Calcul intégral

Remarques

I. Intégrale d'une fonction continue sur un segment :

Activité ① :

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle définie par $f(x) = 3x^2 - 1$.

1. Déterminer deux primitives F et G de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $F(2) - F(0), G(2) - G(0)$. Que remarquez-vous ?

Le nombre $F(b) - F(a)$ ne dépend pas du choix d'une primitive de la fonction f .
Le nombre $F(b) - F(a)$ s'appelle intégrale de la fonction f de a à b elle est notée $\int_a^b f(x)dx$.

Définition :

Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$ et F une primitive de f sur $[a,b]$.
Le nombre $F(b) - F(a)$ et appelé ***intégrale*** de f de a à b et on écrit : $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Exemple :

Calculons l'intégrale suivante $\int_0^1 \sqrt{x+1}dx$.

La fonction $x \mapsto \sqrt{x+1}$ est continue sur $[0;1]$.

Donc : $\int_0^1 \sqrt{x+1}dx = \int_0^1 (x+1)'\sqrt{x+1}dx$

$$= \int_0^1 (x+1)'(x+1)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}(\sqrt{8} - 1).$$

Application ① :

Calculer les intégrales suivantes :

a. $\int_0^2 (x+4)dx$ b. $\int_1^e \frac{1}{x}dx$ c. $\int_{e^2}^{e^4} \frac{ln(x)}{x}dx$; d. $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx$

e. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x)dx$ f. $\int_{-2}^{-1} x2^{-x^2}dx$

Remarque :

Dans l'écriture $\int_a^b f(x)dx$, on peut remplacer la variable x par n'importe quelle autre lettre. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(t)dt = \cdots$

Exercice ① :

Calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \int_{-1}^1 (2x^3 - 5x^2 + 2)dx$ $I_2 = \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right)dx$ $I_3 = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx$

$I_4 = \int_0^4 x\sqrt{1+x^2}dx$ $I_5 = \int_0^{ln3} e^x\sqrt{e^x+1}dx$ $I_6 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} cosx.sin^5x\,dx$

$I_7 = \int_1^2 \frac{x-1}{x^2-2x+2}dx$ $I_8 = \int_0^1 (1-x)e^{x^2-2x+3}\,dx$ $I_9 = \int_1^{e^2} \frac{1}{x\sqrt{1+lnx}}dx$

Conséquences :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Pour tous a, b et c de I on a :

- $\int_a^a f(x)dx = 0$.
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ (Relation de Chasles).

Exemple :

$$\int_{-3}^2 |x|\,dx = \int_{-3}^0 |x|\,dx + \int_0^2 |x|\,dx = \int_{-3}^0 -xdx + \int_0^2 xdx = \left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-3}^0 + \left[-\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{13}{2}$$

Application ② :

Calculer les intégrales suivantes :

a. $\int_{-1}^1 \frac{2|x|}{x^2+1}dx$ b. $\int_{-1}^5 |x^2 - 4x|\,dx$ c. $\int_0^2 |e^{-x+1} - 1|\,dx$

Propriété :

Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a,b]$ et $k \in \mathbb{R}$.

Pr. LATRACH ABDELKBIR

- $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$
- $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$

Application ③:

On considère les intégrales $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(3x)\cos(x)dx$ et $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(3x)\sin(x)dx.$

1. Vérifier que $cos(3x)\,cos(x)+sin(3x)\,sin(x)=\cos(2x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
2. Vérifier que $cos(3x)\,cos(x)-sin(3x)\,sin(x)=\cos(4x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
3. Calculer $I+J$ et $I-J$ puis en déduire I et J.

Exercice ②:

On pose : $K=\int_0^{ln(2)} \frac{e^t-1}{e^t+1}dt$ et $L=\int_0^{ln(2)} \frac{1}{e^t+1}dt$

Calculer $K+L$ et $K+2L$ puis en déduire les valeurs de K et L.

II. Intégrale et ordre – la valeur moyenne :

1. Intégrale et ordre :

Propriété :

Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a,b]$ $(a\le b)$.

- Si $(\forall x\in[a,b])$; $f(x)\ge 0$, alors $\int_a^b f(x)dx \ge 0$.
- Si $(\forall x\in[a,b])$; $f(x)\le g(x)$, alors $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

Application ④ :

1. Montrer que : $\int_1^2 ln(x^2+1)dx \ge 0$.
2. Montrer que : $-\frac{1}{2}\le \int_1^2 \frac{\sin(x)}{x^2}dx \le \frac{1}{2}$.

2. Valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment :

Définition :

Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$ $(a\le b)$.

l existe au moins un réel $c\in[a,b]$ tel que : $f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$

Le nombre $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ est appelé **valeur moyenne** de la fonction f sur l'intervalle $[a,b]$

Exemple :

La valeur moyenne de la fonction $x\mapsto \frac{2x}{1+x^2}$ sur l'intervalle $[1,3]$ est $\frac{1}{2}\int_1^3 \frac{2x}{1+x^2}\,dx$

C'est-à-dire : $\frac{1}{2}[ln(x^2+1)]_1^3=\frac{ln(5)}{2}$.

Application ⑤ :

Calculer la valeur moyenne de la fonction $x\mapsto \frac{ln^2(x)+x}{x}$ sur l'intervalle $[1,e]$.

III. Techniques de calcul d'intégrales :

1. Utilisation des primitives :

Application ⑥:

1. Calculer les intégrales suivantes :

$I=\int_2^e \frac{1}{x(ln(x)+1)}dx$; $J=\int_0^1 te^{t^2}dt$; $K=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan(x)\,dx$ et $L=\int_0^1 \frac{2x+2}{(x^2+2x+1)^2}dx.$

2. ***a-*** Vérifier que : $(\forall x\in\mathbb{R})$ $\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

   b- En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^1 \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}dx.$

Exercice ③ : BAC 2002

1. Calculer l'integrale $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{cos^2(x)}-4\cos(2x)\right)dx.$
2. Montrer que $\left(\frac{x}{x^2+1}\right)'=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ pour tout réel x puis calculer $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}dx.$

2. Décomposition des fractions rationnelles en une somme de fractions rationnelles :

Application ⑦ :

Pr. LATRACH ABDELKBIR

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par : $f(x)=\frac{x^2-6x+4}{x-1}$.

1. Déterminer les nombres réels $a, b, et\ c$ pour que l'on ait pour tout $x\ de\ \mathbb{R}\backslash\{1\}$:
$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}.$$
2. En déduire la valeur de l'intégrale : $\int_2^3 f(x)dx$.

3. Linéarisation des fonctions trigonométriques :

Application ⑧ :

Linéariser le polynôme trigonométrique $cos^3 x$ puis calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos^3 x\, dx$.

Exercice ④ : BAC 2003

Vérifier, pour tout réel x, que : $sin^2x.cos^3 x = cos\, x\,.sin^2x - cos\, x\,.sin^4 x$.

Calculer l'integrale $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2x.cos^3 x\, dx$.

4. Intégration par parties :

Soit $u\ et\ v$ deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a,b]$ telles que $u'et\ v'$ continues sur [a, b].

On a : $(\forall x\in[a,b])$; $\left(u(x)v(x)\right)'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$.

Alors : $\int_a^b \left(u(x)v(x)\right)'dx=\int_a^b u'(x)v(x)dx+\int_a^b u\,(x)v'^{(x)}dx$

D'où $\int_a^b u'(x)v(x)dx=[u(x)v(x)]_a^b-\int_a^b u\,(x)v'(x)dx$.

Propriété :

Soient $u\ et\ v$ deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que ses dérivées $u'et\ v'$ sont continues sur I.

Pour tout $(a,b)\in I^2$ on a : $\int_a^b u'(x)v(x)dx=[u(x)v(x)]_a^b-\int_a^b u\,(x)v'(x)dx$.

Exemple :

Calculons l'intégrale $I=\int_0^1 xe^x dx$.

Posons $\begin{cases}u'(x)=e^x\\ v(x)=x\end{cases}$, alors $\begin{cases}u(x)=e^x\\ v'(x)=1\end{cases}$.

Il s'ensuit $I=[xe^x]_0^1-\int_0^1 e^x dx=[xe^x]_0^1-[e^x]_0^1=e-e+1=1$.

Remarque :

Le choix des fonctions u' et v n'est pas arbitraire. Leur bonne sélection joue un rôle clé dans cette technique.

Dans l'exemple précédent si notre choix est $\begin{cases}u'(x)=x\\ v(x)=e^x\end{cases}$, alors $\begin{cases}u(x)=\frac{1}{2}x^2\\ v'(x)=e^x\end{cases}$.

On obtient donc $\int_0^1 xe^x dx=\left[\frac{1}{2}x^2e^x\right]_0^1-\int_a^b\frac{1}{2}x^2e^x dx$ ce qui rend le calcul de l'intégrale voulue est très compliqué.

Application ⑨:

En utilisant la formule d'intégration par parties, Calculer les intégrales suivantes :

$I_1=\int_1^e x^2lnxdx$; $I_2=\int_{\frac{1}{2}}^1(2x-1)e^{-\frac{x}{2}}dx$; $I_3=\int_2^e ln\,(x+2)dx$ et$I_4=\int_0^\pi x^2cosxdx$.

Exercice ⑤ : BAC 2001

1. Vérifier, pour tout $x\in[0;1]$, que : $\frac{x^3+x}{x+1}=x^2-x+2-\frac{2}{x+1}$.
2. En utilisant la formule d'intégration par parties, Calculer l'integrale
$I=\int_0^1(3x^2+1)\ln(x+1)\,dx$.

Exercice ⑥ :

En utilisant la formule d'intégration par parties, Calculer les integrales suivantes :

- $I_1=\int_1^{e^2} x(lnx)^2dx$
- $I_2=\int_1^2 x\sqrt{3-x}dx$
- $I_3=\int_{\sqrt{e}}^e\frac{x\ln x}{(x^2+1)^2}dx$
- $I_4=\int_1^2\frac{ln(1+t)}{t^2}dt$
- $I_5=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{cosx^2}dx$
- $I_6=\int_1^2 x2^x dx$
- $I_7=\int_0^1 l\,n\left(\frac{x+1}{x+2}\right)dx$
- $I_8=\int_0^1 x^2e^x dx$
- $I_9=\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi sinxe^x dx$

Pr. LATRACH ABDELKBIR

IV. Calcul d'aires et de volumes :

1. Calcul des aires :

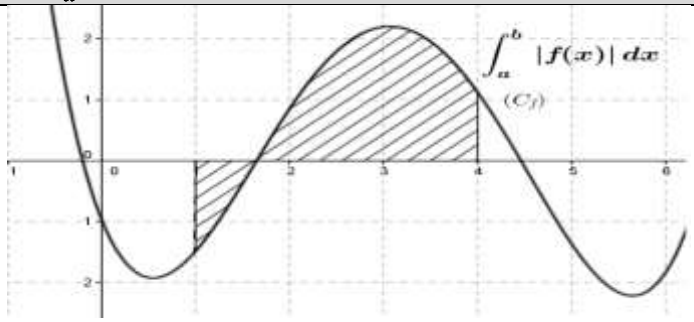
Activité ②:

On considéra la fonction définie par : $f(x) = -x + 2$ et (C_f) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ unité (1cm)

1. Tracer (C_f) et colorier le domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 3$, puis donner une valeur de son aire en unités d'aires.
2. Calculer $\int_{-1}^{3} |f(x)| dx \times \|\vec{\imath}\| \times \|\vec{\jmath}\|$. Qu'est-ce qu'on peut déduire ?

Propriété :

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$ $(a < b)$. et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
L'aire du domaine délimité par (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à $\int_a^b |f(x)| dx$ (en unité d'aire)



Application ⑩ :

Le plan est apporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ avec $\|\vec{\imath}\| = 1cm$ et $\|\vec{\jmath}\| = \sqrt{2}cm$
Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sin(x)$
Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe de f et les droites d'équations : $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = -\frac{\pi}{2}$.

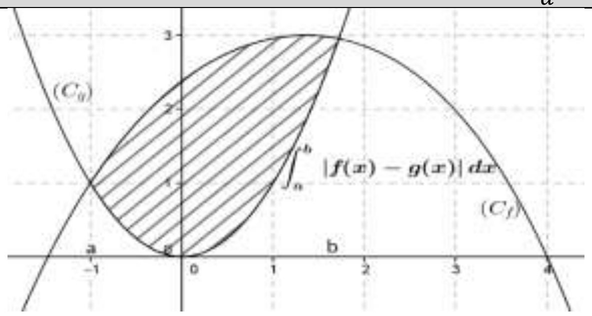
Exercice ⑦ : BAC 2015

Soit f la fonction définie sur $]0; e[\cup]e; +\infty[$ par: $f(x) = \frac{1}{x(1-lnx)}$ et (C_f) la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ tel que $\|\vec{\imath}\| = 2cm$.

1. Montrer que $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-lnx)} dx = ln2$. (Remarquer que $\frac{1}{x(1-lnx)} = \frac{\frac{1}{x}}{(1-lnx)}$)
2. Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan délimité par (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = 1$ et $x = \sqrt{e}$.

Propriété :

Soient f et g deux fonctions continues sur un segment $[a, b]$, (C_f) et (C_g) les courbes représentatives de f et g dans un repère orthogonal.
Soit (Δ) le domaine délimité par les courbes (C_f) et (C_g) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.
L'aire du domaine (Δ) en unités d'aire est donnée par : $A(\Delta) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$.



Application ⑪ :

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ avec $\|\vec{\imath}\| = 2cm$ et $\|\vec{\jmath}\| = 2cm$
On considère les fonctions f et g définie par : $f(x) = 2x^2 + 1$ et $g(x) = x^2 + x + 1$
Calculer l'aire du domaine délimité par les courbes des fonctions f et g et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

O Exercice ⑧ : Session Rattrapage 2017

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = x + 1 - (x^2 + 1)e^x$.
Et (C_f) la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ tel que $\|\vec{\imath}\| = 2cm$

1. Montrer que $H: x \mapsto (x-1)e^x$ est une fonction primitive de la fonction $h: x \mapsto xe^x$ sur $\mathbb{R}$,puis en déduire que: $\int_{-1}^{0} xe^x\,dx = \frac{2}{e} - 1$.

2. En utilisant une intégration par parties, Montrer que: $\int_{-1}^{0}(x^2+1)e^x\,dx = 3\left(1 - \frac{2}{e}\right)$.

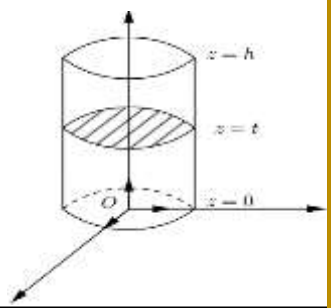
3. 3) Calculer en cm^2,l'aire du Domaine plan délimité par (C_f), la droite (D) d'équation $y = x + 1$ et les droites d'équations : $x = -1$ et $x = 0$.

2. Calcul des volumes :

Propriété :

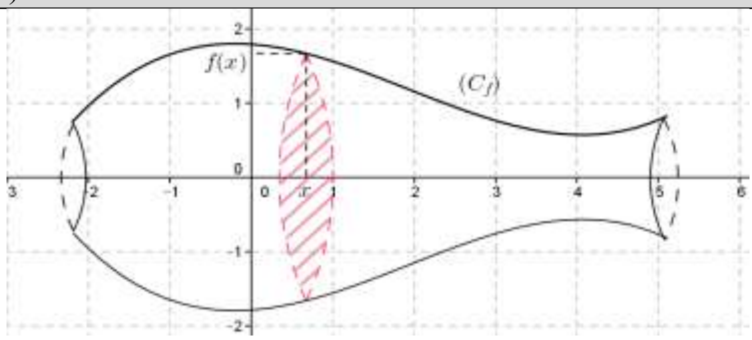
L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$.
Soit (Σ) un solide limité par deux plans $z = a$ et $z = b$ et soit $S(t)$ est l'aire de l'intersection du solide (S) avec le plan $z = t$ $(a \le t \le b)$.
le volume de ce solide est (en unités de volume) : $v(s) = \int_a^b S(t)dt$.

O Exemple : volume V d'un cylindre de rayon R et de hauteur h.
L'intersection du plan $z = t$ avec le cylindre est un disque d'aire $S(t) = \pi R^2$.
Puisque $t \to S(t)$ est continue sur $[0,h]$ alors le volume de cylindre est :
$V = \int_0^h S(t)dt = \int_0^h \pi R^2 dt = \pi R^2 \int_0^h dt = \pi R^2 h\ cm^3$.



Propriété :

Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$ $(a < b)$, et (C_f) sa courbe représentative . Le volume du solide engendré par la rotation de la courbe (C_f)autour de l'axe des abscisses un tour complet est donné par la formule : $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$ (en unités de volume).



O Exemple :

Le volume du solide engendré par la rotation de la courbe de la fonction $x \to e^x$ sur [0,1]
Autour de l'axe des abscisses un tour complet est donné par :
: $V = \pi \int_0^1 (f(x))^2 dx = \pi \int_0^1 (e^x)^2 dx = \pi \int_0^1 e^{2x} dx = \frac{\pi}{2}[e^{2x}]_0^1 = \frac{\pi(e^2-1)}{2}\ u.a$

Application ①② :

Soit g la fonction numérique définie sur [0,1] par : $f(x) = xe^{\frac{1}{2}x}$.
Calculer Le volume du solide engendré par la rotation de la courbe de la fonction g autour de l'axe des abscisses un tour complet.
Répondre à la même question pour la fonction $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{cos(x)}$ sur l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.