Rotation dans le plan

Remarques

Pr. LATRACH ABDELKBIR

I. Rotation - Rotation réciproque :

1. Définitions :

Activité ① :

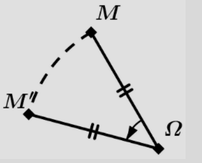
Soient Ω et A deux points du plan orienté direct et soit α un réel tel que $\alpha \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

Construire le point A' tel que $\begin{cases} \Omega A = \Omega A' \\ \left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega A'}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi] \end{cases}$.

Définition :

Soit Ω un point du plan orienté dans le sens direct et α un nombre réel.
La rotation de centre Ω et d'angle α est la transformation du plan, qui à tout point M du plan associe le point M' défini par :

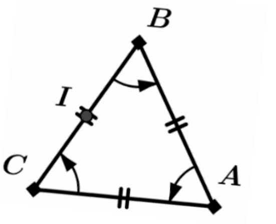
- Si $M = \Omega$, alors $M' = \Omega$.
- Si $M \neq \Omega$, alors $\begin{cases} OM = OM' \\ (\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OM'}) \equiv \alpha[2\pi] \end{cases}$



Exemple :

ABC est un triangle équilatéral et I est le milieu du segment $[BC]$.

- On a $r_1(A) = B$ tel que $r_1 = r(C, \frac{\pi}{3})$.
- On a $r_2(C) = B$ tel que $r_2 = r(A, -\frac{\pi}{3})$.
- On a $r_3(C) = A$ tel que $r_3 = r(B, \frac{\pi}{3})$.
- On a $r_4(B) = C$ tel que $r_4 = r(I, \pi)$.



Conséquences :

Soient r la rotation de centre Ω et d'angle α et M et M' deux points du plan tels que $r(M) = M'$.

- Si $\alpha \neq 2k\pi$ tel que $k \in \mathbb{Z}$, alors le triangle $M\Omega M'$ est isocèle de sommet Ω et la médiatrice du segment $[MM']$ passe par le point Ω.
- Si $\alpha \equiv \pi[2\pi]$, alors la rotation est la symétrie centrale de centre Ω.
- Si $\alpha \equiv 0[2\pi]$, alors $\left(\forall M \in (P)\right): r(M) = M$. On dit que tous les points du plan sont **invariants** par r.
- Si $\alpha \neq 2k\pi$ tel que $k \in \mathbb{Z}$, alors Ω le centre de la rotation r est l'unique point invariant par cette rotation.

2. La rotation réciproque :

Activité ② :

On considère $ABCD$ est un carré de centre O tel que $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

On considère r_1 et r_2 les rotations de centre O et d'angles respectifs $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$.

1. Construire une figure convenable.
2. Recopier et remplir le tableau suivant :

• $r_1(A) =$	• $r_2(D) =$
• $r_1(B) =$	• $r_2(C) =$
• $r_1(C) =$	• $r_2(B) =$
• $r_1(D) =$	• $r_2(A) =$

Définition :

La rotation $r(\Omega; -\alpha)$ de centre Ω et d'angle $-\alpha$ est appelé **la rotation réciproque** de la rotation $r(\Omega; \alpha)$ de centre Ω et d'angle α et on le note par r^{-1}.

Remarque :

Pour tout point M du plan on a : $r(M) = M' \Leftrightarrow r^{-1}(M') = M$.

II. Propriétés :

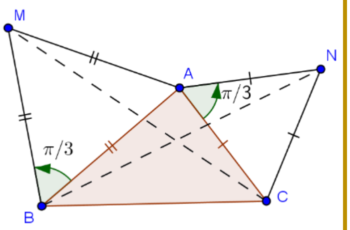
1. Rotation et distance :

Propriété :

Si A et B sont deux points du plan et A' , B' leurs images respectives par une rotation r, alors $AB = A'B'$.
On dit que la rotation **conserve la distance**.

Application ① :

On considère un triangle ABC.
On construit à l'extérieur de ce triangle deux triangles MAB et NAC qui sont équilatéraux.
Prouver que $MC = NB$.



2. Rotation et angle orienté :

Propriété :

Soit r une rotation d'angle α.
Si A' et B' les images respectives de deux points distincts A et B par la rotation r alors $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'}\right) \equiv \alpha[2\pi]$.

Remarque :

Cette propriété nous permet de déterminer l'angle d'une rotation à partir de deux points distincts et leurs images.

Application ② :

OABet OCD sont deux triangles rectangles isocèles au sommet commun O tels que :
$\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$et $\left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OD}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
Montrer que $AC = BD$ et $(AC) \perp (BD)$.

Propriété :

Soient A , B , C et D quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.
Si A' ,B' ,C' et D' leurs images respectives par une rotation r, alors :
$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) \equiv \left(\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{C'D'}\right)[2\pi]$.
On dit que la rotation **conserve les mesures d'angles orientés**.

Application ③ :

ABC est un triangle équilatéral tel que $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ .On construit à l'extérieur de ce triangle un parallélogramme $BCDE$.
On considère la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

1. Construire le point F l'image du point E par la rotation r , puis montrer que CFD est un triangle équilatéral.
2. Montrer que $\left(\overrightarrow{BE};\overrightarrow{BA}\right) \equiv \left(\overrightarrow{CF};\overrightarrow{CA}\right)[2\pi]$.
3. Que peut-on dire sur le point F si E appartient à (AB).

3. Rotation et barycentre :

Propriété :

Soit G le barycentre des points pondérés $(A;\alpha)$ et $(B;\beta)$.
Si A', B' et G' sont les images respectives de$A$,B et G par une rotation r alors G' est le barycentre des points pondérés $(A';\alpha)$ et $(B';\beta)$
On dit que la rotation **conserve le barycentre de deux points pondérés.**

Remarque :

On peut étendre cette propriété au barycentre de trois ou quatre points pondérés.

Application ④ :

Soit ABC un triangle et D un point tel que $D = bar\{(B;1),(C;2)\}$
Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

1. Construire les points B',C' et D' les images respectives de B,C et D
2. Montrer que les points B',C' et D'sont alignés.

Conséquence :

Soit I le milieu d'un segment $[AB]$.
Si A', B' et I' sont les images respectives de$A$,B et I par une rotation r alors I' est le milieu du segment $[A'B']$ on dit que la rotation **conserve le milieu d'un segment.**

Propriété :

Soient A, B et C des points du plan et A', B' et C' leurs images respectives par une rotation r.
Si $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ tel que k est un réel, alors $\overrightarrow{A'C'} = k\overrightarrow{A'B'}$. On dit que la rotation **conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs**, ou que la rotation **conserve l'alignement des points**.

Application ⑤ :

ABC est un triangle et M est un point tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. Soit r la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1. Construire les points A' et C' et M' les images respectives des points A et C et M par r.
2. Montrer que les points A' et C' et M' sont alignés.

Exercice ① :

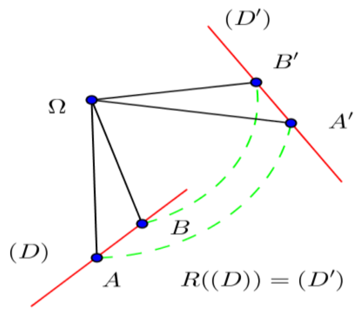
ABC est un triangle rectangle isocèle en A tel que $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
Soit I le milieu du segment $[BC]$.
Eet Fsont deux points du plan tels que $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$
On considère la rotation de centre Iet d'angle $\frac{\pi}{2}$
Montrer que le triangle EIF est rectangle isocèle en I.

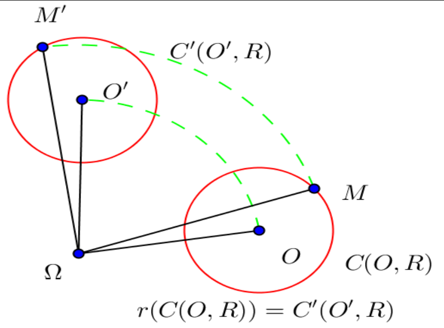
III. Images de certaines figures par une rotation :

Soit r une rotation et A, B, O, A', B'et O'sont des points du plan tels que $A \neq B$, $r(A) = A'$,$r(B) = B'$ et $r(O) = O'$

Propriété :

- L'image de la droite (AB) est la droite $(A'B')$.
- L'image du segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$.
- L'image de la demi-droite $[AB)$ est la demi-droite $[A'B')$.
- L'image du cercle $C(O;R)$ de centre O et de rayon$R$ est le cercle $C'(O';R)$de centre O' et de rayon R.





Conséquences :

- Les images de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires.
- Les images de deux droites parallèles sont deux droites parallèles.
- Si un point Mest le point d'intersection de deux droites (D)et (Δ)alors, l'image de Mpar la rotation $r$est le point d'intersection des images de (D)et (Δ)par la rotation r.

Application ⑥ :

$ABCD$ un carré tel que : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$,soit E un point du segment $[BC]$ tel que

E différent de B et C; F le point d'intersection de la droite (DC) et la droite perpendiculaire à (AE) en A.

Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1. Déterminer les images des deux droites (BC) et (AE).
2. En déduire l'image du point E par la rotation r.

Application ⑦ :

Soit ABC un triangle rectangle isocèle en A tel que $\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Soit I le milieu du segment $[BC]$

On considère la rotation r de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Soit (C) le cercle de centre C et passant par le point I.

1. Construire (C') l'image par la rotation r du cercle (C)
2. Le cercle (C) coupe le segment $[AC]$ en un point E et le cercle (C') coupe le segment $[AB]$ en un point F

Montrer que : $r(E) = F$.

Exercice ② :

Soit $ABCD$ un carré de centre O tel que $\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ .Soient I et J deux points tels que $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BJ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$.

Les droites (IC) et (JD) coupent respectivement (BD) et (AC) en M et N .

On considère la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1. Déterminer $r(A)$ et $r(B)$.
2. a- Montrer que I est le barycentre des points pondérés $(A;1)$ et $(B;-3)$.

b- Montrer que $r(I) = J$.

3. a- Déterminer l'image de chacune des droites (BD) et (IC).

b- En déduire que $r(M) = N$.

4. a- Montrer que $IM = JN$.

b- Montrer que $(CM) \perp (DN)$.

Pr. LATRACH ABDELKBIR