Fonctions logarithmes

Pr. Latrach Abdelkbir

Exercice ① : extrait de rattrapage 2022

Soit f la fonction numérique définie sur $[0\,;+\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = x^4(lnx-1)^2 ; x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité : 1cm).

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis déterminer la branche infinie de (C) au voisinage de $+\infty$.

2. **a.** Montrer que f est continue à droite en 0.

b. Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 puis interpréter le résultat géométriquement.

3. **a.** Montrer que $f'(x) = 2x^3(lnx-1)(2lnx-1)$ pour tout x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

b. Dresser le tableau de variations de f.

4. **a.** Sachant que $f''(x) = 2x^2(6lnx-5)lnx$ pour tout x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, étudier le signe de $f''(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.

b. Déduire que la courbe (C) admet deux points d'inflexion dont on déterminera les abscisses.

5. **a.** Construire (C) dans le repère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (on prend : $\sqrt{e} \approx 1{,}6$ et $e^2 \approx 7{,}2$).

b. En utilisant la courbe (C), déterminer le nombre de solutions de l'équation $x^2(lnx-1) = -1$.

6. Soit la fonction g définie sur IR par $g(x) = f(|x|)$.

a. Montrer que la fonction g est paire.

b. Construire (C_g) la courbe représentative de g dans le même repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Exercice ② : extrait de session normale 2021

Soit f la fonction numérique définie sur $[0\,;+\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = 2xlnx-2x ;\ x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité : 1cm).

1. Montrer que f est continue à droite au point 0.

2. **a.** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter géométriquement le résultat.

3. **a.** Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter géométriquement le résultat.

b. Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

c. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[0;+\infty[$.

4. **a.** Résoudre dans l'intervalle $]0;+\infty[$ les équations $f(x)=0$ et $f(x)=x$.

b. Construire la courbe (C) dans le repère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$(on prend : $e^{\frac{3}{2}} \approx 4.5$).

5. **a.** Déterminer le minimum de f sur $]0;+\infty[$.

b. En déduire que pour tout x de $]0;+\infty[$, $\ln x \geq \frac{x-1}{x}$.

6. Soit g la restriction de la fonction f à l'intervalle $[1;+\infty[$.

a. Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J qu'on déterminera.

b. Construire dans le même repère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ la courbe représentative de la fonction g^{-1}.

7. On considère h la fonction numérique définie sur IR par $\begin{cases} h(x) = x^3+3x ;\ x\leq 0 \\ h(x) = 2xlnx-2x ; x>0 \end{cases}$

a. Etudier la continuité de h au point 0.

b. Etudier la dérivabilité de la fonction h à gauche au point 0 puis interpréter graphiquement le résultat.

c. La fonction h est -elle dérivable au point 0 ? justifier.

Exercice ③ : extrait de session normale 2020

On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = 2\sqrt{x} - 2 - lnx$.

1. **a.** Montrer pour tout x de $]0,+\infty[$, que $g'(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x}$.

b. Montrer que g est strictement croissante sur $[1,+\infty[$.

c. En déduire pour tout x de $[1,+\infty[$ que $0 \leq lnx \leq 2\sqrt{x}$. (Remarquer que $2\sqrt{x}-2 \leq 2\sqrt{x}$)

d. Montrer pour tout x de $[1,+\infty[$ que $0 \leq \frac{(lnx)^3}{x^2} \leq \frac{8}{\sqrt{x}}$.

Puis déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(lnx)^3}{x^2}$.

2. Montrer que la fonction $G : x \mapsto x\left(-1+\frac{4}{3}\sqrt{x}-lnx\right)$ est une fonction primitive de g sur $]0,+\infty[$.

Exercice ④: extrait de session normale 2019

Première partie :

Soit f la fonction numérique définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = x + \frac{1}{2} - lnx + \frac{1}{2}(lnx)^2$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité : 1cm).

1. Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ et interpréter géométriquement le résultat.

2. **a.** Vérifier que pour tout x de $]0\,;+\infty[$, $f(x) = x + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}lnx - 1\right)lnx$.

b. En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

c. Montrer que pour tout x de $]0\,;+\infty[$, $\frac{(lnx)^2}{x} = 4\left(\frac{ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$ puis en déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(lnx)^2}{x} = 0$.

d. Montrer que (C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique la droite (Δ) d'équation $y = x$.

3. **a.** Vérifier que pour tout x de $]0;1]$: $(x-1)+lnx \leq 0$ et que pour tout x de $[1;+\infty[$: $(x-1)+lnx \geq 0$.

b. Montrer que pour tout x de $]0;+\infty[$, $f'(x) = \frac{x-1+lnx}{x}$.

c. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

4. a. Montrer que $f''(x) = \frac{2-lnx}{x^2}$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

b. En déduire que (C) admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

5. a. Montrer que pour tout x de $]0;+\infty[$, $f(x) - x = \frac{1}{2}(ln\,x - 1)^2$ et déduire la position relative de (C) et (Δ).

b. Construire (Δ) et (C) et dans le même repère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Deuxième partie :

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

1. a. Montrer par recurrence que $1 \le u_n \le e$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

b. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

2. Calculer la limite de la suite (u_n).

Exercice ⑤: extrait de session normale 2017

I. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x^2 + x - 2 + 2lnx$.

1. Vérifier que : $g(1) = 0$.

2. A partire du tableau de variations de la fonctions de la fonction g ci-contre :

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

Montrer que $g(x) \le 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0;1]$ et que $g(x) \ge 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[1;+\infty[$.

II. On considère f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x + \left(1 - \frac{2}{x}\right) lnx.$

Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité : 1cm).

1. Montrer que : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$ et interpréter géométriquement le résultat.

2. a. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b. Montrer que la courbe (C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique celle de la droite (D) d'équation $y = x$.

3. a. Montrer : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$.

b. Monter que f est décroissante sur l'intervalle $]0;1]$ et coissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

c. Dresser la tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

4. a. Résoudre dans lintervalle $]0;+\infty[$ l'équation : $\left(1 - \frac{2}{x}\right) lnx = 0.$

b. En déduire que la courbe (C) coupe la droite (D) en deux points dont on déterminera les coordonnées.

c. Montrer que $f(x) \le x$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[1;2]$ et on déduire la position relative de la courbe (C) et la droite (D) sur l'intervalle $[1;2]$.

5. Construire, dans le meme repère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, la droite (D) et la courbe (c) (on admettera que la courbe (C) possède un seul point d'inflexion dont l'abscisse est comprise entre 2.4 et 2.5).

III. On considère la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = \sqrt{3}$ *et* $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

1. Montrer par recurrence que : $1 \le u_n \le 2$ pour tout entier naturel n.

2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante (on poura utiliser le résultat de la question II.4.c.).

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice ⑥: extrait de rattrapage 2018

Première partie :

On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = x^3 - 1 - 2(lnx)^2 + 2lnx$.

1. Vérifier que $g(1) = 0$.

2. Ci-contre le tableau de variations de g :

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$\|$ $+$
$g(x)$	$\|$ $\infty \nearrow +\infty$

Déterminer le signe de $g(x)$ sur $]0,1]$ et $[1,+\infty[$.

Deuxième partie :

Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2} + \left(\frac{lnx}{x}\right)^2$ et soit (C_f) sa représentation graphique sur le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2. Montrer que la droite d'équation $(D): y = x - \frac{1}{2}$ est une asymptote oblique de (C_f) au voisinage de $+\infty$.

3. Étudier la position relative de (C_f) et (D) .

4. Montrer que $(\forall x \in]0,+\infty[): f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$, puis donner le tableau des variations de f sur $]0,+\infty[$.

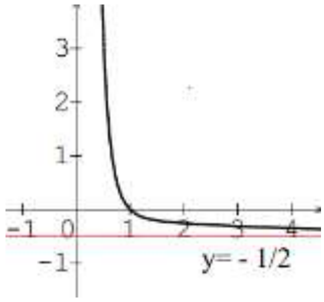
5. Représenter (C_f) sur le repère$(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Troisième partie :

On considère la fonction h qui définie sur $]0,+\infty[$ par : $h(x) = f(x) - x$.

1. Vérifier que $h(1) = 0$.

2. Ci-contre la courbe représentative de la fonction h.



Déterminer le signe de h puis déduire que : $(\forall x \in [1,+\infty[)\,, f(x) \le x$.

3. Soit (u_n) la suite numérique définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = e$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

a. Montrer que $(\forall n\epsilon\mathbb{N});\ 1 \le u_n \le e$.

b. Montrer que (u_n) est décroissante .(utiliser la question 2 troisième partie)

4. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Pr. Latrach Abdelkbir