CHAPITRE

Dénombrement

5

Situation problème

Une entreprise lance un jeu promotionnel. Pour gagner, un client doit ouvrir un coffre-fort. Le code du coffre est une séquence de 4 chiffres, que l'on obtient en lançant 4 fois de suite un dé . L'entreprise doit évaluer le coût du jeu :

1. Combien de codes différents peut-on former ?
2. Si un code "Premium" (qui donne un plus gros lot) ne doit contenir que des chiffres pairs *distincts*, combien de codes "Premium" existe-t-il ?

Plan du chapitre 5

COURS

I Opérations entre deux ensembles - Ensemble fini - Cardinal

1. Ensemble - Intersection - Réunion - Complémentaire

Définition 1:

Intuitivement, un ensemble est un regroupement d'objets qu'on appelle éléments. On met souvent les éléments d'un ensemble entre deux accolades $\{...\}$. Les éléments d'un ensemble ne sont nécessairement pas ordonnés.
Les deux ensembles $\{a;b;c;c;b\}$ est égale à l'ensemble $\{a;b;c\}$. La notion d'ensemble ignore la répétition.

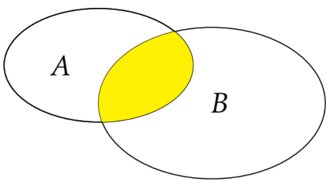
Définition 2:

Soit A et B deux ensembles.

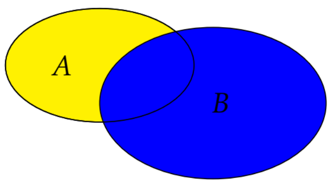
— L'**<u>intersection</u>** des deux ensembles A et B est l'ensemble qu'on note $A \cap B$ et qui contient les éléments appartenant à A **et** à B.

— La **<u>réunion</u>** des deux ensembles A et B est l'ensemble qu'on note $A \cup B$ et qui contient les éléments appartenant à A **ou** à B.

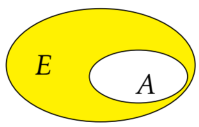
— **<u>Le complémentaire</u>** d'une partie E d'un ensemble A qu'on note C_A^E ou $\overline{A}$ et qui contient les éléments de A n'appartenant pas à E.



$A \cap B$



$A \cup B$



C_A^E

2. Ensemble fini - Cardinal d'un ensemble fini

Définition 1:

Soit E un ensemble et n un entier naturel.

— Si E contient exactement n éléments, on dit que E est un ensemble **<u>fini</u>** et le **<u>cardinal de E</u>** est égal à n et on note :

$$Card\,(E) = n$$

.

— Un ensemble E qui **<u>n'est pas fini</u>** est dit **<u>un ensemble infini</u>**. On pourrait écrire : $Card\,(E) = +\infty$

Exemple 1:

- $Card\,(\emptyset) = 0$. L'ensemble vide est un ensemble fini ayant zéro élément.
- L'ensemble F des lettres de l'alphabet qui forment le mot « MATHÉMATIQUES » est un ensemble fini ayant 10 éléments. $F = \{M;A;T;H;;I;Q;U;E;S\}$. Donc $Card\,(F) = 10$.
- L'ensemble M_6 des diviseurs de 6 est un ensemble fini ayant 4 éléments. $M_6 = \{1;2;3;6\}$. Donc $Card\,(M_6) = 4$.
- L'ensemble G des joueurs d'une équipe de foot est un ensemble fini ayant 11 éléments. Donc $Card\,(G) = 11$.
- L'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres entiers naturels est un ensemble infini. Donc $Card\,(\mathbb{N}) = +\infty$.

II Principe additif - Principe fondamental du dénombrement

1. Principe additif

Propiété 1:

soient A et B deux ensembles finis, on a :

1. $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$.
2. Si A et B sont disjoints, alors on a : $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$.
3. Si E un ensemble donné et A une partie de E, alors $\text{Card}(\overline{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A)$.

Application :

Dans un lycée de 100 élèves, 53 pratiquent le football et 15 le football et basket-ball et 20 pratiquent seulement basket-ball sans le football.

1. Quel est le nombre d'élèves qui pratiquent le basket-ball ?
2. Quel est le nombre d'élèves qui pratiquent au moins un sport ?
3. Quel est le nombre d'élèves qui ne pratiquent pas de deux sports ?

Solution:

2. Principe fondamental du dénombrement ou Principe du produit

Activité :

Les localités X et Y sont reliées par trois routes (a, b et c) et les localités Y et Z par deux routes (d et e). Combien y a-t-il de trajets de X à Z en passant par Y ?

Solution:

Activité :

On lance une pièce de monnaie 2 fois de suite ,quel est le nombre de possibilités.

Solution:

Propiété 1:

Soit E une expérience dont les résultats nécessitent p choix .
Le 1^{re} se fait de n_1 façons distincts.
Le 2^{me} se fait de n_2 façons distincts.
...
Le p^{ime} se fait de n_p façons distincts.
Alors le nombre des résultats possible est le produit $n_1 \times n_2 \times n_3 ... \times n_p$.

Exemple 1:

Une classe de 15 garçon et 12 filles.Il faut un garçon et une fille pour représenter la classe. Combien de possibilités de choix. ....

....

....

....

Application :

On considère les chiffres suivants : 5-6-7-2-3. On veut former des entiers naturels de trois chiffres distincts parmi ces chiffres.

1. Quel est le nombre de possibilités ?
2. Combien de nombres paires peut-on former ?
3. Combien des multiples de 5 peut-on former ?

Solution:

III Techniques de dénombrement

1. Arrangement avec répétition

Activité :

Combien de nombre du mots de 3 lettres choisies parmi 26 lettres (ayant un sens ou non) peut on former ?

Solution:

Définition 1:

Soit E un ensemble fini et non vide de cardinal $n \geq 1$ et $p \in \mathbb{N}^*$.
Un **arrangement avec répétition** de p éléments parmi n éléments de E tout **p-uplet** $(x_1; x_2; ...; x_p)$. Tel que les éléments $x_1; x_2; ...; x_p$ sont non nécessairement distincts.

Propiété 1:

Soit E un ensemble fini et non vide de cardinal $1 \leq$ n et $p \in \mathbb{N}^*$
Le nombre d'arrangement avec répétition (remise) de p éléments de E est : n^p

Exemple 1:

Combien de numéros de téléphone à 8 chiffres peut-on former? ....
....
....
....

2. Arrangements sans répétition

Activité :

Pour accéder à une banque de données, vous devez taper un mot de passe de 4 lettres sur votre clavier . Combien de mots de passe de 4 lettres distincts peut-on créer?

Solution:

Définition 1:

Soit E un ensemble fini et non vide de cardinal $n \geq 1$ et $1 \leq p \geq$.
Un **arrangement sans répétition** de p éléments parmi n éléments de E tout **p-uplet** $(x_1;x_2;...;x_p)$. Tel que les éléments $x_1;x_2;...;x_p$ sont deux à deux distincts.

Propiété 1:

Soit E un ensemble fini et non vide de cardinal n et $p \in \mathbb{N}^*$ Tels que 1≤ p ≤ n
Le nombre d'arrangements sans répétition (sans remise) de p éléments de E est le nombre A_n^p donné par : A_n^p= n(n-1)(n-2)...(n-p+1)

Application :

Une urne contient 4 boules blanches et 3 boules noires. On tire successivement sans remise 3 boules de l'urne

1. Quel est le nombre de possibilités ?
2. Quel est le nombre de possibilités de tirer 3 boules de même couleur ?

Solution:

3. Les permutations

a - Permutation sans répétition

Définition 1:

Soit E un ensemble fini et non vide de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$
une Permutation est un arrangement sans répétition de tous les éléments de E.

Propiété 1:

Soit E un ensemble fini et non vide de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$
le nombre de permutations des éléments de E est le nombre noté $n!$ se lit " factoriel n " est défini par : $n! = A_n^n = n(n-1)(n-2)...21$

Exemple 1:

De combien de façon pouvez-vous ranger 7 élèves dans une table de 7 chaises ? ....
....
....

....

Remarque 1:

1. $0! = 1$ et $A_n^0 = 1$
2. Pour tout $(n;p) \in \mathbb{N}^2$ Tels que $1 \leq p \leq n$ on a : $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ En particulier :$A_n^1 = n$ et $A_n^n = n!$

b - Permutation avec répétition

Propiété 2:

Soit E un ensemble de cardinal K et $n_1;n_2;...;n_K$ des entiers naturels tels que $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$
Le nombre de permutations de n éléments avec répétition est égal à : $\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$

Remarque 2:

Une anagramme est un mot (ayant un sens ou non) obtenu en permettant les lettres d'un mot au départ

Exemple 2:

Combien d'anagramme peut-on former avec les lettres du mot "ELEVE" ....
....
....
....

4. Les combinaisons

Activité :

Soit $\omega = \{a;b;c;d;e\}$ un ensemble
Quel est le nombre de sous-ensemble à 2 éléments ?

Solution:

Définition 1:

Soit E un ensemble fini et non vide de cardinal $1 \leq n$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $p \leq n$.
Une combinaison de p éléments pris parmi les n éléments de E est une partie (sous-ensemble) dont le cardinal est p.

Propiété 1:

Le nombre de combinaison de p éléments pris parmi les n éléments distincts est le nombre que l'on note par C_n^p et on écrit : $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$

Remarque 1:

1. $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$
2. $C_n^0 = 1\,;\, C_n^1 = n$ et $C_n^n = 1$

Exemple 1:

Une urne contient 7 boules numérotées de 1 à 7 on tire 2 boules se l'urne simultanément.
Déterminer le nombre de possibilités de situations suivantes :
M " obtenir deux boules "
A " La somme des numéros obtenus est pair"
B " La somme des numéros obtenus est impairs" ....
....
....
....
....
....

5. L'ordre des éléments au dénombrement

Le nombre de l'ordre p_n est donnée par :
$p_n = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_p!}$ où $n_1, n_2, ..., n_p = n$
n : le nombre de boule tiré
$n_1; n_2$: le nombre de boules tiré de chaque couleur (Type)

Exemple 1:

Une urne contient 5 boules vertes; 3 boules noires et 7 boules rouges.
On tire successivement et sans remise 3 boules de l'urne
1. Quel est le nombre de possibilités?
2. Déterminer le nombre de possibilités des situations suivantes :
A " obtenir une boule de chaque couleur "
B " Obtenir au moins une boule noire "
C " Obtenir une boule verte et deux boules rouges"
D "Obtenir exactement une boule rouge " ....
....
....
....
....
....
....
....
....

Prof: M.Mohammed

....

Propiété 1:

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leq p \leq n$ on a les propriétés suivantes :

1. La symétrie : $C^{p_n} = C_n^{n-p}$
2. Formule de Pascal : $C_n^{p-1} + C_n^p = C_{n+1}^p$

Remarque 1:

La formule $C_n^{p-1} + C_n^p = C_{n+1}^p$ permet de calculer les nombres C_k^q tel que $0 \leq q \leq k$ en utilisant un tableau est appelé **Triangle de Pascal**.

$k \backslash q$	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
$\vdots$	$\vdots$						$\ddots$

Formule de Pascal

$$\binom{k}{q} + \binom{k}{q+1} = \binom{k+1}{q+1}$$

Exemple 2:

1. $C_3^2 = C_2^1 + C_2^2 = 2 + 1 = 3$
2. $C_5^3 = C_4^2 + C_4^3 = 6 + 4 = 10$

6. Formule du binôme de Newton

Propiété 1:

Soit $a \in \mathbb{R}$; $b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}.b + C_n^2 a^{n-2}.b^2 + ... + C_n^{n-1} a.b^{n-1} + C_n^n b^n$$

Ce qui peut également être noté :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

Exemple 1:

1. Développer $(a+b)^3 =$ ....
   ....
2. On peut aussi utiliser le Triangle de Pascal pour calculer les coefficients :
   ....
   ....

....

....

Remarque 1:

Pour tout a et b de $\mathbb{R}$ on a : $(a-b)^n = (a+(-b)^n) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k}(-b)^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k a^{n-k}(b)^k$

Exemple 2:

Développer $(a-b)^5$ et $(a-b)^3$ ....

....

....

....

....

....

....