Chapitre 7

TRIGONOMÉTRIE

Capacités attendues

- Maitriser les différentes formules de transformation ;
- Résoudre les équations et les inéquations trigonométriques se ramenant à la résolution d'équations et d'inéquations fondamentales ;
- Représenter et lire les solutions d'une équation et d'une inéquation sur le cercle trigonométrique.

Rappel

1 Compléter le tableau suivant par le signe de $\cos(\theta)$, $\sin(\theta)$ et $\tan(\theta)$:

θ	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin(\theta)$					
$\cos(\theta)$					
$\tan(\theta)$					

2 Compléter le tableau suivant :

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin(\theta)$									
$\cos(\theta)$									
$\tan(\theta)$									

3 Compléter les transformations suivantes :
Pour tout réel θ, on a :

$\cos(-\theta) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, $\sin(-\theta) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\cos(\pi+\theta) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, $\sin(\pi+\theta) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\cos(\pi-\theta) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, $\sin(\pi-\theta) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

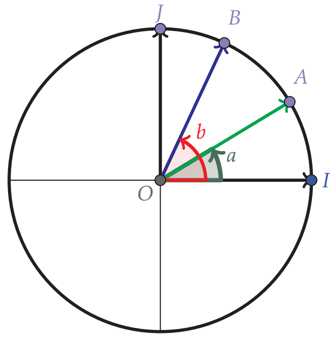
$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta) = \ldots\ldots\ldots$, $\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \ldots\ldots\ldots\ldots / \theta \neq \frac{\pi}{2}+k\pi ; k \in \mathbb{Z}$

I Formules de transformation :

1 Formules d'addition :

1 Activité nř1



Soient (P) un plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j})$ et soient (U) le cercle trigonométrique et a et b deux réels.
On considère les points A et B du cercle (U) tels que :
$\overline{(\vec{i}\,;\overrightarrow{OA})} \equiv a[2\pi]$ et $\overline{(\vec{i}\,;\overrightarrow{OB})} \equiv b[2\pi]$.

1. Montrer que : $\overline{(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB})} \equiv (b-a)[2\pi]$.
2. Calculer $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ et déduire que $\cos(b-a) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$.
3. Montrer que : $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.
4. Montrer que : $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$.
5. Déduire que : $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$.
6. Montrer que : $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$ et $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$.
7. Montrer que : $\tan(a-b) = \dfrac{tan(a) - tan(b)}{1 + tan(a).tan(b)}$.
   En déduire que : $\tan(a+b) = \dfrac{tan(a) + tan(b)}{1 - tan(a).tan(b)}$ et $\tan(2a) = \dfrac{2tan(a)}{1 - tan^2(a)}$

Propriétés

1. $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
2. $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
3. $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \times \tan b}$ $\quad (a-b) \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{k\pi}{2};\quad k \in \mathbb{Z}\right\}$
4. $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
5. $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
6. $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \times \tan b}$ $\quad (a+b) \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{k\pi}{2};\quad k \in \mathbb{Z}\right\}$

Démonstration

1 Montrons que $\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$. En effet :

Dans le repère orthonormé on considère deux vecteurs unitaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tel que $\left(\widehat{\vec{i},\vec{u}}\right)=a$ et $\left(\widehat{\vec{i},\vec{v}}\right)=b$.

D'une part $\vec{u}.\vec{v}=\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$ car les deux vecteurs sont unitaires.
D'autre part en se basant sur la relation de Chasles, on a :
$\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)=\left(\widehat{\vec{u},\vec{i}}\right)+\left(\widehat{\vec{i},\vec{v}}\right)=b-a$, donc $\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)=\cos(b-a)=\cos(a-b)$ (1).

Les composantes des deux vecteurs sont : $\vec{u}\begin{pmatrix}\cos a\\ \sin a\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\cos b\\ \sin b\end{pmatrix}$.

Or $\vec{u}.\vec{v}=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$ (2).
Finalement d'après (1) et (2) on obtient $\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$

2 Remplacer b par $(-b)$ dans l'équation précédente.

$$\cos(a+b)=\cos(a-(-(b))=\cos(a)\cos(-b)+\sin(a)\sin(-b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$$

3 Il suffit de remplacer b par $\left(\frac{\pi}{2}-b\right)$ dans la deuxième formule. On aura alors :

$$\cos\left(a-\left(\frac{\pi}{2}-b\right)\right)=\cos\left(a-\frac{\pi}{2}+b\right)=\cos\left(a+b-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(a+b)\right)=\sin(a+b)$$

D'autre part on a :

$$\cos\left(a-\left(\frac{\pi}{2}-b\right)\right)=\cos a\cos\left(\frac{\pi}{2}-b\right)+\sin a\sin\left(\frac{\pi}{2}-b\right)=\cos a\sin b+\sin a\cos b$$

D'où on obtient le résultat : $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$

4

$$\begin{aligned}\sin(a-b)=\sin(a+(-b))=\cos a\sin(-b)+\sin a\cos(-b)&=-\cos a\sin b+\sin a\cos b\\&=\sin a\cos b-\cos a\sin b\end{aligned}$$

5 Soit $(a+b)\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{k\pi}{2};\quad k\in\mathbb{Z}\right\}$.

$$\begin{aligned}\tan(a+b)=\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}=\frac{\sin a\cos b+\cos a\sin b}{\cos a\cos b-\sin a\sin b}=\frac{\frac{\sin a\cos b+\cos a\sin b}{\cos a\cos b}}{\frac{\cos a\cos b-\sin a\sin b}{\cos a\cos b}}&=\frac{\frac{\sin a\cos b}{\cos a\cos b}+\frac{\cos a\sin b}{\cos a\cos b}}{\frac{\cos a\cos b}{\cos a\cos b}-\frac{\sin a\sin b}{\cos a\cos b}}\\&=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\times\tan b}\end{aligned}$$

6 Remplacer b par $(-b)$, on obtient :

$$\tan(a-b)=\tan(a+(-b))=\frac{\tan a+\tan(-b)}{1-\tan a\times\tan(-b)}=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\times\tan b}$$

2 Formules de duplication :

Propriétés

1. $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$
2. $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$
3. $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a)$
4. $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$
5. $\tan(2a) = \dfrac{2\tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$

Démonstration

1

$$\cos(2a) = \cos(a+a) = \cos a \cos a - \sin a \sin a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

2 $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = \cos^2(a) - \left(1 - \cos^2(a)\right) = \cos^{(} a) - 1 + \cos^2(a) = 2\cos^2(a) - 1.$

3 $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = \left(1 - \sin^2(a)\right) - \sin^2(a) = 1 - \sin^2(a) - \sin^2(a) = 1 - 2\sin^2(a).$

4

$$\sin(2a) = \sin(a+a) = \sin a \cos a + \cos a \sin a = 2\sin(a)\cos(a)$$

5

$$\tan(2a) = \tan(a+a) = \frac{\tan a + \tan a}{1 - \tan a \times \tan a} = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

II Transformation des produits aux sommes et transformation des sommes aux produits

2 Activité 2

1. Calculer $\cos(a+b) + \cos(a-b)$, $\sin(a+b) + \sin(a-b)$ et $\cos(a+b) - \cos(a-b)$.
2. On pose $p = a + b$ et $q = a - b$.
   Vérifier que : $a = \dfrac{p+q}{2}$ et $b = \dfrac{p-q}{2}$
3. En déduire $\cos(p) + \cos(q)$, $\sin(p) + \sin(q)$, $\cos(p) - \cos(q)$ et $\sin(p) - \sin(q)$.

Propriétés Transformation des produits aux sommes :

1 $\cos(a).\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b)+\cos(a-b))$

2 $\sin(a).\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b)+\sin(a-b))$

3 $\sin(a).\sin(b) = -\frac{1}{2}(\cos(a+b)-\cos(a-b))$

Transformation des sommes aux produits :

1 $\cos(p)+\cos(q) = 2\cos(\frac{p+q}{2}).\cos(\frac{p-q}{2})$

2 $\sin(p)+\sin(q) = 2\sin(\frac{p+q}{2}).\cos(\frac{p+q}{2})$

3 $\cos(p)-\cos(q) = -2\sin(\frac{p+q}{2}).\sin(\frac{p+q}{2})$

4 $\sin(p)-\sin(q) = 2\cos(\frac{p+q}{2}).\sin(\frac{p+q}{2})$

1 Lien entre coordonnées polaires et coordonnées cartésiennes :

Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère orthonormal direct.

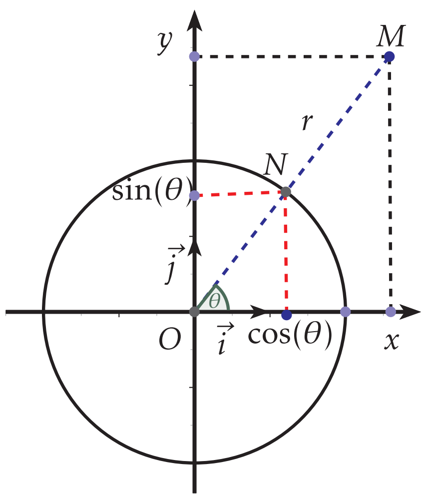
Propriété Si M est un point ayant pour coordonnées cartésiennes $(x;y)$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ et pour coordonnées polaires $(r;\theta)$ alors :

$$r=\sqrt{x^2+y^2}\ ; \qquad x = r\cos\theta\ ; \qquad y = r\sin\theta$$

Démonstration

Notons (U) le cercle trigonométrique de centre O. La demi-droite $[OM)$ coupe (U) en N.
On a donc $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{ON}$.
$N \in (U)$ donc ses coordonnées cartésiennes sont $(\cos\theta;\sin\theta)$. Celles de M sont donc $(r\cos\theta;r\sin\theta)$.
Par unicité des coordonnées, $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$.
De plus $OM^2 = x^2+y^2$ et $OM = r$ donc $r^2 = x^2+y^2$. D'où :

$$\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$



Application

1 Écrire les coordonnées polaires du point $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2 Écrire les coordonnées cartésiennes du point $B\left(2\sqrt{3}, \frac{5\pi}{6}\right)$.

Solution

1 Écrivons les coordonnées polaires du point $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

En effet : $r = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1.$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{r} = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \text{d'où } \theta \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]. \text{ Ainsi } A\left(1\,,\ \frac{2\pi}{3}\right).$$

2 Écrivons les coordonnées cartésiennes du point $B\left(2\sqrt{3}, \frac{5\pi}{6}\right)$.

En effet : $$\begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{r} \Longrightarrow x = r\cos\theta = 2\sqrt{3}\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \sqrt{3} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} \Longrightarrow y = r\sin\theta = 2\sqrt{3}\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -3 \end{cases}.$$

Ainsi $B\left(\sqrt{3}\,,\ -3\right)$.

2 Formules de transformation :

On veut transformer l'écriture suivante $a\cos x + b\sin x$ en $r\cos(x-\varphi)$ où r et φ à déterminer au fur et à mesure.

En effet, on sait que $\begin{cases} r = \sqrt{a^2+b^2} \\ a = r\cos\varphi \\ b = r\sin\varphi \end{cases}$

D'où : $a\cos x + b\sin x = r\cos x\cos\varphi + r\sin x\sin\varphi = r(\cos x\cos\varphi + \sin x\sin\varphi) = r\cos(x-\varphi)$

Théorème

$a\cos x + b\sin x = r\cos(x-\varphi).$ où $\begin{cases} r = \sqrt{a^2+b^2} \\ a = r\cos\varphi \\ b = r\sin\varphi \end{cases}$

Application

1 Transformer l'écriture $\sqrt{3}\cos x + \sin x$.

2 Transformer l'écriture $-\sqrt{3}\cos\left(\frac{x}{3}\right) + \sin\left(\frac{x}{3}\right)$.

Solution

1 Transformons l'écriture $\sqrt{3}\cos x + \sin x$.

En effet $r = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$; $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\varphi = \frac{\sqrt{1}}{2}$

D'où $\varphi \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$. Ainsi $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

2 Transformons l'écriture $-\sqrt{3}\cos\left(\frac{x}{3}\right) + \sin\left(\frac{x}{3}\right)$.

En effet $r = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2$; $\cos\varphi = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\varphi = \frac{\sqrt{1}}{2}$

D'où $\varphi \equiv \frac{5\pi}{6}[2\pi]$. Ainsi $-\sqrt{3}\cos\left(\frac{x}{3}\right) + \sin\left(\frac{x}{3}\right) = 2\cos\left(\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{5\pi}{6}\right)$

III Équations et inéquations trigonométriques

Propriétés

1 Soit a et b deux réels :
$\sin a = \sin b \Leftrightarrow (a = b + 2k\pi \quad ; k \in \mathbb{Z}$ ou $a = \pi - b + 2k\pi \quad ; k \in \mathbb{Z})$

2 Soit a et b deux réels :
$\cos a = \cos b \Leftrightarrow (a = b + 2k\pi \quad ; k \in \mathbb{Z}$ ou $a = -b + 2k\pi \quad ; k \in \mathbb{Z})$

3 Soit a et b deux réels de $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$: $\tan a = \tan b \Leftrightarrow a = b + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

Remarque

$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$

Application

Résoudre dans $]-\pi\,;\,\pi[$ l'équation $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$

Solution

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+k\times 2\pi \\ \text{ou} \\ x-\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{6}+k\times 2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+k\times 2\pi \\ \text{ou} \\ x=\frac{7\pi}{6}+k\times 2\pi \end{array}\right.$$

Sur l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi[$, on a $\mathcal{S}=\{\frac{\pi}{2};-\frac{5\pi}{6}\}$

IV Exercices

01

1 Vérifier que : $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$ puis calculer $\cos(\frac{\pi}{12})$, $\sin(\frac{\pi}{12})$ et $\tan(\frac{\pi}{12})$.

2 Vérifier que : $\frac{7\pi}{12}=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$ puis calculer $\cos(\frac{7\pi}{12})$, $\sin(\frac{7\pi}{12})$ et $\tan(\frac{7\pi}{12})$.

3 Vérifier que : $\frac{\pi}{4}=2\times\frac{\pi}{8}$ puis calculer $\cos(\frac{\pi}{8})$, $\sin(\frac{\pi}{8})$ et $\tan(\frac{\pi}{8})$.

02

1 Montrer que : $\sin(\frac{\pi}{3}-x).\sin(\frac{\pi}{6}-x)=-\frac{1}{2}\left(\sin(2x)-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2 Montrer que : $\cos(x)\cos(2x)=\frac{1}{2}(\cos(3x)+\cos(x))$.

3 Montrer que : $\cos(x)\cos(2x)\cos(3x)=\frac{1}{4}(1+\cos(2x)+\cos(4x)+\cos(6x))$.

4 Montrer que : $1-\sin(x)=2\cos\left(\frac{\pi+2x}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi-2x}{4}\right)$.

5 Montrer que : $\cos(7x)-\cos(5x)=-2\sin(6x)\sin(x)$.

03 Montrer que, pour tous réels a et b : $\sin(a+b)\sin(a-b)=\sin^2 a-\sin^2 b$

04 Montrer que, pour tout réel x : $\cos^4 x-\sin^4 x=\cos(2x)$

05 Montrer que, pour tout réel x différent de $k\frac{\pi}{2}$, où $k\in\mathbb{Z}$: $\frac{\sin 3x}{\sin x}-\frac{\cos 3x}{\cos x}=2$

06 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- $2\sin^3 x-17\sin^2 x+7\sin x+8=0$;
- $2\cos^3 x-7\cos^2 x+3=0$;
- $2\sin^3 x+\cos^2 x-5\sin x-3=0$.

07 Dans cet exercice, on dispose de la donnée suivante : $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$.

On rappelle que $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ pour tout $x \in D = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ où $k \in \mathbb{Z}$.

1 Démontrer que pour tout $x \in D$: $\tan(\pi + x) = \tan x$. En déduire la valeur exacte de $\tan\frac{9\pi}{8}$.

2 Démontrer que pour tout $x \in D$: $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$. En déduire la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{8}$ puis de $\sin\frac{\pi}{8}$.

3 Calculer la valeur exacte de $\cos\frac{5\pi}{8}$.

08 Dans cet exercice, on dispose de la donnée suivante : $\tan\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$.

1 Soit $x \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$. Démontrer que $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \dfrac{1}{\tan x}$.

2 En déduire que $\tan\frac{5\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}$.

09 Dans cet exercice on donne : $\cos\frac{\pi}{5} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$. Calculer la valeur exacte de $\cos\frac{2\pi}{5}$ puis de $\cos\frac{3\pi}{5}$

10 Démontrer que, pour tout $x \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$: $\tan x = \dfrac{1-\cos(2x)}{\sin(2x)}$. En déduire les valeurs exactes de $\tan\frac{\pi}{8}$ et $\tan\frac{\pi}{12}$.

11 ABC est un triangle non rectangle.

1 Démontrer que $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$.

2 Démontrer que $\tan(A+B) = -\tan C$.

3 En déduire la relation : $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \times \tan B \times \tan C$

12

1 On considère le polynôme P définie par $P(x)=4x^3-2x^2-3x+1$.

a. Calculer $P(1)$.

b. Résoudre l'équation $P(x)=0$.

2 **a.** Montrer que pour tout réel x on a :

i. $\cos(2x)=2\cos^2(x)-1$;

ii. $\cos(3x)=4\cos^3(x)-3\cos(x)$.

b. Résoudre l'équation trigonométrique $4\cos^3(x)-2\cos^2(x)-3\cos(x)+1=0$ dans $]-\pi,\pi]$ et représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique.

3 En déduire des questions 1 et 2 les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

13 Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose $f(x)=\cos(2x)+\sin(2x)$

1 Calculer : $f\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $f\left(\frac{3\pi}{8}\right)$.

2 Montrer que $f(x)=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$. En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

3 Montrer que $f(x)=2\sqrt{2}\cos(x)\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1$.

En déduire que $\cos\left(x-\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}$

4 Résoudre dans $]0;\pi]$ l'inéquation $f(x)\leq\frac{\sqrt{6}}{2}$

14 Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose $g(x)=\sin(3x)+\sin\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)$.

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x)=0$.

2 **a.** Montrer que $g(x)=2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\times\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

b. Résoudre dans $\left[-\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right]$ l'inéquation $g(x)\leq 0$.

3 **a.** Montrer que $2g(x)=5\sin(x)-\sqrt{3}\cos(x)-8\sin^3(x)$.

b. Calculer $g\left(\frac{\pi}{4}\right)$. En déduire la valeur de $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

15 Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2} / k \in \mathbb{Z} \right\}$.

1 Montrer que $\tan^2(x) + \frac{1}{\tan^2(x)} = \frac{4}{\sin^(2x)} - 2$.

2 En déduire que $\tan^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \tan^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 6$.

16

1 Écrire les expressions suivantes en fonction de $\sin(x)$ et $\cos(x)$:

- $A(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\cos(\pi - x) + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\sin(\pi - x)$
- $B(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \sin^2(x)$

2 Déterminer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ en remarquant que $\frac{\pi}{6} = 2 \times \frac{\pi}{12}$

3 On se propose de résoudre l'équation trigonométrique :

$$(E) : \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{3}\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}$$

a. Montrer que $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{3}\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = A\sin(x + B)$ où A et B sont deux nombres réels à déterminer.

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E).

c. Résoudre dans $[0, 2\pi]$ l'inéquation $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{3}\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \leq \sqrt{2}$.

17

1 Montrer que pour tout nombre réel on a $\sin^6(x) + \cos^6(x) = 1 - \frac{3}{4}\sin^2(2x)$.

2 Résoudre dans $]-\pi;\pi[$ l'équation : $\sin^6(x) + \cos^6(x) = \frac{7}{16}$.

3 Placer les points images sur un cercle trigonométrique.

4 Soit x est un nombre réel tel que $x \neq \frac{k\pi}{2}$; $k \in \mathbb{Z}$

a. Calculer $\frac{\sin(3x)}{\sin(x)} - \frac{\cos(3x)}{\cos(x)}$.

b. Calculer $\cos(x)$ sachant que $\tan(x) = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$ et $x \in \left]\frac{-\pi}{2};0\right[$.

18 On considère l'équation : (E) : $\left(2\sin^2(x)+\sqrt{3}\sin(x)-3\right)\left(\sqrt{3}\cos(x)+\sin(x)-1\right)=0.$

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2t^2+\sqrt{3}t-3=0$. En déduire les solutions de l'équation $2\sin^2(x)+\sqrt{3}\sin(x)-3=0$

2 Déterminer deux nombres r et α tels que $\sqrt{3}\cos(x)+\sin(x)=r\cos(x+\alpha)$.

3 Résoudre dans $]-\pi;\pi]$ l'équation (E).

4 Placer les images des solutions de l'équation (E) sur le cercle trigonométriques.

19

1 Démontrer que pour tout nombre réel a : $\cos(5a)=16\cos^5(a)-20\cos^3(a)+5\cos(a)$

2 Vérifier que pour tout nombre réel x : $16x^5-20x^3+5x+1=(x+1)(4x^2-2x-1)^2$

3 On pose $t=\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.
Démontrer que le nombre réel t est solution de l'équation $4x^2-2x-1=0$, puis que $t=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

4 En déduire $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$.