Chapitre 3

Applications

Contenus

- Égalité de deux applications ;
- Image et image réciproque d'une partie par une application ;
- Application injective, application surjective ; application bijective ; application réciproque d'une bijection ;
- Composée de deux applications ;
- Restriction et prolongement d'une application.

Capacités attendues

- Déterminer l'image et l'image réciproque d'un ensemble par une application ;
- Déterminer la bijection et la bijection réciproque d'une application et son utilisation dans la résolution de problèmes ;
- Déterminer la composée de deux applications et la décomposition d'une application en deux applications en vue d'explorer ses propriétés.

I Définitions

Définitions Définir une application f , c'est associer à tout élément x d'un ensemble E un unique élément, noté $f(x)$, d'un ensemble F et on écrit :

$$\begin{array}{cccc} f: & E & \to & F \\ & x & \to & y = f(x) \end{array}$$

- ⊛ E est appelé l'ensemble de définition (ou l'ensemble de départ) de f.
- ⊛ F est l'ensemble d'arrivée de f.
- ⊛ pour tout $x \in E$, $f(x)$ est l'image de x par l'application f.
- ⊛ pour tout $y \in F$, les solutions de l'équation $y = f(x)$ d'inconnue x forment l'ensemble des antécédents de y par f. Cet ensemble peut-être vide, ou contenir un, plusieurs, voire une infinité d'éléments.

D'une autre façon :
f est une application de E dans $F \Leftrightarrow ((\forall x \in E)(\exists! y \in F), f(x) = y)$.

Remarques

Si certains x de E n'ont pas d'image y dans F, on parle alors parfois de fonction et non pas d'application : dans ce cas le domaine de définition de la fonction est le sous ensemble de E formé des x qui ont réellement une image.
Voici deux applications importantes :
• L'application définie sur E et qui prend une même valeur a pour tout élément de E est dite application constante de valeur a.
• L'application de E dans E qui fait correspondre à tout élément x de E cet élément lui même, est appelée **application Identique** de E (ou Identité de E) et se note Id_E.

Exemples

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \to & f(x) = x^2 \end{array}$$

f est une application

$$\begin{array}{cccc} g: & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{N} \\ & x & \to & g(x) = x+2 \end{array}$$

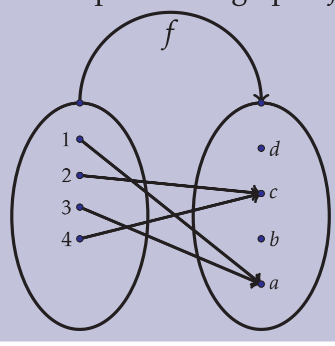
g n'est pas une application car -5 n'a pas d'image par f

$$\begin{array}{cccc} h: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \to & h(x) = \dfrac{2}{x-1} \end{array}$$

h n'est pas une application car 1 n'a pas d'image par f

On a schématisé ci-contre une application f définie sur l'ensemble $E = \{1;2;3;4\}$ et à valeurs dans $F = \{a;b;c;d\}$.

- L'image de 3 par f est d.
- L'ensemble des antécédents de c par f est $\{2;4\}$.
- L'ensemble des antécédents de b par f est vide : $\varnothing$.



II Égalité de deux applications

Définition Soient $f : E \to F$ et $g : E' \to F'$ deux applications. On a :

$$f = g \Leftrightarrow (E = E' \wedge F = F' \wedge (\forall x \in E, f(x) = g(x)))$$

Exemple Soient $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \sqrt{4x^2 - 4x + 1} + \sqrt{4x^2 - 12x + 9} \end{array}$ et $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & 2\left(|x - \frac{1}{2}| + |x - \frac{3}{2}|\right) \end{array}$

On montre facilement que : $(\forall x \in \mathbb{R}) : g(x) = f(x)$. Puisque f et g ont le même ensemble de départ et même ensemble d'arrivée et $(\forall x \in \mathbb{R}) : g(x) = f(x)$, alors $f = g$.

III Image directe et image réciproque d'une partie d'un ensemble

Définition 1 Soit $A \subset E$. On appelle image directe de la partie A, le sous-ensemble de F noté $f(A)$, et défini par : $f(A) = \{y \in F / \exists x \in A, y = f(x)\}$ ce qu'on écrit plus rapidement

$$f(A) = \{f(x), x \in A\}$$

Ainsi, on a : $(\forall y \in F); y \in f(A) \Leftrightarrow ((\exists x \in A); y = f(x))$.

Définition 2 Soit $B \subset F$. On appelle image réciproque de la partie B, le sous-ensemble de E noté $f^{-1}(B)$, et défini par : $f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}$
Ainsi, pour tout x de E, on a : $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$

Exemples Considérons l'application : $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & f(x) = x^2 \end{array}$

- $f^{-1}(\{1\}) = \{-1; 1\}$ car $(\forall x \in \mathbb{R}), f(x) = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow (x = 1 \vee x = -1)$.
- $f^{-1}(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}$ car $(\forall x \in \mathbb{R}), f(x) \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.
- $f^{-1}(\mathbb{R}^\star_-) = \varnothing$ car l'inéquation $f(x) < 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
- De même, on a $f^{-1}(\mathbb{R}^-) = \{0\}$, $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et $f^{-1}([0, 2]) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

IV Prolongement et restriction d'une application

Définition 1 Soit $f : E \to F$ une application, et A une partie de E.
On appelle restriction de f à la partie A, l'application notée $f_{|A}$ définie par :

$$f_{|A} : \begin{array}{ccc} A & \to & F \\ x & \to & f(x) \end{array}$$

(L'ensemble de départ de $f_{|A}$ est A).

Exemple 1 Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & |x| \end{array}$

On a $f_{|\mathbb{R}^-} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^- & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & -x \end{array}$ et $f_{|\mathbb{R}^+} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & x \end{array}$

sont respectivement une restriction de f à $\mathbb{R}^-$ et une restriction de f à $\mathbb{R}^+$.

Définition 2 Soit $f : E \to F$ une application, et X un ensemble tel que $E \subset X$. On dit que l'application $g : X \to F$ est un prolongement de f si $g_{|E}$ est l'application f.

Exemple 2 Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \sqrt{x} \end{array}$

L'application : $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \sqrt{|x|} \end{array}$ est un prolongement de f.

L'application : $h : \begin{array}{cccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} & \\ x & \to & \sqrt{x}\ ; & \text{si } x \geq 0 \\ x & \to & -1\ ; & \text{si } x < 0 \end{array}$ est aussi un prolongement de f.

V Injection - Surjection - Bijection

Définition 1 Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est injective (ou une injection) si tout élément de F a au plus un antécédent (par f), ce qui s'énonce de la manière suivante : $\left(\forall (x, x') \in E^2\right), f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

ou de manière équivalente, par contraposée : $\left(\forall (x, x') \in E^2\right), x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$

Définition 2 Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est surjective (ou une surjection) si tout élément de F a au moins un antécédent (par f), ce qui s'énonce de la manière suivante : $(\forall y \in F)(\exists x \in E), y = f(x)$

Définition 3 Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est bijective (ou une bijection) si tout élément de F a un et un seul antécédent (par f), ce qui s'énonce de la manière suivante :

$$(\forall y \in F)(\exists! x \in E), y = f(x)$$

Remarques

- La propriété de surjectivité traduit l'existence d'un antécédent par f de tout élément y de F.
- La propriété d'injectivité traduit l'unicité d'un éventuel antécédent de y.
- La propriété de bijectivité traduit donc l'existence et l'unicité d'un tel antécédent.
- On commence souvent l'étude par la surjectivité, la résolution de $y = f(x)$ dans la recherche d'antécédent permettant parfois de prouver l'unicité du même coup.

Propriété $f : E \to F$ est surjective si et seulement si $f(E) = F$.

Exemple 1 f est une application définie par : $\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \to & \dfrac{x(1-x)^2}{(1+x^2)^2} \end{array}$

1 On vérifie facilement que : $(\forall x \in \mathbb{R}^\star) : f\left(\dfrac{1}{x}\right) = f(x)$ (1)

2 On a : $2 \in \mathbb{R}^\star$ et $\dfrac{1}{2} \in \mathbb{R}^\star$, donc d'après (1), on a : $f(2) = f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et $2 \neq \dfrac{1}{2}$
D'où f n'est pas injective.

3 On peut montrer facilement que : $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) \leqslant \dfrac{1}{4}$
On a : $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) \leqslant \dfrac{1}{4}$ alors, $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) \neq 1$. Donc 1 n'a pas d'antécédent par f et par conséquent : f n'est pas surjective.

Exemple 2 Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ définie par : $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, montrons que f est injective, par contre f n'est pas surjective.
En effet, soient $(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2$ On a :
$f(x_1) = f(x_2) \to \dfrac{1}{1+x_1} = \dfrac{1}{1+x_2} \to 1 + x_1 = 1 + x_2 \to x_1 = x_2$
Donc f est injective.
On a : $(\forall x \in \mathbb{N}); f(x) < 1$, alors par exemple 2 n'a pas d'antécédent dans $\mathbb{N}$.
Conclusion, f n'est pas surjective , alors que f n'est pas bijective.

VI Application réciproque d'une bijection

Définition Dans le cas où $f : E \to F$ est une application bijective, pour tout $y \in F$, on note $f^{-1}(y)$ l'unique antécédent de y par f.
L'application réciproque ou inverse de f est l'application définie par :

$$f^{-1} : \begin{array}{ccc} F & \to & E \\ y & \to & f^{-1}(y) \end{array}$$

Et on a : $(\forall (x,y) \in ExF), (y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y))$.

Remarque

Attention à ne pas confondre image réciproque d'une partie par l'application f (celle-ci existe toujours) et application réciproque f^{-1} (qui n'existe que si f est bijective). Dans l'exemple du paragraphe III , f n'admet pas d'application réciproque sur $\mathbb{R}$, mais $\mathbb{R}$ a une image réciproque par f (il s'agit de $\mathbb{R}$).

VII Composée de deux applications

Définition Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont deux applications, alors on définit la composée de f suivie de g par : $g \circ f : \begin{array}{ccc} E & \to & G \\ x & \to & g[f(x)] \end{array}$

Remarque

la composition n'est pas commutative : $g \circ f \neq f \circ g$ en général.
Par définition, $f^{-1} \circ f = Id_E$ et $f \circ f^{-1} = Id_F$.

Exemple Soient $f : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to &]0,+\infty[\\ x & \to & \dfrac{1}{x} \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \dfrac{x-1}{x+1} \end{array}$

Alors, $gof :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ vérifie :

$$(\forall x \in]0,+\infty[) : gof(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x} + 1} = \frac{1-x}{x+1} = -g(x)$$

Propriété Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont des applications bijectives, alors gof est bijective et $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$