VIII Exercices d'approfondissement

01 Soit $ABCD$ un carré de centre O et de coté a, I et J sont les points du plan tels que : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$. On désigne par K le point d'intersection des droites (ID) et (JC). Soit H le projeté orthogonal du point A sur (DI).

1 Faire une figure.

2 **a.** Montrer que $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{JC} = -\frac{a^2}{3}$ et que $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{JC} = \frac{a^2}{3}$

b. En déduire que les droites (ID) et (JC) sont perpendiculaires.

3 **a.** Montrer que $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DI} = \frac{a^2}{3}$

b. En déduire que $DK = \frac{a}{\sqrt{10}}$

4 **a.** Montrer que $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{ID} = \frac{7a^2}{9}$ et que $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IB} = -\frac{2a^2}{9}$

b. En déduire que : $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IO} = \frac{5a^2}{18}$

5 En utilisant un produit scalaire, montrer que : $IH \times ID = IA^2$. En déduire la distance IH.

02 Soit $ABCD$ un carré de coté 1 et I, J, et K sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[AD]$ et $[IA]$. H est le projeté orthogonal de A sur (DI). On considère dans le plan le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

1 **a.** Déterminer les coordonnés du vecteur $\overrightarrow{ID}$.

b. En déduire une équation cartésienne de chacune des droites (ID) et (AH).

c. Déterminer alors les coordonnées $(x; y)$ du point H.

2 Montrer que les droites (JH) et (HK) sont perpendiculaires.

3 En utilisant un produit scalaire convenable, écrire l'équation réduite du cercle C de diamètre $[JK]$.

4 Soit la droite $(\Delta) : x + 2y = 0$. Montrer que (Δ) est tangente au cercle C en A.

03 $(O, \vec{i}, \vec{j})$ étant un repère orthonormé du plan. On donne les points $A(1;-2)$, $B(2;0)$ et $C(0;1)$.

1 Placer les points A , B et C.

2 **a.** Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$, AB et BC.

b. En déduire la nature du triangle ABC.

3 Soit C l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan vérifiant : $x^2+y^2-x+y-2=0$.

a. Montrer que C est un cercle dont on précisera le centre I et le rayon R

b. Tracer le cercle C et vérifier qu'il est circonscrit au triangle ABC.

4 En utilisant un produit scalaire convenable, déterminer une équation cartésienne de la droite (T) tangente au cercle C au point A.

04 Dans un plan P, on considère un rectangle $ABCD$ de centre O tel que : $AB=8$ et $AD=4$. On désigne par I, J et K les milieux respectifs de $[AB]$, $[DC]$ et $[OI]$.

1 Calculer $\overrightarrow{KA}.\overrightarrow{KB}$

2 **a.** Montrer que pour tout points M du plan P, on a :

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}=2MO^2-24$$

b. En déduire $\overrightarrow{KC}.\overrightarrow{KD}$.

3 Déterminer l'ensemble C des points M du plan P tels que :

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}=-22$$

05 Dans un plan P, on considère un triangle ABC tel que : $AB=a$, $AC=2a$ et $(B\hat{A}C)=\dfrac{2\pi}{3}$; $(a>0)$.

1 Montrer que $BC=a\sqrt{7}$

2 Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB).

a. En utilisant un produit scalaire, montrer que $AH=a$

b. Montrer que H est le barycentre des points pondérés $(A;2)$ et $(B;-1)$.

3 Déterminer l'ensemble (E') des points M du plan tels que : $(2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}).\overrightarrow{AB}=0$

4 Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan tels que : $\dfrac{MB}{MA}=\sqrt{2}$

06 Soit dans un plan P un triangle équilatéral ABC de coté a ($a > 0$). On désigne par I le milieu du segment $[AB]$.

1 **a.** Exprimer $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ en fonction de a.

b. Montrer que pour tout point M de la médiatrice de $[AB]$, on a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}a^2$

2 Soit G le barycentre des points pondérés $(A;3)$ et $(B;-2)$.

a. Montrer que $\overrightarrow{GA} = 2.\overrightarrow{AB}$

b. En déduire GA en fonction de a.

3 **a.** Montrer que pour tout point M du plan, on a : $3MA^2 - 2MB^2 = MG^2 - 6a^2$

b. En déduire l'ensemble : $C = \left\{M \in P / \ 3MA^2 - 2MB^2 = 3a^2\right\}$

07 Dans un plan P rapporté à un repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$, On considère les points $A(-2;1)$, $B(-1;2)$ et $C(1;4)$. Soit K milieu de $[BC]$.
Soit Γ l'ensemble des points M défini par : $\Gamma = \left\{M \in P / \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{MC}\right\}$

1 **a.** Montrer que $M(x;y) \in \Gamma \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 4y + 3 = 0$

b. En déduire que Γ est un cercle dont on précisera les caractéristiques.

c. Vérifier que Γ passe par A. Tracer Γ.

2 Soit la droite $(T) : x + y - 3 = 0$. Montrer que (T) est tangente à Γ en K.

3 Soit $H(x;y)$ le projeté orthogonal de O sur la droite (T).

En tenant compte que $\overrightarrow{OH}$ est un vecteur normal à T et que H appartient à T, déterminer les coordonnées de H.

08 Dans le plan orienté de sens direct, on considère un rectangle $ABCD$ tel que :
$BC = 4$, $AB = 2BC$ et $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. On désigne par J le point du segment $[CD]$ tel que $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CD}$.

1 **a.** Calculer AC puis $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

b. En déduire que $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

2 **a.** Calculer $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CJ}.\overrightarrow{CA}$

b. En déduire que les droites (AC) et (BJ) sont perpendiculaires.

3 Soit G le barycentre des points pondérés $(A;2)$ et $(B;3)$

a. Construire le point G

b. Pour tout M du plan, on pose $\overrightarrow{U} = 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}$.
Exprimer $\overrightarrow{U}$ à l'aide de $\overrightarrow{MG}$

c. Déterminer et construire l'ensemble $\Delta = \left\{M \in P / \ \overrightarrow{U}.\overrightarrow{AB} = 0\right\}$

09