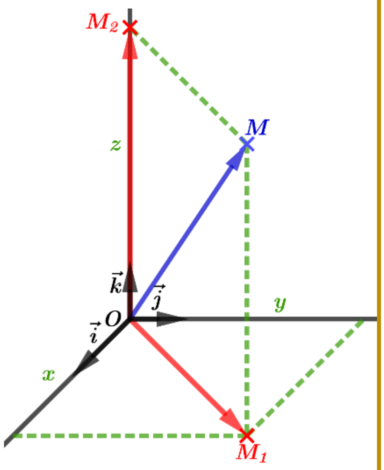
Etude analytique de l'espace

Remarques

I. Coordonnées d'un point dans un repère -Coordonnées d'un vecteur dans une base :

O, I, J et K sont quatre points non coplanaires.
On pose $\overrightarrow{OI} = \vec{\imath}$, $\overrightarrow{OJ} = \vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{OK} = \vec{k}$.
On a $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$. Comme $\overrightarrow{OM_1} = x\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{OM_2} = z\,\vec{k}$, alors $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$.



- Le triplet $(\vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$ est appelé une ***base*** de l'espace.
- Le quadruplet $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$est appelé un ***repère*** de l'espace.
- Le triplet $(x; y; z)$ est appelé ***coordonnées*** du point M dans le repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$ et on écrit $M(x; y; z)$.(x, y et z sont appelés respectivement l'***abscisse***, l'***ordonnée*** et la ***côte*** du point M).
- Le triplet $(x; y; z)$ est appelé triplet de ***coordonnées*** du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$ et on note $\overrightarrow{OM}(x; y; z)$.

Propriété :

Soient $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$deux vecteurs de l'espace muni d'une base $(\vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$ et λ un réel.
- ✓ $\vec{u} = \vec{v}$ si et seulement si $x = x'$,$y = y'$ et $z = z'$.
- ✓ $\vec{u} + \vec{v}(x + x'; y + y'; z + z')$.
- ✓ $\lambda\vec{u}(\lambda x; \lambda y; \lambda z)$.

Soient $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$deux points de l'espace muni d'un repère$(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$et I le milieu du segment $[AB]$.
- ✓ Le triplet de coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ est $(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.
- ✓ Le triplet de coordonnées du point Iest $\left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}; \frac{z_A+z_B}{2}\right)$.

Application ① :

On considère dans l'espace rapporté au repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$ le point $M(1; -2; 3)$ et les vecteurs $\overrightarrow{OK} = 3\vec{k}$ et $\overrightarrow{OM'} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$ et A est le milieu des segment $[KM]$.

1. Déterminer les coordonnées des points O, K, M' et A.
2. Donner les coordonnées du vecteur $-2\overrightarrow{KM}$.
3. Montrer $OKMM'$ est un parallélogramme.

II. Déterminant de trois vecteurs :

Dans toute la suite, l'espace est rapporté à un repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; k)$.

1. Condition analytique de colinéarité de deux vecteurs :

Propriété :

Soient $\vec{u}(a; b; c)$ et $\vec{v}(a'; b'; c')$ deux vecteurs non nuls.
Les vecteurs $\vec{u}$et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un nombre réel k tel que : $a' = ka$ et $b' = kb$ et $c' = kc$.

Remarque :

Si toutes les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas nuls, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires équivaut à $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$.

Exemple :

Les vecteurs $\vec{u}(-2; 8; 6)$ et $\vec{v}\left(\frac{1}{4}; -1; -\frac{3}{4}\right)$ sont colinéaires du fait que $\frac{-2}{\frac{1}{4}} = \frac{8}{-1} = \frac{6}{-\frac{3}{4}}$

Propriété :

Soient $\vec{u}(a; b; c)$ et $\vec{v}(a'; b'; c')$ deux vecteurs de l'espace.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = 0$ et $\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} = 0$ et $\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} = 0$.

Pr. LATRACH ABDELKBIR

Conséquence :

Les vecteurs $\vec{u}(a;b;c)$ et $\vec{v}(a';b';c')$ ne sont pas colinéaires si et seulement si $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \neq 0$ ou $\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} \neq 0$ ou $\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} \neq 0$.

Exemple :

- Les vecteurs $\vec{u}(0;-3;6)$ et $\vec{v}(0;1;-2)$ sont colinéaires. En effet $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ et $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 0$ et $\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 0$.
- Les vecteurs $\vec{u}(1;1;2)$ et $\vec{v}(1;0;1)$ ne sont pas colinéaires du fait que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$.

Application ② :

1. Etudier la colinéarité des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans les cas suivants :
   a. $\vec{u}\left(2;\sqrt{2};\sqrt{8}\right)$ et $\vec{v}\left(\sqrt{2}\,;1\,;2\right)$.
   b. $\vec{u} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + 2\,\vec{k}$ et $\vec{v} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 3\,\vec{k}$.
2. Etudier l'alignement des points $A(1;2;3), B(-1;3;2)$ et $C(3;-2;1)$.

2. Vecteurs coplanaires :

Définition :

Soient $\vec{u}(a;b;c)$, $\vec{v}(a';b';c')$ et $\vec{w}(a";b";c")$ trois vecteurs de l'espace.
Le nombre réel $a(b'c"-c'b")-b(a'c"-c'a")+c(a'b"-b'a")$est appelé déterminant des vecteurs $\vec{u}$,$\vec{v}$ et $\vec{w}$,et on le note par $det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$.
On écrit: $det(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) = \begin{vmatrix} a & a' & a" \\ b & b' & b" \\ c & c' & c" \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c" \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a' & a'' \\ c' & c" \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a' & a'' \\ b' & b" \end{vmatrix}$.

Exemple :

Calculons $det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$ sachant que $\vec{u}\,(-1;2;1)$, $\vec{v}\,(1;-3;2)$ et $\vec{w}\,(-1;1;4)$.

Propriété :

- Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.
$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si $det(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) = 0$.
- Soient A, B, Cet D quatre points de l'espace.
A, B, Cet D sont coplanaires si et seulement si $det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}\right) = 0$.

Application ③ :

1. Déterminer si les vecteurs $\vec{u}\,(1;2;3)$, $\vec{v}\,(-2;1;-3)$ et $\vec{w}\,(1;2;-1)$ sont coplanaires.
2. Soient $A(2;3;4), B(3;4;5), C(4;2;5)$et $D(3;4;4)$ quatre points de l'espace.
Montrer que les points A, B, Cet Dsont coplanaires.

III. Représentation paramétrique d'une droite :

1. Définition :

Définition

Soient $A(x_A;y_A;z_A)$ un point de l'espace et $\vec{u}(a;b;c)$ un vecteur non nul.
Le système $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$ est appelé représentation paramétrique de la droite $D(A;\vec{u})$ passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Application ④ :

1. Donner dans chaque cas une représentation paramétrique de la droite (D) :
a. $(D) = D(A;\vec{u})$ où $A(1;-1;1)$ et $\vec{u}(1;3;-2)$.
b. (D) est la droite passant par les points $A(1;2;-1)$ et $B(-1;1;2)$.
c. (D) est la droite passant par $A(-2;1;3)$ et parallèle à la droite (Δ) telle que :
(Δ): $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 + 2t \\ z = 5 - 3t \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$.

Pr. LATRACH ABDELKBIR

2. **a.** Donner Trois points de la droite $(L):\begin{cases}x=t\\y=3-t\\z=1+2t\end{cases};t\in\mathbb{R}$.

b. Est que le point $M(3;0;1)$ appartient à (L) ?

2. Positions relatives de deux droites :

Propriété :

Soient $(D)=D(A;\vec{u})$ et $(\Delta)=D(B;\vec{v})$ deux droites de l'espace.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et $B\in(D)$ou $A\in(\Delta)$, alors (D) et (Δ) sont confondues.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et $A\notin(\Delta)$ ou $B\notin(D)$, alors (D) et (Δ) sont strictement parallèles.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires et $det(\overrightarrow{AB};\vec{u};\vec{v})=0$, alors (D) et (Δ) sont sécantes en un point.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires et $det(\overrightarrow{AB};\vec{u};\vec{v})\neq 0$, alors (D) et (Δ) ne sont pas coplanaires.

Application ⑤ :

Etudier la position relative des droites (D)et (Δ) dans chacun des cas suivants :

1. $D\left(A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\right)$et $D\left(B\begin{pmatrix}0\\-4\\-3\end{pmatrix};\vec{v}\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}\right)$.

2. $(D):\begin{cases}x=1+t\\y=1-t\\z=1+t\end{cases};t\in\mathbb{R}$ et $(\Delta):\begin{cases}x=3+t'\\y=-1+2t'\\z=3-t'\end{cases};t'\in\mathbb{R}$.

3. $(D):\begin{cases}x=1-t\\y=1+2t\\z=-2+t\end{cases};t\in\mathbb{R}$ et $(\Delta):\begin{cases}x=1-t'\\y=1+t'\\z=6+t'\end{cases};t'\in\mathbb{R}$.

IV. Représentation paramétrique - Equation cartésienne d'un plan :

1. Représentation paramétrique d'un plan :

Soient $A(x_A;y_A;z_A)$ un point de l'espace, $\vec{u}(a;b;c)$ et $\vec{v}(a';b';c')$deux vecteurs non colinéaires.

Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace et soit $(P)=P(A;\vec{u};\vec{v})$.

On a : $M\in(P)\Leftrightarrow(\exists t\ et\ t'\in\mathbb{R}):\overrightarrow{AM}=t\,\vec{u}+t'\,\vec{v}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=x_A+at+a't'\\y=y_A+bt+b't'\\z=z_A+ct+c't'\end{cases};(t;t')\in\mathbb{R}^2.$$

Ce système est appelé une représentation paramétrique du plan $P(A;\vec{u};\vec{v})$.

Application ⑥ :

Donner une représentation paramétrique du plan (P) dans chacun des cas suivants :

1. (P) est le plan passant par $A(1;2;3)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}(1;-1;2)$ et $\vec{v}(-3;2;1)$.

2. (P) est le plan passant par les points $A(1;2;3)$, $B(-1;0;1)$et $C(3;2;-1)$

2. Equation cartésienne d'un plan :

Définition :

Soit A un point de l'espace, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires.
L'équation cartésienne du plan (P) passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ s'écrit sous la forme $ax+by+cz+d=0$ où a,b,c et d sont des réels tels que $(a;b;c)\neq(0;0;0)$.

Remarque :

L'ensemble des points Mde l'espace qui vérifient $det(\overrightarrow{AM};\vec{u};\vec{v})=0$ est le plan passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Application ⑦ :

Donner une équation cartésienne du plan (P) dans chacun des cas suivants :

1.(P) est le plan passant par $A(1;2;3)$et de vecteurs directeurs $\vec{u}(1;-1;2)$ et $\vec{v}(-3;2;1)$.

2. (P) est le plan passant par les points $A(1;2;3)$, $B(-1;0;1)$ et $C(3;2;-1)$.

3. Positions relatives de deux plans :

Propriété :

Soient $(P)=P(A;\vec{u};\vec{v})$ et $(Q)=P(B;\vec{u'};\vec{v'})$ deux plans de l'espace.

- Si $det(\vec{u};\vec{v};\vec{u'})=0$ et $det(\vec{u};\vec{v};\vec{v'})=0$ alors (P) et (Q) sont confondus ou strictement parallèles.
- $det(\vec{u};\vec{v};\vec{u'})\neq 0$ ou $det(\vec{u};\vec{v};\vec{v'})\neq 0$ alors (P) et (Q) se coupent suivant une droite.

Remarque :

Soient $(P): ax+by+cz+d=0$ et $(Q): a'x+b'y+c'z+d'=0$ deux plans de l'espace.

- Les plans (P) et (Q) se coupent suivant une droite si et seulement si $ab'-ba'\neq 0$ ou $ac'-ca'\neq 0$ ou $bc'-cb'\neq 0$.
- Les plans (P) et (Q) sont confondus si et seulement s'il existe un réel k non nul tel que : $a'=ka$ et $b'=kb$ et $c'=kc$ et $d'=kd$.
- Les plans (P) et (Q) sont strictement parallèles si et seulement s'il existe un réel k non nul tel que : $a'=ka$ et $b'=kb$ et $c'=kc$ et $d'\neq kd$.

Application ⑧ :

Etudier la position relative des plans (P) et (Q) dans les cas suivants :

1. $(P): 2x+3y-z+1=0$ et $(Q): -x+2y+z-2=0$.

2. $(P): 2x-y+z-1=0$ et $(Q): 6x-3y+3z-3=0$.

V. Deux équations cartésiennes d'une droite :

1. Equations cartésiennes d'une droite dans l'espace :

Définition et propriété :

Soit (D) une droite passant par le point $A(x_A;y_A;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a;b;c)$.

- Si $a\neq 0, b\neq 0$ et $c\neq 0$, alors le système $\frac{x-x_A}{a}=\frac{y-y_A}{b}=\frac{z-z_A}{c}$ est appelé ***équations cartésiennes*** de la droite (D).
- Si l'un des nombres (un seul) est nul, (par exemple $a=0$ et $b\neq 0$ et $c\neq 0$) alors le système $\begin{cases} x=x_A \\ \frac{y-y_A}{b}=\frac{z-z_A}{c} \end{cases}$ est appelé ***équations cartésiennes*** de la droite (D).
- Si deux de ces nombres sont nuls (par exemple $a=0$ et $b=0$ et $c\neq 0$) alors le système $\begin{cases} x=x_A \\ y=y_A \end{cases}$ est appelé ***équations cartésiennes*** de la droite (D).

Application ⑨ :

1. Déterminer deux équations cartésiennes de la droite (D) passant par les points $A(1;-2;3)$ et $B(-2;-1;4)$.

2. Déterminer deux équations cartésiennes de la droite (D'): $\begin{cases} x=1+t \\ y=1 \\ z=-3t \end{cases}$; $t\in\mathbb{R}$.

3. Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) définie par les équations $\frac{x-2}{3}=y+4=\frac{1-z}{2}$.

2. Positions relatives d'une droite et d'un plan :

Propriété :

Soit une droite $(D)=D(A;\vec{w})$ et un plan $(P)=P(B;\vec{u};\vec{v})$.

- Si $det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})=0$ et $A\in(P)$, alors $(D)\subset(P)$.
- Si $det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})=0$ et $A\notin(P)$, alors (D) est strictement parallèle à (P).
- Si $det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})\neq 0$, alors (D) perce le plan (P).

Application ⑩ :

Etudier la position relative du plan (P) et la droite (D) dans chacun des cas suivants :

1. $(P): x+y-z+1=0$ et $(D): \begin{cases} x=1+t \\ y=1-t \\ z=1+2t \end{cases}$; $t\in\mathbb{R}$

2. $(P): 5x + 2y - 3z - 10 = 0$ et $(D): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = -2 + 4t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$

Exercice de synthèse :

On considère les points les points $A(2; 1; -1)$, $B(1; 0; 0)$, $C(-1; 1; 0)$ et $E(0; 2; -1)$.

1. a- Etudier la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   b- Donner une équation cartésienne du plan (ABC).
   c- Vérifier que les points A, B, C et E sont coplanaires.

2. Soit (Δ) la droite passant par O et de vecteur directeur $\vec{u} = \frac{1}{3}\vec{\imath} + \frac{1}{6}\vec{\jmath} + \frac{1}{9}\vec{k}$.
   a- Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ).
   b- Donner deux équations cartésiennes de la droite (Δ).
   c- Montrer que la droite (Δ) perce le plan (ABC) puis déterminer le triplet des coordonnées de leur point d'intersection Ω.

3. On considère le plan (P) d'équation $x + y + 2z = 0$.
   a- Montrer que (ABC) et (P) se coupent suivant une droite (Δ').
   b- Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ').

4. Etudier la position relative des deux droites (Δ) et (Δ').