Chapitre 4

Fonction logarithme népérien

Histoire

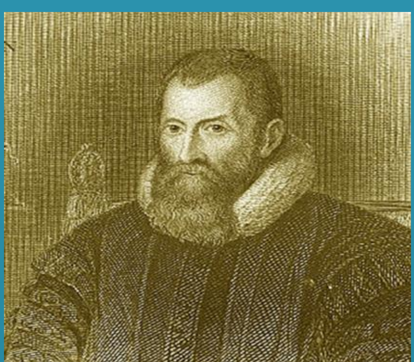
En 1614, un mathématicien écossais, *John Napier* (1550 ; 1617) ci-contre, plus connu sous le nom francisé de *Neper* publie « Mirifici logarithmorum canonis descriptio ».

Dans cet ouvrage, qui est la finalité d'un travail de 20 ans, *Neper* présente un outil permettant de simplifier les calculs opératoires : le logarithme.

Neper construit le mot à partir des mots grecs « logos » (logique) et arithmos (nombre).

Toutefois cet outil ne trouvera son essor qu'après la mort de Neper. Les mathématiciens anglais *Henri Briggs* (1561 ; 1630) et *William Oughtred* (1574 ; 1660) reprennent et prolongent les travaux de Neper.

en plus complexes.



I. Fonction logarithme népérien

1) Définition et propriétés algébriques

a) Activité

1) Soit f la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x}$

a. Montrer que f admet des fonctions primitives sur $]0;+\infty[$.

b. En déduire que admet une primitive unique sur $]0;+\infty[$ qui s'annule e 1.

L'unique primitive de f sur $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1,s'appelle fonction logarithme népérien .elle est notée ln

2) Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=\ln(a\times x^r)$ avec $a\in\mathbb{R}^{*+}$ et $r\in\mathbb{Q}$

a. Vérifier que $g'(x)=r\times\frac{1}{x}$ $\forall x\in]0;+\infty[$.

b. En déduire que g est une fonction primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction $x\mapsto r\times\frac{1}{x}$.

c. Vérifier que $\forall x\in]0;+\infty[$ $g(x)=r\ln(x)+c$ ou c c'est une constante.

d. Montrer que si $x=1$ alors $c=\ln a$

e. En déduire que pour tous réels x et a de $]0;+\infty[$ et pour tout nombre rationnel r on a : $\ln(ax^r)=r\ln x+\ln a$

f. En déduire si on pose $x=b$,alors on obtient la propriété suivante :

$$\forall r\in\mathbb{Q};\forall(a,b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2:\ln(ab^r)=\ln a+r\ln b$$

g. En déduire les propriétés suivantes :

- $\forall(a,b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2:\ln(ab)=\ln a+\ln b$
- $\forall b\in\mathbb{R}_+^*:\ln\left(\frac{1}{b}\right)=-\ln b$
- $\forall(a,b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2:\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$
- $\forall r\in\mathbb{Q};\ \forall b\in\mathbb{R}_+^*:\ln\left(b^r\right)=r\ln b$

h. Sans utiliser de calculatrice, exprimer en fonction de $\ln 2$, $\ln 3$ ou $\ln 5$ les nombres suivants :

$\ln\sqrt{10}$; $\ln 30$; $\ln\sqrt{\frac{25}{18}}$; $\ln\sqrt[3]{100}$; $\ln(0,01)$

Définition

L'unique primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1,s'appelle fonction logarithme népérien .elle est notée $\ln$

Conséquence :

- La fonction $\ln$ est définie sur $]0;+\infty[$
- $\ln 1 = 0$
- $\forall x \in]0;+\infty[\quad \ln' x = \frac{1}{x}$

Application :determiner l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right) \; ; \; g(x) = \ln x + \ln(x-1) \; ; \; h(x) = \ln\left(x^2 - x\right)$$

Exercice : déterminer l'ensemble de définition des fonction suivantes :

$$f_1(x) = \ln(x+4) - \ln(25 - x^2) \; ; \; f_2(x) = \ln(x^2 - 8x + 7) \; ; \; f_3(x) = \ln\left|\frac{2x - |x|}{x - 5}\right|$$

Propriété

- $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 : \ln(ab) = \ln a + \ln b$; $\quad \forall b \in \mathbb{R}_+^* : \ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$
- $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 : \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$; $\quad \forall r \in \mathbb{Q}; \; \forall b \in \mathbb{R}_+^* : \ln\left(b^r\right) = r \ln b$
- soient n un élément de $\mathbb{N}^*$ et $x_1, x_2, ..et \; x_n$ de $]0;+\infty[$ alors $\ln(x_1.x_2...x_n) = \ln(x_1) + \ln(x_2) + ... + \ln(x_n)$

  c-à-d : $\ln\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(x_k)$

Conséquence :

- $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : \ln\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2}\ln x$ en général $\left(\forall n \in \mathbb{N} - \{0,1\}\right)\left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*\right) : \ln\left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{1}{n}\ln x$
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : \ln\left(x^2\right) = 2\ln x$
- $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2 : \ln\left(|xy|\right) = \ln|x| + \ln|y|$ et $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln|a| - \ln|b|$

Exemples : $A = \ln\left(3-\sqrt{5}\right) + \ln\left(3+\sqrt{5}\right)$

$$A = \ln\left(3-\sqrt{5}\right) + \ln\left(3+\sqrt{5}\right)$$
$$= \ln\left(3-\sqrt{5}\right)\left(3+\sqrt{5}\right)$$
$$= \ln(9-5)$$
$$= \ln 4$$

$B = 3\ln 2 + \ln 5 - 2\ln 3$

$$B = 3\ln 2 + \ln 5 - 2\ln 3$$
$$= \ln 2^3 + \ln 5 - \ln 3^2$$
$$= \ln \frac{2^3 \times 5}{3^2}$$
$$= \ln \frac{40}{9}$$

2) Monotonie de la fonction ln

a) Activité :

On considère la fonction logarithme népérien ln

Démontrer que :

- ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$
- ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$
- ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

Propriété

Pour tous réels x et y strictement positifs, on a :

1) $\begin{cases} \ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y \\ \ln x < \ln y \Leftrightarrow x < y \end{cases}$; 2) $\begin{cases} \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \\ \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 0 \\ \ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1 \end{cases}$

Exemples :

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$\ln(x-3)+\ln(9-x)=0$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$\ln(3-x)-\ln(x+1)\leq 0$

a) Ensemble de définition :

$\begin{matrix} x-3>0 \\ x>3 \end{matrix}$ et $\begin{matrix} 9-x>0 \\ x<9 \end{matrix}$

L'équation est définie sur]3 ; 9[.

On restreint donc la recherche des solutions à cet intervalle.

$\ln(x-3)+\ln(9-x)=0$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \ln(x-3)(9-x)=0\\
&\Leftrightarrow \ln(x-3)(9-x)=\ln 1\\
&\Leftrightarrow (x-3)(9-x)=1\\
&\Leftrightarrow -x^2+12x-27=1\\
&\Leftrightarrow -x^2+12x-28=0
\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{-12+\sqrt{32}}{-2}=6-2\sqrt{2}$ *et* $x=\dfrac{-12-\sqrt{32}}{-2}=6+2\sqrt{2}$

Les solutions sont donc $6-2\sqrt{2}$ et $6+2\sqrt{2}$ car elles appartiennent bien à l'ensemble de définition.

b) Ensemble de définition :

$\begin{matrix} 3-x>0 \\ x<3 \end{matrix}$ et $\begin{matrix} x+1>0 \\ x>-1 \end{matrix}$

L'inéquation est définie sur]-1 ; 3[.

On restreint donc la recherche des solutions à cet intervalle.

$\ln(3-x)-\ln(x+1)\leq 0$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \ln(3-x)\leq \ln(x+1)\\
&\Leftrightarrow 3-x\leq x+1\\
&\Leftrightarrow 2\leq 2x\\
&\Leftrightarrow 1\leq x
\end{aligned}$$

L'ensemble solution est donc $[1;3[$.

II. Etude de la fonction $\ln$

1) Limite de la fonction $\ln$ en $+\infty$ et en 0

a) Activité

A. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x)=x-\ln x$

1) Donner le tableau de variations de f

2) Démontrer que $\forall x\in\mathbb{R}_+^*:\ln(x)<x$

3) Démontrer que $\forall x>1: 0<\ln(x)<2\sqrt{x}$

4) a) Déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}$

b) déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}$ tel que $n\in\mathbb{N}^*$

c) on pose $t=\dfrac{1}{x}$ démontrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0$

B. 1) démontrer que $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=1$ et déduire que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(h+1)}{h}=1$

2) On admet $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln x=+\infty$ démontrer que $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$

Propriété

- $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln x=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\ln x=-\infty$
- et pour tout entier non nul n, $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}=0$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x=0$ et pour tout entier n, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^n\ln x=0$
- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=1$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$

Exemples :

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x-\ln x)$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$; c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x-1}$

a) Il s'agit d'une forme indéterminée de type " $\infty-\infty$ ".

Levons l'indétermination :

$$x-\ln x = x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)$$

Comme $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$, on a : $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\right)=1$.

Et donc $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\right)=+\infty$ soit

$\lim\limits_{x\to +\infty}(x-\ln x)=+\infty$.

b) Il s'agit d'une forme indéterminée de type "$\dfrac{0}{0}$".

Levons l'indétermination :

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(1+(x-1))}{x-1}=\lim_{X\to 0}\frac{\ln(1+X)}{X}=1$$ Comme composée de limites.

c) Il s'agit d'une forme indéterminée de type "$\dfrac{\infty}{\infty}$".

Levons l'indétermination :

$$\frac{\ln x}{x-1}=\frac{\dfrac{\ln x}{x}}{\dfrac{x-1}{x}}=\frac{\dfrac{\ln x}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}$$

Comme $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}1-\dfrac{1}{x}=1$, on a

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\dfrac{\ln x}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}=\dfrac{0}{1}=0$. Et donc $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x-1}=0$.

2) Etude de la fonction $\ln$

a) Activité

On considère la fonction logarithme népérien $\ln$ et (C) sa courbe dans un repere orthonormée

1) Démontrer que $\ln$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$
2) Démontrer que l'équation $\ln x = 1$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$

L'unique solution de l'équation $\ln x = 1$ est notée e et on a alors $\ln e = 1$

Une valeur approchée de e est $e \approx 2,71828182845...$

La notation e est utilisé par le mathématicien suisse Euler (1707-1783)

3) Donner le tableau da variations de la fonction $\ln$
4) Etude des branches infinies à (C)

a) Démontrer que la fonction $\ln$ est admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.

b) Démontrer que (C) admet l'axe des ordonnés comme asymptote .

5) Etudier la concavité de (C)
6) Déterminer l'équation des tangente à (C) au points d'abscisse 1 et e .
7) Représenter (C)
8) Déduire la représentation graphique des fonctions suivantes :
   - $x \mapsto \ln(-x)$
   - $x \mapsto -\ln(x)$
   - $x \mapsto |\ln(x)|$
   - $x \mapsto \ln|x|$

Solution :

La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0;+\infty[$ donc est continue sur $]0;+\infty[$. Et La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ car Pour tout réel $x > 0$, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x} > 0$.

Donc ln est une bijection de $]0;+\infty[$ vers $\ln\left(]0;+\infty[\right)=\left]\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x\,;\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x\right[=\mathbb{R}$.

1) Comme f est une bijection de $]0;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ et $1\in\mathbb{R}$ donc il existe unique nombre de $]0;+\infty[$ que l'on note e tel que $\ln e=1$

2) Tableau de variation de $\ln$

x	0		1	e	$+\infty$
$\ln'(x)$			$+$		
$\ln x$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3) Les branches infinies

a) On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ donc (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.

b) On $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\ln x=-\infty$ alors (C) admet l'axe des ordonnées comme asymptote.

4) On $\ln''(x)=-\dfrac{1}{x^2}<0$ Pour tout réel $x>0$ donc

x	0	$+\infty$
$\ln''(x)$	-	
(C)		

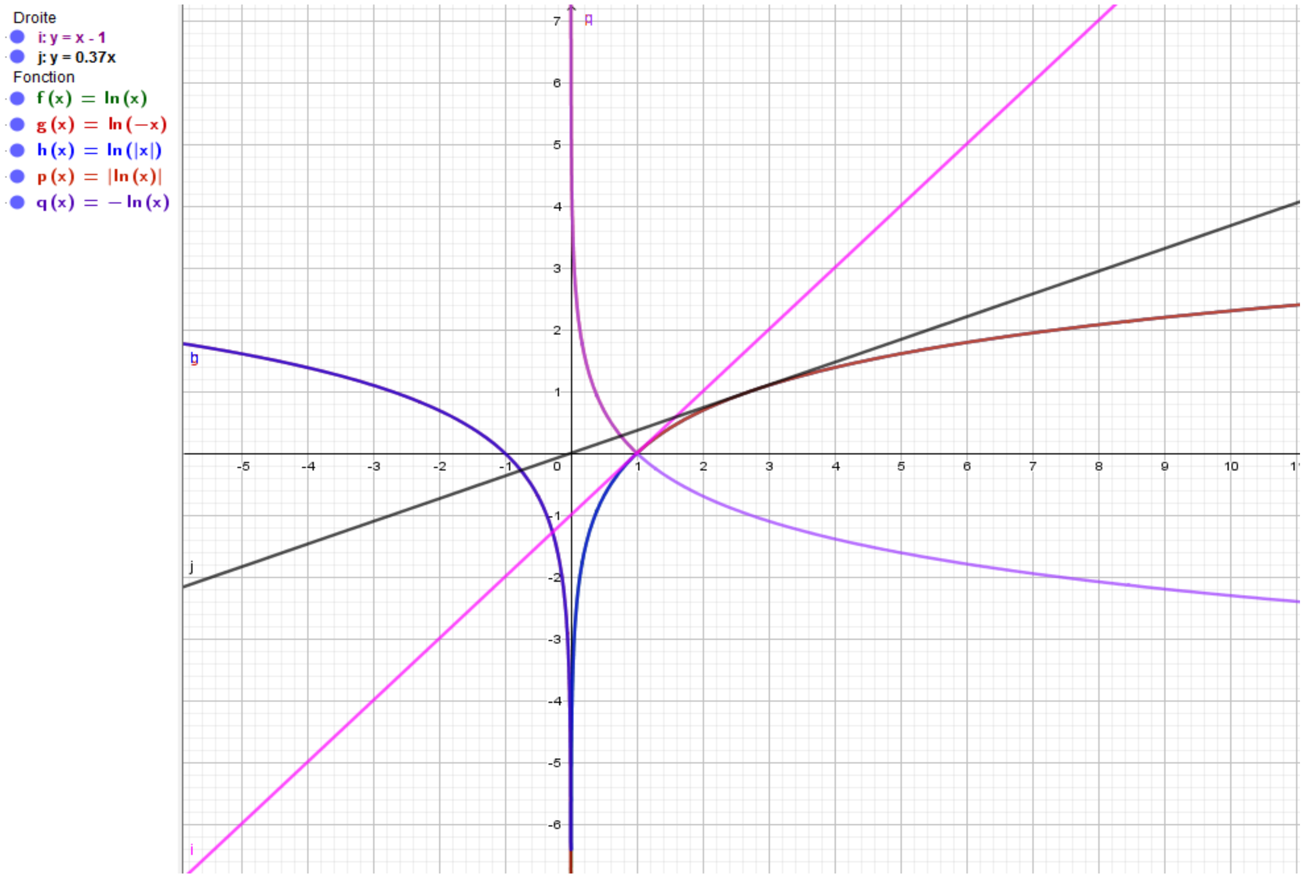
5) - L'équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 1

$$(T_1): y=\ln'(1)(x-1)+\ln(1)$$
$$\Leftrightarrow y=x-1$$

- L'équation de la tangente à (C) au point d'abscisse e

$$(T_2): y=\ln'(e)(x-e)+\ln(e)$$
$$\Leftrightarrow y=\frac{1}{e}x$$

6) Construction de (C)



III. Fonctions de la forme lnu

Propriété

Soit u une fonction dérivable et ne s'annule sur un intervalle I.

La fonction $x \mapsto \ln|u(x)|$ est dérivable sur I. Sa dérivée est la fonction $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Exemple :

Soit la fonction f définie sur $]0;2[$ par : $f(x)=\ln\left(2x-x^2\right)$ alors $f'(x)=\dfrac{2-2x}{2x-x^2}$.

Application : calculer $D_{f'}$ puis calculer f' dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=\ln(\ln x)$; 2) $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$; 3) $f(x)=\ln\left|\sin^2 x+3\sin x+4\right|$

Exercice corrigé

On considère la fonction *f* définie sur $]-2;1[$ par

$f(x)=\ln\left(\dfrac{x+2}{1-x}\right)$.

a) Calculer les limites de *f* aux bornes de son ensemble de définition.

b) Etudier la dérivabilité de la fonction *f*.

c) Déterminer le sens de variation de la fonction *f*.

d) Tracer sa courbe représentative.

Correction

a) - $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}}\dfrac{x+2}{1-x}=0$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}}f(x)=-\infty$ comme composée de limites.

- $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\dfrac{x+2}{1-x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}f(x)=+\infty$ comme composée de limites.

b) La fonction $u:x\mapsto\dfrac{x+2}{1-x}$ est strictement positive et dérivable sur $]-2;1[$ donc *f* est dérivable sur $]-2;1[$.

c)
$$u'(x)=\frac{1\times(1-x)-(x+2)\times(-1)}{(1-x)^2}$$
$$=\frac{1-x+x+2}{(1-x)^2}=\frac{3}{(1-x)^2}$$

Donc $u'(x)>0$.

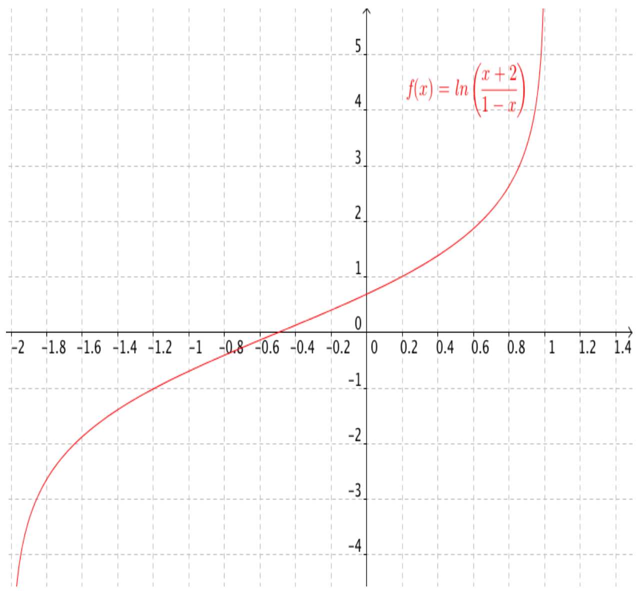
La fonction *u* est donc strictement croissante sur $]-2;1[$,

d'où :

La fonction *f* est strictement croissante sur $]-2;1[$.

x	-2		1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

d) La courbe



Définition soit *u* une fonction dérivable et ne s'annule sur un intervalle I.

La fonction $x\mapsto\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ s'appelle la dérivée logarithmique de la fonction $x\mapsto u(x)$ sur I.

Exemples : **la** dérivée logarithmique de la fonction $x\mapsto x^4+x^2+3$ sur $\mathbb{R}$ est $x\mapsto\dfrac{4x^3+2x}{x^4+x^2+3}$

Propriété

Soit u une fonction dérivable et ne s'annule sur un intervalle I.

L'ensemble des fonctions primitives de la fonction $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ sur I est les fonctions $x \mapsto \ln|u(x)|+k$ avec $k \in \mathbb{R}$

Exemples :

- L'ensemble des fonctions primitives de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]-\infty;0[$ est $x \mapsto \ln(-x)+k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

- L'ensemble des fonctions primitives de la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)+k$ avec $k \in \mathbb{R}$

Application : déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I

$\begin{cases} f: x \mapsto \dfrac{x-1}{x^2-2x} \\ I =]-\infty;0[\end{cases}$; $\begin{cases} f: x \mapsto \tan x \\ I = \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[\end{cases}$; $\begin{cases} f: x \mapsto \dfrac{x-1}{x+1} \\ I =]-1;+\infty[\end{cases}$

IV. Fonction logarithme de base a

1) Définition

Définition

Soit a un nombre réel strictement positif et différent de 1.

La fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{\ln a}$; définie sur $]0;+\infty[$, s'appelle fonction logarithmique de base a ,et notée $\log_a$

On a donc $\forall x \in]0;+\infty[\quad \log_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

Remarque :

- $\forall x \in]0;+\infty[\quad \log_e(x) = \dfrac{\ln x}{\ln e} = \ln x$.
- La fonction logarithme népérien est la fonction logarithme de base e.
- $\forall a \in \mathbb{R}^* - \{1\} \quad \log_a(a) = \dfrac{\ln a}{\ln a} = 1$.
- $\forall r \in \mathbb{Q} \quad \log_a(a^r) = \dfrac{\ln a^r}{\ln a} = \dfrac{r \ln a}{\ln a} = r$

2) Propriétés :

Propriété 1 soit a un nombre strictement positif diffèrent de 1 on a :

$0<a<1$	$a>1$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$
$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \log_a x = +\infty$	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \log_a x = -\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log_a x}{x} = 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log_a x}{x} = 0$

Propriété 2 . pour tous nombres réels a et b de $]0;+\infty[$ et pour tout nombre rationnel r :

- $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 : \log_a(ab) = \log_a a + \log_a b$
- $\forall b \in \mathbb{R}_+^* : \log_a\left(\dfrac{1}{b}\right) = -\log_a b$
- $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 : \log_a\left(\dfrac{a}{b}\right) = \log_a a - \log_a b$
- $\forall r \in \mathbb{Q};\ \forall b \in \mathbb{R}_+^* : \log_a\left(b^r\right) = r\log_a b$
- Soient n un élément de $\mathbb{N}^*$ et $x_1, x_2, \ldots et\ x_n$ de $]0;+\infty[$ alors

$$\log_a(x_1.x_2\ldots x_n) = \log_a(x_1) + \log_a(x_2) + \ldots + \log_a(x_n) \text{ c.-à-d. : } \log_a\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \log_a(x_k)$$

3) Etude de la fonction $\log_a$

On a la fonction $\log_a$ est définie sur $]0;+\infty[$ et on a $\forall x \in]0;+\infty[\quad \log'_a(x) = \dfrac{1}{x\ln a}$

Si $a>1$

x	0 1 e $+\infty$
$\log'(x)$	+
$\log_a$	$-\infty \nearrow 0 \nearrow +\infty$

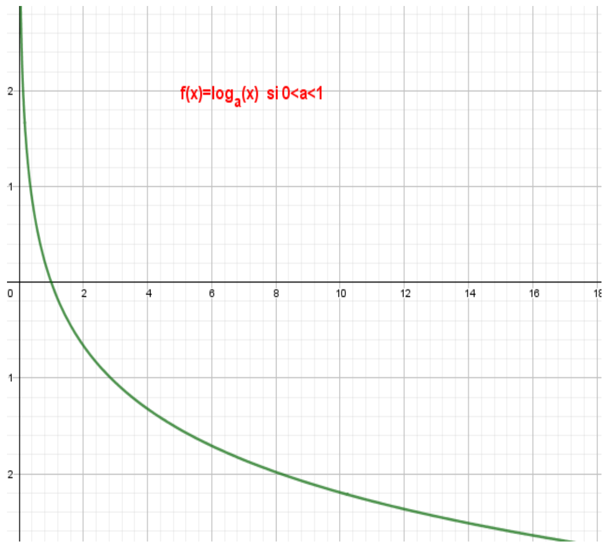
Si $a>1$

Si $0<a<1$

x	0 1 e $+\infty$
$\log'(x)$	-
$\log_a$	$+\infty \searrow 0 \searrow -\infty$

Si $0<a<1$

La représentation graphique :



4) Cas particulier : fonction logarithme décimal

Propriété

la fonction logarithme de base 10 s'appelle fonction logarithme décimal, et notée $\log_{10}$ ou $\log$.

Remarque : $\log 1 = 0$; $\log 10 = 1$; $\forall r \in \mathbb{Q};\ \log\left(10^r\right) = r$

Application : calculer $\log(100)$; $\log(1000)$; $\log(0,01)$;log(0,0

Exercice 1

Dérivation et encadrement

Le plan P est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 3 cm).

1. On considère la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x} & \text{si } x>0 \\ f(0)=1 \end{cases}$

Montrer que *f* est continue en 0.

2. a. Etudier le sens de variation de la fonction *g* définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x)=\ln(1+x)-\left(x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}\right)$.

Calculer *g*(0) et en déduire que sur $\mathbb{R}^+$: $\ln(1+x)\leq\left(x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}\right)$.

b. Par une étude analogue, montrer que si $x\geq 0$, alors $\ln(1+x)\geq x-\dfrac{x^2}{2}$.

c. Établir que pour tout *x* strictement positif on a : $-\dfrac{1}{2}\leq\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}\leq-\dfrac{1}{2}+\dfrac{x}{3}$.

En déduire que *f* est dérivable en zéro et que $f'(0)=-\dfrac{1}{2}$

3. a. Soit *h* la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $h(x)=\dfrac{x}{x+1}-\ln(1+x)$.

Étudier son sens de variation et en déduire le signe de *h* sur $[0,+\infty[$.

b. Montrer que sur $[0,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{h(x)}{x^2}$.

c. Dresser le tableau de variation de *f* en précisant la limite de *f* en $+\infty$

Correction

1 . $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x} & \text{si } x>0 \\ f(0)=1 \end{cases}$; *f* est continue en 0 ssi

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$, or le cours donne justement la limite

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$.

2. a. $g'(x)=\dfrac{1}{1+x}-(1-x+x^2)$
$=\dfrac{1-1-x+x+x^2-x^2-x^3}{1+x}=\dfrac{-x^3}{1+x}\leq 0$.

Donc *g* est décroissante et comme *g*(0)=0, on a

également $g(x)\leq 0$, soit $\ln(1+x)\leq\left(x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}\right)$.

b. On prend

$k(x)=\ln(1+x)-x+\dfrac{x^2}{2}\Rightarrow k'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1+x$ et

$=\dfrac{1-1-x+x+x^2}{1+x}=\dfrac{x^2}{1+x}\geq 0$

$k(0)=0$ donc $k(x)\geq 0$, soit $\ln(1+x)\geq x-\dfrac{x^2}{2}$.

$x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}\geq\ln(1+x)\geq x-\dfrac{x^2}{2}$

c. $\Leftrightarrow -\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}\geq\ln(1+x)-x\geq-\dfrac{x^2}{2}$.

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}+\dfrac{x}{3}\geq\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}\leq-\dfrac{1}{2}$

f dérivable en zéro : on calcule

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$$; or

le résultat précédent montre que cette limite est

précisément $-\frac{1}{2}$ qui est donc $f'(0)$.

3. a. $h(x)=\frac{x}{x+1}-\ln(1+x)$,

$h'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}=\frac{1-x-1}{(x+1)^2}=\frac{-x}{(x+1)^2}\leq 0$; on a $h(0)=0$ et h décroissante donc $h(x)\leq 0$.

b. $f'(x)=\frac{\frac{1}{1+x}x-\ln(1+x)}{x^2}=\frac{h(x)}{x^2}\leq 0$.

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}\approx\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\text{ si } x>0 \text{ et } f(0)=0.$$

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité graphique : 5 cm).

Le but du problème est d'étudier certaines propriétés de la fonction f.

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $g(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-\frac{2}{x^2+1}$.

1. Calculer la dérivée g' de g. Montrer que pour tout x de $]0\,;+\infty[$, $g'(x)=\frac{2(x^2-1)}{x(x^2+1)^2}$.

2. Etudier le signe de $g'(x)$ selon les valeurs de x. Déterminer la limite de g en $+\infty$.Déterminer la limite de g en 0.

3. Dresser le tableau des variations de g.

4. En déduire qu'il existe un unique nombre réel $\alpha>0$ tel que $g(\alpha)=0$. Vérifier que $0,5<\alpha<0,6$. Déduire des questions précédentes le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

On ne demande pas de construire la courbe représentative de la fonction g.

Partie B : Etude de la fonction f

1. a. Calculer la limite quand x tend vers $+\infty$ de $xf(x)$ (on pourra poser $X=\frac{1}{x^2}$).

b. En déduire que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Montrer que pour tout x de $]0\,;+\infty[$, on a $f'(x)=g(x)$. Dresser le tableau de variations de f sur $]0\,;+\infty[$.

2. Etude de f en 0

a. Montrer que $x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$ tend vers 0 quand X tend vers 0 par valeurs suprieures. Que peut-on en conclure ?

b. Etudier la dérivabilité de f en 0.

c. Préciser la tangente à la courbe de f au point O.

3. Donner l'équation de la tangente au point d'abscisse 1.

4. Donner l'allure de (C).

Correction

1. a. g est dérivable comme somme de fonctions dérivables. En effet, $\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$ est dérivable comme composée de fonctions dérivables, de même que $-\frac{2}{x^2+1}$.

$$g'(x)=\frac{-\frac{2x}{x^4}}{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{2\times 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{\frac{-2}{x^3}}{\frac{x^2+1}{x^2}}+\frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$=-\frac{2}{x\left(x^2+1\right)}+\frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{-2\left(x^2+1\right)+4x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$=\frac{2(x^2-1)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

b. Le signe de g'(x) est celui de $x^2-1=(x-1)(x+1)$. Comme g' est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, on a : si $0 < x < 1$, $g'(x)$ est négatif ; si $x > 1$, $g'(x)$ est positif.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x^2+1}$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=\ln 1=0$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x^2+1}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$

3. $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{x^2+1}$;

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$ donc

$\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{X\to+\infty}\ln X=+\infty$ avec $X=1+\frac{1}{x^2}$

et $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{x^2+1}=2$ donc $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=+\infty$.

4. a.

x	0		1		$+\infty$
g'(x)		−	0	+	
g(x)	$+\infty$	↘	−0,3	↗	0

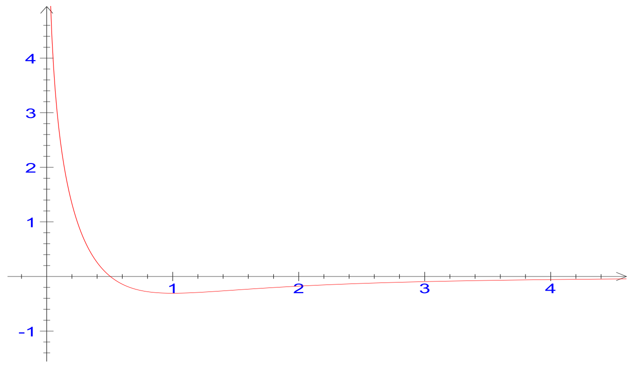
$g(1)=\ln(1+\frac{1}{1^2})-\frac{2}{1^2+1}=\ln 2-1\approx-0{,}3$.

4. b. La fonction est continue et dérivable sur]0 ; 1], de plus elle est strictement décroissante sur cet intervalle en changeant de signe, donc il existe une valeur $\alpha>0$ telle que $g(\alpha)=0$.

On a $g(0{,}5)\approx 0{,}009438$ et $g(0{,}6)\approx-0{,}141452$ donc $g(0{,}5)>0=g(\alpha)>g(0{,}6)$ et comme g est décroissante, $0{,}5<\alpha<0{,}6$

5. Pour $0 < x < \alpha$, alors $g(x)$ est positif ; pour $x > \alpha$ alors $g(x)$ est négatif.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln(x^2+1)=0$ car $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\ln(x^2+1)=\ln 1=0$.



1. a.

$$\lim_{x\to+\infty} xf(x)=\lim_{x\to+\infty} x^2\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{X\to 0}\frac{\ln(1+X)}{X}=1$$ (cours).

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$.

2. $f(x)=x\ln(1+\frac{1}{x^2})$

$$f'(x)=1.\ln(1+\frac{1}{x^2})+x.\frac{-\frac{2x}{x^4}}{1+\frac{1}{x^2}}=\ln(1+\frac{1}{x^2})+x.\frac{-\frac{2}{x^3}}{\frac{x^2+1}{x^2}}$$

$$=\ln(1+\frac{1}{x^2})-\frac{2}{x^2+1}=g(x)$$

X	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

3. a.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(x\ln(x^2+1)-x\ln x^2\right)$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} -x\ln x^2=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} -\frac{2\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} +\frac{2\ln x^{-1}}{\frac{1}{x}}$$ avec $X=\frac{1}{x}$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{2\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{X\to+\infty}\frac{2\ln X}{X}=0^-$$

Conclusion : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=0$.

b. f dérivable en 0 si et seulement si la limite de son taux d'accroissement est finie.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=+\infty$$

La fonction n'est donc pas dérivable en 0.

c. La tangente en O à f est verticale. Son équation est $x = 0$.

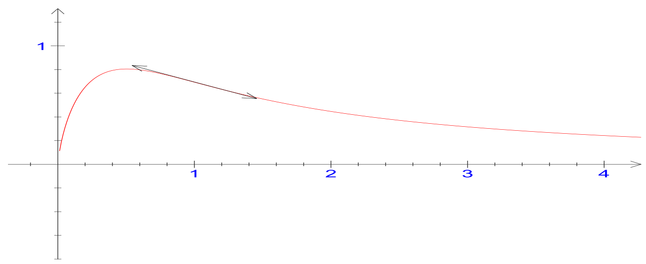
4. La tangente au point d'abscisse 1 a pour équation

$y=f'(1)(x-1)+f(1)$: $f(1)=1\ln(1+\frac{1}{1^2})=\ln 2$,

$f'(1)=g(1)=\ln 2-1$ d'où

$y=(\ln 2-1)(x-1)+\ln 2 \Leftrightarrow y=(\ln 2-1)x+1$.

5.



Remarque :

On a vu dans la partie A que $g'(1) = 0$, or $g'(1) = f''(1)$, c'est-à-dire la dérivée seconde de f en 1 : la courbe admet un point d'inflexion pour $x = 1$

Exercice 3

Résolution (in)équations

1. Résoudre l'équation : $\ln(x^2 - 3x - 2) = \ln(2x - 6)$.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système : $\begin{cases} \ln x - \ln y = 1 \\ x + y = 2e \end{cases}$.

4. Résoudre l'inéquation : $\ln(1+x) - \ln(1-x) > \ln 2x - \ln(1+x)$.

5. Résoudre : $1 + \ln(x + 3) = \ln(x^2 + 2x - 3)$.

6. Résoudre : $\ln(x^2 - 4e^2) < 1 + \ln(3x)$.

CORRECTION

1.Domaine de définition :

$D_1 = \left]-\infty\,;\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right[\cup \left]\frac{3+\sqrt{17}}{2}\,;+\infty\right[$, par ailleurs

$2x - 6 > 0$ si et seulement si $x > 3$. On a donc

$D_f = D_1 \cap]3\,;+\infty[= \left]\frac{3+\sqrt{17}}{2}\,;+\infty\right[$ car

$\frac{3+\sqrt{17}}{2} \approx 3{,}56$.

Pour la résolution : ln a = ln b équivaut à a = b donc,

l'équation devient : $x^2 - 3x - 2 = 2x - 6$ ou

encore $x^2 - 5x + 4 = 0$ d'où les solutions 1 et 4 ; mais

seule 4 est valable.

2.

$$\begin{cases} \ln x - \ln y = 1 \\ x + y = 2e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln \frac{x}{y} = \ln e \\ x + y = 2e \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = ye \\ ye + y = 2e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2e}{1+e} \\ x = \frac{2e^2}{1+e} \end{cases}$$

. Les deux solutions sont positives donc c'est bon.

3. Attention à l'ensemble de définition :

$1 + x > 0, 1 - x > 0, 2x > 0$

$\Rightarrow x > -1, x < 1, x > 0 \Rightarrow x \in \left]0\,;1\right[$

On a alors

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) > \ln\left(\frac{2x}{1+x}\right) \Leftrightarrow \frac{1+x}{1-x} - \frac{2x}{1+x} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 + 2x + x^2 - 2x + 2x^2}{(1-x)(1+x)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 + 3x^2}{(1-x)(1+x)} > 0$$

Le numérateur et le dénominateur sont positifs sur

]0 ; 1[, la solution est donc l'intervalle]0 ; 1[.

4 . $1 + \ln(x + 3) = \ln(x^2 + 2x - 3)$: il faut que $x > -3$ et

que $x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3) > 0$ (à l'extérieur des

racines) donc D =]– 3 ; +∞ [.

$1 + \ln(x + 3) = \ln(x^2 + 2x - 3)$

$\Leftrightarrow$ $\ln e + \ln(x + 3) = \ln(x^2 + 2x - 3)$

$\Leftrightarrow$ $\ln e(x + 3) = \ln(x^2 + 2x - 3)$

$\Leftrightarrow$ $e(x + 3) = x^2 + 2x - 3$.

ln est une bijection : $x^2 + (2 - e)x - 3(1 + e) = 0$,

$\Delta = (2 - e)^2 + 12(1 + e) = 4 - 4e + e^2 + 12 + 12e$
$= e^2 + 8e + 16 = (e + 4)^2$.

$x = \frac{-(2-e) \pm (e+4)}{2}$, $x_1 = -3 \notin$ D o'u $x_2 = e + 1 \in$D.

S = {e + 1}.

5. $\ln(x^2 - 4e^2) < 1 + \ln(3x)$ Il faut que $x^2 - 4e^2 > 0$ et que $3x > 0$ i.e. $x > 0$ et $x^2 > 4e^2$ c'est-à-dire $(x > 0)$ et $(x > 2e$ ou $x < -2e)$.

$D =]2e\ ;\ +\infty[$.

$\ln(x^2 - 4e^2) < 1 + \ln(3x) \Leftrightarrow \ln(x^2 - 4e^2) < \ln e + \ln(3x)$

$\Leftrightarrow \ln(x^2 - 4e^2) < \ln(3ex)$

$\Leftrightarrow x^2 - 4e^2 < 3ex \Leftrightarrow$ (E) $x^2 - 3ex - 4e^2 < 0$.

$\Delta = 9e^2 + 16e^2 = 25e^2 = (5e)^2$, $x = \dfrac{3e \pm 5e}{2}$;

(E) $\Leftrightarrow$ $-e < x < 4e$. $S =]2e\ ;\ 4e[$.

Vrai-Faux A) Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{\ln(\sqrt{x})}$, D son ensemble de définition et C sa courbe représentative.

a. On a D =]0, +∞[.

b. La courbe C admet une droite asymptote en +∞.

c. Pour tout $x \in$ D, on a : $f(x)<\frac{x}{2}$.

d. Pour tout $x \in$ D, on a : $f'(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{x(\ln x)^2}$.

QCM (choisir la bonne réponse)

Soient f et g les fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$ respectivement définies par :

$$f(x)=-2\ln(x)+2+x^2 \text{ et } g(x)=\frac{-x^2-2\ln(x)}{x}.$$

1. La dérivée de f est définie par : $f'(x)=$

A. $\frac{2x^2-2}{x}$	B. $\frac{2x^2+2}{x}$	C. $\frac{-2x^2-2}{x}$	D. aucune des 3 réponses précédentes

2. L'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 2 est :

A. $y=f'(x)(x-2)+f(2)$	B. $y=f'(x)(x-2)-f(2)$	C. $y=f'(2)(x-2)+f(2)$	D. $y=f(2)(x-2)+f'(2)$

3. La dérivée de g est définie par : $g'(x)=$

A. $-2x-\frac{2}{x}$	B. $\frac{f(x)}{x^2}$	C. $-\frac{f(x)}{x^2}$	D. aucune des 3 réponses précédentes

4. Le minimum de f est égal à :

A. 1	B. 3	C. 0	D. aucune des 3 réponses précédentes

5. $f\left(\sqrt{e}\right)=$

A. e	B. $e+1$	C. $e-1$	D. aucune des 3 réponses précédentes

6. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=$

A. 0	B. 2	C. $-\infty$	D. $+\infty$

7. $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)=$

A. $-\infty$	B. $+\infty$	C. n'existe pas	D. aucune des 3 réponses précédentes

8. L'asymptote oblique à la courbe C_g représentative de g a pour équation réduite :

A. $y=-x-2$	B. $y=-x$	C. $y=x+2$	D. $y=x$

10. Le nombre de solutions à l'équation $g(x)=0$ est égal à :

A. 0	B. 1	C. 2	D. 3