Dérivation – Etude de fonctions

Remarques

I. Nombre dérivé- Fonction dérivée (Rappels)

Activité ①:

1. On considère f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x$.
Étudier la dérivabilité de f en -1 puis interpréter le résultat graphiquement.

2. On considère g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = |x - 1|$.

a. Etudier la dérivabilité de g à droite et à gauche en 1 puis interpréter les résultats graphiquement.

b. g est-elle dérivable en 1 ?

Définitions et propriétés :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un point de I.

- On dit que f est ***dérivable*** en a s'il existe un réel l tel que $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l$.
- Le nombre l, noté $f'(a)$ ou $\frac{df}{dx}(a)$, est appelé le ***nombre dérivé*** de la fonction f en a.
- Dans ce cas la courbe de f admet une tangente au voisinage de a d'équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
- La fonction $x \mapsto f'(a)(x-a) + f(a)$ s'appelle ***l'approximation affine*** de f au voisinage de a. On écrit alors $f(x) \cong \boldsymbol{f'(a)(x-a) + f(a)}$ au voisinage de a.
- On dit que f est ***dérivable à droite*** de a, s'il existe un réel l', tel que $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l'$.
- Le nombre l', noté $f_d'(a)$, est appelé le ***nombre dérivé*** de la fonction f ***à droite*** en a.
- Dans ce cas la courbe de f admet une demi-tangente au voisinage de a d'équation $\begin{cases} y = f_d'(a)(x-a) + f(a) \\ x > a \end{cases}$. (On définit de même manière la dérivabilité à gauche en a)

Exemple :

La fonction définie sur $]-\infty; 1]$ par $f: x \mapsto x + 1 + 2\sqrt{1-x}$ est dérivable en -3. En effet :

On a
$$\begin{aligned}\lim_{x\to -3}\frac{f(x)-f(-3)}{x+3} &= \lim_{x\to -3}\frac{x-1+2\sqrt{1-x}}{x+3}\\ &= \lim_{x\to -3}\frac{(x-1+2\sqrt{1-x})(x-1-2\sqrt{1-x})}{(x+3)(x-1-2\sqrt{1-x})}\\ &= \lim_{x\to -3}\frac{(x-1)^2+2(1-x)}{(x+3)(x-1-2\sqrt{1-x})}\\ &= \lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x-1)}{(x+3)(x-1-2\sqrt{1-x})}\\ &= \lim_{x\to -3}\frac{x-1}{x-1-2\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Donc f est dérivable en -3 et la courbe (C_f) admet au voisinage de -3 une tangente d'équation : $y = f'(-3)(x+3) + f(-3) = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$.

- Donnons une valeur approchée de $f(-2.999)$:

La fonction affine tangente à (C_f) au voisinage de -3 est $g: x \mapsto \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$.

Ainsi : $f(-2.999) \cong g(-2.999)$.

Or $g(-2.999) = \frac{1}{2}(-2.999) + \frac{7}{2} = 2{,}0005$.

Par suite $f(-2.999) \cong 2{,}0005$.

Remarques :

- Si $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = 0$, alors (C_f) admet une tangente horizontale au point $A(a, f(a))$.
- Si f est continue en a et $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$, alors (C_f) admet une demi-tangente verticale au point $A(a, f(a))$.

Exemple :

Pr. LATRACH ABDELKBIR

La fonction définie sur $]-\infty;1]$ par $f: x \mapsto x+1+2\sqrt{1-x}$ n'est pas dérivable en 1 a gauche. En effet :

$$\begin{aligned}\text{On a } \lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x\to1^-}\frac{x-1+2\sqrt{1-x}}{x-1}\\ &= \lim_{x\to1^-}\frac{\left(x-1+2\sqrt{1-x}\right)\left(x-1-2\sqrt{1-x}\right)}{(x-1)\left(x-1-2\sqrt{1-x}\right)}\\ &= \lim_{x\to1^-}\frac{(x+3)(x-1)}{(x-1)\left(x-1-2\sqrt{1-x}\right)}\\ &= \lim_{x\to1^-}\frac{x+3}{x-1-2\sqrt{1-x}} = +\infty.\end{aligned}$$

Parce que $\lim\limits_{x\to1^-} x+3=4$ et $\lim\limits_{x\to1^-} x-1-2\sqrt{1-x}=0^-$ du fait que $x-1<0$ et $-2\sqrt{1-x}<0$ pour tout $x<1$.

Donc f n'est pas dérivable en 1 à gauche.

Puisque f est continue en 1 à gauche et $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=+\infty$, alors (C_f) admet une demi-tangente verticale au point $A(1,2)$ dirigée vers le haut.

Application ① :

Etudier la dérivabilité de la fonction f en a puis interpréter graphiquement les résultats dans les cas suivants :

a. $f(x)=x^3-x$ et $a=2$ **b.** $f(x)=\frac{x+1}{x}$ et $a=1$ **c.** $f(x)=\sqrt{2x+1}$ et $a=-\frac{1}{2}$ à droite.

Exercice ①:

On considère f la fonction définie par $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & ; si\ x\neq0\\ 0 & ; si\ non\end{cases}$.

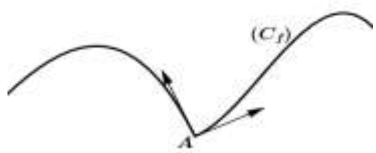
1. Etudier la continuité de f en $x_0=0$.
2. Etudier la dérivabilité de f en $x_0=0$. Interpréter graphiquement le résultat.

Propriété :

f est dérivable en a si et seulement s'elle est dérivable à droite et à gauche en a et $f_g'(a)=f_d'(a)$.

Graphiquement :

Si $f_g'(a)\neq f_d'(a)$, alors (C_f) admet deux demi-tangentes non parallèles au point $A(a,f(a))$. Ce point est appelé **point anguleux.**



Application ②:

On considère f la fonction définie par $\begin{cases}f(x)=\sqrt{x}-1\ ; 0\leq x<1\\ f(x)=\frac{x^2-1}{4}\quad ; x\geq1\end{cases}$

1. Montrer que f est continue en 1 .
2. Étudier la dérivabilité de f en 1.

Remarque :

Si f est dérivable en a, alors elle est continue en a. la réciproque n'est pas toujours vraie.

Exemple :

La fonction $x\longmapsto|x|$ est continue en 0 mais n'est pas dérivable en ce point.

II. Opérations sur les fonctions dérivables-Monotonie d'une fonction

Propriété :

- Les fonctions polynomiales et les fonctions $x\longmapsto cos(x)$ et $x\longmapsto sin(x)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

- Toute fonction rationnelle est dérivable sur tout intervalle inclus dans son domaine de définition.

Tableau des fonctions dérivées usuelles :

La fonction f	**La fonction dérivée f'**	**Domaine de dérivabilité de f**
$x \longmapsto a \quad (ka \in \mathbb{R})$	$x \longmapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto ax + b \quad (a \in \mathbb{R}\, et\, b \in \mathbb{R})$	$x \longmapsto a$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto x^n\ (n \in \mathbb{N}^*)$	$x \longmapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{1}{x}$	$x \longmapsto -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$x \longmapsto \sqrt{x}$	$x \longmapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \longmapsto \cos(x)$	$x \longmapsto -sin\,(x)$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto sin\,(x)$	$x \longmapsto cos\,(x)$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto tan\,(x)$	$x \longmapsto 1 + tan^2(x) = \frac{1}{cos^2(x)}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{R}\right\}$

Propriété :

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k un réel, on a :
- La fonction $f + g$ est dérivable sur I et $(f+g)' = f' + g'$.
- La fonction λf est dérivable sur I et $(\lambda f)' = \lambda f'$.
- La fonction $f \times g$ est dérivable sur I et $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$.
- La fonction f^n $(n \in IN)$ est dérivable sur I et $(f^n)' = nf' \times f^{n-1}$.
- Si $(\forall x \in I): g(x) \neq 0$, alors la fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$.
- Si $(\forall x \in I): f(x) \neq 0$, alors la fonction $\frac{1}{f}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$.
- Si $(\forall x \in I): f(x) > 0$, alors la fonction $\sqrt{f}$ est dérivable sur I et $\left(\sqrt{f}\right)' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$.

Application ③:

1. Calculer la dérivée des fonctions suivantes :
$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$; $h(x) = \sqrt{x}\sin(x) + \cos(x)$; $g(x) = (x^2+1)^5$
2. a. Etudier la monotonie de la fonction f ci-dessus.
   b. Dresser le tableau de variations de f.
   c. En déduire que$(\forall x \in \mathbb{R}): -1 \leq f(x) \leq 1$.

Exercice ②:

I. On considère g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = x\sqrt{x} - 1$.
1. Etudier la dérivabilité de g à droite en 0 . Interpréter graphiquement le résultat.
2. Montrer que g est dérivable sur $]0; +\infty[$ puis calculer sa dérivée.
3. Dresser le tableau de variations de g.
4. Calculer $g(1)$ puis déduire le signe de g sur $[0; +\infty[$.

II. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 2x - 3 + \frac{4}{\sqrt{x}}$.
1. Montrer que $(\forall x \in]0; +\infty[): f'(x) = \frac{2g(x)}{x\sqrt{x}}$.
2. Etudier les variations de f.
3. Dresser le tableau de variations de f.
4. En déduire que $(\forall x \in]0; +\infty[): f(x) \geq 3$.

III. Dérivée de la fonction composée :

Activité ②:

Soient f et g deux fonctions définies sur IR par : $f(x) = \cos(x)$; $g(x) = x^2 - 2x$
1. Calculer $f'(x)$ et $g'(x)$ pour tout $x \in IR$.
2. Calculer $f'(x) \times g'(f(x))$.
3. Soit $h(x) = (gof)(x)$. Déterminer $h(x)$ puis calculer $h'(x)$.
4. Comparer $h'(x) et f'(x) \times g'(f(x))$.

Propriété :

- Si f est dérivable en un réel a et g dérivable en $f(a)$, alors la fonction composée

Pr. LATRACH ABDELKBIR

gof est dérivable en a et : $(gof)'(a) = g'(f(a)) \times f'(a)$.

- Si f est dérivable sur un intervalle I et g dérivable sur un intervalle J tel que $f(I) \subset J$, alors la fonction composée gof est dérivable sur I et de plus, pout tout $x \in I$: $(gof)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$.

Exemple :

Déterminons la dérivée de la fonction $h : x \mapsto \cos(\sqrt{x})$ sur $]0; +\infty[$.
Pour tout x de $]0; +\infty[$, on a $h(x) = (gof)(x)$ tel que $g(x) = \cos(x)$ et $f(x) = \sqrt{x}$.
Comme g est dérivable sur IR et f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $f(]0; +\infty[) \subset IR$, alors la fonction h est dérivable sur $]0; +\infty[$.
Et on : $h'(x) = g'(f(x)) \times f'(x) = \frac{-\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$, pour tout x de $]0; +\infty[$.

Application ④:

Calculer la dérivée des fonctions $f : x \mapsto \sin\left(x^2 - \frac{2}{3}x + 4\right)$ et $g : x \mapsto \cos\left(\frac{4}{x^2+4}\right)$

IV.Dérivée de la fonction Réciproque :

Propriété :

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I de IR, et $a \in I$.
Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$, alors la fonction f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et $(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$.

Application ⑤:

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = x^3 + x$.

1. 1.Montrer que f admet une fonction réciproque définie sur IR.
2. a. Calculer $f(1)$.
   b. Montrer que f^{-1} est dérivable en 2 puis déterminer $(f^{-1})'(2)$.

Propriété :

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I de IR.
Si f est dérivable sur I tel que $(\forall x \in I) : f'(x) \neq 0$, alors la fonction f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$. De plus on a pour tout $x \in J$: $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

Conséquences :

- Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x \in]0; +\infty[$: $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$.

- Si f une fonction dérivable sur un intervalle I de IR et $(\forall x \in I) : f(x) > 0$, alors la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{f(x)}$ est dérivable sur I et sa fonction dérivée est donnée par : $\sqrt[n]{f(x)} = \frac{f'(x)}{n \times (\sqrt[n]{f(x)})^{n-1}}$.

Application ⑥:

1. Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :
   a. $f(x) = \sqrt[3]{x}$ b. $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$
   c. $f(x) = \sqrt[4]{1 + \cos^2(x)}$ d. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 2x}$
2. A l'aide du nombre dérivé, calculer les limites suivantes :
   a. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x}$ b. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{(x^8+1)\left(\sqrt[4]{x^3}+1\right) - 4}{x-1}$

Exercice ③:

Soit f la fonction numérique définie sur IR par $f(x) = x^3 - 3x - 3$.

1. Etudier les variations de la fonction f.
2. Soit g la restriction de f sur $[1 ;+\infty[$.
   a. Montrer que g admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J à déterminer.
   b. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α et que $2 < \alpha < 3$.
   c. Montrer que : $(g^{-1})'(0) = \frac{1}{3(\alpha^2 - 1)}$.

Pr. LATRACH ABDELKBIR

V.Branches infinies (Rappel)

Schéma récapitulatif de l'étude des branches infinies

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ → (C_f) admet une asymptote verticale d'équation $x=a$
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=l$ → (C_f) admet une asymptote horizontale d'équation $x=l$ au voisinage de ∞
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ — $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$:
  - 0 → (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de ∞
  - ∞ → (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de ∞
  - a → $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax)$:
    - ∞ → (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=ax$ au voisinage de ∞
    - b → (C_f) admet une asymptote oblique d'équation $y=ax+b$ au voisinage de ∞
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)-(ax+b)=0$ → $y=ax+b$ est asymptote oblique à (C_f) au voisinage de ∞

❍ ***Exemple ① :***

On considère f la fonction définie sur $IR\backslash\{-1\}$ par : $f(x)=\frac{3-2x^2}{(1+x)^2}$.

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3-2x^2}{(1+x)^2}=-2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3-2x^2}{(1+x)^2}=-2$.

Donc la droite d'équation $y=-2$ est une asymptote horizontale à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

Et on a : $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\frac{3-2x^2}{(1+x)^2}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\frac{3-2x^2}{(1+x)^2}=+\infty$.

Donc la droite d'équation $x=2$ est une asymptote verticale de la courbe (C_f).

❍ ***Exemple ② :***

On considère g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $g(x)=2x-\sqrt{x}$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-\sqrt{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}(2\sqrt{x}-1)=+\infty$.

On calcul alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}$:

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} 2-\frac{1}{\sqrt{x}}=2$.

Par suite : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-2x=\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-\sqrt{x}-2x=\lim\limits_{x\to+\infty}-\sqrt{x}=-\infty$.

D'où la courbe (C_g) admet une branche parabolique de direction de la droite d'équation $y=2x$ au voisinage de $+\infty$.

✍ ***Application ⑦:***

On considère f la fonction définie par $f(x)=\frac{x^2+x-1}{x+2}$.

1. Donner $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f.
2. Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x)$. Interpréter les résultats.
3. a. Vérifier, pour tout x de $\mathcal{D}_f$, que $f(x)=x-1+\frac{1}{x+2}$.

b. Montrer que la droite d'équation $(D): y=x-1$ est une asymptote oblique de (C_f) au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

c. Etudier les positions relatives entre la courbe (C_f) et la droite (D).

VI.Concavité d'une courbe - Points d'inflexion :

Propriété :

Soient f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I et (C_f) sa courbe représentative et $a \in I$.

- Si f'' est positive sur l'intervalle I, alors (C_f) est convexe
- Si f'' est négative sur l'intervalle I, alors (C_f) est concave.
- Si f'' s'annule en a en changeant de signe, alors le point $A(a; f(a))$ est un point d'inflexion de (C_f).

Application ⑧ :

On considère f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2+x-1}{x+2}$.
Etudier la concavité de (C_f) en précisant les points d'inflexion s'ils existent.

III. Eléments de symétrie d'une courbe :

1. Axe de symétrie :

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un ensemble D et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
La droite (Δ) d'équation $x = a$ $(a \in \mathbb{R})$ est un ***axe de symétrie*** de la courbe (C_f) si et seulement si : $\begin{cases} (\forall x \in D); & (2a - x) \in D \\ (\forall x \in D); & f(2a - x) = f(x) \end{cases}$.

Application ⑨ :

Montrer que la droite (Δ): $x = 1$ est un axe de symétrie de la courbe de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$.

2. Centre de symétrie :

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un ensemble D et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
Le point $\Omega(a; b)$ tel que $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ est un ***centre de symétrie*** de la courbe (C_f) si et seulement si : $\begin{cases} (\forall x \in D); & (2a - x) \in D \\ (\forall x \in D); & f(2a - x) + f(x) = 2b \end{cases}$.

Application ①⓪ :

On considère f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2+x-1}{x+2}$.

1. Montrer que le point $\Omega(-2; -3)$ est un centre de symétrie de la courbe de la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2+x-1}{x+2}$.
2. En déduire qu'il suffit d'étudier f sur $]-2; +\infty[$.

Exercice ④:

On considère f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2+x-1}{x+2}$.

1. Donner les coordonnées des points d'intersection de (C_f) avec les axes du repère.
2. Etudier les variations de f.
3. Soit g la restriction de f sur $[-1; +\infty[$.

Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

4. Construire (D): $y = x - 1$, (C_f) et $(C_{g^{-1}})$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice de synthèse :

I. On considère g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

1. Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

Pr. LATRACH ABDELKBIR

2. **a.** Montrer, pour tout réel x, que $g'(x) = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

b. Donner le tableau des variations de g .

c. En déduire, pour tout réel x, que $g(x) > 0$.

II. Soit f la fonction qui définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 1 + \sqrt{x^2+1}$, et soit (C_f) sa courbe representative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2. Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$. Interpréter géométriquement le résultat.

3. Montrer que la droite $(D): y = 2x - 1$ est une asymptote oblique de (C_f) au voisinage de $+\infty$.

4. **a.** Montrer, pour tout réel x, que $f'(x) = g(x)$.

b. Dresser le tableau des variations de f.

5. Calculer $f(1)$ puis tracer (C_f).

6. **a.** Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} definie sur un intervalle J à déterminer.

b. Montrer que f^{-1} est derivable en $\sqrt{2}$ puis calculer $(f^{-1})'\left(\sqrt{2}\right)$.

c. Tracer $(C_{f^{-1}})$ dans le même repère.

Pr. LATRACH ABDELKBIR