Etude analytique de l'espace
1BSF 1 et 2
Pr. Latrach Abdelkbir

✍ Application ① :

On considère dans l'espace rapporté au repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ le point $M(1;-2;3)$ et les vecteurs $\overrightarrow{OK}=3\vec{k}$ et $\overrightarrow{OM'}=\vec{i}-2\vec{j}$ et A est le milieu des segment $[KM]$.

1. Déterminer les coordonnées des points O, K, M' et A.
2. Donner les coordonnées du vecteur $-2\overrightarrow{KM}$.
3. Montrer $OKMM'$ est un parallélogramme.

✍ Application ② :

1. Etudier la colinéarité des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans les cas suivants :
   - a. $\vec{u}\left(2;\sqrt{2};\sqrt{8}\right)$ et $\vec{v}\left(\sqrt{2};1;2\right)$.
   - b. $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$ et $\vec{v}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$.
2. Etudier l'alignement des points $A(1;2;3), B(-1;3;2)$ et $C(3;-2;1)$.

✍ Application ③ :

1. Déterminer si les vecteurs $\vec{u}\,(1;2;3)$, $\vec{v}\,(-2;1;-3)$ et $\vec{w}\,(1;2;-1)$ sont coplanaires.
2. Soient $A(2;3;4), B(3;4;5), C(4;2;5)$et $D(3;4;4)$ quatre points de l'espace.

Montrer que les points A, B, Cet D sont coplanaires.

✍ Application ④ :

1. Donner dans chaque cas une représentation paramétrique de la droite (D) :
   - a. $(D)=D(A;\vec{u})$ où $A(1;-1;1)$ et $\vec{u}(1;3;-2)$.
   - b. (D) est la droite passant par les points $A(1;2;-1)$ et $B(-1;1;2)$.
   - c. (D) est la droite passant par $A(-2;1;3)$ et parallèle à la droite (Δ) telle que : $(\Delta):\begin{cases}x=3\\ y=1+2t\\ z=5-3t\end{cases}\ ;t\in\mathbb{R}$.
2. a. Donner Trois points de la droite $(L):\begin{cases}x=t\\ y=3-t\\ z=1+2t\end{cases};t\in\mathbb{R}$.

   b. Est que le point $M(3;0;1)$ appartient à (L) ?

✍ Application ⑤ :

Etudier la position relative des droites (D)et (Δ) dans chacun des cas suivants :

1. $D\left(A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\right)$ et $D\left(B\begin{pmatrix}0\\-4\\-3\end{pmatrix};\vec{v}\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}\right)$.
2. $(D):\begin{cases}x=1+t\\ y=1-t\\ z=1+t\end{cases};t\in\mathbb{R}$ et $(\Delta):\begin{cases}x=3+t'\\ y=-1+2t'\\ z=3-t'\end{cases};t'\in\mathbb{R}$.
3. $(D):\begin{cases}x=1-t\\ y=1+2t\\ z=-2+t\end{cases}\ ;t\in\mathbb{R}$ et $(\Delta):\begin{cases}x=1-t'\\ y=1+t'\\ z=6+t'\end{cases};t'\in\mathbb{R}$.

✍ Application ⑥ :

Donner une représentation paramétrique du plan (P) dans chacun des cas suivants :

1. (P) est le plan passant par $A(1;2;3)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}(1;-1;2)$ et $\vec{v}(-3;2;1)$.
2. (P) est le plan passant par les points $A(1;2;3), B(-1;0;1)$et $C(3;2;-1)$

✍ Application ⑦ :

Donner une équation cartésienne du plan (P) dans chacun des cas suivants :

1. (P) est le plan passant par $A(1;2;3)$et de vecteurs directeurs $\vec{u}(1;-1;2)$ et $\vec{v}(-3;2;1)$.
2. (P) est le plan passant par les points $A(1;2;3), B(-1;0;1)$et $C(3;2;-1)$.

✍ Application ⑧ :

Etudier la position relative des plans (P) et (Q) dans les cas suivants :

1. $(P): 2x+3y-z+1=0$ et $(Q): -x+2y+z-2=0$.
2. $(P): 2x-y+z-1=0$ et $(Q): 6x-3y+3z-3=0$.

✍ Application ⑨ :

1. Déterminer deux équations cartésiennes de la droite (D) passant par les points $A\,(1;-2;3)$ et $B(-2;-1;4)$.
2. Déterminer deux équations cartésiennes de la droite $(D'):\begin{cases}x=1+t\\ y=1\\ z=-3t\end{cases}\ ;t\in\mathbb{R}$.
3. Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) définie par les équations $\frac{x-2}{3}=y+4=\frac{1-z}{2}$.

✍ Application ⑩ :

Etudier la position relative du plan (P) et la droite (D) dans chacun des cas suivants :

1. $(P): x+y-z+1=0$ et $(D):\begin{cases}x=1+t\\ y=1-t\\ z=1+2t\end{cases}\ ;t\in\mathbb{R}$
2. $(P): 5x+2y-3z-10=0$ et $(D):\begin{cases}x=1+2t\\ y=-1+t\\ z=-2+4t\end{cases}\ ;t\in\mathbb{R}$

Exercice de synthèse :

On considère les points les points $A(2;1;-1)$, $B(1;0;0)$, $C(-1;1;0)$ et $E(0;2;-1)$.

1. a- Etudier la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

   b- Donner une équation cartésienne du plan (ABC).

   c- Vérifier que les points A, B, Cet E sont coplanaires.
2. Soit (Δ) la droite passant par O et de vecteur directeur $\vec{u}=\frac{1}{3}\vec{i}+\frac{1}{6}\vec{j}+\frac{1}{9}\vec{k}$.

   a- Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ).

   b- Donner deux équations cartésiennes de la droite (Δ).

   c- Montrer que la droite (Δ) perce le plan (ABC) puis déterminer le triplet des coordonnées de leur point d'intersection Ω.
3. On considère le plan (P) d'équation $x+y+2z=0$.

   a- Montrer que (ABC) et (P) se coupent suivant une droite (Δ').

   b- Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ').
4. Etudier la position relative des deux droites (Δ) et (Δ').