Chapitre 4

Prof. Abdellah AIT-CHEIKH

Généralités sur les fonctions

Capacités attendues

- Connaître les règles de manipulation des inégalités.
- Déduire les variations d'une fonction, ses extremums et son signe à partir de sa représentation graphique ou son tableau de variations.
- Déterminer les variations de $x \mapsto f(x)+\lambda$, $x \mapsto \lambda f(x)$ connaissant les variations de f.
- Déterminer les variations de $g \circ f$, connaissant les variations des fonctions f et g.
- Résoudre les équations $f(x)=c$ et $f(x)=g(x)$ graphiquement.
- Étudier les équations et les inéquations en utilisant les fonctions.

I Ensemble de définition

Définition 1 On appelle fonction f un procédé, qui, à tout nombre x d'un ensemble, associe un nombre $f(x)$.
On dit alors que $f(x)$ est l'image de x, et que x est un antécédent de $f(x)$.
L'ensemble de définition d'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres de $\mathbb{R}$ qui ont une image par la fonction f ; on note usuellement D_f cet ensemble.
Autrement dit : $x \in D_f \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \wedge f(x) \in \mathbb{R}$ ou $D_f = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \mathbb{R}\}$

EXERCICE N°1 : Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :
$f(x) = \dfrac{4|x|+3}{x^2-4x+4}$; $g(x) = \dfrac{x^3-5}{2|x-3|-8}$; $h(x) = \sqrt{3-|x-4|}$; $p(x) = \dfrac{x^2+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x-2}}$

II Fonction majorée - Fonction minorée - Fonction bornée

Définitions Soit f une fonction définie sur un intervalle I de D_f .

- On dit que la fonction f est majorée sur I s'il existe un réel M tel que :

$$(\forall x \in I), f(x) \leq M$$

  Le réel M s'appelle un **majorant** de f sur I.

- On dit que la fonction f est minorée sur I s'il existe un réel m tel que :

$$(\forall x \in I), f(x) \geq m$$

  Le réel m s'appelle un **minorant** de f sur I.

- On dit que la fonction f est bornée sur I s'il existe deux réels M et m tel que : $(\forall x \in I), m \leq f(x) \leq M$

Propriété Soit f une fonction définie sur un intervalle I de D_f .
La fonction f est bornée sur l'intervalle I si et seulement s'il existe un réel positif k tel que : $(\forall x \in I), |f(x)| \leq k$

EXERCICE N°2 : Soient f, g et h les fonctions définies respectivement par :

$$f(x) = x - \sqrt{x^2+1}; \qquad g(x) = x^2 + 4x \qquad et \qquad h(x) = \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}$$

1. Montrer que la fonction f est majorée par le nombre $M = 0$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la fonction g est minorée par le nombre $m = -4$ sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que la fonction h est bornée sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right]$.

III Extremums d'une fonction numérique

Définition Soient f une fonction définie sur un intervalle I de D_f et $x_0 \in I$.

- $f(x_0)$ est le **minimum** de f sur I si et seulement si : $(\forall x \in I), f(x) \geq f(x_0)$ et on écrit : $f(x_0) = \min_{x \in I} f(x)$
- $f(x_0)$ est le **maximum** de f sur I si et seulement si : $(\forall x \in I), f(x) \leq f(x_0)$ et on écrit : $f(x_0) = \max_{x \in I} f(x)$.
- Le maximum et le minimum sont appelés les **extremums** de la fonction f.

EXERCICE N°3

1 Soit f la fonction définie dans $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x$.
Montrer que $f(1)$ est un minimum de f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

2 Soit f la fonction définie dans $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$
Montrer que f a un maximum sur $\mathbb{R}$ dans le points $x_0 = 1$.

IV Opérations sur les fonctions

1 Égalité de deux fonctions

Définition Soient f et g deux fonctions. On dit que f et g sont égales et on note $f = g$ si :
$D_f = D_g = D$ et $\forall x \in D)$ $f(x) = g(x)$

2 Composition de fonctions

Définition Soit f une fonction définie sur D_f et g une fonction définie sur D_g.
On pose : $D = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_f$ et $f(x) \in D_g\}$.
La fonction h définie sur D par $h(x) = g(f(x))$ est appelée fonction composée de f suivie de g notée $g \circ f$.

Remarque

$D_{g\circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_f$ et $f(x) \in D_g\}$ ou $x \in D_{g\circ f} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $x \in D_f$ et $f(x) \in D_g$

EXERCICE N°4 : Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x} - 1$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 + 3$. Définir $g \circ f$ et $f \circ g$. Sont-elles égales ?

V Parité d'une fonction

Définition Soit f une fonction et D_f son ensemble de définition.

- f est une fonction paire $\Leftrightarrow (\forall x \in D_f), -x \in D_f \wedge f(-x) = f(x)$
- f est une fonction impaire $\Leftrightarrow (\forall x \in D_f), -x \in D_f \wedge f(-x) = -f(x)$

Propriété

- f est paire se traduit par : la représentation graphique de f dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- f est impaire se traduit par : la représentation graphique de f dans un repère est symétrique par rapport à l'origine du repère.

EXERCICE N°5 : Soit f la fonction définie dans $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x$

1. Montrer que f est impaire.
2. Montrer que $f(1)$ est un minimum de la fonction f sur $[0; +\infty[$.
3. En déduire que $(\forall x \in]-\infty; 0])f(x) \leq 2$.

VI Monotonie d'une fonction

1 Définition

Définition Soit une fonction f définie sur un intervalle I.

- f est croissante sur $I \Leftrightarrow (\forall (a;b) \in I^2), a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$.
- f est décroissante sur $I \Leftrightarrow (\forall (a;b) \in I^2), a < b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$.
- f est strictement croissante sur $I \Leftrightarrow (\forall (a;b) \in I^2), a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$.
- f est strictement décroissante sur $I \Leftrightarrow (\forall (a;b) \in I^2), a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$.
- f est monotone sur I si elle est croissante ou décroissante sur I.
- f est strictement monotone sur I si elle est strictement croissante ou décroissante sur I.

2 Taux de variation

Définition Soit une fonction f définie sur un intervalle I et Soient a et b deux nombres distincts de l'intervalle I.
Le nombre $T(a;b) = \dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$ s'appelle le taux de variation de la fonction f entre a et b .

Propriété Soit une fonction f définie sur un intervalle I .

- f est croissante sur I si et seulement si, quels que soient les nombres distinct a et b de I on a : $T(a;b) \geq 0$
- f est strictement croissante sur I si et seulement si, quels que soient les nombres distinct a et b de I on a : $T(a;b) > 0$
- f est décroissante sur I si et seulement si, quels que soient les nombres distinct a et b de I on a : $T(a;b) \leq 0$
- f est strictement décroissante sur I si et seulement si, quels que soient les nombres distinct a et b de I on a : $T(a;b) < 0$

3 La monotonie et la parité

Propriété Soit f une fonction définie sur un ensemble D_f symétrique par rapport à 0 et soient $I \subset D_f \cap \mathbb{R}^+$ et I' son symétrique par rapport à 0.

- soit f paire, on a : si f est croissante sur I alors f est décroissante sur I' et si f est décroissante sur I alors f est croissante sur I'
- soit f impaire, on a : si f est croissante sur I alors f est croissante sur I' et si f est décroissante sur I alors f est décroissante sur I'

4 Sens de variation de la fonction $u \circ v$

Propriété Soit u une fonction définie et monotone sur un intervalle J. Soit v une fonction définie et monotone sur un intervalle I et telle que pour tout $x \in I$, $v(x) \in J$.

- Si u et v ont même sens de variation alors $u \circ v$ est croissante sur I.
- Si u et v ont des sens de variation contraires alors $u \circ v$ est décroissante sur I.

EXERCICE N°6 : Soient f et g deux fonctions définies par : $f(x) = -2x + 1$ et $g(x) = \dfrac{1-2x}{x-1}$

1. Donner le tableau de variation de la fonction f et celui de g .

2. Déterminer la monotonie de la fonction gof sur les intervalles : $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$

EXERCICE N°7 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 2|x| + 3$

1. Montrer que la fonction f est paire .

2. Montrer que la fonction f est minorée par le nombre 2 .

3. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $]1; +\infty[$ et décroissante sur l'intervalle $[0.1]$.

4. En déduire les variation de la fonction f sur les intervalles $]-\infty; -1]$ et $]-1; 0]$.

VII Fonctions périodiques

Définition Une fonction f est dite périodique de période T si et seulement si , pour tout réel $x \in D_f$, on a : $(x+T) \in D_f \wedge f(x+T) = f(x)$.

Remarque

Conséquence graphique : Si f est périodique de période T il suffit de l'étudier sur un intervalle de longueur T.

Propriété

- Si la fonction f est périodique de période T alors

$$(\forall x \in D_f)(\forall k \in \mathbb{Z}), f(x+kT) = f(x)$$

- Posons : $I_0 = [x_0; x_0 + T[$ et $I_k = [x_0 + kT; x_0 + (k+1)T[$ tels que $x_0 \in D_f$ et $k \in \mathbb{Z}$ et soient (C_0) la courbe de la fonction f sur l'intervalle I_0 et (C_k) sa courbe sur l'intervalle I_k dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. On a :

  → (C_k) est l'image de (C_0) par la translation de vecteur $kT.\vec{i}$.

  → La fonction f a le même sens de variation sur I_0 et I_k.

EXERCICE N°8 : Soit f une fonction impaire, périodique de période $T = 3$ et définie sur l'intervalle $\left[0; \dfrac{3}{2}\right]$ par : $f(x) = x^2 - x$.

1. Calculer $f(2017)$ et $f(1439)$.

2. Déterminer l'expression $f(x)$ sur $\mathbb{R}$

VIII Représentation graphique des fonctions de référence

Définition La courbe représentative de la fonction f dans un repère est l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$ où x parcourt le domaine de définition $\mathcal{D}$ de la fonction f.
Elle est souvent notée $\mathcal{C}_f$.
L'équation de cette courbe représentative est : $y = f(x)$.
La courbe représentative de la fonction carrée s'appelle une parabole et celle de la fonction inverse une hyperbole.

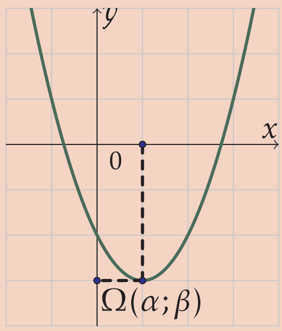
1 La fonction : $x \longrightarrow ax^2 + bx + c$ tel que $a \neq 0$

Propriétés Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ tel que $a \neq 0$.

- $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $f(x) = a(x-\alpha)^2+\beta$ tels que $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$.
- la courbe représentative de f est une parabole de sommet $\Omega(\alpha;\beta)$ et d'axe de symétrie la droite d'équation $x = \alpha$.
- tableau de variations et représentation graphique :

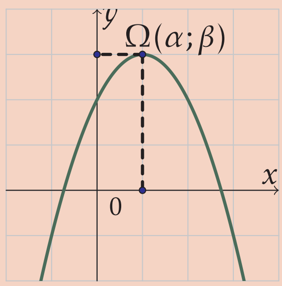
$\longrightarrow$ si $a > 0$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	β	$\nearrow$	



$\longrightarrow$ si $a < 0$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	β	$\searrow$	



2 La fonction : $x \longrightarrow \dfrac{ax+b}{cx+d}$ tel que $c \neq 0$

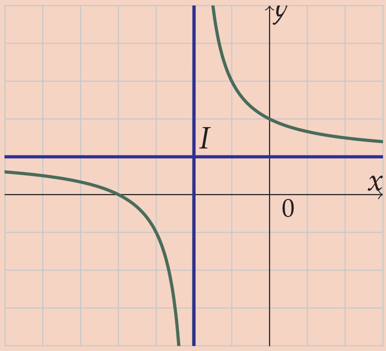
Propriétés

Soit f la fonction par $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ tel que $c \neq 0$.

- L'ensemble de définition de la fonction f est : $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$.
- La courbe représentative de la fonction f est une **hyperbole** de centre $I\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations $x = -\dfrac{d}{c}$ et $y = \dfrac{a}{c}$.
- Tableau de variations et représentation graphique : On pose : $\Delta = ad - bc$

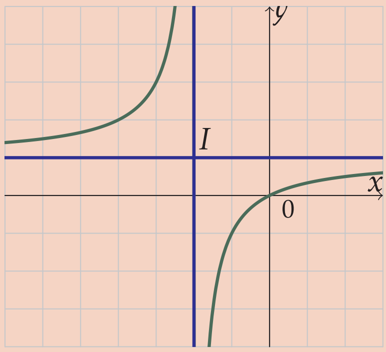
→ si $\Delta < 0$:

x	$-\infty$		$-\dfrac{d}{c}$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	



→ si $\Delta > 0$:

x	$-\infty$		$-\dfrac{d}{c}$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	

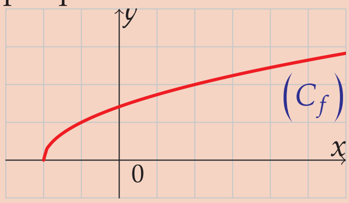


3 La fonction : $x \longrightarrow \sqrt{x+a}$

Propriétés Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x+a}$.

- L'ensemble de définition de la fonction f est : $D_f = [-a;+\infty[$.
- La fonction f est croissante sur D_f.
- Tableau de variations et représentation graphique :

x	$-a$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	



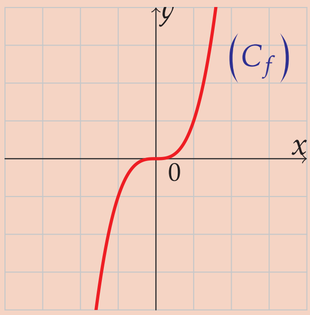
4 La fonction : $x \longrightarrow ax^3$ tel que $a \neq 0$

Propriétés Soit f la fonction par $f(x) = ax^3$ tel que $a \neq 0$.

- L'ensemble de définition de la fonction f est : $D_f = \mathbb{R}$.
- La fonction f est impaire.
- Tableau de variations et représentation graphique :

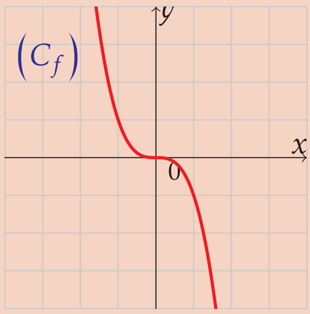
$\longrightarrow$ Si $a > 0$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$



$\longrightarrow$ Si $a > 0$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\searrow$

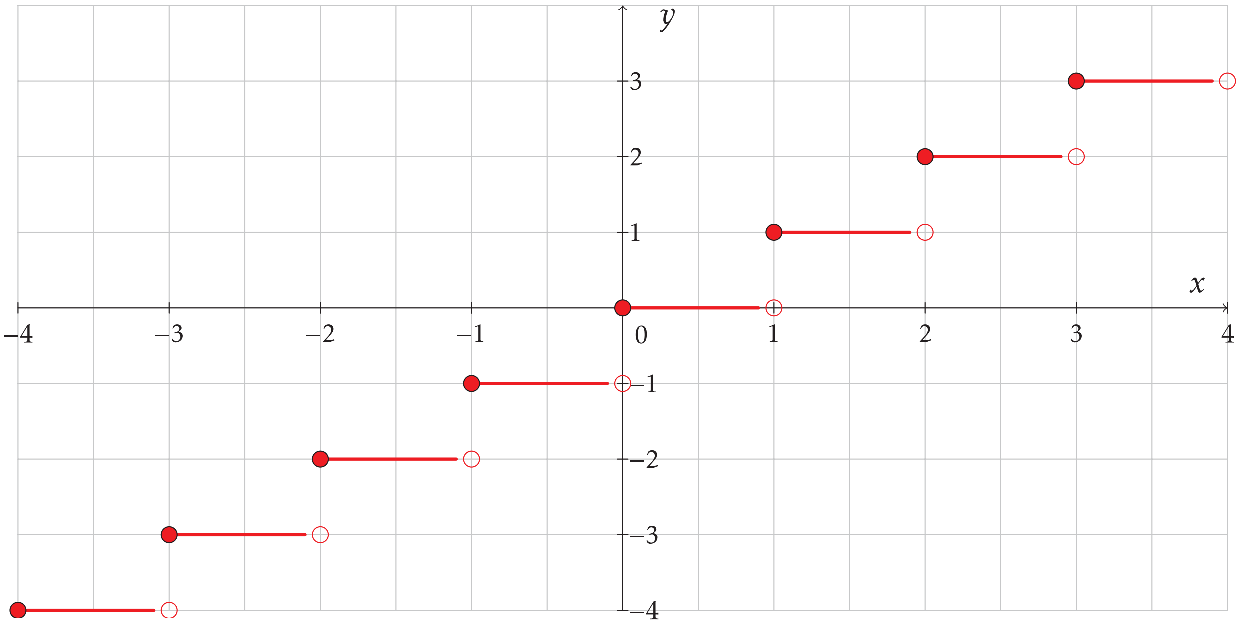


5 La fonction partie entière

Définition On appelle fonction **partie entière** la fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout nombre réel x, $f(x)$ est égal au plus grand entier inférieur ou égal à x.
La partie entière de x se note $[x]$ ou $E(x)$.

Exemples $E(5)=5$; $E(-3,2)=-4$; $E(6,9)=6$; $E\left(\frac{7}{3}\right)=2$; $E\left(-\frac{8}{3}\right)=-3$

Le graphique de la fonction **partie entière** définie par : $f(x)=[x]$:



Propriétés

- $(\forall x \in \mathbb{R}), E(x) \leq x < E(x)+1$
- $(\forall k \in \mathbb{Z}), E(k)=k$
- $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall k \in \mathbb{Z}), E(x+k)=E(x)+k$

6 Représentation graphique d'une fonction $x \mapsto f(x+a)+b$

Propriété Soit f une fonction et g la fonction définie par $g(x)=f(x+a)+b$.
Dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, on appelle C_f et C_g les courbes représentatives des fonctions f et g.
C_g est l'image de C_f par la translation de vecteur $-a\vec{i}+b\vec{j}$, autrement dit le vecteur de coordonnées $(-a;b)$.

Démonstration : Soient $M(x;y)$ et $M'(x-a;y+b)$.

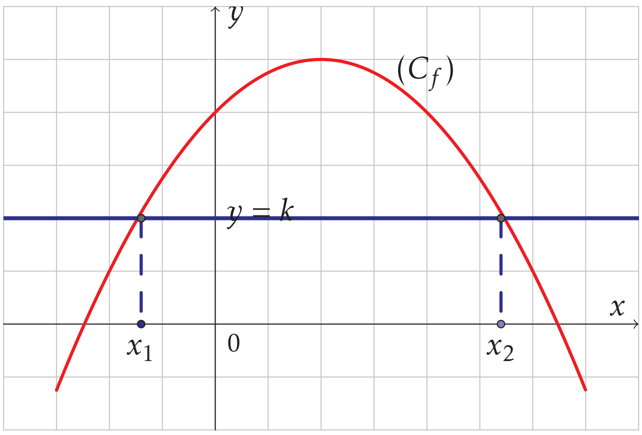
$$M' \in C_g \Leftrightarrow y+b=g(x-a) \Leftrightarrow y+b=f(x-a+a)+b \Leftrightarrow y=f(x) \Leftrightarrow M \in C_f$$

IX Comparaison de deux fonctions

1 Résolution d'une équation

a Résolution $f(x) = k$

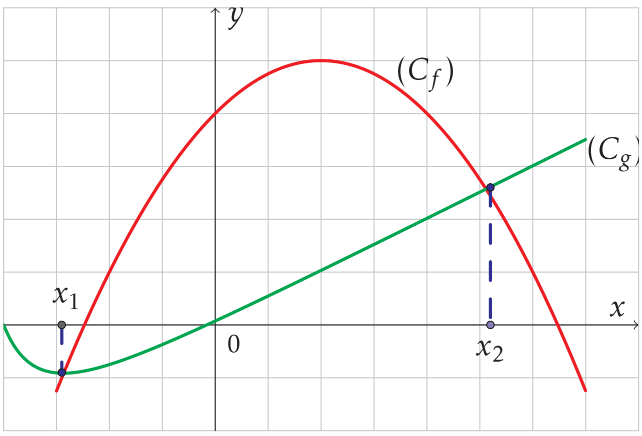
On trace la droite d'équation $y = k$ et on lit les abscisses des points d'intersection avec la courbe.



Donc l'ensemble des solutions de cette équation est : $S = \{x_1 ; x_2\}$

b Résolution $f(x) = g(x)$

On trace les deux courbes (C_f) et (C_g) et on lit les abscisses des points d'intersection .

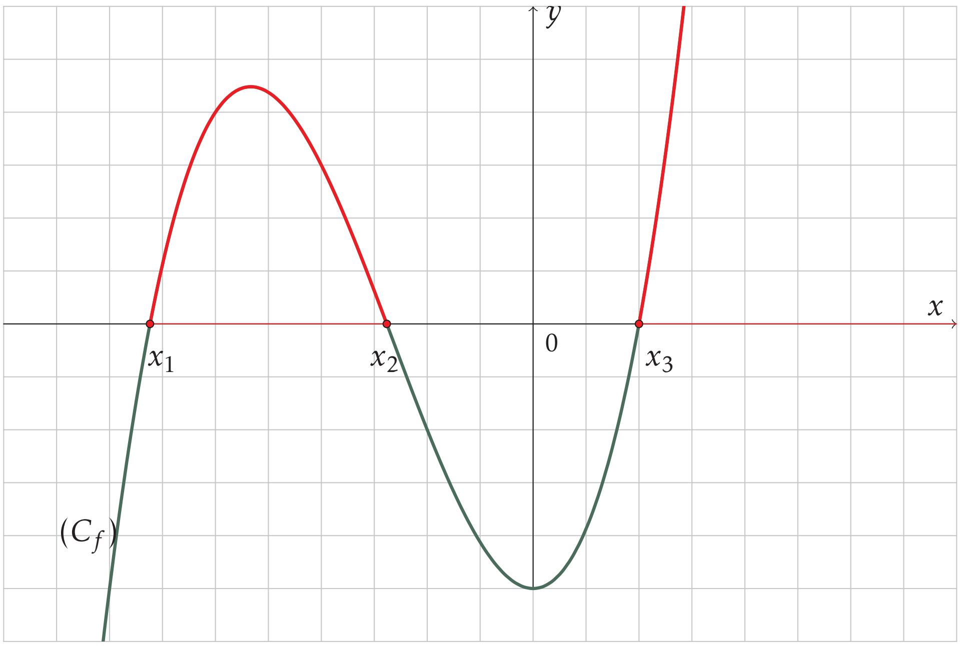


Donc l'ensemble des solutions de cette équation est : $S = \{x_1 ; x_2\}$

P

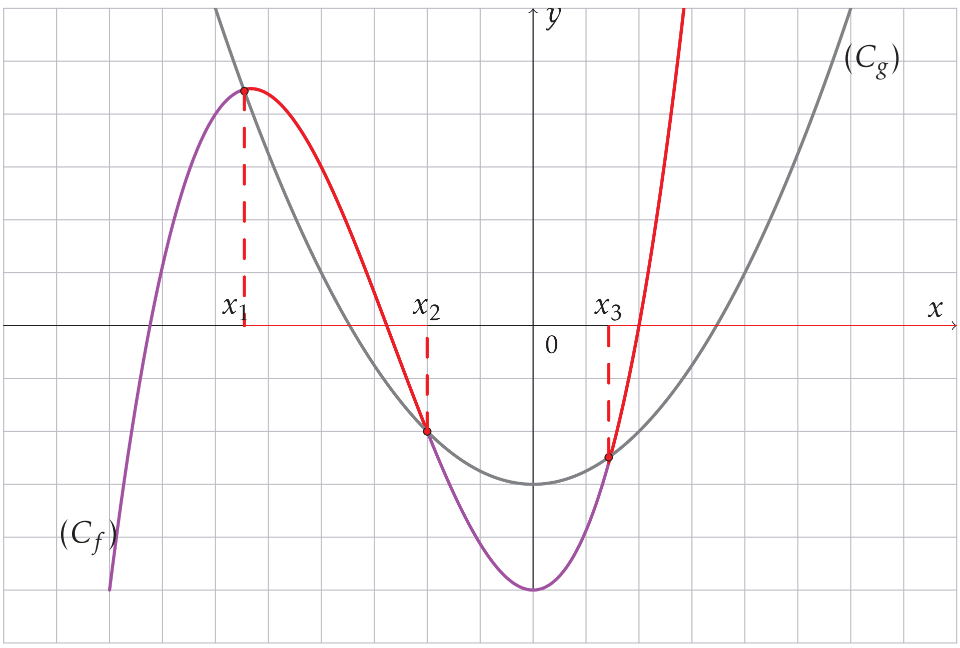
2 Résolution d'une inéquation

a Résolution $f(x) > 0$



Donc l'ensemble des solutions de cette inéquation est : $S =]x_1; x_2[\cup]x_3; +\infty[$

b Résolution $f(x) \geq g(x)$



Donc l'ensemble des solutions de cette inéquation est : $S = [x_1; x_2] \cup [x_3; +\infty[$