01 (Les questions sont indépendantes)

1 La suite (u_n) est définie par : $u_0 = 2$ et $(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = 2u_n - 3$.
Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n = 3 - 2^n$.

2 On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et $(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 1}{4u_n + 1}$.

Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n \neq \dfrac{1}{2}$.

02 Soit la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n + 3 \times 0,5^n$.

1 **a.** Recopier et, à l'aide de la calculatrice, compléter le tableau des valeurs de la suite (u_n) approchées à 10^{-2} près :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2								

b. D'après ce tableau, énoncer une conjecture sur le sens de variation de (u_n).

2 **a.** Démontrer, par récurrence, que : $(\forall n \in \mathbb{N}^{\star}), u_n \geqslant \dfrac{15}{4} \times 0,5^n$.

b. En déduire que, $(\forall n \in \mathbb{N}^{\star}), u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

3 Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 10 \times 0,5^n$.

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.

b. En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n = -8 \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^n + 10 \times 0,5^n$.

03 On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = \dfrac{3 + 2u_n}{2 + u_n}$.

1 Calculer les quatre premiers termes de la suite.

2 Prouver par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n \geqslant 1$.

3 Démontrer que la suite est majorée par $\sqrt{3}$.

4 Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

5 On considère la suite (v_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}), v_n = \dfrac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}}$.

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.

b. Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n

04 Soit (u_n) une suite arithmétique de la raison r tel que : $u_0 - u_4 = 6$ et $2u_0 + u_4 = 3$.

1 Déterminer u_0, u_4, r et u_n.

2 On considère la suite (v_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}), v_{n+1} = \sqrt{2 + v_n^2}$ et $v_0 = 1$.

a. Calculer v_1, v_2 et v_3.

b. On pose $(\forall n \in \mathbb{N}), w_n = v_n^2$.

i. Montrer que (w_n) est une suite arithmétique dont on donnera le premier terme et la raison.

ii. Déterminer w_n et v_n en fonction de n.

3 On considère la suite (a_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}), a_{n+1} = \dfrac{9a_n}{4a_n + 3}$ et $a_0 = \dfrac{1}{2}$.

a. Montrer que $a_n \neq 0$.

b. On pose $(\forall n \in \mathbb{N}), b_n = 2 - \dfrac{3}{a_n}$.

i. Montrer que (b_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.

ii. Déterminer b_n et a_n en fonction de n.

05 On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 3$ et $(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = \dfrac{8(u_n - 1)}{u_n + 2}$.

1 Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}), 2 < u_n < 4$.

2 Étudier la monotonie de la suite (u_n).

3 **a.** Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}), 4 - u_{n+1} \leq \dfrac{4}{5}(4 - u_n)$.

b. En déduire $(\forall n \in \mathbb{N}), 4 - u_n \leq \left(\dfrac{4}{5}\right)^n$.

c. On pose $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$.

Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}), S_n \geq 4n - 1 + \dfrac{4^{n+1}}{5^n}$.

4 On pose $(\forall n \in \mathbb{N}), v_n = \dfrac{u_n - 4}{u_n - 2}$.

a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.

b. Déterminer v_n et u_n en fonction de n.

c. On pose $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$.
Déterminer S_n en fonction de n.

06 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = 1 - \dfrac{9}{4u_n}$.

1 Montre que $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n > \dfrac{3}{2}$

07 La suites (u_n) est définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 3}{2}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

La suite (S_n) est définie par $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1 Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 3$.

2 En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

3 Soit (w_n) la suite définie par $w_n = u_n - 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a. Démontrer que (w_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.

b. En déduire : $u_n = -\dfrac{3}{2^n} + 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4 **a.** Déterminer le sens de variations de la suite (S_n).

b. *Cours*. Démontrer que pour $q \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}$, $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

c. En déduire un expression de S_n en fonction de n.

5 *Dans cette question, toute trace de recherche, même partielle, sera évaluée.*

Soient une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $s_n = x_0 + x_1 + \cdots + x_n$.

Dire, en justifiant, si l'affirmation suivante est vraie ou fausse :

« les suites (x_n) et (s_n) ont le même sens de variation. »