Exercice 49

I) On appelle f et g les deux fonctions définies sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\ln(x+1)-x \text{ et } g(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}$$

1) Étudier les variations de f et de g sur $[0\,;+\infty[$.

2) En déduire que pour tout $x\geq 0$,

$$x-\frac{x^2}{2}\leq \ln(x+1)\leq x$$

II) On se propose d'étudier la suite (u_n) de nombres réels définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$\begin{cases} u_1=\frac{3}{2} \\ u_{n+1}=\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)u_n,\ n\in\mathbb{N}^* \end{cases}$$

1) Montrer par récurrence que $u_n>0$ pour tout entier naturel $n\geq 1$.

2) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n\geq 1$:

$$\ln(u_n)=\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^3}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$$

3) On pose $S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+..+\frac{1}{2^n}$ et

$T_n=\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+..+\frac{1}{4^n}$

à l'aide de la première partie, montrer que :

$$S_n-\frac{1}{2}T_n\leq \ln(u_n)\leq S_n$$

4) Calculer S_n et T_n en fonction de n. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}T_n$

5) a) Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

b) En déduire que (u_n) est convergent. Soit ℓ sa limite.

Montrer que $\frac{5}{6}\leq \ln(\ell)\leq 1$ et en déduire un encadrement de ℓ.

Exercice 50

On considère une fonction f définie sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ par $f(x)=-x^2+ax-ln(2x+b)$

où a et b sont deux réels.

La courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ passe par l'origine et admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse $\frac{1}{2}$

1)a)Donner $f(0)$ et $f'\left(\frac{1}{2}\right)$

b) Calculer $f'(x)$ en fonction de a et b

c) Déterminer a et b

d) Vérifier que $f'(0)=0$ interpréter le résultat .

2) Dans la suite de l'exercice on vous admet que $f(x)=-x^2+2x-\ln(2x+1)$

a)Calculer $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^+}f(x)$ interpréter le résultat .

b)Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

(on pourra remarquer que $f(x)=-x(x-2)-ln(2x+1)$)

c)Montrer que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty,$$ interpréter le résultat

d) Dresser le tableau de variation de f

3)Tracer (C)