Nombres complexes

Remarques

Pr. LATRACH ABDELKBIR

I. L'ensemble des nombres complexes

1. L'ensemble $\mathbb{C}$ - L'écriture algébrique

Théorème :

Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$ appelé l'ensemble des nombres complexes, il contient l'ensemble $\mathbb{R}$ et il vérifie ce qui suit :
- L'ensemble $\mathbb{C}$ contient un élément irréel i qui vérifie $i^2 = -1$.
- Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit de façon unique sous la forme $z = a + ib$ où a *et* b sont deux nombres réels.

Vocabulaires :

- L'écriture $z = a + ib$ s'appelle ***l'écriture algébrique*** du nombre complexe z .
- Le nombre a est appelé ***partie réelle*** du nombre z qu'on note par $\mathcal{Re}(z)$.
- Le nombre b est appelé ***partie imaginaire*** du nombre z qu'on note $\mathcal{Im}(z)$.
- Tout nombre qui s'écrit sous la forme ib est dit nombre ***imaginaire pur***, et l'ensemble des nombres imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$.

Exemples :

- $z_1 = 5 + 7i$, alors $\mathcal{Re}(z_1) = 2$ et $\mathcal{Im}(z_1) = 7$.
- $z_2 = 1 - i$, alors $\mathcal{Re}(z_2) = 1$ et $\mathcal{Im}(z_2) = -1$.
- $z_3 = 5$, alors $\mathcal{Re}(z_3) = 5$ et $\mathcal{Im}(z_3) = 0$.
- $z_4 = 3i$, alors $\mathcal{Re}(z_4) = 0$ et $\mathcal{Im}(z_4) = 3$ (on a z_4 est un nombre imaginaire pur)
- $z_5 = 1 - \sqrt{5} + \sqrt{2} - \frac{\pi}{2} + 4i$, alors $\mathcal{Re}(z_5) = 1 - \sqrt{5} + \sqrt{2} - \frac{\pi}{2}$ et $\mathcal{Im}(z_5) = 4$.

Application ① :

Ecrire sous la forme algébrique les nombres suivants :
$z_1 = 4i - (2 + 5i)$ *et* $z_2 = 3(1 + i) + i(i + 1)$.

Propriété : Egalité de deux nombres complexes

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes on a :
- $z = z' \Leftrightarrow a = a'$ *et* $b = b'$.
- $z = 0 \Leftrightarrow a = 0$ *et* $b = 0$.

Application ② :

Déterminer la valeur des nombres réels a *et* b dans les cas suivants :
- $(1 + 2i)a + b = 5 - 4i$
- $(2 + i)a + (3 - 2i)b = 1 + 4i$

2. Opérations dans $\mathbb{C}$

Les opérations de la somme et le produit de $\mathbb{R}$ se prolongent en $\mathbb{C}$ et elles ont les mêmes propriétés.

Propriété :

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$. On a :
- $z + z' = (a + ib) + (a' + ib') = a + b + i(b + b')$.
- $z \times z' = (a + ib) \times (a' + ib') = aa' - bb' + i(ab' + a'b)$.
- $\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)\times(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$ $(z \neq 0)$

Application ③:

Ecrire sous la forme algébrique les nombres suivants :
- $z_1 = (2 + 3i)(-1 + i)$
- $z_2 = (1 + \sqrt{3}i)(1 - \sqrt{3}i)$
- $z_3 = \frac{1}{2+3i} + (2 + i)^2$
- $z_4 = -\frac{1}{4i}$
- $z_5 = \frac{1+i}{1-i}$
- $z_6 = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{14}$

Remarque :

Pour tout nombre complexe z, on a : $z \in IR \Leftrightarrow Im(z) = 0$ et $z \in iIR \Leftrightarrow Re(z) = 0$.

Exercice ①:

1. Soit $z = (x + i)[(x + 5) - i(x - 7)]$ tel que x est réel.

Déterminer le réel x dans chacun des cas :

a. $z \in \mathbb{R}$.

b. $z \in i\mathbb{R}$.

c. $\mathcal{Im}(z) = 2\mathcal{Re}(z)$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes $(E_1) : iZ - 1 = Z + 3i$ et $(E_2): \frac{Z+i}{Z-i} = i$.

Exercice ②:

Soit M un point du plan complexe d'affixe $z = x + iy$, M' le point d'affixe $z' = \frac{z+1}{z-1}$.

1) Ecrire z' sous la forme algébrique.

2) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que z' est un nombre réel.

3) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que z' est un nombre imaginaire pur.

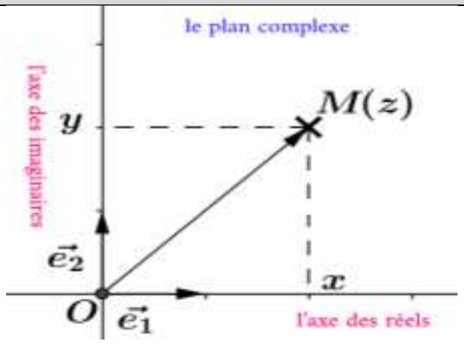
II. Représentation géométrique d'un nombre complexe

1. Définitions

Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{e_1}; \vec{e_2})$.

Définition

- Tout nombre complexe $z = x + iy$ tels que x et y deux réels associé à un unique point M, appelé ***l'image*** de z, des coordonnées (x, y) et on écrit $M(z)$.
- Tout point $M(x; y)$, le nombre complexe $z = x + iy$ s'appelle ***l'affixe du point*** M et on écrit $z = aff(M)$.
- Le vecteur $\vec{u}(x; y)$ s'appelle ***l'image vectoriel*** du nombre $z = x + iy$ et le nombre z s'appelle ***l'affixe*** du vecteur $\vec{u}$ et on écrit $z = aff(\vec{u})$.



Application ④ :

Construire dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{e_1}; \vec{e_2})$ les points $A(-1 + i)$; $B(2 - 2i)$; $C\left(\frac{1}{2}i\right)$ et $D(2 + 2i)$.

Propriété :

Soient $A(z_A)$ et $B(z_B)$ deux points du plan complexe. On a :
- $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.
- L'affixe du point I le milieu du segment $[AB]$ est $\frac{z_A+z_B}{2}$.

Démonstration :

On sait que $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$, alors

$aff(\overrightarrow{AB}) = (x_B - x_A) + i(y_B - y_A) = x_B + iy_B - (x_A + iy_A) = z_B - z_A$.

Application ⑤ :

On considère dans le plan complexe les points : $A(2i); B(1 - i)$ et $C(3)$

1) Déterminer l'affixe des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$.

2) Déterminer l'affixe du point D sachant que $ABCD$ est un parallélogramme.

3) Déterminer l'affixe du point I le centre du parallélogramme $ABCD$.

2. Colinéarité de deux points

Propriété :

Soient $A(z_A)$,$B(z_B)$et $C(z_C)$ trois points du plan complexe.
Les points A,B et C sont alignés si et seulement si $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A} \in \mathbb{R}$.

Démonstration :

Pr. LATRACH ABDELKBIR

Les points A,B et C sont alignés si et seulement il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.
Et on a : $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow z_B - z_A = k(z_C - z_A) \Leftrightarrow \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = k \in \mathbb{R}$.

Application ⑥:

On considère dans le plan complexe les points $A(4\,;-6)$,$B(-2\,;3)$ et $C\left(-1\,;\frac{3}{2}\right)$. Montrer que les points A,B et C sont alignés.

3. Points cocycliques

Propriété :

Soient $A(z_A)$,$B(z_B)$, $c(z_C)$ et $D(z_D)$ quatre points non alignés et deux à deux distincts du plan complexe.
Les points A, B , C et D sont ***cocycliques*** (appartiennent au même cercle) si et seulement si : $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} \times \frac{z_C - z_D}{z_A - z_D} \in \mathbb{R}$.

Application ⑦:

On considère dans le plan complexe les points $A(1+i)$, $B(3+i)$,$C(2+2i)$ et $D(2)$.
Montrer que les points A,B,C et D sont cocycliques.

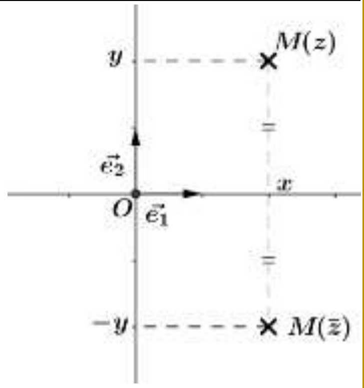
III. Conjugué d'un nombre complexe

Définition :

Soit $z = a + ib$, où a et b sont deux réels.
Le nombre $a - ib$ est appelé le ***conjugué*** du nombre complexe z, et on le note par $\bar{z}$.

Exemples :

- $z_1 = 5 + 6i$, alors $\overline{z_1} = 5 - 6i$.
- $z_2 = -1 - i$, alors $\overline{z_2} = -1 + i$.
- $z_3 = i$, alors $\overline{z_3} = -i$.
- $z_4 = 6$, alors $\overline{z_4} = 6$.



Interprétation géométrique :

Soit z un nombre complexe.
Dans le plan complexe, le point $M(\bar{z})$ est symétrique au point $M(z)$ par rapport à l'axe réel.

Propriété :

Soient z et z' deux nombres complexes et n un nombre relatif.

- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$;
- $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$;
- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$ $(z' \neq 0)$;
- $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$ $(z' \neq 0)$.

Exemples :

- $\overline{(2-i)(1+i)^2} = (1+i)(-2i) = 2 - 2i$.
- $\overline{\frac{1}{\sqrt{2}i - \sqrt{2}}} = \frac{1}{-\sqrt{2} - \sqrt{2}i} = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{2}i}{4}$.

Application ⑧ :

Soit z un nombre complexe différent de $-2i$. Simplifier l'expression $\frac{\overline{iz}}{z+2i} + i\left(\overline{\frac{3+z}{\bar{z}-2i}}\right)$.

Exercice ③:

On pose $z = x + iy$ où x et y sont deux réels.

1) a) Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $3iz - \bar{z}$.
b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $3iz - \bar{z} = 8i$.
c) Déterminer les nombres complexes z pour que $3iz - \bar{z}$soit un nombre imaginaire pur.

2) Résoudre l'équation $\frac{4z-2}{z+1} = -3 + i$.

Propriété :

Pour tout nombre complexe z, On a :

Pr. LATRACH ABDELKBIR

- $z + \overline{z} = 2Re(z)$ et $z - \overline{z} = 2i\,Im(z)$.
- $z \in IR \Leftrightarrow \overline{z} = z$.
- $z \in iIR \Leftrightarrow \overline{z} = -z$.

Application ⑨ :

On pose : $u = \frac{2+3i}{3+2i}$ et $v = \frac{2-3i}{3-2i}$. Sans calculer $u+v$ et $u-v$, Montrer que $u+v$ est réel et que $u-v$ est imaginaire pur.

IV. Module d'un nombre complexe

Définition

Soit $z = x + iy$, où x et y deux nombres réels, un nombre complexe.
Le module du nombre complexe z, est le nombre réel positif noté $|z|$ et qui est défini par : $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Exemples :

- $|3-4i| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$
- $|1-i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$
- $|i| = \sqrt{1^2} = 1$
- $|-i| = \sqrt{(-1)^2} = 1$
- $\left|\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = 1$

Propriété :

Soient z et z' nombres complexes et n un nombre relatif.
- $|z| = |-z| = |\overline{z}|$.
- $|z \times z'| = |z| \times |z'|$.
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.
- $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ $(z' \neq 0)$.
- $|z^n| = |z|^n$, $(z \neq 0)$.

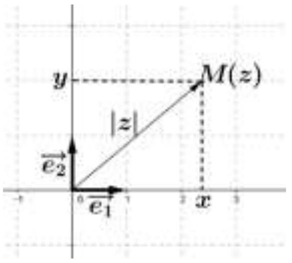
Application ①⓪ :

On pose : $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$.

1) Calculer $|z_1|$ et $|z_2|$.

2) En déduire le module des nombres suivants : $z_1 \times z_2$, z_1^6 et $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2$.

Interprétation géométrique :



Soit $M(z)$ un point du plan complexe tels que $z = x + iy$.
On sait que $OM = \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2+y^2}$.
Et on a $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$.
Alors $OM = |z|$.

Propriété :

Soient $A(z_A)$ et $B(z_B)$ deux points du plan complexe. On a : $AB = |z_B - z_A|$.

Application ①① :

Dans le plan complexe, on considère les points $A(-1+6i)$, $B(1+9i)$ et $C(2+4i)$.
Montrer que le triangle ABC est isocèle.

Exercice ④:

Déterminer dans le plan complexe l'ensemble (E) des points $M(z)$ dans les cas suivants :

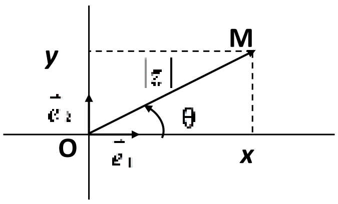
a. $|z - 2 + i| = |z - 4i|$;
b. $|z + i| = |z - 1 + i|$;
c. $|z - 2 + i| = 4$;
d. $|iz - 2| = |z + 1 - i|$;
e. $|iz| = |\overline{z} + 1 - i|$.

V. La forme géométrique d'un nombre complexe

1. Argument d'un nombre complexe :

Pr. LATRACH ABDELKBIR

On muni le plan $(\mathcal{P})$ par un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.
Soit $M(z)$ un point du plan complexe $(\mathcal{P})$ différent de O.
On appelle ***argument*** du nombre complexe z, la mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OM}}\right)$ qu'on note par le symbole $arg(z)$.
Et on a $arg(z) \equiv \theta[2\pi]$ (c-à-d $arg(z) = \theta + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$).



Propriété :

Soit z un nombre complexe.

- $z \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow arg\ (z) \equiv 0[2\pi]$.
- $z \in \mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow arg\ (z) \equiv \pi[2\pi]$.
- $z \in i\mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow arg\ (z) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
- $z \in i\mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow arg(z) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Exemples :

○ $arg\ (2i) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

○ $arg\ (1 + \sqrt{3}) \equiv 0[2\pi]$

○ $arg\ (\sqrt{5} - \sqrt{7}) \equiv \pi[2\pi]$

○ $arg(-2i) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Propriété :

Soit z un nombre complexe non nul.

- $arg(\overline{z}) \equiv -arg(z)[2\pi]$.

$arg(-z) \equiv \pi + arg(z)[2\pi]$.

2. La forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul :

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul et θ son argument.
On sait que $cos\ \theta = \frac{x}{|z|}$ et $sin\ \theta = \frac{x}{|z|}$ alors $x = |z|\ cos\ \theta$ et $y = |z|\ sin\ \theta$.
C.à.d. $z = |z|(cos\ \theta + i.sin\ \theta)$
Cette écriture s'appelle ***la forme trigonométrique*** du nombre complexe z et on le note par $[|z|; \theta]$.

Exemples :

Déterminons la forme trigonométrique des deux nombres complexes $z = 2 + 2i$ *et* $z' = 2 - 2i$.

Application ①②:

Ecrire sous la forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

- $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$
- $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$
- $z_3 = -1 - i\sqrt{3}$
- $z_4 = -2\sqrt{3} + 2i$
- $z_5 = 4$
- $z_6 = -7$

Propriété :

Soient z et z′ deux éléments de $\mathbb{C}^*$ tels que $z = [r; \theta]$ et $z' = [r'; \theta']$ et $n \in \mathbb{N}$:

- $[r, \theta] = [r', \theta'] \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \theta = \theta + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \end{cases}$
- $z \times z' = [r, \theta] \times [r', \theta'] = [rr', \theta + \theta']$.
- $\frac{1}{z} = \frac{1}{[r,\theta]} = \left[\frac{1}{r}, -\theta\right]$.
- $\frac{z}{z'} = \frac{[r,\theta]}{[r',\theta']} = \left[\frac{r}{r'}, \theta - \theta'\right]$.
- $z^n = [r, \theta]^n = [r^n, n\theta]$.

Application ①③ :

On considère z_1 , z_2 et z_3 trois nombres complexes non nuls tels que $arg(z_1) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $arg(z_2) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$.
Déterminer l'argument du nombre z_3 dans les cas suivants :

a. $\frac{z_3}{z_2} = {z_1}^2$.

b. $z_3 \times \overline{z_2} = 4z_1$.

Exercice ⑤:

On pose $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ *et* $z_2 = 1 + i$.

1) Ecrire z_1 et z_2 sous la forme trigonométrique puis en déduire la forme trigonométrique

Pr. LATRACH ABDELKBIR

du nombre $Z = \frac{z_1^2}{z_2}$.

2) Ecrire Z sous la forme algébrique.

3) En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ *et* $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

4) Montrer que $z^{12} \in \mathbb{R}$.

3. Angle entre deux vecteurs - Argument d'un nombre complexe

Propriété :

Soient $A(z_A), B(z_B), C(z_C)$ *et* $D(z_D)$ des points du plan complexe. On a :

- $\overline{(\vec{e_1}, \overrightarrow{AB})} \equiv \arg(z_B - z_A)\ [2\pi]$.
- $\overline{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)\ [2\pi]$.
- $\overline{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC})} \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_D}{z_B - z_A}\right)\ [2\pi]$.

Application ①④ :

On considère dans le plan complexe les points $A(2;2)$, $B(2;-1)$, $C(4;2)$ et $D(6;2)$.

1) Calculer $\overline{(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC})}$, que peut-on déduire ?

2) Calculer $\overline{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})}$. Que peut-on dire de la position des deux droites (AB) et (AC) ?

Exercice ⑥:

Dans le plan complexe on considère les points A,B et C d'affixes respectivement $z_A = \sqrt{3} - i$, $z_B = -z_A$ et $z_C = \sqrt{3} + 3i$ et soit D le point symétrique de C par rapport à l'axe réel.

1) Calculer $\frac{z_A - z_D}{z_A - z_C}$ puis déduire que les points A, D et C sont alignés.

2) Vérifier que $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$.

3) Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

Exercice ⑦:

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectivement $a = \sqrt{3}$; $b = 2 + i\sqrt{3}$; $c = 2 - \sqrt{3} + 2i$; $d = (2 - \sqrt{3})i$.

Montrer que ABCD est un carré.

VI. Représentation complexe des transformations usuelles

1. La translation

Soit $t_{\vec{u}}$ une translation de vecteur $\vec{u}(z_{\vec{u}})$ et soit $M'(z_{M'})$ l'image du point $M(z_M)$ par la translation $t_{\vec{u}}$. On a : $t_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

$$\Leftrightarrow z_{\overrightarrow{MM'}} = z_{\vec{u}}$$
$$\Leftrightarrow z_{M'} - z_M = z_{\vec{u}}$$
$$\Leftrightarrow z_{M'} = z_M + z_{\vec{u}}$$

Cette écriture s'appelle ***la représentation complexe de la translation*** $t_{\vec{u}}$.

Application ①⑤ :

On considère la translation t de vecteur $\vec{u}(-1 + 2i)$.

1) Déterminer la représentation complexe de la translation t.

2) Déterminer l'affixe du point A' l'image de $A(2i)$ par la translation t

3) Déterminer l'affixe de B tels que $t(B) = B'$ et $B'(2 - 3i)$.

2. L'homothétie

Soient $\Omega(z_\Omega)$ un point du plan complexe et k un élément de $\mathbb{R}^*$. Soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport k.Soit $M'(z_{M'})$ l'image de $M(z_M)$ par l'homothétie h. On a :

$$h(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$$
$$\Leftrightarrow z_{\overrightarrow{\Omega M'}} = k z_{\overrightarrow{\Omega M}}$$
$$\Leftrightarrow z_{M'} - z_\Omega = k(z_M - z_\Omega)$$
$$\Leftrightarrow z_{M'} = z_\Omega + k(z_M - z_\Omega)$$
$$\Leftrightarrow z_{M'} = k z_M + z_\Omega(1 - k)\ .$$

Cette écriture s'appelle ***la représentation complexe de l'homothétie*** h.

Pr. LATRACH ABDELKBIR

Application ①⑥ :

On considère l'homothétie de centre $\Omega(2-i)$ et de rapport 4.

1) Déterminer la représentation complexe de l'homothétie h.

2) Déterminer l'affixe du point A' l'image de $A(1+i)$ par l'homothétie h.

3) Déterminer l'affixe de B où $h(B)=B'$ et $B'(2i)$.

Exercice ⑧:

Connaitre la nature des transformations usuelles suivantes dont la représentation complexe est comme suit :

a. $z'=z-3i$.

b. $z'+2i=-5(z+2i)$.

c. $z'=1-z$.

d. $z'=4z-3i$.

VII. Notation exponentielle – Applications trigonométriques

1. Notation exponentielle d'un nombre complexe

Activité :

1) On considère le nombre complexe $z=2\sqrt{2}+2i\sqrt{6}$. Montrer que $z=\left[4\sqrt{2};\frac{\pi}{3}\right]$.

On écrit z sous la forme $z=4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$. Cette écriture s'appelle ***une forme exponentielle*** du nombre complexe z.

2) Donner une forme exponentielle des nombres complexes suivants : $z_1=1-i$, $z_2=2i$, $z_3=3+3i\sqrt{3}$ et $z_4=-3$.

Définition

Tout nombre complexe z de module r et d'argument θ s'écrit sous la forme $z=re^{i\theta}$. Cette écriture s'appelle ***la forme exponentielle*** du nombre z.

Exemples :

- $e^{i\pi}=-1$.
- $2e^{i\frac{3\pi}{4}}=2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=2\left(\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right)=-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$.

Application ①⑦ :

1) Ecrire sous la forme algébrique les nombres complexes : $z_1=4e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2=e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

2) Ecrire sous la forme exponentielle le nombre complexe $z=-3\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$.

Propriété :

Soient r, r′, θ et θ′ des nombres réels. On a :

- $\left|e^{i\theta}\right|=1$.
- $\arg\left(e^{i\theta}\right)\equiv\theta[2\pi]$.
- $\overline{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}$.
- $re^{i\theta}\times r'e^{i\theta'}=rr'e^{i(\theta+\theta')}$.
- $\frac{1}{re^{i\theta}}=\frac{1}{r}e^{-i\theta}=\frac{1}{r}\overline{e^{i\theta}}$.
- $\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}}=\frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$.
- $(\forall n\in\mathbb{Z})\ \left(re^{i\theta}\right)^n=r^ne^{in\theta}$.

Application ①⑧ :

On pose : $z_1=1-i$, $z_2=2i$ et $z_3=3+3i\sqrt{3}$. Ecrire sous la forme exponentielle les nombres suivants : $a=\frac{z_3}{z_1}$, $b=z_1^8$ et $c=\frac{z_1}{z_2z_3}$

2. Formule de Moivre – Formules d'Euler – Applications

a. Formule de Moivre

On a : $(\forall n\in\mathbb{Z})(\forall\theta\in\mathbb{R}):\left(e^{i\theta}\right)^n=e^{in\theta}$.

Ainsi : $(\forall n\in\mathbb{Z})(\forall\theta\in\mathbb{R}):\left(\cos(\theta)+i\sin(\theta)\right)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$.

Cette égalité s'appelle ***la formule de Moivre***.

Pr. LATRACH ABDELKBIR

Propriété (formule de Moivre) :

$(\forall n \in \mathbb{Z})(\forall \theta \in \mathbb{R}) : (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$

Application ①⑨:

1) Ecrire par deux méthodes différentes $(cos(x) + i\,sin(x))^2$sous la forme algébrique.
2) En déduire la valeur de $cos(2x)$ et $sin(2x)$en fonction de $cos(x)$ et $sin(x)$.

b. Formules d'Euler

on sait que : $(\forall \theta \in \mathbb{R}) \begin{cases} e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) & (1) \\ e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i\sin(\theta) & (2) \end{cases}$

La somme des deux égalités donne : $cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$.

En soustrayant l'équation (1) de l'équation (2) on obtient : $sin(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$.

ces deux formules résultantes s'appelle ***les formules d'Euler***.

Propriété (formules d'Euler):

$(\forall \theta \in \mathbb{R}) \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $sin(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$.

Application ②⓪ :

1) En utilisant les formules d'Euler, montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) : (cos(x))^2 = \frac{1}{2}cos(2x) + \frac{1}{2}$.
On dit dans ce cas-là qu'on a linéarisé le polynôme trigonométrique $(cos(x))^2$.
2) Linéariser les expressions suivantes $sin^2(x)$ et $\cos^3(x)$.

VIII. Equations de second degré dans ℂ

Propriété :

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $az^2 + bz + c = 0$ où a,b et c sont des réels et $a \neq 0$.
- Le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$ s'appelle le discriminant de l'équation.
- Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet deux solutions réelles $z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une solution réelle double $z_0 = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, alors l'équation admet deux solutions complexes conjuguées distinctes :$z_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \overline{z_1} = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Application ②① :

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :
- $(E_1): z^2 = -4$
- $(E_2): z^2 + 2\sqrt{3}z + 4 = 0$
- $(E_3): 2z^2 - 3z + 2 = 0$

2) On pose $p(z) = z^3 - 6z^2 + 12z - 16$.
a. Déterminer les réels a *et* b tels que : $(\forall z \in \mathbb{C})\ p(z) = (z-4)(z^2 + az + b)$.
b. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $p(z) = 0$.

IX. La représentation complexe de la rotation

Soit R une rotation de centre $\Omega(z_\Omega)$ et de mesure d'angle θ, et soit $M'(z_{M'})$ l'image de $M(z_M)$ par la rotation R. On a : $R(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z_{M'} - z_\Omega| = |z_M - z_\Omega| \\ \arg\left(\frac{z_{M'}-z_\Omega}{z_M - z_\Omega}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|z_{M'}-z_\Omega|}{|z_M - z_\Omega|} = 1 \\ \arg\left(\frac{z_{M'}-z_\Omega}{z_M - z_\Omega}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left|\frac{z_{M'}-z_\Omega}{z_M - z_\Omega}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_{M'}-z_\Omega}{z_M - z_\Omega}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_{M'}-z_\Omega}{z_M - z_\Omega} = e^{i\theta}$$

Pr. LATRACH ABDELKBIR

$$\Leftrightarrow z_{M'} = (z_M - z_\Omega)e^{i\theta} + z_\Omega .$$

Cette écriture s'appelle ***la représentation complexe de la rotation*** R.

Propriété :

Soit R une rotation de centre $\Omega(z_\Omega)$ et de mesure d'angle θ, et soit $M'(z_{M'})$ l'image de $M(z_M)$ par la rotation R. On a : $z_{M'} = (z_M - z_\Omega)e^{i\theta} + z_\Omega$.

Application ②②:

1) On considère la rotation R de centre $\Omega(2+3i)$ et de mesure d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a. Déterminer la représentation complexe de la rotation R.

b. Déterminer l'affixe du point A' l'image $A(2-i)$ par la rotation R.

c. Déterminer l'affixe du point B avec $R(B) = B'$ et $B'(-2-4i)$.

2) Déterminer l'image du point $M(4i)$ par la rotation de centre O et de mesure d'angle $\frac{5\pi}{6}$.

Exercice ⑨:

On considère la transformation F représentée par : $z' = -iz + i - 1$.

1) Montrer qu'il existe un point unique M du plan complexe $(\mathcal{P})$ invariant par la transformation F. Notons ce point par Ω et son affixe par ω.

2) Vérifier, pour tout $M(z)$ et $M'(z')$ du plan $(\mathcal{P})$, que :
$F(M) = M' \Leftrightarrow z' - \omega = -i(z - \omega)$.

3) En déduire la nature de la transformation F.

Exercice de synthèse : Session Normale 2020

1) On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation

$$(E): z^2 - 2(\sqrt{2}+\sqrt{6})z + 16 = 0$$

a. Vérifier que $\Delta = -4(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2$.

b. En déduire les solutions de l'équation (E).

2) 2) On considère les nombres complexes $a = (\sqrt{6}+\sqrt{2}) + i(\sqrt{6}-\sqrt{2})$; $b = 1 + i\sqrt{3}$ et $c = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

a. Vérifier que $b\bar{c} = a$ puis déduire que: $ac = 4b$.

b. Écrire les deux nombres complexes a et b sous forme trigonométrique.

c. En déduire que $a = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$.

3) Dans le plan complexe est rapport à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.On considére les points B; C et D d'affixes respectives b ; c et d tel que $d = a^4$.

Soit z l'affixe du point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{12}$.

a. Vérifier que $z' = \frac{1}{4}az$.

b. Déterminer l'image du point C par la rotation R.

c. Déterminer la nature du triangle OBC.

d. Montrer que $a^4 = 128b$ et en déduire que les points O; B et D sont alignés.

Pr. LATRACH ABDELKBIR