Fonctions exponentielle

Remarques

I. Fonction exponentielle népérienne

✍ Activité ①:

1. Montrer que la fonction f définie par $f(x) = lnx$ admet une fonction réciproque définie sur l'intervalle J à déterminer.

La fonction réciproque de $x \mapsto lnx$ est appelée fonction ***exponentielle népérienne*** et se note par exp.

2. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}),\ \exp(x) > 0$.

3. a. Calculer $ln(e^2)$ ، $ln(e)$ ، $ln(1)$ et $ln\left(\frac{1}{e^2}\right)$.

b. En déduire $exp(2)$ ، $exp(1)$, $exp(0)$ et $\exp(-2)$.

4. a. Tracer $(\mathcal{C}_{ln})$ et $(\mathcal{C}_{exp})$ sur le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

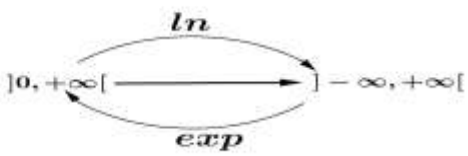
a. En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp(x)$.

1. Définition et propriétés

✎✎ Définition :

On appelle ***fonction exponentielle népérienne,*** notée exp, la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien ln et on a :

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in]0;+\infty[)\ ;\ exp\ (x) = y \Leftrightarrow x = ln(y).$$



❍ Notation e^x :

Soit r un rationnel. On a : $ln\ (exp(r)) = r$ et on sait que $ln(e^r) = rln(e) = r$.

Donc $(\forall r \in \mathbb{Q})$: $ln\ (exp(r)) = ln(e^r)$.

On prolonge cette relation de l'ensemble $\mathbb{Q}$ sur l'ensemble $\mathbb{R}$, on aura :

$$(\forall x \in \mathbb{R}): exp(x) = e^x$$

✎✎ Propriétés :

- la fonction exp est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $(\forall x \in \mathbb{R}): e^x > 0$.
- $(\forall x \in]0;+\infty[)(\forall y \in \mathbb{R})$: $e^y = x \Leftrightarrow ln(x) = y$.
- $(\forall x \in \mathbb{R})$: $ln\ (e^x) = x$ et $(\forall x \in]0;+\infty[)\ ; e^{ln(x)} = x$.
- $(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R}): e^a > e^b \Rightarrow a > b$.
- $(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R}): e^a = e^b \Rightarrow a = b$.

✍ Application ① :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{3e^x}{2e^x+4}$.

1. Déterminer D_f puis montrer que f est continue sur D_f.

2. Calculer $f(0)$ et $f(ln(2))$.

✍ Application ② :

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a. $e^{1-x} = e^{x-x^2}$	**b.** $e^{x^2-x} = 1$	**c.** $(e^x)^2 - 3e^x + 2 = 0$
d. $(e^x)^2 - 3e^x + 2 < 0$	**e.** $(e^x + 2)(e^{-x+1} - 4) \geq 0$	**f.** $\frac{e^x+1}{e^{-x}-e} \leq 0$

✎✎ Propriétés :

Soient a et b deux réels et $r \in \mathbb{Q}$, on a :

- $e^{x+y} = e^x e^y$
- $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$
- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- $(e^x)^r = e^{rx}$

✍ Application ③ :

1. Simplifier les expressions suivantes :

- $A = \frac{e^{2x} \times e^{3x}}{(e^x)^4}$
- $B = (e^{2-x})^2 \times e^{3x-4}$
- $C = e^{2x}((e^x + e^{-x})^2 + (e^x - e^{-x})^2)$

2. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})$: $\frac{e^x-1}{e^x+1} = \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$

Pr. LATRACH ABDELKBIR

Exercice ①:

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a. $e^{x}+6e^{-x}-5=0$ **b.** $(e^{x})^{15}\times e^{x^{2}+5}=\frac{e^{5x}}{e^{4}}$ **c.** $\frac{e^{2x+1}}{e^{x-3}}>e^{-x+2}$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases}5e^{2x+1}+3e^{-y}=3\\7e^{2x+1}-4e^{-y}=2\end{cases}$

2. Limites usuelles :

Propriétés :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x}=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x^{n}}=+\infty \quad (n\epsilon IN^{*})$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{n}e^{x}=0 \quad (n\epsilon IN^{*})$

Exemple :

Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}-x=+\infty$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}-x=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^{x}}{x}-1\right)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x}=+\infty$.

Application ④ :

Calculer les limites suivantes :

❶ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}-\sqrt{x}$ ❷ $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1)e^{-x}$ ❸ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}e^{-x}$ ❹ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{x+4}{x}}$ ❺ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x^{2}}}{x^{3}+x+1}$

❻ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}$ ❼ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{e^{3x}-1}$ ❽ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}$ ❾ $\lim\limits_{x\to-\infty} 2xe^{3x}$ ❿ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x^{3}+3x}}{x^{3}-1}$

3. Dérivée de la fonction exponentielle népérienne

On pose $(\forall x\in]0,+\infty[)\ f(x)=ln\,(x)$, donc $(\forall x\in\mathbb{R})\ f^{-1}(x)=e^{x}$.

Et on sait que $(\forall x\in\mathbb{R})$: $(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$, d'où $(\forall x\in\mathbb{R})$: $(e^{x})'=\frac{1}{\frac{1}{e^{x}}}=e^{x}$.

Propriété :

La fonction $x\longmapsto e^{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $(\forall x\in\mathbb{R})$: $(e^{x})'=e^{x}$.

Application ⑤ :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x-\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}$, et soit (C_f) sa représentation graphique sur le repère$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Montrer que $(\forall x\in\mathbb{R})$: $f(x)=x+1-\frac{2e^{x}}{e^{x}+1}$ et déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2. Montrer que $(\forall x\in\mathbb{R})$: $f(x)=x-1-\frac{2}{e^{x}+1}$ et déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3. Étudier les branches infinies de (C_f) au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

4. Montrer de f est impaire.

5. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée.

6. Donner le tableau des variations de f.

7. Tracer (C_f).

Propriété :

Si u est une fonction dérivable sur I, alors la fonction $x\longmapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et on a : $(\forall\, x\in I)$: $(e^{u(x)})'=u'(x)e^{u(x)}$.

Application ⑥ :

Déterminer f' dans les cas suivants :

❶ $f(x)=e^{x^{2}+3x}$ ❷ $f(x)=e^{x-2ln\,(x+1)}$ ❸ $f(x)=(e^{2x}-e^{-x})^{2}$ ❹ $f(x)=e^{\sqrt[3]{x}}$

Corollaire :

Soit u une fonction dérivable sur I .
Les primitives de la fonction $x\longmapsto u'(x)e^{u(x)}$ sur I sont les fonctions $\boldsymbol{x\longmapsto e^{u(x)}+c}$ tel que $c\in\mathbb{R}$.

Pr. LATRACH ABDELKBIR

Application ⑦ :

Déterminer l'ensemble des primitives de f dans les cas suivants :

❶ $f(x) = 2e^{2x} - e^{-x}$ ❷ $f(x) = e^{5x+4}$ ❸ $(x^2+1)e^{x^3+3x}$ ❹ $f(x) = \frac{2x+1}{e^{x^2+x+1}}$

II. Fonction exponentielle de base a $(a \neq 1 ; a > 0)$

Définition :

Soit a un réel strictement positif et différent de 1.
La fonction réciproque de $x \longmapsto log_a(x)$ est appelée ***fonction exponentielle de base a*** qui est définie sur $\mathbb{R}$ et notée par $exp_a(x)$ ou a^x .

$$\begin{tikzcd}]0,+\infty[\arrow[r, bend left, "ln_a"] \arrow[r] &]-\infty,+\infty[\arrow[l, bend left, "exp_a"] \end{tikzcd}$$

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $a^x = y \Leftrightarrow x = log_a(y)$

$$\Leftrightarrow x = \frac{ln(y)}{ln(a)}$$
$$\Leftrightarrow xln(a) = ln(y)$$
$$\Leftrightarrow e^{xln(a)} = y.$$

D'où : $a^x = e^{xln(a)}$.

Exemples :

- $2^x = e^{xln(2)}$
- $4^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}ln(4)} = e^{2\sqrt{2}ln(2)}$
- $\sqrt{3}^x = e^{xln(\sqrt{3})} = e^{\frac{x}{2}ln(3)}$

Remarque :

$(\forall x \in \mathbb{R}) : 1^x = 1.$

Propriétés :

Soient x et y deux réels et $r \in \mathbb{Q}$, on a :

- $a^{x+y} = a^x a^y$
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
- $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$
- $a^{rx} = (a^x)^r$

Application ⑧:

Montrer que : $\dfrac{9^{\frac{2}{ln(3)}} \times 8^{\frac{3}{ln(4)}}}{25^{\frac{4}{ln(5)}}} = \sqrt{e}.$

Exercice ②:

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
   a. $\left(\frac{1}{2}\right)^x \leq \frac{1}{4}$ b. $3^x > 9^x$ c. $10^{2x} + 2 \times 10^x - 3 > 0$
2. Calculer la dérivée des fonctions f et g telles que $f(x) = 2^{x^2+2x+2}$ et $g(x) = x^x$.
3. Calculer les limites suivantes :
   a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x$ b. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4^x - 2^x}{3^x}$ c. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{4^x - 2^x}{x}$ d. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

Exercice ③:

I. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{2x} - 2x$.
1. Déterminer $g'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis donner le tableau des variations de g.
2. En déduire que pour tout x de $\mathbb{R}$, $g(x) > 0$.

II. Soit la fonction f qui définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = ln(e^{2x} - 2x)$ et soit (C_f) sa représentation graphique sur le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
1. a. Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.
   b. Vérifier que : $\frac{f(x)}{x} = \left(\frac{e^{2x}}{x} - 2\right)\frac{ln(e^{2x}-2x)}{e^{2x}-2x}$.
   c. Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.
2. a. Vérifier que $(\forall x \geq 0) : 1 - \frac{2x}{e^{2x}} > 0$ et que $2x + ln\left(1 - \frac{2x}{e^{2x}}\right) = f(x)$.
   b. En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

c. Montrer que la droite d'équation $(D): y = 2x$ est une asymptote oblique de (C_f) au voisinage de $+\infty$.

d. Montrer que $(\forall x \geq 0): f(x) - 2x \leq 0$ puis déduire la position relative de (C_f) et (D) sur $[0, +\infty[$.

3. a. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}): f'(x) = \frac{2(e^{2x}-1)}{g(x)}$.

b. Donner le tableau des variations de f .

4. Tracer (C_f) et (D) sur le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Pr. LATRACH ABDELKBIR