Lycée HASSAN 2	**Devoir Libre 3**	Classe: 1BAC-S
2024/2025	**Semestre 1**	Pr: Slimane TAchroun

Exercice 1

1) On considère une suite arithmétique (u_n) de raison $r=2$ et de premier terme $u_0=4$.

   a) Calculer u_n en fonction de n.

   b) Calculer $s_n=u_0+u_2+\cdots+u_{n-1}+u_n$.

2) On considère une suite géométrique (v_n) de raison q et de premier terme $v_1=3$.

   a) Calculer v_n en fonction de n.

   b) Calculer $s_n=v_1+v_2+\cdots+v_{n-1}$.

Exercice 2

On considère la suite numérique (U_n) définie par : $\begin{cases} U_{n+1}=\dfrac{2}{5}U_n+1, \quad \forall n\in\mathbb{N}, \\ U_0=0. \end{cases}$

1- Calculer U_1 et U_2.

2- Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $U_n<\dfrac{5}{3}$.

3- a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $U_{n+1}-U_n=-\dfrac{3}{5}\left(U_n-\dfrac{5}{3}\right)$.

   b) En déduire que (U_n) est une suite croissante et convergente.

4- On pose $V_n=U_n-\dfrac{5}{3}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

   a) Calculer V_0.

   b) Montrer que la suite (V_n) est géométrique de raison $\dfrac{2}{5}$.

   c) Calculer V_n en fonction de n.

   d) Déduire que $U_n=-\dfrac{5}{3}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n+\dfrac{5}{3}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 3

1- Soit (u_n) une suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0=1, \\ u_{n+1}=\dfrac{4u_n-1}{4u_n}, \quad \forall n\in\mathbb{N}. \end{cases}$

2- Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n>\dfrac{1}{2}$.

3- Montrer que $u_{n+1}-u_n=-\dfrac{(2u_n-1)^2}{4u_n}$.

4- Déduire que (u_n) est décroissante et que $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\leq 1$.

5- Soit (v_n) une suite définie par $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n=\dfrac{3}{2u_n-1}$.

   a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison $r=3$, puis calculer v_0.

   b) Déterminer v_n en fonction de n puis déduire que $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)$.

6- Calculer $S=v_0+v_1+v_2+\cdots+v_{20}$.