Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-5x+6}{(2-x)^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-x+1}-x-1$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+|x|}{x^2-|x|}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)^2}{|x-1|}$

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{7x}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{\tan(x)}$

7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)+\cos(2x)}{\cos(3x)+3\cos(4x)}$; $-\dfrac{-}{-}$

8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{\sqrt{1-\cos(x)}}$

9) $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1}-(x+1)$

10) $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \sqrt{x^2+3x-1}+mx$ avec $m \in IR$

11) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}\right)$; 13) $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{\sqrt{2x}-4}{\sqrt{x+1}-3}$

Exercice 2

Soit f une fonction definie par $f(x)=\dfrac{1}{sinx}-\dfrac{1}{tanx}$

1) Determiner D_f
2) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to \pi} f(x)$

Exercice 3

Soit f une fonction definie par $f(x)=(x+1)\tan\left(\frac{1}{x}\right)$

1) Determiner D_f
2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Exercice 4

Soit f une fonction definie par

$$f(x)=\frac{mx^3+(m-2)x^2+(m-1)x+m-3}{x(x-2)(x-3)}$$

Avec $m \in IR$

1) Determiner D_f
2) Etudier selon les valeurs de m les limtes de f aux bornes de D_f.

Exercice 5

Determiner les limites suivantes

1) $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{\sqrt{x^2-ax}+\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x-a}}$ avec $a \in IR_+^*$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\sqrt{x^4-x^3}-x}$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^4+1}-\sqrt{x^4-1}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$

Exercice 6

En utilisant les proprietés d'ordre et les critetes des limtes, calcler les limites suivantes

1) $\lim\limits_{x\to 0} \left(3-\sqrt{|x|}\sin\left(\frac{4}{x}\right)\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}+\left(\cos\frac{1}{x}\right)^5\right)$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x}-cosx)$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-1)sin^2\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x^2-3}\sin(x^7)$; 6) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)\sqrt{x-5}}{2+\sin\left(\frac{1}{x-2}\right)}$

Exercice 7

Soit f la fonction definie par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^5-x^4+x^3+3}{x+1} ; x\neq -1 \\ f(-1)=12 \end{cases}$$

Demontrer que f est continue en -1

Exercice 8

Determiner la valeur de a pour que f definie par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{sinx}-1}{x-\frac{\pi}{2}} ; x\neq \dfrac{\pi}{2} \\ f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=a \end{cases}$$

soit continue en $\dfrac{\pi}{2}$

Exercice 9

Determiner le reel m pour que la fonction definie par :

$$\begin{cases} f(x)=3x^2-2ax-a^2 ; x\leq a \\ f(x)=\dfrac{m}{x-a}\sin(x^2-a^2)+a ; x>a \end{cases}$$

Soit continue en a (avec a un reel non nul).

Exercice 10

Determiner les reels a,b et c pour que la fonction f

$$définie\ par\begin{cases} f(x)=\dfrac{3x^2-2bx+1}{2x^2+ax-a-2};x<1\\ f(1)=\dfrac{2+c}{a}\\ f(x)=\dfrac{-2x^2+3x+3}{x^2+1};x>1\end{cases}$$

Soit continue en 1

Exercice 11

Soit n un entier naturel non nul

Soit f_n la fonction definie par :

$$\begin{cases} f_n(x)=\dfrac{(3-x)^n-a}{x-2};x<2\\ f_{n(x)}=\dfrac{3x+b}{4}\ ;\ \ x>2\end{cases}$$

Tels que a,b des reels. Dterminer a et b pour que la fonction f_n soit continue en 2.

Exercice 12

Dans chacun des cas suivants, donner l'ensemble de définition de la fonction f est justifier la continuité de f en tout réel de cet ensemble de définition

$x\longmapsto |x^2-x-3|$; $x\longmapsto x+1\sqrt{x^2+1}$

$x\longmapsto \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$; $x\longmapsto (|x+1|-2)^5$

$x\longmapsto \dfrac{3x^2-|x|}{x^2+4}$; $x\longmapsto \dfrac{1}{cos^2x+1}$

Exercice 13

Soit f une fonction définie sur IR par

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sin(\pi x)}{x-1};x\neq 1\\ f(1)=a\end{cases}$$

avec $a\in IR$

Déterminer a pour que la fonction f soit continue en 1.

Exercice 14

Soit la fonction définie par

$$f(x)=\frac{\sqrt{8x+1}}{2(x-1)}+\frac{3|x|}{1-x^2}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 1

Exercice 15

Demontrer que la fonction f est prolengeable par continuité en x_0 dans chacun des cas suivants et definir ce prolongement :

1) $f(x)=\dfrac{2x^{17}-17x+15}{x-1}$; $x_0=1$

2) $f(x)=\dfrac{3tanx-2sinx}{x}$; $x_0=0$

3) $f(x)=\dfrac{x^n-a^n}{x-a}$; $x_0=a\ \ tel\ que\ a\in IR\ et\ n\in IN^*$

4) $f(x)=\dfrac{x^{p+1}-(p+1)x+p}{(x-1)^2}$; $x_0=1\ et\ p\in IN^*$

5) $f(x)=\dfrac{\sqrt{a^2+x}-a}{tanx}$; $x_0=0$; $a\in IR_+^*$

Exercice 16

Soit f la fonction definie par

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2-1}}\ ;\ \ x\in\,]-\infty;-1[\,\cup\,]1;+\infty[\\ f(x)=x^2-3x+2\ ;\ \ x\in\,]-1{,}1[\end{cases}$$

1) Calculer $\lim_{x\to1^+}f(x)$ et $\lim_{x\to1^-}f(x)$
2) La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 1

Exercice 17

Soit f la fonction definie par

$$f(x)=\frac{\sqrt{3+cosx}-2}{x^2}$$

1) f est-elle prolongeable par continuité en 0.
2) Démontrer que $\forall\in IR^*$ $|f(x)|<\frac{1}{x^2}$ puis determiner $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty}f(x)$.

Exercice 18

1) Démontrer que la fonction f définie par

$$f(x)=\frac{1}{(5-x)^2}\left(1-\sin\left(\frac{\pi x}{10}\right)\right)$$

Est prolongeable par continuité en 5 et définir cet prolongement.

Exercice 19

Soit f la fonction definie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par

$$f(x)=\frac{(1-tanx)^2}{cos2x}$$

La fonction f est-elle prolongeable par continuité en $\frac{\pi}{4}$

Exercice 20

Soit f la fonction definie par

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{3x^2+6} & ; \quad x\geq 1 \\ f(x)=\dfrac{1}{x^2-x}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right) & ; \quad x<1 \end{cases}$$

1) Etudier la continuité de f en 1
2) f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?.

Exercice 21

Calculer les limtes suivantes

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^{2019}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\pi\sqrt{cosx})}{x}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2cos^2x+cosx-1}{3cos^2x-2cosx-5}$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\left(\pi\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}\right)$

Exercice 22

Soit f la fonction definie sur $]-5;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{x-3}{x+5}$$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ et deduire $\lim\limits_{x\to+\infty}f(f(x))$

2) $calculer$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\left(\frac{\pi}{2}f(x)\right)$

Exercice 23

Soit f la fonction definie sur IR par

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{x+2}; & x\geq -2 \\ f(x)=\dfrac{2x^2-|x^3|}{x+2} & ; \quad x<-2 \end{cases}$$

1) Etudier la continuité de f en -2
2) Etudier la contiuté de f sur $]-2;+\infty[$ et $]-\infty;-2[$
3) La fonction f est-elle continue sur IR.

Exercice 24

Soit f la fonction definie sur IR par

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{x^2-1} & si \quad x\in]-\infty;-1]\cup[-1;+\infty[\\ f(x)=\dfrac{1-x^3}{1-x^2} & si \quad -1<x<1 \end{cases}$$

1) Etudier la continuité de f à gauche et à droite en -1
2) Etudier la continuité de sur chacun des intervalles $]-\infty;-1]$; $]-1;1[$; $[-1;+\infty[$.

Exercice 25

Soit f la fonction definie par

$$f:x\mapsto\frac{x^3+6x^2-6x-8}{x-2}$$

1) Preciser l'ensemble de definition de f .
2) Determiner $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$
3) La fonction f admet-elle un prolongement par continuité en 2.

Exercice 26

Dire dans chacun des cas suivants,si la fonction f admet un prolongement par continuité en a

1) $f:x\mapsto\frac{x^2+|x|}{x^2-|x|}$, $a=0$
2) $f:x\mapsto\frac{x^3+1}{x^2-1}$, $a=-1$
3) $f:x\mapsto\frac{sinx+3x}{x}$, $a=0$

Exercice 27

Soit f la fonction definie par

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x||x-2|}{x^2(x^2-x-2)} & si\ x\neq 2 \\ \dfrac{1}{3} \quad ; & si \quad x=2 \end{cases}$$

1) Donner l'ensemble de definition de f.
2) Etudier les limites de f en -1 , $-\infty$ et $+\infty$.
3) La fonction f admet-elle un prolongement par continuité en 0?

Exercice 28

Soit f la fonction definie sur IR^* par

$$f(x) = \frac{1 - cosx}{x}$$

1) Determiner $\lim_{x \to 0} f(x)$
2) Determiner $\lim_{x \to 0} f(sinx)$ et $\lim_{x \to 0} f(1 - cosx)$

Exercice 29

Dans chacun des cas suivants ;à l'aide des theoreme de comparaison,etudier la limite en 0 de f

1) $f: x \longmapsto xsin\left(\frac{2}{x}\right)$; 2) $f: x \longmapsto 1 + x^2 sin\left(\frac{2}{x}\right)$

3) $f: x \longmapsto \frac{1}{x} + sin\left(\frac{2}{x}\right)$

Exercice 30

Dans chacun des cas suivants ;à l'aide des theoreme de comparaison,etudier la limite en $-\infty$ et en $+\infty$ de f

1) $f: x \longmapsto \frac{1 + cosx}{x}$; 2) $f: x \longmapsto \frac{1 + cosx}{\sqrt{|x|}}$

3) $f: x \longmapsto \frac{x + xcosx}{x^4 + x^2 + 3}$

Exercice 31

1) Montrer que pour tout reel x,

$$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 - sinx} \leq 1$$

2) En deduire le comportement en $+\infty$ des fonctions

$x \longmapsto \frac{x}{2 - sinx}$ $et\ x \longmapsto \frac{x + sinx}{2 - sinx}$

Exercice 32

Soit f la fonction definie par

$$f: x \longmapsto \frac{xcosx}{x^2 + 1}$$

1) Trouver un reel $M > 0$ tel que $|xf(x)| \leq M$,pour tout reel x.
2) En deduire la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$

Exercice 33

On considère la fonction f definie sur IR^* par

$$f(x) = \frac{1}{x}\left(2 - \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

1)a) montrer que pour tout > 0 , $f(x) \geq \frac{1}{x}$

b) en deduire $\lim_{x \to 0^+} f(x)$.

2) a) montrer que que pour tout < 0 , $f(x) \leq \frac{1}{x}$

b) en deduire $\lim_{x \to 0^-} f(x)$.

Exercice 34

Dans chacun des cas suivants,determiner l'image de l'intervalle I par la fonction f

1) $f: x \longmapsto \frac{x + 1}{x - 2}$; $I =]2, +\infty[$

2) $f: x \longmapsto \sqrt{x^2 - 2x}$; $I =]-\infty; 0]$

3) $f: x \longmapsto \frac{1}{sinx}$; $I = \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$

4) $f: x \longmapsto \tan(\pi x)$; $I = \left]-\frac{1}{2}, 0\right]$

Exercice 35

Soit la fonction $f: x \longmapsto x^3 + 10x - 1$

1) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur IR.
2) a) montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0,1]$

   b) donner une valeur aprochée de α à 10^{-1} près.

Exercice 36

Soit la fonction $f: x \longmapsto x^3 + 10x - 1$

1) Dresser le tableau de variation de f et tracer sa courbe dans un repere orhogonal .
2) Verifier gaphiquement que la courbe f coupe l'axe des abscisses en trois points M_1 et M_2 et M_3 dont les abscisses seront notées x_1, x_2 et x_3 avec $x_1 < x_2 < x_3$
3) Montrer que x_1 appartient à l'intervalle $]-4; -3[$
4) Donner pour x_2,et x_3 un encadrement par deux entiers consecutifs.
5) Discuter suivants les valeurs de reel k,le nombre de solutions de l'equation $f(x) = k$.
6) Donner le nombre de solutions de l'equation $|f(x)| = 1$.

Exercice 37

1) On considere la fonction h definie par

$$h \longmapsto \sqrt{x} - \frac{1}{x} - 1$$

a)Montrer que h est strictement croissante sur $]0, +\infty[$

b) Determiner $h(]0,+\infty[)$

c) Montrer que l'equation $h(x) = 0$ admet dans $[2,3]$ une unique solution α.

d) Determiner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

2) Prepresenter dans un repere orthonomré, les fonctions fet g definies sur $]0,+\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x} \ et \ g(x) = \frac{1}{x} + 1$$

Exercice 38

On considere la fonction $f: x \mapsto cosx - x$

1) Montrer que f est strictement deccroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

2) Montrer que l'equation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$

3) Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près

Exercice 39

Soit f une fonction continue de $[0;1]$ sur $[0;1]$

On pose $g(x) = f(x) - x$

1) Quel est le signe de $g(0)$ et $g(1)$

2) En deduire que l'equation $g(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[0;1]$.

Application

Montrer que l'equation $\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = x$ admet au moins une solution dans $[0;1]$.

Exercice 40

$Soit\ f\ la\ fonction\ defie\ par : f: x \mapsto \frac{x^3}{x+1}$

1) Demontrer que la fonction f est strictement $croissante\ sur\ I = \left[-\frac{2}{3}, -1\right[$.

2) Determiner l'image de l'intervalle I par la fonction f

3) Deduire que l'equation $f(x) = 10$ admet une unique solution dans I.

Exercice 41

Demontrer que l'equation $x^3 - 2x^2 - 1 = 0$ admet au mons une solution sur l'intervalle $[2,3]$.

Exercice 42

Déterminer dans chacun des cas suivants l'ensemble de définition de f puis étudier la continuité de f sur tout intervalle dans son ensemble de définition :

1) $f(x) = -5x^3 + 7x^2 - 5$

2) $f(x) = \dfrac{x^2+2}{(x+2)(x-1)(2x-3)}$

3) $f(x) = \tan\left(\dfrac{\pi}{2x-1}\right)$; 4) $f(x) = \sin\left(cos\left(\dfrac{\pi}{x}\right)\right)$

5) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^4 - 5x^2 + 6}}{(x-1)(x^2+1)}$; 6) $f(x) = \dfrac{2x-4}{\tan(\pi x)}$

Exercice 43

Soit f une fonction definie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x} & ; \ x \neq 0 \\ f(0) = m \end{cases}$$

1) Etudier la continuité de f sur les intervales $]0;+\infty[$ et $]-\infty;0[$.

2) Determiner m pour que f soit continue sur IR

Exercice 44

Soit f une fonction definie par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x}{|x-1| - 1}$$

1) Determiner l'ensemble de definition de f

2) Etudier la continuité de f sur les intervalles $]-\infty;0[$ $]0;2[$ et $]2;+\infty[$.

3) Demontrer qu'il existe une fonction g continue sur IR tel que $\forall x \in D_f \ g(x) = f(x)$

Exercice 45

Soit f la fonction definie par

$$f(x) = \frac{1 - \cos(2\pi x)}{x(x-1)}$$

Etudier la continuité de f sur chaque intervalle de son ensemble de définition

Exercice 46

Soit f une fonction definie par : $f(x) = x^3 - 3x + 1$

Determiner l'image des intervalles suivants par f :

$I =]0;+\infty[$; $J = \ ]0;1[$ et $K =]-\infty;-1[$

Exercice 47

1) Vérifier que la fonction suivante est continue sur IR

$$\begin{cases} f(x) = 2x - 3; & x < 2 \\ f(x) = x^2 - 3 \quad ; & x \geq 2 \end{cases}$$

2) Determiner $f([-2{,}4])$, $f(]-\infty;1])$

Exercice 48

Demontrer que l'equation $x^5 + x^3 - x^2 + x + 1 = 0$

admet une unique solution sur $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]$

Exercice 49

Demontrer que l'equation $x^3 - 2x^2 - 1 = 0$ admet

trois solutions sur IR (à determiner l'intervalle de

chaque solution

Exercice 50

Soit n de IN^* calculer en fonction de n

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n)}{(2-x)^n - 1}$$

Exercice 51

On considere les deux fonctions f et g suivantes definies sur IR_+^* par :

$$f(x) = \sqrt{1 + x^2\sqrt{1+x^4\sqrt{1+x^8\sqrt{1+x^{16}}}}} \quad et$$

$$g(x) = \sqrt{1 + x\sqrt{1 + x^3\sqrt{1 + x^6\sqrt{1 + x^{12}}}}}$$

Demontrer que $\lim_{x\to+\infty}\big(f(x) - g(x)\big) = +\infty$

Exercice 52

Soient $n \in IN^*$ et $F_n$la fonction definie par

$$F_n(x) = \frac{(1 - sinx)(1 - sin^2 x) \dots (1 - \sin^n x)}{\cos^{2n} x}$$

Determiner $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} F_n(x)$

Exercice 53

:Calculer les deux limites suivantes :

1) $$\lim_{x\to 0}\frac{1 - cosx.cos2x \dots cosnx}{x^2}$$

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{1 - cosx.cos^2 2x \dots \cos^n nx}{x^2}$$

Exercice 54

Déterminer pour tout n de IN^*

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2n}} \frac{\sqrt{\dfrac{sin2nx}{1 + cosnx}}}{4n^2x^2 - \pi^2}$$

Exercice 55

f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I

et $x_0 \in I$ tel que f est bornnée sur I et discontinue en x_0

et g continue en x_0

Demontrer que fg soit continue en x_0 si et seulemet si

$g(x_0) = 0$.

Exercice 56

Determiner tout les fonctions f continues sur IR tel que

$$\begin{cases} f(2009) = 2009^{2008} \\ \forall(x;t) \in IR^2 \ f(x+t) = f(x) + f(t) \end{cases}$$

Exercice 57

Soit f une fonction definie sur IR telle que

$$\forall(x;y) \in IR^2 \ f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Demontrer que si f est continue en 0 ; alors est continue

sur IR

Exercice 58

Soit f une fonction definie par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}} - \sqrt{x^2+2x}}{x} - 1$$

1) Determiner D_f

2) Calculer les limtes aux bornes de D_f.

3) Demonter que :

$$\exists(\alpha;\beta) \in IR^2 \ \forall x \in \left[\frac{1}{2};1\right];$$

$$\alpha x \leq \sqrt{1+\frac{1}{x}} - \sqrt{x^2+2x} \leq \beta x$$

4) Demontrer que

$$\exists c \in \left]\frac{1}{2};1\right[; \ \sqrt{1+\frac{1}{c}} - \sqrt{c^2+2c} = c$$

Exercice 59

Soit f la fonction definie par

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2x}{x+1}}+\sqrt{2x-x^2}\right)$$

1) Determiner D_f et demontrer que f est continue sur D_f
2) Demontrer que

$$\exists(\alpha;\beta)\in IR^2\ \forall x\in\left[\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right];2\alpha < \sqrt{\frac{2x}{x+1}}+\sqrt{x^2+2x}\leq\beta x$$

3) Demontrer que f est une bijection de$[0;1]\ vers\ [0;1]$
4) Soit $[a;b]\subset[0;1]$ demontrer que :

$$\exists c\in[a;b]\ f(c)=\frac{a-c}{a-2b+c}$$

Exercice 60

f est une fonction definie sur $[0;1]$ telle que $f([0;1])\subset[0;1]$ et f continue sur $[0;1]$

demontrer que $\exists c\in[0;1]\quad f(c)=c$

Exercice 61

$f:[a;b]\to[a;b]$ Continue sur $[a;b]$

Demontrer f admet un point fixe

Exercice 62

Soit f une fonction continue sur IR telle que

$$(\forall x\in IR)\ f(x)\neq x$$

Demontrer que l'equation $fof(x)=x$ n'admet pas aucune solution sur IR.

Exercice 63

Soit f une fonction continue sur $[0;1]$ telle que $f(0)=f(1)$

Demontrer qu'il existe un reel c de $]0;1[$ tel que

$$f(c)=\frac{1-c}{1+c}$$

Exercice 64

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ tel que $f(a)=f(b)$

Demontrer que l'equation $f(x)=f\left(x+\frac{b-a}{2}\right)$ *admet* au moins une solution sur $[a;b]$.

Exercice 65

Soit $f:[0;1]\to[0;1]$ continue sur $[a;b]$

Demontrer que $\forall n\in IN^*\ \exists c_n\in[0;1]\ f(c_n)=c_n^n$

Exercice 66

Soient f et g deux fonctions definies de $[0;1]$ vers $[0;1]$

telles que $\begin{cases} f\ et\ g\ continues\ sur\ [0;1] \\ f([0;1])=[0;1]\end{cases}$

Demontrer que $\exists x_0\in[0;1]\ f(x_0)=g(x_0)$

Exercice 67

Soient f et g deux fonctions continues sur $[0;1]$ telles

que : $\big(f(0)-g(0)\big)\big(f(1)-g(1)\big)\leq 0$

Demontrer qu'il existe un réel c de $[0;1]$ tel que

$$f(c)=g(c)$$

Exercice 68

Soit $(a;b)\in IR^2$ tels que $a<b$ et $0<ab$.

$f:[a;b]\to[a;b]$ continue sur [a;b]

Demontrer que $\exists c\in[a;b]\ cf(c)=ab$

Exercice 69

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ tel que $f(a)<ab$ et $b^2<f(b)$

Demontrer qu'il existe un reel α tel que $\alpha\in[a;b]$ et $f(\alpha)=\alpha b$.

Exercice 70

Soit f une fonction de $[0;1]$ vers $[0;1]$ telle que f est continue sur $[0;1]$.

Demontrer que $\exists c\in]0;1[\ f(c)+f(1-c)=2c$

Exercice 71

g est une fonction continue sur $[0;1]$. Demontrer que

$$\exists\lambda\in]0;1[\ \ g(\lambda)=\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{1-\lambda}$$

Exercice 72

f est g deux fonction continues sur $[0;1]$ telles que

$$g(0)=f(1)=1\ et\ f(0)=g(1)=0$$

Demontrer que : $\exists c\in]0;1[;f(c)=2007g(c)$

Exercice 73

Soient α et β deux reels strictement positifs

Et soit f une fonction continue sur $[0;1]$ tel que

$f(0) \neq f(1)$. Demontrer que
$\exists c \in [0;1]\ \ \alpha f(0) + \beta f(1) = (\alpha+\beta) f(c)$

Exercice 74

Soient a et b deux reels tels que $a < b$.et soit f une fonction continue sur $[a;b]$.demontrer que

$$\exists c \in]a;b[; f(c) = \frac{1}{a-c} + \frac{1}{b-c}$$

Exercice 75

Soient a et b des nombres réels tels que $a < b$ et f une application de $[a, b]$ dans $[a, b]$

a) On suppose que pour tout $(x, y) \in [a, b] \times [a, b]$ on a : $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$

Montrer que f est continue sur $[a, b]$.

En déduire qu'il existe $x \in [a, b]$, tel que $f(x) = x$.

b) On suppose maintenant que pour tout

$(x, y) \in [a, b] \times [a, b]$ $x \neq y$ on a :

$|f(x) - f(y)| < |x - y|$

Montrer qu'il existe un unique $x \in [a, b]$, tel que

$f(x) = x$

Exercice 76

Montrer que toute fonction polynôme de IR dans IR de degré impaire, s'annule en au moins un point .

Exercice 77

Soit f une fonction continue sur un segment [a ;b] .

Montrer qu'il existe

$$c \in [a, b] \text{ tel que } 2f(a) + 3f(b) = 5f(c)$$

Exercice 78

Soient f et g et h trois fonctions continues sur un intervalle I telles que $(\forall x \in I :)\ g(x) \leq f(x) \leq h(x)$

Montrer que si chacune des deux fonctions g et h admet un point fixe dans I alors f en admet un aussi .

Exercice 79

Soient f ,g : [a ; b] $\rightarrow$ IR continues . on suppose que

$$\forall x \in [a; b]: f(x) > g(x) > 0$$

Montrer qu'il existe k >1 tel que f > kg

Exercice 80

Soit f croissante sur [a, b] telle que

$f([a,b]) = [f(a), f(b)]$. Montrer que f est continue sur [a, b].

Exercice 81

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ tel que $a < b$

Et soit $n \in IN^*$.et soient $x_1; x_2, \dots; et\ x_n$ des elements de $[a;b]$.Demontrer que :

$$(\exists c \in [a;b]);$$

$$f(c) = \frac{1}{n}\left(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)\right)$$

Exercice 82

Soit f une fonction continue sur $[0;1]$ et $f(1) = f(0)$

Soit n de IN et $n \geq 2$, on considere la fonction f_n definie sur $\left[0; 1 - \frac{1}{n}\right]$ par :

$$f_n(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)$$

1) Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} f_n\left(\frac{k}{n}\right)$

2) Demontrer que $\exists x_0 \in]0;1[\ ; f(x_0) = f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right)$

Exercice 83

Soit f une fonction continue et positive sur IR_+ tel que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

Demontrer que l'equation $f(x) = x$ admet au moins une solution sur IR_+

Exercice 84

f et g deux fonctions continues sur meme intervalle I

tels que $(\forall x \in I)\ (f(x))^2 = (g(x))^2$

Demontrer que $\quad (\forall x \in I)\ \ f(x) = g(x)$

$$ou\ (\forall x \in I)\ \ f(x) = -g(x)$$