Limite d'une fonction

1BSF 1 et 2

Pr. Latrach Abdelkbir

✍ Application ① :

Calculer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to1}\frac{x+4}{x+5}$
- $\lim\limits_{x\to2}\frac{x-2}{x^2-4}$
- $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2+3x}{x^2-4x}$
- $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$
- $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-x-2}{x^2-3x+2}$
- $\lim\limits_{x\to1}\frac{3x^3-4x+1}{x^2-4x+3}$
- $\lim\limits_{x\to1}\frac{3x^2-5x+2}{\sqrt{x}-1}$
- $\lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{3-\sqrt{x+4}}$

✍ Application ② :

Calculer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{x+3}{x-2}$
- $\lim\limits_{x\to2^-}\frac{x+3}{x-2}$
- $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^3-1}{x^2-x}$
- $\lim\limits_{x\to2^-}\frac{4x^2-x+5}{x-4}$
- $\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{3x-2x^2}{x-x^3}$
- $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{2x+3}{1-x^2}$
- $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{|x-1|}$
- $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+}\frac{3x^2-x-1}{1-2x}$

✍ Application ③ :

1. On considère la fonction f définie par $\begin{cases} f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x-1}; & x<1 \\ f(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}; & x>1 \end{cases}$.

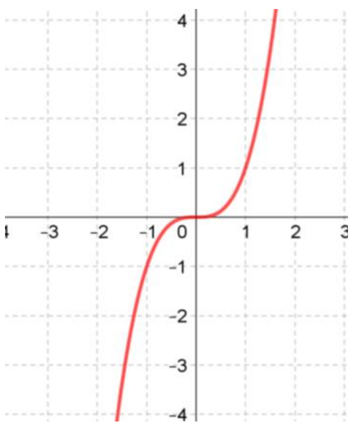
Calculer $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$. Conclure.

2. On considère la fonction g définie par : $\begin{cases} g(x)=\frac{x^2+1}{-x+3} & ;x\leq2 \\ g(x)=1-ax^2 & ;x>2 \end{cases}$

Déterminer une valeur de a pour laquelle g admet une limite en 2.

✍ Activité ① :

La figure ci-contre représente la courbe de la fonction $f: x\mapsto x^3$ dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.



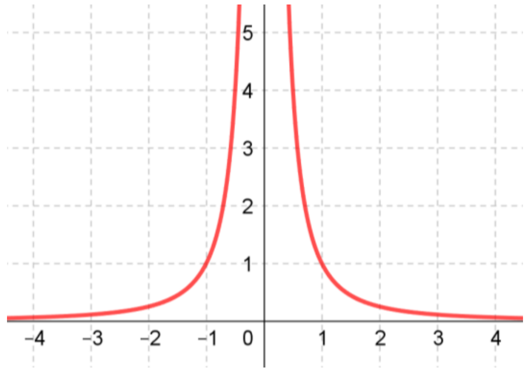
1. Que peut-on remarquer pour les valeurs de $f(x)$ quand x prend des valeurs de plus en plus grandes ?

2. Que peut-on remarquer pour les valeurs de $f(x)$ quand x prend des valeurs de plus en plus petites ?

3. Exprimez vos remarques dans les questions 1. et 2. en utilisant les symbole $\lim$.

✍ Activité ② :

La figure ci-contre représente la courbe de la fonction $f: x\mapsto\frac{1}{x^2}$ dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.



1. Que peut-on remarquer pour les valeurs de $f(x)$ quand x prend des valeurs de plus en plus grandes ?

2. Que peut-on remarquer pour les valeurs de $f(x)$ quand x prend des valeurs de plus en plus petites ?

3. Exprimez vos remarques dans les questions 1. et 2. en utilisant les symbole $\lim$.

✍ Application ④ :

Calculer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to+\infty}1+5x^2+8x$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}-5x^3+1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4+2x^3}{3x^3+5x^2+1}$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(2-\sqrt{3})x^3-x^2}{2x^2-3}$

✍ Application ⑤ :

Calculer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x+5}$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{3x^2-5x+1}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{4x+1}{x-1}}$

✍ Application ⑥ :

Calculer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to0^+}3x+7+\frac{1}{\sqrt{x}}$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-3+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{2}{x}\right)$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{4}{x^3}}{2-x^5}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+5x-3}}{x}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2-x+3}-2x+1$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x}+x$

✍ Application ⑦ :

Calculer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin4x}{\tan5x}$
- $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan2x}{x}$
- $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin3x}{4x}$
- $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sin(x-2)}{x-2}$
- $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{x}$
- $\lim\limits_{x\to1}\frac{\tan\pi x}{x-1}$
- $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{4}}$
- $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$

✍ Application ⑧ :

1. a. Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})\ \frac{1}{3}\leq\frac{1}{2-\cos x}\leq1$.

b. Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2-\cos x}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3}{2-\cos x}$.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=x\sin\left(\frac{1}{x}\right)+2$.

Vérifier que : $(\forall x\in\mathbb{R}^*)\ |f(x)-2|\leq|x|$ puis déduire $\lim\limits_{x\to0}f(x)$.