# Fonctions exponentielles

***Pr. Latrach Abdelkbir***

## Exercice ① : Session normale 2022

On considère la fonction numérique $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2$ et $(C)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ (unité :1cm).

**1.** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

**2.** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter géométriquement le résultat.

**3.** **a.** Montrer que la droite $(\Delta)$ d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe au voisinage de $-\infty$.

**b.** Etudier le signe $(f(x) - x)$ pour tout $x$ de $\mathbb{R}$ et en déduire la position relative de la courbe $(C)$ et la droite $(\Delta)$.

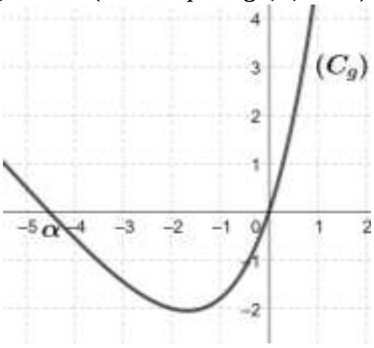
**4.** **a.** Montrer que $f'(x) = \left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2 + xe^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)$ pour tout $x$ de $\mathbb{R}$.

**b.** Vérifier que $x\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right) \geq 0$ pour tout $x$ de $\mathbb{R}$ puis en déduire le signe de la fonction dérivée $f'$ sur $\mathbb{R}$.

**c.** Dresser le tableau des variations de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$.

**5.** **a.** Montrer que $f''(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}g(x)$ ; où $g(x) = (2x+4)e^{\frac{x}{2}} - x - 4$ pour tout $x$ de $\mathbb{R}$.

**b.** A partir de la courbe ci-contre de la fonction $g$, déterminer le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$ (Remarque : $g(\alpha) = 0$)




**c.** Etudier la concavité de la courbe $(C)$ et déterminer les abscisses des deux points d'inflexions.

**6.** Construire la courbe $(C)$ dans le repère $(O, \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.
(On prend : $ln(4) \approx 1.4$, $\alpha \approx -4.5$ et $f(\alpha) = -3.5$)

**a.** Montrer que la fonction $f$ admet une fonction réciproque $f^{-1}$ définie sur $\mathbb{R}$.

**b.** Calculer $(f^{-1})'(ln4)$.

**7.** Soit $(u_n)$ la suite numérique définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**a.** Montrer par récurrence que $0 < u_n < \ln 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**b.** Montrer que la suite $(u_n)$ est décroissante.

**c.** En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente.

**d.** Calculer la limite de la suite $(u_n)$.

## Exercice ②: Session normale 2020

On considère la fonction numérique $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4)$ et $(C)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ (unité :2cm).

**1.** Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

**2.** **a.** Démontrer que la droite $(\Delta)$ d'équation $y = -x + \frac{5}{2}$ est une asymptote à la courbe $(C)$ au voisinage de $-\infty$.

**b.** Résoudre l'équation $e^{x-2} - 4 = 0$ puis montrer que la courbe $(C)$ est au-dessus de $(\Delta)$ sur l'intervalle $]-\infty; 2 + ln4[$ et en dessous de $(\Delta)$ sur l'intervalle $]2 + ln4; +\infty[$.

**3.** Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ puis interpréter géométriquement le résultat.

**4.** **a.** Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) : f'(x) = -(e^{x-2} - 1)^2$.

**b.** dresser le tableau de variations de la fonction $f$.

**5.** Calculer $f''(x)$ pour tout $x$ de $\mathbb{R}$ puis montrer que $A(2; 2)$ est un point d'inflexion de $(C)$.

**6.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ telle que $2 + ln3 < \alpha < 2 + ln4$.

**7.** Construire $(\Delta)$ et $(C)$ (On prend $ln2 \approx 0.7$ et $ln3 \approx 1.1$)

**8.** **a.** Montrer que la fonction $f$ admet une fonction réciproque $f^{-1}$ définie sur $\mathbb{R}$.

**b.** Construire dans le même repère $(O, \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ la courbe représentative de la fonction $f^{-1}$ (Remarquer que la droite $(\Delta)$est perpendiculaire à la première bissectrice du repère)

**c.** Calculer $(f^{-1})'(2 - ln3)$ (Remarquer que $f^{-1}(2 - ln3) = 2 + ln3$.

## Exercice ③: Session de rattrapage 2020

**I-** Soit $g$ la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = e^{1-x} + \frac{1}{x} - 2$.

**1.** Montrer que $g'(x) < 0$, pour tout $x \in ]0, +\infty[$.

**2.** Déduire le tableau de signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ ; (Remarquer que $g(1) = 0$)

**II-** On considère la fonction numérique $f$ définie sur $]0, +\infty[$ par :
$f(x) = (1-x)e^{1-x} - x^2 + 5x - 3 - 2lnx$ et $(C)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ (unité :2cm).

**1.** Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$ puis interpréter le résultat géométriquement.

**2.** **a.** Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

**b.** montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ puis interpréter le résultat géométriquement.

**3.** **a.** Montrer que pour tout $x$ de $]0, +\infty[$, $f'(x) = (x-2)g(x)$.

**b.** Montrer que la fonction $f$ est décroissante sur $]0; 1]$ et sur $[2; +\infty[$ et croissante sur $[1; 2]$.

**c.** Dresser le tableau de variations de la fonction $f$ sur $]0; +\infty[$, (On admet $f(2) \approx 1.25$)

**4.** Sachant que $f(3) \approx 0.5$ et $f(4) \approx -1.9$ montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $]3;4[$.

**5.** Construire $(C)$ dans le repère $(O,\vec{i};\vec{j})$.

**III-** On pose $h(x)=f(x)-x$ pour tout $x$ de l'intervalle $[1;2]$.

**1. a.** A partir du tableau de variations de la fonction $h$ ci-contre

| $x$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|
| $h(x)$ | $0$ $\searrow$ | $h(2)$ |

Montrer que $f(x)\leq x$ pour tout $x$ de l'intervalle $[1;2]$.

**b.** Montrer que 1 est l'unique solution de l'équation $f(x)=x$ sur l'intervalle $[1;2]$.

**2.** Soit $(u_n)$ la suite numérique définie par : $u_0=2$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n$ de $\mathbb{N}$.

**a.** Montrer par récurrence que $1\leq u_n\leq 2$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

**b.** Montrer que la suite $(u_n)$ est décroissante.

**c.** En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

## *Exercice ④ : extrait de rattrapage 2019*

**Première partie:**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par:

$$f(x)=2+8\left(\frac{x-2}{x}\right)^2 e^{x-4}$$

On désigne par $(C_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i};\vec{j})$. (unité : 1cm)

**1. a.** Vérifier que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$, et interpréter graphiquement le résultat.

**b.** Vérifier que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$ , et interpréter graphiquement le résultat.

**2. a.** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

**b.** Montrer que l'axe des ordonnées est une direction asymptotique de $(C_f)$ au voisinage de $+\infty$.

**3. a.** Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}^*$ on a:

$$f'(x)=\frac{8(x-2)(x^2-2x+4)e^{x-4}}{x^3}$$

**b.** Vérifier que $(\forall x\in\mathbb{R});\ x^2-2x+4>0$.

**c.** Montrer que f est strictement décroissante sur l'intervalle $]0;2]$, et strictement croissante sur les intervalles $]-\infty;0[$ et $[2;+\infty[$.

**d.** Dresser le tableau de variations de $f$ sur $\mathbb{R}^*$

**4.** Tracer $(C_f)$ dans le repère$(O;\vec{i};\vec{j})$.

**5. a.** Vérifier que la fonction $H: x\mapsto \frac{1}{x}e^{x-4}$ est une primitive de la fonction $h: x\mapsto \frac{x-1}{x^2}e^{x-4}$ sur l'intervalle $[2;4]$.

**b.** Vérifier que :

$(\forall x\in\mathbb{R}^*): f(x)=2+8e^{x-4}-32\frac{(x-1)}{x^2}e^{x-4}$.

**Deuxième partie :**

**1.** Soit $g$ la fonction définie sur $[2;4]$ par:

$$g(x)=8(x-2)e^{x-4}-x^2.$$

**a.** Calculer $g(4)$.

**b.** Vérifier que pour tout $x$ de $[2;4]$,

$$g(x)=-(x-4)^2e^{x-4}+x^2(e^{x-4}-1).$$

**c.** Vérifier que pour tout $x$ de $[2;4]$: $e^{x-4}-1\leq 0$ puis en déduire que pour tout x de $[2;4]$ : $g(x)\leq 0$.

**2. a.** Vérifier que pour tout $x$ de $[2;4]$:

$$f(x)-x=\left(\frac{x-2}{x^2}\right)g(x).$$

**b.** En déduire que pour tout $x$ de $[2;4]$: $f(x)\leq x$.

**3.** On considère la suite $(u_n)$ définie par :

$u_0=3$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout n de IN.

**a.** Montrer que : $(\forall n\in IN): 2\leq u_n\leq 4$.

**b.** Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)$, puis en déduire quelle est convergente.

**c.** Calculer la limite de $(u_n)$.

## *Exercice ⑤: Session normale 2009*

On considère la fonction numérique $f$ définie par : $f(x)=2ln\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)$ et $(C)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i};\vec{j})$.

**I- 1.** Vérifier que $e^x-2\sqrt{e^x}+2=\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1$ pour tout $x$ de $\mathbb{R}$ puis en déduire que le domaine de définition de $f$ est $\mathbb{R}$ et que : $(\forall x\in\mathbb{R})1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}>0$.

**2.** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=ln4$ et interpréter ce résultat graphiquement.

**3. a.** Montrer que $f'(x)=\frac{2\sqrt{e^x}(\sqrt{e^x}-1)}{(\sqrt{e^x}-1)^2+1}$ pour tout $x$ de $\mathbb{R}$ et vérifier que $f'(0)=0$.

**b.** Etudier le signe de $\sqrt{e^x}-1$ sur $\mathbb{R}$ et en déduire que $f$ est croissante sur $[0,+\infty[$ et décroissante $]-\infty,0]$.

**4. a.** Vérifier que

$(\forall x\in\mathbb{R}): f(x)=2x+2ln\left(1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}\right)$.

**b.** Montrer que la droite $(D)$ d'équation $y=2x$ est une asymptote de $(C)$ au voisinage de $+\infty$.

**5. a.** Vérifier que

$e^x-3\sqrt{e^x}+2=\left(\sqrt{e^x}-1\right)\left(\sqrt{e^x}-2\right)$ pour tout $x$ de $\mathbb{R}$.

**b.** Etudier le signe de $\sqrt{e^x}-2$ et $\left(\sqrt{e^x}-1\right)\left(\sqrt{e^x}-2\right)$ sur $\mathbb{R}$.

**c.** En déduire que $e^x-2\sqrt{e^x}+2\leq\sqrt{e^x}$ pour tout $x$ de l'intervalle $[0,ln4]$.

**d.** Montrer que $f(x)\leq x$ pour tout $x$ de l'intervalle $[0,ln4]$.

**6.** Construire la courbe $(C)$ (On admettra que $(C)$ possède deux points d'inflexion dont l'abscisse de l'un est inférieure à -1 et l'abscisse de l'autre est supérieure à 2, la détermination de ces deux points n'est pas demandée et on prendra $ln4\approx 1.4$)

**II-** Soit $(u_n)$ la suite numérique définie par $u_0=1$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

**a.** Montrer par récurrence que $0<u_n<\ln 4$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

**b.** Montrer que la suite $(u_n)$ est décroissante.

**c.** En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente et sa limite.

***Pr. Latrach Abdelkbir***