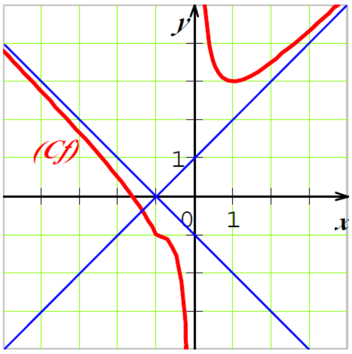
Représentation graphique des fonctions	
1BSF 1 et 2	*Pr. Latrach Abdelkbir*

Exercice ① :

On considère ci-dessous la courbe d'une fonction f.



1. Donner D_f puis déterminer les limites de f aux bornes de D_f .
2. Déterminer les branches infinies de (C_f).
3. Déterminer $f'(1)$.
4. La fonction f est-elle dérivable en -1 ?
5. Dresser le tableau de variations de f en précisant le signe de f'.

Exercice ② :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.
Et soit (C_f) sa courbe d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. a-Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   b- Étudier les branches infinies de (C_f) .
2. a- Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   b- Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f .
3. Montrer que la courbe (C_f) admet un unique point d'inflexion Ω à déterminer.
4. Vérifier que Ω est un centre de symétrie de (C_f).
5. a-Ecrire une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point Ω.
   b- Construire (T) et (C_f) .

Exercice ③:

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{2x^2-7x+8}{x-2}$.
Et soit (C_f) sa courbe d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. a. Déterminer l'ensemble de définition de f.
   b- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   c- Calculer $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$.
2. a- Montrer que: $(\forall x \in D_f); f'(x) = \frac{2(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$.
   b- Etudier le signe de $f'(x)$ sur D_f ,puis dresser le tableau de variations de f sur D_f.
3. a- Vérifier que: $(\forall x \in D_f); f(x) = 2x - 3 + \frac{2}{x-2}$
   b- Déduire que la droite (D) d'équation $y = 2x - 3$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$.
4. Tracer la courbe (C_f) .
5. Soit la fonction g définie par $g(x) = \frac{2x^2-7|x|+8}{|x|-2}$.
   a- Déterminer D_g .
   b- Étudier la parité de g .
   c- Montrer que $\forall x \in [0;2[\cup]2;+\infty[: g(x) = f(x)$.
   d- En déduire une construction de (C_g).

Exercice ④ :

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^3-2x^2-x+1}{x^2}$.
Et soit (C_f) sa courbe d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Déterminer D_f .
2. Calculer $\lim\limits_{x\to0} f(x)$, et donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.
3. a- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
   b- Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 2$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f).
   c- Etudier la position relative de la courbe (C_f) par rapport à la droite (D) sur D_f .
4. a- Montrer que $(\forall x \in D_f): f'(x) = \frac{(x-1)(x^2+x+2)}{x^3}$.
   b- Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f .
5. a- Montrer que $(\forall x \in D_f): f''(x) = \frac{6-2x}{x^4}$.
   b- Etudier la concavité de (C_f) et Montrer que (C_f) admet un point d'inflexion dont on déterminera ses coordonnées.
6. Construire (D) et (C_f) .

Exercice ⑤ :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$.
Et soit (C_f) sa courbe d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. a. Déterminer l'ensemble de définition de f.
   b- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   c- Montrer que la droite $(D): y = x - 2$ est une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et la droite $(D'): y = -x + 2$ est une asymptote oblique au voisinage de $-\infty$ à la courbe (C_f) .
2. Vérifier que la droite $(\Delta): x = 2$ est un axe de symétrie de (C_f).
3. Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1 et à droite en 3, puis interpréter géométriquement les résultats obtenus.
4. a- Montrer que $(\forall x \in D_f \setminus \{1;3\}) : f'(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}}$.
   b- Etudier les variations de f, puis dresser son tableau de variations.
5. Construire (Δ), (D), (D') et (C_f) .

Exercice ⑥:

Soient f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(2x)$ et (C_f) sa courbe d'un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ tel que $\|\vec{\imath}\| = \frac{\pi}{4}$ et $\|\vec{\jmath}\| = 1$.

1. Montrer que f est périodique de période π.
2. Etudier la parité de f.
3. Vérifier que la droite $(\Delta): x = \frac{\pi}{4}$ est un axe de symétrie de (C_f).
4. Expliquer pourquoi il suffit d'étudier la fonction f sur l'intervalle $I = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$?
5. a- Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in I$.
   b- Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur I.
6. Construire (C_f) sur $\left[\frac{-3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$.

Exercice ⑦ :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 - 1 & ; x \geq 0 \\ x + \frac{1}{x-1} & ; x \leq 0 \end{cases}$.

1. Déterminer D_f puis calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. Etudier les branches infinies de (C_f).
3. Etudier la dérivabilité de f en 0, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.
4. a- Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_f$.
   b- Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.
5. Construire (C_f).

Résumé

1BSF 1 et 2 — **Pr. Latrach Abdelkbir**

Branches infinies :

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ → (C_f) admet une asymptote verticale d'équation $x = a$
- $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = l$ → (C_f) admet une asymptote horizontale d'équation $x = l$ au voisinage de ∞
- $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \infty$ → $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$
  - 0 → (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de ∞
  - ∞ → (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de ∞
  - a → $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - ax)$
    - ∞ → (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$ au voisinage de ∞
    - b → (C_f) admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$ au voisinage de ∞

Tangentes :

- Tangente horizontale → Si alors $f'(a)=0$ (C_f) admet une tangente horizontale au point $A(a;f(a))$
- Demi-tangente verticale → Si alors $\lim\limits_{x\to a^{\pm}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$ (C_f) admet une demi-tangente verticale à droite ou à gauche au point $A(a;f(a))$
- Tangente oblique → Une équation de la tangente (T) à la courbe da la fonction f au point $A(a;f(a))$ est $y = f'(a)(x-a)+f(a)$

Concavité :

$f''(x)$:

- Si $(\forall x \in I); f''(x) \geq 0$, alors (C_f) est convexe.
- Si $(\forall x \in I); f''(x) \leq 0$, alors (C_f) concave.
- Si $f''(a) = 0$ en changeant de signe, alors le point $A(a;f(a))$ est un point d'inflexion de (C_f).

Axe de symétrie - Centre de symétrie :

- $(\Delta): x = a$ est un Axe de symétrie → $\begin{cases} (\forall x \in D); \quad (2a-x) \in D \\ (\forall x \in D); \; f(2a-x) = f(x) \end{cases}$
- $\Omega(a;b)$ est un centre de symétrie → $\begin{cases} (\forall x \in D); \quad (2a-x) \in D \\ (\forall x \in D); \; f(2a-x) = 2b - f(x) \end{cases}$