Calcul intégral

2BSF 1 et 2

Pr. Latrach Abdelkbir

Activité ① :

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle définie par $f(x) = 3x^2 - 1$.

1. Déterminer deux primitives F et G de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. Calculer $F(2) - F(0), G(2) - G(0)$. Que remarquez-vous ?

Le nombre $F(b) - F(a)$ ne dépend pas du choix d'une primitive de la fonction f .
Le nombre $F(b) - F(a)$ s'appelle intégrale de la fonction f de a à b elle est notée $\int_a^b f(x)dx$.

Application ① :

Calculer les intégrales suivantes :

- $I_1 = \int_0^2 (x+4)dx$
- $I_2 = \int_1^e \frac{1}{x} dx$
- $I_3 = \int_{e^2}^{e^4} \frac{ln(x)}{x} dx$
- $I_4 = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1} dx$
- $I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} cos\,(2x)dx$
- $5 = \int_{-2}^{-1} x2^{-x^2} dx$

Exercice ① :

Calculer les intégrales suivantes :

- $I_1 = \int_{-1}^1 (2x^3 - 5x^2 + 2)dx$
- $I_2 = \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) dx$
- $I_3 = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx$
- $I_4 = \int_0^4 x\sqrt{1+x^2}dx$
- $I_5 = \int_0^{ln3} e^x\sqrt{e^x+1}dx$
- $I_6 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} cosx.sin^5x\,dx$
- $I_7 = \int_1^2 \frac{x-1}{x^2-2x+2} dx$
- $I_8 = \int_0^1 (1-x)e^{x^2-2x+3}\,dx$
- $I_9 = \int_1^{e^2} \frac{1}{x\sqrt{1+lnx}} dx$

Application ② :

Calculer les intégrales suivantes :

- $I_1 = \int_{-1}^1 \frac{2|x|}{x^2+1} dx$
- $I_2 = \int_{-1}^5 |\,x^2 - 4x\,|\,dx$
- $I_3 = \int_0^2 |\,e^{-x+1} - 1\,|\,dx$

Application ③:

On considère les intégrales $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(3x)\cos(x)dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(3x)\sin(x)dx$.

1. Vérifier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, que
$cos(3x)\,cos(x) + sin(3x)\,sin(x) = \cos(2x)$

2. Vérifier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, que
$cos(3x)\,cos(x) - sin(3x)\,sin(x) = \cos(4x)$.

3. Calculer $I + J$ et $I - J$ puis en déduire I et J.

Exercice ② :

On pose : $K = \int_0^{ln(2)} \frac{e^t-1}{e^t+1} dt$ et $L = \int_0^{ln(2)} \frac{1}{e^t+1} dt$
Calculer $K + L$ et $K + 2L$ puis en déduire les valeurs de K et L.

Application ④ :

1. Montrer que : $\int_1^2 ln(x^2+1)dx \geq 0$.

2. Montrer que : $-\frac{1}{2} \leq \int_1^2 \frac{\sin(x)}{x^2} dx \leq \frac{1}{2}$.

Application ⑤ :

Calculer la valeur moyenne de la fonction $x \mapsto \frac{ln^2(x)+x}{x}$ sur l'intervalle $[1, e]$.

Application ⑥:

1. Calculer les intégrales suivantes :

- $I = \int_2^e \frac{1}{x(ln(x)+1)} dx$
- $J = \int_0^1 xe^{x^2} dx$
- $K = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan(x)\,dx$
- $L = \int_0^1 \frac{2x+2}{(x^2+2x+1)^2} dx.$

2. ***a-*** Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

b- En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^1 \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} dx$.

Exercice ③ : BAC 2002

1. Calculer l'integrale $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{cos^2(x)} - 4\cos(2x)\right) dx$.

2. Montrer que $\left(\frac{x}{x^2+1}\right)' = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ pour tout réel x puis calculer $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} dx$.

Application ⑦ :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par :
$f(x) = \frac{x^2-6x+4}{x-1}$.

1. Déterminer les nombres réels $a, b,$ et c pour que l'on ait pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{1\} : f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$.

2. En déduire la valeur de l'intégrale : $\int_2^3 f(x)dx$.

Application ⑧ :

Linéariser le polynôme trigonométrique cos^3x puis calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos^3\,x\,dx$.

Exercice ④ : BAC 2003

1. Vérifier, pour tout réel x, que :
$sin^2x.cos^3\,x = cos\,x\,.sin^2x - cos\,x\,.sin^4\,x$.

2. Calculer l'integrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2x.cos^3\,x\,dx$.

Application ⑨:

En utilisant la formule d'intégration par parties, Calculer les intégrales suivantes :

- $I_1 = \int_1^e x^2lnxdx$
- $I_2 = \int_{\frac{1}{2}}^1 (2x-1)e^{-\frac{x}{2}}dx$
- $I_3 = \int_2^e ln\,(x+2)dx$
- $I_4 = \int_0^\pi x^2cosxdx$.

Exercice ⑤ : BAC 2001

1. Vérifier, pour tout $x \in [0; 1]$, que :

$\frac{x^3+x}{x+1} = x^2 - x + 2 - \frac{2}{x+1}$.

2. En utilisant la formule d'intégration par parties, Calculer l'integrale $I = \int_0^1 (3x^2+1)\ln(x+1)\,dx$.

❍ Exercice ⑥ :

En utilisant la formule d'intégration par parties, Calculer les integrales suivantes :

- $I_1 = \int_1^{e^2} x(lnx)^2 dx$
- $I_2 = \int_1^2 x\sqrt{3-x}dx$
- $I_3 = \int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{x\ln x}{(x^2+1)^2}dx$
- $I_4 = \int_1^2 \frac{ln(1+t)}{t^2}dt$
- $I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{cosx^2}dx$
- $I_6 = \int_1^2 x2^x dx$
- $I_7 = \int_0^1 ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)dx$
- $I_8 = \int_0^1 x^2e^x dx$
- $I_9 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} sinxe^x dx$

Activité ②:

On considéra la fonction définie par : $f(x) = -x+2$ et (C_f) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ unité (1cm)

1. Tracer (C_f) et colorier le domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 3$, puis donner une valeur de son aire en unités d'aires.
2. Calculer $\int_{-1}^{3}|f(x)|dx \times \|\vec{\imath}\| \times \|\vec{\jmath}\|$. Qu'est-ce qu'on peut déduire ?

Application ①⓪ :

Le plan est apporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ avec $\|\vec{\imath}\| = 1cm$ et $\|\vec{\jmath}\| = \sqrt{2}cm$

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sin(x)$

Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe de f et les droites d'équations : $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = -\frac{\pi}{2}$.

❍ Exercice ⑦ : BAC 2015

Soit f la fonction définie sur $]0;e[\cup]e;+\infty[$ par: $f(x) = \frac{1}{x(1-lnx)}$ et (C_f) la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ tel que $\|\vec{\imath}\| = 2cm$.

1. Montrer que $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-lnx)}dx = ln2$.

   (Remarquer que $\frac{1}{x(1-lnx)} = \frac{\frac{1}{x}}{(1-lnx)}$)
2. Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan délimité par (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations: $x = 1$ et $x = \sqrt{e}$.

Application ①① :

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ avec $\|\vec{\imath}\| = 2cm$ et $\|\vec{\jmath}\| = 2cm$

On considère les fonctions f et g définie par :

$f(x) = 2x^2+1$ et $g(x) = x^2+x+1$

Calculer l'aire du domaine délimité par les courbes des fonctions f et g et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

❍ Exercice ⑧ : Session Rattrapage 2017

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = x+1-(x^2+1)e^x$.

Et (C_f) la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ tel que $\|\vec{\imath}\| = 2cm$

1. Montrer que $H: x \mapsto (x-1)e^x$ est une fonction primitive de la fonction $h: x \mapsto xe^x$ sur $\mathbb{R}$,puis en déduire que: $\int_{-1}^{0} xe^x\,dx = \frac{2}{e} - 1$.
2. En utilisant une intégration par parties, Montrer que: $\int_{-1}^{0}(x^2+1)e^x\,dx = 3\left(1-\frac{2}{e}\right)$.
3. 3) Calculer en cm^2,l'aire du Domaine plan délimité par (C_f), la droite (D) d'équation $y = x+1$ et les droites d'équations : $x = -1$ et $x = 0$.

Application ①② :

Soit g la fonction numérique définie s ur $[0,1]$ par :

$f(x) = xe^{\frac{1}{2}x}$.

Calculer Le volume du solide engendré par la rotation de la courbe de la fonction g autour de l'axe des abscisses un tour complet.

Répondre à la même question pour la fonction $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{cos(x)}$ sur l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.

Exercice ⑨ : Session normale 2010

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = (2x-1)e^{2x} + x + 1$$

Et (C_f) la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ tel que $\|\vec{\imath}\| = 2cm$

1. Montrer, en utilisant une integration par Partie que:
$$\int_0^{\frac{1}{2}}(2x-1)e^{2x}\,dx = 1 - \frac{e}{2}$$
2. Montrer que l'aire du Domaine plan limite par (C_f), la droite $(T): y = x$ el les droites d'équations : $x = 0$ et $x = \frac{1}{2}$ est: $(6-2e)cm^2$.

Exercice ①⓪ : Session normale 2014

Soit f la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$par $f(x) = (1+lnx)^2 + \frac{1}{x^2}$ et (C_f) la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ tel que $\|\vec{\imath}\| = 1cm$

On considère les intégrales I et J définies par:

$$I = \int_1^e (1+lnx)\,dx \;\; et \;\; J = \int_1^e (1+lnx)^2\,dx$$

1. Montrer que $H: x \mapsto xlnx$ est une fonction primitive de la fonction $h: x \mapsto 1+lnx$ sur $]0;+\infty[$,puis en déduire que $I = e$.
2. En utilisant une integration par parties, Montrer que: $J = 2e-1$.
3. Calculer en cm^2, l'aire du Domaine plan limite par (C_f),L'axe des abscisses et les droites d'équations: $x = 1$ et $x = e$.

Pr. Latrach Abdelkbir