Exercice 1

Soit $(u_n)_{\geq 0}$ la suite de nombres réels définie par $u_0 \in]0,1]$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{(u_n)^2}{4}$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.

2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 1$.

3. Montrer que la suite est monotone. En déduire que la suite est convergente.

4. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{\geq 0}$.

Exercice 2

Soit $(u_n)_{\geq 0}$ la suite de nombres réels définie par $u_0 \in]1,2]$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{(u_n)^2}{4} + \frac{3}{4}$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 1$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 2$.
3. Montrer que la suite est monotone. En déduire que la suite est convergente.
4. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{\geq 0}$.

Exercice 3

Soit (u_n) une suite définie par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$$

Et la donnée de u_0

1. a. Montrer que si $u_0 \leq 2$ alors pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq 2$ et que la suite est monotone.

b. En déduire que la suite est convergente et déterminer sa limite.

2. a. Montrer que si $u_0 \geq 2$ alors pour tout $n \geq 0$, $u_n \geq 2$ et que la suite est monotone.

b. En déduire que la suite est convergente et déterminer sa limite.

3. a. On pose $v_n = u_n - 2$. Montrer que la suite (v_n) est *une suite* géométrique de raison $\frac{1}{2}$

b. En déduire une expression de u_n en fonction de n et u_0. Retrouver le résultat des deux premières questions.

c. En déduire $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{n}$

Exercice 4

Soit $(u_n)_{\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 8}{2u_n + 1}$$

Et soit $(v_n)_{\in\mathbb{N}}$ définie par

$$v_{n+1} = \frac{u_n - 2}{u_n + 2}$$

1. Montrer que $(v_n)_{\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $-\frac{3}{5}$
2. Exprimer v_n en fonction de n.
3. Exprimer u_n en fonction de n.
4. Montrer que $(u_n)_{\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 5

1. Déterminer la limite de la suite (u_n)dont le terme général est défini par: $u_n = \frac{2n + \sqrt{4n^2 + 1}}{n + \sqrt{n^2 + 1}}$
2. En déduire la limite de la suite de terme général v_n défini par: $v_n = \frac{2n - \sqrt{4n^2 + 1}}{n - \sqrt{n^2 + 1}}$

Exercice 6

1. On pose que $u_n = \frac{E(\sqrt{n})}{n}$; pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$

2. On pose que $v_n = \frac{\left(E(\sqrt{n})\right)^2}{n}$; pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que la suite $(v_n)_{\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 7

On considère la suite $(u_n)_{\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n^2 + \frac{3}{2}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$.

2. Calculer la limite éventuelle de la suite $(u_n)_{\in\mathbb{N}}$.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 3$.

4. Montrer que la suite est croissante, que peut-on en conclure ?

Exercice 8

On considère la suite de nombre réel définie par son premier terme $u_0 = 0$ et par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = 2u_n^2 + \frac{1}{8}$$

Montrer que la suite $(u_n)_{\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 9

Soit $(u_n)_{\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par $u_0 = \frac{3}{2}$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = (u_n - 1)^2 + 1$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 < u_n < 2$.

2. Montrer que $(u_n)_{\in\mathbb{N}}$ est strictement monotone.

3. En déduire que $(u_n)_{\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 10

Montrer que la suite $(u_n)_{\in\mathbb{N}}$ de terme général u_n définie par:

$$u_n = \frac{2n+1}{3n^2+1} + \frac{2n+1}{3n^2+2} + \cdots + \frac{2n+1}{3n^2+n}$$

Est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 11

Montrer que la suite $(u_n)_{\in\mathbb{N}}$ de terme général un définie par :

$$u_n = \frac{1 \times 3 \times \ldots \times (2n+1)}{3 \times 6 \times \ldots \times (3n+3)}$$

Est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 12

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

2. Soit $(u_n)_{\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie pour tout $n > 0$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

A l'aide de la question 1. Montrer que $(u_n)_{\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 13

Soit $(u_n)_{\in\mathbb{N}}$ la suite à valeurs réelles définie par la donnée de u_0, u_1 et la relation de récurrence $\forall n \in\mathbb{N}$, $2u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n = 0$

Soient $(v_n)_{\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites à valeurs réelles définies, pour tout $n \in\mathbb{N}$, par :

$$v_n = 3u_n - \frac{3}{2}u_{n+1} \; et \; w_n = -\frac{3}{4}u_n + \frac{3}{2}u_{n+1}$$

1. Montrer que $(v_n)_{\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$. En déduire une expression de v_n en fonction de n, de u_0 et de u_1.

2. Montrer que $(w_n)_{\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 2. En déduire une expression de w_n en fonction de n, de u_0 et de u_1.

3. Calculer $v_n + w_n$ de deux façons différentes et en déduire u_n en fonction de n, de u_0 et de u_1.

4. Selon les valeurs de u_0 et de u_1 déterminer si la suite $(u_n)_{\in\mathbb{N}}$ converge et le cas échéant déterminer sa limite.

Exercice 14

Soit $(u_n)_{\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la donnée de u_0 et de u_1 et la relation de récurrence $2u_{n+2} - u_{n+1} - u_n = 0$ On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ $v_n = u_{n+1} - u_n$ et $w_n = 2u_{n+1} + u_n$

1.Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $-\frac{3}{2}$

. On exprimera v_n en fonction de n, u_0 et u_1.

2. Montrer que $(w_n)_{\in\mathbb{N}}$ est une suite constante.

On exprimera w_n en fonction u_0 et u_1.

3. En calculant $-2v_n + w_n$ de deux façons différentes, exprimer u_n en fonction de n, u_0 et u_1.

4. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

Calculer S_n en fonction de n, u_0 et u_1. Pour quelles valeurs de u_0 et u_1 la suite $(S_n)_{\in\mathbb{N}}$ admet-elle une limite finie et dans ce cas exprimer cette limite en fonction de u_0.

Exercice 15

On considère la suite de nombres réels définie par son premier terme $u_0 = \frac{11}{4}$ et par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{5}{2} + \sqrt{u_n - \frac{7}{4}}$$

Montrer que la suite $(u_n)_{\in\mathbb{N}}$ est bien définie, convergente et déterminer sa limite.

Exercice 16

1. Calculer, si cette limite existe.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n} - n + 1}{2\sqrt{n} + n + 2}$$

2. Etudier la suite $(u_n)_{\in\mathbb{N}}$ de nombres réels définie par la donnée de : $0 < u_0 < 1$ et $u_n = u_{n-1} - (u_n - 1)^2$

Exercice 17

Calculer, si elle existe, la limite, lorsque n tend vers l'infini, de l'expression $\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$

Exercice 18

Soit $(u_n)_{\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_n = \frac{n - \sqrt{n^2+n}}{1 + \sqrt{n^2+1}}$$

Montrer que la suite $(u_n)_{\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 19

On considère les suites $(u_n)_{\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ de nombres réels définies pour tout $n \geq 1$ par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^3} \quad et\ v_n = u_n + \frac{1}{n^2}$$

Montrer que ces deux suites sont convergentes et ont la même limite (que l'on ne cherchera pas à calculer).

Exercice 20

On considère la suite $(u_n)_{\geq 0}$ de nombres réels dont le terme général est défini par récurrence en posant :

$$u_0 = 2\ et\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n - 1}$$

1. Montrer que, pour tout $n \in\mathbb{N}$, $1 \leq u_n$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{\geq 0}$ est décroissante.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{\geq 0}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 21

On considère la suite $(u_n)_{\geq 1}$ de nombres réels définie $pour$ tout $n \geq 1$ par : $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} E(\sqrt{n})$

Montrer qu'elle est convergente et préciser sa limite.

Exercice 22

On considère la suite $(u_n)_{\in\mathbb{N}^*}$ de nombres réels définie par :

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et que sa limite l vérifie $\frac{1}{2} \leq \mathrm{l} \leq 1$

Exercice 23

On considère la suite $(u_n)_{\in\mathbb{N}^*}$ de nombres réels définie par :

$$u_n = \left(\frac{(-1)^n}{n} + \frac{\sin(n^2)}{2}\right)^n$$

1. Montrer qu'il existe un entier naturel n_0, tel que pour tout

$$n \geq n_0, on\ ait : \left|\frac{(-1)^n}{n} + \frac{sin(n^2)}{2}\right| < \frac{3}{4}$$

2. Montrer que la suite converge et déterminer sa limite.

Exercice 24

on pose :

$$u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

1. Montrer que $(u_n)_{\geq 1}$ est une suite divergente.
2. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose :

$$v_n = \frac{1}{\sqrt{n}} u_n$$

a) Montrer que, Pour tout $n \in \mathbb{N}*$:

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$2\sqrt{n+1} - 2 \leq u_n \leq 2\sqrt{n} - 1$$

c) Montrer que $(v_n)_{\geq 1}$ est convergente et précisez sa limite.

Exercice 25

Soient $(u_n)_{\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites définies par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k^2} \quad et \quad v_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k^2}$$

1. Montrer que $(u_n)_{\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont strictement monotones.

2. Montrer que ces deux suites convergent vers la même limite.

Exercice 26

1. Soit (H_p) la proposition suivante.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}^*: \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}$$

Montrer (H_p) par récurrence sur p.

2. Soit $(u_n)_{\geq 1}$ la suite définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

Montrer que la suite $(u_n)_{\geq 1}$ est convergente et on ne cherchera pas à déterminer la limite de cette suite.

Exercice 27

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+\sqrt{k}} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{n+\sqrt{n-1}} + \frac{1}{n+\sqrt{n}}$$

1. Montrer que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{1}{n+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n+\sqrt{k}} \leq \frac{1}{n+1}.$$

2. En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\frac{n}{n+\sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{n}{n+1}.$$

3. Montrer que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

Exercice 28

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases}$

Pour tout entier naturel n.

1. Etudier la monotonie de la suite (u_n)

2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$.

b. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

3. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n, puis démontrer la propriété ainsi conjecturée.

Exercice 29

Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = 1 + \dfrac{1}{n(-2)^n}$

définie pour $n > 0$.

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite (u_n).

2. On admet les deux résultats suivants :

* pour tout n pair non nul, $(-2)^n \geq 1$,
* pour tout n impair, $(-2)^n \leq -1$.

a. Montrer que pour tout $n > 0$, on a : $-1 \leq \dfrac{1}{(-2)^n} \leq 1$.

b. En déduire que pour tout $n > 0$, on a l'encadrement $1 - \dfrac{1}{n} \leq u_n \leq 1 + \dfrac{1}{n}$.

c. Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 30

On définit une suite (u_n) par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2} u_n + 2n - 1 \end{cases}$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3. La suite (u_n) est-elle croissante ou décroissante?

2. On pose $v_n = u_n - 4n + 10$. Calculer v_0, v_1, v_2, v_3.

3. Montrer que la suite (v_n) est géométrique, en préciser la raison.

4. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

5. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

6. Quelle est la limite de (u_n)?

Exercice 31

Soit (a_n) et (b_n) les suites définies pour tout n entier naturel par :

$$\begin{cases} a_0 = 2, b_0 = 3 \\ a_{n+1} = \frac{1}{5}(3a_n + 2b_n) \\ b_{n+1} = \frac{1}{5}(2a_n + 3b_n) \end{cases}$$

1. Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = a_n + b_n$. Montrer que (u_n)est constante et calculer u_n.

2. Soit (v_n) la suite de terme général $v_n = a_n - b_n$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

3. Exprimer a_n et b_n en fonction de u_n et v_n puis en fonction de n. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

Exercice 32

On définit la suite u_n par son premier terme u_0 et la relation de récurrence : $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 6}{u_n + 2}$

1. Montrer qu'il existe deux valeurs $a = 2$ et $b = -3$ de u_0 tels que la suite u_n soit constante

2. Soit $f(x) = \dfrac{x+6}{x+2}$; après avoir étudiée f sur $\mathbf{R}^{*+}$, tracer sa courbe représentative ainsi que la droite $y = x$ sur l'intervalle [0 ; 5] et représenter les premiers termes de u_n (on prendra $u_0 = 0$).

Conjecturer le comportement de u_n (sens de variation, limite).

3. Montrer que si u_0 est différent de a et b, il en est de même de u_n (faire une démonstration par récurrence)

4. Calculer $\dfrac{u_{n+1} - a}{u_{n+1} - b}$ en fonction de $\dfrac{u_n - a}{u_n - b}$. En déduire la nature de la suite $v_n = \dfrac{u_n - a}{u_n - b}$. Donner l'expression de v_n en fonction de n puis celle de u_n . Calculer la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 33

On considère la suite u_n définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{8} \\ u_{n+1} = u_n(2 - u_n) \end{cases}$$

1. a. Calculer u_1 et u_2 .

b. Tracer dans un repère orthonormé la courbe représentative P de la fonction f : $f(x) = x(2-x)$ ainsi que la droite d ($y = x$).

c. Utiliser d et P pour construire sur l'axe des abscisses les points A_1, A_2, A_3 d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3 .

2. a. Montrer par récurrence que $0 < u_n < 1$.

b. Montrer que (u_n) est croissante.

3. On considère la suite $v_n = 1 - u_n$.

a. Montrer que $v_{n+1} = v_n^2$.

b. Montrer par récurrence que $v_n = v_0^{2^n}$. En déduire l'expression de v_n puis celle de u_n .

c. Déterminer la limite de v_n puis celle de u_n .

Exercice 34

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n, par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}.$$

1. Calculer u_1, v_1, u_2, v_2 .

2. Soit la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = v_n - u_n$.

a. Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

b. Exprimer w_n en fonction de n et préciser la limite de la suite (w_n).

3. Après avoir étudié le sens de variation des suites (u_n) et (v_n), démontrer que ces deux suites sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

4. On considère à présent la suite (t_n) définie, pour tout entier naturel n, par $t_n = \frac{u_n + 2v_n}{3}$.

a. Démontrer que la suite (t_n) est constante.

b. En déduire la limite des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 35

On définit les suites (a_n) et (b_n) par $a_0 = 1$, $b_0 = 7$ et

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{3}(2a_n + b_n) \\ b_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + 2b_n) \end{cases}.$$

Soit D une droite munie d'un repère $(O\,;\vec{i})$. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on considère les points A_n et B_n d'abscisses respectives a_n et b_n.

1. Placez les points A_0, B_0, A_1, B_1, A_2 et B_2.
2. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = b_n - a_n$. Démontrez que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. Exprimez u_n en fonction de n.
3. Comparez a_n et b_n. Étudiez le sens de variation des suites (a_n) et (b_n). Interprétez géométriquement ces résultats.
4. Démontrez que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
5. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = b_n - a_n$ pour tout entier n. Démontrez que (v_n) est une suite constante. En déduire que les segments $[A_nB_n]$ ont tous le même milieu I.
6. Justifiez que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes et calculez leur limite. Interprétez géométriquement ce résultat.

Exercice 36

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur IN par $u_0 = 3$ et les relations :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{7}{u_n}$$

1. Calculer v_0, u_1, v_1, u_2, v_2, u_3 et v_3. Donner l'approximation de u_3 et v_3 lue sur la calculatrice.

2. Justifier par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

3. a. Démontrer que quel que soit n de $\mathbb{N}$, $(u_n + v_n)^2 - 28 = (u_n - v_n)^2$.

b. En déduire que $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{1}{4u_{n+1}}(u_n - v_n)^2$.

c. Conclure que quel que soit n on a $u_n - v_n \geq 0$.

4. En s'aidant de la question 3. c., prouver que la suite (u_n) est décroissante et que la suite (v_n) est croissante.

5. a. Démontrer que quel que soit n de $\mathbb{N}^*$, $u_n \geq \frac{21}{8}$.

b. Utiliser le résultat précédent pour démontrer que $u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{1}{10}(u_n - v_n)^2$.

c. En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence que $u_n - v_n \leq \frac{1}{10^{2^n - 1}}$.

d. Déterminer la limite de $u_n - v_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

6. Conclure que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et déterminer leur limite commune.

Exercice 37

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par :

$a_0 = 3$, $b_0 = 1$ et pour tout entier naturel n on a :

$a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n + 3}{3}$ et $b_{n+1} = \frac{a_n + 2b_n + 3}{3}$. On pose

$u_n = a_n - b_n$

1)a/ Montrer que pour tout entier naturel n ,

$u_n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$

b/ En déduire la limite de (u_n)

2) On pose , pour $n \in IN^*$, $v_n = \frac{a_n + b_n}{n}$

a/ Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a : $v_n \geq 2$

b/ Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a :

$v_{n+1} = v_n + \frac{2 - v_n}{n+1}$.

c/ En déduire que (v_n) converge vers un réel $l > 0$

3.Exprimer alors $a_n et\ b_n$ en fonction de $u_n\ et\ v_n$ et n puis déterminer les limites des suites (a_n) et (b_n).

Exercice 38

On considère la suite $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{4u_n}{u_n + 2}; n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Montrer par récurrence que pour tout $n \in IN$, on a :

$$1 \leq u_n < 2$$

2) a)Montrer que (u_n) est une suite croissante.

b)En déduire que la suite u est convergente et déterminer sa limite.

3) Soit la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = 1 - \frac{2}{u_n}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n

c) En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 39

Soit u la suite définie par : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*\ u_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{P!}$

1/ Calculer : u_1 ; u_2 et u_3

2/ Montrer que la suite u est croissante

3 / Soit v la suite définie par :

$\forall n \in \mathbb{N}^*\ v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$

Montrer que v est une suite décroissante

4/ Vérifier que $\lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$

5/ En déduire que u et v ont la même limite L

6/a) Montrer que $\forall p \geq 1$ on a : $p! \leq 2^p$

b) En déduire que $L \geq 2$

Exercice 40

Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}$ par

$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{3U_n + 4}\ ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1/a) Montrer que la suite U est majorée par 4

b) Montrer que U est strictement croissante

c) Déduire que U est convergente est calculer sa limite

2/a) Montrer que pour tout

n de $\mathbb{N}$ on a : $0 \leq 4 - U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - U_n)$

b) Déduire que pour tout

n de $\mathbb{N}$ on a : $0 \leq 4 - U_n \leq 4(\frac{1}{2})^n$

c) Retrouver $\lim_{n \to +\infty} U_n$

3/ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose: $S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$

a) Montrer que $0 \leq 4n - S_n \leq 4(1 - (\frac{1}{2})^n)$

Déduire $\lim_{n \to +\infty} S_n$.

Exercice 41

Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{4}{4 - u_n}\ ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1/a) Montrer que $\forall\ n \in \mathbb{N}, u_n < 2$

b) Montrer que (u_n) est croissante

c) En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite

2/ Soit v la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{1}{u_n - 2}$

a) Montrer que v est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{2}$

b) En déduire v_n à l'aide de n et calculer $\lim_{n\to+\infty} v_n$

c) Exprimer u_n à l'aide de n et retrouver $\lim_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 42

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{4+3u_n} \end{cases}$$

1) a)Montrer que pour tout $n \in IN$; $0 \leq u_n \leq 4$

b)Montrer que $u_{n+1} - u_n$

$= \dfrac{-(u_n)^2 + 3u_n + 4}{\sqrt{4+3u_n} + u_n}$ puis montrer que (u_n)

est croissante

n de IN, $|u_n - 4| \leq \dfrac{4}{2^n}$

b) Retrouver les résultats du 1°) c)

Exercice 43

On considère la suite réelle (u_n) définie sur IN par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{3}{\sqrt{6 - u_n^2}} \end{cases}$$

1°) Calculer u_1 et u_2.

2°) a- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq u_n < \sqrt{3}$

b- Montrer que (u_n) est une suite croissante.

c- En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

3°) Soit (v_n) la suite définie sur IN par :

$$v_n = \frac{u_n^2}{3 - u_n^2}$$

a- Montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison 1.

b- Exprimer v_n en fonction de n. En déduire u_n en fonction de n .

c- Retrouver alors la limite de u_n.

Exercice 44

Soit α un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0,1[$.

On considère la suite (u_n) définie sur IN par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{(1+\alpha).u_n - \alpha}{u_n} \end{cases}$$

1°) a- Montrer que pour tout entier n , on a : $u_n \geq 1$.

b- Montrer que (u_n) est une suite décroissante.

c- En déduire que (u_n) est convergente et trouver sa limite.

2°) Soit (v_n) la suite définie sur IN par :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n - \alpha}.$$

a- Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison α.

b- Exprimer v_n en fonction de n et α . En déduire l'expression de u_n en fonction de n et α.

c- Retrouver alors la limite de la suite u_n quand n tends vers $+\infty$.

Exercice 45

On considère la suite réelle (u_n) définie sur IN par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \sqrt{12 - u_n} \end{cases}$$

1°) Vérifier que

$$\forall\ n \in \mathrm{N}\ ;\ u_{n+1} - 3 = \frac{3 - u_n}{\sqrt{12 - u_n} + 3}$$

2°) Montrer que

$$\forall\ n \in \mathrm{N}\ ;\ \left|u_{n+1} - 3\right| \leq \frac{1}{3}\left|u_n - 3\right|$$

3°) Montrer que $\forall\ n \in \mathrm{N}\ ;\ \left|u_{n+1} - 3\right| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$

4°) Déterminer la limite de u_n quand n tends vers

Exercice 46

On considère la suite réelle (u_n) définie sur IN

par : $\begin{cases} u_0 = \cos\theta \quad / \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{1 + u_n}{2}} \end{cases}$

1°) Montrer que $u_1 = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

2°) Montrer que $\forall n \in \mathrm{N}$ on a : $0 \leq u_n \leq 1$ et que (u_n) est une suite croissante.

3°) Montrer que (u_n) est convergente vers un réel à préciser.

4°) Montrer que $\forall n \in \mathrm{N}$ on a :

$u_n = \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$;Retrouver alors la limite de (u_n).

Exercice 47

Soit u la suite définie sur IR par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2 + \frac{3}{u_n} \end{cases}$

1°) Montrer que $\forall\ n \in \mathrm{N}\ ,\ u_n \geq 2$.

2°) Déterminer le sens de variation de la fonction

f définie sur $\Re_+^*$ par $f(x) = 2 + \frac{3}{x}$.

3°) Soit la suite (v_n) définie sur IN par : $v_n = u_{2n}$.

a- Montrer par récurrence que la suite (v_n) est majorée par 3.

b- Montrer par récurrence que la suite (v_n) est croissante.

4°) a- Montrer que pour tout entier n, on a :

$\left|u_{n+1} - 3\right| \leq \frac{1}{2}\left|u_n - 3\right|$.

b- Montrer par récurrence que.

$$\forall\ n \in \mathrm{N}\ ,\ \left|u_{n+1} - 3\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

c- En déduire la limite de la suite u_n puis celle de (v_n)

Exercice 48

Soit la suite réelle u définie sur IN par

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{4u_n - 3}{u_n}\ ;\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1/a) Montrer que la suite u est minorée par 3

b) Montrer que la suite u est décroissante

c) En déduire que la suite u est convergente

2/a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - 3 \leq \frac{1}{3}(u_n - 3)$.

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n - 3 \leq (\frac{1}{3})^n$.

c) Calculer la limite de la suite u

Exercice 49

Soit la fonction f définie sur l'intervalle

$[0,2]$ par $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$

1/a) Donner les variation de f sur l'intervalle $[0,2]$

b) Montrer que si $x \in [1,2]$ alors $f(x) \in [1,2]$

c) Tracer la représentation graphique de f dans un R.O.N $(o,\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 4 cm)

2/ Soit u la suite définie sur IN par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n)\ ,\ n > 0 \end{cases}$$

a) Construire sur l'axe des abscisses les trois premiers termes de la suite u

b) A partir du graphique que peut-on conjecturer concernant le sens de variation et la convergence de la suite u

3/a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$

c) Montrer que u converge vers $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Exercice 50

Soit u la suite définie sur IN par

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \end{cases} ;\ \forall n \in \mathbb{N}$$

1) Montrer par récurrence que la suite u est décroissante

2) Montrer que la suite u est convergente

3) Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 51

Soit u la suit réelle définie sur IN par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{\sqrt{4 - u_n^2}} \end{cases} ,\ n \in \text{IN}$$

1) a- Montrer que pour tout n ∊ IN, on a : $0 \leq u_n < \sqrt{2}$

b- Montrer que la suite u est croissante.

c- En déduire que u est convergente et calculer sa limite.

2) Soit la suite v définie sur IN par : $v_n = \dfrac{u_n^2}{2 - u_n^2}$

a- Montrer que v est une suite arithmétique de raison 1.

b- Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c- Retrouver la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

3) Pour tout n ∊ IN*, on pose : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+\sqrt{v_k}}$

a- Montrer que pour tout n ∊ IN* :

$$\frac{n}{n+\sqrt{n}} \leq s_n \leq \frac{n}{n+1}$$

b- En déduire la limite de s_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 52

On considère la suite définie par : u_0=0 et pour tout entier n : $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$

1° a) A l'aide de votre calculatrice, calculer les quatre premiers termes de cette suite.

b) Faire une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n).

2°) On considère la fonction définie pour $x \in [0;3]$ par :

$$f(x) = \sqrt{2x + 3}$$

a) Calculer la dérivée de la fonction f .

b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur [0;3] et dresser son tableau de variations. Préciser les valeurs de de la fonction aux bornes de cet intervalle.

c) Démontrer que : [si $x \in [0;3]$ alors $f(x) \in [0;3]$].

d) Démontrer par récurrence, que pour tout entier n, $0 \leqslant u_n \leqslant 3$

e) Démontrer par récurrence, que la suite (u_n) est strictement croissante.

f) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

g) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 53 **(Nombres de Fermat)**

1. Pour tout entier naturel n, on note $F_n = 2^{\left(2^n\right)} + 1$.

   Calculer F_0, F_1, F_2, F_3.

2. Démontrer par récurrence que pour tout $n > 1$, on a $F_0 \times F_1 \times F_2 ... \times F_n = F_{n+1} - 2$.

3. Montrer que la suite (F_n) est croissante et non majorée. Quelle est sa limite ?

Exercice 54

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$, on a $3^n \geq n^2(n-1)$.

2. On définit, pour $n \geq 1$, la suite (u_n) par $u_n = \frac{1}{3^1} + \frac{2}{3^2} + ... + \frac{n}{3^n}$.

a. Quel est le sens de variation de (u_n) ?

b. Montrer par récurrence que pour tout entier $k \geq 1$, $k-\left(\frac{3}{2}\right)^k \leq 0$. En déduire que, pour tout $k \geq 1$, $\frac{k}{3^k} \leq \frac{1}{2^k}$ puis un majorant de u_n. Que peut-on en conclure pour (u_n) ?

3. On définit pour $n \geq 1$ la suite (v_n) par $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.

En utilisant la question 1), montrer que (v_n) est décroissante. Quelle est la limite de $(v_n - u_n)$? Que peut-on en conclure pour (v_n) ?

Exercice 55 (Les lettres de Gaston)

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 2000$, $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 200$.

1. Dans un repère de votre choix, représenter les droites d'équation respectives $y = x$ et $y = \frac{3}{4}x + 200$, puis les premiers termes de la suite (u_n).

2. On pose pour tout n $v_n = u_n - 800$. Montrer que la suite (v_n) est géométrique. En déduire l'expression de u_n en fonction de n et la limite de (u_n). Au bout de combien de temps a-t-on $u_n < 810$?

3. Gaston L, garçon de bureau aux éditions Dupuis, se plaint à sa dulcinée : « Voyez-vous, m'oiselle Jeanne, tous les jours je sais traiter le quart de mon courrier en retard, mais il m'arrive 200 lettres de plus chaque matin .» « Monsieur Gaston, vous arriverez bien à trouver une solution, vous êtes si intelligent… » Oui, mais quelle solution, sachant qu'hier soir il y avait 2000 lettres sur le bureau de notre héros ?

4. La question a. est indépendante de ce qui précède

a. Si (x_n) est une suite croissante, on définit (y_n) par $y_n = \frac{x_0 + x_1 ... + x_n}{n+1}$. Montrer que (y_n) est croissante et que pour tout n on a $y_n \leq x_n$. Que peut-on dire pour une suite (x_n) décroissante (on ne justifiera pas ses affirmations).

b. On appelle M_n la quantité de lettres qu'il y eu en moyenne sur le bureau de Gaston pendant les n premiers jours (en comptant comme jour 0 le soir où il y avait 2000 lettres). Exprimer M_n en fonction de n.

Quel est le sens de variation de (M_n). La suite (M_n) est-elle convergente ?

Généralisation : On considère une suite v donnée et la suite u dont le terme général u_n est la moyenne arithmétique : $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} v_k$.

A partir du calcul des premiers termes et d'une représentation graphique, on demande de conjecturer une expression de u_n en fonction de n, que l'on demande de démontrer.

Exercice 56

On considère la suite u_n définie par $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = u_n(2-u_n) \end{cases}$

où a est un réel donné avec $0 < a < 1$.

1. On suppose que $a = \frac{1}{8}$;

a. Calculer u_1 et u_2.

b. Tracer dans un repère orthonormal la courbe représentative P de la fonction f : $f(x) = x(2-x)$ ainsi que la droite d ($y = x$).

c. Utiliser d et P pour construire sur l'axe des abscisses les points A_1, A_2, A_3 d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3

2. On suppose dans cette question que a est quelconque ($0 < a < 1$).

a. Montrer par récurrence que $0 < u_n < 1$.

b. Montrer que u_n est croissante.

c. Que peut-on en déduire ?

3. On suppose de nouveau $a = \frac{1}{8}$ et on considére la suite $v_n = 1 - u_n$.

a. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n

b. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de v_n puis celle de u_n.

Exercice 57 **(Suite de Syracuse)**

On considère la suite u_n définie par la donnée de son premier terme $u_0 = p$ et par la relation :

$$\text{Si } u_n \text{ est pair, } u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n \text{ ; si } u_n \text{ est impair,}$$

$$u_{n+1} = 3u_n + 1.$$

1. Que devient u_n pour p = 1, 2, 3, 7, 8, 11, 27, 28.

Constatation(s) ?

2. On appelle **vol** de p le nombre $V(p)$ de termes de la suite u_n et **hauteur** de p le nombre $H(p)$, plus grand terme de la suite u_n. Déterminer $V(11)$ et $H(11)$.

2. Calculer de même V et H pour $p = 2^k$, k entier.

Donnez un autre exemple où le calcul est simple

3. On suppose que la conjecture est vérifiée pour tous les nombres jusqu'à p. Que dire si $H(p+1) < p$?

4. Les nombres entiers peuvent être rangés dans quatre groupes : ceux de la forme $4k$, de la forme $4k+1$, de la forme $4k+2$ ou de la forme $4k+3$ avec k entier. Que pouvez-vous dire dans les trois premiers cas ?

Exercice 58

On se propose d'étudier une suite définie par une relation de récurrence. Les réels a, b et c étant donnés, la suite (u_n) est ici définie par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = bu_n - \dfrac{1}{3c}(u_n)^3 \text{ pour tout entier } n \end{cases}$$

1. On choisit $b = c = 1$. Étudier les variations de la fonction f définie par $f(t) = t - \frac{1}{3}t^3$ sur [0 ; +□[.

Représenter le graphe de cette fonction. En déduire ensuite le graphe de f lorsque la variable parcourt la totalité de $\mathbb{R}$.

2. On suppose $b = c = 1$. À l'aide de la première bissectrice des axes tracés dans un repère sur lequel on reproduira le graphique précédent, définir des tracés qui permettent la détermination des quatre premiers termes de la suite précédente lorsque le premier terme est défini par $a = 1$. Quelle conclusion sur la suite vous suggèrent ces tracés ? À l'aide du même procédé, décrire ce qui se passe lorsque $a > 1$ (on ne demande pas une discussion complète).

3. On suppose encore : $a = b = c = 1$. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et que tous ses termes sont positifs. En déduire que la suite admet une limite et montrer que cette limite est nulle.

4. On suppose à présent que $a = 6$, $b = 2$, $c = 18$. Déterminer le graphe de la fonction g définie par $g(t) = 2t - \frac{t^3}{54}$. Déterminer les solutions des équations $g(t) = t$ et $g(t) = 0$. En choisissant les unités des axes les plus grandes possibles, dessiner la partie du graphique correspondant au cas où la variable parcourt le segment [0 ; 11]. Dessiner également la première bissectrice des axes et définir des tracés qui permettent la détermination des quatre premiers termes de la suite. Calculer ces quatre premiers termes. Quelles sont vos remarques en ce qui concerne le comportement de cette suite ?

Exercice 59

Soit I l'intervalle [0 ; 1]. On considère la fonction f définie sur I par $f(x) = \frac{3x+2}{x+4}$.

1. Etudier les variations de f et en déduire que, pour tout x élément de I, $f(x)$ appartient à I.

2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n) = \frac{3u_n+2}{u_n+4}$. Montrer que, pour tout n entier, u_n appartient à I.

On se propose d'étudier la suite (u_n) par deux méthodes différentes.

Première méthode

3. a. Représenter graphiquement f dans un repère orthonormal d'unité graphique 10 cm.

b. En utilisant le graphique précédent, placer les points A_0, A_1, A_2 et A_3 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1, u_2 et u_3.

Que suggère le graphique concernant le sens de variation de (u_n) et sa convergence ?

c. Etablir la relation $u_{n+1} - u_n = \frac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$ et en déduire le sens de variation de la suite (u_n).

d. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

e. Prouver que la limite l de la suite (u_n) vérifie $l = f(l)$ et calculer l.

Deuxième méthode : On considère la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

4. a. Prouver que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$.

b. Calculer v_0 et exprimer v_n en fonction de n.

c. Exprimer u_n en fonction de v_n, puis en fonction de n.

d. En déduire la convergence de la suite (u_n) et sa limite l.

Exercice 60

Soit a un nombre réel tel que $-1 < a < 0$.

On considère la suite u définie par $u_0 = a$, et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$.

1. Étudier la monotonie de la suite u.

2. a. Soit h la fonction définie sur IR par $h(x) = x^2 + x$ Étudier le sens de variations de la fonction h.

En déduire que pour tout x appartenant à l'intervalle $]-1\,;0[$, le nombre $h(x)$ appartient aussi à l'intervalle $]-1\,;0[$.

b. Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $-1 < u_n < 0$.

3. Étudier la convergence de la suite u. Déterminer, si elle existe, sa limite.

Exercice 61

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

On considère l'ensemble (E) des suites (x_n) définies sur IN et vérifiant la relation suivante : pour tout entier naturel n non nul, $x_{n+1} - x_n = 0{,}24x_{n-1}$.

1. On considère un réel λ non nul et on définit sur IN la suite (t_n) par $t_n = \lambda^n$. Démontrer que la suite (t_n) appartient à l'ensemble (E) si et seulement si λ est solution de l'équation $\lambda^2 - \lambda - 0{,}24 = 0$.

En déduire les suites (t_n) appartenant à l'ensemble (E).

On admet que (E) est l'ensemble des suites (u_n) définies sur IN par une relation de la forme $u_n = \alpha(1{,}2)^n + \beta(-0{,}2)^n$ où α et β sont deux réels.

2. On considère une suite (u_n) de l'ensemble (E). Déterminer les valeurs de α et β telles que $u_0 = 6$ et $u_1 = 6{,}6$

En déduire que, pour tout entier naturel n,

$u_n = \frac{39}{7}(1{,}2) + \frac{3}{7}(-0{,}2)^n$.

3. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Partie B

On considère la suite (v_n) définie sur IN par : $v_0 = 6$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 1{,}4v_n - 0{,}05v_n^2$.

1. Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = 1{,}4x - 0{,}05x^2$.

a. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;8]$.

b. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \le v_n < v_{n-1} \le 8$.

2. En déduire que la suite (v_n) est convergente et déterminer sa limite l.

Exercice 62

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et,

pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4$.

On pose, pour tout nombre entier naturel n, $v_n = u_n - 6$.

a. Pour tout nombre entier naturel n, calculer v_{n+1} en fonction de v_n. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

b. Démontrer que pour tout nombre entier naturel n,

$u_n = -5\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6$.

c. Étudier la convergence de la suite (u_n).

2. On considère la suite (w_n) dont les termes vérifient, pour tout nombre entier $n \geq 1$: $nw_n = (n+1)w_{n-1} + 1$ et $w_0 = 1$.

Le tableau suivant donne les dix premiers termes de cette suite :

w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

a. Détailler le calcul permettant d'obtenir w_{10}.

b. Donner la nature de la suite (w_n). Calculer w_{2009}.

Exercice 63

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 3$ et pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$.

a. Calculer u_2, u_3 et u_4.

b. Montrer que, pour tout nombre entier naturel n,

$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$.

c. Ci dessous sont tracées, dans un repère orthonormal les droites d'équation $y = x$ et $y = \frac{1}{2}x + 3$

À partir de u_0, en utilisant ces deux droites, on a placé u_1 sur l'axe des abscisses. De la même manière placer les termes u_2, u_3 et u_4.

Que peut-on conjecturer sur les variations et la convergence de cette suite ?

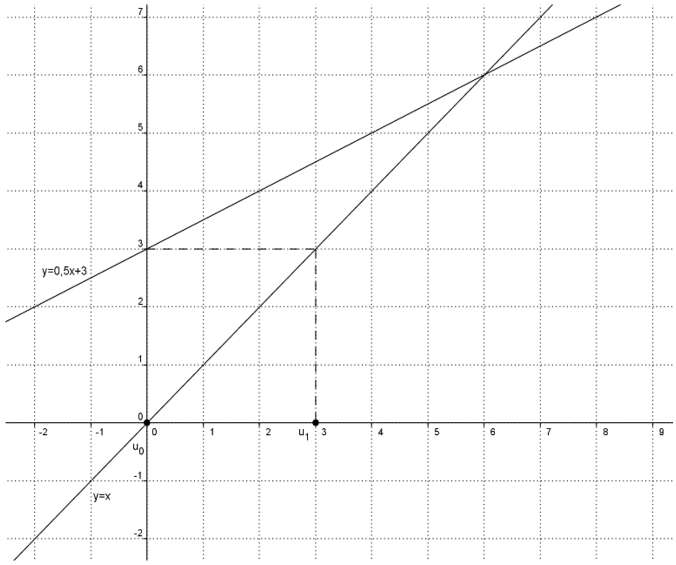
2. Soit (v_n) la suite définie, pour tout nombre entier naturel n, par $v_n = u_n - 6$.

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

3. Soit (w_n) la suite de premier terme w_0 et telle que, pour tout nombre entier naturel n, $w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n + 3$. On suppose que w_0 est strictement supérieur à 6. Les suites (u_n) et (w_n) sont-elles adjacentes ? Justifier.



Exercice 64

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur IN par : $u_0 = -1$, $u_1 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n .$$

1. Calculer u_2 et en déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2. On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n : $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$.

a. Calculer v_0.

b. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.

c. En déduire que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

d. Exprimer v_n en fonction de n.

3. On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel n : $w_n = \frac{u_n}{v_n}$.

a. Calculer w_0.

b. En utilisant l'égalité $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$, exprimer w_{n+1} en fonction de u_n et de v_n.

c. En déduire que pour tout n de IN, $w_{n+1} = w_n+2$.

d. Exprimer w_n en fonction de n.

4. Montrer que pour tout entier naturel n $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$.

5. Pour tout entier naturel n, on pose :

$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + ... + u_n$. Démontrer par récurrence que pour tout n de IN : $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$.

Exercice 65

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$f(x) = 6 - \frac{5}{x+1}$.

Le but de cet exercice est d'étudier des suites (u_n) définies par un premier terme positif ou nul u_0 et vérifiant pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étude de propriétés de la fonction f

a. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

b. Résoudre dans l'intervalle $[0\,;+\infty[$ l'équation $f(x) = x$. On note α la solution.

c. Montrer que si x appartient à l'intervalle $[0\,;\alpha[$, alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[0\,;\alpha[$.

De même, montrer que si x appartient à l'intervalle $[\alpha\,;+\infty[$ alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[\alpha\,;+\infty[$.

2. Étude de la suite (u_n) pour $u_0 = 0$

Dans cette question, on considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f(u_n) = 6 - \frac{5}{u_n+1}.$$

a. Sur le graphique ci-dessous, sont représentées les courbes d'équations $y = x$ et $y = f(x)$.

Placer le point A_0 de coordonnées $(u_0\,;0)$, et, en utilisant ces courbes, construire à partir de A_0 les points A_1, A_2, A_3 et A_4 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3 et u_4.

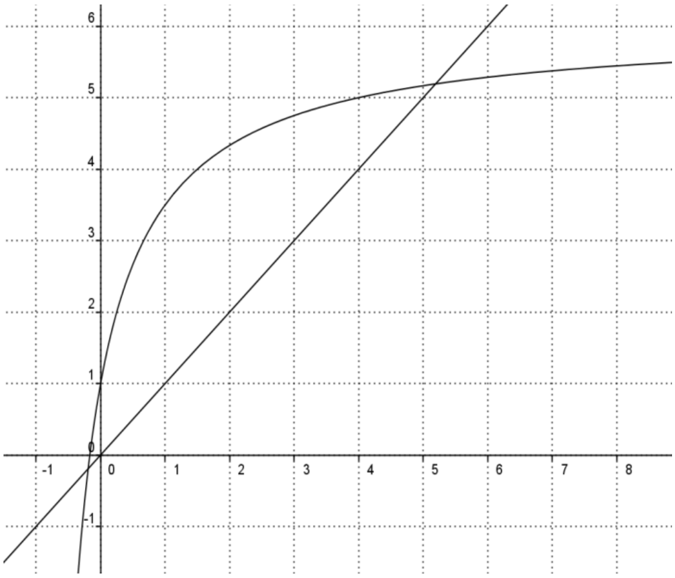
Quelles conjectures peut-on émettre quant au sens de variation et à la convergence de la suite (u_n) ?

b. Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel n, $0 \le u_n \le u_{n+1} \le \alpha$.

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

3. Étude des suites (u_n) selon les valeurs du réel positif ou nul u_0

Que peut-on dire du sens de variation et de la convergence de la suite (u_n) suivant les valeurs du réel positif ou nul u_0 ?



Exercice 66

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0\,;\, u_1 = 1\,; \\ u_{n+1} = 7u_n + 8u_{n-1} \end{cases}$$

1. Montrer que la suite s_n définie par $s_n = u_{n+1} + u_n$ est une suite géométrique dont on précisera la raison. En déduire s_n en fonction de n.

2. On pose $v_n = (-1)^n u_n$ et on considère la suite t_n définie par $t_n = v_{n+1} - v_n$. Exprimer t_n en fonction de s_n.

3. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n (on pourra calculer de deux manières la somme $t_0 + t_1 + ... + t_n$).

4. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{8^n}$.

Exercice 67

Exercice 70

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$u_n = 1-10^{-n}$ et $v_n = 1+10^{-n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. Donner les valeurs de u_0, v_0, u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, u_4, v_4.
2. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
3. Quelle est leur limite ?
4. Que peut-on dire du nombre dont l'écriture décimale est 0,9999… ?

Exercice 68

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$u_n = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{p^2} = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2},$$

et la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par : $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.

1. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
2. Soit l leur limite. Donner un entier n_0 pour lequel l'encadrement de l par u_{n_0} et v_{n_0} est un encadrement d'amplitude inférieure ou égale à 10^{-3}.
3. Donner à la calculatrice une valeur approchée de u_{n_0} et v_{n_0}. Est-il possible que l soit égal à $\frac{\pi^2}{6}$?

Exercice 69

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n+1}{4} \end{cases}$, et $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \dfrac{3v_n+1}{4} \end{cases}$ pour tout entier naturel n.

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, tracer les droites (D) et (Δ) d'équations respectives

$$y = \frac{3x+1}{4} \text{ et } y = x.$$

1. En utilisant ces deux droites, placer sur l'axe des abscisses les réels u_1, u_2, u_3 puis v_1, v_2 et v_3.
2. Calculer u_1, u_2, u_3 puis v_1, v_2 et v_3.
3. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et donner leur limite.

n est un entier naturel non nul. On note $n!$ (et on lit « factorielle n ») le produit $n(n-1)\times \ldots \times 2\times 1$.

On convient de plus que $0! = 1$.

1. Calculer 2!, 3!, 4!, 5!
2. Simplifier $\frac{(n+1)!}{n!}$ puis $\frac{n!}{n}$.
3. Vérifier que $\frac{2}{(n+1)!}-\frac{1}{n!} = \frac{1-n}{(n+1)!}$.
4. Justifier que le nombre $n!\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)$ est un entier.
5. h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$h(x) = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^n}{n!}$. Calculer $h'(x)$ et vérifier que pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$h'(x) = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$.

Exercice 71

1. Soit x un nombre réel positif ou nul et k un entier strictement supérieur à x.

a. Montrer par récurrence sur n que, pour tout entier n supérieur ou égal à k, $\frac{k^n}{n!}\leq\frac{k^k}{k!}$.

b. En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à k, $\frac{x^n}{n!}\leq\left(\frac{x}{k}\right)^n\times\frac{k^k}{k!}$.

c. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x^n}{n!} = 0$.

2. a. Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $\frac{n^{n-1}}{n!}\geq 1$ (on pourra écrire $\frac{n^{n-1}}{n!}$ comme un produit de $n-1$ facteurs supérieurs ou égaux à 1).

b. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^n}{n!} = +\infty$

Exercice 45

Soit t un réel donné dans l'intervalle]0, 1[. On considère la suite (x_n) définie par son premier terme

$x_n = t$ et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{2n+1} = t(1 - x_{2n}) \\ x_{2n+2} = (1-t)x_{2n+1} \end{cases}.$$

1. On pose, pour tout entier naturel n, $y_n = x_{2n+1}$.

Exprimer y_{n+1} en fonction de y_n.

Prouver l'existence de deux nombres réels α et β tels que, pour tout entier naturel n, on puisse écrire :

$$y_{n+1} - \beta = \alpha(y_n - \beta).$$

2. La suite (y_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.

3. On pose, de la même manière, pour tout entier naturel n, $z_n = x_{2n}$. La suite (z_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.

4. La suite (x_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.

Exercice 73

Soit (u_n) la suite définie par

$$u_n = 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}$$

et on définies les suites (v_n) et (w_n) définie par :

$v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$

montrer que les suites (v_n) et (w_n) son adjacentes.

Exercice 74

Soit (w_n) la suite définie par $w_n = \dfrac{n!}{3^n}$ $\forall n \in N^*$

1) Montrer que $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} \geq \dfrac{3}{4}$, $\forall n \geq 3$

2) En déduire $w_n \geq \left(\dfrac{4}{3}\right)^{n-3} \times w_3$, $\forall n \geq 3$

Déterminer la limite de la suite (w_n)

Exercice 75

Soit la suite réelle U définie sur IN par

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{4U_n}{1+U_n} \; ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1/a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < U_n < 3$.

b) Etudier la monotonie de U

c) Montrer que U est convergente et préciser sa limite

2/ Soit la suite V définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = \dfrac{U_n - 3}{U_n}$.

a) Montrer que V est une suite géométrique dont on précisera la raison

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n

c) Retrouver la limite de la suite U

3/ On considère la suite W définie sur $\mathbb{N}$ par $W_n = \dfrac{3}{U_n}$ et on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} W_k$

a) Vérifier que $W_n = 1 - V_n$

b) Montrer que pour tout

$$n \in \mathbb{N}, S_n = n + 1 + \frac{8}{3}(1 - (\frac{1}{4})^{n+1})$$

c) Calculer la limite de $\dfrac{S_n}{n}$ quand n tend vers $+\infty$

Exercice 76

On considère les suites réelles (u_n) et (v_n) définies par

$u_0 = 1$ et $v_0 = 2$, pour tout n de IN

$u_{n+1} = \alpha u_n + (1-\alpha)v_n$ et $v_{n+1} = (1-\alpha)u_n + \alpha v_n$

ou α un réel donné tel que $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$

1) Soit (t_n) la suite définie sur IN par $t_n = v_n - u_n$.

a- Calculer t_0 et t_1.

b- Montrer que pour tout entier naturel n $t_n = (2\alpha - 1)^n$.

c- En déduire la limite de t_n.

2) a- Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \leq v_n$.

b- Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante

c- En déduire que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite ℓ.

d- Les suites (u) et (v) sont- elles adjacentes ?

e- Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n + v_n = 3$ et en déduire la valeur de ℓ