Exercice 1

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a :

1 . $\left(e^{-2x} - e^{x}\right)\left(1+e^{3x}\right) = e^{x}\left(e^{-3x}+1\right)\left(1-e^{3x}\right)$

2 . $\ln\left(e^{2x}+e^{x}+1\right) = 2x + \ln\left(e^{-2x}+e^{x}+1\right)$

Exercice 2

Soit f et g deux fonctions definies sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = \dfrac{e^{ax}-1}{e^{ax}+1}$ et $g(x) = \sqrt{e^{ax}} - e^{\frac{-a}{2}x}$ Avec $a \in \mathbb{R}^*$

Montrer que f et g sont deux fonctions impaires

Exercice 3

1. Resoudre dans $\mathbb{R}$ les equations suivantes

a) $\dfrac{e^{-x}-7}{e^{x}+7} = 2$; b) $e^{\frac{3x-1}{x-3}} = e$

c) $e^{-2x}\,e^{x+\ln 3} = e^{2x-\ln 9}$; d) $e^{2x} - 2e^{x} + 1 = 0$

2. Resoudre dans $\mathbb{R}$ les inequations suivantes

a) $e^{2x} - 2e^{x} + 1 > e^{2}$,

b) $e^{3x} - 6e^{2x} + 3e^{x} < 0$;

c) $\ln\left(4 - e^{x}\right) \geq 2$

Exercice 4

Soit k un réel strictement positif et f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = e^{-kx^2}$.

1. Etudier la parité de la fonction f_k.
2. Étudier les variations de la fonction f_k et dresser son tableau de variation.
3. Déterminer la dérivée seconde f_k'' et résoudre l'équation $f_k''(x) = 0$.
4. Démontrer que, quels que soient les réels strictement positifs h et k, on a : $f_k \leq f_h$ si, et seulement si, $h \leq k$
5. On prend $k = \dfrac{1}{2}$. On désigne par α la solution positive de l'équation $f_{\frac{1}{2}}''(x) = 0$.

Déterminer une équation de la tangente T à la courbe représentative de $f_{\frac{1}{2}}$ au point d'abscisse α .

Exercice 5

On considère la courbe C représentant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$ dans le plan rapporté a un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 2cm).

PARTIE A

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

b. Montrer que si x est différent de zéro on a :

$$f(x) = x^2 e^{-x}\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right).$$

En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.

2. a. Montrer que $f'(x) = \left(1-x^2\right)e^{-x}$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

4. Étude de la position de C par rapport à T

a. Montrer que pour tout réel x on a :

$f(x) - (x+1) = (x+1)e^{-x} g(x)$ avec $g(x) = x + 1 - e^{x}$.

b. Calculer $g'(x)$ et étudier son signe.

c. Dresser le tableau de variations de la fonction g.

d. En déduire le signe de $g(x)$, puis de $f(x) - (x+1)$.

e. En déduire la position de C par rapport à T.

f. Après avoir reproduit et complété le tableau de valeurs ci-dessous, tracer T et C dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Donner les valeurs de $f(x)$ arrondies à 10^{-2} près.

x	-2	-1	$-0,5$	0	0,5	1	2	3	4	
$f(x)$										

PARTIE B

a. Montrer que la fonction F définie par

$F(x)=\left(-x^2-4x-5\right)e^{-x}$ est une primitive de la fonction f.

Exercice 6

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=(x+1)^2e^{-x}$.

Soit C la représentation graphique de la fonction g dans le repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, unité graphique 2 cm.

1. Calculer la dérivée g' de g. Montrer que $g'(x)$ est du signe de $(1-x^2)$. En déduire les variations de g.

2. Montrer que :

a. $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$.

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ et préciser l'asymptote à C correspondante.

3. Tracer la courbe C dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. On placera en particulier les points de la courbe d'abscisses respectives –2 ; –1 ; 0 ; 1 et 3.

4. a. Par une lecture graphique, indiquer, suivant les valeurs du nombre réel k, le nombre de solutions de l'équation $g(x) = k$.

b. Prouver rigoureusement que l'équation $g(x) = 2$ admet une solution α et une seule. Prouver que α appartient à l'intervalle [– 2 ; – 1].

c. Montrer que α vérifie la relation $\alpha=-1-\sqrt{2}e^{\frac{\alpha}{2}}$.

Partie B

On appelle f la fonction définie sur l'intervalle I = [– 2 ; – 1] par : $f(x)=-1-\sqrt{2}e^{\frac{x}{2}}$.

1. Étude de f

a. Étudier les variations de f sur I.

b. En déduire que, pour tout élément x de I, $f(x)$ appartient à I.

c. Montrer que, pour tout élément x de I, $|f'(x)|\leq\frac{1}{\sqrt{2e}}$.

d. On rappelle que $f(\alpha)=\alpha$. En intégrant l'inégalité précédente, montrer que, pour tout élément x de I, on a : $|f(x)-\alpha|\leq\frac{1}{2}|x-\alpha|$.

2. Approximation de α à l'aide d'une suite

Soit (u_n) la suite d'éléments de I définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et la condition initiale $u_0=-\frac{3}{2}$.

a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $|u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2}|u_n-\alpha|$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $|u_n-\alpha|\leq\frac{1}{2^{n+1}}$.

c. Prouver que la suite (u_n) converge, préciser sa limite et déterminer un entier n_0 tel que u_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près. Calculer u_{n_0}.

Exercice 7

L'objet de cet exercice est d'étudier la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(t)=\frac{1-e^{-t}}{t}$ si $t>0$ et $g(0)=1$.

1. a. Établir que g est continue en 0.

b. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

2. a. Pour tout $t > 0$, calculer $g'(t)$.

b. Prouver que pour tout $t\geq0$, $1+t\leq e^t$.

c. En déduire le signe de g' et le sens de variation de g

3. On se propose d'étudier la dérivabilité de g en 0. À cet effet on introduit la fonction h définie sur $[0, +\infty[$ par : $h(t)=1-t+\frac{t^2}{2}-e^{-t}$.

a. Calculer h' *et* h'', ainsi que les valeurs de $h(0)$ *et* $h'(0)$.

b. Prouver que pour tout $t\geq0$, $0\leq h(t)\leq\frac{t^3}{6}$ (1). Pour cela, on établira d'abord que $0\leq h''(t)\leq t$ et on en déduira un encadrement de h' et de h.

c. Déduire de la relation (1) un encadrement de $\frac{1-e^{-t}-t}{t^2}$. Prouver finalement que g est dérivable en 0 et donner la valeur de $g'(0)$.

4. Construire la courbe représentative C de g, dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Exercice 8

1. Pour tout réel k positif ou nul, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x)=x+\dfrac{1-ke^x}{1+ke^x}$.

a. Justifier que, pour rout réel k positif ou nul, on a

$$(E) : 2\,f_k' = (f_k - x)^2 + 1.$$

b. En déduire le sens de variations de f_k sur $\mathbb{R}$.

2. On note C_k la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$. Sur la figure ci-dessous on a représenté la droite D d'équation $y=x-1$, la droite D' d'équation $y=x+1$ et plusieurs courbes C_k correspondant à des valeurs particulières de k.

Déterminer le réel k associé à la courbe C passant par le point O puis celui associé à la courbe C' passant par le point A de coordonnées (1 ; 1).

3. On remarque que, pour tout x réel, on a :

$$f_k(x)=x-1+\frac{2}{1+ke^x}\ \textbf{(1)}\ \text{et}\ f_k(x)=x+1-\frac{2ke^x}{1+ke^x}\ \textbf{(2)}.$$

En déduire pour tout k strictement positif :

- la position de la courbe C_k par rapport aux droites D et D' ;
- les asymptotes de la courbe C_k.

4. Cas particulier : k = 1.

a. Justifier que f_1 est impaire.

Exercice 9

On se propose d'étudier la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x)=(x+1)\exp\left(-\frac{1}{x}\right)=(x+1)e^{-\frac{1}{x}}\ \text{si}\ x>0\ \text{et}\ f(0)=0.$$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 4 cm.

<u>1. Variations de f</u>

a. Montrer que la dérivée f' de f sur $]0;+\infty[$ est de la forme $\exp\left(-\frac{1}{x}\right)\times Q(x)$ où Q est une fonction rationnelle.

b. Déterminer la limite de $(1+t)e^{-t}$ lorsque t tend vers $+\infty$. En déduire que f est dérivable en 0 et déterminer $f'(0)$.

c. Etudier le sens de variation de f.

d. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

e. Démontrer que l'équation $f(x)=2$, $x\in[0;+\infty[$, admet une unique solution α dont on donnera un encadrement à 10^{-1} près.

<u>2. Etude d'une fonction auxiliaire</u>

Soit φ la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$\varphi(t)=1-(1+t)e^{-t}$.

a. Calculer la dérivée de φ.

b. Prouver que, pour tout réel t positif ou nul, $0\le\varphi'(t)\le t$.

c. En déduire que, pour tout réel t positif ou nul, $0\le\varphi(t)\le\dfrac{t^2}{2}$ **(1)**

<u>3. Etude de f au voisinage de $+\infty$</u>

a. A l'aide de l'encadrement **(1)**, établir que, pour tout réel x strictement positif : $0\le x-f(x)\le\dfrac{1}{2x}$.

b. En déduire que (C) admet une asymptote (Δ) au voisinage de $+\infty$ et préciser la position de (C) par rapport à (Δ).

<u>4. Etude de la tangente à (C) en un point</u>

Soit a un élément de $]0;+\infty[$, et (T_a) la tangente à (C) au point d'abscisse a.

a. Déterminer une équation cartésienne de (T_a).

b. Montrer que (T_a) coupe l'axe des abscisses $(0;\vec{i})$ au point d'abscisse $\dfrac{a}{1+a+a^2}$.

c. Construire (C) et (Δ). On placera le point de (C) d'ordonnée 2 et on précisera les tangentes à (C) aux points d'abscisses $\frac{1}{3}$, 1 et 3.

Exercice 10

On appelle *f* la fonction définie sur [0 ; +∞[par

$f(x)=xe^{-x}-\frac{1}{2}x$.

1. a. Calculer la dérivée de *f* ainsi que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b. On appelle *g* la fonction définie sur [0 ; +∞[par

$g(x)=(1-x)e^{-x}-\frac{1}{2}$.

Etudier le sens de variation de *g* et montrer que l'équation $g(x)=0$ a une unique solution □ sur [0 ; 0,5]. En déduire l'étude du signe de *g*(*x*) sur [0 ; +∞[et les variations de *f*.

2. On appelle *h* la fonction définie sur l'intervalle I = [0 ; 0,5] par $h(x)=1-\frac{1}{2}e^{x}$.

a. Montrer que α est l'unique solution sur I de l'équation *h*(*x*) = *x*.

b. Etudier les variations de *h*, en déduire que pour tout élément *x* de I, *h*(*x*) appartient à I.

c. Prouver que pour tout élément *x* de I on a –0,83 ≤ *h*'(*x*) ≤ 0.

En déduire que pour tout *x* de I on a

$|h(x)-\alpha|\le 0{,}83|x-\alpha|$.

3. On définit une suite (u_n) par $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=h(u_n)\end{cases}$.

a. Montrer que pour tout entier *n*, u_n appartient à I, et que $|u_{n+1}-\alpha|\le 0{,}83|u_n-\alpha|$.

b. En déduire que pour tout entier *n*, $|u_n-\alpha|\le\frac{1}{2}(0{,}83)^n$

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

4. Préciser un entier *p* tel que l'on ait $\left|u_p-\alpha\right|\le 10^{-2}$.

Calculer u_p à l'aide de votre calculatrice (on en donnera la partie entière et deux décimales). En déduire un encadrement de α.

Montrer que $f(\alpha)=\frac{\alpha^2}{2(1-\alpha)}$, et donner un encadrement de *f* (α).

Exercice 11

Partie A

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x)=(1-2x)e^{2x}$.

1. Etudier les limites de *f* en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. Calculer $f'(x)$, étudier les variations de *f*, dresser son tableau de variation.

3. Tracer la courbe représentative C de *f* dans un repère orthonormal d'unité 2cm.

Partie B

La fonction *f* est toujours celle définie dans la partie A.

On note $f^{(1)}=f'$, $f^{(2)}=f''$, $f^{(3)}$, … $f^{(n)}$ les dérivées successives de *f*, *n* désignant un entier naturel non nul.

1. Calculer $f^{(2)}$ et $f^{(3)}$.

2. Montrer par récurrence sur l'entier non nul *n* que $f^{(n)}(x)=2^n(1-n-2x)e^{2x}$.

3. Pour tout *n* non nul, la courbe représentative de $f^{(n)}$ admet une tangente horizontale en un point M_n.

a. Calculer les coordonnées x_n et y_n de M_n.

b. Vérifier que la suite (x_n) est une suite arithmétique dont on donnera le premier terme et la raison. Quelle est la limite de (x_n) ?

c. Vérifier que la suite (y_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison. Quelle est la limite de (y_n) ?

Exercice 12

Pour chaque entier naturel *n*, on définit sur l'intervalle]0 ; $+\infty$ [la fonction f_n par $f_n(x)=\frac{e^x-1}{x}+n\ln x$.

Partie A : étude du cas particulier *n* = 0.

f_0 est donc définie sur]0 ; $+\infty$ [par $f_0(x)=\frac{e^x-1}{x}$.

1. Justifier, pour tout réel *u*, l'inégalité $e^u\ge u+1$. En déduire que pour tout réel *x*, $e^{-x}+x-1\ge 0$, puis que, pour tout réel *x*, $1+(x-1)e^x\ge 0$.

2. Déterminer les limites de f_0 en 0 et en $+\infty$.

3. Montrer que, pour tout réel *x* appartenant à]0 ; $+\infty$ [,

la dérivée de f_0 est donnée par $f_0'(x)=\dfrac{e^x(x-1)+1}{x^2}$. En déduire le sens de variation de f_0.

4. Représenter la courbe C_0 de f_0 dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

Partie B : étude de la famille de fonctions f_n pour $n\geq 1$

On appelle C_n la courbe représentative de f_n dans le repère précédent.

1. Déterminer le sens de variation de f_n sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

2. Déterminer les limites de f_n en 0 et en $+\infty$. En déduire que C_n possède une asymptote que l'on précisera.

3. Etudier les positions relatives des courbes C_n et C_{n+1}.

4. Montrer que toutes les courbes C_n passent par un même point B dont on précisera les coordonnées.

5. Pour tout entier naturel non nul n, montrer qu'il existe un unique réel a_n appartenant à]0 ; 1[tel que $f_n(a_n)=0$.

6. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $f_{n+1}(a_n)=\ln(a_n)$. En déduire que $a_n\leq a_{n+1}$, puis que la suite (a_n) est convergente.

7. a. En utilisant la partie A, montrer que pour tout réel x appartenant à]0 ; 1], $\dfrac{e^x-1}{x}\leq e-1$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel non nul n, $\ln(a_n)\geq\dfrac{1-e}{n}$, puis que $a_n\geq e^{\frac{1-e}{n}}$.

c. En déduire la limite de la suite (a_n).

8. Construire sur le graphique précédent les courbes C_1 et C_2.

Exercice 13

1. Soit φ l'application de $\mathbb{R}-\{0\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\varphi(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}+1$.

a. Etudier les limites de φ aux bornes du domaine de définition.

b. Montrer que $\varphi'(x)=\dfrac{-(2x+1)}{x^3}e^{\frac{1}{x}}$ et en déduire les variations de φ. Construire le tableau de variations de φ et en déduire que $\varphi(x)$ est strictement positive sur $\mathbb{R}-\{0\}$.

2. Soit f l'application définie dans $\mathbb{R}$ par :
$f(x)=\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ si $x\neq 0$ et $f(0)=0$.

a. Montrer que f est continue en 0.

b. Etudier la dérivabilité de f en 0 et en donner les conséquences graphiques.

c. Etudier les variations de f (on sera amené à utiliser le 1. pour trouver le signe de $f'(x)$. Donner le tableau de variations de f.

d. Construire la courbe de la fonction f.

Exercice 14

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Soit la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=e^{-x}\cos(4x)$ et Γ sa courbe représentative tracée dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ ci-dessous. On considère également la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x)=e^{-x}$ et on nomme C sa courbe représentative dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$, $-e^{-x}\leq f(x)\leq e^{-x}$.

b. En déduire la limite de f en $+\infty$.

2. Déterminer les coordonnées des points communs aux courbes Γ et C.

3. On définit la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$ par $u_n=f\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)$.

a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique. En préciser la raison.

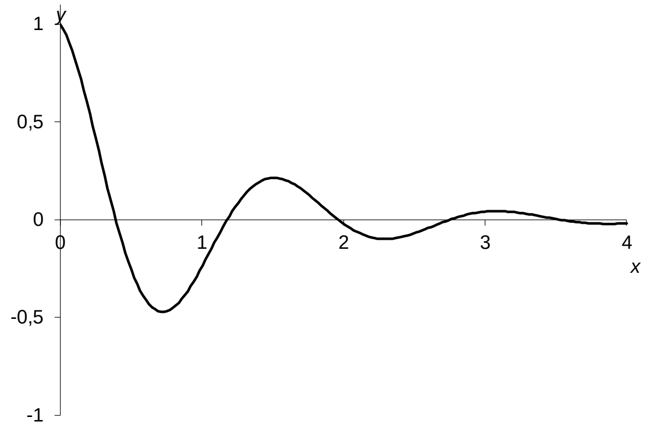
b. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) et étudier sa convergence.

4. a. Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$, $f'(x)=-e^{-x}\left[\cos(4x)+4\sin(4x)\right]$.

b. En déduire que les courbes Γ et C ont même tangente en chacun de leurs points communs.

5. Donner une valeur approchée à 10^{-1} près par excès

du coefficient directeur de la droite T tangente à la courbe Γ au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$. Compléter le graphique donné en annexe, en y traçant T et C .



Exercice 15

Le but de l'exercice est demontrer que l'équation (E) : $e^x = \frac{1}{x}$, admet une unique solution dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, et de construire une suite qui converge vers cette unique solution.

I. Existence et unicité de la solution

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = x - e^{-x}$.

1. Démonter que x est solution de l'équation (E) si et seulement si $f(x) = 0$.

2. Étude du signe de la fonction f.

a. Etudier le sens de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

b. En déduire que l'équation (E) possède une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée α.

c. Démontrer que α appartient à l'intervalle $\left[\frac{1}{2};1\right]$.

d. Étudier le signe de f sur l'intervalle $[0;\alpha]$.

II. Deuxième approche

On note g la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 1] par : $g(x) = \frac{1+x}{1+e^x}$.

1. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation $g(x) = x$.

2. En déduire que α est l'unique réel vérifiant : $g(\alpha) = \alpha$.

3. Calculer $g'(x)$ et en déduire que la fonction g est croissante sur l'intervalle $[0;\alpha]$.

III. Construction d'une suite de réels ayant pour limite α

On considére la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, par : $u_{n+1} = g(u_n)$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $0 \le u_n \le u_{n+1} \le \alpha$.

2. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note l sa limite.

3. Justifier l'égalité : $g(l) = l$. En déduire la valeur de l.

Exercice 16

Partie A : question de cours

1. Soit f une fonction réelle définie sur $[a\ ;+\infty[$.

Compléter la phrase suivante :

«On dit que f admet une limite finie l en $+\infty$ si . . . ..»

2. Démontrer le théorème « des gendarmes » : soient f, g et h trois fonctions définies sur $[a\ ;+\infty[$ et l un nombre réel.

Si g et h ont pour limite commune l quand x tend vers $+\infty$, et si pour tout x assez grand $g(x) \le f(x) \le h(x)$, alors la limite de f quand x tend vers $+\infty$ est égale à l

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x - 1$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal du plan. La droite (D) d'équation $y = -x - 1$ est asymptote à (C).

On a représenté ci-dessous la courbe (C) et la droite (*D*).

1. Soit a un nombre réel. Écrire, en fonction de a, une équation de la tangente (T) à (C) au point M d'abscisse a.

2. Cette tangente (T) coupe la droite (D) au point N d'abscisse b. Vérifier que $b - a = -1$.

3. En déduire une construction, à effectuer sur la figure ci-dessous, de la tangente (T) à (C) au point M

d'abscisse 1,5. On fera apparaître le point N correspondant.

Partie C

1. Déterminer graphiquement le signe de f.

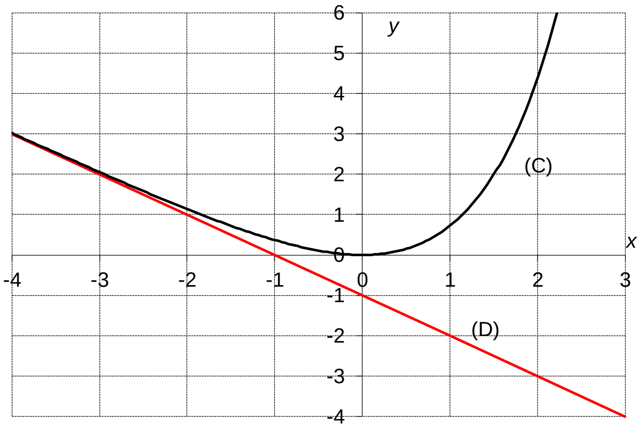
2. En déduire, pour tout entier naturel non nul n, les inégalités suivantes :

$$(1)\ e^{\frac{1}{n}} \geq 1+\frac{1}{n} \text{ et } (2)\ e^{-\frac{1}{n+1}} \geq 1-\frac{1}{n+1}.$$

3. En utilisant l'inégalité (1), démontrer que pour tout entier naturel non nul n : $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \leq e$.

4. En utilisant l'inégalité (2), démontrer que pour tout entier naturel non nul n : $e \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

5. Déduire des questions précédentes un encadrement de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ puis sa limite en $+\infty$.



Exercice 17

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\frac{x}{e^{x}-1}$.

1. Restitution organisée de connaissances : La fonction exponentielle est l'unique fonction g dérivable sur IR vérifiant $\begin{cases} g'(x)=g(x) \\ g(0)=1 \end{cases}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Démontrer que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{h}-1}{h}=1$.

2. Déterminer la limite de la fonction f en 0.

3. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie pour n entier supérieur ou égal à 1 par : $u_n=\frac{1}{n}\left[1+e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\ldots+e^{\frac{n-1}{n}}\right]$.

1. Démontrer que $1+e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\ldots+e^{\frac{n-1}{n}}=\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}$ puis en déduire que $u_n=(e-1)f\left(\frac{1}{n}\right)$.

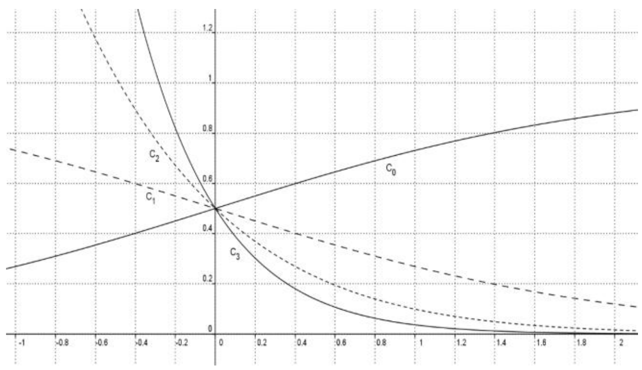
2. En déduire, en utilisant aussi la partie A, que la suite (u_n) converge vers $e-1$.

Exercice 18

Soit n un entier naturel. On note f_n la fonction définie sur l'ensemble IR des nombres réels par :

$$f_n(x)=\frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}.$$

On note C_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. Les courbes C_0, C_1, C_2 et C_3 sont représentées ci-dessous :



Partie A : *Quelques propriétés des fonctions f_n et des courbes C_n*

1. Démontrer que pour tout entier naturel n les courbes C_n ont un point A en commun. On précisera ses coordonnées.

2. Étude de la fonction f_0

a. Étudier le sens de variation de f_0.

b. Préciser les limites de la fonction f_0 en $-\infty$ et $+\infty$. Interpréter graphiquement ces limites.

c. Dresser le tableau de variation de la fonction f_0 sur IR

3. Étude de la fonction f_1

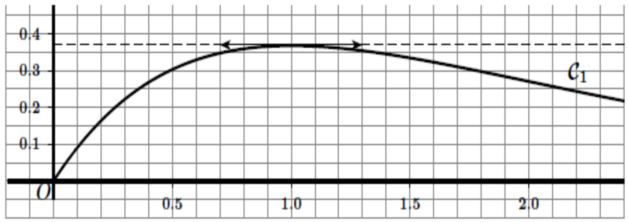
a. Démontrer que $f_0(x) = f_1(-x)$ pour tout nombre réel x.
b. En déduire les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et $+\infty$, ainsi que son sens de variation.
c. Donner une interprétation géométrique de 3. a. pour les courbes C_0 et C_1.

4. Étude de la fonction f_n pour $n > 2$

a. Vérifier que pour tout entier naturel $n > 2$ et pour tout nombre réel x, on a : $f_n(x) = \dfrac{1}{e^{nx} + e^{(n-1)x}}$.
b. Étudier les limites de la fonction f_n en $-\infty$ et en $+\infty$.
c. Calculer la dérivée $f_n'(x)$ et dresser le tableau de variations de la fonction f_n sur IR.

Exercice 19

Soit n un entier supérieur ou égal à 1.
On considère la fonction f_n définie par : pour tout réel $x \in [0 ; +\infty[$, $f_n(x) = nxe^{-nx}$.
On note C_n la courbe représentative de f_n dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
II-1-a- Donner $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$.
II-1-b- On en déduit que C_n admet une asymptote Δ dont on donnera une équation.
II-2-a- f_n' désigne la dérivée de f_n. Justifier que : pour tout réel $x \in [0 ; +\infty[$, $f_n'(x) = ne^{-nx}(1 - nx)$.
II-2-b- Dresser le tableau des variations de f_n.
II-2-c- f_n présente un maximum en un point M_n.
Donner les coordonnées de M_n.
II-3-a- Justifier que : pour tout réel $x \in [0 ; +\infty[$, $f_2(x) - f_1(x) = xe^{-2x}(2 - e^x)$.
II-3-b- On déduit de la question II-3-a- que les courbes C_1 et C_2 ont deux points communs P et Q d'abscisses respectives p et q (avec $p < q$).
Donner les valeurs exactes de p et q et une valeur approchée de q à 10^{-1} près.
II-3-c- Donner, pour tout réel $x \in [0 ; +\infty[$, le signe de $f_2(x) - f_1(x)$.
En déduire la position relative des courbes C_1 et C_2.



II-4- Sur la figure est tracée la courbe C_1. Placer les points M_1, M_2, P et Q.
Tracer la tangente à la courbe C_2 au point M_2, puis tracer la courbe C_2.
II-5- On considère la fonction F définie par : pour tout réel $x \in [0 ; +\infty[$, $F(x) = -(x+1)e^{-x}$.
II-5-a- Justifier que F est une primitive de la fonction f_1.

Exercice 20

Problème
Partie A
1. En janvier 2006, l'once d'or (soit environ 31 grammes d'or) coûtait 500 \$ contre 1 700 \$ en janvier 2013 (source Les Echos, 2013). Le cours de l'or a donc connu une progression spectaculaire avec une augmentation moyenne d'environ 19 % par an.
En supposant que cette augmentation annuelle reste constante pour les prochaines années, à partir de quelle année le prix de l'once d'or dépassera-t-il les 5 000 \$?
2. On s'intéresse à une entreprise spécialisée dans la production d'articles dont la qualité augmente quand on y introduit de l'or. Le coût de production de ces articles, exprimé en milliers d'euros, peut être modélisé par une fonction C.
Cette fonction C dépend principalement de la masse d'or, exprimée en dizaines de grammes, contenue dans les articles. Les coûts de production augmentant très fortement (on parle, en économie, d'une croissance exponentielle) en fonction de la masse d'or contenue, l'entreprise ne produira que des articles ne contenant qu'une faible quantité d'or.
On admet que tous les articles fabriqués sont vendus et

que leur prix de vente est proportionnel à la masse d'or contenue, la même pour tous les articles.

On appelle R la recette de l'entreprise exprimée en milliers d'euros en fonction de x la quantité d'or exprimée en dizaines de grammes d'or.

Les courbes des fonctions C et R sont données dans le repère ci-dessous.

On suppose que la quantité d'or minimale contenue dans chaque article est de dix grammes.

a. Identifier, en justifiant, les courbes associées aux fonctions de coût et de recette.

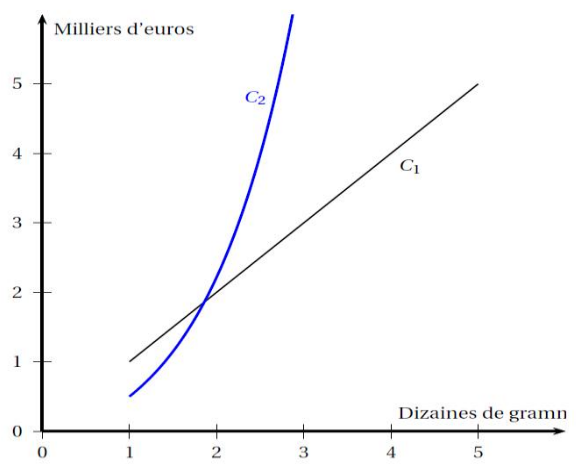
b. Conjecturer le sens de variation de chacune des fonctions.

3. On dit que l'entreprise a un bénéfice nul lorsque le coût de production est égal à la recette.

a. Justifier graphiquement qu'il existe une masse d'or exprimée en dizaines de grammes et notée α pour laquelle le bénéfice de l'entreprise est nul et en déduire une équation vérifiée par α.

b. Déterminer, avec la précision permise par le graphique, les masses d'or que les articles doivent contenir pour que l'entreprise réalise des bénéfices positifs.

Partie B



On se propose d'étudier la fonction C définie et dérivable sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$ par : $C(x)=e^{x-1}-\frac{1}{2}$ et les solutions éventuelles de l'équation $C(x) = x$.

Pour cela on pose $\phi(x)=C(x)-x$, pour $x\in[1\,;+\infty[$.

1. Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction ϕ.

2. Déterminer le sens de variation de la fonction ϕ sur $[1\,;+\infty[$.

3. En déduire que l'équation $C(x) = x$ admet une unique solution α.

4. Établir que $\frac{3}{2}\alpha<2$.

Partie C

On se propose d'étudier une méthode d'approximation du nombre α.

Soit g la fonction définie sur $I=\left[\frac{3}{2}\,;2\right]$ par :

$g(x)=\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)+1$.

1. Démontrer que l'équation $C(x) = x$ équivaut à l'équation $g(x) = x$ pour $x\in I$.

2. a. Justifier que la fonction g est croissante sur I et en déduire que, pour tout réel x appartenant à I, $g(x)$ appartient à I.

b. Montrer que, pour tout réel x de I : $0\leq g'(x)\leq\frac{1}{2}$.

3. On admet alors que, pour tout couple de réels $(x\,;y)$ de I, on a : $\frac{|g(x)-g(y)|}{|x-y|}\leq\frac{1}{2}$.

a. Montrer que, pour tout réel x de I, on a : $\frac{|g(x)-\alpha|}{|x-\alpha|}\leq\frac{1}{2}$.

Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite d'éléments de I définie par $w_0=\frac{3}{2}$ et pour tout entier naturel $n>0$, $w_{n+1}=g(w_n)$.

b. Donner une valeur arrondie à 10^{-3} près de w_2 et w_3.

c. Établir que pour tout entier naturel n :

$|w_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}|w_0-\alpha|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

d. En déduire que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Quelle est sa limite ?

4. Donner un encadrement de la limite de la suite $\left(w_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ d'amplitude 10^{-4}. Expliquer la démarche.

5. Pour quelle masse d'or incluse dans les articles produits, l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice nul ? La masse sera donnée en grammes à 10^{-2} près.

Exercice 21

Pour tout réel k strictement positif, on considère la fonction f_k définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f_k(x)=\ln\left(e^x+kx\right)-x$. Soit C_k la courbe représentative de f_k dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unités : 5 cm sur l'axe des abscisses, 10 cm sur celui des ordonnées).

Etude préliminaire

On considère la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x)=\ln(1+x)-x$.

1. Etudier le sens de variation de g.
2. En déduire que, pour tout réel a positif ou nul, $\ln(1+a)\leq a$.

Partie A : étude de f_1

1. Calculer $f_1'(x)$ et en déduire le sens de variation de f_1.
2. Montrer que, pour tout x de $[0\,;+\infty[$, $f_1(x)=\ln\left(1+\dfrac{x}{e^x}\right)$.
3. Dresser le tableau de variation de f_1.

Partie B : étude et propriétés de f_k

1. Calculer $f_k'(x)$ et en déduire le sens de variation de f_k.
2. Montrer que, pour tout x de $[0\,;+\infty[$, $f_k(x)=\ln\left(1+k\dfrac{x}{e^x}\right)$. En déduire la limite de f_k en $+\infty$.
3. a. Dresser le tableau de variation de f_k.

b. Montrer que, pour tout réel x de $[0,+\infty[$, on a $f_k(x)\leq\dfrac{k}{e}$.

4. Déterminer une équation de la tangente (T_k) au point d'abscisse 0 de C_k.
5. Soit p et m deux réels strictement positifs tels que $p < m$. Etudier la position relative de C_p et C_m.
6. Tracer les courbes C_1 et C_2 ainsi que leurs tangentes en 0.

Exercice 22

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\ln(e^{2x}-e^x+1)$$

le symbole ln désignant le logarithme népérien.

1. Montrer que $e^{2x}-e^x+1$ est strictement positif pour tout réel x. Étudier les variations de la fonction f.

Soit (C) la courbe représentative, dans un repère orthonormé, de la fonction f.

2. Préciser les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$
3. Vérifier que $f(x)-2x=\ln(1-e^{-x}+e^{-2x})$ et montrer que $f(x)-2x$ tend vers une limite lorsque x tend vers $+\infty$. En déduire l'asymptote correspondante de (C).
4. Construire la courbe (C) (on précisera la tangente au point de (C) d'ordonnée nulle).
5. Déterminer, en utilisant la courbe (C), le nombre de solutions réelles de l'équation d'inconnue x :

$$e^{2x}-e^x+1=\frac{7}{8}$$

a. par le calcul,

b. en utilisant la courbe (C).

Exercice 23

Soit f l'application de $]0\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x)=2x+\dfrac{1}{2}\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$, et g l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x)=2e^{2x}-5e^x+2$.

Partie A

1. Montrer que, pour tout x de $]0\,;+\infty[$, on a $f(x)=2x+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{e^x-1}$.
2. Montrer que pour tout x de $]0\,;+\infty[$ on a $f(x)=2x-\dfrac{1}{2}+\dfrac{e^x}{e^x-1}$.
3. Résoudre l'équation $g(x)=0$ puis factoriser $g(x)$.

Partie B : Etude de f

1. Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

2. a. Montrer que la droite (D) d'équation $y=2x+\frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe (C) représentative de f.

b. Etudier la position de (C) par rapport à (D).

3. Montrer que la fonction dérivée de f est du signe de la fonction g de la partie A et dresser le tableau de variation de f.

4. Réprésenter (C) et ses asymptotes dans un repère orthonormal (unité graphique : 1 cm)

5. a. Etudier graphiquement suivant les valeurs du nombre réel m, l'intersection de (C) et de la droite (D_m) d'équation $y = 2x + m$.

b. Démontrer par le calcul ces résultats (on pourra utiliser le A.1.).

Partie C : Calcul d'aire

1. En reconnaissant la forme $\frac{u'(x)}{u(x)}$, déterminer les primitives sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction $x\mapsto \frac{e^x}{e^x-1}$.

2. En déduire, en utilisant A.2., les primitives sur $]0\,;+\infty[$ de $f(x)-(2x+\frac{1}{2})$.

Exercice 24

Dans tout le problème $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$ est un repère orthonormé du plan P.

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$.

On appelle C la courbe représentative de f dans le repère $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Partie A

1. Etude de f:

a. Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$. Justifier vos calculs.

b. Préciser les équations des asymptotes.

2. Donner l'expression de $f'(x)$ où f' est la dérivée de f. Dresser le tableau de variation de f. Préciser $f(0)$.

3. Déterminer une équation de la tangente à C au point d'abscisse x=0 ; on note T_0 cette tangente.

4. Courbe :

a. Soit x un réel quelconque. Calculer $f(x)+f(-x)$.

b. Quelle propriété de symétrie peut on déduire de la question précédente ?

c. Tracer C, ses asymptotes et la tangente T_0.

Partie B

1. a. Soit $u(x)=1+e^{-x}$. Calculer $u'(x)$.

b. En déduire la primitive F de f qui prend la valeur –ln2 en x=0.

Exercice 25

On désigne par f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et par f' sa fonction dérivée. Ces fonctions vérifient les propriétés suivantes :

(1) Pour tout nombre réel x, $\left(f'(x)\right)^2-\left(f(x)\right)^2=1$.

(2) $f'(0)=1$

(3) La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On rappelle que la dérivée de u^n est $nu'u^{n-1}$.

1. a. Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x)\neq 0$.

b. Calculer $f(0)$.

2. En dérivant chaque membre de l'égalité de la proposition (1), démontrer que :

(4) Pour tout nombre réel x, $f''(x)=f(x)$.

où f'' désigne la dérivée seconde de la fonction f.

3. On pose $u=f'+f$ et $v=f'-f$.

a. Calculer $u(0)$ et $v(0)$.

b. Démontrer que $u'=u$ et $v'=-v$.

c. En déduire les fonctions u et v.

d. En déduire que, pour tout réel x, $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

4. a. Etudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$.

b. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

5. a. Soit m un nombre réel. Démontrer que l'équation $f(x)=m$ a une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

b. Déterminer cette solution lorsque m = 3 (on en donnera une valeur approchée décimale à 10^{-2} près).

Exercice 26

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$f(x)=2x+1+\frac{1}{e^x-1}$.

On note C sa courbe représentative dans un repère orthogonal (unités : 2 cm sur l'axe des abscisses, 1 cm sur l'axe des ordonnées).

1. Déterminer la limite de f quand x tend vers 0, x réel positif. En déduire que C possède une asymptote dont on précisera l'équation.

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Montrer que la droite D d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à C. Étudier la position de C par rapport à la droite D.

3. a. Calculer, pour tout x réel strictement positif, le nombre dérivé $f'(x)$. Montrer que, pour tout x réel strictement positif, $f'(x) = 2\dfrac{\left(e^x - \frac{1}{2}\right)\left(e^x - 2\right)}{\left(e^x - 1\right)^2}$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$. En déduire le tableau de variations de f sur cet intervalle.

4. Tracer la courbe C et ses asymptotes.

5. a. Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout $x > 0$, $f(x) = ax + b + \dfrac{ce^x}{e^x - 1}$.

Exercice 27

On considère la fonction numérique f définie sur $]-\infty\ ; 1[$ par $f(x) = \dfrac{2}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}}$.

On désigne par (Γ) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O\ ; \vec{i}, \vec{j})$, l'unité graphique étant 2 cm.

Partie 1

1. a. Soit $X = \dfrac{2}{x-1}$. Prouver l'égalité $f(x) = \dfrac{e}{2}X^2e^X$. En déduire la limite de f quand x tend vers 1 par valeurs inférieures.

b. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

c. En déduire une asymptote à la courbe (Γ).

2. a. Soit v la fonction numérique définie sur $]-\infty\ ; 1[$ par $v(x) = e^{\frac{x+1}{x-1}}$. Calculer $v'(x)$.

b. Démontrer que $f'(x) = \dfrac{-4x}{(x-1)^4} e^{\frac{x+1}{x-1}}$.

c. Etudier les variations de f.

d. Tracer la courbe (Γ).

Exercice 28

Soit f la fonction définie sur $[0\ ;+\infty[$ par $f(x) = x^2 - 3 + 3e^{-\frac{1}{3}x}$ et g la fonction également définie sur $[0\ ;+\infty[$ par $g(x) = 2x - e^{-\frac{1}{3}x}$. On note C la courbe représentative de f dans le repère orthonormal $\left(O\ ; \vec{i}, \vec{j}\right)$, unité graphique : 2 cm.

1. Sens de variation de g

a. Calculer la dérivée g' de g ; vérifier que $g'(x)$ est toujours strictement positif.

b. Calculer la limite de g quand x tend vers $+\infty$.

c. Déduire de ce qui précède l'existence et l'unicité d'un nombre réel $\alpha > 0$ tel que $g(\alpha) = 0$ et montrer que $0{,}4 \leq \alpha \leq 0{,}5$.

d. Étudier le signe de $g(x)$ sur $[0\ ;+\infty[$.

e. Montrer que $f'(x) = g(x)$; en déduire le sens de variation de f.

2. Comportement asymptotique de f en $+\infty$

a. Déterminer la limite de f en $+\infty$

b. Déterminer le signe de $f(x) - (x^2 - 3)$ et sa limite en $+\infty$; interpréter graphiquement ce résultat ; on note P la courbe d'équation $y = x^2 - 3$.

3. Signe de f

a. Dresser le tableau de variation de f

b. Prouver que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution non nulle a et une seule appartenant à l'intervalle $[\alpha\ ;+\infty[$ et montrer que $0{,}8 < a < 0{,}9$.

c. Étudier le signe de $f(x)$ sur $[0\ ;+\infty[$.

4. Courbe

Tracer dans le repère orthonormal $\left(O\ ; \vec{i}, \vec{j}\right)$ les courbes P et C. On précisera la tangente à C au point d'abscisse 0.

Exercice 29

A. On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{\frac{x}{2}}-e^{x}$ et on appelle C la courbe représentative de f dans le repère orthonormal $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Étudier les variations de f. Préciser les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Déterminer le signe de $f(x)$ en fonction de x.
3. Tracer la courbe C.

B. Dans cette partie, on se propose d'étudier la fonction g définie sur $\mathbb{R}-\{0\}$ par $g(x)=\ln\left|e^{\frac{x}{2}}-e^{x}\right|$.

On note G la courbe représentative de g dans le repère $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Préciser les limites de g en $-\infty$, en $+\infty$ et en 0.
2. Calculer $g'(x)$ et déterminer le signe de $g'(x)$ en utilisant le signe de $f'(x)$ et le signe de $f(x)$. Dresser le tableau de variation de g.
3. Démonter que pour tout x réel strictement positif,

$$g(x)-x=\ln\left(1-e^{-\frac{x}{2}}\right).$$

Montrer que la droite D d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe G. Étudier la position de la courbe G par rapport à D pour tout x réel strictement positif.

4. Démontrer que pour tout x réel strictement négatif :

$$g(x)-\frac{x}{2}=\ln\left(1-e^{\frac{x}{2}}\right).$$

Montrer que la droite d d'équation $y=\dfrac{x}{2}$ est asymptote à la courbe G. Étudier la position de G par rapport à d pour tout x réel strictement négatif.

5. Construire G, D et d (on utilisera un graphique différent de celui de la partie A).

Exercice 30

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{xe^{x}}{e^{x}-1} \text{ si } x\neq 0 \text{ et } f(0)=1.$$

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b. Établir que, pour tout nombre réel x non nul,

$f(x)=x\left(1+\dfrac{1}{e^{x}-1}\right)$. En déduire la limite de f en $+\infty$.

2. Donner, sans démonstration, la limite suivante :

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{e^{x}-1}$ et démontrer que f est continue en 0.

3. a. Démontrer que, pour tout nombre réel x, on a :

$e^{x}\geq x+1$, et que l'égalité n'a lieu que pour $x = 0$.

b. Calculer la dérivée f' de la fonction f et déterminer la fonction g telle que, pour tout nombre réel x non nul,

$$f'(x)=\frac{e^{x}g(x)}{\left(e^{x}-1\right)^{2}}.$$

c. Donner le tableau des variations de f.

4. Soient x un nombre réel non nul et les points $M(x\,;f(x))$ et $M'(-x\,;f(-x))$ de la courbe C.

a. Établir que $f(-x)=\dfrac{x}{e^{x}-1}$, puis déterminer le coefficient directeur de la droite (MM').

b. On admet que la fonction f est dérivable en 0. Que suggère alors le résultat précédent ?

Exercice 31

L'objet de cet exercice est d'étudier la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(t)=\dfrac{1-e^{-t}}{t}$ si $t>0$ et $g(0)=1$.

1. a. Établir que g est continue en 0.

b. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

2. a. Pour tout $t > 0$, calculer $g'(t)$.

b. Prouver que pour tout $t\geq 0$, $1+t\leq e^{t}$.

c. En déduire le signe de g' et le sens de variation de g (on ne demande pas de construire la courbe représentative de g).

3. On se propose d'étudier la dérivabilité de g en 0. À cet effet on introduit la fonction h définie sur $[0, +\infty[$ par : $h(t)=1-t+\dfrac{t^{2}}{2}-e^{-t}$.

a. Calculer h' *et* h'', ainsi que les valeurs de $h(0)$ *et* $h'(0)$.

b. Prouver que pour tout $t \geq 0$, $0 \leq h(t) \leq \frac{t^3}{6}$ (1). Pour cela, on établira d'abord que $0 \leq h''(t) \leq t$ et on en déduira un encadrement de h' et de h.

c. Déduire de la relation (1) un encadrement de $\frac{1-e^{-t}-t}{t^2}$. Prouver finalement que g est dérivable en 0 et donner la valeur de $g'(0)$.

4. Construire la courbe représentative C de g, le plan étant rapporté à un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Exercice 32

Le but des deux premières questions de cet exercice est l'étude, sur $\mathbb{R}$, de l'équation

$$(E):\ 3^x + 4^x = 5^x$$

1. Démontrer que (E) est équivalente à :

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1.$$

2. On considère la fonction f définie sur IR par :

$$f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x.$$

a. Question de cours : pour tout réel a strictement positif, on note f_a la fonction (exponentielle de base a) définie pour tout réel x par : $f_a(x) = a^x = e^{x\ln a}$.

Démontrer que f_a est strictement croissante lorsque a est élément de $]1\,;+\infty[$, strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ lorsque a est élément de $]0\,;1[$ et est constante lorsque a est égal à 1.

Étudier la limite de f_a en $+\infty$, selon les valeurs de a.

b. Étudier le sens de variations de f.

c. Étudier la limite de f en $+\infty$.

d. En déduire qu'il existe un unique x_0 réel positif ou nul tel que $f(x_0) = 1$. Donner la valeur de x_0.

3. Questions avec « prise d'initiative »

a. Résoudre, sur IR, l'équation : $3^x + 4^x + 5^x = 6^x$.

b. L'équation $3^x + 4^x + 5^x + 6^x = 7^x$ admet-elle une solution entière (x solution est un nombre entier) ?

Exercice 33

<u>Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire g</u>

Soit g la fonction numérique définie sur R par

$$g(x) = \frac{e^x}{1+2e^x} - \ln(1+2e^x),$$

1. Calculer $g'(x)$ et montrer que ce nombre est strictement négatif pour tout x de $\mathbb{R}$.

2. Déterminer la limite de g en $-\infty$.

3. Dresser le tableau de variation de la fonction g. En déduire le signe de $g(x)$.

<u>Partie B : Étude de la fonction f</u>

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = e^{-2x}\ln(1+2e^x)$.

1. Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout réel x,

$$f'(x) = 2e^{-2x}g(x).$$

2. En posant $X = 1+2e^x$, montrer que

$f(x) = \frac{4X}{(X-1)^2}\,\frac{\ln X}{X}$. En déduire la limite de f en $+\infty$

3. En posant $h = 2e^x$, calculer la limite de f en $-\infty$.

4. Dresser le tableau de variation de f.

5. On note C sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unités graphiques : 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées).

a. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

b. Tracez la courbe C et la tangente T.

Exercice 34

1. Résoudre les équations et inéquations suivantes :

a. $2^x = 3^{2x+1}$ b. $\sqrt{2}^{\sqrt{x}} = 5$

c. $5^{1-x} \leq 3$ d. $7^{\frac{x}{x+1}} \leq 6^x$

2. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes et calculer leur dérivée :

a. f définie par $f(x) = x^{\ln x}$

b. g définie par $g(x) = (\ln x)^x$.

Exercice 35

On appelle f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{e^{-x}-1}{\sqrt{x}} \text{ si } x\neq 0,\text{ et } f(0)=0.$$

1. Prouver que $\lim\limits_{t\to 0}\frac{e^{-t}-1}{t}=-1$
2. En déduire la continuité de f en 0.
3. Etudier le signe de $f(x)$.
4. Etudier la limite de f en $+\infty$.
5. Montrer que l'on a pour tout $x>0$:

$$f'(x)=\frac{1-e^{-x}-2xe^{-x}}{2x\sqrt{x}}.$$

6. Etudier les variations de f à l'aide d'une fonction auxiliaire.
7. Etudier la dérivabilité de f en 0 (on sera amené à utiliser la question 1)

Exercice 36

On appelle f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=xe^{\frac{1}{x}} \text{ si } x<0 \\ f(0)=0 \\ f(x)=xe^{-x} \text{ si } x>0 \end{cases}.$$

1. Etudier les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Etudier la continuité de f en 0.
3. Etudier la dérivabilité de f en 0.
4. Etudier les variations de f.
5. Montrer que la droite d'équation $y=x+1$ est asymptote à la courbe de f (on sera amené à poser $x=\frac{1}{t}$).
6. Tracer la courbe de f dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité 3 cm.

Exercice 37

On désigne par a un réel strictement positif et différent de 1.

On se propose de rechercher, dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$, les solutions de l'équation E_a : $x^a=a^x$.

I. Étude de quelques cas particuliers

1. Vérifier que les nombres 2 et 4 sont solutions de l'équation E_2.
2. Vérifier que le nombre a est toujours solution de l'équation E_a.
3. On se propose de démontrer que e est la seule solution de l'équation E_e.

On note h la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $h(x)=x-e\ln x$.

a. Question de cours : On rappelle que lorsque t tend vers $+\infty$, alors $\frac{e^t}{t}$ tend vers $+\infty$.

Démontrer que $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0$.

b. Déterminer les limites de h en 0 et $+\infty$.

c. Etudier les variations de h sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

d. Dresser le tableau des variations de h et conclure quant aux solutions de l'équation E_e.

II. Résolution de l'équation E_a

1. Soit x un réel strictement positif. Montrer que x est solution de l'équation E_a si et seulement si x est solution de l'équation : $\frac{\ln x}{x}=\frac{\ln a}{a}$.
2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

a. Déterminer les limites de f en 0 et $+\infty$. Donner une interprétation graphique de ces deux limites.

b. Etudier les variations de f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

c. Dresser le tableau des variations de la fonction f.

d. Tracer la courbe C représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, unité : 2 cm.

3. Justifier à l'aide des résultats précédents les propositions (P_1) et (P_2) suivantes :

(P_1) : si $a\in]0;1]$, alors E_a admet l'unique solution a ;

(P_2) : si $a\in]1;e[\cup]e\,;+\infty[$, alors E_a admet deux solutions a et b, l'une appartenant à l'intervalle $]1\,;e[$ et l'autre appartenant à l'intervalle $]e\,;+\infty[$.

Exercice 38

b) Etudier les variations de la fonction f

c) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}$

1/a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x)=\dfrac{4e^x}{(e^x+1)^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f

2/a) Etudier les variations de la fonction $g(x)=f(x)-x$.

b) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution a sur $\mathbb{R}$ et que $a\in\left]2;3\right[$

3/a) Montrer que $\forall x\in\left]2;3\right[$ on a : $|f'(x)|\le 0,5$

b) En déduire que $\forall\ x\in[2;3]$ on a : $|f(x)-a|\le 0,5.|x-a|$

4/ Soit V la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases}V_0=3\\ V_{n+1}=f(V_n)\end{cases}$

a) Montrer par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}:\ 2\le V_n\le 3$

b) Montrer que : $|V_{n+1}-a|\le 0,5.|V_n-a|$

c) Déduire que $\forall n\in\mathbb{N}: |V_n-a|\le(0,5)^n$ et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}V_n$

Exercice 39

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x)=1-\ln(1+e^{-x})$

I-1/a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$. Interpréter géométriquement le résultat.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

2/a) Montrer que $\forall\ x\in\mathbb{R}$ on a $f(x)=x+1-\ln(1+e^x)$

b) En déduire que la droite D : y = x + 1 est une A.O à ζ_f au $V(-\infty)$

c) Déterminer la position de ζ_f par rapport à D

3/a) Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}\ f'(x)=\dfrac{1}{1+e^x}$

solution unique $x_0=-\ln(e-1)$

4/ Tracer la courbe de ζ_f et ses asymptotes

5/a) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\left]-\infty,1\right[$

b) Tracer $\zeta_{f^{-1}}$ courbe représentative de f^{-1}, fonction réciproque de f

c) Explicité $f^{-1}(x)$ pour $x\in\left]-\infty,1\right[$

Exercice 40

A) Soit g la fonction définie sur IR par

$g(x)=(1-x)e^x+1$

1) Dresser le tableau de variation de g.

2) a) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α et que $1.2<\alpha<1.3$.

b) En déduire le signe de g sur IR.

B) Soit f une fonction définie sur IR par $f(x)=\dfrac{x}{e^x+1}$.

On désigne par **(C)** sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ .Interpréter graphiquement ce résultat.

2) a) Montrer que la droite $\Delta: y=x$ est une asymptote à **(C)**.

b) Etudier la position relative de **(C)** et Δ .

3) Montrer que pour tout réel x, on a: $f(-x)=f(x)-x$.

4) Vérifier que $f(\alpha)=\alpha-1$ et que $f(-\alpha)=-1$

5) a) Montrer que $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(e^x+1)^2}$ puis dresser le tableau de variation de f.

b) Vérifier que $f'(-\alpha)=1$ puis écrire une équation de la tangente T à **(C)** au point d'abscisse $-\alpha$.

6) Pour tout réel non nul x, soient les points M et M' de **(C),** d'abscisses respectives x et $-x$.

Montrer que la droite (MM') est parallèle à une droite fixe qu'on précisera.

7) Dans la figure de la page annexe, on a placé dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ le point de coordonnées $(\alpha,0)$.

a) Construire les points A $(\alpha,\alpha-1)$ et B $(-\alpha,-1)$.

b) Construire la tangente T.

c) Tracer la courbe **(C)** et la droite Δ .

Exercice 41

A/Soit la fonction f définie sur IR par :

$f(x) = x - e^{2x-2}$. On note (C) sa courbe dans un repère orthonormé (O, $\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$).

1) a) Résoudre dans IR, l'équation $1 - 2e^{2x-2} \geq 0$

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f

2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans IR exactement deux solution α et 1.

Vérifier que $\alpha \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$.

B/ Soit la fonction g définie sur IR par : $g(x) = e^{2x-2}$ et la suite (u_n) définie sur IN par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$$

1) Montrer que pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$

2) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

4) a) Montrer que pour tout $\in \left[0,\frac{1}{2}\right]$, on a :

$|g'(x)| \leq \frac{2}{e}$

b) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que pour tout entier naturel n, on a :

$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{e}|u_n - \alpha|$

c) En déduire que pour tout entier naturel on a :

$|u_n - \alpha| \leq (\frac{2}{e})^n$. Retrouver alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 42

Soit la fonction g définie sur $\Re$ par :

$g(x) = e^x(2-x) - 2$

1°) Dresser le tableau de variation de g ?

2°) a- Monter que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $]1;+\infty[$ une solution unique α

b- Calculer $g(0)$.Etudier alors le signe de $g(x)$.

3°) Soit la fonction f définie sur IR par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2}{e^x - 1} & si \quad x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}.$$

a- Montrer que f est continue et dérivable en 0

b- Montre que $f'(x) = \dfrac{x\,g(x)}{(e^x-1)^2}$.

4°)a- Montrer que $f(\alpha) = \alpha(2-\alpha)$.

b- Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$, en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

c- Dresser le tableau de variation de f et Tracer ξ_f

Exercice 43

Soit g(x)=x+ln(e^{-2x} + 1) ; x ∈ [0,+∞[. On désigne par (C) sa courbe représentative selon un repère orthonormé (O, $\vec{u}$,$\vec{v}$).

1) Etablir le tableau de variation de g.

2) Montrer que la droite D : y=x est une asymptote à (C) au voisinage de +∞.

3) Etudier la position de (C) par rapport à D.

4) Tracer (C) et D.

5) a) Montrer que f réalise une bijection de [0,+∞[sur un intervalle K qu'on précisera.

b) Tracer la courbe (C') de la fonction réciproque f^{-1} de f.

6) a) Montrer que pour tout t de [0,+∞[on a :

$1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$

b) En déduire que pour tout x de [0,+∞[on a :

$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(x+1) \leq x$

c) En déduire un encadrement de ln(1+e^{-2t}) pour tout t de [0,+∞[.