

Chapitre 6

Théorème de rolle et accroissement finis

Histoire

Mathématicien autodidacte, Michel Rolle (Amber, 1652 – Paris, 1719) était comptable et il étudiait l'algèbre dans ses moments libres. En 1690, il publie le traité d'algèbre qui contient sa « méthode des cascades », permettant d'encadrer les racines réelles de certains types d'équations. Un an plus tard, dans sa « Démonstration d'une méthode pour résoudre les égalités de tous les degrés », on y trouve le théorème qui porte son nom et selon lequel « une fonction ne peut s'annuler plus d'une fois dans l'intervalle séparant deux racines réelles consécutives de sa fonction dérivée ». De nos jours, on formule ce théorème de façon équivalente en disant qu'entre deux zéros d'une fonction dérivable se trouve toujours au moins un zéro de sa dérivée. Rolle se méfiait des nouvelles méthodes du calcul différentiel et il s'efforça à les dénoncer et à combattre le livre de calcul de L'Hospital. Ironie du sort que ce mathématicien français soit aujourd'hui reconnu pour son apport dans le domaine qu'il essaya de discrépiter de son vivant !



Michel Rolle est un mathématicien français

(1652-1719)

I. Théorème de rolle

Theorème

Soit f une fonction satisfaisant les trois conditions suivantes :

- f est continue en tout point de l'intervalle fermé $[a, b]$;
- f est dérivable en tout point de l'intervalle ouvert $]a, b[$;
- $f(a) = f(b)$.

Alors, il existe au moins un nombre c dans $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$

(figure 1).

Démonstration

Si f est constante tous les points x donnent $f'(x) = 0$. Sinon, comme f est continue sur $[a ; b]$, il existe un point c tel que pour tout x de $[a ; b]$, $f(x) \leq f(c) = M$ (si $f(a)$ est différent de M , sinon on fait le même raisonnement avec $f(x) \geq f(c) = m$).

Soit $g(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$, si $x > c$, $g(x) \leq 0$, et si $x < c$, $g(x) \geq 0$; on a

donc $\lim_{x \rightarrow c^+} g(x) \leq 0$ et $\lim_{x \rightarrow c^-} g(x) \geq 0$ d'où $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0 = f'(c)$.

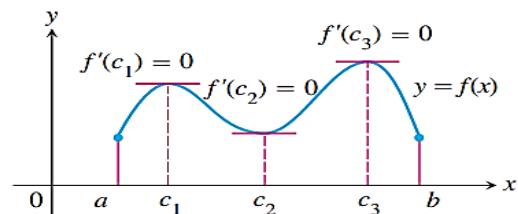
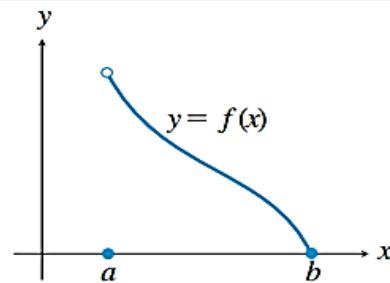


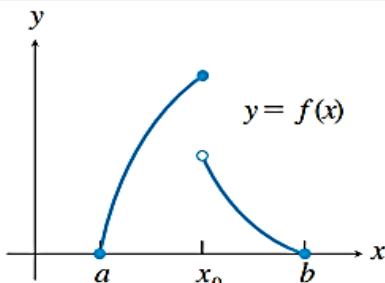
Figure 1 Selon le théorème de Rolle, toute courbe dérivable admet au moins une tangente horizontale entre deux points d'ordonnées égales. Le nombre c pour lequel $f'(c) = 0$ n'est pas nécessairement unique : ici, $f'(x) = 0$ en trois points.

Remarque : Prêtez attention aux hypothèses du théorème de

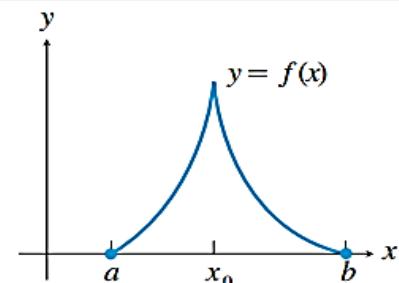
Rolle. Si l'une des conditions n'est pas observée, il est possible que la fonction f n'admette aucune tangente horizontale sur l'intervalle (figure 2).



a) f dérivable partout sur $]a, b[$ mais discontinue à l'une des bornes.



b) f discontinue en un point intérieur et nécessairement non dérivable en un point x_0 de $]a, b[$.



c) f continue sur $[a, b]$, mais non dérivable en un point x_0 de $]a, b[$.

Figure 2 Trois situations où f n'admet pas de tangente horizontale sur $]a, b[$.

Application :

Montrez que les conditions du théorème de Rolle sont satisfaites par : $f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x + 1$ sur l'intervalle $[-3; 3]$

Solution

En tant que polynôme, $f(x)$ est continue et dérivable partout ; $f(x)$ est donc continue et dérivable sur $[3, 3]$. Nous avons également $f(-3) = 1 = f(3)$.

Les conditions du théorème de Rolle sont donc satisfaites. D'après le théorème, f doit valoir 0 au moins une fois en un point c de l'intervalle ouvert $]3, 3[$. Or, $f'(x) = x^2 - 3$. Cette dérivée prend la valeur 0 deux fois sur l'intervalle $]3, 3[$: en

$$x = \sqrt{3} = c_1 \text{ et en } x = -\sqrt{3} = c_2$$

Exemple 2 : soit f la fonction définie par $f(x) = e^{x^2}$. La fonction f est continue sur $[-1; 1]$ et dérivable sur $]-1; 1[$ et $f(-1) = f(1) = e$

Donc d'après le théorème de Rolle il existe au moins un c de $]-1; 1[$ tel que $f'(c) = 0$ c à d $2ce^{c^2} = 0$ et par suite

$$c = 0 \text{ et } 0 \in]-1; 1[.$$

Exemple 3 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{1 + \cos^2 x}$$

Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, f' s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]a, a + 2\pi[$.

La fonction f est 2π -périodique et dérivable sur \mathbb{R} . Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f(a) = f(a + 2\pi)$ et le théorème de Rolle montre l'existence d'un réel $c \in]a, a + 2\pi[$ tel que $f'(c) = 0$.

Application : vérifier les conditions de théorème de ROLLE pour la fonction f dans l'intervalle I dans chacun des cas suivants :

$$1) \quad f(x) = x^2 - 3x + 2 \text{ et } I = [1; 2]$$

$$2) \quad f(x) = \sin^2 x \text{ et } I = [0; \pi]$$

$$3) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 6} \text{ et } I = [1; 2]$$

II. Théorème des accroissements finis (Théorème de la moyenne de Lagrange)

Le théorème de la moyenne de Lagrange, aussi appelé théorème des accroissements finis, peut être considéré comme une version « inclinée » du théorème de Rolle.

Théorème

Soit f une fonction vérifiant les deux conditions suivantes :

- f est continue en tout point de $[a, b]$;
- f est dérivable en tout point de $]a, b[$.

Alors, il existe au moins un nombre c dans l'intervalle $]a, b[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$c \text{ à d } f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Démonstration

Représentons le graphe de f par une courbe dans le plan (figure 3) et traçons la droite passant par les points $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$.

Voici l'équation point-pente décrivant cette droite :

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

L'écart vertical séparant les graphes de f et g au point d'abscisse x est donné par :

$$h(x) = f(x) - g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

La figure 4 présente simultanément les graphes de f , g et h .

La fonction h satisfait aux trois conditions du théorème de Rolle sur $[a, b]$: elle est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ puisque f et g le sont également

De plus, $h(a) = h(b)$ vu que les graphes de f et de g se coupent aux points

A et B ; nous pouvons d'ailleurs le vérifier algébriquement en détail :

$$h(a) = f(a) - g(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0$$

Et

$$h(b) = f(b) - g(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = 0$$

Selon le théorème de Rolle, il existe un nombre c dans l'intervalle $]a, b[$ pour lequel $h'(c) = 0$.

Dérivons les deux membres de l'équation (2) par rapport à x , puis posons $x = c$

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{a - b}$$

$$\text{On évalue en } x = c \quad h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{a - b}$$

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{a - b} \quad h'(c) \\ = 0 \text{ par le théorème de ROLLE sur la fonction } h$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{a - b} \quad \text{CQFD}$$

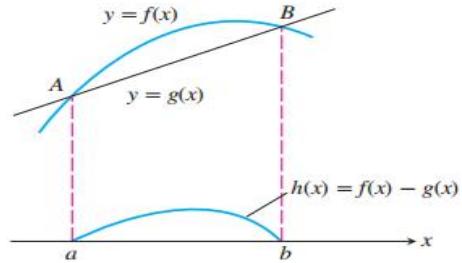


Figure 4 La sécante AB est le graphe de la fonction $g(x)$. La fonction $h(x) = f(x) - g(x)$ correspond à l'écart vertical séparant les graphes de f et de g au point d'abscisse x .

$$h(x) = f(x) - g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

La figure 4 présente simultanément les graphes de f , g et h .

La fonction h satisfait aux trois conditions du théorème de Rolle sur $[a, b]$: elle est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ puisque f et g le sont également

De plus, $h(a) = h(b)$ vu que les graphes de f et de g se coupent aux points

A et B ; nous pouvons d'ailleurs le vérifier algébriquement en détail :

$$h(a) = f(a) - g(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0$$

Et

$$h(b) = f(b) - g(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = 0$$

Selon le théorème de Rolle, il existe un nombre c dans l'intervalle $]a, b[$ pour lequel $h'(c) = 0$.

Dérivons les deux membres de l'équation (2) par rapport à x , puis posons $x = c$

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{a - b}$$

$$\text{On évalue en } x = c \quad h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{a - b}$$

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{a - b} \quad h'(c) \\ = 0 \text{ par le théorème de ROLLE sur la fonction } h$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{a - b} \quad \text{CQFD}$$

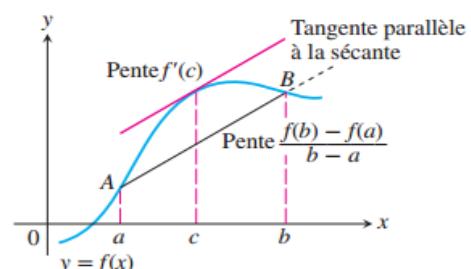


Figure 3 En termes géométriques, le théorème de la moyenne de Lagrange affirme qu'en un point situé quelque part entre A et B , la courbe admet au moins une tangente parallèle à la sécante AB .

Exemples

1) La fonction $f(x) = x^2$ (figure 6) est continue sur $0 \leq x \leq 3$ et dérivable sur $0 < x < 3$. Dès lors que $f(0) = 0$ et $f(3) = 9$, selon le théorème des accroissements finis (de la moyenne de Lagrange), il doit exister un point c de l'intervalle de définition de la dérivée pour lequel $f'(x) = 2x$ est égale à $\frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{9 - 0}{3 - 0} = 3$.

Ici, nous pouvons trouver c au moyen de l'équation $f'(c) = 2c = 3$, soit $c = 3/2$.

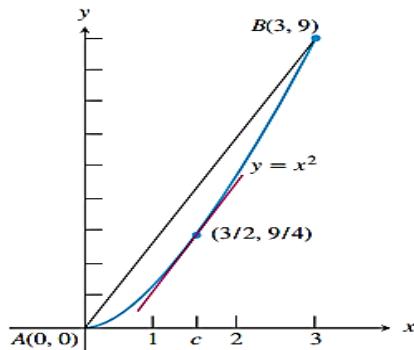


Figure 6 La tangente au point d'abscisse $c = 3/2$ est parallèle à la sécante. Leur pente commune vaut 3.

2) Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 - 3x + 12$

La fonction f est continue sur $[1 ; 2]$ et dérivable sur $]1 ; 2[$ donc d'après le théorème des accroissements finis il existe un réel c dans $]1 ; 2[$ tel que $f(2) - f(1) = (2 - 1)f'(c)$ c à d $f'(c) = 4$ ce qui équivaut $3c^2 - 3 = 4$

$$\text{C à d } c = \sqrt{\frac{7}{3}} \text{ ou } c = -\sqrt{\frac{7}{3}} \text{ et tel que } c \in]1 ; 2[\text{ alors } c = \sqrt{\frac{7}{3}}$$

Application : déterminer parmi les fonctions suivantes les quelles satisfaites les conditions de théorème des accroissements finis sur I

- 1) $f(x) = x^3 + x - 4$ et $I = [0; 2]$
- 2) $g(x) = 2\sqrt{x} + \sin x$ et $I = [0; \pi]$
- 3) $\begin{cases} h(x) = x^2 - 4 \\ h(x) = 5x - 8 \end{cases}$ et $I = [1; 2]$

III. Inégalité des accroissements finis

propriété

Soit f une fonction continue sur $[a ; b]$ et dérivable sur $]a ; b[$.

S'il existe deux réels m et M tels que $\forall x \in]a ; b[$ $m \leq f'(x) \leq M$ alors $m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$

Démonstration :

Soit f une fonction continue sur $[a ; b]$ et dérivable sur $]a ; b[$

Donc d'après le théorème des accroissements finis il existe un c de $]a ; b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Et comme $\forall x \in]a ; b[m \leq f'(x) \leq M$ alors $m \leq f'(c) \leq M$ donc $m \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq M$

Et par suite $m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$ car $a < b$

Propriété

Soit f une fonction continue sur $[a ; b]$ et derivable sur $]a ; b[$ et k un reel strictement positif .

Si $\forall x \in]a ; b[|f'(x)| \leq k$ alors $|f(b) - f(a)| \leq k|b - a|$

Exemples

1) Soit f la fonction definie par $f(x) = \sin x$

- La fonction f est continue et derivable sur \mathbb{R} et on a $\forall x \in \mathbb{R} f'(x) = \cos x$ et $\forall x \in \mathbb{R} |f'(x)| \leq 1$

Soit a et b deux reels d'apres la proprieté precedente on a : $|\sin b - \sin a| \leq |b - a|$

Si $a = 0$ alors $\forall b \in \mathbb{R} |\sin b| \leq |b|$

2) Soit g la fonction definie par $g(x) = \arctan x$

Et soient a et b deux reels tels que $0 \leq a < b$

On a $g'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$ donc $\forall x \in [a ; b] \frac{1}{1 + a^2} \leq g'(x) \leq \frac{1}{1 + b^2}$

D'apres l'inegalités des accroissements finis on a : $\frac{1}{1 + a^2}(b - a) \leq g(b) - g(a) \leq \frac{1}{1 + b^2}(b - a)$

Et par suite $\frac{1}{1 + a^2}(b - a) \leq \arctan b - \arctan a \leq \frac{1}{1 + b^2}(b - a)$

Application :

Demontrer que

$$1) \forall x \in]0; +\infty[\quad \frac{x}{1 + x^2} < \arctan x$$

$$2) (\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2) \quad 0 < a < b < \frac{\pi}{2} \quad \frac{b - a}{\cos^2 a} < \tan b - \tan a < \frac{b - a}{\cos^2 a}$$

$$3) \forall x; y \in [0; 10] \quad |x \sin x - y \sin y| \leq 11|x - y|$$

$$4) \forall a, b \in \left[-1; \frac{4}{3}\right] \quad |u(b) - u(a)| < \frac{3}{4}|b - a| \quad \text{tel que } u(x) = \sqrt[3]{5 - 3x} + x - 2$$

IV. Monotonie d'une fonction

Théorème

Soit f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

1. Si $f'(x) \geq 0$ en tout point de $]a, b[$, alors f est croissante sur $[a, b]$.
2. Si $f'(x) \leq 0$ en tout point de $]a, b[$, alors f est décroissante sur $[a, b]$.

Démonstration

Soit deux points, x_1 et x_2 , de $[a, b]$ tels que $x_1 < x_2$.

Puisque les conditions du théorème de la moyenne sont satisfaites pour tout l'intervalle $[a, b]$, elles le sont automatiquement pour $[x_1, x_2]$ inclus dans $[a, b]$.

En appliquant le théorème de la moyenne à f sur $[x_1, x_2]$, nous obtenons

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

pour une certaine valeur c entre x_1 et x_2 .

Puisque $x_1 < x_2$; $x_2 - x_1$ est positif et $f(x_2) - f(x_1)$ est de même signe que $f'(c)$.

Par conséquent,

1. si f' est positif sur $]a, b[$, alors $f(x_2) > f(x_1)$ et f est croissante ;
2. si f' est négatif sur $]a, b[$, alors $f(x_2) < f(x_1)$ et f est décroissante.

Théorème

Les fonctions de dérivée nulle sont des fonctions constantes

Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Si $f'(x) = 0$ pour tout x dans $]a, b[$, alors f est constante sur $[a, b]$.

Démonstration

En se basant sur les hypothèses du théorème, nous devons démontrer que la fonction f possède une valeur constante sur l'intervalle $[a, b]$. Pour ce faire, prouvons que si x_1 et x_2 sont deux points de l'intervalle $[a, b]$, alors $f(x_2) = f(x_1)$. Soit x_1 et x_2 , deux points de $[a, b]$ tels que $x_1 < x_2$. La fonction f satisfait aux conditions du théorème des accroissements finis sur $[x_1, x_2]$, car elle satisfait déjà à ces hypothèses sur $[a, b]$ qui contient $[x_1, x_2]$. Donc,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

pour une certaine valeur c entre x_1 et x_2 . Puisque $f'(x) = 0$ partout sur $]a, b[$, $f'(c) = 0$ et alors,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0$$

Cours

d'où $f(x_2) - f(x_1) = 0$ et enfin $f(x_2) = f(x_1)$

Exemples :

soit g la fonction définie par $g(x) = 2 \arctan x - \arctan\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2x}\right)$

La fonction $g_1: x \mapsto \arctan x$ est continue sur \mathbb{R} et en particulier sur $]0; +\infty[$

La fonction $g_2: x \mapsto \frac{x}{2} - \frac{1}{2x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et La fonction $g_1: x \mapsto \arctan x$ est dérivable

sur \mathbb{R} . Donc $\arctan og_2 : x \mapsto \arctan\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2x}\right)$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et par suite la fonction

$g = g_1 - \arctan og_2$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout x de $]0; +\infty[$ on a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{2}{1+x^2} - \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2}}{1 + \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2x}\right)^2} \\ &= \frac{2}{1+x^2} - \frac{2(1+x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{1+x^2} - \frac{2}{1+x^2} = 0 \end{aligned}$$

Donc $\forall x \in]0; +\infty[g'(x) = 0$ et par suite g est constante

donc $\forall x \in]0; +\infty[g(x) = g(1) = \frac{\pi}{2}$

2) soit f la fonction définie par : $f(x) = x + \cos x$

La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et on a pour tout x de \mathbb{R} $f'(x) = 1 - \sin x$

on a $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$

Comme f' est positive est nulle en des points isolés alors la fonction f est croissante sur \mathbb{R}

Application :

1) démontrer que $\forall x \in]0; +\infty[e^{\frac{x}{x+1}} < x+1 < e^x$

2) pour tout n de \mathbb{N}^* , on pose : $f_n(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$

a) démontrer que $(\forall x \in \mathbb{R}_+) f_{2n}(x) \leq \ln(1+x) \leq f_{2n-1}(x)$

b) déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \ln(1+x^2)}{x^4}$

Exercices résolus

Exercice 1

Soient $f, g : [a, b] \rightarrow IR$, continues sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$. On suppose que $f(a) \neq f(b)$ et $g(a) \neq g(b)$.

Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que : $\frac{f'(c)}{f(a) - f(b)} = \frac{g'(c)}{g(a) - g(b)}$

On considérera pour cela la fonction F définie sur $[a, b]$ par $F(x) = [f(a) - f(b)]g(x) - [g(a) - g(b)]f(x)$

Correction

La Fonction F est sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, de dérivée

$$F'(x) = [f(a) - f(b)]g'(x) - [g(a) - g(b)]f'(x)$$

De plus, on vérifie facilement que :

$$F(a) = f(a)g(b) - f(b)g(a) = F(b).$$

appliquer le théorème de Rolle : il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que $F'(c) = 0$, c'est-à-dire, tel que

$$\frac{f'(c)}{f(a) - f(b)} = \frac{g'(c)}{g(a) - g(b)}$$

Exercice 2

En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction arctan , montrer que :

$$\forall t > 0 \quad \arctan t > \frac{t}{1 + t^2}$$

Correction

Le théorème des accroissements finis, applique à la fonction Arctan sur l'intervalle $[0, t]$ (où t est quelconque dans IR_{*+}), implique l'existence de $c \in]0, t[$ tel que :

$$\frac{1}{1 + c^2} = \frac{\arctan t - \arctan 0}{t - 0} = \frac{\arctan t}{t}$$

Puisque la fonction $t \mapsto 1/(1 + t^2)$ est strictement décroissante sur IR_+ , on en déduit immédiatement que :

$$\frac{\arctan t}{t} > \frac{1}{1 + t^2}$$

puis l'inégalité demandée.

$$\arctan t > \frac{t}{1 + t^2}$$

Exercice 3

a) A l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que :

$$\forall x > 0 \quad \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$$

b) En déduire que les fonctions f et g définies sur IR_{*+} par :

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \text{ et } g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$$

sont monotones.

c) D'exterminer les limites en l'infini de $\ln f$ et $\ln g$, puis de f et g .

Correction

Appliquons le théorème des accroissements finis à la fonction $(x \mapsto \ln x)$, sur l'intervalle $[x, x+1]$: il existe $c \in]x, x+1[$ tel que :

$$\frac{1}{c} = \frac{\ln(x+1) - \ln x}{x+1 - x} = \ln(x+1) - \ln x$$

L'encadrement demandé provient du fait que

$$\frac{1}{c} \in \left] \frac{1}{x+1}, \frac{1}{x} \right[$$

Remarquons que cet encadrement peut aussi s'écrire :

$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$$

$$\text{Equivaut à } \forall x > 0 \quad \frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x} \quad (1)$$

b) Montrer que f est monotone équivaut à montrer

que $\ln f$ est monotone. Or

$$(\ln(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

La première inégalité dans (1) montre alors que $(\ln f)'(x) > 0$ pour tout $x > 0$, donc que $\ln f$ est strictement croissante sur IR_{*+} . De même, on vérifie facilement que :

$$(\ln(g(x)))' = \frac{g'(x)}{g(x)} = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}$$

La deuxième inégalité dans (1) montre alors que $(\ln g)'(x) < 0$ pour tout $x > 0$, donc que $\ln g$ est strictement décroissante sur IR_{*+}

c) En multipliant le double inégalité (1) par x , puis par $x+1$ on obtient :

$$\begin{aligned} \forall x > 0 \quad \frac{x}{x+1} &< x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < 1 \\ &< (x+1) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{x+1}{x} \end{aligned}$$

A l'aide du théorème des gendarmes, on en déduit que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln f)(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln g)(x) = 1$, puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = e$

Exercice 4

Soient p et q deux réels et n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Montrer que la fonction polynomiale P définie par $P(x) = x^n + px + q$ admet aux plus trois racines réelles si n est impair et au plus deux racines réelles si n est pair.

Correction

On a $P'(x) = nx^{n-1} + p$ et $P''(x) = n(n-1)x^{n-2}$.

En particulier, on voit que P'' admet exactement une racine, à savoir $x = 0$.

Commençons par le cas où n est impair. Supposons, en vue d'obtenir une contradiction, que P admette quatre racines distinctes $a < b < c < d$. La fonction P est évidemment continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $P(a) = P(b)$. Le théorème de Rolle implique alors l'existence de $a_1 \in]a, b[$ tel que $P'(a_1) = 0$. Le même raisonnement sur les intervalles $[b, c]$ et $[c, d]$ montre l'existence de $b_1 \in]b, c[$ et $c_1 \in]c, d[$ tel que $P'(b_1) = 0$ et $P'(c_1) = 0$. Donc P' admet trois racines distinctes $a_1 < b_1 < c_1$. Le même raisonnement montre alors aussi que P'' admet deux racines $a_2 \in]a_1, b_1[$ et $b_2 \in]b_1, c_1[$. Ces racines étant nécessairement distinctes, il y a contradiction avec le

fait que P'' admet pour unique racine $x = 0$. Il s'ensuit que P admet aux plus trois racines réelles distinctes.

Traitons maintenant le cas où n est pair. Supposons, en vue d'obtenir une contradiction, que P admette trois racines distinctes $a < b < c$. Comme précédemment, on déduit l'existence de deux racines de P' distinctes $a_1 \in]a, b[$ et $b_1 \in]b, c[$, puis l'existence d'une racine $a_2 \in]b_1, c_1[$. Or on a vu que P'' admet 0 pour unique racine, de sorte que $a_2 = 0$ et que $a_1 < 0 < b_1$. Mais puisque $P'(x) = nx^{n-1} + p$, les racines de P' satisfont l'équation $x^{n-1} = -\frac{p}{n}$

et puisque n est pair, les racines sont toutes du signe de $-p/n$. On ne peut donc avoir $a_1 < 0 < b_1$. Il s'ensuit que P admet au plus deux racines réelles distinctes.