CHAPITRE 7

LA DÉRIVATION

7.1 Le nombre dérivé en un point - l'interprétation géométrique du nombre dérivé - la droite tangente en un point

7.1.1 Activités et définitions

Activité 1 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 3x + 2$

1) Calculer : $f(1)$

2) Déterminer : $\dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

3) Calculer : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

Solution :

1) on a : $f(1) = 3 \times 1 + 2 = 3 + 2 = 5$

2) $\dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \dfrac{3x + 2 - 5}{x - 1} = \dfrac{3x - 3}{x - 1} = \dfrac{3(x - 1)}{x - 1} = 3$

3) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3(x - 1)}{x - 1} = 3$

Remarque 7.1
Le nombre 3 est appelé le nombre dérivé de la fonction f en 1 on le note par : $f'(1)$.
on a donc : $f'(1) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ dans ce cas : $f'(1) = 3$

Activité 2 :

Calculer : $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ dans les cas suivantes :

1) $f(x) = -2x + 1$; $a = 2$

2) $f(x) = x^2 + 1$; $a = 1$

3) $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $a = -1$

Solution :

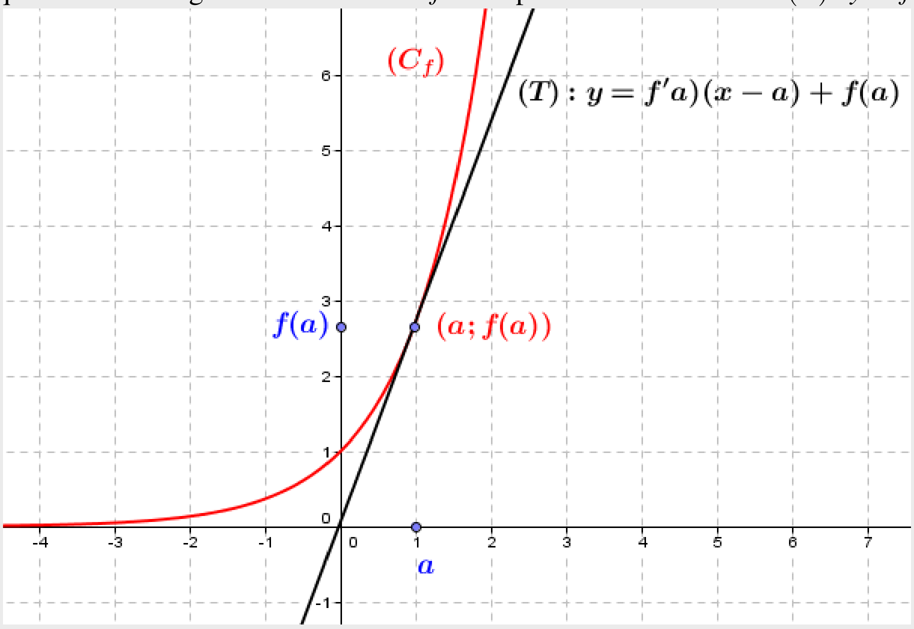
1) On a : $a=2 \Rightarrow f(a)=f(2)=-2\times 2+1=-3$
et : $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{-2x+1-(-3)}{x-2}=\lim_{x\to a}\frac{-2x+4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{-2(x-2)}{x-2}=-2$
On dit que la fonction f est dérivable en 2 et $f'(2)=-2$

2) $f(x)=x^2+1$ et $f(1)=2$
et : $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}x+1=1+1=2$
La fonction f est dérivable en 1 et $f'(1)=2$.

Définition 7.1
Soit f une fonction et $a\in D_f$:
On dit que la fonction f est dérivable en le nombre : a si la limite : $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est finie.
cette limite s'appelle **Le nombre dérivé** de la fonction f en a on le note par : $f'(a)$:
$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

7.1.2 L'équation de la tangente à la courbe en un point :

Proprieté 7.1
Soit f une fonction dérivable en un point a :
L'équation de la tangente à la courbe de f en le point d'abscisse a est : $(T):y=f'(a)(x-a)+f(a)$

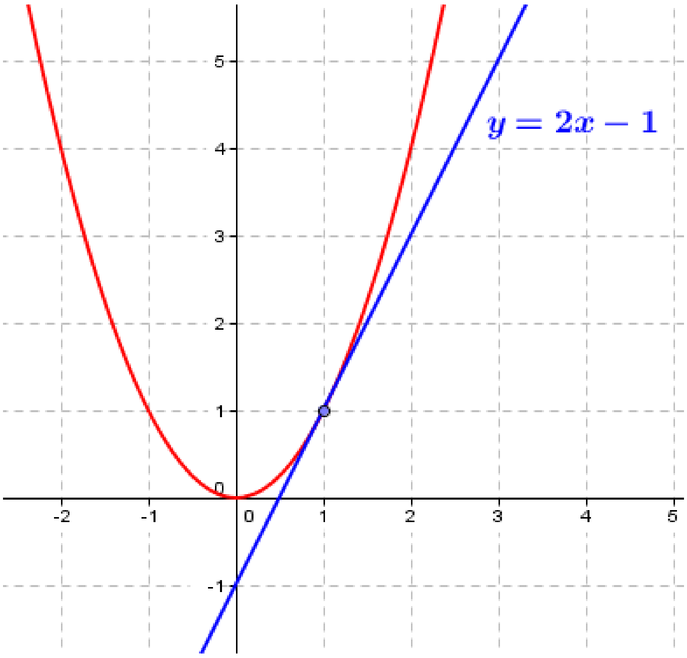


Par exemple $a=1$: alors l'équation de la tangente à la courbe de f en le point d'abscisse 1 est : $(T):y=f'(1)(x-1)+f(1)$

Exemple 7.1
Soit f la fonction définie par : $f(x)=x^2$
Pour déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f en le point d'abscisse 1 :
• **Premièrement :** Calculons : $f(1)$ et $f'(1)$: on a : $f(1)=1^2=1$ et
$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}x+1=1+1=2$
• **Deuxièmement :** L'équation de la tangente à la courbe de f en le point d'abscisse 1 est :

$$(T):y=f'(1)(x-1)+f(1) \text{ c'est à dire : } (T):y=2(x-1)+1 \text{ c'est à dire : } (T):y=2x-1$$

La construction de la courbe s'il est demandé :



Exercice 51
Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction f en le point d'abscisse a dans les cas suivants :

1) $f(x) = x^2 + x$; $a = 0$
2) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x + 1$; $a = 0$
3) $f(x) = \frac{x}{x-1}$; $a = 2$

Solution :

1) on a : $f(x) = x^2 + x$ donc : $f(0) = 0$ et :
$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x+1)}{x} = \lim_{x\to 0} x + 1 = 0 + 1 = 1$
L'équation de la tangente à la courbe de la fonction f en le point d'abscisse 0 est :
$$(T) : y = f'(0)(x - 0) + f(0) \text{ c'est à dire : } (T) : y = 1(x - 0) + 0 \text{ c'est à dire : } (T) : y = x$$

7.2 La fonction dérivée :

7.2.1 Définition

Définition 7.2
On dit que la fonction f est dérivable sur un intervalle ouvert I si f est dérivable en tous les points de I. et la fonction définie par :

$$\begin{array}{rcl} f' : I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{array}$$

s'appelle **la dérivée** de la fonction f sur I on le note par f'.

7.2.2 La dérivation de quelques fonctions usuelles

Soient a et b deux nombres réelles :

La fonction $x \mapsto f'(x)$	La fonction $x \mapsto f(x)$	L'ensemble de définition D_f
La fonction nulle $x \mapsto f'(x) = 0$	La fonction constante $x \mapsto f(x) = a$ avec $(a \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto f'(x) = a$ avec $(a \in \mathbb{R})$	$x \mapsto f(x) = ax$ avec $(a \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$
$f'(x) = a$	$x \mapsto f(x) = ax + b$	$\mathbb{R}$
$f'(x) = 2x$	$x \mapsto f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$
$f'(x) = nx^{n-1}$	$x \mapsto f(x) = x^n$ avec $(n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$
$f'(x) = 3x^2$	$x \mapsto f(x) = x^3$	$\mathbb{R}$
$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$

Exemple 7.2

1) Si : $f(x) = 3x$ alors : $f'(x) = 3$
2) Si : $f(x) = 4x + 1$ alors : $f'(x) = 4$
3) Si : $f(x) = 5$ alors : $f'(x) = 0$
4) Si : $f(x) = x^4$ alors : $f'(x) = 4x^3$
5) Si : $f(x) = x^5$ alors : $f'(x) = 5x^4$
6) Si : $f(x) = x$ alors : $f'(x) = 1$

7.2.3 Les opérations sur les fonctions dérivables :

Les opérations	La fonction $x \mapsto f(x)$	La fonction $x \mapsto f'(x)$	La condition
La somme	$f + g$	$(f + g)' = f' + g'$	....
La multiplication par un nombre	$k \cdot f$ avec $k \in \mathbb{R}$	$(k \cdot f)' = k \cdot f'$	....
Le produit	$f \times g$	$(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$	....
L'inverse	$\frac{1}{f}$	$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$	$f \neq 0$
La quotient	$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$	$g \neq 0$
Le carré	f^2	$(f^2)' = 2 \cdot f' \cdot f$	....
La puissance	f^n	$(f^n)' = n \cdot f' \cdot f^{n-1}$	....

Exercice 52

Déterminer la dérivée de la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x) = 4x^2$
2) $f(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 1$
3) $f(x) = (2x+1)(3x-1)$
4) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$
5) $f(x) = (x^2-1)^5$
6) $f(x) = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^6$
7) $f(x) = \dfrac{1}{3x+2}$

Solution :

1) $f(x) = 4x^2$ donc : $f'(x) = (4x^2)' = 4(x^2)' = 4 \times 2x = 8x$
2) $f(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 1$ donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^3 + 4x^2 + 5x + 1)' \\ &= (x^3)' + 4(x^2)' + (5x+1)' \\ &= 3x^2 + (4 \times 2x) + 5 \\ &= 3x^2 + 8x + 5 \end{aligned}$$

3) $f(x) = (2x+1)(3x-1)$ donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= ((2x+1)(3x-2))' \\ &= (2x+1)'(3x-2) + (2x+1)(3x-2)' \\ &= 2(3x-2) + (2x+1) \cdot 3 \\ &= 6x - 4 + 6x + 3 \\ &= 12x - 1 \end{aligned}$$

4) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{2x+1}{x-1}\right)' \\ &= \frac{(2x+1)'(x-1) - (2x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} \\ &= \frac{2'(x-1) - (2x+1) \times 1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{2x - 2 - 2x - 1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{-3}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

5) $f(x) = (x^2-1)^5$ donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left((x^2-1)^5\right)' \\ &= 5 \cdot (x^2-1)^4 \cdot (x^2-1)' \\ &= 5(x^2-1)^4 \cdot 2x \\ &= 10x(x^2-1)^4 \end{aligned}$$

6) $f(x) = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^6$ donc : $f'(x) = \left(\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^6\right)' = 6 \cdot \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^5 \cdot \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)'$

donc il faut calculer : $\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)'$

7) $f(x) = \dfrac{1}{3x+2}$ donc : $f'(x) = \left(\dfrac{1}{3x+2}\right)' = \dfrac{-(3x+2)'}{(3x+2)^2} = \dfrac{-3}{(3x+2)^2}$

7.3 Les variations d'une fonction et le signe de la dérivée :

Proprieté 7.2
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I inclus dans D_f :

- f est croissante sur $I \Leftrightarrow (\forall x \in I) : f'(x) \geq 0$
- f est décroissante sur $I \Leftrightarrow (\forall x \in I) : f'(x) \leq 0$
- f est constante sur $I \Leftrightarrow (\forall x \in I) : f'(x) = 0$

Exemple 7.3

- **Exemple 1 :** Soit f la fonction définie par : $f(x) = 3x+1$, on a la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$: et pour tous $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = (3x+1)' = 3 > 0$ donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- **Exemple 2 :** Soit f la fonction définie par : $f(x) = -2x+3$, on a la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$: et pour tous $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = (-2x+2)' = -2 < 0$ donc la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
- **Exemple 3 :** Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^2+4x$, on a la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$: et pour tous $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = (x^2+4x)' = (x^2)' + (4x)' = 2x+4$
  Pour déterminer les variations de la fonction f il faut déterminer le signe de $f'(x)$: c'est à dire : $2x+4$.
  on a le tableau de signe de $2x+4$ est :

  La solution de l'équation 2x+4 = 0 est x= -2

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x) = 2x+4$		$-$	0	$+$	

  • on a pour tout x de $[-2;+\infty[$: $f'(x) \geq 0$ donc la fonction f est croissante sur $[-2;+\infty[$
  • et pour tout x de : $]-\infty;-2]$: $f'(x) \leq 0$ donc la fonction f est décroissante sur : $]-\infty;-2]$
  On va résumer ces résultats dans un tableau s'appelle le tableau des variations de la fonction f

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$$

$$f(-2) = (-2)^2 + 4 \times -2 = -4$$

-4 est la valeur minimale de f sur R

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x) = 2x+4$		$-$	0	$+$	
Les variations de f	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

- **Exemple 4 :**
  Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^3 - 3x$
  On a la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$:

et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = (x^3 - 3x)' = (x^3)' - (3x)' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$
Pour étudier les variations de la fonction f il faut déterminer le signe de $f'(x)$: c'est à dire : $x^2 - 1$.
on a le tableau de signe de $f'(x)$ est :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty \; ; \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$$
$$f(1) = 1^3 - 3 \times 1 = -2 \; ; \quad f(-1) = (-1)^3 - 3 \times -1 = 2$$

Exercice 53
Déterminer les variations de la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x) = 5x - 1$
2) $f(x) = -3x + 2$
3) $f(x) = x^2 - 2x$
4) $f(x) = x^3 - 3x^2$