Limite d'une suite numérique

Slimane Tachroun

Exercice ① :

Soit (u_n) la suite numérique définie par:

$$u_0 = \frac{5}{4} \ et \ (\forall n \in \mathbb{N}) \ u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{2}.$$

1) a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ u_n < 2$.

b- Etudier la monotonie de la suite (u_n).

La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier.

2) pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = u_n - 2$.

a- Montrer que la suite (v_n) est géométrique.

b- En déduire que:$(\forall n \in \mathbb{N}) \ u_n = 2 - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

Puis préciser la limite de la suite (u_n)

3) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$.

a- Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \ S_n = 2n - 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

b- En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice ② : Normale 2016

On considère la suite (u_n) définie par ar $u_0 = 2$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) \ u_{n+1} = \frac{u_n+3}{5-u_n}$.

1) a- Vérifier que: $(\forall n \in \mathbb{N}) \ u_{n+1} - 3 = \frac{4(u_n-3)}{2+(3-u_n)}$.

b- Montrer par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}) \ u_n < 3$.

2) pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \frac{u_n-1}{3-u_n}$.

a- Montrer que la suite (v_n) est géométrique et de raison $\frac{1}{2}$ puis en déduire que: $(\forall n \in \mathbb{N}); \ v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

b- Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}); \ u_n = \frac{1+3v_n}{1+v_n}$ puis écrire u_n en fonction de n .

c- Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice ③ : Rattrapage 2011

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) \ u_{n+1} = \frac{6u_n}{1+15u_n}$.

1) a. Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{u_n - \frac{1}{3}}{15u_n+1}$.

b. Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_n > \frac{1}{3}$.

2) On considère la suite numérique (v_n)définie par $(\forall n \in \mathbb{N})$: $v_n = 1 - \frac{1}{3u_n}$.

a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{6}$.

b. Exprimer v_n en fonction de n.

3) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_n = \frac{1}{3-2\left(\frac{1}{6}\right)^n}$ puis déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice ④ : Normale 2020

On considère la suite (u_n) définie par:

$$u_0 = \frac{3}{2} \ et \ (\forall n \in \mathbb{N}) \ u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n+5}.$$

1) Calculer u_1.

2)Montrer que par récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ u_n > 0$.

3)a-Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}) \ 0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5}u_n$.

puis en déduire que:$(\forall n \in \mathbb{N}) \ 0 < u_n \leq \frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$.

b- Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4) On considère la suite numérique (v_n)définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}): v_n = \frac{4u_n}{2u_n+3}.$$

a- Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$.

b- Exprimer v_n en fonction de n puis déduire u_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice ⑤ :

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = \frac{1}{3}$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) \ u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n+1}$.

1) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$: $0 < u_n < 1$.

2) a. Etudier la monotonie de (u_n).

b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que $u_n \geq \frac{1}{3}$ et que la suite (u_n) est convergente.

3) a. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 - u_{n+1} \leq \frac{3}{4}(1 - u_n)$.

b. En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 - u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \times \frac{2}{3}$.

c. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4) 4) pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \frac{u_n-4}{u_n-2}$.

a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b. Exprimer v_n et u_n en fonction de n .

c. Déterminer au nouveau $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice ⑥ :

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

1). a-Montrer que: $(\forall x \in \mathbb{R}^+): f(x) \leq x$.

b-Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et en déduire que $f(\mathbb{R}^+) = [0; 1[$.

2) On considère la suite numérique (u_n) définie par:

$$u_0 = \frac{1}{2} \text{ et } u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

a-Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $2 < u_n < 4$.

b-Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c-En déduire que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

Exercice ⑦ :

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}-1}$.

1) Déterminer D_f .

2) Montrer que pour tout $x \in D_f$:$f'(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{2(\sqrt{x}-1)^2}$.

3) Dresser le tableau de variations de la fonction f .

4) a- Montrer que pour tout $x \in D_f$:

$$f(x) - x = \frac{x(4-x)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}.$$

b- En déduire que : $(\forall x \in [4; +\infty[); f(x) \leq x$.

5) On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 9 \text{ et } u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ u_n > 4$.

b- Etudier la monotonie de la suite (u_n).

c-En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.