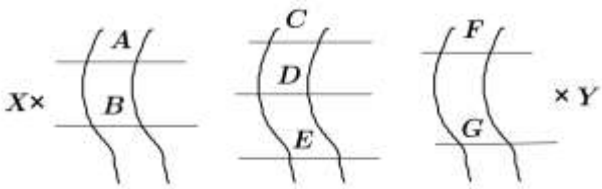
Pr. LATRACH Abdelkbir	Calcul de probabilités	Nom : --------------------------------

I. Dénombrement

1. Principe général du dénombrement

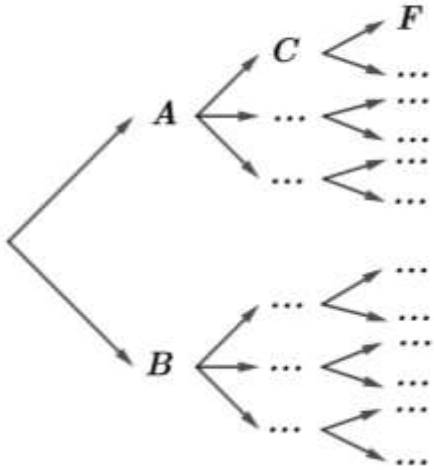
Activité ①:

Une personne veut atteindre le point Y à partir du point X par le passage de trois vallées comme le montre la figure ci-dessous :



L'écriture ACF signifie que cette personne est passée par le pont A, le pont C puis le pont F.

1) Compléter l'arbre suivant, puis déduire l'ensemble des chemins menant au point Y.



2) Calculer le nombre de chemins que cette personne pourrait emprunter pour atteindre le point Y.

Solution :

Définition :

Soit une expérience nécessitante p choix
Si le premier choix se fait de n_1 manière différente et le second choix se fait de n_2 manière différente … et le $p^{ième}$ choix se fait de n_p manière différente, alors le nombre de façons dont tous ces choix sont faits est :
$n =$ ------------------------------

Exemple ① :

On considère les chiffres suivants : 1 ; 3 ; 4 ; 5 ; 7 et 8.

- Déterminons le nombres codes de 3 chiffres distincts deux à deux qu'on peut former à partir des chiffres précédents.

Donc d'après le principe général de dénombrement le nombre de codes possibles est : ----------------------------

- Déterminons le nombres codes pairs de 4 chiffres qu'on peut former à partir les chiffres précédents.

- Déterminons le nombres codes pairs de 3 chiffres distincts deux à deux qu'on peut former à partir les chiffres précédents.

Exemple ② :

Une personne possède trois chemises, deux cravates et trois pantalons.
Déterminons le nombre de costumes que cette personne peut porter. (Chaque costume se compose d'une chemise, d'une cravate et d'un pantalon)

Application ① :

Dans un restaurant d'entreprise, le repas comporte un plat et un dessert.
Le menu propose au choix deux plats et trois desserts.
De combien de manière peut -on composer un repas ?

Solution :

✍ Exercice ①:

Une urne contient cinq boules noires et 12 boules blanches indiscernables au toucher.
On tire successivement et sans remise (sans remettre la boule après l'avoir tirée dans l'urne) deux boules de l'urne.

1) Construire l'arbre des choix.
2) Quel est le nombre de tirages comportant 2 boules de mêmes couleurs ?
3) Quel est le nombre de tirages comportant 2 boules de couleurs différentes ?
4) Répéter les mêmes questions précédentes au cas où le tirage est successif et avec remise.

2. Arrangement

a. Arrangement sans répétition

✍ Activité ②:

On veut ranger, Trois vases parmi cinq notés $1, 2, 3, 4$ et 5 dans un placard contenant trois tiroirs notés A , B et C.

1) Combien de rangements différents peut-on réaliser ?
2) Combien de rangements où le vase 1 est placé dans le tiroir A ?
3) Combien de rangements sont effectués dans deux tiroirs ?
4) Combien de rangements différents peut-on réaliser si on dispose de 5 tiroirs A, B, C, D et E ?

Solution :

Définition et propriété :

- Chaque ordre de p parmi n éléments (sans possibilité de répéter le même élément) est appelé un ***arrangement*** de p parmi n éléments, on note le nombre des ***arrangements*** de p éléments parmi n par A_n^p et $A_n^p = n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)$.
- Tout arrangement de n éléments parmi n éléments est appelé une ***permutation.***

On note le nombre de permutations de n par : $n!$.
Et on a : $n! = A_n^n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$.

Remarques :

- Par convention : $A_n^0 = 1$ et $0! = 1$.
- $n!$ se lit 'factorielle n' .
- L'ordre est important dans tout arrangement.

✍ Application ②:

1. Calculer les nombres A_5^3, A_9^4 , A_7^1 et $5!$.
2. Comparer $\frac{7!}{(7-5)!}$ et A_7^5.

Solution :

1. Calcul des nombres A_5^3, A_9^4 , A_7^1 et $5!$.

✓ $A_5^3 =$ ----------

✓ $A_9^4 =$ ----------

✓ $A_7^1 =$ ----------

✓ $5! =$ ----------

2. Comparons $\frac{7!}{(7-5)!}$ et A_7^5.

✓ $\frac{7!}{(7-5)!} =$ ----------

✓ $A_7^5 =$ ----------

Remarque :

$A_p^n =$ ----------

✍ Application ③:

On veut former des mots à trois lettres distinctes, avec les lettres A, B, C, D, E et F.
Déterminer le nombre de mots possibles.

Solution :

✍ Application ④:

Un parking comporte sept places libres repérées par les numéros 1 à 7.
De combien de façons peut-on garer :

1) Une voiture ?

2) Trois voitures ?

3) Sept voitures ?

Solution :

Application ⑤ :

1) De combien de façons peut-on faire asseoir six personnes sur une table douze chaises ?

2) De combien de façons peut-on faire asseoir douze personnes sur table de douze chaises ?

Solution :

Application ⑥:

Une urne contient quatre boules blanches, trois boules Jaunes et une boule noire indiscernables au toucher. On tire successivement et sans remise trois boules de l'urne. Donner le nombre de tirages possibles.

Solution :

b. Arrangement avec répétition

Propriété :

Pour tout entier n et tout entier p tel que : $1 \leq p \leq n$.
Le nombre des arrangements avec répétition p éléments parmi n est : n^p.

Application ⑦:

Une urne contient quatre boules blanches, trois boules Jaunes et une boule noire indiscernables au toucher. On tire successivement et avec remise trois boules de l'urne. Donner le nombre de tirages possibles.

Solution :

3. Combinaison

Activité ③:

Un groupe se compose de quatre personnes $\{a\,; b; c; d\}$. Nous voulons former un comité de trois personnes pour effectuer une tâche.

1) Déterminer les comités qu'on peut former.

2) Calculer $\frac{A_4^3}{3!}$. Conclure.

Solution :

Définition et propriété :

Soient $n \in \mathbb{N}$ et E un ensemble fini de n éléments et p un entier vérifiant : $1 \leq p \leq n$
On appelle **combinaison** de p éléments parmi n éléments de E toute partie de E possédant p éléments.
Le nombre de combinaisons de p éléments parmi n est égal à C_n^p et on a : $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!\times(n-p)!}$.

Remarques :

- $C_n^0 = 1$.
- $C_n^p = C_n^{n-p}$, $C_n^1 = n$ et $C_n^n = 1$.
- $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p}$.
- C_n^p représente le nombre de façons de choisir p objets parmi n (L'ordre n'est pas important et il n'y a pas de répétition)

Exemples :

✓ $C_5^3 =$

✓ $C_4^3 = C_4^{\cdots} =$

✓ $C_7^7 =$

Application ⑧:

Dans une classe est composée de 4 filles et 6 garçons. Le professeur voulait choisir 3 élèves pour faire un exposé.

1) Déterminer le nombre de groupes que le professeur peut créer.

2) Déterminer le nombre de groupes composés par les garçons uniquement.

3) Déterminer le nombre de groupes qui contiennent deux filles exactement.

4) Déterminer le nombre de groupes qui contiennent au moins un garçon.

5) Déterminer le nombre de groupes qui contiennent aux plus trois filles.

Solution :

Exercice ②:

Une urne contient quatre boules rouges et trois boules vertes. On tire simultanément trois boules de l'urne.

1. Déterminer le nombre de tirages possibles.
2. Déterminer le nombre de tirages comportant exactement une boule rouge.
3. Déterminer le nombre de tirages comportant au moins une boule verte.

3. Type de tirage :

On tire p éléments parmi n.

Type de Tirage	*Nombre de tirages possible*	*L'ordre*
Simultané		
Successif sans remise		
Successif avec remise		

Remarque : permutation avec répétition

Si p est le nombre de boules tirées (**Successif sans remise ou avec remise**) où p_1 est le nombre de boules de type 1, p_2 est le nombre de boules de type 2, p_3 est le nombre de boules de type 3, alors le nombre de permutations est $\frac{p!}{p_1!\times p_2!\times p_3!}$.

Exercice ③:

Une urne contient six jetons verts et cinq jetons rouges et trois jetons bleus indiscernables au toucher.
On tire successivement et sans remise quatre jetons de l'urne.

1) Déterminer le nombre de tirages possibles.

2) Déterminer le nombre de tirages où les trois premiers jetons sont verts.

3) Déterminer le nombre de tirages où le premier jeton est vert.

4) Déterminer le nombre de tirages comportant exactement un jeton vert.

5) Déterminer le nombre de tirages comportant au moins un jeton vert.

II. Expériences aléatoires – Probabilité d'un événement

1. Vocabulaires

a. Expérience aléatoire - événement

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont les résultats possibles sont connus sans que l'on puisse déterminer lequel sera réalisé.

- Une **issue** est un des résultats possibles d'une expérience aléatoire.
- Un événement est un ensemble des issues.
- Tout événement formé d'une seule issue est appelé un événement élémentaire.
- L'**univers** associé à une expérience aléatoire est l'ensemble de toutes ses issues possibles. On le note souvent par Ω.

Exemple :

On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on observe le nombre obtenu.

Cette expérience a 6 issues possibles et l'univers associé est $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

- A : « Obtenir un nombre impair » est un événement. Il regroupe les issues $\{1; 3; 5\}$ on écrit $A = \{1; 3; 5\}$.
- B : « Obtenir un nombre multiple de 5 » est un événement élémentaire et $B = \{5\}$.

b. Vocabulaire des événements

Soient A et B deux événements d'une expérience aléatoire.

- L'événement contraire de A est l'événement noté $\bar{A}$ formé de tous les éléments de Ω n'appartenant pas à A
- L'intersection des événements A et B, noté $A \cap B$, est l'événement formé de tous les éléments de Ω appartenant à A et à B.
- La réunion des événement A et B, noté $A \cup B$, est l'événement formé de tous les éléments de Ω appartenant à A ou à B.
- On dit que les événements A et B sont incompatible si $A \cap B = \emptyset$.
- L'ensemble vide $\emptyset$ est appelé événement impossible.
- L'univers Ω est appelé événement certain.

Exemple :

On lance un dé dodécaédrique dont les faces sont numérotées de 1 à 12 et on observe le nombre obtenu.

On considère les événements suivants :

- A : « Obtenir un nombre pair ».
- B : « Obtenir un nombre divisible par 3 ».
- C : « Obtenir un nombre multiple de 5 ».

- D : « Obtenir un nombre supérieur de 13 ».

On a :

- $A =$ ---
- $B =$ ---
- $C =$ ---
- $\bar{A} =$ ---
- $\bar{C} =$ ---
- $D =$ ---
- $A \cup B =$ ---
- $B \cup C =$ ---
- $A \cap B =$ ---
- $B \cap C =$ ---

Application ⑨:

On lance un dé cubique non truqué deux fois successives. On note les résultats de cette expérience aléatoire par le couple $(a; b)$, où a est le résultat du premier lancer et b est le résultat du second lancer.

1) Déterminer Ω l'univers de cette expérience.

2) Déterminer les événements suivants :

- A : « Obtenir deux nombres égaux ».
- B : « Obtenir deux nombres pairs».
- C : « Obtenir deux nombres dont le produit est 12 ».
- $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap C$ et $A \cup C$.

Solution :

----

2. Probabilité d'un événement

La probabilité d'un événement A est un nombre compris entre 0 et 1 et qui exprime « la chance que l'événement A se produire » et la note par $P(A)$.

Exemple introductif :

La roue de loterie ci-dessous est équilibrée et partagée en dix secteurs identiques.

On fait tourner la roue et on observe le numéro repéré.

On considère les événements suivants :

A : « Obtenir le nombre 9 » et B : « Obtenir un nombre divisible par 3 ».

Déterminons $P(A)$ et $P(B)$.

On a $A = \{9\}$, puisque tous les secteurs ont les mêmes chances, alors le secteur 9 à une chance parmi 10 pour être repéré. Ainsi $P(A) = \frac{1}{10}$.

On a $B = \{3; 6; 9\}$, donc l'événement B à trois chances parmi 10 pour être réaliser. Ainsi $P(B) = \frac{3}{10}$.

On remarque :

$P(\{3\}) + P(\{6\}) + P(\{9\}) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$.

Ainsi $P(B) = P(\{3\}) + P(\{6\}) + P(\{9\})$.

Définition :

La probabilité d'un évènement A est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent, on la note $P(A)$.

Remarques :

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire.

- $P(\Omega) = 1$ et $P(\emptyset) = 0$.
- Pour tout événement A : $0 \leq P(A) \leq 1$.

Exemple :

On lance un dé cubique non truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

On considère les événements :

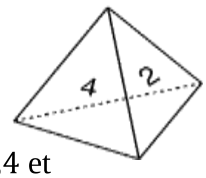
- A : « Obtenir un nombre pair et multiple de 3 ».
- B : « Obtenir un nombre premier » .

On a A = ------------------- et $B =$ ----------------------

Donc :

- $P(A) =$ ---
- $P(B) =$ ---

Application ⑩ :



On lance un dé tétraédrique dont les faces sont numérotées de 1 à 4 tel que

$P(\{1\}) = 0{,}3$; $P(\{2\}) = 0{,}1$; $P(\{3\}) = 0{,}4$ et $P(\{4\}) = 0{,}2$.

Calculer la probabilité des événements suivants

$A = \{2,4\}$; $B = \{1,2,4\}$ et $C = \{1,2,3,4\}$.

Solution :

Propriété :

Soient A et B deux événements de Ω. On a :

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- Si $A \cap B = \emptyset$, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Application ⑪ :

On lance une pièce de monnaie non truquée trois fois successives. On considère les événements suivants :

- A : "Obtenir la face F exactement une fois".
- B : "Obtenir la face P au maximum deux fois".

1) À l'aide de l'arbre des choix, déterminer l'univers des possibilités.

2) Calculer la probabilité des événements : A, B, $\bar{A}$, $\bar{B}$, $A \cap B$ et $A \cup B$.

Solution :

3. Hypothèse d'équiprobabilité :

Propriété :

Soit une expérience aléatoire d'univers Ω où tous les événements élémentaires ont même probabilité.

- La probabilité d'un évènement A de Ω est $P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$.
- $card(A)$ se lit « cardinal de A » et représente le nombre des éléments de A.

Application ①② :

Un sac contient 4 boules rouges, 3 boules vertes et 2 boules blanches indiscernables au toucher. On tire simultanément et au hasard 3 boules du sac.

1. Combien y' a-t-il de résultats possibles ?
2. Calculer la probabilité de chaque événement :
   - A:" Obtenir 3 boules rouges ".
   - B:" Obtenir 3 boules de même couleur ".
   - C :" Obtenir 3 boules de couleurs distinctes deux à deux "
   - D :" Obtenir exactement une boule rouge "
   - E :" Obtenir au moins une boule blanche "
   - $E \cap D$ et $E \cup D$.

Solution :

Exercice ④:

Un sac contient trois jetons blancs portant les numéros 1, 1, 2 et quatre jetons noirs portant les numéros 1, 2, 2, 2. On tire successivement et sans remise trois jetons du sac. Sachant que les jetons sont jetons indiscernables au toucher, calculer les probabilités des événements suivants :

- A : "Obtenir trois jetons de la même couleur".
- B : "Obtenir au moins un jeton blanc".
- C : "Obtenir trois jetons du même nombre".
- D : "Obtenir trois jetons dont la somme est paire".
- E "Obtenir trois jetons dont la somme est un nombre impair".

III. Probabilité conditionnelle- indépendance de deux événements :

1. Probabilité conditionnelle

Activité ④:

Une classe est composée de 23 élevés répartis selon le tableau suivant :

	Redoublements	Nouveaux	Total
Garçons	8	3	11
Filles	7	5	12
Total	15	8	23

1. On sélectionne au hasard un élève de la classe, on suppose que tous les élèves ont la même probabilité d'être sélectionnés.

a. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

G : "Sélection d'un garçon "

F : "Sélection d'une fille ".

I : "Sélection d’un élève redoublant ".

b. Calculer $P(G\cap I)$ et $P(F\cap I)$.

2. a. Sachant que l’élève choisi est un garçon. Quelle est la probabilité qu'il soit un redoublant ? notons cette probabilité par $P_G(I)$.

b. Vérifier que : $P_G(I)=\frac{P(G\cap I)}{P(G)}$.

c. Que représentent les probabilités suivantes : $P_F(I)$, $P_I(F)$ et $P_I(G)$? Calculer ces probabilités.

Définition :

A et B sont deux événements d’un univers Ω d’une expérience aléatoire tel que $P(A)\neq 0$.
La probabilité de l’événement B sachant que l’événement A est réalisé est :$\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$, on la note $P_A(B)$ ou $P(B/A)$.

Application ①③ :

Un sac contient cinq jetons blancs avec les numéros 1,1,1,0,0, quatre jetons rouges avec les numéros 1,1,0,0 et deux jetons verts avec les numéros 0,1.

On tire successivement et avec remise trois jetons du sac.

1. Sachant que les jetons sont jetons indiscernables au toucher, calculer les probabilités des événements suivants :

• A : "Obtenir trois jetons de la même couleur".

• B : « Obtenir trois jetons de même numéro ».

• C : "Obtenir trois jetons de couleurs différentes, deux à deux."

2. Sachant que les boules ont la même couleur, quelle est la probabilité qu'elles aient le même numéro ?
3. Sachant que les boules tirées portent le même numéro, quelle est la probabilité qu'elles soient de couleurs différentes, deux à deux ?

Solution :

Exercice ⑤:

Une personne lave des gobelets dans un café.

La probabilité qu'il casse la première tasse qu'il lave est de $\frac{2}{7}$.

Lorsqu'il casse le premier gobelet, son attention augmente de sorte que la probabilité de casser le deuxième est de $\frac{1}{5}$.

S'il ne casse pas le premier gobelet, la probabilité de casser le deuxième est de $\frac{3}{7}$.

On considère les événements suivants :

A : « casser le premier gobelet » ;

B : « Casser le second gobelet ».

1. Construire un arbre de probabilité.
2. Calculer la probabilité de casser le premier et le second gobelet.
3. Calculer la probabilité de casser le second gobelet.
4. Calculer la probabilité que le second gobelet reste intact étant donné que le premier gobelet reste intact.

Exercice ⑥:

Un sac u_1 contient quatre boules blanches et une boule noire, et un autre sac u_2 contient deux boules blanches et trois boules noires.

On choisit au hasard l'un des deux sacs puis on y tire une boule.

1. Construire un arbre de probabilité.
2. Calculer la probabilité de choisir le sac u_1 et d'obtenir une boule noire.
3. Calculer la probabilité d'obtenir une boule noire.
4. En déduire la probabilité d'obtenir une boule blanche.
5. La boule tirée est noire, quelle est la probabilité qu'elle soit tirée du sac u_1 ?

2. Indépendance de deux événements

Définition :

A et B sont deux événements d'un univers Ω d'une expérience aléatoire.
On dit que A et B sont indépendants si :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Conséquence :

Soient A et B sont deux événements tel que $P(A) \neq 0$.
A et B sont indépendants si et seulement si

$$\mathcal{P}_A(B) = \mathcal{P}(B)$$

Exemple :

On lance un dé cubique non truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
On considère les événements :
- A : « Obtenir un nombre impair ».
- B : « Obtenir le nombre 3 » .

On a $P(A \cap B) =$-------- et $P(A) \times P(B) =$-----------------.
Donc ---

Application ①④ :

Un sac contient neuf boules indiscernables au toucher :
Deux boules blanches portant le numéro 1, trois boules rouges portant les numéros 1, 1 et 2 et quatre boules noires portant les numéros 1, 1, 2 et 2.
On tire simultanément et au hasard 3 boules du sac.
1. Calculer la probabilité des événements suivants :
 A : "Obtenir trois boules de couleurs différentes, deux à deux."
 B : "Obtenir trois boules portant le même numéro "
2. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

3. Epreuves répétées

Propriété :

Soit A un événement de probabilité p dans une épreuve aléatoire.
Si cette épreuve est répétée n fois, alors la probabilité que A se produise exactement k $(k \leq n)$ fois est $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.

Exemple :

Lorsqu'on lance un dé cubique non truqué quatre fois successives, la probabilité d'obtenir le chiffre 2 trois fois est : --

Application ①⑤ :

La probabilité qu'un tireur d'arc touche la cible est de $\frac{2}{3}$.
Ce tireur a fait dix tentatives.

Quelle est la probabilité d'atteindre la cible exactement six fois ?

Exercice ⑦:

Un sac contient six boules blanches et quatre boules noires. On considère le jeu suivant :
Le joueur tire 3 boules simultanément du sac, et le joueur est considéré comme gagnant si les trois boules tirées sont blanches.
Ahmed a joué ce jeu 4 fois. Quelle est la probabilité de gagner exactement 3 fois ?

IV. Variable aléatoire- variable aléatoire binomiale :

1. Variable aléatoire

Activité ⑤:

On lance une pièce de monnaie trois fois successives.
On note X le nombre de fois que la face F apparaît.
1. Déterminer l'univers Ω puis en déduire les valeurs que peut prendre la variable X.
2. Que signifient les événements $(X = 1)$ et $(X = 2)$?
3. a. Vérifier que $P(X = 1) = \frac{3}{8}$.
 b. Remplir le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$				

Solution :

Définition :

Une ***variable aléatoire*** est une fonction de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui à chaque issue de Ω associe un nombre.
On note $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs possibles de X.

Remarque :

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs x_1, x_2, …, x_n .

La loi de probabilité de X est donnée par toutes les probabilités $P(X = x_i)$.

Exemple :

Une urne contient 6 jetons, numérotés de 1 à 6 indiscernables au toucher. Un joueur pioche un jeton.

- Si le numéro est pair, il gagne 5 Dh.
- S'il prélève le numéro 1, il gagne 40 Dh.
- Sinon il perd 15 Dh.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

La variable X peut prendre les valeurs ----------------------

Donc $X(\Omega) =$ -- et on a :

- $P(X = \cdots) =$--
- $P(X = \cdots) =$--
- $P(X = \cdots) =$--

On résume ces calculs dans le tableau :

x_i			
$P(X = x_i)$			

Application ①⑥ :

Un sachet contient 6 boules blanches et 2 boules noires. On tire successivement et sans remise deux boules du sac.

Soit X la variable aléatoire qui relie chaque tirage au nombre de boules blanches tirées.

1. Déterminer $X(\Omega)$.
2. Donner la loi de probabilité X.

Solution :

Exercice ⑧:

On considère le jeu suivant :

"Un sac contient quatre boules blanches et deux boules noires indiscernables au toucher.

Le joueur doit tirer simultanément trois boules.

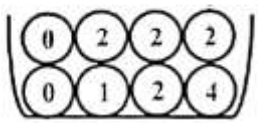
A chaque tirage, le joueur gagne un dirham (+1) pour chaque boule blanche et perd un dirham pour chaque boule noire."

Soit X la variable aléatoire qui relie chaque tirage au gain du joueur.

1. Déterminer $X(\Omega)$.
2. Donner la loi de probabilité X.

Exercice ⑨: normale 2017

Une urne contient huit boules indiscernables au toucher portant chacune un nombre comme indiqué sur la figure ci-contre



On tire au hasard, simultanément, trois boules de l'urne.

1. Soit A l'événement :
« Parmi les trois boules tirées, aucune ne porte le nombre 0 » et B l'événement :
« Le produit des nombres portés par les trois boules tirées est égale à 8»
Montrer que $p(A) = \frac{5}{14}$ et que $p(B) = \frac{1}{7}$. **(1,5 pt)**
2. Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le produit des nombres portés par les trois boules tirées.
 a. Montrer que $p(X = 16) = \frac{3}{28}$. **(0,5 pt)**
 b. Le tableau ci-contre concerne la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

x_i	0	4	8	16
$p(X = x_i)$				$\frac{3}{28}$

Recopier sur votre copie et compléter le tableau en justifiant chaque réponse. **(1 pt)**

Définition :

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω d'une expérience aléatoire et $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$.

- L'***espérance mathématique*** de X est le nombre :
$E(X) = x_1 \times P(X = x_1) + x_2 \times P(X = x_2) + \cdots + x_n \times P(X = x_n)$
- La ***variance*** de X est le nombre positif :
$$V(X) = {x_1}^2 \times P(X = x_1) + {x_2}^2 \times P(X = x_2) + \cdots + {x_n}^2 \times P(X = x_n) - E(X)^2$$
- L'***écart-type*** de Xest le nombre : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Exemple :

Soit X une variable aléatoire de loi de probabilité :

x_i	-1	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

- L'espérance mathématique de X est :
$E(X) =$--
- La variance de X est :
$V(X) =$--
- L'écart-type de Xest :

$\sigma(X) =$---

2. Loi Binomiale

On considère une expérience constituée par la répétition du même épreuve n fois. Soit A un événement de cette épreuve tel que $P(A) = p$.
On sait que la probabilité que l'événement A, se produise k fois $(k \leq n)$ est : $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.
La variable aléatoire qui associe chaque résultat à $P(X = k)$ (k le nombre de fois que l'événement A est réalisé) est appelée une ***variable aléatoire binomiale***.
Les nombres n et p sont appelés les paramètres de la variable binomiale.

Propriété :

Soit X une variable aléatoire binomiale de paramètre n et p. On a : $\forall k \in \{0,1,\dots,n\}$: $\mathcal{P}(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ et $E(\mathrm{X}) = n \times p$ et $V(\mathrm{X}) = \mathrm{n} \times \mathrm{p} \times (1-\mathrm{p})$

Exemple :

Nous lançons une pièce de monnaie 5 fois successives.
Soit X la variable aléatoire qui associe chaque résultat au nombre de fois où la F est apparu.
Nous avons une loi de probabilité binomiale à deux paramètres : $n = \cdots$ et $p = P(F) = \cdots$
On a $X(\Omega) =$ -- et on a :

- $P(X = \cdots) =$---
- $P(X = \cdots) =$---
- $P(X = \cdots) =$---
- $P(X = \cdots) =$---
- $P(X = \cdots) =$---
- $P(X = \cdots) =$---

Donc la loi de probabilité de X est donnée par le tableau :

x_i						
$P(X = x_i)$						

- L'espérance mathématique de X est :
  $E(\mathrm{X}) =$--
- La variance de X est :
  $V(\mathrm{X}) =$--
- L'écart-type de Xest :
  $\sigma(X) =$--

Application ①⑦ :

On lance un dé cubique équilibré numéroté de 1 à 6 une seule fois. On considère l'événement :
A : « obtenir un diviseur de 3 »

1. Calculer $P(A)$.
2. On répète cette épreuve 3 fois de suite. Soit X la variable aléatoire qui égale au nombre de fois de la réalisation de l'événement A.

Déterminer la loi de probabilité de X.

Solution :

Exercice ①⑧: Rattrapage 2022

Une urne contient trois boules blanches, quatre boules rouges et cinq boules vertes, indiscernables au toucher.
On tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne.

1. On considère les événements suivants :
A: ‘’ Obtenir exactement deux boules rouges ‘’.
B: ‘’ Obtenir exactement une boule verte ‘’.

a. Montrer que $p(A) = \frac{12}{55}$ et $p(B) = \frac{21}{44}$. **(0.75 pt)**

b. Calculer $p(A/B)$: la probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé. Les événements A et B sont-ils indépendants ? **(0.75 pt)**

2. Soit la variable aléatoire X qui associe à chaque tirage le nombre de boules vertes tirées.

c. Déterminer la loi de probabilité de X. **(1 pt)**

d. Calculer la probabilité d'obtenir au moins deux boules vertes. **(0. 5 pt)**

Exercice ①①: normale 2018

Une urne contient 9 boules indiscernables au toucher : **<u>cinq boules rouges</u>** portant les nombres 1 ;1 ;2 ;2 ;2 et **<u>quatre boules blanches</u>** portant les nombres 1 ;2 ;2 ;2.
On considère l'experience suivante : on tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne.
Soient les événements :
A : ‘’les trois boules tirées sont de meme couleur’’.
B : ‘’les trois boules tirées portent le meme nombre’’.
C : ‘’les trois boules tirées sont de meme couleur et portent le meme nombre’’.

1. Montrer que $p(A) = \frac{1}{6}$, $p(B) = \frac{1}{4}$ et $p(C) = \frac{1}{42}$ **(1.5 pt)**
2. On répète l'experience précédente trois avec remise dans l'urne des trois boules tirées après chaque tirage, et on considère la variable aléatoire X qui est égale au nombre de fois de réalisation de l'événement A.

a. Déterminer les paramètres de la variable alétoire binomiale X. **(0.5 pt)**

b. Montrer que $p(X = 1) = \frac{25}{72}$ et calculer $p(X = 2)$ **(1 pt)**