CHAPITRE 5

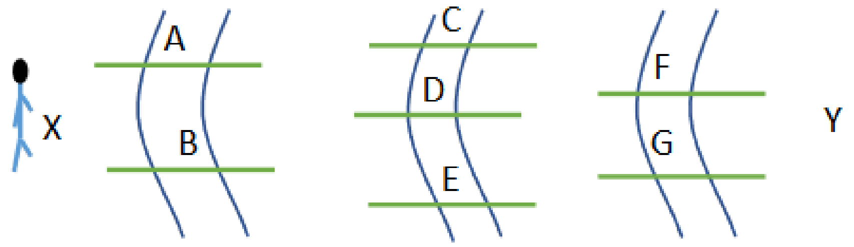
DÉNOMBREMENT

5.1 Le principe fondamental du dénombrement

5.1.1 Activités

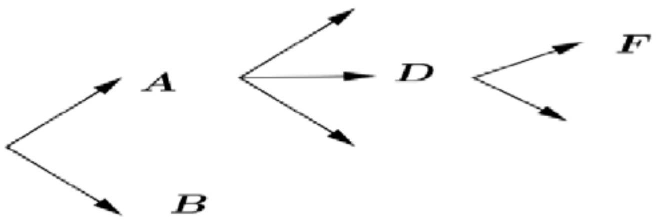
Activité 1 :

Une personne veut atteindre le point Y à partir du point X par le passage de trois vallées comme le montre la figure ci-dessous :



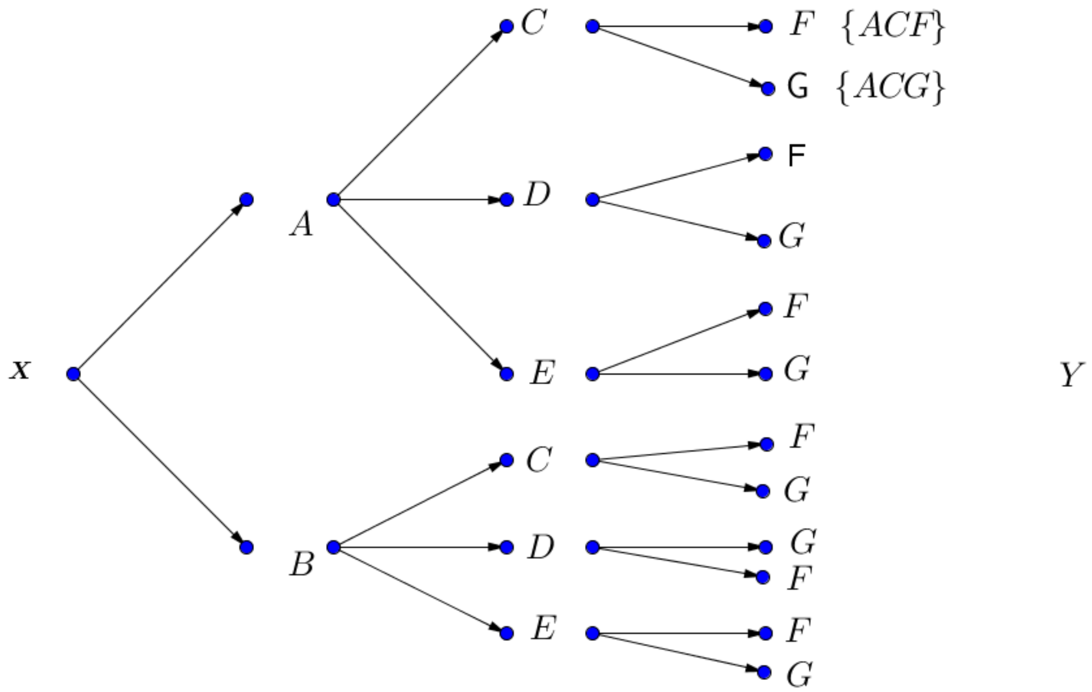
L'écriture ADF signifie que cette personne est passée par le pont A, le pont D puis le pont F.

1) Compléter l'arbre suivant, puis déduire tous les chemins menant au point Y.



2) Calculer le nombre de chemins que cette personne.

Solution de l'activité :



1) Les chemins possibles sont : $\{ACF\,; ACG\,; ADF\,; ADG\,; AEF\,; AEG\,; BCF\,; BCG\,; BDF\,; BDG\,; BEF\,; BEG\}$
2) Le nombre de choix possible est 12.

Remarque 5.1
- Pour la première vallée on a : 2 chemins
- Pour la deuxième on a : 3 chemins
- Pour la troisième on a : 2 chemins
donc d'après le principe fondamental de dénombrement le nombre des chemins possibles : $2 \times 3 \times 2 = 12$

Définition 5.1
Le principe fondamentale de dénombrement
Considérons trois choix :
- Si la première choix se fait de n manières différentes
- et la deuxième choix se fait de m manières différentes
- et la troisième choix se fait de p manières différentes

alors le nombre de façons dont tous ces choix sont faits est : $n \times m \times p$

Remarque 5.2
On peut généralisé cette principe en quatre ou cinq ou .... choix (ou deux choix).

Exemple 5.1
On considère les chiffres suivantes : $1\,; 3\,; 4\,; 5\,; 7\, et\, 8$
On veut former un code de 3 chiffres distincts deux à deux parmi les chiffres précédents :
- ▷ Choix du premier chiffre : on a 6 choix possibles
- ▷ Choix du deuxième chiffre : on a 5 choix possibles
- ▷ Choix du troisième chiffre : on a 4 choix possibles

Donc d'après le principe fondamentale de dénombrement le nombre des codes possibles est : $6 \times 5 \times 4 = 120$

Exercice 33
On considère les chiffres suivantes : $2\,; 4\,; 6\,; 7\, et\, 9$
On veut former un code de 4 chiffres distincts deux à deux parmi les chiffres précédents :
Déterminer le nombre de choix possibles.

Exercice 34

On lance une pièce de monnaie à deux face  et  (P et F)

Le nombre de résultats possibles est : 2

→ lorsque on lance cette pièce deux fois :

1) Combien des résultats possibles ?

→ lorsque on lance cette pièce trois fois :

2) Combien des résultats possibles ?

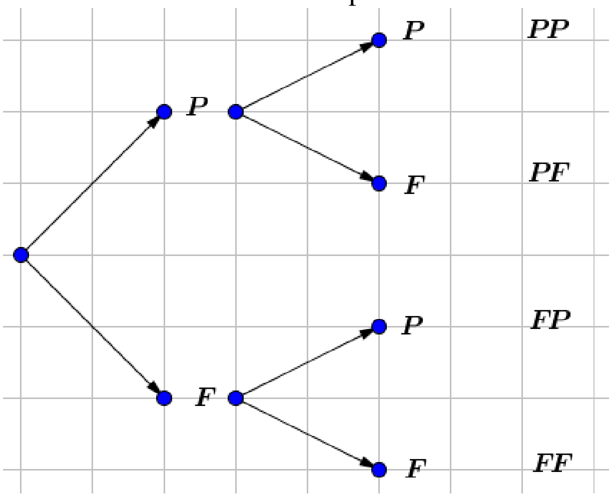
→ lorsque on lance cette pièce quatre fois :

3) Combien des résultats possibles ?

Solution de l'exercice

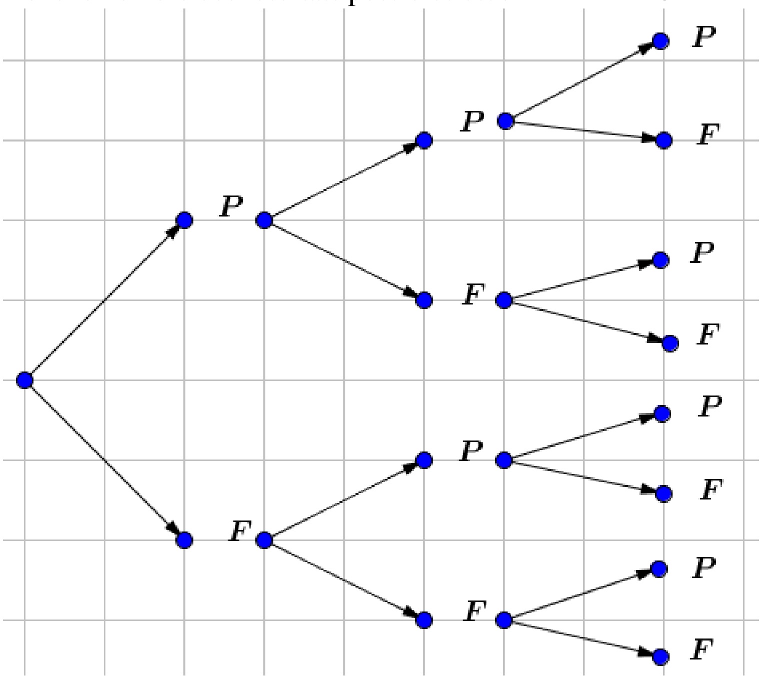
1) ▷ Pour la première lancement on a : 2 résultats. (P ou F)
   ▷ Pour la deuxième lancement on a : 2 résultats. (P ou F)

   Donc le nombre des résultats possibles est : $2 \times 2 = 4$



2) ▷ Pour la première lancement on a : 2 résultats. (P ou F)
   ▷ Pour la deuxième lancement on a : 2 résultats. (P ou F)
   ▷ Pour la troisième lancement on a : 2 résultats. (P ou F)

   Donc le nombre des résultats possibles est : $2 \times 2 \times 2 = 8$



3) ▷ Pour la première lancement on a : 2 résultats. (P ou F)

▷ Pour la deuxième lancement on a : 2 résultats. (P ou F)

▷ Pour la troisième lancement on a : 2 résultats. (P ou F)

▷ Pour la quatrième lancement on a : 2 résultats. (P ou F)

Donc le nombre des résultats possibles est : $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

Exercice 35
On considère les chiffres suivantes : $2; 5; 7$
On veut former un code de 2 chiffres parmi les chiffres précédents :
Déterminer le nombre de choix possibles.

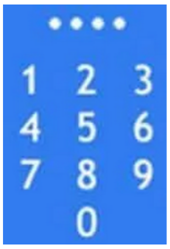
Exercice 36
Une personne possède **trois** chemises, **deux** cravates et **trois** pantalons.
Déterminons le nombre de costumes que cette personne peut porter.
(Chaque costume se compose d'une chemise, d'une cravate et d'un pantalon)

5.2 Arrangements et permutations et combinaisons :

5.2.1 Arrangements et permutations :

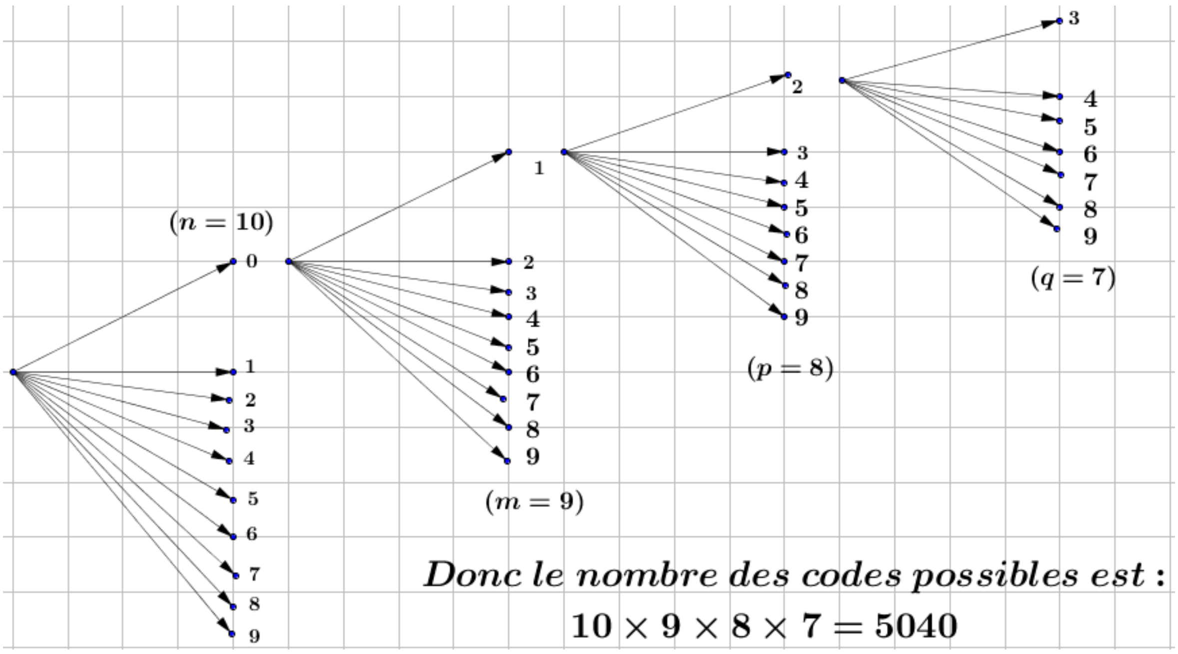
Activité :

Pour allumer un téléphone il faut appuyer sur les boutons qui portant **les quatre chiffres** du code secret.



1) Supposons que les quatre chiffres de code sont différents deux à deux : Déterminer le nombre de code possibles.
2) Supposons que les quatre chiffres des codes sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 : Déterminer le nombre des codes possibles.

Solutions :



1)

- Pour le premier chiffre on a : 10 choix possibles parmi les nombres : $0;1;2;3;4;5;6;7;8;9$
- Pour le deuxième chiffre on a : 9 choix possibles car les chiffre sont distincts.
- Pour le troisième chiffre on a : 8 choix possibles.
- Et pour le quatrième chiffre on a : 7 choix possibles.

donc d'après le principe de dénombrement les nombres des choix possibles est :
$10 \times 9 \times 8 \times 7$ et ce produit sera noté : A_{10}^{4}
$A_{10}^{4} = \underbrace{10 \times 9 \times 8 \times 7}_{le\,nombre\;de\;facteurs\;est\;4} = 5040$, et le produit commence par 10.

2)

- Pour le premier chiffre on a : 4 choix possibles parmi les nombres : $1;2;3;4$
- Pour le deuxième chiffre on a : 3 choix possibles car les chiffre sont distincts.
- Pour le troisième chiffre on a : 2 choix possibles.
- Et pour le quatrième chiffre on a : 1 choix possibles.

donc d'après le principe de dénombrement les nombres des choix possibles est :
$4 \times 3 \times 2 \times 1 = A_4^4 = 24$; et ce produit sera noté : A_4^4 ou $4!$

Exemple 5.2

1) $A_6^3 = \underbrace{6 \times 5 \times 4}_{le\,nombre\;de\;facteurs\;est\;3} = 120$; et le produit commence par 6.

2) $A_7^2 = \underbrace{7 \times 6}_{le\,nombre\;de\;facteurs\;est\;2} = 42$; et le produit commence par 7.

Proprieté 5.1
Soient p et n deux entiers naturels tels que $1 \leq p \leq n$, on note le nombre des arrangements de p éléments parmi n : par A_n^p et on a : $A_n^p = n(n-1)\cdots(n-p+1)$

Remarque 5.3
Par convention : $A_n^0 = 1$

Exercice 37
Calculer les nombres suivants : A_5^3 ; A_9^4 ; A_7^1 ; A_6^2 ; A_6^6 ; A_8^5 ; A_{10}^3 ; A_5^2 *et* A_8^3

Proprieté et Définition 5.1
Soient n un entier naturel tout arrangement de n éléments parmi n : est appelé une **permutation**. On note le nombre de permutations de n par $n!$ et on a : $n! = A_n^n = n(n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$

Exemple 5.3
$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$; $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

Remarque 5.4
Par convention : $0! = 1$

Exercice 38
Calculer les nombres suivants : $5!$; $6!$; $9!$; $2!$; $7!$; $8!$; $1!$; $10!$ *et* A_6^6

Exercice 39
Combien de nombre de trois chiffres peut-on écrire avec les chiffres : $1,3,5,7$ et 9 tous distincts ?

Exercice 40
Combien de nombre de trois chiffres peut-on écrire avec les chiffres : $1;2$ et 3 tous distincts ?

Exercice 41
On veut former des mots à deux lettres distinctes, avec les lettres : A ; B ; C ; D ; E et F
Déterminer le nombre de mots possibles.

Exercice 42
On veut former des mots à quatre lettres distinctes deux à deux, avec les lettres : A ; B ; C et D
Déterminer le nombre de mots possibles.

Exercice 43
Dans une classe de 10 élèves. Le professeur voulait choisir les 3 premiers élèves.
Déterminer le nombre de choix possibles.

5.2.2 Combinaisons

Définition 5.2
Soient $n \in \mathbb{N}$ et E un ensemble fini de n éléments et p un entier vérifiant : $1 \leq p \leq n$:
On appelle combinaison de p éléments parmi n éléments de E : toute partie de E possédant p éléments.
Le nombre de combinaisons de p éléments parmi n est égal à C_n^p et on a : $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!}$

Exemple 5.4
.
$C_4^2 = \dfrac{A_4^2}{2!} = \dfrac{4\times 3}{2\times 1} = \dfrac{12}{2} = 6$; $C_6^3 = \dfrac{A_6^3}{3!} = \dfrac{6\times 5\times 4}{3\times 2\times 1} = \dfrac{120}{6} = 20$; $C_8^4 = \dfrac{A_8^4}{4!} = \dfrac{8\times 7\times 6\times 5}{4\times 3\times 2\times 1} = \ldots\ldots\ldots$

Exercice 44
Calculer les nombres suivantes :
C_5^2 ; C_5^3 ; C_9^3 ; C_{10}^2 ; C_4^4 ; C_6^4 ; C_8^3 ; C_5^1 ; C_7^2 ; C_4^3 et C_{12}^3

Remarque 5.5
1) $C_n^0 = 1$
2) C_n^p représente le nombre de façons de choisir p objets parmi n (L'ordre n'est pas important et il n'y a pas de répétition)

Exemple 5.5
Considérons 6 personnes :
Combien de groupes de 2 personnes peuvent être formés.

Exercice 45
Dans une classe est composée de 4 filles et 6 garçons. Le professeur voulait choisir 3 élèves pour faire un exposé.
1) Déterminer le nombre de groupes que le professeur peut créer.
2) Déterminer le nombre de groupes composés par les garçons uniquement.
3) Déterminer le nombre de groupes qui contiennent deux filles exactement.
4) Déterminer le nombre de groupes qui contiennent au moins un garçon.
5) Déterminer le nombre de groupes qui contiennent aux plus trois filles.

5.3 Types de tirages

1) Activité :

Une urne contient 5 boules. On tire au hasard 3 boules de l'urne.
Déterminer le nombre de tirages possibles si :
1) Le tirage est **simultané** ,
2) Le tirage est **successif sans remise**,
3) Le tirage est **successif avec remise**,

Solution :

1) Le tirage est **simultané** alors : chaque tirage est une combinaison de 3 élément parmi 5 :
donc le nombre de tirage est : $C_5^3 = \frac{A_5^3}{3!} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$.
2) Le tirage est **successif sans remise** alors : chaque tirage est une permutation de 3 élément parmi 5 :
donc le nombre de tirage est : $A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$.
Autre méthode :
   - ▷ Pour la première boule on a 5 choix.
   - ▷ Pour la deuxième boule on a 4 choix. (le tirage est sans remis).
   - ▷ Pour la troisième boule on a 3 choix. (le tirage est sans remis).

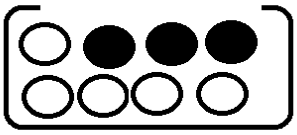
   Donc d'après le principe de dénombrement le nombre de tirages est : $5 \times 4 \times 3 = 60$
3) Le tirage est **successif avec remise** alors : le nombre de tirage est : $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$.
Autre méthode :
   - ▷ Pour la première boule on a 5 choix.
   - ▷ Pour la deuxième boule on a 5 choix. (le tirage est avec remis).
   - ▷ Pour la troisième boule on a 5 choix. (le tirage est avec remis).

   Donc d'après le principe de dénombrement le nombre de tirages est : $5 \times 5 \times 5 = 125$

2) Résumer :

On tire p éléments parmi n.

Type de Tirage	*Nombre de tirages possible*	*L'ordre*
Simultané	C_n^p	Pas important
Successif sans remise	A_n^p	Important
Successif avec remise	n^p	Important

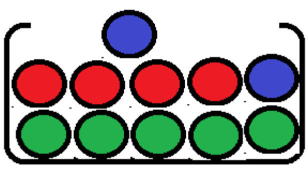


Exercice 46
Une urne contient 5 boules blanches et 3 boules noires.

I) On tire simultanément au hasard 2 boules de l'urne.
   1) Quel est le nombre de tirages possibles ?
   2) Quel est le nombre de tirages comportant 2 boules de mêmes couleurs ?
   3) Quel est le nombre de tirages comportant 2 boules de couleurs différents ?
   4) Quel est le nombre de tirages comportant au moins une boule blanche ?

II) Répéter les mêmes questions précédentes au cas où le tirage est successif et avec remise.

III) Répéter les mêmes questions précédentes au cas où le tirage est successif et sans remise.



Exercice 47
Une urne contient n boules ($n = 11$) ; (4 Rouges) ; (5 verts) et (2 bleus)

I) On tire **simultanément** $p = 3$ boules de l'urne,
   1) Quel est le nombre de tirages possible ?

2) Quel est le nombre de tirages de 3 boules rouge ?
3) Quel est le nombre de tirages de 3 boules de même couleur ?
4) Quel est le nombre de tirages de 3 boules de couleurs différents ?
5) Quel est le nombre de tirages de 3 boules de couleurs différents deux à deux ?
6) Quel est le nombre de tirages de 2 boules rouges et un boule bleu ?

II) On tire **successivement** et **sans remis** $p = 3$ boules de l'urne, (Répondez aux mêmes questions) ?

III) On tire **successivement avec remis** $p = 3$ boules de l'urne, (Répondez aux mêmes questions) ?