых вместо переменных $x_i$ обращает все $n$ уравнений (1) в тождества. Нам хочется понять, при каких условиях решение такой системы существует, а если существует, то является ли это решение единственным.

**2.1.2.** Прежде чем разбираться с общим случаем, давайте посмотрим на достаточно простой пример такого рода систем:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 6 \\ 4x_1 + 9x_2 = 15 \end{cases} \tag{2}$$

Несложно убедиться, что такая система уравнений имеет решение вида $x_1 = 3/2$, $x_2 = 1$, причем это решение является единственным.

Для того, чтобы понять, почему это так, давайте перепишем систему (2) в следующем виде:

$$x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_1\mathbf{a_1} + x_2\mathbf{a_2} = \mathbf{b}, \qquad \mathbf{a_1} := \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix},\ \mathbf{a_2} := \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix},\ \mathbf{b} := \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

В такой форме записи мы свободные члены $b_1 = 6$ и $b_2 = 15$, стоящие в правой части системы (2), объединили в один вектор-столбец $\mathbf{b}$. Аналогичным образом мы поступили с коэффициентами, стоящими при переменных $x_1$ и $x_2$. В результате мы получили три столбца чисел, которые можно трактовать как некоторые элементы двумерного линейного пространства $\mathbb{R}_2$ векторов на плоскости. Осталось понять, чем удобна такая форма записи системы (2).

С точки зрения теории, изложенной в предыдущем параграфе, на запись вида

$$x_1\mathbf{a_1} + x_2\mathbf{a_2} = \mathbf{b}$$

мы можем смотреть как на попытку представить вектор $\mathbf{b}$ в виде линейной комбинации векторов $\mathbf{a_1}$ и $\mathbf{a_2}$. При этом переменные $x_1$ и $x_2$ системы (2) играют роль коэффициентов в разложении вектора $\mathbf{b}$ по столбцам $\mathbf{a_1}$ и $\mathbf{a_2}$ коэффициентов системы линейных алгебраических уравнений (2). Такая точка зрения на предмет позволяет нам переформулировать понятие решения системы линейных алгебраических уравнений. Именно, решить систему (2) — это означает найти коэффициенты $x_1$ и $x_2$ в разложении вектора $\mathbf{b}$ правых частей по столбцам $\mathbf{a_1}$ и $\mathbf{a_2}$ коэффициентов этой системы.

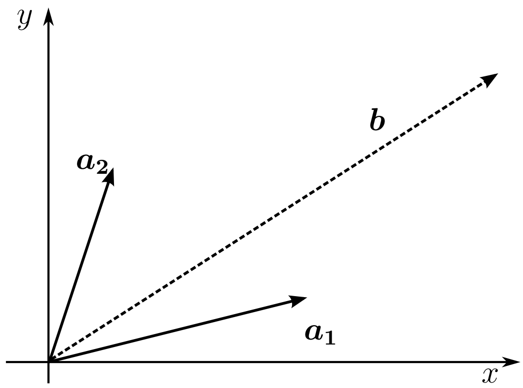


Рис. 3

На рис.3 представлена геометрическая интерпретация данной задачи. На этом рисунке изображены три вектора — вектор $\mathbf{b}$ правых частей, а также векторы $\mathbf{a_1}$ и $\mathbf{a_2}$ коэффициентов системы. Нам нужно представить вектор $\mathbf{b}$ в виде суммы векторов $\mathbf{a_1}$ и $\mathbf{a_2}$ с некоторыми коэффициентами $x_1$ и $x_2$. Из рисунка видно, что сделать это достаточно легко — для этого нужно удлинить вектор $\mathbf{a_1}$ в полтора раза. При этом, согласно правилу сложения векторов, вектор $\mathbf{b}$ как раз и будет представлять собой сумму векторов $\mathbf{a_2}$ и $1,5 \cdot \mathbf{a_1}$.

Используя данную выше интерпретацию, легко ответить на вопрос, почему же наша система (2) имеет единственное решение. Действительно, векторы $\mathbf{a_1}$ и $\mathbf{a_2}$ коэффициентов системы (2) неколлинеарны. Но мы с вами знаем, что любые два неколлинеарных вектора на плоскости образуют в линейном пространстве $\mathbb{R}_2$ базис. По этому базису мы единственным образом можем разложить любой вектор пространства $\mathbb{R}_2$, в том числе и вектор $\mathbf{b}$ правых частей системы линейных уравнений (2). А это и означает, что решение $x_1 = 3/2$, $x_2 = 1$ системы (2) единственно.

**2.1.3.** Аналогичные рассуждения легко переносятся на общий случай системы (1). А именно, представим эту систему в следующем виде:

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_1\mathbf{a_1} + x_2\mathbf{a_2} + \ldots + x_n\mathbf{a_n} = \mathbf{b}.$$

Как и в частном случае, решения такой системы мы можем трактовать как разложение вектора $\mathbf{b}$ $n$-мерного линейного пространства $\mathbb{R}^n$ по $n$ векторам $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_n}$. В случае, если эти векторы линейно независимы, они, как и любые $n$ линейно независимых векторов, образуют в пространстве $\mathbb{R}^n$ базис. Но это означает, что мы любой элемент пространства $\mathbb{R}^n$, в частности, вектор $\mathbf{b}$, можем разложить по этому базису, причем коэффициенты $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в разложении вектора $\mathbf{b}$ по базису определяются единственным образом.

С точки зрения решения системы линейных алгебраических уравнений (1) последнее утверждение можно переформулировать следующим образом. В случае, если векторы $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_n}$ столбцов коэффициентов этой системы линейно независимы, то решение системы (1) существует и единственно при любом векторе $\mathbf{b}$ правых частей.

**2.1.4.** Давайте теперь разберемся со случаем, когда столбцы $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_n}$ коэффициентов системы (1) оказываются линейно зависимыми. Начнем, как всегда, с примера.

Именно, рассмотрим следующую систему из двух линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = b_1 \\ 4x_1 + 6x_2 = b_2 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

У такой системы векторы $\mathbf{a_1}$ и $\mathbf{a_2}$ коэффициентов линейно зависимы. С геометрической точки зрения такая линейная зависимость означает, что эти два вектора лежат на одной прямой, то есть принадлежат некоторому линейному одномерному подпространству исходного двумерного пространства $\mathbb{R}^2$ векторов на плоскости.

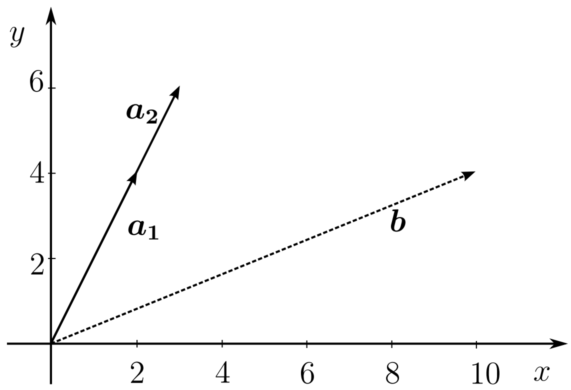


Рис. 4

Как следствие, у нас в данном примере имеются два частных случая. В первом случае вектор $\mathbf{b}$ правых частей этому линейному подпространству не принадлежит (рис. 4). Но тогда этот вектор мы по векторам $\mathbf{a_1}$ и $\mathbf{a_2}$ разложить не сможем. С точки зрения анализа системы (4) это означает, что эта система в данном случае решений не имеет.

Второй частный случай — это случай, когда вектор $\mathbf{b}$ правых частей принадлежит одномерному подпространству, натянутому на векторы $\mathbf{a_1}$ и $\mathbf{a_2}$ (рис. 5). В этом случае мы его можем по этим двум векторам разложить. Однако в данном случае такое разложение единственным уже не будет.

Действительно, любой ненулевой вектор, например, вектор $\mathbf{a_1}$, образует в одномерном подпространстве базис. Как следствие, вектор $\mathbf{b} - x_2\mathbf{a_2}$ мы можем однозначно разложить по этому вектору при любом фиксированном значении параметра $x_2$. Но этот параметр мы можем вы-

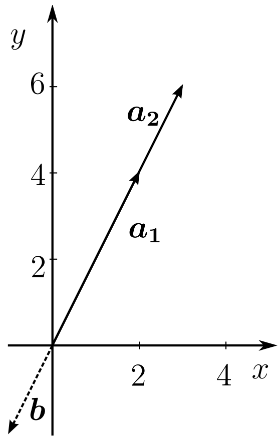


Рис. 5

брать бесконечным числом способов. Следовательно, в данном случае мы получаем бесконечное количество решений системы (4).

**2.1.5.** Обобщим полученные результаты на случай произвольной системы вида (1). Предположим, что $n$ столбцов коэффициентов данной системы оказались линейно зависимыми. Это означает, что они принадлежат какому-то линейному подпространству размерности меньшей, чем размерность $n$ исходного пространства векторов. Тогда в случае, когда вектор $\mathbf{b}$ правых частей этому подпространству не принадлежит, решений система (1) не имеет. В случае же, когда вектор $\mathbf{b}$ принадлежит подпространству, натянутому на векторы $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_n}$, система (1) имеет бесконечное количество решений.

**2.2.** Перейдем теперь анализу систем вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m &= b_2 \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m &= b_n \end{cases} \tag{5}$$

в которых количество $m$ переменных не равно числу $n$ уравнений.

**2.2.1.** Начнем с систем уравнений, в которых количество уравнений $n$ меньше количества $m$ переменных, то есть к так называемым недоопределенным системам. Рассмотрим следующий простейший пример такого рода системы:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6 \\ 4x_1 + 9x_2 + 7x_3 = 15 \end{cases} \iff x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Из векторного представления этой системы

$$x_1\mathbf{a_1} + x_2\mathbf{a_2} + x_3\mathbf{a_3} = \mathbf{b}, \qquad \mathbf{a_1} := \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \ \mathbf{a_2} := \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix}, \ \mathbf{a_3} := \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} := \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix}$$

мы можем сразу заключить, что у системы (6) имеется бесконечное количество решений. Действительно, любая пара векторов $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}$ столбцов коэффициентов этой системы является линейно независимой, то есть образует базис линейного пространства $\mathbb{R}^2$. Перенося, в частности, вектор $x_3\mathbf{a_3}$ в правую часть этого уравнения, мы при любом фиксированном значении $x_3$

разложим вектор $\mathbf{b} - x_2\mathbf{a_3}$ по базису, состоящему из двух линейно независимых векторов $\mathbf{a_1}$ и $\mathbf{a_2}$. Но так как $x_3$ мы можем выбирать бесконечным количеством способов, то и решений этой системы мы имеем бесконечно много. Аналогичная ситуация у нас будет и в том случае, когда из трех векторов $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}$ хотя бы два будут являться линейно независимыми.

**2.2.2.** Теперь рассмотрим чуть более экзотический случай, а именно, систему

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = b_1 \\ 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 = b_2 \end{cases} \iff x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \tag{7}$$

в которой все три вектора $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}$ принадлежат одному и тому же одномерному линейному подпространству, то есть лежат на одной и той же прямой, проходящей через начало координат. Если при этом вектор $\mathbf{b}$ правых частей не принадлежит данному подпространству, то решений системы (7) не существует. В противном случае у этой системы имеется бесконечное количество решений.

**2.2.3.** Теперь перейдем к системам, в которых количество $n$ уравнений больше количества $m$ неизвестных — так называемым переопределенным системам.

Начнем, как обычно, с примеров. В качестве первого примера рассмотрим систему уравнений вида

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = b_1 \\ 4x_1 + 9x_2 = b_2 \\ 6x_1 + 27x_3 = b_3 \end{cases} \iff x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Как видно из векторного представления данной системы, мы пытаемся трехмерный вектор $\mathbf{b}$ правых частей разложить по двум векторам $\mathbf{a_1}$ и $\mathbf{a_2}$. В данном примере два этих вектора линейно независимы. Тогда, если вектор $\mathbf{b}$ принадлежит подпространству, натянутому на эти два вектора, то у системы существует единственное решение. Действительно, в этом случае векторы $\mathbf{a_1}$ и $\mathbf{a_2}$ образуют в этом подпространстве базис, и мы любой вектор, принадлежащий этому подпространству, можем по нему разложить. Если же вектор $\mathbf{b}$ не принадлежит подпространству, натянутому на векторы $\mathbf{a_1}$ и $\mathbf{a_2}$, то решений у системы (8) не существует.

Теперь рассмотрим систему вида

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = b_1 \\ 4x_1 + 6x_2 = b_2 \\ 6x_1 + 9x_3 = b_3 \end{cases} \iff x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \tag{9}$$

в которой векторы $\mathbf{a_1}$ и $\mathbf{a_2}$ коэффициентов системы линейно зависимы, то есть лежат на одной и той же прямой. Понятно, что в случае, когда вектор $\mathbf{b}$ правых частей на этой прямой не лежит, решений у системы (9) не существует. Если же он лежит на такой прямой, то решения системы (9) существуют, однако их бесконечно много.

**2.2.4.** Подведем теперь некоторые итоги проведенным выше рассуждениям. Вернемся к общему виду системы (5) и перепишем ее в векторном виде:

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{bmatrix} + \ldots + x_m \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \iff x_1\mathbf{a_1} + x_2\mathbf{a_2} + \ldots + x_m\mathbf{a_m} = \mathbf{b}.$$

Заметим, что и векторы $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_m}$ коэффициентов системы (5), и вектор $\mathbf{b}$ правых частей принадлежат линейному пространству $\mathbb{R}^n$ $n$-мерных векторов.

Рассмотрим линейное подпространство, натянутое на векторы $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_m}$. Если вектор $\mathbf{b}$ этому подпространству не принадлежит, то решения у системы (5) отсутствуют.

Предположим теперь, что $\mathbf{b}$ принадлежит рассматриваемому нами линейному подпространству. В этом случае решения у системы (5) точно имеются. Однако эта система будет иметь единственное решение лишь в том случае, когда размерность линейного подпространства, натянутого на векторы $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_m}$, совпадает с количеством $m$ этих векторов. В этом случае эти векторы образуют базис данного подпространства, и любой вектор $\mathbf{b}$ мы можем однозначно по этому базису разложить. В противном случае система будет иметь бесконечное число решений.

# 3 Решение систем линейных алгебраических уравнений

**3.1.** Итак, в предыдущем параграфе мы разобрались с вопросами существования и единственности решений систем линейных алгебраических уравнений. Осталось понять, как же нам, собственно, эти системы решать. Мы начнем с описания самого известного и наиболее важного с практической точки зрения метода решения таких систем — с метода Гаусса.

**3.1.1.** Как обычно, рассмотрим вначале достаточно простой пример системы линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 = 6 \\ \phantom{4}x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$$

Основная сложность построения решения такого рода систем состоит в том, что у нас в каждом уравнении содержится несколько (в данном случае — две) неизвестных. Достаточно очевидный способ борьбы с этой неприятностью — исключить одну из этих двух переменных, например, переменную $x_1$, из одного из уравнений, например, из второго, и подставить затем полученное для $x_1$ выражение в первое уравнение:

$$x_1 = 3 - 2x_2 \qquad \Longrightarrow \qquad 4(3 - 2x_2) + 5x_2 = 6.$$

В результате мы получаем единственное уравнение относительно единственной же неизвестной $x_2$, которое уже легко решается:

$$-3x_2 = -6 \qquad \Longrightarrow \qquad x_2 = 2 \Longrightarrow \qquad x_1 = -1.$$

**3.1.2.** Метод Гаусса слегка модифицирует описанную идею так, чтобы с ее помощью было удобно решать системы более сложного вида. Именно, известно, что мы можем домножать любое из уравнений системы на вещественное число, а также складывать любое из уравнений с любым другим уравнением этой системы — от этих манипуляций решение системы не изменится. Воспользуемся данными возможностями для исключения переменной $x_1$ из второго уравнения. Для этого домножим вначале второе уравнение исходной системы на четверку:

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 = 6 \\ 4x_1 + 8x_2 = 12 \end{cases}$$

В такой системе при $x_1$ и в первом, и во втором уравнении стоят одинаковые коэффициенты. Если мы теперь из второго уравнения вычтем первое, то мы, тем самым, исключим из второго уравнения переменную $x_1$:

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 = 6 \\ \qquad\;\; 3x_2 = 6 \end{cases}$$

Теперь мы легко определим из второго уравнения переменную $x_2$, а затем, подставив найденное значение $x_2$ в первое уравнение, найдем нужное нам значение переменной $x_1$.

**3.1.3.** Покажем теперь, как работает данный подход на несколько более сложном примере системы трех уравнений вида

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 4x_1 - 6x_2 = -2 \\ -2x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases}$$

Наша задача по-прежнему состоит в том, чтобы исключить все переменные, кроме одной, хотя бы из одного из уравнений системы. Кроме того, нам бы хотелось сделать это так, чтобы и остальные переменные при этом находились затем предельно просто. Собственно, метод Гаусса и позволяет нам эти пожелания реализовать.

На первом шаге метод Гаусса исключает переменную $x_1$ из всех уравнений, кроме первого. Будем делать это так же, как и ранее, а именно, домножая эти уравнения на числа и вычитая одно из другого. Именно, для исключения $x_1$ из второго уравнения домножим первое уравнение на 2 и вычтем получившееся уравнение из второго. В результате получим систему вида

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ -8x_2 - 2x_3 = -12 \\ -2x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases}$$

Теперь исключим $x_1$ из третьего уравнения. Для этого просто прибавим к третьему уравнению первое:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ -8x_2 - 2x_3 = -12 \\ 8x_2 + 3x_3 = 14 \end{cases}$$

На втором шаге метод Гаусса работает с подсистемой, состоящей из второго и последующих уравнений. И состоит этот шаг в исключении переменной $x_2$ из третьего и последующих уравнений. В данном примере нам достаточно исключить ее из третьего уравнения, прибавив к третьему уравнению второе. В результате получим систему

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ -8x_2 - 2x_3 = -12 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

последнее уравнение в которой содержит единственную переменную — переменную $x_3$.

Заметим, что в результате описанного выше процесса (который называется прямым ходом метода Гаусса) мы, как говорят, привели систему к ступенчатому (или треугольному) виду. Все, что нам теперь осталось — это последовательно, идя снизу вверх, определить значения оставшихся переменных. Именно, из второго уравнения мы, зная $x_3$, легко определим $x_2 = 1$. Затем из первого уравнения по известным $x_2$ и $x_3$ мы восстановим значение переменной $x_1 = 2$. Тем самым мы окончательно решим нашу систему уравнений. Этап последовательного определения переменных из треугольной системы называют иногда обратным ходом метода Гаусса.

**3.1.4.** Теперь подведем итоги вышесказанному. Как мы поняли, при решении системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса у нас имеются два прохода — прямой и обратный. На первом мы последовательно, шаг за шагом, исключаем переменные с меньшими индексами. Именно, вначале мы из всех уравнений, кроме первого, исключаем переменную $x_1$, затем в подсистеме, состоящей из последних $(n-1)$ уравнений, мы во всех уравнениях, кроме второго, исключаем переменную $x_2$ и так далее. В результате этого процесса мы в простейшем случае получаем единственное уравнение относительно единственной неизвестной $x_n$, которое уже легко решается. На втором этапе мы, зная переменные $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{k+1}$, находим из $k$-го уравнения переменную $x_k$.

На этом месте стоит заметить, что описанная выше схема метода Гаусса описывает только лишь простейший случай. В этом простейшем случае мы, во-первых, предполагаем, что система состоит из $n$ уравнений с $n$ неизвестными, и что эта система имеет единственное решение. Кроме того, мы считаем, что при прямом проходе метода Гаусса коэффициенты при $x_i$ в $i$-м уравнении отличны от нуля. В случае, когда последнее предположение не выполняется, мы вынуждены добавлять в метод Гаусса перестановку столбцов системы уравнений. Проблема существования и единственности решения является несколько более серьезной. Однако можно показать, что и с этой проблемой метод Гаусса справляется. Более того, чаще всего именно метод Гаусса и используют на практике для того, чтобы понять, существует ли у данной системы решение, а если существует, то единственно ли оно.

**3.2.** Перейдем теперь к изучению достаточно полезной на практике модификации метода Гаусса — так называемом методе $LU$-разложения. Эта модификация была придумана в 1948 году Аланом Тьюрингом.

**3.2.1.** Иногда удобно систему линейных алгебраических уравнений (1) записывать в так называемом матричном виде

$$\mathcal{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Здесь

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad \text{и} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}$$

есть векторы-столбцы правых частей системы (1) и неизвестных этой системы, а

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

есть матрица коэффициентов системы (1). Напомним, что в результате умножения матрицы $\mathcal{A}$ размерами $n \times n$ на вектор-столбец $\mathbf{x}$ у нас получается вектор-столбец $\mathbf{b}$, а само умножение матрицы на вектор-столбец происходит по следующему правилу: мы поэлементно умножаем $i$-ю строку матрицы $\mathcal{A}$ на столбец $\mathbf{x}$, получая в результате $i$-ю компоненту вектора-столбца $\mathbf{b}$:

$$a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \ldots + a_{in} \cdot x_n = b_i.$$

**3.2.2.** В результате прямого хода метода Гаусса мы переходим от исходной системы уравнений (1) к системе с, как говорят, верхнетреугольной матрицей. Именно, мы в результате такого прохода приводим систему (1) к виду

$$\begin{cases} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \ldots + u_{1n}x_n & = \widetilde{b}_1 \\ \qquad\qquad u_{22}x_2 + \ldots + u_{2n}x_n & = \widetilde{b}_2 \\ \qquad\qquad\qquad \ddots & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad u_{nn}x_n & = \widetilde{b}_n \end{cases}$$

которую в матричном виде мы можем переписать так:

$$\mathcal{U}\mathbf{x} = \widetilde{\mathbf{b}}, \qquad \mathcal{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \ldots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \ldots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & u_{nn} \end{pmatrix}.$$

Имея такую систему, мы вначале из последнего уравнения находим неизвестную $x_n$, затем из предпоследнего — переменную $x_{n-1}$ и так далее.

**3.2.3.** Однако оказывается, что в процессе прямого хода метода Гаусса мы получаем несколько больше, чем коэффициенты $u_{ij}$ и $b_i$ матрицы $\mathcal{U}$ и вектора $\mathbf{b}$. На самом деле, мы в результате этого хода получаем разложение матрицы $\mathcal{A}$ в виде произведения $\mathcal{L} \cdot \mathcal{U}$ двух матриц — верхнетреугольной матрицы $\mathcal{U}$, а также нижнетреугольной матрицы $\mathcal{L}$ вида

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \ldots & l_{nn} \end{pmatrix}.$$

Предположим, вначале, что это действительно так, то есть что мы умеем, несколько модифицируя метод Гаусса, строить, как говорят, $LU$-разложение матрицы $\mathcal{A}$ коэффициентов системы (1). Давайте посмотрим, зачем нам это может понадобиться.

Так как матрица $\mathcal{A}$ представлена у нас в виде произведения пары матриц $\mathcal{L}$ и $\mathcal{U}$, то мы систему уравнений (1), записанную в матричном виде, можем переписать так:

$$\mathcal{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \Longleftrightarrow \quad (\mathcal{L} \cdot \mathcal{U})\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{L} \cdot (\mathcal{U}\mathbf{x}) = \mathbf{b} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{L} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{b},$$

где $\mathbf{y} = \mathcal{U}\mathbf{x}$. Так как матрица $\mathcal{L}$ нижнетреугольная, то мы из уравнения $\mathcal{L} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{b}$ легко по вектору $\mathbf{b}$ правых частей сможем восстановить вектор-столбец $\mathbf{y}$. Действительно, данная система уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{cases} l_{11}y_1 & = b_1 \\ l_{21}y_1 + l_{22}y_2 & = b_2 \\ \qquad\qquad \ddots & \\ l_{11}y_1 + l_{12}y_2 + \ldots + l_{nn}y_n & = b_n \end{cases}$$

Из первого уравнения мы легко определим $y_1$, затем из второго уравнения, зная $y_1$, мы вычислим $y_2$ и так далее. Но теперь, зная $\mathbf{y}$, мы из решения системы $\mathcal{U} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}$, используя обратный ход метода Гаусса, сможем восстановить и вектор $\mathbf{x}$. Иными словами, мы, построив $LU$-разложение матрицы $\mathcal{A}$, достаточно просто сможем вычислить как вектор $\mathbf{y}$, так и искомый вектор $\mathbf{x}$.

В этом месте возникает законный вопрос — зачем же нам все эти сложности? В случае однократного решения системы (1) мы, чаще всего, сможем прекрасно обойтись и классическим методом Гаусса. Предположим, однако, что у нас имеется какая-то динамическая задача, в которой матрица $\mathcal{A}$ коэффициентов системы (1) фиксирована, а вектор $\mathbf{b}$ правых частей этой системы достаточно часто меняется. Это встречается, например, в задачах, в которых матрица $\mathcal{A}$ описывает какое-то механическое устройство, а вектор $\mathbf{b}$ описывает постоянно меняющиеся внешние воздействия на это устройство. В этом случае нам для целого набора векторов $\mathbf{b}$ правых частей приходится решать систему (1), получая, как говорят, реакцию $\mathbf{x}$ рассматриваемого механического устройства на эти внешние воздействия. И вот в таких задачах метод $LU$-разложения оказывается чрезвычайно полезен.

Действительно, если мы раз и навсегда построили на первом шаге $LU$-разложение матрицы $\mathcal{A}$, то затем нам останется только лишь многократно (для разных $\mathbf{b}$) решать системы вида

$$\mathcal{L} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{b}, \qquad\qquad \mathbf{y} = \mathcal{U}\mathbf{x}.$$

А такого рода системы мы можем решать с помощью обратного хода метода Гаусса достаточно быстро — количество операций, которое нам на это требуется, пропорционально $n^2$. Прямой же ход метода Гаусса, на котором мы и строим $LU$-разложение матрицы $\mathcal{A}$, достаточно трудоемок — он требует количество операций, пропорциональное $n^3$. Иными словами, для такого рода динамических задач метод $LU$-разложения существенно экономит количество операций, которое нам нужно совершить в процессе построения решения.

**3.2.4.** Осталось разобраться с тем, как же нам в процессе прямого хода метода Гаусса построить $LU$-разложение матрицы $\mathcal{A}$. Давайте, опять-таки, разберем алгоритм построения такого разложения на конкретном, достаточно простом примере уже знакомой нам системы уравнений

$$\begin{cases} \phantom{4}x_1 + 2x_2 = 3 \\ 4x_1 + 5x_2 = 6 \end{cases}$$

Матрицу

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

этой системы нам нужно представить в виде произведения нижнетреугольной матрицы $\mathcal{L}$ и верхнетреугольной матрицы $\mathcal{U}$:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \mathcal{L} \cdot \mathcal{U} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11}u_{11} & l_{11}u_{12} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + l_{22}u_{22} \end{pmatrix}.$$

Заметим, прежде всего, что для определения шести неизвестных коэффициентов матриц $\mathcal{U}$ и $\mathcal{L}$ у мы из последнего равенства получаем лишь четыре уравнения:

$$\begin{cases} l_{11}u_{11} = 1 \\ l_{11}u_{12} = 2 \\ l_{21}u_{11} = 4 \\ l_{21}u_{12} + l_{22}u_{22} = 5 \end{cases}$$

Иными словами, мы получаем недоопределенную систему уравнений на неизвестные коэффициенты $u_{ij}$ и $l_{ij}$. Для того, чтобы от этой неопределенности избавиться, давайте положим все диагональные элементы $l_{ii}$ матрицы $\mathcal{L}$ равными единице. Тогда оставшиеся коэффициенты из системы уравнений

$$\begin{cases} u_{11} = 1 \\ u_{12} = 2 \\ l_{21}u_{11} = 4 \\ l_{21}u_{12} + u_{22} = 5 \end{cases}$$

определятся уже однозначно: $u_{11} = 1$, $u_{12} = 2$, $l_{21} = 4$ и $u_{22} = -3$. Таким образом, мы для заданной матрицы $\mathcal{A}$ построили следующее $LU$-разложение этой матрицы:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \mathcal{L} \cdot \mathcal{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Вспомним теперь, как мы решали такую систему методом Гаусса. На первом шаге мы исключали из второго уравнения системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 4x_1 + 5x_2 = 6 \end{cases}$$

переменную $x_2$, домножая первую строку этого уравнения на четверку и вычитая из второго уравнения первое. В результате мы получали систему вида

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ \quad -3x_2 = -6 \end{cases}$$

коэффициенты которой в точности совпадают с коэффициентами матрицы $\mathcal{U}$. Посмотрим теперь на коэффициенты матрицы $\mathcal{L}$. Заметим, что четверка, стоящая на месте коэффициента $l_{21}$ этой матрицы, в точности совпадает с тем множителем, на который нам нужно было домножить первое уравнение исходной системы для исключения переменной $x_2$ из второго уравнения этой системы. Данный факт, конечно же, случайным не является. Оказывается, что если мы возьмем нижнетреугольную матрицу с единицами на главной диагонали, и будем на место коэффициента $l_{ij}$ записывать множитель, на который нам нужно домножить $i$-ю строку для того, чтобы исключить переменную $x_j$ в $j$-й строке в прямом ходе метода Гаусса, мы и получим искомую матрицу $\mathcal{L}$.

**3.2.5.** Мы не будем давать строгого доказательства описанного выше алгоритма построения матрицы $\mathcal{L}$. Вместо этого мы еще раз продемонстрируем алгоритм $LU$-разложения на примере чуть более сложной системы линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{cases} 2x_1 + \phantom{6}x_2 + \phantom{2}x_3 = \phantom{-}5 \\ 4x_1 - 6x_2 \phantom{+ 2x_3} = -2 \\ -2x_1 + 7x_2 + 2x_3 = \phantom{-}9 \end{cases}$$

Матрица $\mathcal{A}$ этой системы имеет вид

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Нам хотелось бы определить неизвестные коэффициенты $l_{ij}$ в матрице

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}.$$

Для этого проведем прямой ход метода Гаусса для этой системы. На первом шаге нам нужно исключить переменную $x_1$ из второго и третьего уравнения системы. Для этого нам вначале нужно первое уравнение домножить на 2 и вычесть из второго уравнения первое. Это означает, что в матрицу $\mathcal{L}$ нам нужно записать коэффициент $l_{21} = 2$. Затем нам нужно первое уравнение домножить на $(-1)$ и вычесть его из третьего уравнения. Иными словами, нам в качестве коэффициента $l_{31}$ матрицы $\mathcal{L}$ нужно взять $(-1)$.

В результате первого шага метода Гаусса мы пришли к системе уравнений вида

$$\left\{ \begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \\ -8x_2 - 2x_3 &= -12 \\ 8x_2 + 3x_3 &= 14 \end{aligned} \right.$$

В этой системе нам из третьего уравнения нужно исключить $x_2$. Для этого мы домножаем второе уравнение на $(-1)$ и вычитаем из третьего уравнения второе. С точки зрения построения матрицы $\mathcal{L}$ это означает, что коэффициент $l_{32}$ нам нужно положить равным минус единице.

Итак, в результате прямого хода метода Гаусса мы получили следующий вид матрицы $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Кроме того, после прямого прохода метода Гаусса мы получили систему линейных уравнений вида

$$\left\{ \begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \\ -8x_2 - 2x_3 &= -12 \\ x_3 &= 2 \end{aligned} \right.$$

Тем самым мы построили и верхнетреугольную матрицу

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Иными словами, мы в процессе прямого хода метода Гаусса построили $LU$-разложение матрицы $\mathcal{A}$.