

מסדה נס 4-סדרה הנדסית

מתוך קיץ 2008 מועד ב' 5 יחידות

נתונה סדרה הנדסית כי $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$.

א. האיבר השלישי בסדרה a_n גדול ב-2 מהאיבר השני, והאיבר הרביעי גדול פי 2 מהאיבר השלישי. מצא את a_1 .

ב. נתונה סדרה הנדסית נוספת $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$.

משתי הסדרות בונים סדרה הנדסית חדשה: $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \dots, \frac{a_n}{b_n}$.

מנת הסדרה החדשה היא 3, וסכום 10 האיברים הראשונים בסדרה החדשה הוא 7381.

(1) מצא את האיבר הראשון בסדרה החדשה ומצא את b_1 .

(2) מצא את מנת הסדרה b_n .

(3) מצא את n שעבורו $b_n = 4 \cdot \frac{8}{27}$.

פתרון: א. $a_1 = 1$. ב. $b_1 = 4$. $\frac{a_1}{b_1} = \frac{1}{4}$. ב. $q_b = \frac{2}{3}$. ב. $n = 4$.

ב) a_n - סדרה הנדסית a_1 - ?

$$\begin{aligned} \text{I } \begin{cases} a_3 = a_2 + 2 \\ a_4 = 2 \cdot a_3 \end{cases} &\Rightarrow a_1 \cdot q^2 = a_1 \cdot q + 2 \rightarrow a_1(q^2 - q) = 2 \quad | : (1) \rightarrow a_1 = \frac{2}{q^2 - q} = \frac{2}{2^2 - 2} = \frac{2}{2} \\ \text{II } & a_1 \cdot q^3 = 2 \cdot a_1 \cdot q^2 \quad | : a_1 \neq 0, q^2 > 0 \rightarrow q = 2 \end{aligned}$$

ג) b_n - סדרה הנדסית

$$\begin{aligned} c_n = \frac{a_n}{b_n}, \quad q_c = 3, \quad S_{f_0} = 7,381 &\rightarrow \frac{c_1(q_c^{10} - 1)}{q_c - 1} = 7,381 \rightarrow c_1(3^{10} - 1) = 7,381 \cdot (3 - 1) \\ c_1 &= \frac{14,762}{59,048} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{1}{4} \\ b_1 &= \frac{4 \cdot a_1}{1} = \frac{4 \cdot 1}{1} = 4 \end{aligned}$$

c_1 - ? , b_1 - ?

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{1}{4}, \quad b_1 = 4$$

(2) $b_n = \frac{a_n}{c_n}$ q_b - ?

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \left(\frac{\frac{a_{n+1}}{c_{n+1}}}{\frac{a_n}{c_n}} \right) = \frac{a_{n+1} \cdot c_n}{a_n \cdot c_{n+1}} = \frac{a_n \cdot q_a \cdot c_n}{a_n \cdot c_n \cdot q_c} = \frac{q_a}{q_c} = \frac{2}{3} = q_b$$

(3) $b_n = 4 \cdot \frac{8}{27}$, n - ?

$$b_1 \cdot q_1^{n-1} = 4 \cdot \frac{8}{27}$$

$$4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 4 \cdot \frac{8}{27} \quad | : 4$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{2^3}{3^3} \rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \rightarrow n-1=3 \rightarrow n=4$$