

Dérivation – Étude de fonctions

I. Nombre dérivé - Fonction dérivée (Rappels)

Activité 0

- On considère f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 - 2x$. Étudier la dérivabilité de f en -1 puis interpréter le résultat graphiquement.
- On considère g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = |x - 1|$.
 - Étudier la dérivabilité de g à droite et à gauche en 1 puis interpréter les résultats graphiquement.
 - g est-elle dérivable en 1 ?

Définitions et propriétés

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un point de I .

- On dit que f est **dérivable** en a s'il existe un réel l tel que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$.
- Le nombre l , noté $f'(a)$ ou $\frac{df}{dx}(a)$, est appelé le **nombre dérivé** de la fonction f en a .
- On dit que f est **dérivable à droite** de a s'il existe un réel l' , tel que $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l'$.
- Le nombre l' , noté $f'_d(a)$, est appelé le nombre dérivé de la fonction f à droite en a .
- On dit que f est **dérivable à gauche** de a s'il existe un réel l' , tel que $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l'$.

Remarques

- Si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0$, alors (C_f) admet une tangente horizontale au point $A(a, f(a))$.
- Si f est continue en a et $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$, alors (C_f) admet une demi-tangente verticale au point $A(a, f(a))$.

Exemple

La fonction définie sur $] -\infty; 1]$ par $f : x \mapsto x + 1 + 2\sqrt{1-x}$ n'est pas dérivable en 1 à gauche. En effet :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - 1 + 2\sqrt{1-x}}{x - 1} = +\infty$$

Parce que :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 3) = 4, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} x - 1 - 2\sqrt{1-x} = 0^-$$

Donc f n'est pas dérivable en 1 à gauche.

Puisque f est continue en 1 à gauche et $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = +\infty$, alors la courbe (C_f) admet une *demi-tangente verticale* au point $A(1, 2)$ dirigée vers le haut.

Application 0 : Étudier la dérivabilité de la fonction f en a puis interpréter graphiquement les résultats dans les cas suivants :

- $f(x) = x^3 - x$, $a = 2$
- $f(x) = \frac{x+1}{x}$, $a = 1$
- $f(x) = \sqrt{2x+1}$, $a = -\frac{1}{2}$ à droite

Cas 1 : $f(x) = x^3 - x$ en $a = 2$

1. Calcul de la dérivabilité Pour étudier la dérivabilité de f en $a = 2$, on a

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^3 - x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x - 6}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 3)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 3) \\ &= 2^2 + 2(2) + 3 = 4 + 4 + 3 = 11 \end{aligned}$$

2. Conclusion alors f est **dérivable** en $a = 2$ et son nombre dérivé est **$f'(2) = 11$** .

3. Interprétation graphique La courbe (C_f) admet une **tangente** au point $A(2, f(2)) = A(2, 6)$. L'équation de cette tangente (T) est :

$$\begin{aligned} y &= f'(2)(x - 2) + f(2) \\ y &= 11(x - 2) + 6 \\ y &= 11x - 22 + 6 \\ y &= 11x - 16 \end{aligned}$$

Cas 2 : $f(x) = \frac{x+1}{x}$ en $a = 1$

. **Calcul de la dérivabilité** On calcule la limite du taux d'accroissement en $a = 1$, :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x+1}{x} - 2}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x+1-2x}{x}}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{x(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} -\frac{1}{x} = -1\end{aligned}$$

La limite est un nombre réel fini. Donc, la fonction f est **dérivable** en $a = 1$ et $f'(1) = -1$.

Interprétation graphique La courbe (C_f) admet une **tangente** au point $A(1, f(1)) = A(1, 2)$. Son équation est :

$$\begin{aligned}y &= f'(1)(x - 1) + f(1) \\ y &= -1(x - 1) + 2 \\ y &= -x + 1 + 2 \\ y &= -x + 3\end{aligned}$$

Cas 3 : $f(x) = \sqrt{2x+1}$ en $a = -\frac{1}{2}$ à droite

1. **Calcul de la dérivabilité à droite**

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} \frac{f(x) - f(-\frac{1}{2})}{x - (-\frac{1}{2})} &= \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} \frac{\sqrt{2x+1}}{x + \frac{1}{2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} \frac{\sqrt{2x+1}}{\frac{2x+1}{2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} \frac{2\sqrt{2x+1}}{2x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} \frac{2}{\sqrt{2x+1}} \\ &= \frac{2}{0^+} \\ &= +\infty\end{aligned}$$

Donc, la fonction f n'est pas dérivable à droite en $a = -\frac{1}{2}$.

Interprétation graphique La courbe (C_f) admet une **demi-tangente verticale** au point $A(-\frac{1}{2}, 0)$, dirigée vers le haut car la limite est $+\infty$.

Exercice 0 : On considère f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de f en $x_0 = 0$.
2. Étudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$. Interpréter graphiquement le résultat.

Propriété :

f est dérivable en a ssi elle est dérivable à droite et à gauche en a et $f'_g(a) = f'_d(a)$

Application 2 : On considère f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} - 1 & 0 \leq x < 1 \\ \frac{x^2 - 1}{4} & x \geq 1 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue en 1
2. Étudier la dérivabilité de f en 1

Remarque : Si f est dérivable en a , alors elle est continue en a , mais la réciproque n'est pas toujours vraie.

Exemple : La fonction $x \mapsto |x|$ est continue en 0, mais n'est pas dérivable en ce point.

II. Opérations sur les fonctions dérivables - Monotonie d'une fonction

Propriété

Les fonctions polynomiales et les fonctions $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \sin(x)$ sont dérivables sur \mathbb{R} .

Tableau des fonctions dérivées usuelles

La fonction f	La fonction dérivée f'	Domaine de dérivabilité de f
$x \mapsto a$	0	\mathbb{R}
$x \mapsto ax + b$	a	\mathbb{R}
$x \mapsto x^n \ (n \in \mathbb{N}^*)$	nx^{n-1}	\mathbb{R}
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	\mathbb{R}^*
$x \mapsto \sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	\mathbb{R}_+
$x \mapsto \cos(x)$	$-\sin(x)$	\mathbb{R}
$x \mapsto \sin(x)$	$\cos(x)$	\mathbb{R}
$x \mapsto \tan(x)$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Propriétés

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k un réel, alors :

- $f + g$ est dérivable et $(f + g)' = f' + g'$
- kf est dérivable et $(kf)' = kf'$
- $f \times g$ est dérivable et $(fg)' = f'g + fg'$
- f^n (pour $n \in \mathbb{N}$) est dérivable et $(f^n)' = nf^{n-1}f'$
- Si $g(x) \neq 0$, $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
- Si $f(x) \neq 0$, $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$
- Si $f(x) > 0$, $(\sqrt{f})' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$

Applications

1. Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}, \quad h(x) = \sqrt{x} \sin(x) + \cos(x), \quad g(x) = (x^2 + 1)^5$$

2. (a) Étudier la monotonie de la fonction f ci-dessus.
 (b) Dresser le tableau de variations de f .
 (c) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq f(x) \leq 1$.

Exercice :

- On considère g définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = x\sqrt{x} - 1$:
 1. Étudier la dérivabilité de g à droite en 0. Interpréter graphiquement.
 2. Montrer que g est dérivable sur $]0, +\infty[$ puis calculer sa dérivée.
 3. Dresser le tableau de variations de g .
 4. Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de g sur $[0, +\infty[$.
- Soit f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 2x - 3 + \frac{4}{\sqrt{x}}$:
 1. Montrer que $f' = \frac{2g(x)}{x\sqrt{x}}$
 2. Étudier la monotonie de f
 3. Dresser le tableau de variation de f
 4. En déduire que $\forall x \in]0, +\infty[, f(x) \geq 3$.

III. Dérivée de la fonction composée

Propriété

- Si f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$, alors la fonction composée $g \circ f$ est dérivable en a et :

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \times f'(a)$$

- Si f est dérivable sur un intervalle I et g dérivable sur un intervalle J tel que $f(I) \subset J$, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$$

Exemple

Déterminons la dérivée de la fonction $h : x \mapsto \cos(\sqrt{x})$ sur $]0, +\infty[$.

Pour tout x de $]0, +\infty[$, on a $h(x) = (g \circ f)(x)$ tel que $g(x) = \cos(x)$ et $f(x) = \sqrt{x}$. Comme g est dérivable sur \mathbb{R} et f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $f(]0, +\infty[) \subset \mathbb{R}$, alors la fonction h est dérivable sur $]0, +\infty[$. Et on a : $h'(x) = g'(f(x)) \times f'(x) = -\sin(\sqrt{x}) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$, pour tout x de $]0, +\infty[$.

Application

Calculer la dérivée des fonctions $f : x \mapsto \sin(x^2 - \frac{2}{3}x + 4)$ et $g : x \mapsto \cos(\frac{4}{x^2+4})$.

IV. Dérivée de la fonction Réciproque

Propriété

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I de \mathbb{R} , et $a \in I$. Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$, alors la fonction f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et :

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

Application

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 + x$.

1. Montrer que f admet une fonction réciproque définie sur \mathbb{R} .
2. (a) Calculer $f(1)$.
(b) Montrer que f^{-1} est dérivable en 2 puis déterminer $(f^{-1})'(2)$.

Propriété

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I de \mathbb{R} . Si f est dérivable sur I tel que $(\forall x \in I) : f'(x) \neq 0$, alors la fonction f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$. De plus on a pour tout $x \in J$:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Conséquences

- Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x \in]0, +\infty[$: $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}$.
- Si f une fonction dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R} et $(\forall x \in I) : f(x) > 0$, alors la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{f(x)}$ est dérivable sur I et sa fonction dérivée est donnée par :

$$(\sqrt[n]{f(x)})' = \frac{f'(x)}{n(\sqrt[n]{f(x)})^{n-1}}$$

Application

1. Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

- $f(x) = \sqrt[3]{x}$
- $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$
- $f(x) = \sqrt[4]{1 + \cos^2(x)}$
- $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 2x}$

2. A l'aide du nombre dérivé, calculer les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^8+1)(\sqrt[4]{x^3+1})-4}{x-1}$

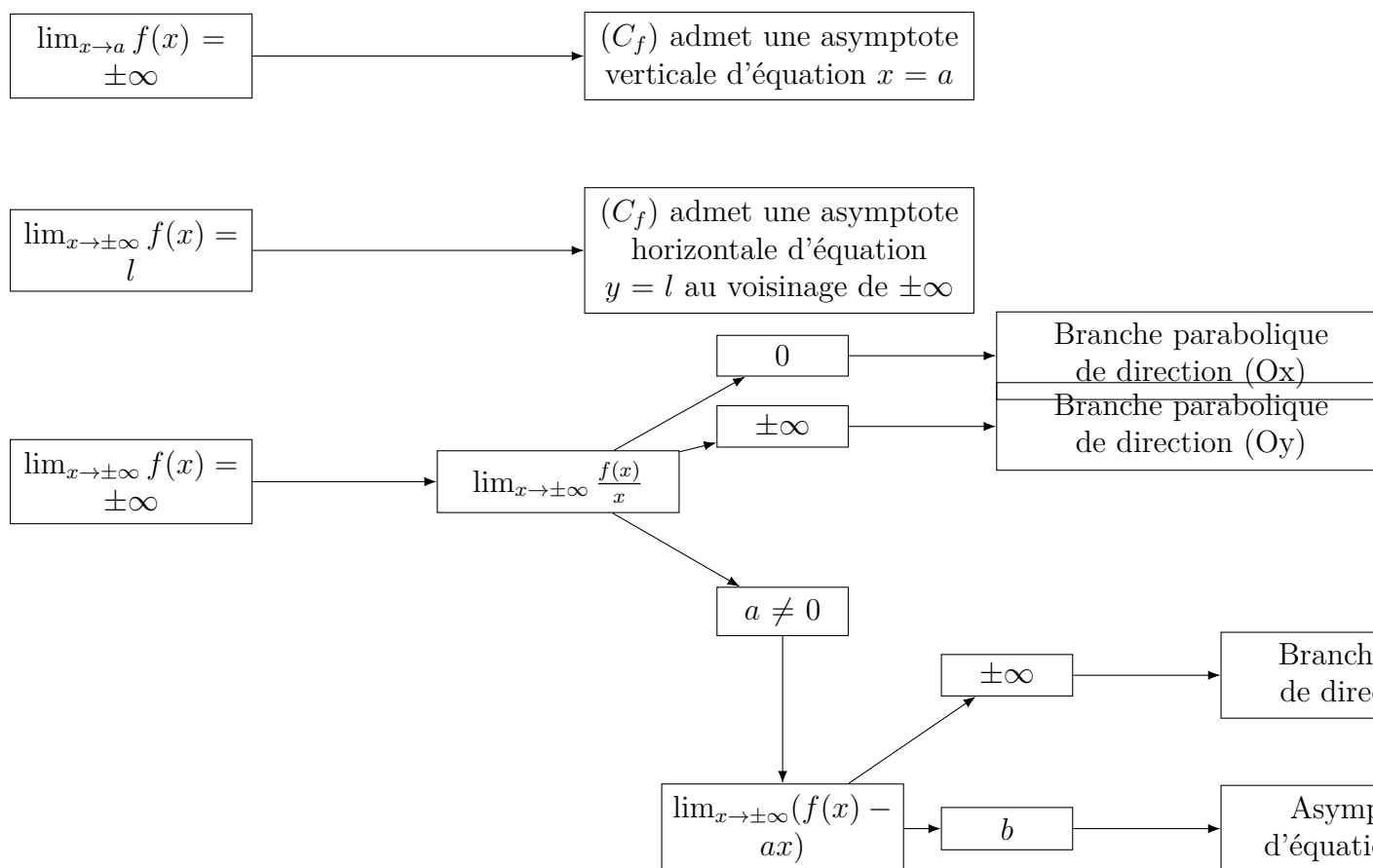
Exercice

Soit f la fonction numérique définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 - 3x - 3$.

- Etudier les variations de la fonction f .
- Soit g la restriction de f sur $[1, +\infty[$.
 - Montrer que g admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J à déterminer.
 - Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α et que $2 < \alpha < 3$.
 - Montrer que : $(g^{-1})'(0) = \frac{1}{3(\alpha^2-1)}$.

V. Branches infinies (Rappel)

Schéma récapitulatif de l'étude des branches infinies



Exemple 1

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par : $f(x) = \frac{3-2x^2}{(1+x)^2}$.

On a $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2}{x^2} = -2$.

Donc la droite d'équation $y = -2$ est une asymptote horizontale à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

Et on a : $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$.

Donc la droite d'équation $x = -1$ est une asymptote verticale de la courbe (C_f) .

Exemple 2

On considère la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $g(x) = 2x - \sqrt{x}$.

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(2 - \frac{1}{\sqrt{x}}) = +\infty$.

On calcule alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$.

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - \frac{1}{\sqrt{x}}) = 2$.

Par suite : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sqrt{x} - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\sqrt{x} = -\infty$.

D'où la courbe (C_g) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = 2x$ au voisinage de $+\infty$.

Application

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2+x-1}{x+2}$.

1. Donner D_f l'ensemble de définition de f .
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$. Interpréter les résultats.
3. (a) Vérifier, pour tout $x \in D_f$, que $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x+2}$.
 (b) Montrer que la droite d'équation $(D) : y = x - 1$ est une asymptote oblique de (C_f) au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

VI. Concavité d'une courbe - Points d'inflexion**Propriétés**

Soient f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I et (C_f) sa courbe représentative.

- Si $f'' > 0$ sur I , alors (C_f) est convexe.
- Si $f'' < 0$ sur I , alors (C_f) est concave.
- Si f'' s'annule en a en changeant de signe, alors $A(a; f(a))$ est un point d'inflexion.

Application :

On considère f définie par $f(x) = \frac{x^2+x-1}{x+2}$.

Étudier la concavité de (C_f) et préciser les points d'inflexion s'ils existent.

III. Éléments de symétrie d'une courbe**1. Axe de symétrie****Propriétés**

Soit f une fonction définie sur un ensemble D et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé.

La droite (Δ) d'équation $x = a$ ($a \in \mathbb{R}$) est un axe de symétrie de (C_f) si et seulement si

$$\begin{cases} \forall x \in D, (2a - x) \in D \\ \forall x \in D, f(2a - x) = f(x) \end{cases}$$

Application :

Montrer que la droite $(\Delta) : x = 1$ est un axe de symétrie de la courbe de la fonction $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x} + 3$.

2. Centre de symétrie

Propriétés

Soit f définie sur un ensemble D et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé.
Le point $\Omega(a, b)$ est un centre de symétrie de (C_f) si et seulement si

$$\begin{cases} \forall x \in D, (2a - x) \in D \\ \forall x \in D, f(2a - x) + f(x) = 2b \end{cases}$$

Application :

On considère f définie par $f(x) = \frac{x^2+x-1}{x+2}$.

1. Montrer que $\Omega(-2, -3)$ est un centre de symétrie pour la courbe (C_f) .
2. En déduire que l'étude de la fonction peut se limiter à l'intervalle $] -2; +\infty$