Barycentre

1BSF 1 et 2

Pr. Latrach Abdelkbir

Activité ⓪: Soutient des prérequis

ABC est un triangle.

Soient I, J et K trois points du plan tels que $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BK}=-2\overrightarrow{BC}$.

1. Placer les points I, J et K.
2. Vérifier que $\overrightarrow{AK}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$.
3. Montrer que $\overrightarrow{IJ}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$.
4. Montrer que $\overrightarrow{IK}=\frac{5}{2}\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$.
5. a. Vérifier que $-10\overrightarrow{IJ}=2\overrightarrow{IK}$.
   b. Que peut-on dire sur les points I, J et K?

Activité ①:

Soient A et B deux points distincts du plan, et G un point tel que $2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.

1.a. Montrer que $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$.

b. Construire le point G.

Le point G est appelé **le barycentre** des points pondérés $(A;a)$ et $(B;b)$.

2.a. Vérifier, pour tout point du plan, que $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=5\overrightarrow{MG}$.

b. En déduire l'ensemble des points M du plan tel que $\|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\|=15$.

Application ①:

1. Déterminer a et b pour que G soit le barycentre du système$\{(A;a);(B;b)\}$ dans chacun des cas suivants :
   ❶ $\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}=2\overrightarrow{AB}$
   ❷ $-7\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}=10$
2. Construire le point G dans le premier cas.

Application ②:

Soient A et B deux points du plan (P).

1. Déterminer l'ensemble des points M du plan (P)tel que $\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\|=6$.
2. Déterminer l'ensemble des points M du plan (P) tel que $\|3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\|=\|-2\overrightarrow{MA}+6\overrightarrow{MB}\|$.

Activité ②:

Soient $A(-2;3)$ et $B(1;4)$ deux points du plan (P) muni d'un repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ et G le point du plan tel que $G=bar\{(A;3),(B;1)\}$.

1. Montrer que $\overrightarrow{OG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}$.
2. Déterminer les coordonnées du point G.

Application ③:

On considère dans le plan (P) muni d'un repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ les points $A(2;-5)$ et $B(4;3)$

Soient Get G' deux points tels que :
$G=bar\{(A;3);(B;6)\}$ et $G'=bar\{(A;-2);(B;1)\}$
Déterminer les coordonnées des points G et G'.

Application ④:

1. Déterminer a ,b et c pour que le point G soit le barycentre du système pondéré $\{(A;a);(B;b),(C;c)\}$ dans le cas suivant :
   $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}=3\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.
2. Construire le point G tel que
   $G=bar\{(A;2);(B;-1),(C;-2)\}$.

Application ⑤:

Soient A, B et C trois points du plan (P).

1. Déterminer l'ensemble des points M du plan (P)tel que $\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=4$.
2. Déterminer l'ensemble des points M du plan (P) tel que $\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|=\|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\|$.

Application ⑥:

Déterminer les coordonnées du point G le barycentre du système pondéré $\{(A;2),(B;-3),(C;-6)\}$ tel que $A(1;4)$,$B(0;5)$ et $C(2;-1)$.

Application ⑦:

Soit ABC un triangle et K un point défini par $\overrightarrow{BK}=-\frac{4}{3}\overrightarrow{BC}$, le point Gest le barycentre du système pondéré $\{(A;3);(B;7),(C;-4)\}$.

1. Vérifier que $K=bar\{(B;7);(C;-4)\}$.
2. Montrer que G est le milieu du segment $[AK]$.

Exercice :

ABC est un triangle.

G est le barycentre des points $(A;-2)$,$(B;3)$ et $(C;3)$.

K et H sont deux point du plan tels que $\overrightarrow{AK}=3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}=3\overrightarrow{AC}$.

I est le milieu le milieu du segment $[BC]$.

1. Vérifier que $K=bar\{(A;-2);(B;3)\}$ et $H=bar\{(A;-2);(C;3)\}$.
2. a. Montrer que $G=bar\{(K;1);(C;3)\}$.
   b. Montrer que $G=bar\{(H;1);(B;3)\}$.
   c. Montrer que $G=bar\{(A;-1);(I;3)\}$.

En déduire que les droites (CK), (BH)et (AI)sont concourantes en un point qu'on déterminera.