Equations différentielles

Pr. Latrach Abdelkbir

✍ Activité :

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2e^{-4x}$.

On pose $y = f(x)$ et $y' = f'(x)$ et $y'' = f''(x)$.

Montrer que : $y'' + 3y' - 4y = 0$.

✍ Application ① :

1. Résoudre les équations différentielles suivantes :

   ❶ $y' = 3y$ ❷ $y' + 5y = 0$

2. a. Résoudre l'équation (E) : $3y' - 2y = 0$.

   b. Déterminer la solution de (E) qui vérifie $y(3) = -1$.

✍ Application ② :

1. Résoudre l'équation différentielle :

   $(E) : y' + 2y - 4 = 0$

2. Déterminer la solution de (E) dont la courbe passe par le point $A(-\ln(2), 6)$

✍ Application ③ :

1. Résoudre les équations différentielles suivantes :

   (E_1): $y'' - 3y' + 2y = 0$.

   (E_2): $y'' + 4y' + 4y = 0$

   (E_3): $y'' - 4y' + 13y = 0$.

2. a. Résoudre l'équation différentielle :

   (E'): $y'' - 5y' + 6y = 0$

b. Déterminer la solution g de l'équation (E') vérifiant les conditions initiales : $g(0) = 1$ et $g'(0) = 2$.

Devoir maison 4

Exercice 1 :

1. Résoudre l'équation différentielle : (E''): $y'' + 4y = 0$

2. Déterminer la solution g de l'équation (E'') vérifiant les conditions initiales : $g(\frac{\pi}{2}) = 1$ *et* $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

Exercice 2 :

1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $z^2 - 2z + 2 = 0$

2) On pose $a = 1 - i$ et $b = 2 + \sqrt{3} + i$

a) Écrire a sous forme trigonométrique

b) Vérifier que $\frac{b}{a} = (1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$ puis écrire b sous forme trigonométrique

c) Déduire que b^6 est un nombre imaginaire pur

3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et $c = -1 + i\sqrt{3}$

Soient z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M', image de M par la rotation R de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

a) Exprimer z' en fonction de z

b) Vérifier que le point C est l'image du point B par la rotation R et en déduire la nature du triangle ABC

4) Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - 2 - \sqrt{3} - i| = |z + 1 - i\sqrt{3}|$

a) Déterminer l'ensemble (E)

b) En déduire que le milieu du segment $[BC]$ appartient à l'ensemble (E)

Exercice 3 :

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ (unité :1cm).

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter géométriquement le résultat.

3. a. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe au voisinage de $-\infty$.

   b. Etudier le signe $(f(x) - x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et en déduire la position relative de la courbe (C) et la droite (Δ).

4. a. Montrer que $f'(x) = \left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2 + xe^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

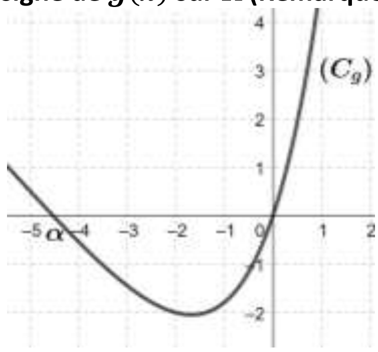
b. Vérifier que $x\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right) \geq 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis en déduire le signe de la fonction dérivée f' sur $\mathbb{R}$.

c. Dresser le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$.

5. a. Montrer que $f''(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}g(x)$; où

   $g(x) = (2x + 4)e^{\frac{x}{2}} - x - 4$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

b. A partir de la courbe ci-contre de la fonction g, déterminer le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$ (Remarque : $g(\alpha) = 0$)



c. Etudier la concavité de la courbe (C) et déterminer les abscisses des deux points d'inflexions.

6. Construire la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

(On prend : $\ln(4) \approx 1.4$, $\alpha \approx -4.5$ et $f(\alpha) = -3.5$)

a. Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.

b. Calculer $(f^{-1})'(\ln 4)$.

7. Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a. Montrer par récurrence que $0 < u_n < \ln 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

d. Calculer la limite de la suite (u_n).