Dérivation – Étude de fonctions

I. Nombre dérivé - Fonction dérivée (Rappels)

Activité 0

1. On considère f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x$. Étudier la dérivabilité de f en -1 puis interpréter le résultat graphiquement.
2. On considère g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = |x-1|$.
   (a) Étudier la dérivabilité de g à droite et à gauche en 1 puis interpréter les résultats graphiquement.
   (b) g est-elle dérivable en 1 ?

Définitions et propriétés

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un point de I.

- On dit que f est **dérivable** en a s'il existe un réel l tel que $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l$.
- Le nombre l, noté $f'(a)$ ou $\frac{df}{dx}(a)$, est appelé le **nombre dérivé** de la fonction f en a.
- Dans ce cas la courbe de f admet une tangente au voisinage de a d'équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
- On dit que f est **dérivable à droite** de a s'il existe un réel l', tel que $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l'$.
- Le nombre l', noté $f'_d(a)$, est appelé le nombre dérivé de la fonction f à droite en a.
- Dans ce cas la courbe de f admet une demi-tangente au voisinage de a d'équation $\{y = f'_d(a)(x-a) + f(a), x \geq a\}$.

(On définit de même la dérivabilité à gauche en a)

Exemple

La fonction définie sur $]-\infty; 1]$ par $f(x) = x + 1 + 2\sqrt{1-x}$ est dérivable en -3. En effet :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-3} \frac{f(x)-f(-3)}{x+3} &= \lim_{x\to-3} \frac{(x+1+2\sqrt{1-x}) - (-3+1+2\sqrt{1-(-3)})}{x+3} \\
&= \lim_{x\to-3} \frac{x+1+2\sqrt{1-x} - (-2+4)}{x+3} = \lim_{x\to-3} \frac{x-1+2\sqrt{1-x}}{x+3} \\
&= \lim_{x\to-3} \frac{(x-1+2\sqrt{1-x})(x-1-2\sqrt{1-x})}{(x+3)(x-1-2\sqrt{1-x})} \\
&= \lim_{x\to-3} \frac{(x-1)^2 - 4(1-x)}{(x+3)(x-1-2\sqrt{1-x})} \\
&= \lim_{x\to-3} \frac{x^2-2x+1-4+4x}{(x+3)(x-1-2\sqrt{1-x})} = \lim_{x\to-3} \frac{x^2+2x-3}{(x+3)(x-1-2\sqrt{1-x})} \\
&= \lim_{x\to-3} \frac{(x+3)(x-1)}{(x+3)(x-1-2\sqrt{1-x})} = \lim_{x\to-3} \frac{x-1}{x-1-2\sqrt{1-x}} \\
&= \frac{-3-1}{-3-1-2\sqrt{1-(-3)}} = \frac{-4}{-4-4} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Donc f est dérivable en -3 et la courbe (C_f) admet au voisinage de -3 une tangente d'équation: $y = f'(-3)(x+3) + f(-3) = \frac{1}{2}(x+3) + 0 = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$. (Note: $f(-3) = -3+1+2\sqrt{1-(-3)} = -2+2\sqrt{4} = -2+4 = 2$. L'équation de la tangente est $y = \frac{1}{2}(x+3) + 2 = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$)

► Donnons une valeur approchée de $f(-2.999)$: La fonction affine tangente à (C_f) au voisinage de -3 est $g : x \mapsto \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$. Ainsi : $f(-2.999) \approx g(-2.999)$. Or $g(-2.999) = \frac{1}{2}(-2.999) + \frac{7}{2} = -1.4995 + 3.5 = 2.0005$. Par suite $f(-2.999) \approx 2.0005$.

Remarques

- Si $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = 0$, alors (C_f) admet une tangente horizontale au point $A(a, f(a))$.
- Si f est continue en a et $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$ ou $\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$, alors (C_f) admet une demi-tangente verticale au point $A(a, f(a))$.

Exemple

La fonction définie sur $]-\infty;1]$ par $f : x \mapsto x+1+2\sqrt{1-x}$ n'est pas dérivable en 1 à gauche. En effet :

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-1+2\sqrt{1-x}}{x-1} = +\infty$$

Parce que :

$$\lim_{x\to 1^-} (x+3) = 4, \quad \lim_{x\to 1^-} x-1-2\sqrt{1-x} = 0^-$$

Donc f n'est pas dérivable en 1 à gauche.
Puisque f est continue en 1 à gauche et $\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty$, alors la courbe (C_f) admet une *demi-tangente verticale* au point $A(1,2)$ dirigée vers le haut.

Application 0 : Étudier la dérivabilité de la fonction f en a puis interpréter graphiquement les résultats dans les cas suivants :

- $f(x) = x^3 - x$, $a = 2$
- $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$, $a = 1$
- $f(x) = \sqrt{2x+1}$, $a = -\frac{1}{2}$ à droite

Exercice 0 : On considère f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de f en $x_0 = 0$.
2. Étudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$. Interpréter graphiquement le résultat.

Propriété :

f est dérivable en a ssi elle est dérivable à droite et à gauche en a et $f'_g(a) = f'_d(a)$

Graphiquement : Si $f'_g(a) \neq f'_d(a)$, alors (C_f) admet deux demi-tangentes non parallèles au point $A(a, f(a))$. Ce point est appelé **point anguleux**.

Application 2 : On considère f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}-1 & 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{x^2-1}{4} & x \geq 1 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue en 1
2. Étudier la dérivabilité de f en 1

Remarque : Si f est dérivable en a, alors elle est continue en a, mais la réciproque n'est pas toujours vraie.

Exemple : La fonction $x \mapsto |x|$ est continue en 0, mais n'est pas dérivable en ce point.

II. Opérations sur les fonctions dérivables - Monotonie d'une fonction

Propriété

Les fonctions polynomiales et les fonctions $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \sin(x)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Tableau des fonctions dérivées usuelles

La fonction f	La fonction dérivée f'	Domaine de dérivabilité de f
$x \mapsto a$	0	$\mathbb{R}$
$x \mapsto ax+b$	a	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto \cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \tan(x)$	$1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\, k \in \mathbb{Z}\}$

Propriétés

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k un réel, alors :

- $f+g$ est dérivable et $(f+g)' = f'+g'$
- kf est dérivable et $(kf)' = kf'$
- $f \times g$ est dérivable et $(fg)' = f'g + fg'$
- f^n (pour $n \in \mathbb{N}$) est dérivable et $(f^n)' = nf^{n-1}f'$
- Si $g(x) \neq 0$, $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-fg'}{g^2}$
- Si $f(x) \neq 0$, $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$
- Si $f(x) > 0$, $(\sqrt{f})' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$

Applications

1. Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}, \quad h(x) = \sqrt{x}\sin(x) + \cos(x), \quad g(x) = (x^2+1)^5$$

2. (a) Étudier la monotonie de la fonction f ci-dessus.
   (b) Dresser le tableau de variations de f.
   (c) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq f(x) \leq 1$.

Exercice :

- On considère g définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = x\sqrt{x} - 1$:
  1. Étudier la dérivabilité de g à droite en 0. Interpréter graphiquement.

2. Montrer que g est dérivable sur $]0,+\infty[$ puis calculer sa dérivée.
3. Dresser le tableau de variations de g.
4. Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de g sur $[0,+\infty[$.

- Soit f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = 2x - 3 + \frac{4}{\sqrt{x}}$:

1. Montrer que $f' = \frac{2g(x)}{x\sqrt{x}}$
2. Étudier la monotonie de f
3. Dresser le tableau de variation de f
4. En déduire que $\forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) \geq 3$.

III. Dérivée de la fonction composée

Activité 2

Soient f et g définies sur $\mathbb{R}$: $f(x) = \cos(x)$, $g(x) = x^2 - 2x$

1. Calculer $f'(x)$ et $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Calculer $f'(x) \times g'(f(x))$.
3. Soit $h(x) = (g \circ f)(x)$. Déterminer $h(x)$ puis calculer $h'(x)$.
4. Comparer $h'(x)$ et $f'(x) \times g'(f(x))$.

Propriétés

Si f est dérivable en a et g dérivable en $f(a)$, alors la fonction composée $h = g \circ f$ définie par $x \mapsto g(f(x))$ est dérivable en a et

$$h'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$$

III. Dérivée de la fonction composée

Propriété

- Si f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$, alors la fonction composée $g \circ f$ est dérivable en a et :

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \times f'(a)$$

- Si f est dérivable sur un intervalle I et g dérivable sur un intervalle J tel que $f(I) \subset J$, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$$

Exemple

Déterminons la dérivée de la fonction $h : x \mapsto \cos(\sqrt{x})$ sur $]0, +\infty[$.
Pour tout x de $]0, +\infty[$, on a $h(x) = (g \circ f)(x)$ tel que $g(x) = \cos(x)$ et $f(x) = \sqrt{x}$.
Comme g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $f(]0, +\infty[) \subset \mathbb{R}$, alors la fonction h est dérivable sur $]0, +\infty[$. Et on a : $h'(x) = g'(f(x)) \times f'(x) = -\sin(\sqrt{x}) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$, pour tout x de $]0, +\infty[$.

Application

Calculer la dérivée des fonctions $f : x \mapsto \sin(x^2 - \frac{2}{3}x + 4)$ et $g : x \mapsto \cos(\frac{4}{x^2+4})$.

IV. Dérivée de la fonction Réciproque

Propriété

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et $a \in I$. Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$, alors la fonction f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et :

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

Application

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x$.

1. Montrer que f admet une fonction réciproque définie sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Calculer $f(1)$.
   (b) Montrer que f^{-1} est dérivable en 2 puis déterminer $(f^{-1})'(2)$.

Propriété

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si f est dérivable sur I tel que $(\forall x \in I) : f'(x) \neq 0$, alors la fonction f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$. De plus on a pour tout $x \in J$:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Conséquences

- Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x \in]0, +\infty[$: $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$.
- Si f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $(\forall x \in I) : f(x) > 0$, alors la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{f(x)}$ est dérivable sur I et sa fonction dérivée est donnée par :

$$(\sqrt[n]{f(x)})' = \frac{f'(x)}{n(\sqrt[n]{f(x)})^{n-1}}$$

Application

1. Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :
   a. $f(x) = \sqrt[3]{x}$
   b. $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$
   c. $f(x) = \sqrt[4]{1 + \cos^2(x)}$
   d. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 2x}$
2. A l'aide du nombre dérivé, calculer les limites suivantes :
   a. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$
   b. $\lim_{x\to 1} \frac{(x^8+1)(\sqrt[4]{x^3+1})-4}{x-1}$

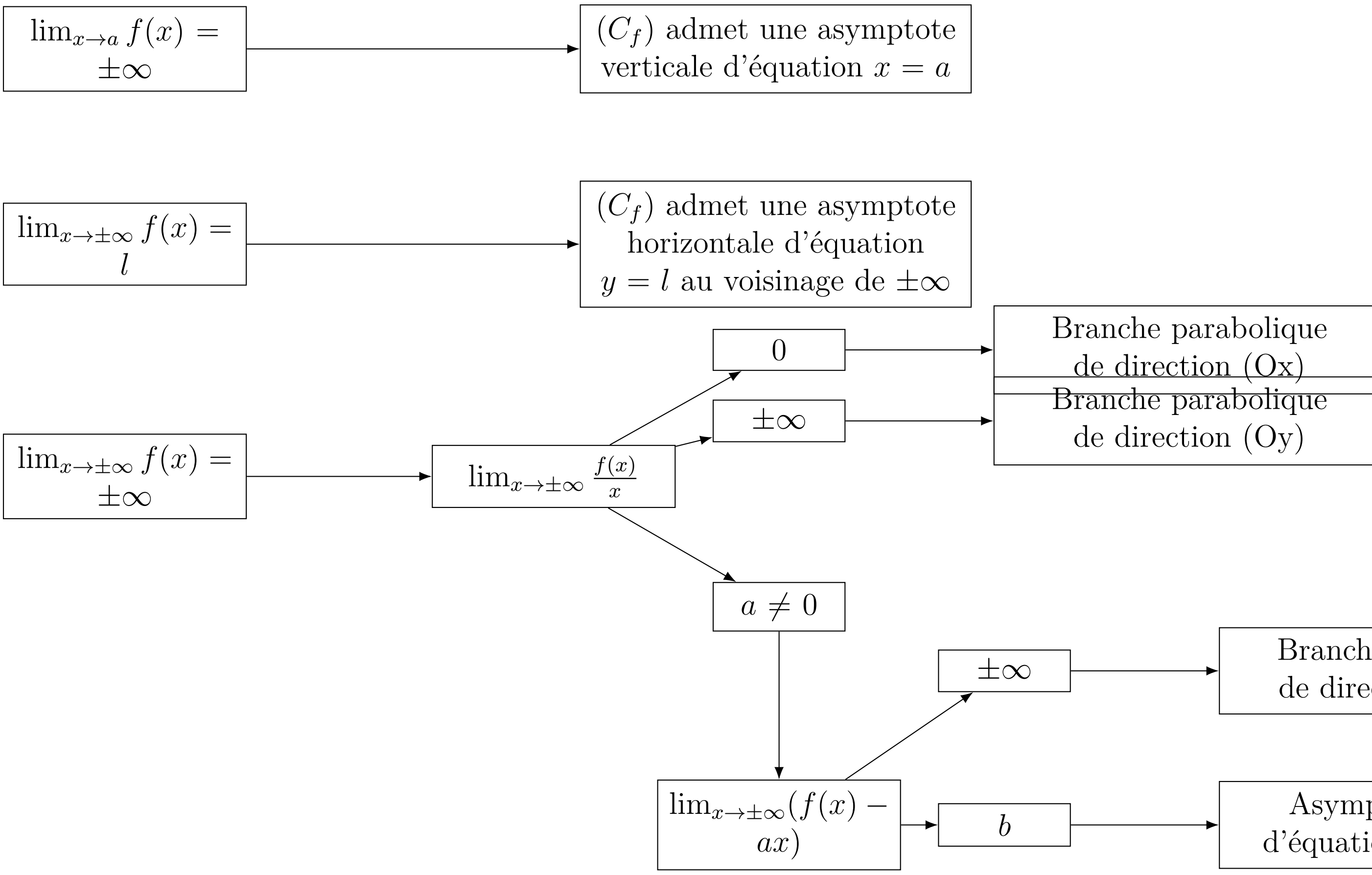
Exercice

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x - 3$.

1. Etudier les variations de la fonction f.
2. Soit g la restriction de f sur $[1, +\infty[$.
   (a) Montrer que g admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J à déterminer.
   (b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α et que $2 < \alpha < 3$.
   (c) Montrer que : $(g^{-1})'(0) = \frac{1}{3(\alpha^2-1)}$.

V. Branches infinies (Rappel)

Schéma récapitulatif de l'étude des branches infinies



Exemple 1

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par : $f(x) = \frac{3-2x^2}{(1+x)^2}$.
On a $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2x^2}{x^2} = -2$.
Donc la droite d'équation $y = -2$ est une asymptote horizontale à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.
Et on a : $\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to -1^-} f(x) = +\infty$.
Donc la droite d'équation $x = -1$ est une asymptote verticale de la courbe (C_f).

Exemple 2

On considère la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $g(x) = 2x - \sqrt{x}$.
On a : $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x(2 - \frac{1}{\sqrt{x}}) = +\infty$.
On calcule alors $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}$.
On a $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x-\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty}(2 - \frac{1}{\sqrt{x}}) = 2$.
Par suite : $\lim_{x\to+\infty}[g(x) - 2x] = \lim_{x\to+\infty}(2x - \sqrt{x} - 2x) = \lim_{x\to+\infty} -\sqrt{x} = -\infty$.
D'où la courbe (C_g) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = 2x$ au voisinage de $+\infty$.

Application

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2+x-1}{x+2}$.

1. Donner D_f l'ensemble de définition de f.
2. Calculer $\lim_{x\to -2^+} f(x)$ et $\lim_{x\to -2^-} f(x)$. Interpréter les résultats.
3. (a) Vérifier, pour tout $x \in D_f$, que $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x+2}$.
   (b) Montrer que la droite d'équation $(D) : y = x - 1$ est une asymptote oblique de (C_f) au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

VI. Concavité d'une courbe - Points d'inflexion

Propriétés

Soient f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I et (C_f) sa courbe représentative.

- Si $f'' > 0$ sur I, alors (C_f) est convexe.
- Si $f'' < 0$ sur I, alors (C_f) est concave.
- Si f'' s'annule en a en changeant de signe, alors $A(a; f(a))$ est un point d'inflexion.

Application :
On considère f définie par $f(x) = \frac{x^2+x-1}{x+2}$.
Étudier la concavité de (C_f) et préciser les points d'inflexion s'ils existent.

III. Eléments de symétrie d'une courbe

1. Axe de symétrie

Propriétés

Soit f une fonction définie sur un ensemble D et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé.
La droite (Δ) d'équation $x = a$ $(a \in \mathbb{R})$ est un axe de symétrie de (C_f) si et seulement si

$$\begin{cases} \forall x \in D,\ (2a - x) \in D \\ \forall x \in D,\ f(2a - x) = f(x) \end{cases}$$

Application :
Montrer que la droite (Δ) : $x = 1$ est un axe de symétrie de la courbe de la fonction $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$.

2. Centre de symétrie

Propriétés

Soit f définie sur un ensemble D et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé.
Le point $\Omega(a, b)$ est un centre de symétrie de (C_f) si et seulement si

$$\begin{cases} \forall x \in D,\ (2a - x) \in D \\ \forall x \in D,\ f(2a - x) + f(x) = 2b \end{cases}$$

Application :
On considère f définie par $f(x) = \frac{x^2+x-1}{x+2}$.

1. Montrer que $\Omega(-2, -3)$ est un centre de symétrie pour la courbe (C_f).

2. En déduire que l'étude de la fonction peut se limiter à l'intervalle $]-2; +\infty$