CHAPITRE 8

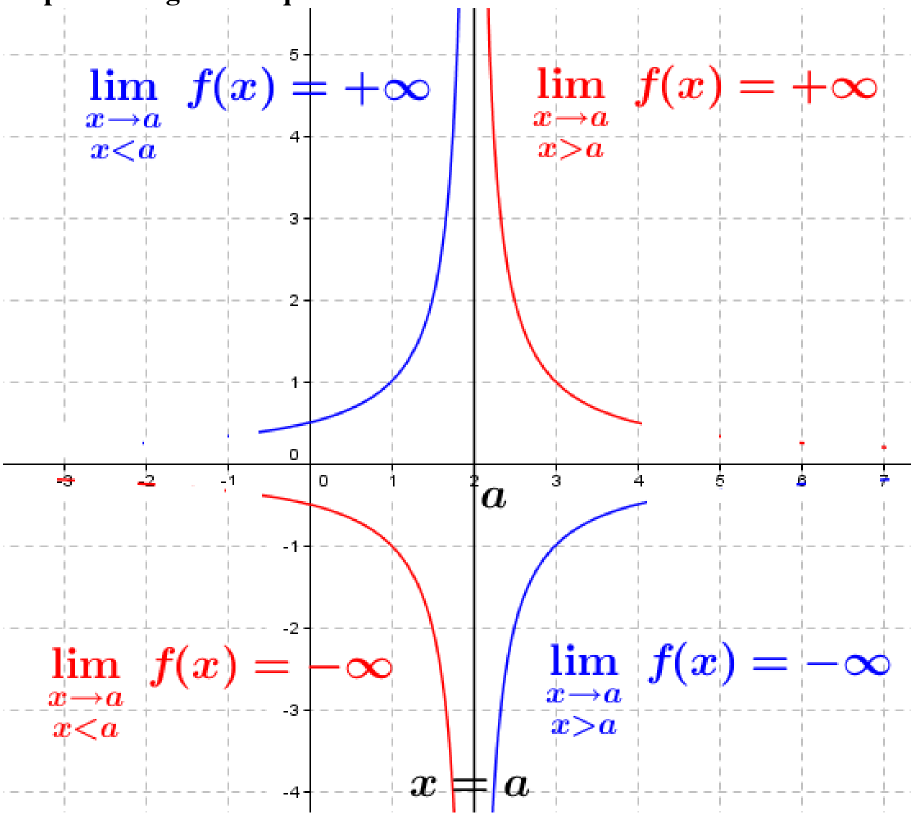
L'ÉTUDE DES FONCTIONS

8.1 L'asymptote verticale et l'asymptote horizontale :

8.1.1 L'asymptote verticale :

Proprieté 8.1
Si : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \pm\infty$
alors on dit que la droite d'équation : $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe de f (C_f).

L'interprétation géométrique :



Remarque 8.1

- Dons toute la suite on note la courbe de la fonction f par : (C_f)
- La courbe de la fonction f admet une asymptote verticale d'équation : $x = a$ ça veut dire que la courbe de f sa proche de la droite : $x = a$ quand x tend vers a. (Voir la courbe).

Exemple 8.1
Calculons les limites : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} \dfrac{1}{x-1}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} \dfrac{1}{x-1}$ et déterminons l'interprétation géométrique des résultats.

on a : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} x-1 = 0^+$ donc : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} \dfrac{1}{x-1} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} x-1 = 0^-$ donc : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} \dfrac{1}{x-1} = -\infty$

l'interprétation géométrique :

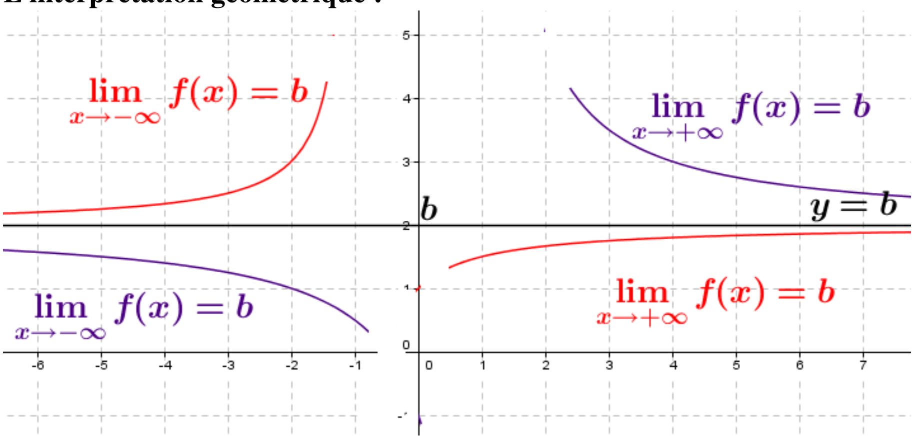
La droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale à la courbe (C_f) ; avec : $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

8.1.2 L'asymptote horizontale :

Proprieté 8.2

- si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$: alors la droite d'équation : $y = b$ est une asymptote horizontale à la courbe de f (C_f) au voisinage de : $+\infty$
- si : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$: alors la droite d'équation : $y = b$ est une asymptote horizontale à la courbe de f (C_f) au voisinage de : $-\infty$

L'interprétation géométrique :



Exemple 8.2
Calculons les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{x+2}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{x+2}$ et déterminons l'interprétation géométrique des résultats :

on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{x+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{x} = 2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{x+2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{x} = 2$

on pose : $f(x) = \dfrac{2x}{x+2}$ on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$

alors la courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation : $y = 2$ au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$

Exercice 54
Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-2}$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.
2) Calculer les limites : $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
   et donner l'interprétation géométrique des résultats trouver :

Solution :

1) $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$ (la fonction f est définie si : $x-2 \neq 0$) c'est à dire : $x \neq 2$, donc : $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$.
2) On a : $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} x-2 = 0^+$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} 3x+1 = 7$ donc : $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} \dfrac{3x+1}{x-2} ='' \left(\dfrac{7}{0^+}\right)'' = +\infty$

   et on a : $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} x-2 = 0^-$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} 3x+1 = 7$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} \dfrac{3x+1}{x-2} ='' \left(\dfrac{7}{0^-}\right)'' = -\infty$

L'interprétation géométrique : la courbe de la fonction f admet une asymptote verticale d'équation : $x=2$.
on a aussi : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x+1}{x-2} = \dfrac{3}{1} = 3$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x+1}{x-2} = \dfrac{3}{1} = 3$
L'interprétation géométrique : La courbe de la fonction f admet une asymptote horizontale : $y=3$ au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$.

8.2 Étude de la fonction de seconde degré : $x \mapsto f : ax^2+bx+c$

Exemple : examen régional 2019

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^2 - 6x + 5$

1) Montrer que : $D_f =]-\infty;+\infty[$.
2) Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
3) Soit f' la fonction dérivée de la fonction f : montrer que : pour tout x de $\mathbb{R}$: $f'(x) = 2(x-3)$ et donner le tableau des variations de la fonction f.
4) Montrer que la fonction f admet une valeur minimale à déterminera
5) a) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$: $f(x) = (x-1)(x-5)$, en déduire les points d'intersections de (C_f) avec l'axe des abscisses.
   b) Déterminer le point d'intersection de (C_f) avec l'axe des ordonnées.
6) Déterminer l'équation de (Δ) la tangente à la courbe (C_f) en le point d'abscisse 0.
7) Construire la courbe (C_f) et la droite (Δ) dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

Solution :

1) On a f est une fonction polynôme alors : $D_f = \mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$
2) on a :
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2-6x+5 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2-6x+5 = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$
3) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme et pour tout x de $\mathbb{R}$:
$$f'(x) = (x^2-6x+5)' = (x^2)' - (6x)' + (5)' = 2x - 6 = 2(x-3)$$

Les variations de f dépend au signe de $f'(x)$ on a :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$$

حل المعادلة f'(x) = 0 هو x=3

$$f(3) = 3^2 - 6\times 3 + 5 = -4$$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x) = 2(x-3)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

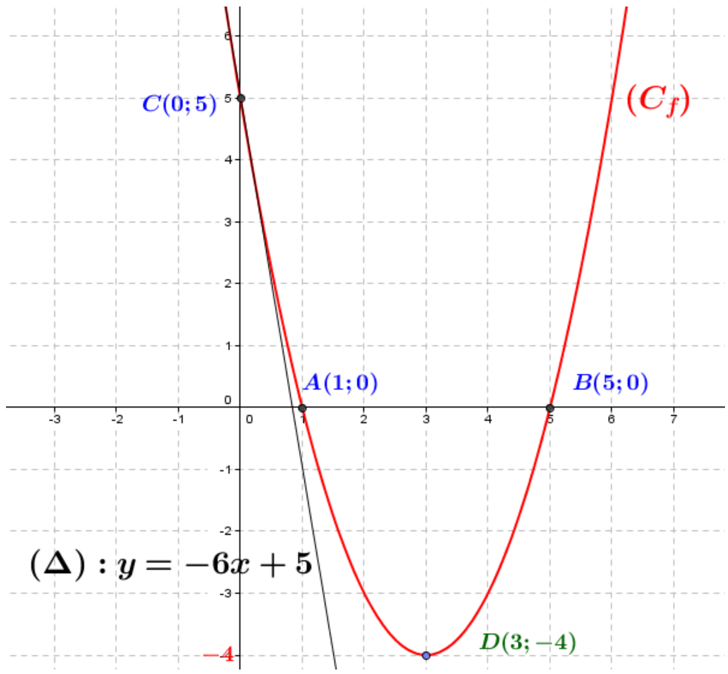
4) D'après le tableau des variations de la fonction f on a :
$f(3) = -4$ est la valeur minimale de la fonction f sur $\mathbb{R}$ c'est à dire pour tout x de $\mathbb{R}$: $f(x) \geq -4$
5) a) On a : $(x-1)(x-5) = x^2 - x - 5x + 5 = x^2 - 6x + 5 = f(x)$ (le développement suffisant)
   Pour déterminer les points d'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses il faut résoudre l'équation : $f(x) = 0$:
   c'est à dire : $(x-1)(x-5) = 0$ c-a-d : $x-1=0$ ou $x-5=0$ c-a-d : $x=1$ ou $x=5$
   donc les points d'intersections de (C_f) avec l'axe des abscisses est : $A(1;0)$ et $B(5;0)$

b) Pour déterminer le point d'intersection de (C_f) avec l'axe des ordonnés : il faut calculer : $f(0)$, on a : $f(0) = 0^2 - 6 \times 0 + 5 = 5$
donc le point d'intersection de (C_f) avec l'axe des ordonnés est : $C(0;5)$

6) L'équation de la tangente (Δ) à la courbe (C_f) en le point d'abscisse 0 est : $(\Delta) : y = f'(0)(x-0) + f(0)$
on a : $f(0) = 5$ et $f'(0) = 2(0-3) = -6$ (car : $f'(x) = 2(x-3)$) et donc : $(\Delta) : y = -6x + 5$

7) La courbe (C_f) et la tangente (Δ) :

لإ نشاء منحنى الدالة f:
ننشئ النقط الاساسية:
نقط التقاطع مع محور الافاصيل
نقطة التقاطع مع محور الاراتيب
ثم تمثيل نقط أخرى
لتمثيل المستقيم $(\Delta) : y = -6x + 5$
نمثل نقطتين
من نقطتين يمر مستقيم



Pour construire la courbe de f il faut représenter les points particuliers :

- les points d'intersections avec l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées, puis autres points
- Pour construire la droite $(\Delta) : y = -6x + 5$, il suffit de construire deux points.

Exercice : examen régional 2017

Le plan est menu d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^2 - 4x + 3$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.
2) Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
3) Soit f' la fonction dérivée de la fonction f : montrer que : pour tout x de $\mathbb{R}$: $f'(x) = 2(x-3)$
4) Étudier le signe de $f'(x)$ et donner le tableau des variations de la fonction f.
5) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$: $f(x) = (x-1)(x-5)$,
6) Déterminer les points d'intersections de (C_f) avec l'axe des abscisses. et avec l'axe des ordonnées.
7) Déterminer l'équation de (Δ) la tangente à la courbe (C_f) en le point d'abscisse 3.
8) Construire la courbe (C_f) et la droite (Δ) dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

Exercice : examen régional 2016

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^2 + 4x$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Calculer : $f(2)$ et $f(4)$
2) Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

3) Soit f' la fonction dérivée de la fonction f : montrer que : pour tout x de $\mathbb{R}$: $f'(x) = -2(x-2)$
4) Étudier le signe de $f'(x)$ et donner le tableau des variations de la fonction f.
5) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$: $f(x) = -x(x-4)$,
6) Déterminer les points d'intersections de (C_f) avec l'axe des abscisses. et avec l'axe des ordonnées.
7) Déterminer l'équation de (Δ) la tangente à la courbe (C_f) en le point d'abscisse 0.
8) Construire la courbe (C_f) et la droite (Δ) dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

8.3 Étude de la fonction : $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$

1) Exemple :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ et (C_f) sa courbe représentative.

1) Montrer que : $D_f =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$.
2) Calculer les limites : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)$. En déduire les équations des asymptote à (C_f).
3) Montrer que : $f'(x) = \dfrac{-3}{(x-1)^2}$ pour tout $x \neq 1$, puis donner le tableau des variations de la fonction f.
4) Déterminer l'équation de la tangente $(\triangle)$ à (C_f) en le point d'abscisse 0.
5) Construire la courbe (C_f) et les asymptotes et la tangente $(\triangle)$ dans le même repère $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$.

Solution :

1) La fonction f est définie si : $x-1 \neq 0$ c'est à dire : $x \neq 1$
donc : $D_f =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$.
2) On a : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} x-1 = 0^+$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} 2x+1 = 3 > 0$ donc : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} \dfrac{2x+1}{x-1} = +\infty$
et on a : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} x-1 = 0^-$ avec $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} 2x+1 = 3 > 0$ donc : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} \dfrac{2x+1}{x-1} = -\infty$
L'interprétation géométrique : La droite d'équation $x = 1$ est une asymptote à (C_f) la courbe de f
et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+1}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{x} = 2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x+1}{x-2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{x} = 2$
L'interprétation géométrique : la courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 2$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$
3) Montrons que : $f'(x) = \dfrac{-3}{(x-1)^2}$. On a la fonction f est dérivable sur D_f et :

$$\begin{aligned} f'(x) = \left(\frac{2x+1}{x-1}\right)' &= \frac{(2x+1)'(x-1)-(2x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} \\ &= \frac{2(x-1)-(2x+1)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{2x-2-2x-1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{-3}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

On a pour tout $x \neq 1$: $(x-1)^2 > 0$ et $-3 < 0$ donc : $f'(x) < 0$ alors la fonction f est décroissante sur chaque intervalle de D_f.

$\rightarrow$ La fonction f n'est pas définie en 1 : il faut noté dans le tableau des variations.

Le tableau des variations de f est :

لا تنسى أيضا أن:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} f(x) = -\infty$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		$-$	||	$-$	
تغيرات الدالة f	2	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	2

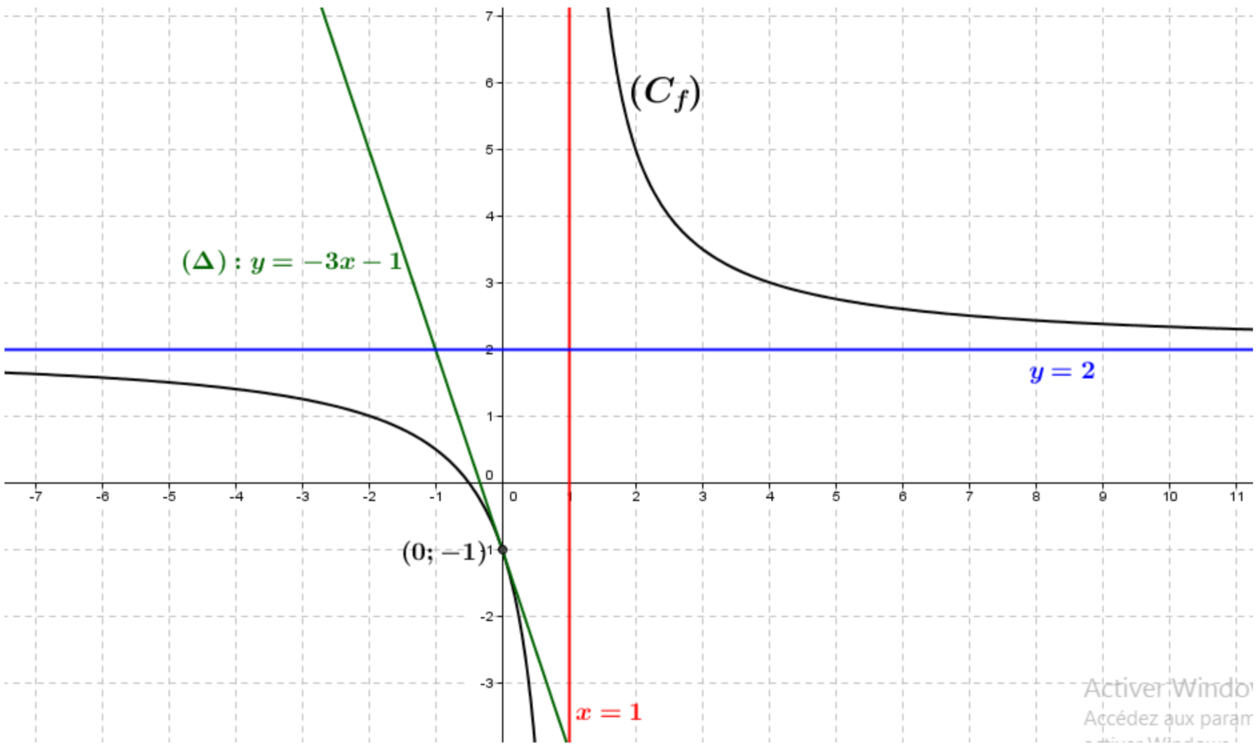
هذا الرمز يعني أن الدالة f غير معرفة في تلك النقطة

4) L'équation de la tangente à la courbe de f en le point d'abscisse 0 est : $(\Delta) : y = f'(0)(x-0)+f(0)$

on a : $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ donc $f(0) = \dfrac{1}{-1} = -1$

et $f'(x) = \dfrac{-3}{(x-1)^2}$ donc $f'(0) = \dfrac{-3}{(-1)^2} = \dfrac{-3}{1} = -3$ et donc : $(\Delta) : y = -3x-1$

5) La courbe de f et les asymptotes et la tangente :



2) Exercice : examen régional 2018

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$ et (C_f) sa courbe représentative

1) Montrer que : $D_f =]-\infty;+\infty[$
2) Calculer les limites : Calculer les limites : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} f(x)$. En déduire les équations des asymptotes à (C_f).
3) Montrer que : $f'(x) = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$ pour tout $x \neq 1$, puis donner le tableau des variations de la fonction f.

4) Déterminer l'équation de la tangente $(\triangle)$ à (C_f) en le point d'abscisse 0.

5) Construire la courbe (C_f) et les asymptotes et la tangente $(\triangle)$ dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

8.4 Étude de la fonction polynôme degré 3 : $x \mapsto f : ax^3+bx^2+cx+d$

Exemple : Régional 2008

Soit f la fonction définie par : $f(x)=x^3+3x^2$ et (C_f) sa courbe représentative

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.

2) Calculer les limites : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)$

3) Calculer : $f(-3)$ et $f(-2)$ et $f(0)$.

4) a) Montrer que : $f'(x)=3x(x+2)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

   b) Donner le tableau des variations de la fonction f

5) Construire la courbe (C_f)

6) Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x)\geq 0$.

Solution :

1) f est une fonction polynôme alors elle est définie sur $\mathbb{R}$, c'est à dire : $D_f=\mathbb{R}=]-\infty;+\infty[$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

3) $f(-3)=(-3)^3+3\times(-3)^2=-27+27=0$ et $f(-2)=(-2)^3+3\times(-2)^2=-8+12=4$ et $f(0)=(0)^3+3\times(0)^2=0$

4) a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme et pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x)=(x^3+3x^2)' &= (x^3)'+3(x^2)' \\ &= 3x^2 3\times 2x \\ &= 3x(x+2) \end{aligned}$$

   b) Les variations de f dépend au signe de : $f'(x)=3x(x+2)$

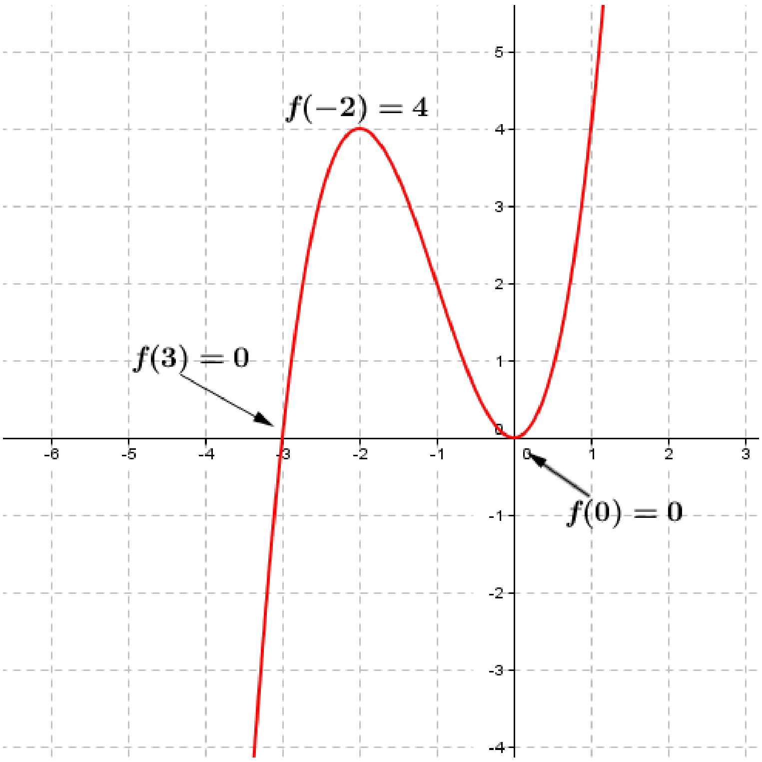
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$$

$f(-2)=4$ و $f(0)=0$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
إشارة $3x$		$-$		$-$	0	$+$	
إشارة $x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
إشارة $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
تغيرات الدالة f	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

5) La construction de la courbe de f :



6) Les solutions graphique de l'inéquation $f(x) \geq 0$: est les abscisses des points où (C_f) est au dessus de l'axe des abscisses donc : $S = [-3; +\infty[$.

2) Exercice :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ et (C_f) sa courbe représentative

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.
2) Calculer les limites : $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x)$
3) Montrer que : $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
4) Étudier le signe de $f'(x)$ et donner le tableau des variations de la fonction f
5) Montrer que : $f(x) = (x+1)^2(x+1)$ pour tout x de $\mathbb{R}$
6) Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec les axes du repère.
7) Construire la courbe (C_f)

Solution :

1) f est une fonction polynôme donc : $D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$
2) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$
3) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme et pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) = (x^3 + x^2 - x - 1)' &= (x^3)' + (x^2)' - x' - 1' \\ &= 3x^2 + 2x - 1 \end{aligned}$$

4) Les variations de f dépend au signe de : $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$; pour déterminer le signe de $f'(x)$ il faut résoudre l'équation : $3x^2 + 2x - 1 = 0$; on a : $\Delta = 2^2 - 4 \times 3 \times -1 = 4 + 12 = 16 > 0$
donc les solutions de l'équation sont :
$x_1 = \dfrac{-2 - \sqrt{16}}{2 \times 3} = \dfrac{-2-4}{6} = -1$ et $x_2 = \dfrac{-2 + \sqrt{16}}{2 \times 3} = \dfrac{-2+4}{6} = \dfrac{1}{3}$
• Le tableau de signe de $f'(x)$:

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$3x^2+2x-1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

• le tableau des variations de f :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$f(-1)=0 \quad و \quad f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{-10}{9}$$

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
تغيرات f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{10}{9}$	$\nearrow$	$+\infty$

5) on a pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}(x+1)^2(x-1) &= (x^2+2x+1)(x-1)\\ &= x^3-x^2+2x^2-2x+x-1\\ &= x^3+x^2-x-1 = f(x)\end{aligned}$$

6) Pour déterminer les points d'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisse il faut résoudre l'équation : $f(x)=0$, on a :

$$\begin{aligned}f(x)=0 &\Leftrightarrow (x+1)^2(x-1)=0\\ &\Leftrightarrow (x+1)^2=0 \quad ou \quad x-1=0\\ &\Leftrightarrow x+1=0 \quad ou \quad x-1=0\\ &\Leftrightarrow x=-1 \quad ou \quad x=1\end{aligned}$$

et donc les points d'intersections de (C_f) avec l'axe des abscisses sont : $A(-1;0)$ et $B(1;0)$
• Pour déterminer le point d'intersection de (C_f) avec l'axe des ordonnés il faut calculer : $f(0)$, on a : $f(0)=-1$ donc le point d'intersection est : $C(0;-1)$

7) la courbe de f :