Nombres complexes

Exercice ① : rattrapage 2018

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$.
2. Dans le plan complexe est rapport à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère le point A d'affixe $a = \sqrt{2}(1-i)$ et la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a. Écrire a sous forme trigonométrique.

b. Vérifier que l'affixe du point B l'image du point A par la rotation R est : $b = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$.

3. On considère le point C d'affixe $c = 1 + i$.

a. Montrer que: $b^2 - c^2 = 2\sqrt{3}$.

b. Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$ et D l'image de B par la translation t .Montrer que: $OD = |b + c|$.

c. En déduire que: $OD \times BC = 2\sqrt{3}$.

Exercice ②

1. On considère dans $\mathbb{C}$ le polynôme défini par: $P(z) = z^3 - 2(2+i)z^2 + 8(2+i)z - 32i$.

a. Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure $z_0 = \lambda i$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ à déterminer.

b. Trouver les nombres α et β tel que :

$$P(z) = (z - z_0)(z^3 + \alpha z + b).$$

2. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $z^2 - 4z + 16 = 0$
3. Dans le plan complexe rapporté a un repère orthonormé direct$(O,\vec{u};\vec{v})$,on considère les points A et B d'affixes respectives $a = 2 - 2\sqrt{3}i$ et $b = 2\sqrt{3} + 2i$.

a. Ecrire a et b sous forme trigonométrique, et vérifier que a^{21} est un nombre réel.

b. Montrer que OAB est un triangle rectangle et isocèle en O.

4. ***a.*** Déterminer l'affixe du point E l'image du point A par la translation t de vecteur $\overrightarrow{OB}$.

b. Montrer que $OAEB$ est un carré.

5. On considère la rotation Rde centre$B$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et qui transforme $M(z)$ en $M'(z')$

a. Montrer que $z' = -iz + 2\sqrt{3} - 2 + (2 + 2\sqrt{3})i$.

b. Déduire que l'affixe du point C l'image du point A par la rotation R est $c = -2 + 2\sqrt{3}i$.

6. Soit le point D d'affixe $d = 6 + 2\sqrt{3}i$.

a. Montrer que les points O, B et D sont alignés.

b. Donner l'écriture exponentielle de $\frac{d-c}{a-c}$, puis en déduire la nature du triangle ADC.

Exercice ③ : rattrapage 2022

Dans le plan complexe est rapport à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $Z_A = 1 + 5i$, $Z_B = 1 - 5i$ et $Z_C = 5 - 3i$.

1. Déterminer le nombre complexe Z_D affixe du point D milieu du segment $[AC]$.

2. Soit h l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$.
Déterminer le nombre complexe Z_E affixe du point E l'image de B par h.

3. On considère la rotation R de centre C et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, déterminer l'image de B par R.

4. Soit F le point d'affixe $Z_F = -1 + i$.

a. Vérifier que $\frac{Z_D - Z_A}{Z_F - Z_A} \times \frac{Z_F - Z_E}{Z_D - Z_E} = -1$.

b. En déduire $\overline{(\overrightarrow{AF};\overrightarrow{AD})} + \overline{(\overrightarrow{ED};\overrightarrow{EF})} \equiv \pi[2\pi]$.

c. Déterminer la forme trigonométrique du nombre $\frac{Z_E - Z_F}{Z_A - Z_F}$ et déduire la nature triangle AEF.

d. Déduire que les points A, D, E et F appartiennent à un cercle dont on déterminera un diamètre.

Exercice ④ : Normale 2015

I. On considère le nombre complexe $a = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

1. Montrer que $|a| = 2\sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

2. Vérifier que $a = 2\left(1 + \cos\frac{\pi}{4}\right) + 2i\, sin\frac{\pi}{4}$.

3. a. En linéarisant $cos^2\theta$, θ est un nombre réel, montrer que :$1 + cos2\theta = 2cos^2\theta$.

b. Montrer que $a = 4cos^2\frac{\pi}{8} + 4i\cos\frac{\pi}{8}sin\frac{\pi}{8}$. (On rappelle que $sin2\theta = 2cos\theta sin\theta$)

c. Montrer que $4cos\frac{\pi}{8}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\, sin\frac{\pi}{8}\right)$ est une forme trigonométrique du nombre a.

II. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$, les deux points Ω et A d'affixes respectives ω et a tels que : $\omega = \sqrt{2}$ et $a = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et la rotation R de centre Ω est d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1. Montrer que l'affixe b du point B image du point A par la rotation R est $2i$.

2. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que $|z - 2i| = 2$.

Exercice ⑤

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$.
2. On pose $a = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$.
Écrire a sous forme trigonométrique puis en déduire que a^8 est un nombre réel.
3. Dans le plan complexe est rapport à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$; on considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c tels que: $b = \sqrt{2} + 1 + i$ et $c = \bar{b}$. Soit z l'affixe du point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

a. Montrer que $z' = az$.

b. Vérifier que le point B est l'image du point C par la rotation R et en déduire la nature du triangle OBC.

c. En déduire que $arg(b) \equiv \frac{1}{2}arg(a)\ [2\pi]$ puis déterminer un argument du nombre complexe b.

4. On pose $h = cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + isin\left(\frac{\pi}{8}\right)$, montrer que: $h^4 + a^8 + \sqrt{2} = b$.