Chapitre 5

Barycentre dans le plan

Prof. Abdellah AIT-CHEIKH

Capacités attendues

- Utilisation de la notion de barycentre pour simplifier les expressions vectorielles.
- Utilisation de la notion de barycentre dans le plan pour établir des alignements de points, des points de concours de droites.
- Construction du barycentre de n points tels que $2 \leq n \leq 4$.
- Utilisation du barycentre pour résoudre les problèmes géométriques et les problèmes de lieu.

1 Activité N°1 :

Soient A et B deux points dans le plan.

1 On considère le point G dans le plan tel que : $2\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$

- **a.** Déterminer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$
- **b.** En déduire que le point G existe et unique.
- **c.** Placer le point G.

2 Est-ce qu'il existe un point M dans le plan tel que : $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$

I Point pondéré

Définition On appelle point pondéré ou point massif le couple $(A;a)$ où A est un point du plan ou de l'espace et a un réel.

II Barycentre de deux points :

1 Définition :

Définition Soients A et B deux points et a et b deux réels dont **la somme n'est pas nulle**.
Alors il existe un unique point G du plan tel que $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$.
Ce point G est **le barycentre** des points A et B affectés des coefficients a et b.
On dit que G est le barycentre du système de points $(A;a)$ et $(B;b)$.
On écrit : $G = Bar\{(A;a),(B;b)\}$

2 Position du barycentre :

Soit G le barycentre du système de points $(A;a)$ et $(B;b)$. On a :

- $\overrightarrow{AG} = \dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$.
- Les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.
- Le points G, A et B sont alignés.

Remarque

Si $a = b$, on dit que G est l'isobarycentre de A et B, c'est-à-dire G est le milieu de $[AB]$ et on a : $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

3 Homogénéité du barycentre

Propriété Si G est le barycentre de $(A;a)$ et $(B;b)$, alors pour tout réel $k \neq 0$, alors G est le barycentre de $(A;ka)$ et $(B;kb)$.

Démonstration

Soit G est le barycentre de $(A;a)$ et $(B;b)$.On a :

$$a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0} \quad \Rightarrow ka\overrightarrow{GA} + kb\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$$
$$\Rightarrow G = Bar\{(A;ka),(B;kb)\} \qquad (\text{Car } ka + kb \neq 0)$$

4 Réduction vectorielle

Propriété Si G est le barycentre de $(A;a)$ et $(B;b)$, avec $a+b \neq 0$, alors pour tout point M du plan, on a :

$$a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = (a+b)\overrightarrow{MG}$$

Démonstration

On a : $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = a(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + b(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) = (a+b)\overrightarrow{MG} + a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB}$.

Or si G est le barycentre de $(A;a)$ et $(B;b)$, $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$.

D'où l'égalité : $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = (a+b)\overrightarrow{MG}$.

5 Coordonnées du barycentre :

Propriété Dans un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, si $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ alors les coordonnées du barycentre G du système $(A;a)$ et $(B;b)$ sont $x_G = \dfrac{ax_A + bx_B}{a+b}$ et $y_G = \dfrac{ay_A + by_B}{a+b}$.

Démonstration

Soit G le barycentre du système $(A;a)$ et $(B;b)$.

Alors pour tout M du plan on a : $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = (a+b)\overrightarrow{MG}$.

Si $M = O$, on obtient $a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} = (a+b)\overrightarrow{OG}$

Et $\overrightarrow{OG} = \dfrac{a}{a+b}\overrightarrow{OA} + \dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{OB}$

C'est-à-dire $\overrightarrow{OG} = \dfrac{ax_A}{a+b}\overrightarrow{i} + \dfrac{ay_A}{a+b}\overrightarrow{j} + \dfrac{bx_B}{a+b}\overrightarrow{i} + \dfrac{by_B}{a+b}\overrightarrow{j}$

Soit $\overrightarrow{OG} = \dfrac{ax_A + bx_B}{a+b}\overrightarrow{i} + \dfrac{ay_A + by_B}{a+b}\overrightarrow{j}$

D'où $G\left(\dfrac{ax_A + bx_B}{a+b}; \dfrac{ay_A + by_B}{a+b}\right)$

III Barycentre de trois points pondérés :

1 Définition :

Définition Soient A, B et C trois points distincts et a, b et c trois réels dont la somme n'est pas nulle. Alors il existe un unique point G du plan tel que $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$.
G est le barycentre des points pondérés $(A;a)$, $(B;b)$ et $(C;c)$.
On écrit : $G=Bar\{(A;a),(B;b),(C;c)\}$
De même si $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}+d\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{0}$ et $a+b+c+d\neq 0$ alors ;

$$G=Bar\{(A;a),(B;b),(C;c),(D;d)\}$$

Démonstration

Quels que soient a, b et c :

$$\begin{aligned}
a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0} &\Longleftrightarrow a\overrightarrow{GA}+b(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB})+c(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{0}\\
&\Longleftrightarrow a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{GA}+c\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}\\
&\Longleftrightarrow (a+b+c)\overrightarrow{GA}=-b\overrightarrow{AB}-c\overrightarrow{AC}\\
&\Longleftrightarrow (a+b+c)\overrightarrow{AG}=b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

1 Si $a+b+c\neq 0$ alors l'équation équivaut à $\overrightarrow{AG}=\dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$
Le point G existe et est unique.

2 Si $a+b+c=0$ alors l'équation équivaut à $b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}$.

Cette équation n'admet pas de solution si $b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}\neq\overrightarrow{0}$ et en admet une infinité si $b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}$.

Conséquences :

- $G=Bar\{(A;a),(B;b),(C;c)\}\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{a+b+c}\left(b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}\right)$
- Si A, B et C ne sont pas alignés le point G appartient au plan (ABC).
- Le barycentre ne change pas si on multiplie les trois coefficients par un réel $k\neq 0$.
- Si $a=b=c$, G est le barycentre de $(A;1)$, $(B;1)$ et $(C;1)$, G est l'isobarycentre de A, B et C ou G est aussi le centre de gravité du triangle ABC.

2 Propriétés :

Propriété 1 Si G est le barycentre de $(A;a)$, $(B;b)$ et $(C;c)$, avec $a+b+c \neq 0$, alors pour tout point M du plan, on a : $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}=(a+b+c)\overrightarrow{MG}$.

Démonstration

On a : $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC} = a(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})+b(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})+c(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC})$
$= (a+b+c)\overrightarrow{MG}+a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}$

Or si G est le barycentre de $(A;a)$, $(B;b)$ et $(C;c)$, $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$.

D'où l'égalité : $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}=(a+b+c)\overrightarrow{MG}$.

Propriété 2 Dans un repère $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ si $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ et $C(x_C;y_C)$ alors les coordonnées du barycentre G du système $(A;a)$, $(B;b)$ et $(C;c)$ sont :
$x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{a+b+c}$ et $y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{a+b+c}$

Démonstration

Soit G le barycentre du système $(A;a)$, $(B;b)$ et $(C;c)$.

Alors pour tout M du plan on a : $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}=(a+b+c)\overrightarrow{MG}$.

Si $M=O$, on obtient $a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}=(a+b+c)\overrightarrow{OG}$

Soit $\overrightarrow{OG}=\dfrac{a}{a+b+c}\overrightarrow{OA}+\dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{OB}+\dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{OC}$

C'est-à-dire $\overrightarrow{OG}=\dfrac{ax_A}{a+b+c}\overrightarrow{i}+\dfrac{ay_A}{a+b+c}\overrightarrow{j}+\dfrac{bx_B}{a+b+c}\overrightarrow{i}+\dfrac{by_B}{a+b+c}\overrightarrow{j}+\dfrac{cx_C}{a+b+c}\overrightarrow{i}+\dfrac{cy_C}{a+b+c}\overrightarrow{j}$

Soit $\overrightarrow{OG}=\dfrac{ax_A+bx_B+cx_C}{a+b+c}\overrightarrow{i}+\dfrac{ay_A+by_B+cy_C}{a+b+c}\overrightarrow{j}$. D'où $G\left(\dfrac{ax_A+bx_B+cx_C}{a+b+c};\dfrac{ay_A+by_B+cy_C}{a+b+c}\right)$

3 Associativité du barycentre :

Propriété Si G est le barycentre de $(A;a)$, $(B;b)$ et $(C;c)$, avec $a+b+c \neq 0$ et si H est le barycentre de $(A;a)$ et $(B;b)$ avec $a+b \neq 0$, alors G est le barycentre de $(H;a+b)$ et $(C;c)$.

Démonstration

On a : $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$. On déduit $(a+b)\overrightarrow{GH}+a\overrightarrow{HA}+b\overrightarrow{HB}+c\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$.

Or H est le barycentre de $(A;a)$ et $(B;b)$, donc $a\overrightarrow{HA}+b\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{0}$ et $(a+b)\overrightarrow{GH}+c\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$.

Donc G est le barycentre de $(H;a+b)$ et $(C;c)$.

Remarque

Soit G est le barycentre des points pondérés $(A;a)$, $(B;b)$ et $(C;c)$.

- Si $b+c \neq 0$, A' est le barycentre partiel de $(B;b)$ et $(C;c)$, alors $G=Bar\{(A;a),(A';b+c)\}$.
- Si $a+c \neq 0$, B' est le barycentre partiel de $(A;a)$ et $(C;c)$, alors $G=Bar\{(B;b),(B';a+c)\}$.
- Si $a+b \neq 0$, C' est le barycentre partiel de $(A;a)$ et $(B;b)$, alors $G=Bar\{(C;c),(C';a+b)\}$.
  Lorsqu'elles existent les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en G.

4 Détermination de l'ensemble des points :

L'ensemble des points : $(\Gamma_k) = \left\{M \in (P) \,/\, \| a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} \| = k\right\}$:

Si $a+b+c \neq 0$ alors il existe un point G (barycentre des points $(A;a)$, $(B;b)$ et $(C;c)$) tel que : $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a+b+c)\overrightarrow{MG}$. Donc $M \in (\Gamma_k) \Leftrightarrow MG = \dfrac{k}{|a+b+c|}$.

1^{ier} cas : si $k < 0$ alors $(\Gamma_k) = \varnothing$
2^{ime} cas : si $k = 0$ alors $MG = 0$. Soit $(\Gamma_0) = \{G\}$
3^{ime} cas : si $k > 0$ alors (Γ_k) est un cercle de centre G et de rayon $r = \dfrac{k}{|a+b+c|}$

IV Barycentre d'un nombre quelconque de points

Toutes les définitions et propriétés précédentes se généralisent à n points pondérés.

- Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ n points et $a_1, a_2, \dots, a_n$ n réels.

  Il existe un unique point G tel que $a_1\overrightarrow{GA_1} + a_2\overrightarrow{GA_2} + \cdots + a_n\overrightarrow{GA_n} = \overrightarrow{0}$ si et seulement si $a_1 + a_2 + \cdots a_n \neq 0$.

  Ce point est appelé barycentre des n points pondérés $(A_1, a_1);(A_2, a_2);\dots;(A_n, a_n)$.

- Règle d'associativité :

  Pour trouver le barycentre G, de n points, lorsque $n \geq 3$, on peut remplacer p points, pris parmi les n points, par leur barycentre (s'il existe) affecté de la somme de leurs coefficients.

- Soit $k \neq 0$.

  $G = \mathrm{Bar}(A_1, a_1), (A_2, a_2), \dots, (A_n, a_n) \Longleftrightarrow G = \mathrm{Bar}(A_1, ka_1), (A_2, ka_2), \dots, (A_n, ka_n)$.

  Autrement dit, on ne change pas le barycentre en changeant les coefficients par des coefficients proportionnels.

- Si $a_1 = a_2 = \cdots = a_n \neq 0$ alors G est appelé isobarycentre des n points $A_1, A_2, \dots, A_n$.

- Pour tout point M,

$$a_1\overrightarrow{MA_1} + a_2\overrightarrow{MA_2} + \cdots + a_n\overrightarrow{MA_n} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\overrightarrow{MG}$$

- Dans un repère, le barycentre de n points pondérés a pour coordonnées la moyenne des coordonnées des n points pondérés par les n coefficients.

  Dans le cas d'un repère du plan, on obtient :

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{a_1 x_{A_1} + a_2 x_{A_2} + \cdots + a_n x_{A_n}}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \\ y_G = \dfrac{a_1 y_{A_1} + a_2 y_{A_2} + \cdots + a_n y_{A_n}}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \end{cases}$$

V Exercices d'applications

Application 1

Soient ABC un triangle, P le symétrique de B par rapport à C, Q le point défini par $\overrightarrow{CQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$ et R le milieu de $[AB]$. Prouver que P, Q et R sont alignés.
(Il suffit de montrer que, Q est le barycentre de P et R)

Solution : On a P le symétrique de B par rapport à C, alors $\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{QB} + 2\overrightarrow{QC}$ (1)

Puisque R est l'isobarycentre de $(A;1)$ et $(B;1)$ alors on a : $2\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB}$ (2)

Or $\overrightarrow{CQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$ alors $\overrightarrow{QA} + 2\overrightarrow{QC} = \vec{0}$ (3)

De (1) , (2) et (3) on a : $\overrightarrow{QP} + 2\overrightarrow{QR} = -\overrightarrow{QB} + 2\overrightarrow{QC} + \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} = \overrightarrow{QA} + 2\overrightarrow{QC} = \vec{0}$

D'où Q est le barycentre de $(P;1)$ et $(R;2)$. Donc, P, Q et R sont alignés et $\overrightarrow{PQ} = 2\overrightarrow{QR}$

Application 2

Soit ABC un triangle. Les points A, B, C et G sont tels que C est le barycentre de $(A;1)$, $(B;1)$ et $(G;-3)$. Montrer que G est le centre de gravité du triangle ABC.

Solution

On a C est le barycentre de $(A;1)$, $(B;1)$ et $(G;-3)$.

Donc pour tout point M : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MG} = (1+1-3)\overrightarrow{MC}$. Soit $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

En particulier pour le point G on : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$. D'où G est le centre de gravité de ABC

Application 3

Dans un quadrilatère $ABCD$, on appelle I le milieu de $[AC]$, J le milieu de $[BD]$ et G le point défini par : $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC}\right)$.

Montrer que G est le barycentre de $(A,2)$, $(B,-1)$, $(C,2)$ et $(D,-1)$.
En déduire que les points I, J et G sont alignés.

Solution

On a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC}\right) &\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} \\
&\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GC} \\
&\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{BG} + 2\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{DG} \\
&\Leftrightarrow 2\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GD} = \vec{0} \\
&\Leftrightarrow G = Bar\{(A;2),(B;-1),(C;2),(D;-1)\}
\end{aligned}$$

Et on a I est le milieu de $[AC]$ et J est le milieu de $[BD]$.
Alors $I = Bar\{(A;2),(C;2)\}$ et $J = Bar\{(B;-1),(D;-1)\}$
Donc $G = Bar\{(I;4),(J;-2)\}$. D'où l'alignement des points I, J et G .

Application 4

Démontrer que l'on peut exprimer G comme barycentre de A et B de telle façon que la somme des coefficients soit égale à 1.

Solution

Si $G = \text{Bar}\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ alors $G = \text{Bar}\left\{\left(A, \dfrac{1}{\alpha+\beta}\times\alpha\right),\left(B, \dfrac{1}{\alpha+\beta}\times\beta\right)\right\}$ car $\alpha+\beta \neq 0$.

On a ainsi $G = \text{Bar}\left\{\left(A, \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\right),\left(B, \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\right)\right\}$ avec $\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha+\beta} = 1$

Application 5

Dans un repère du plan, on a $A(2;-1)$, $B(0;3)$ et $C(-2;0)$. Déterminer les coordonnées de G barycentre de $(A,1);(B,3);(C,-2)$.

Solution

On a :

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + 3\times x_B - 2\times x_C}{1+3-2} = \dfrac{2+3\times 0 - 2\times(-2)}{2} = 3 \\ y_G = \dfrac{y_A + 3\times y_B - 2\times y_C}{1+3-2} = \dfrac{-1+3\times 3 - 2\times 0}{2} = 4 \end{cases}$$

Ainsi $G(3;4)$

Application 6

Soient dans un triangle ABC

- $I = Bar\{(A;2),(C;1)\}$;
- $J = Bar\{(A;1),(B;2)\}$;
- $K = Bar\{(C;1),(B;-4)\}$.

1 Montrer que $B = Bar\{(K;3),(C;1)\}$. En déduire le barycentre de $(A;2)$, $(K;3)$ et $(C;1)$;

2 Montrer que J est le milieu de $[KI]$.

Solution

1 On a $K = Bar\{(C;1),(B;-4)\}$, alors pour tout point M du plan $\overrightarrow{MC} - 4\overrightarrow{MB} = -3\overrightarrow{MK}$.
Posons $M = B$, alors $\overrightarrow{BC} = -3\overrightarrow{BK}$. C'est-à-dire $3\overrightarrow{BK} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{0}$.
Donc B est le barycentre de $(K;3)$ et $(C;1)$.
Et on a : $J = Bar\{(A;1),(B;2)\} = Bar\{(A;2),(B;4)\}$. Et $B = Bar\{(K;3),(C;1)\}$.
On déduit que $J = Bar\{(A;2),(K;3),(C;1)\}$.

2 On a : $J = Bar\{(A;2),(K;3),(C;1)\}$ et $I = Bar\{(A;2),(C;1)\}$
Alors $J = Bar\{(I;3),(K;3)\}$. Donc J est la milieu de $[KI]$

Application 7

Dans un triangle ABC on définit I le barycentre de $(B;2)$, $(C;1)$, J le barycentre de $(A;3)$, $(C;2)$ et K le barycentre de $(A;3)$ et $(B;4)$.

1 Faire une figure.

2 En considérant $G = Bar\{(A;3), (B;4), (C;2)\}$, montrer que les droites (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes en G.

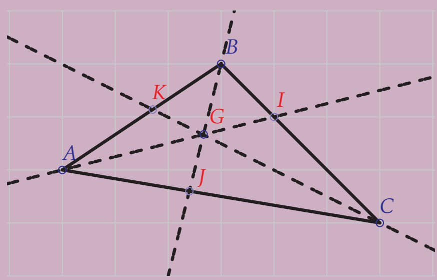
Solution

1 Faisons une figure :

On a $I = Bar\{(B;2), (C;1)\}$, alors $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

On a $J = Bar\{(A;3), (C;2)\}$, alors $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$.

On a $K = Bar\{(A;3), (B;4)\}$, alors $\overrightarrow{AK} = \frac{4}{7}\overrightarrow{AB}$.



La figure

2 Montrons que les droites (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes en G :
On a : $I = Bar\{(B;2), (C;1)\}$, c'est-à-dire $I = Bar\{(B;4), (C;2)\}$.
Or $G = Bar\{(A;3), (B;4), (C;2)\}$, alors $G = Bar\{(A;3), (I;6)\}$. D'où $G \in (AI)$ (1)
On a : $J = Bar\{(A;3), (C;2)\}$ et $G = Bar\{(A;3), (B;4), (C;2)\}$,
alors $G = Bar\{(B;4), (J;5)\}$. D'où $G \in (BI)$ (2)
On a : $K = Bar\{(A;3), (B;4)\}$ et $G = Bar\{(A;3), (B;4), (C;2)\}$,
alors $G = Bar\{(C;2), (K;7)\}$. D'où $G \in (CK)$ (3)
On déduit de (1), (2) et (3) que les droites (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes en G.

01 Soient A et B deux points dans le plan tel que $AB = 10cm$.

1 Déterminer l'ensemble des nombres réels m tel que le système des points $(A; m^2 - 8)$ et $(B; -2m + 6)$ a un barycentre.

2 Construire le barycentre G des points pondérés $(A; -7)$ et $(B; 4)\}$.

3 On considère le point H dans le plan tel que : $\overrightarrow{BH} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$.
Montrer que H est un barycentre d'un système des points pondérés à déterminer.

02 **Première partie :**
Soit ABC un triangle et soit α un nombre réel.
On considère deux points D et E tels que : $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CE} = \alpha\overrightarrow{CA}$.

1 Faire une figure dans le cas où $\alpha = \frac{1}{3}$ et $\alpha = -1$.

2 Montrer que $D = Bar\{(A; 1 - \alpha), (B; \alpha)\}$.

3 Montrer que $E = Bar\{(C; 1 - \alpha), (A; \alpha)\}$

Deuxième partie :

1 Construire le point G le barycentre des points pondérés $(A; 1)$, $(B; 4)$ et $(C; -1)$.

2 Déterminer puis construire l'ensemble des points M dans le plan tel que :

$$\|\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = 8$$

03 Soit $ABCD$ un rectangle de centre O.

1 Construire le barycentre I du système des points $(A; 1)$ et $(B; 3)$ et le barycentre K du système des points $(C; 1)$ et $(D; 3)$.

2 En déduire l'ensemble (Γ) des points M tel que :

$$\|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD}\|$$

3 Montrer que O est le milieu de $[IK]$.

4 Construire le barycentre G du système des points $(A; 1)$, $(B; 1)$ et $(C; 2)$, puis montrer que $G \in [BD]$. En déduire l'ensemble des points M tel que : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires.

5 Construire le barycentre J du système des points $(B; 2)$ et $(C; 1)$ et le barycentre L du système des points $(A; 1)$ et $(D; 2)$.

6 Montrer que le quadrilatère $IJKL$ est un parallélogramme de centre O

04 Soit ABC un triangle isocèle de sommet A tels que : $AB = 6cm$, $BC = 4cm$ et I le milieu de $[BC]$.
On considère les points J et K définis par : $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.

1 Construire les points J et K.

2 Montrer que $J = Bar\{(A;a),(C;c)\}$ en déterminant les coefficients a et c.

3 Construire le barycentre G des points pondérés $(A;4)$, $(B;3)$ et $(C;-1)$

4 Le plan est muni au repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$.

a. Déterminer les cordonnées des point I, J, K et G.

b. Montrer que les points I, J et K sont alignés.

c. Déterminer puis construire l'ensemble (E_1) des points M dans le plan tel que :

$$\|4\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = 3\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$$

d. Soit (E_2) l'ensemble des points M dans le plan tel que :

$$\|4\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|4\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|$$

.

i. Vérifier que $B \in (E_2)$.

ii. Montrer que $M \in (E_2) \Rightarrow GM = \frac{\sqrt{10}}{6}$ puis construire (E_2).

05

1 On considère M, E et N trois points non alignés. Soit H le barycentre du système $\{(M;3),(E;1),(N;1)\}$, Q celui de $\{(M;3),(N;1)\}$ et R celui de $\{(M;3),(E;1)\}$.

a. Démontrer que les droites (EQ) et (NR) passent par H.

b. Soit P le milieu du segment $[EN]$.

i. Prouver que M, P et H sont alignés.

ii. Exprimer $\overrightarrow{PH}$ en fonction de $\overrightarrow{PM}$.

2 On donne un triangle rectangle direct ABC et isocèle en A tel que $AB = AC = a$, $a > 0$.

a. Déterminer le point G barycentre du système $\{(A;4),(B;-1),(C;-1)\}$.
Construire G.

b. Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan tels que :
$4\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 - \overrightarrow{MC}^2 = 2a^2$.
Construire (E).