Chapitre 9

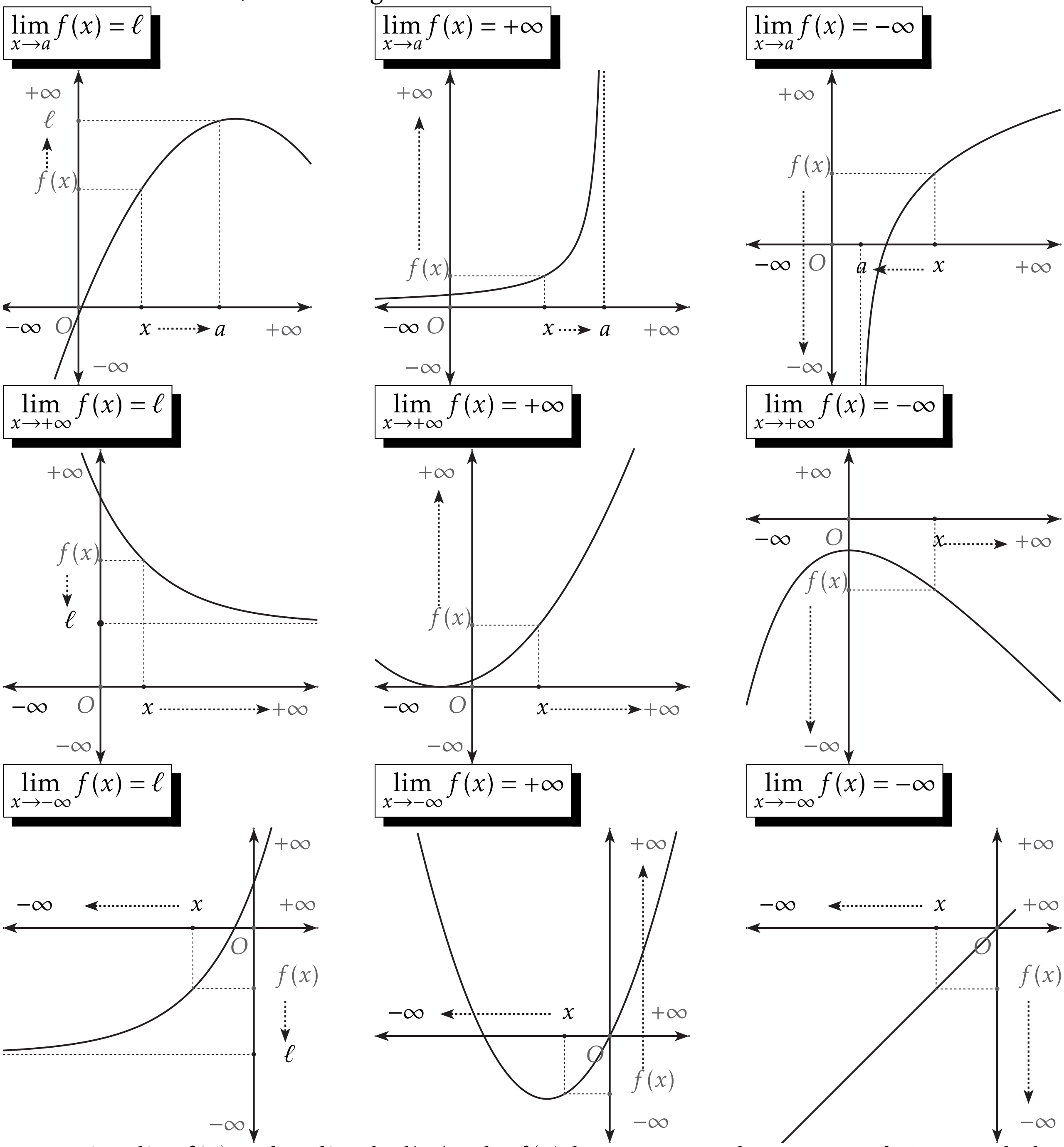
Limite d'une fonction numérique

Capacités attendues

- Calculer les limites des fonctions polynômes, des fonctions rationnelles et des fonctions irrationnelles ;
- Calculer les limites de fonctions trigonométriques simples en utilisant les limites usuelles ;
- Résoudre des inéquations de type $|f(x) - \ell| < \epsilon$ et de type $f(x) > A$ pour montrer que $f(x)$ tend vers ℓ dans des situations simples.

I Notion de limite : les différentes situations

Dans ces illustrations, a et ℓ désignent des réels fixés.



La notation $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ se lit : la *limite* de $f(x)$ lorsque x tend vers a est ℓ. Les symboles ℓ et a peuvent être des nombres réels ou *moins l'infini* ($-\infty$) ou *plus l'infini* ($+\infty$).

II Limite lorsque x tend vers $a \in \mathbb{R}$

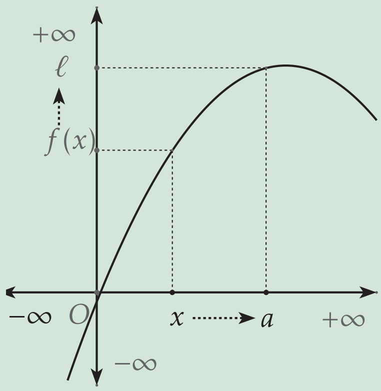
1 Cas d'une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$

Définition On dit que la limite de $f(x)$, lorsque x tend vers a, est $\ell \in \mathbb{R}$ si le nombre $f(x)$ peut être rendu aussi proche que l'on veut du réel ℓ, pourvu que x soit assez proche du réel a. Précisément

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in]a-\delta, a+\delta[$ on ait $f(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$.

<u>Ou</u> : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \mid x \in]a-\delta, a+\delta[\Longrightarrow f(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$.



2 Cas où la limite est $+\infty$ ou $-\infty$

Définition On dit que la limite de $f(x)$, lorsque x tend vers a, est $+\infty$ si le nombre $f(x)$ peut être rendu aussi grand que l'on veut, pourvu que x soit assez proche du réel a. Précisément :

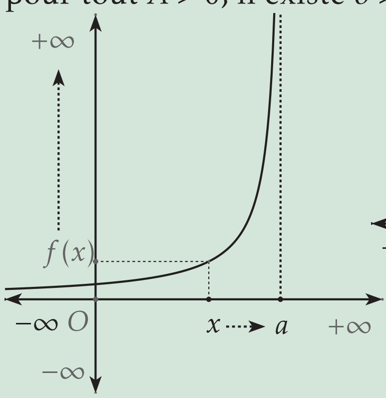
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$

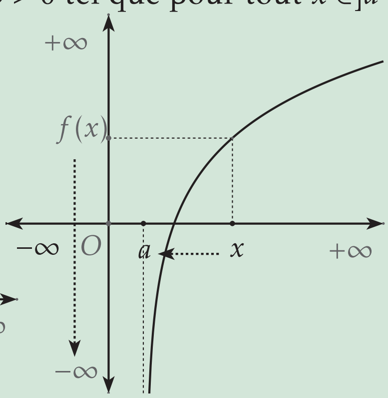
pour tout $A > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in]a-\delta, a+\delta[$ on ait $f(x) \in]A, +\infty[$.

<u>Ou</u> : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0,\ \exists \delta > 0 \mid x \in]a-\delta, a+\delta[\Longrightarrow f(x) \in]A, +\infty[$.

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$

pour tout $A > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in]a-\delta, a+\delta[$ on ait $f(x) \in]-\infty, -A[$.





Interprétation géométrique : Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$, on dit que la courbe représentative de f admet la droite d'équation $x = a$ comme *asymptote verticale*.

3 Limites à droite et à gauche

Définition Les *limites à droite* $\lim\limits_{x \to a^+} = \lim\limits_{x \to a, x > a}$ sont définies en remplaçant $]a-\delta, a+\delta[$ par $]a, a+\delta[$.
Les *limites à gauche* $\lim\limits_{x \to a^-} = \lim\limits_{x \to a, x < a}$ sont définies en remplaçant $]a-\delta, a+\delta[$ par $]a-\delta, a[$.
L'interprétation en terme d'asymptote est identique.

III Limite lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$

1 Cas d'une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$

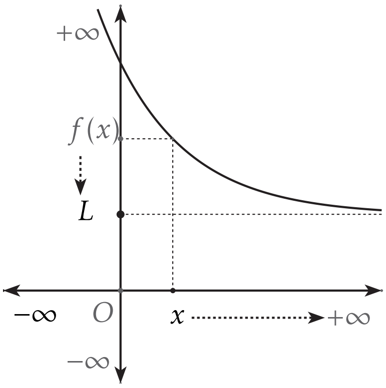
Définition On dit que la limite de $f(x)$, lorsque x tend vers $+\infty$ (plus l'infini), est $\ell \in \mathbb{R}$ si le nombre $f(x)$ peut être rendu aussi proche que l'on veut du réel ℓ, pourvu que x soit assez grand. Précisément

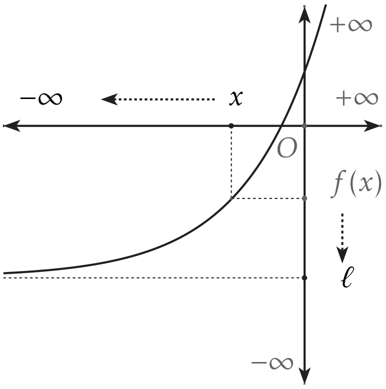
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$
pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $B > 0$ tel que pour tout $x \in]B, +\infty[$ on ait $f(x) \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$.

<u>Ou</u> : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists B > 0 \mid x \in]B, +\infty[\Rightarrow f(x) \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$.

Remarque

On définit de même $\lim\limits_{x \to -\infty}$ en remplaçant $]B, +\infty[$ par $]-\infty, -B[$.





Interprétation géométrique.
Lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, on dit que la courbe représentative de f admet la droite d'équation $y = \ell$ comme asymptote horizontale en $+\infty$.

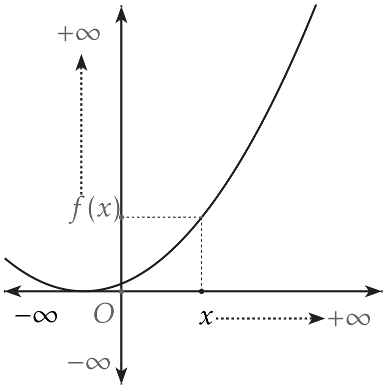
On définit de façon analogue l'asymptote horizontale en $-\infty$.

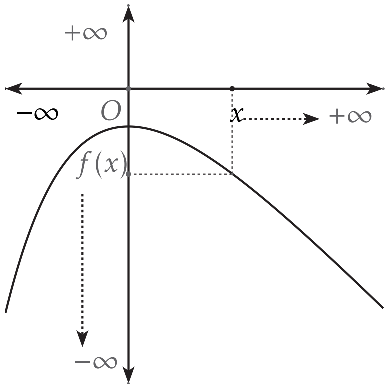
2 Cas d'une limite infinie

Définition On dit que la limite de $f(x)$, lorsque x tend vers $+\infty$ (plus l'infini), est $+\infty$ si le nombre $f(x)$ peut être grand que l'on veut, pourvu que x soit assez grand. Précisément

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$
pour tout $A > 0$, il existe $B > 0$ tel que pour tout $x \in]B, +\infty[$ on ait $f(x) \in]A, +\infty[$.

<u>Ou</u> : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists B > 0 \mid x \in]B, +\infty[\Rightarrow f(x) \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$.





Exemple Définir avec précision :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow$ ....

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$ ....

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$ ....

IV Opérations sur les limites

Les résultats qui suivent sont valables pour $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

1 Somme de limites

$\lim\limits_{x\to a} u(x)$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} u(x)$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} u(x)+v(x)$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

2 Produit de limites

$\lim\limits_{x\to a} u(x)$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} v(x)$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} u(x)\times v(x)$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

3 Quotient de limites

$\lim\limits_{x\to a} v(x)$	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0^+ $(0,\, v(x) > 0)$	0^- $(0,\, v(x) < 0)$
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{v(x)}$	$\dfrac{1}{\ell}$	0	$+\infty$	$-\infty$

Remarques

- Lorsque la forme indéterminée, $\left(\infty - \infty; \infty \times 0; \dfrac{0}{0}; \dfrac{\infty}{\infty}\right)$ il faut changer l'écriture de la fonction pour lever l'indétermination.
- Pour traiter les limites de quotients $\dfrac{u}{v}$ on remarque $\dfrac{u}{v} = u \times \dfrac{1}{v}$.
- Dans le cas de $\dfrac{1}{v(x)}$, si la limite de $v(x)$ est nulle, il faut étudier le signe de $v(x)$ pour conclure.
- On n'écrit jamais de calcul faisant intervenir $+\infty$, $-\infty$, 0^+, 0^-,...

Exemple

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} =$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} =$
- La limite $\lim\limits_{x\to 2, x<2} \dfrac{1}{2-x}$ dépend du signe de $2-x$ car $\lim\limits_{x\to 2} 2-x = 0$.

Or

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$2-x$		$+$	0	$-$	

donc si $x < 2$, on a $2-x > 0$, d'où $\lim\limits_{x\to 2, x<2} \dfrac{1}{2-x} = +\infty$.

4 Limite de fonctions composées

Soient $a, b, \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Si $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b$ et $\lim\limits_{X\to b} v(X) = \ell$ alors $\lim\limits_{x\to a} v(u(x)) = \ell$.

Exemple

$\lim\limits_{x\to+\infty} \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) =$

V Traiter les formes indéterminées

Avant d'utiliser l'une des techniques suivantes, s'assurer d'avoir **simplifié** l'expression.

Exemple

$\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x^2-4}{x+2} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

1 Formes indéterminées avec des polynômes

D'une manière générale, factoriser dans l'expression, ou au numérateur et au dénominateur, le terme qui semble devoir dominer :

Exemple $\lim\limits_{x\to+\infty} x^6 - x^4 + x^3 + 1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 10\sqrt{x} - x + 2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Propriété La limite d'un polynôme en $+\infty$ ou $-\infty$ est la même que la limite de son terme de plus haut degré. De même, la limite du quotient de deux polynômes en $+\infty$ ou $-\infty$ est la même que celle du quotient de leurs termes de plus haut degré.

Démonstration

Dans le cas d'un polynôme en $+\infty$: soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ un polynôme avec $a_n \neq 0$. Alors pour tout $x \neq 0$, on a :

$P(x) = a_n x^n \times \left(1 + \dfrac{a_{n-1}}{a_n}\dfrac{1}{x} + \ldots + \dfrac{a_1}{a_n}\dfrac{1}{x^{n-1}} + \dfrac{a_0}{a_n}\dfrac{1}{x^n}\right)$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = \ldots = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ donc la limite du facteur entre parenthèses est 1.

Par produit on a bien : $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} a_n x^n$.

Exemple $\lim\limits_{x\to+\infty} -2x^3 + 3x^4 - 5x + 4 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Exemple $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3-x}{2x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x}{2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-1}{2} = -\dfrac{1}{2}$ par théorème.

Exemple $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x+1}{x^2+x+1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

La propriété du plus haut degré ne s'applique que pour les limites en $+\infty$ ou $-\infty$.
L'utilisation de la propriété pour les quotients de deux polynômes se fait en trois temps :
1. Application de la propriété 2. Simplification 3. Conclusion.

2 Forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$ et changement de variable

Pour les limites en $a \in \mathbb{R}$ (ou a^+, a^-) qui présentent une forme indéterminée du type $\dfrac{0}{0}$, il peut être opportun de faire un changement de variable en posant $x = a + h$.

Exemple $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^3+x-2}{1-x} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

3 Forme indéterminée et radicaux : quantité conjuguée

Pour les limites faisant intervenir des radicaux, on peut essayer de multiplier au numérateur et au dénominateur par *la quantité conjuguée* avec comme idée d'utiliser l'identité remarquable : $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$:

Exemple

$\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

VI Théorèmes d'encadrement

1 Théorème de majoration et de minoration

Soient u et f deux fonctions définies sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$.

- si $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = +\infty$ et pour tout $x \in [a, +\infty[$, $f(x) \geqslant u(x)$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- si $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = -\infty$ et pour tout $x \in [a, +\infty[$, $f(x) \leqslant u(x)$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

Démonstration

On prouve le premier point (la démo du second est analogue).
Par définition, $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = +\infty$ signifie que pour tout $A > 0$, il existe $B > a$ tel que pour tout $x \in [B, +\infty[$, on ait $u(x) \in [A, +\infty[$.
Or pour tout $x \in [a, +\infty[$, $f(x) \geqslant u(x)$ donc en particulier, pour tout $x > B$, on a l'inégalité $f(x) \geqslant u(x) \geqslant A$, donc $f(x) \geqslant A$. On a prouvé :
Pour tout $A > 0$, il existe $B > 0$ tel que pour tout $x \in [B, +\infty[$, on ait $f(x) \in [A, +\infty[$, c'est-à-dire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Exemple

$\lim\limits_{x \to +\infty} x(\cos(x) - 2) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$