Exercice 1

On considere la fonction g definie par :

$$g(x) = |x| - 2\sqrt{|x|}$$

1) Demontrer que la fonction g est continue sur IR
2) Determiner g'(x) sur les deux intervalles :

$$]-\infty; 0[\ et]0, +\infty[$$

3) Verifier que $g\left(-\frac{1}{4}\right) = g\left(\frac{1}{4}\right)$
4) Demonter que $\forall x \in \left]-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right[\ g'(x) \neq 0$
5) Demontrer que $\exists c \in \left]\frac{1}{4}; 2\right[\ g'(c) = 0$

Exercice 2

On considere la fonction h definie par :

$$h(x) = (x+2)(x-1)(x+1)(x-3)$$

sans calculer $h'(x)$ demontrer que l'equation

$h'(x) = 0$ admet trois solutions distincts

Exercice 3

1) Demontrer que $\exists c \in \left]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right[\sin c = c^2$

2) $deduire\ que\ l'equation \cos x - 2x = 0$ admet au moins une solution sur IR

3) Cette solution est elle unique ? justifier

Exercice 4

Soit f une fonction definie sur [0,1] telle que :

$$\forall x \in]0,1[\ f(x) > 0\ et\ f(0) = 0$$

$$Demontrer\ que\ \exists c \in]0,1[\ , \frac{2f'(c)}{f(c)} = \frac{3f'(1-c)}{f(1-c)}$$

Exercice 5

Soit f un e fonction sur un intervalle I de IR

Et soient $x_1\ et\ x_2\ et\ \ x_3$ des elements de I tels que :

$$2f(x_3) = f(x_1) + f(x_2)$$

Demontrer que $\exists c \in I\ ; f'(c) = 0$

Exercice 6

Demontrer que $\forall x \in]0, +\infty[\ x < e^x - 1 < xe^x$

Exercice 7

$$Demontrer\ que \frac{\sqrt{2}}{2} < \sin 50° < \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{36}$$

Exercice 8

On considera lfonction H definie par :

$$H(x) = \frac{1}{x+1}\ et\ soit\ \alpha \in]0, +\infty[$$

1) $Demontrer\ que\ \forall x \in]0, \alpha[$

$$-1 < H'(x) < -\frac{1}{(1+\alpha)^2}$$

2) $deduire\ que\ \forall x \in]0, +\infty[$

$$1 - x < \frac{1}{x+1} < 1 - \frac{1}{(1+x)^2}$$

Exercice 9

Soit f la fonction definie par $f(x) = \sqrt[3]{x}$

1) Demontrer que pour tout x de [1000 ;1001]

$$\frac{1}{3 \times (10{,}1)^2} \leq f'(x) \leq \frac{1}{3 \times 10^2}$$

2) Deduire que $10{,}0032 < \sqrt[3]{1001} < 10{,}0033$

Exercice 10

On considere la fonction definie par :

$$\forall x \in [0; +\infty[\qquad f(x) = \sqrt{x}$$

1) Demontrer que pour tout x de $]0; +\infty[$ et pour tout t de $[x; x+1[$ on a :

$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq f'(t) \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2) Deduire que $\forall x \in]0; +\infty[$

$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

3) On considere la suite $(u_n)_{n \in IN^*}$ definie par

$$u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Demontrer que la suite $(u_n)_{n \in IN^*}$ est divergent

Exercice 11

En utilisant le théorème des accroissements finis démontrer que :

1) $\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2$, $0<a<b<\frac{\pi}{2}$

$$\frac{b-a}{\cos^2 a}<\tan a-\tan b<\frac{b-a}{\cos^2 b}$$

2) $\forall x;y\in[0,10]$ $|x\sin x-y\sin y|\le 11|x-y|$

3) $\forall x\in]0,+\infty[$ $\frac{x}{x^2+1}<\arctan x$

4) $\forall x\in]0,+\infty[$ $x<e^x-1<xe^x$

Exercice 12

Soit f une fonction définie sur un segment et continue $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$ et $f(0)=0$ et $f(1)=1$

montrer que $(\exists c\in]0;1[):2cf'(c)=\sqrt{c}$

Exercice 13

Soit f définie sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ par

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{1+\sin x}}$$

1)a) Montrer que $f'(x)=\frac{-\cos x}{\sqrt{2}(1+\sin x)^{\frac{3}{2}}}$; $\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

b) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une solution unique λ sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

c) Montrer que $|f'(x)|\le\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

2. On considère la suite (U_n) définie par

$$\begin{cases}U_0=0\\ U_{n+1}=f(U_n)\end{cases}\ ;\ \forall n\in\mathbb{N}$$

a) vérifier que $f\left(\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\right)\subset\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et montrer que

$0\le U_n\le\frac{\pi}{2}$; $\forall n\in\mathbb{N}$

b) Montrer que $|U_{n+1}-\lambda|\le\frac{\sqrt{2}}{2}|U_n-\lambda|$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

et déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$

Exercice 14

Soit à, b et c des éléments de $]0,+\infty[$ tels que

$\ln(b)-\ln(a)=(b-a)\times\frac{1}{c}$ démontrer que

$$\sqrt{ab}<c<\frac{1}{2}(a+b)$$

Exercice 15

Soit f une fonction définie sur un segment $[0,1]$ et $n\in\mathbb{N}^*$ on suppose que f est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$ et $f(0)=0$ et $f(1)=1$ montrer que

$$(\exists a,b,c\in[0,1]):f'(a).f'(b)=\frac{1-c^n}{1-c}.c^{n-1}$$

Exercice 16

1)Démontrer que $\forall x\in]0,+\infty[$

$$1-x^2\le\frac{1}{x^2+1}\le 1-x^2+x^4$$

2)On considère la fonction f définie par

$\forall x\in]0,+\infty[$ $f(x)=\arctan x-x+\frac{1}{3}x^3$

a) Démontrer que : $\forall x\in]0,+\infty[$ $|f'(x)|\le x^4$

b) Déduire que $\forall x\in]0,+\infty[$ $|f(x)|\le|x^5|$

c) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan x-x}{x^2}$

Exercice 17

On considère la fonction f définie sur $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$ par

$$f(x)=\frac{\cos x}{\sin x}$$

1) Démontrer que $\forall x\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$ $-2\le f'(x)<1$

Déduire que $\forall a\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$

$$\left(\frac{\pi}{2}-2a\right)\sin a\le\cos a-\sin a\le\left(\frac{\pi}{4}-a\right)\sin a$$

Exercice 18

On considere la fonction f definie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Par $f(x) = \sin x$

On sait d'apres le theoerme des accroissements finis

que pour tout a et b de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ on a :

$$\exists c \in]a;b[:\ f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$$

1) Demontrer que c est unique

2) *Demontrer que* $0 < c - \frac{a+b}{2} < \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$

Exercice 19

Soit f une fonction deux fois derivables sur un

intervalle I et a et b deux elements de I demontrer que

$$\exists c \in]a;b[:\ \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(a) + \frac{b-a}{2}f''(c)$$

Exercice 20

Soit f une fonction trois fois derivables sur un

intervalle I de IR soient a et b deux elements de I tels

que $a < b$ demontrer qu'il existe c de $]a;b[$ tel que :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(a) + \frac{1}{2}(b-a)f''(a) + \frac{1}{6}(b-a)^2 f'''(c)$$

Exercice 21

Soit f une fonction derivable sur un intervalle ouvert I

Demontrer que si l'equation $f(x) = 0$ admet 4

solutions alors l'eqiation $f'(x) = 0$ admet trois

solutions

Exercice 22

On considere la fonction f definie de [1 ;2] vers IR

par :$f(x) = \sin(x-1) + 2\sin(x-2) + \sin(x-3)$

Demontrer que $\exists (a,b) \in]1;2[^2$:

$$1 - \frac{f(1)}{f(a)} = 2 - \frac{f(2)}{f(b)} \quad et\ (a \neq b)$$

Exercice 23

F et g deux fonctions continues sur [a ;b] et derivables

sur $]a;b[$ telles que :

- $\forall x \in [a;b] \quad g(x) \neq 0$
- $\forall x \in]a;b[\quad g'(x) \neq 0$
- $(fg)(a) = (fg)(b)$

Demontrer que : $(\exists c \in]a;b[ ) : \quad \frac{f(c)}{g(c)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

Exercice 24

Soient f et g deux fonctions derivables sur un intervalle

I et soient a et b deux element s de I tels que :

$$f(a) = f(b) = 0$$

Demontrer que $\exists c \in]a;b[: f'(c) + f(c)g'(c) = 0$

Exercice 25

Soit f une fonction continue sur [a;b] et derivable 3

fois sur $]a;b[$ telle que :

$\exists x \in]a;b[\ f(a) = f(b) = f(c) = 0$

Demontrer que pour tout x de $]a;b[$ il existe α *de*

$]a;b[$: $f(x) = \frac{1}{6}(x-a)(x-b)(x-c)f'''(\alpha)$

Exercice 26

Soit f une fonction continue sur [a;b] et derivable sur

$]a;b[$ telle que :

$\forall x \in]a;b[\ f(x) \neq 0 et\ f(a) = f(b) = 0$

Demontrer que :

$$(\forall \lambda \in IR)\ (\exists c \in]a;b[)\ f'(c) = \lambda f(c)$$

Exercice 27

Demontrer que

$$(\forall x \in]2;+\infty[)\ 1 - \frac{1}{x+2} < \ln(x+2) < x+1$$