Exercice 1

1.on munit $\mathbb{R}$ de la loi de composition interne $*$ definit par $\forall x,y \in \mathbb{R}, x*y = xy + (x^2-1)(y^2-1)$

Montrer que la loi $*$ est commutative , non associative ,et que 1 est élément neutre.

2. On munit $\mathbb{R}^{+*}$ de la loi de composition interne $*$ définit par par $\forall x,y \in \mathbb{R}^{+*}, x*y = \sqrt{x^2+y^2}$

Montrer que la loi $*$ est commutative ,associative, et que 0 est élément neutre, montrer que aucun élément de $\mathbb{R}^{+*}$ n'a de symétrique pour $*$

3. On munit $\mathbb{R}$ de la loi de composition interne $*$ definit par $\forall x,y \in \mathbb{R}, x*y = \sqrt[3]{x^3+y^3}$

Montrer que l'application $x \longmapsto x^3$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R},*)$ vers de $(\mathbb{R},+)$. En déduire que de $(\mathbb{R},*)$ est un groupe commutatif.

Exercice 2

On considère la loi de composition interne $*$ definit sur $\mathbb{R}$ par $\forall x,y \in \mathbb{R}, x*y = xy - 2(x+y) + 6$

1) a) démontrer que $*$ est commutative et associative

   b) démontrer que $*$ admet un élément neutre

2) a) pour tout élément de $\mathbb{R}$ admet-il un élément symétrique pour la loi $*$?

   b) on pose $E =]2,+\infty[$ .démontrer que E est une partie stable de $(\mathbb{R},*)$

Exercice 3

On munit $\mathbb{C}$ de laloi de composition interne T définit par $zTz' = z\overline{z'} + i$. (tel que $\bar{z}$ est le conjugué de z)

1) Etudier la commutativité et l'associativité de T
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(zTz)Tz = i$

Exercice 4

On considère l'ensemble $A = \{a+ib/(a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$

1) On considère l'application

$$z = a+ib \mapsto \varphi(z) = \sqrt{a^2+b^2}$$

a) Démontrer que l'application φ est un morphisme de $(A,\times)$ vers $(\mathbb{Z},\times)$

b) Soit z un élément de A

Démontrer que : z admet un élément symétrique pour $\times$ si et seulement si $\varphi(z) = 1$

2) On désigne par V à les éléments symétrisables dans A

Déterminer les éléments de V

Exercice 5

Pour tout x de $\mathbb{Z}$ on pose $M_x = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ xe^x & e^x \end{pmatrix}$

Et $E = \{M_x / x \in \mathbb{Z}\}$

) Démontrer que E est une partie stable dans $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

2) Calculer $(M_x)^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in \mathbb{Z}$

Exercice 6

I) Pour tous x et y de $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$, on pose

$$x*y = x+y-2xy$$

1) Démontrer que $*$ est une loi de composition interne.
2) Démontrer que $*$ est commutative et associative .
3) Démontrer que $\left(\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\},*\right)$ est un groupe commutatif.
4) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ $\forall n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$

$$\underbrace{x*x*\dots*x}_{n\ fois} = \frac{1}{2}[1-(1-2x)^n]$$

II) Pour tout x de $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$, on pose

$$A(x)=\begin{pmatrix}1-x & 0 & x\\ 0 & 1 & 0\\ x & 0 & 1-x\end{pmatrix}$$

Et on considère l'ensemble $E=\left\{A(x)/x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}\right\}$

1) Démontrer que E est une partie stable dans $(M_3(\mathbb{R}),\times)$

2) On considère l'application

$$f:\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}\to E$$
$$x\mapsto A(x)$$

a) Démontrer que f est un morphisme bijectif de $\left(\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\},*\right)$ vers $(E,\times)$

b) Déduire la structure de $(E,\times)$.

c) Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $B=A(-\frac{1}{2})$ démontrer que

$$B^n=A\left(\frac{1-2^n}{2}\right)\ et\ (B^n)^{-1}=A\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

Exercice 7

On munit $\mathbb{R}^2$ par la loi de composition interne $*$ tel que

$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\ \ \forall(x',y')\in\mathbb{R}^2$:

$$(x,y)*(x',y')=(x+x'+xx',y+y')$$

On considéré l'ensemble $G=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /x\neq-1\}$

1) a) Démontrer que $(G,*)$ est une partie stable de $(\mathbb{R}^2,*)$ (remarquez que $(x+x'+xx'+1=(x+1)(x'+1)$

b) Démontrer que $(G,*)$ est un groupe commutatif

2) on considère l'ensemble

$$B=\{(x,\ln(x+1))/x\in]-1,+\infty[\}$$

Démontrer que $(B,*)$ est un sous groupe de $(G,*)$

Exercice 8

On considère l'ensemble

$$E=\left\{M(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & x\\ -x & 1 & -\frac{x^2}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}/x\in\mathbb{R}\right\}$$

Calculer $M(x)\times M(x')$ pour tout $x\ et\ x'$ de $\mathbb{R}$.

Et démontrer que $(E,\times)$ est un groupe .

Exercice 9

On pose $I=]0,+\infty[$

1) Démontrer que $\forall(x,y)\in I^2$:

$$e^{x+y}-e^x-e^y+2>1$$

2) On définit dans I un loi de composition interne T par :

$$\forall(x,y)\in I^2 : xTy=\ln(e^{x+y}-e^x-e^y+2)$$

a) On considère l'application

$$f:I\to I$$
$$x\mapsto\ln(x+1)$$

Démontrer que f est bijective

b) Démontrer que f est un morphisme de $(I,\times)$ Dans (I,T)

c) Déduire la structure de (I,T)

Exercice 10

On munit $\mathbb{R}^2$ de la loi de composition interne $*$ définit par : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\ \ \forall(x',y')\in\mathbb{R}^2$:

$$(x,y)*(x',y')=\left(x+x',ye^{x'}+y'e^{x}\right)$$

Démontrer que $(\mathbb{R}^2,*)$ est un groupe commutatif

Exercice 11

$(E,*)$ est un groupe commutatif d'élément neutre e

Soit $a \in E$ un element donné de E $tel\ que\ a \neq e$

On définit sur E une loi de composition interne par

$\forall (x,y) \in E^2\ xTy = x * y * a$

Démontrer que (E,T) est un groupe commutatif

Exercice 12

Soient p et q deux entiers premiers positifs et $p \neq q$

Demontrer que : $H = \{p^m q^n / m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*,\times)$

Exercice 13

Soient T et $*$ deux lois de compositions internes de $\mathbb{R}$

Définies par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : xTy = \frac{1}{2}(x+y)$ et $x * y = 2y - x$

1) Etudier les propriétés de deux lois T et $*$

2) Démontrer que la loi T est distributive pour la loi $*$.

3) Démontrer que la loi $*$ est distributive pour la loi T.

Exercice 14

Démontrer que $(\mathbb{R},*,T)$ tel que

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2\ \ a * b = a + b - 1$$

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2\ aTb = a + b - ab$$

Est un corps commutatif

Exercice 15

On munit l'ensemble $\mathbb{Z}^2$ par deux lois internes définies par : $(a,b) + (a',b') = (a+a', b+b')$

Et $(a,b) \times (a',b') = (aa' + 2bb', ab' + ba')$

Démontrer que $(\mathbb{Z}^2,+,\times)$ est un anneau commutatif unitaire

Exercice 16

Soit $(A,+,\times)$ un anneau unitaire tel que $x^{12} = x$

1) Démontrer que $(\forall x \in A\ )\qquad x = -x$

2) Démontrer que $(\forall x \in A\ )\quad x^8 + x^4 = 0_A$

(remarquez que $(x+1_A)^{12} = x + 1_A$)

3) Démontrer que $(\forall x \in A\ )\qquad x^2 = x$

($(A,+,\times)$ anneau de Boole)

Exercice 17

On considère l'ensemble des matrices

$A = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ pb & a \end{pmatrix} / (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$ tel que p est un réel donné

Démontrer que $(A,+,\times)$ est un anneau

Exercice 18

Soit l'ensemble $S = \{a + b\sqrt{5} / (a,b) \in \mathbb{Q}^2\}$

Démontrer que $(S,+,\times)$ est un corps commutatif.

Exercice 19

Soit $\mathbb{K} = \left\{M(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \\ -5y & x+2y \end{pmatrix} / (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$

Démontrer que $(\mathbb{K},+,\times)$ est un corps commutatif

Exercice 20

On considère l'ensemble $A = \left\{a + be^{i\frac{2\pi}{3}} / (a,b) \in \mathbb{Z}^2\right\}$

On munit A par les deux opérations $+$ et $\times$ definies sur $\mathbb{C}$.

1) Démontrer que $(A,+,\times)$ est un anneau commutatif unitaire.

2) Démontrer que tout élément z de A admet un inverse dans $(A,+,\times)$ si et seulement si $|z| = 1$

Exercice 21

I) On considère l'ensemble

$$F = \{\mathbb{R}^2 \setminus \{\pm a, a\}/a \in \mathbb{R}\}$$

On définit dans F la loi T par :

$\forall (a,b) \in F^2 \ \ \forall (a',b') \in F^2$:

$$(a,b)\mathrm{T}(\mathrm{a}',\mathrm{b}') = (aa' + bb', ab' + ba')$$

1) Démontrer que T est une L C I dans F
2) Démontrer que T est commutative et associative dans F
3) Déterminer l'élément neutre pour la loi T
4) Déduire que (F, T) est un groupe commutatif

II) On considère l'ensemble

$$E = \left\{ M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & a+b \end{pmatrix} / (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Soient les matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) Calculer A^n pour tout n de $\mathbb{N}$
2) Déduire que $\times$ est loi de composition interne de E
3) Démontrer que $(E, +, \times)$ est un anneau unitaire .est il intègre ?

III) On considère l'ensemble

$$E' = \left\{ M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & a+b \end{pmatrix} / (a,b) \in F^2 \right\}$$

1) Démontrer que $\times$ est une loi de composition interne dans E'.
2) On considère l'application

$$\psi : (F,T) \ \to \ (E', \times)$$
$$(a,b) \mapsto \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & a+b \end{pmatrix}$$

a) Déduire que ψ est morphisme bijectif de (F,T) vers $(E', \times)$.

b) Déduire la structure de $(E', \times)$.

Exercice 22

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1) Calculer B^2 puis deduire B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exprimer A en fonction de I et B tel que

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et déduire A^n en fonction de n de $\mathbb{N}^*$

Exercice 23

On considère les deux matrices N et D definies par :

$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ et $a \in \mathbb{R}^*$

1) a) Calculer N^2 et N^3

b) Vérifier que $ND = DN$

2) Soit $A = N + D$ et n un élément de $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

Calculer A^n en fonction de n et a

Exercice 24

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) Calculer A^2 et A^3
2) Calculer A^n tel que $n \in \mathbb{N}$

Exercice 25

Soit E l'ensemble des matrices de la forme $M_a = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(a - \frac{1}{a}\right) \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$

Et F l'ensemble des matrices de la forme

$N_a = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(a - \frac{1}{a}\right) \\ -a\sqrt{3} & -a \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}^*$

1) a) Démontrer que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^{*2}$ $M_a \times M_b = M_{ab}$

b) soit φ l'application definie de $\mathbb{R}^*$ vers E tel que $\varphi(a) = M_a$ .demontrer que φ est un morphisme bijectif de $(\mathbb{R}^*,\times)$ vers $(E,\times)$.

Deduire la structure de $(E,\times)$

2) a) demontrer que $\forall(a,b) \in \mathbb{R}^{*2}$ $N_a \times N = N_{\frac{b}{a}}$

b) posant $G = E \cup F$.

démontrer que $(G,\times)$ est un groupe.

c) $(G,\times)$ est-il groupe commutatif.

(***bac* 2004**)

Exercice 26

I) Soient a et b deux réels .on considere la matrice

$$M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a+b & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ dans } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

Et soit E l'ensemble des matrices suivantes :

$$E = \{M_{a,b}/(a,b) \in \mathbb{R}^2\}$$

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire

Demontrer que E est une partie stable dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+)$ et de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

1) Demontrer que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif unitaire .

2) a) demontrer que pour tout deux reels x et y on a : $(x^2+xy+y^2=0) \Leftrightarrow (x=y=0)$

b) determiner les elements inversibles dans $(E,+,\times)$

c) deduire que $(E,+,\times)$ est un corps commutatif.

II) Soit σ un nombre complexe n'appartient pas à $\mathbb{R}$

1) On considere l'application ψ definie de E dans $\mathbb{C}$

par : $\psi :$ $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ M_{(a,b)} & \longmapsto & a+\sigma b \end{array}$

Demontrer que ψ est un morphisme bijectif de $(E,+)$ dans $(\mathbb{C},+)$

2) On considere dans $\mathbb{C}$ l'equation $z^2 - z + 1 = 0$

Resoudre dans $\mathbb{C}$ cette equation et ecrire ses solutions sous forme trigonometrique .

3) On suppose que $\sigma = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Demontrer que ψ est un morphisme de $(E,\times)$ dans $(\mathbb{C},\times)$

(Bac 2003 session normale)

Exercice 27

Pour tout a et b de $\mathbb{Z}^2$ on considere la matrice :

$$M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a & b\sqrt{2} \\ b\sqrt{2} & a \end{pmatrix} \text{ dans } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

Et soit E l'ensemble des matrices suivantes :

$$E = \{M_{a,b}/a^2 - 2b^2 = 1\}$$

1) On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$ vérifier que $A \in E$.

2) a) démontrer que E est une partie stable dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$ et que la loi $\times$ est commutatif dans E

b) démontrer que tous les éléments de E sont inversibles pour la loi $\times$.

c) Démontrer que $(E,\times)$ est un groupe commutatif .

3) on pose $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $(\forall n\mathbb{N})$ $A^{n+1} = A^n \times A$

On considère l'ensemble $G = \{A^n/n \in \mathbb{N}\}$

a) vérifier que $G \subset E$

b) soit H l'ensemble des matrices symétriques à les matrices de G pour l'opération $\times$ dans E.

démontrer que $H = \{B^n/n \in \mathbb{N}\}$ tel que

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$$

a) Démontrer que $G \cup H$ est un sous groupe de $(E,\times)$

(Bac 2003 session rattrapage

Exercice 28

On considere dans $\mathbb{R}^2$ la loi de composition interne $*$ definie par : $(\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2)(\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2)$

$$(a,b) * (x,y) = \left(\frac{ax+by}{2}, \frac{ay+bx}{2}\right)$$

Soit l'ensemble $E = \left\{\left(m+\frac{1}{m}, m-\frac{1}{m}\right) \in \mathbb{R}^2 / m \in \mathbb{R}^*\right\}$

1) Demontrer que $*$ est une loi de composition interne dans E.

2) Soit φ l'application definie sur $\mathbb{R}^*$ dans E par

$$(\forall m \in \mathbb{R}^*)\ ;\varphi(m) = \left(m+\frac{1}{m}, m-\frac{1}{m}\right)$$

a) Demontrer que φ est un morphisme bijectif de $(\mathbb{R}^*,\times)$ dans $(E,*)$.

b) Deduire que $(E,*)$ est un groupe commutatif à determiner son element neutre.

Et le symetrique de tout element $\left(m+\frac{1}{m}, m-\frac{1}{m}\right)$ tel que m un reel non nul.

On considere l'ensemble

$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 2\ et\ y^2 = x^2 - 4\}$

a) Demontrer que

$$F = \left\{\left(m+\frac{1}{m}, m-\frac{1}{m}\right) \in \mathbb{R}^2 / m > 0\right\}$$

b) Demontrer que $(F,*)$ est un sous groupe de $(E,*)$.

(Bac 2005 session normale)

Exercice 29

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire

I) Soit G l'ensemble des matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ s'écrit sous la forme $M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}$, $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$

1) Demontrer que G est une partie stable dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

2) Demontrer que $(G,\times)$ est groupe.est il commutatif ?

3) Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des matrices $M_{(a,b)}$ de G tel que $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ .demontrer que $\mathcal{H}$ est un sous groupe de $(G,\times)$.

4) Soit un element de G tel que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ et $a \in \mathbb{R}$

On pose

$A^1 = A\ et\ A^2 = A \times A\ et\ (\forall n \in \mathbb{N}^*) : A^{n+1} = A^n \times A$

Calculer A^n en fonction de $a\ et\ n$ tel que $n \in \mathbb{N}^*$

I) On considère dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ la loi de composition interne T définie par :

$$(a,b)T(x,y) = (a+bx, by) : \forall(x,y); (a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$$

Et soit φ l'application définie de G vers $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ par :

$\forall(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* : \varphi\left(M_{(a,b)}\right) = (a,b)$

1) Démontrer que φ est un morphisme bijectif de $(G,\times)$ vers $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, T)$.

2) Déduire la structure de $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, T)$.

3) Déterminer le symétrique de

$$\underbrace{(a,1)T(a,1)T \dots T(a,1)}_{n\ fois} \text{ dans } (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, T)$$

tel que $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$.

(Bac 2006 session normale

Exercice 30

I) Soit $E=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$.pour tout couple (a,b) de

E^2 posant $aTb=a+b-ab\sqrt{2}$

1) a) vérifier que pour tout couple(a,b) de E^2 :

on a $aTb=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}(a\sqrt{2}-1)(b\sqrt{2}-1)$.

b) déduire que T est une loi de composition interne dans E.

c) démontrer que (E,T) est un groupe commutatif.

II) $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrés de taille 2.

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire

Et soit F l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ s'écrit sous la forme $M(a)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}-a & a\\ a & \sqrt{2}-a\end{pmatrix}$

1) a) On pose $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ vérifier que $A^2=-A$ et que $M(a)=\left(1+\frac{a}{\sqrt{2}}\right)A$

b) démontrer que F est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

2) soit l'application φ: $\begin{array}{l}(E,T)\to\ (F,\times)\\ a\mapsto\ \varphi(a)=M(a)\end{array}$

a) démontrer que φ est un morphisme bijectif.

b) déduire la structure de $(F,\times)$

(Bac 2007 session normale)

Exercice 31

On munit $\mathbb{R}$ par un loi de composition interne $*$ definie par $(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2);x*y=x+y-3xy$

1)a) verifier que

$(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2);(1-3x)(1-3y)=1-3(x*y)$

b) demontrer que $\left(\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\},*\right)$ est un groupe commutatif.

2) a) demontrer que l'application φ qui associé tout reel x par le reel $\varphi(x)=1-3x$ est un morphisme bijectif de $\left(\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\},*\right)$ vers $(\mathbb{R}^*,\times)$

b) demontrer que $\varphi^{-1}(\mathbb{R}_+^*)=\left]-\infty;\frac{1}{3}\right[$

c) demontrer que $\left(\left]-\infty;\frac{1}{3}\right[,*\right)$ est un sous groupe de $\left(\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\},*\right)$.

3) pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$ et pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose

$x^{(0)}=0\ et(\ \forall n\in\mathbb{N})\,;x^{(n+1)}=x^{(x)}*x$

a) demontrer que $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\},(\ \forall n\in\mathbb{N});\varphi(x^n)=\varphi(x)^n$

b) deduire $x^{(n)}$ en fonction de $x\ et\ n$

(Bac 2008 session ratrrapage)

Exercice 32

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrés de taille 2

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire

D'unité $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

soit F l'ensemble des matrices $M(x,y)$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tel que $M(x,y)=\begin{pmatrix}x & y\\ 0 & \frac{1}{x}\end{pmatrix}$ avec $(x,y)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$.

1) a) démontrer que F est une partie stable de$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

b) démontrer que $(F,\times)$ est groupe non commutatif.

2) soit G l'ensemble des matrices $M(x,0)$ de F tel que$x\in\mathbb{R}^*$.

Démontrer que $(G,\times)$ est un sous groupe de $(F,\times)$

3) soit $E=\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$

par ::

$$(\forall (x,y),(a,b) \in E) : (x,y)T(a,b) = \left(ax, bx + \frac{y}{a}\right)$$

On considere l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} (F,\times) & \to & (E,T) \\ M(x,y) & \longmapsto & \varphi\big(M(x,y)\big) = (x,y) \end{array}$$

a) Calculer $(1,1)T(2,3)$ et $(2,3)T(1,1)$

b) Démontrer que φ est un morphisme bijectif .

c) Déduire la structure de (E,T)

(Bac 2009 session normale)

Exercice 33

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire

D'unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.et $(\mathbb{R},+)$ est un groupe commutaitf

Pour tout réel x on pose $M(x) = \begin{pmatrix} 1-x & x \\ -2x & 1+2x \end{pmatrix}$

On considere l'ensemble $E = \{M(x)/x \in \mathbb{R}\}$

On munit E d'une loi de composition interne T définie

par $(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2)\ M(x)TM(y) = M(x+y+1)$

1) Soit φ une application de $\mathbb{R}$ dans E definie par :

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ \varphi(x) = M(x-1)$$

a) Démontrer que φ est un morphisme de $(\mathbb{R},+)$ dans (E,T).

b) Demontrer que (E,T) est un groupe commutatif.

2) a) demontrer que

$$(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2)\ M(x) \times M(y) = M(x+y+xy)$$

b) deduire que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$ et que la loi " $\times$ " est commutative dans E

c) demontrer que la loi " $\times$ " est ditributive par rapport à la loi loi "T" dans E.

d) verifier que $M(-1)$ est l'element neutre dans (E,T)

on munit E par une loi de composition interne T definie et que I et 'element neutre dans $(E,\times)$.

3) a) verifier que

$$(\forall x \in \mathbb{R}-\{-1\})\ M(x) \times M\left(\frac{-x}{x+1}\right) = I$$

b) demontrer que $(E,T,\times)$. Est un corps commutatif

(Bac 2015 session normale)

Exercice 34

On rappelle que $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire

D'unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.et $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif

Pour tous réels $x\ et\ y$ on pose

$$M(x,y) = \begin{pmatrix} x+y & 0 & -2y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & x-y \end{pmatrix}$$

On considère l'ensemble $E = \{M(x,y)/(x,y) \in \mathbb{R}^2\}$

1) demontrer que E est un sous groupe de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+)$

2) verifier que $(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2)$

$$M(x,y) \times M(x',y') = M(xx'-yy', xy'+yx')$$

3) on pose $E^* = E - \{M(0,0)\}$ et on considere l'apllication : $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & E \\ z = x+ib & \mapsto & M(x,y) \end{array}$

a) Démontrer que φ est un morphisme de $(\mathbb{C}^*,+)$ dans $(E,\times)$.

b) Deduire que $(E^*,\times)$ est un groupe commutatif d'element neutre $M(1,0)$.

4) Demontrer que $(E,+,\times)$ est un corps commutatif.

5) On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calculer $A \times M(x,y)$ pour tout element $M(x,y)$ de E.

b) Deduire que tout element de E n'admet pas un symetrique dans $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\times)$.

(Bac 2016 session normale)

On rappelle que $(\mathbb{Z},+,\times)$ est un anneau unitaire commutatif integre .

On munit $\mathbb{Z}$ de la loi de composition interne $*$ definie par $\forall(x,y)\in\mathbb{Z}^2; x*y=x+y-2$

1) a) demontrer que la loi $*$ est commutative et associative .

b) demontrer que $(\mathbb{Z},*)$ admet un element neutre à determiner .

c) demontrer que $(\mathbb{Z},*)$ est un groupe commutatif

2) on munit $\mathbb{Z}$ par un loi de composition interne T definie par : $\forall(x,y)\in\mathbb{Z}^2; xTy=xy-2x-2y+6$

Et on considere l'application f de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ definie par :$(\forall x\in\mathbb{Z}); f(x)=x+2$

a) demontrer que f est un morphisme de $(\mathbb{Z},\times)$ vers $(\mathbb{Z},T)$.

b) Demontrer que

$\forall(x,y,z)\in\mathbb{Z}^3$; $(x*y)Tz=(xTz)*(yTz)$

3) Deduire de ce qui precede que : $(\mathbb{Z},*,T)$ est anneau commutatif et unitaire.

4) a) demontrer que $xTy=2 \Leftrightarrow x=2$ ou $y=2$

b) deduire que $(\mathbb{Z},*,T)$ est inetgre

c) $(\mathbb{Z},*,T)$ est-il un corps ? justifier

(Bac 2013 session normale)

Exercice 36

On dénit sur R la loi $*$ par $x*y=x+y-xy$. Est-ce une loi de groupe ? Calculer $x*x*\cdots*x$ (n facteurs) en fonction de n et de x.

Exercice 37

Montrer que l'ensemble des suites réelles, muni de la somme et du produit terme par terme, est un anneau. Quels sont ses éléments inversibles (pour le produit) ? Parmi les ensembles suivants, lesquels en sont des sous-groupes ou des sous-anneaux :

1. suites bornées
2. suites monotones
3. suites convergentes
4. suites périodiques
5. suites divergeant vers $+\infty$

Exercice 38

Soit E un ensemble. Montrer que $(P(E),\Delta,\cap)$ est un anneau. En préciser les éléments neutres, les éléments inversibles (et leur inverse) pour chacune des deux lois. Cet anneau est-il intègre ? Si $F\subset E$, $(P(F),\Delta,\cap)$ est-il un sous-anneau de P(E) ?

Exercice 39

Montrer que l'ensemble des racines n-èmes de l'unité forment un sous-groupe de $(U,\times)$.