# Chapitre 6

# ANALYTIQUE DU PRODUIT SCALAIRE DANS LE PLAN

## Capacités attendues

- Exprimer le parallélisme et l'orthogonalité de deux droites;
- Utiliser le produit scalaire pour calculer des distances, des aires et des mesures d'angles;
- Reconnaitre l'ensemble des points $M$ du plan vérifiant : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$;
- Déterminer le centre et le rayon d'un cercle défini à l'aide d'une équation cartésienne;
- Passer d'une équation cartésienne à une représentation paramétrique et inversement;
- Utiliser l'analytique du produit scalaire pour résoudre des problèmes géométriques et algébriques.



Prof. Abdellah AIT-CHEIKH

# I Produit scalaire

## 1 Expression triangulaire du produit scalaire

**Définition** On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre réel noté $\vec{u}.\vec{v}$ et défini par :

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\vec{u};\vec{v}\right)$$

Le produit scalaire d'un vecteur $\vec{u}$ par lui-même ($\vec{u}.\vec{u}$) est appelé carré scalaire de $\vec{u}$ et se note $\vec{u}^2$.

**Application**

Soit un triangle équilatéral $OAB$ tel que $OA = 2$. Calculer $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$.

Solution

On a $\|\overrightarrow{OA}\| = 2$, $\|\overrightarrow{OB}\| = 2$ et $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right) = \pm\frac{\pi}{3}$. Ainsi $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 2\times 2\times\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) = 2\times 2\times\frac{1}{2} = 2$

## 2 Règles de calcul

**Propriété** Quels que soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ :

- $\vec{0}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{0} = 0$
- $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
- $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$
- $(\vec{v}+\vec{w}).\vec{u} = \vec{v}.\vec{u} + \vec{w}.\vec{u}$
- $\vec{u}.(k\vec{v}) = k\times(\vec{u}.\vec{v})$
- $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$
- $\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$
- $\left(\vec{u}+\vec{v}\right).\left(\vec{u}-\vec{v}\right) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

# II Vecteurs orthogonaux

**Définition** Soient $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ deux vecteurs dans le plan.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si :

$$\vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \text{ ou } (OA)\perp(OB)$$

**Propriété** Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

**Démonstration**

$$\begin{aligned}\vec{u}.\vec{v}=0 &\Leftrightarrow \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u};\vec{v})=0\\ &\Leftrightarrow \|\vec{u}\|=0 \text{ ou } \|\vec{v}\|=0 \text{ ou } \cos(\vec{u};\vec{v})=0\\ &\Leftrightarrow \vec{u}=\vec{0} \text{ ou } \vec{v}=\vec{0} \text{ ou } (\vec{u};\vec{v})=\frac{\pi}{2}+k\times 2\pi\\ &\Leftrightarrow \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux}\end{aligned}$$

# III Autres expressions du produit scalaire

## 1 Cas des vecteurs colinéaires

**Propriété**

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens alors $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraires alors $\vec{u}.\vec{v}=-\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$

**Démonstration**

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens alors $\left(\vec{u};\vec{v}\right)\equiv 0[2\pi]$

  Ainsi, $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(0)=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraires, alors $\left(\vec{u};\vec{v}\right)\equiv \pi[2\pi]$

  Ainsi, $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\pi)=-\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$

**Conséquences :**

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens alors $\vec{u}.\vec{v}>0$ et si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et sens contraires alors $\vec{u}.\vec{v}<0$
- Quel que soit le vecteur $\vec{u}$, $\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$

## 2 Avec des projetés orthogonaux

**Propriété** Soients $A$, $B$, $C$ et $D$ quatre points du plan.
Si $C'$ et $D'$ sont les projeté orthogonaux de $C$ et $D$ sur $(AB)$ alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$

**Démonstration**

On a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{C'D'}+\overrightarrow{D'D})=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{D'D}$.
Or $C'$ et $D'$ sont les projeté orthogonaux de $C$ et $D$ sur $(AB)$ alors $(CC')\perp(AB)$ et $(DD')\perp(AB)$.
Ainsi $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CC'}=0$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DD'}=0$. D'où $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$.

**Application**

$ABC$ est un triangle isocèle en $A$ tel que $AB = 3$ et $BC = 4$. $O$ est le milieu du segment $[BC]$.
Calculer $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BC}$.

**Solution**

Le projeté orthogonal de $A$ sur $(BC)$ est $O$ donc $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC} = BO \times BC = 2 \times 3 = 6$
Le projeté orthogonal de $A$ sur $(BC)$ est $O$ donc $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CO}.\overrightarrow{BC} = -CO \times BC = -2 \times 3 = -6$

## IV Expression analytique du produit scalaire

**Propriété**

Soit $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$ un repère orthonormal du plan.
Si $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ alors $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$.

**Démonstration**

On a $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ deux vecteurs dans le repère $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$.
Alors $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\vec{u}.\vec{v} &= \left(x\vec{i} + y\vec{j}\right).\left(x'\vec{i} + y'\vec{j}\right) \\
&= x\vec{i}.x'\vec{i} + x\vec{i}.y'\vec{j} + y\vec{j}.x'\vec{i} + y\vec{j}.y'\vec{j} \\
&= xx'\vec{i}.\vec{i} + xy'\vec{i}.\vec{j} + yx'\vec{j}.\vec{i} + yy'\vec{j}.\vec{j}
\end{aligned}$$

Et on a $\vec{i}.\vec{i} = 1$, $\vec{j}.\vec{j} = 1$ et $\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{i} = 0$ car $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$ est un repère orthonormé.
Donc $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$.

**Remarque**

$\vec{u}.\vec{i} = x \times 1 + y \times 0 = x$ et $\vec{u}.\vec{j} = x \times 0 + y \times 1 = x$

**Application**

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$, soient $\vec{u}(6;3)$, $\vec{v}(3;-1)$ et $\vec{w}(-2;2)$
Calculer $\vec{u}.\vec{v}$, $\vec{u}.\vec{w}$ et $\vec{v}.\vec{w}$.

**Solution**

$\vec{u}.\vec{v} = 6 \times 3 + 3 \times (-1) = 18 - 3 = 15$
$\vec{u}.\vec{w} = 6 \times (-2) + 3 \times 2 = -12 + 6 = -6$
$\vec{v}.\vec{w} = 3 \times (-2) + (-1) \times 2 = -6 - 2 = -8$

## V Droite dans le plan

### 1 Vecteur directeur et représentation paramétrique d'une droite

**Définition** On dit que $\vec{u}$ est un vecteur directeur d'une droite $(d)$ si pour tous points $A$, $B$ de $(d)$, $\vec{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$. C'est-à-dire $\det(\vec{u};\overrightarrow{AB}) = 0$.

**Remarque**

- Deux droites sont dites parallèles lorsque leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.
- Elles sont dites perpendiculaires lorsque leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.

**Propriété** Une droite $(d)$ est entièrement déterminée par la donnée

- d'un point $A \in (d)$
- d'un vecteur directeur $\vec{u}$.

Ceci donne une **représentation paramétrique** de $(d)$ : si $A(x_A;y_A)$ et $\vec{u}(\alpha;\beta)$, on a :

$$(d) : \begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \end{cases} \quad /t \in \mathbb{R}$$

**Démonstration**

Soient $A(x_A;y_A) \in (d)$ et $\vec{u}(\alpha;\beta)$ un vecteur directeur de $(d)$.
Alors pour tout point $M(x;y) \in (d)$, on a $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.
Ainsi $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$ tel que $t \in \mathbb{R}$
C'est-à-dire $\begin{cases} x - x_A = t\alpha \\ y - y_A = t\beta \end{cases} \quad /t \in \mathbb{R}$. D'où $\begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \end{cases} \quad /t \in \mathbb{R}$

### 2 Vecteur normal et équation cartésienne d'une droite

**Définition** Un vecteur non nul $\vec{n}$ est dit normal à une droite $(d)$ si la direction de $\vec{n}$ est orthogonale à celle de $(d)$.

**Propriété 1** Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Une droite de vecteur normal $\vec{n}(a;b)$ a une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $c \in \mathbb{R}$.
2. Étant donnés trois réels $a$, $b$ et $c$ où $a$ et $b$ ne sont pas nuls simultanément, l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient $ax + by + c = 0$ est une droite de vecteur normal $\vec{n}(a;b)$.

### Démonstration

1/ Soit $(d)$ une droite de vecteur normal $\vec{n}(a;b)$ et soit $A(x_0;y_0) \in (d)$.

Soit $M(x;y)$, on a $\overrightarrow{AM}(x-x_0;y-y_0)$

$M(x;y) \in (d) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0 \Leftrightarrow (x-x_0)a+(y-y_0)b = 0 \Leftrightarrow ax+by+c = 0$ avec $c = -ax_0 - by_0$.

2/ Soit $(d)$ l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $ax+by+c = 0$ et soit $A(x_A,y_A) \in (d)$.

$$\begin{aligned} M(x;y) \in (d) &\Leftrightarrow ax+by+c = 0 = ax_A+by_A+c \\ &\Leftrightarrow a(x-x_A)+b(y-y_A) = 0 \\ &\Leftrightarrow \vec{n}.\overrightarrow{AM} = 0 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{n} \Leftrightarrow M \text{ appartient à la droite passant par } A \text{ et de vecteur normal } \vec{n} \end{aligned}$$

**Application**

Dans un repère orthonormal, on considère les points $A(3;-1)$ et $B(2;4)$. Déterminer une équation de la médiatrice $(m)$ de $[AB]$.

### Solution

La médiatrice de $[AB]$ est la droite perpendiculaire à $(AB)$ passant par le milieu $I$ de $[AB]$.

On a $\overrightarrow{AB}(-1;5)$ donc une équation de $(m)$ est de la forme $-x+5y+c = 0$.

De plus, $I\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right) \in (m)$ donc $-\frac{5}{2}+5\times\frac{3}{2}+c = 0$ donc $c = -5$.

Une équation de $(m)$ est donc $-x+5y-5 = 0$.

**Propriété 2**

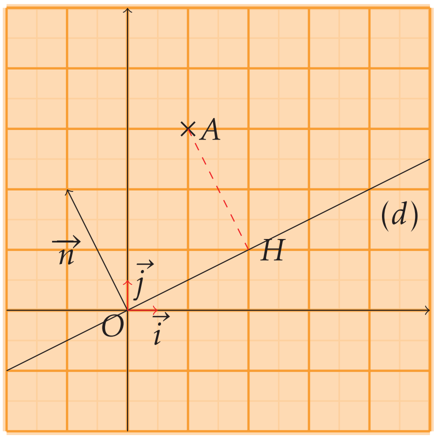
La distance du point $A$ à la droite $(d)$ est égale à $AH = \dfrac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ où $H$ est le projeté orthogonal de $A$ sur $(d)$.

### Démonstration

Soient $(d)$ une droite d'équation $ax+by+c = 0$, $\vec{n}(a;b)$ un vecteur normal à la droite $(d)$ et $A(x_A;y_A)$ un point du plan.

Soit $H(x_H;y_H)$ le projeté orthogonal du point $A$ sur la droite $(d)$.

(Voir la figure ci-contre)




$$\begin{aligned} \text{On a} \quad \overrightarrow{AH}.\vec{n} &= (x_H-x_A)a+(y_H-y_A)b \\ &= (ax_H+by_H)-(ax_A+by_A) \end{aligned}$$

Or $H \in (d)$ alors $ax_H+by_H+c = 0$.

Ainsi $ax_H+by_H = -c$.

Donc $\overrightarrow{AH}.\vec{n} = -(ax_A+by_A+c)$

D'où $|\overrightarrow{AH}.\vec{n}| = |ax_A+by_A+c|$

Et on a $|\overrightarrow{AH}.\vec{n}| = \|\overrightarrow{AH}\|.\|\vec{n}\|$ car $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires.

Soit $\|\overrightarrow{AH}\| = \dfrac{|\overrightarrow{AH}.\vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \dfrac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

# VI Cercle dans le plan

## 1 Équations de cercles

### a Forme générale

**Définition** Soit $\Omega$ un point dans le plan et soit $r$ un réel positif.
Le cercle $(\mathcal{C})$ de centre $\Omega$ et de rayon $r$ est l'ensemble des points $M$ du plan tel que $\Omega M = r$ et on le désigne par $\mathcal{C}(\Omega; r)$

**Propriété** Une équation du cercle $(\mathcal{C})$ de centre $A(x_A; y_A)$ et de rayon $r$ est : $(x-x_A)^2+(y-y_A)^2 = r^2$

**Démonstration**

$M(x;y) \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow AM = R \Leftrightarrow AM^2 = r^2 \Leftrightarrow (x-x_A)^2 + (y-y_A)^2 = R^2$.

**Application**

Quelle est la nature de l'ensemble $(\mathcal{C})$ des points $M(x;y)$ tels que $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$ ?

**Solution**

$$\begin{aligned} M(x;y) \in (\mathcal{C}) & \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + y^2 + 2y + 5 = 0 \\ & \Leftrightarrow (x-3)^2 - 9 + (y+1)^2 - 1 + 5 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+1)^2 = 5 \end{aligned}$$

$(\mathcal{C})$ est donc le cercle de centre $\Omega(3;-1)$ et de rayon $\sqrt{5}$.

### b Cercle de diamètre donné

**Propriété** On considère deux points $A$ et $B$ du plan. Le cercle $(\mathcal{C})$ de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points $M$ du plan tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$.
Cette égalité permet de trouver son équation : $(x-x_A)(x-x_B) + (y-y_A)(y-y_B) = 0$

**Démonstration**

$M \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow \quad M = A$ ou $M = B$ ou $AMB$ est un triangle rectangle en $M \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$.

**Application**

Déterminer une équation du cercle $(\mathcal{C})$ de diamètre $[AB]$ avec $A(2;2)$ et $B(6;-2)$.

**Solution**

Soit $M(x;y)$. On a $\overrightarrow{MA}(2-x; 2-y)$ et $\overrightarrow{MB}(6-x; -2-y)$.

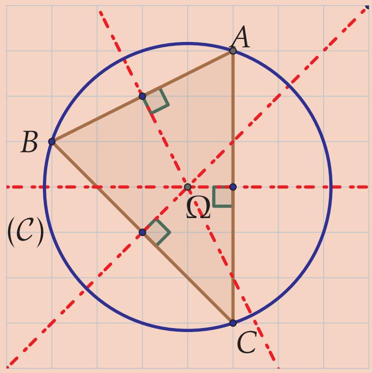
$$\begin{aligned} M(x;y) \in (\mathcal{C}) & \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0 \\ & \Leftrightarrow (2-x)(6-x) + (2-y)(-2-y) = 0 \quad \Leftrightarrow 12 - 8x + x^2 - 4 - 2y + 2y + y^2 = 0 \end{aligned}$$

Une équation de $(\mathcal{C})$ est donc $x^2 + y^2 - 8x + 8 = 0$.

## C Cercle défini par trois points non alignés

**Propriété**

Par trois points non alignés $A$, $B$ et $C$ passe un seul cercle $(\mathcal{C})$ de centre $\Omega$, le point d'intersection des médiatrices du triangle $ABC$, et de rayon $r = \Omega A$.
Ce cercle est appelé le cercle circonscrit au triangle $ABC$.




**Application**

Déterminer une équation du cercle circonscrit $(\mathcal{C})$ au triangle $ABC$ tels que :
$A(2;1)$, $B(4;-1)$ et $C(2;3)$.

**Solution**

Soient $I(3;0)$ et $J(2;2)$ respectivement les milieux des segments $[AB]$ et $[AC]$.
Soient $(\Delta)$ et $(\Delta')$ respectivement les médiatrices des segments $[AB]$ et $[AC]$.

- Une équation de $(\Delta)$ :

  Soit $M(x;y)$ un point dans le plan . On a : $M(x;y) \in (\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IM} = 0$
  $$\Leftrightarrow 2(x-3) - 2y = 0$$
  $$\Leftrightarrow x - y - 3 = 0$$

  Soit $(\Delta) : x - y - 3 = 0$.

- Une équation de $(\Delta)$ :

  Soit $M(x;y)$ un point dans le plan . On a : $M(x;y) \in (\Delta') \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{JM} = 0$
  $$\Leftrightarrow 0 \times (x-2) + 2(y-2) = 0$$
  $$\Leftrightarrow y - 2 = 0$$

  Soit $(\Delta') : y - 2 = 0$.

- Les coordonnées de $\Omega$ :

  Le centre $\Omega$ du cercle $(\mathcal{C})$ est l'intersection de $(\Delta)$ et $(\Delta')$.

  Ainsi le couple $(x;y)$ des coordonnées de $\Omega$ est solution du système :

  $$\begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$$ . Donc $\Omega(5:2)$.

- Le rayon $r$ :

  On a : $r = \Omega A = \sqrt{(5-2)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{10}$.

$M(x;y) \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow \Omega M = r \Leftrightarrow (x-5)^2 + (y-2)^2 = 10 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 10x - 4y + 19 = 0$
Donc une équation du cercle $(\mathcal{C})$ est : $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 19 = 0$.

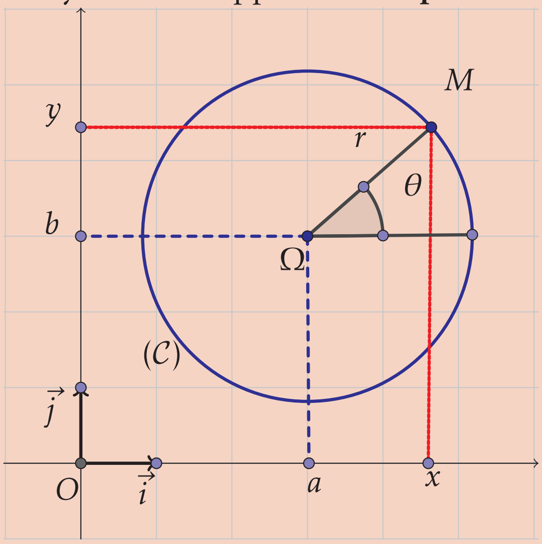
## 2 Représentation paramétrique d'un cercle

**Propriété**

Dans un plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé, on considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon $r$ .

Le cercle $\mathcal{C}$ est l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan qui vérifient le système : $\begin{cases} x = a + r\cos(\theta) \\ x = b + r\sin(\theta) \end{cases}$ / $(\theta \in \mathbb{R})$

Ce système est appelé **une représentation paramétrique** du cercle $\mathcal{C}$.



## VII Longueurs et angles dans un triangle

### 1 Théorème de la médiane

**Propriété** On considère deux points $A$ et $B$ du plan et $I$ le milieu de $[AB]$. Pour tout point $M$ du plan, on a :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$

**Démonstration**

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 \\ &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 \\ &= \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}^2 \\ &= 2MI^2 + 2\overrightarrow{MI}.(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + IA^2 + IB^2 \end{aligned}$$

Or $I$ est le milieu de $[AB]$ donc $IA = IB = \frac{1}{2}AB$ donc $IA^2 = IB^2 = \frac{1}{4}AB^2$

De plus $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$.

Ainsi $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 2 \times \frac{1}{4}AB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$.

**Application**

$ABC$ est un triangle tel que $AB = 6$, $AC = 8$ et $BC = 12$. Calculer $AI$ où $I$ est le milieu de $[BC]$.

**Solution**

D'après le théorème de la médiane : $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$.

On a donc $2AI^2 = 6^2 + 8^2 - \frac{1}{2} \times 12^2 = 28$. Ainsi $AI = \sqrt{14}$.

### 2 Formules d'Al Kashi

**Propriété** On considère un triangle $ABC$. On pose $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $\widehat{A} = \widehat{BAC}$, $\widehat{B} = \widehat{ABC}$ et $\widehat{C} = \widehat{ACB}$. On a :

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{A}) \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos(\widehat{B}) \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos(\widehat{C}) \end{aligned}$$

**Démonstration**

$BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = \overrightarrow{BA}^2 + 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2 = BA^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

Ainsi $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$ soit $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{A})$

**Application**

$ABC$ est un triangle tel que $AC = 9$, $AB = 5$ et $\widehat{A} = \frac{\pi}{3}$. Calculer $BC$.

**Solution**

D'après la formule d'Al Kashi :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\widehat{A}) = 5^2 + 9^2 - 2 \times 5 \times 9 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 61$. Ainsi $BC = \sqrt{61}$

## 3 Formule des sinus et cosinus

**Propriété**

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère deux vecteurs $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ et soit $(\widehat{\vec{u}; \vec{v}}) = \alpha$. On a :

- $\cos(\alpha) = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|} = \dfrac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2} \times \sqrt{x'^2 + y'^2}}$.
- $\sin(\alpha) = \dfrac{\det(\vec{u}; \vec{v})}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|} = \dfrac{xy' - x'y}{\sqrt{x^2 + y^2} \times \sqrt{x'^2 + y'^2}}$.

**Démonstration**

- D'après l'expression trigonométrique du produit scalaire on a :

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|} = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2} \times \sqrt{x'^2 + y'^2}}.$$

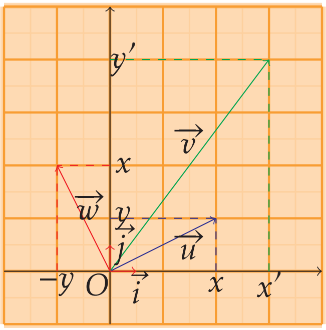
- On a $(\widehat{\vec{u}; \vec{v}}) = \alpha$.

Soit $\vec{w}$ un vecteur tels que $(\widehat{\vec{u}; \vec{w}}) = \frac{\pi}{2}$ et $|\vec{w}| = |\vec{u}|$
(voir la figure ci-contre)
On a donc $\vec{w}(-y; x)$ et $(\widehat{\vec{v}; \vec{w}}) = \frac{\pi}{2} - \alpha$ . Ainsi

$$\cos(\widehat{\vec{v}; \vec{w}}) = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{\vec{v}.\vec{w}}{\|\vec{v}\|.\|\vec{w}\|} = \frac{xy' - yx'}{\sqrt{x^2 + y^2} \times \sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

Sachons que $\det(\widehat{\vec{u}; \vec{v}}) = xy' - yx'$ et $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin(\alpha)$

Donc $\sin(\alpha) = \dfrac{\det(\vec{u}; \vec{v})}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|} = \dfrac{xy' - x'y}{\sqrt{x^2 + y^2} \times \sqrt{x'^2 + y'^2}}$.




## 4 Aire d'un triangle

**Propriété 1**

On considère un triangle $ABC$ et on appelle $S$ son aire. On a :

$$S = \frac{1}{2} bc \sin(\widehat{A}) = \frac{1}{2} ac \sin(\widehat{B}) = \frac{1}{2} ab \sin(\widehat{C})$$

**Démonstration**

Soit $H$ le projeté orthogonal de $C$ sur $AB$. On a alors $S = \frac{1}{2}AB \times CH$.
Si l'angle $\widehat{A}$ est aigu alors $CH = AC\sin(\widehat{A})$.
Si l'angle $\widehat{A}$ est obtus alors $CH = AC\sin(\pi - \widehat{A}) = AC\sin(\widehat{A})$
Dans tous les cas $S = \frac{1}{2}AB \times AC \times \sin(\widehat{A})$.

**Propriété 2** On considère un triangle $ABC$ et on appelle $S$ son aire. On a :

$$S = \frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC})| = \frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BC})| = \frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CB})|$$

**Démonstration**

Soit $ABC$ un triangle tel que $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$
On a d'après la propriété 1 : $S = \frac{1}{2}bc\sin(\widehat{A}) = \frac{1}{2}ac\sin(\widehat{B}) = \frac{1}{2}ab\sin(\widehat{C})$
Or $\sin(\widehat{A}) = |\sin(\widehat{\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}})| = \dfrac{|\det(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC})|}{cb}$
Alors $S = \frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC})|$
De même pour les autres formules.

## VIII Exercices d'approfondissement

**01** Soit $ABCD$ un carré de centre $O$ et de coté $a$, $I$ et $J$ sont les points du plan tels que : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ . On désigne par $K$ le point d'intersection des droites $(ID)$ et $(JC)$. Soit $H$ le projeté orthogonal du point $A$ sur $(DI)$.

**1** Faire une figure.

**2** **a.** Montrer que $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{JC} = -\frac{a^2}{3}$ et que $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{JC} = \frac{a^2}{3}$

**b.** En déduire que les droites $(ID)$ et $(JC)$ sont perpendiculaires.

**3** **a.** Montrer que $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DI} = \frac{a^2}{3}$

**b.** En déduire que $DK = \frac{a}{\sqrt{10}}$

**4** **a.** Montrer que $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{ID} = \frac{7a^2}{9}$ et que $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IB} = -\frac{2a^2}{9}$

**b.** En déduire que : $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IO} = \frac{5a^2}{18}$

**5** En utilisant un produit scalaire, montrer que : $IH \times ID = IA^2$. En déduire la distance $IH$.

**02** Soit $ABCD$ un carré de coté 1 et $I$, $J$, et $K$ sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[AD]$ et $[IA]$. $H$ est le projeté orthogonal de $A$ sur $(DI)$. On considère dans le plan le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

**1** **a.** Déterminer les coordonnés du vecteur $\overrightarrow{ID}$.

**b.** En déduire une équation cartésienne de chacune des droites $(ID)$ et $(AH)$.

**c.** Déterminer alors les coordonnées $(x;y)$ du point $H$.

**2** Montrer que les droites $(JH)$ et $(HK)$ sont perpendiculaires.

**3** En utilisant un produit scalaire convenable, écrire l'équation réduite du cercle $C$ de diamètre $[JK]$.

**4** Soit la droite $(\Delta) : x + 2y = 0$. Montrer que $(\Delta)$ est tangente au cercle $C$ en $A$.

**03** $(O,\vec{i},\vec{j})$ étant un repère orthonormé du plan. On donne les points $A(1;-2)$, $B(2;0)$ et $C(0;1)$.

**1** Placer les points $A$ , $B$ et $C$.

**2** **a.** Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ , $AB$ et $BC$.

**b.** En déduire la nature du triangle $ABC$.

**3** Soit $C$ l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan vérifiant : $x^2+y^2-x+y-2=0$.

**a.** Montrer que $C$ est un cercle dont on précisera le centre $I$ et le rayon $R$

**b.** Tracer le cercle $C$ et vérifier qu'il est circonscrit au triangle $ABC$.

**4** En utilisant un produit scalaire convenable, déterminer une équation cartésienne de la droite $(T)$ tangente au cercle $C$ au point $A$.

**04** Dans un plan $P$, on considère un rectangle $ABCD$ de centre $O$ tel que : $AB=8$ et $AD=4$. On désigne par $I$, $J$ et $K$ les milieux respectifs de $[AB]$, $[DC]$ et $[OI]$.

**1** Calculer $\overrightarrow{KA}.\overrightarrow{KB}$

**2** **a.** Montrer que pour tout points $M$ du plan $P$, on a :

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}=2MO^2-24$$

**b.** En déduire $\overrightarrow{KC}.\overrightarrow{KD}$ .

**3** Déterminer l'ensemble $C$ des points $M$ du plan $P$ tels que :

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}=-22$$

**05** Dans un plan $P$, on considère un triangle $ABC$ tel que : $AB=a$ , $AC=2a$ et $(B\hat{A}C)=\dfrac{2\pi}{3}$ ; $(a>0)$.

**1** Montrer que $BC=a\sqrt{7}$

**2** Soit $H$ le projeté orthogonal de $C$ sur $(AB)$.

**a.** En utilisant un produit scalaire, montrer que $AH=a$

**b.** Montrer que $H$ est le barycentre des points pondérés $(A;2)$ et $(B;-1)$.

**3** Déterminer l'ensemble $(E')$ des points $M$ du plan tels que : $(2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}).\overrightarrow{AB}=0$

**4** Déterminer l'ensemble $(E)$ des points $M$ du plan tels que : $\dfrac{MB}{MA}=\sqrt{2}$

**06** Soit dans un plan $P$ un triangle équilatéral $ABC$ de coté $a$ ($a > 0$). On désigne par $I$ le milieu du segment $[AB]$.

**1** **a.** Exprimer $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ en fonction de $a$.

**b.** Montrer que pour tout point $M$ de la médiatrice de $[AB]$, on a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}a^2$

**2** Soit $G$ le barycentre des points pondérés $(A;3)$ et $(B;-2)$.

**a.** Montrer que $\overrightarrow{GA} = 2.\overrightarrow{AB}$

**b.** En déduire $GA$ en fonction de $a$.

**3** **a.** Montrer que pour tout point $M$ du plan, on a : $3MA^2 - 2MB^2 = MG^2 - 6a^2$

**b.** En déduire l'ensemble : $C = \left\{M \in P/\ 3MA^2 - 2MB^2 = 3a^2\right\}$

**07** Dans un plan $P$ rapporté à un repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$, On considère les points $A(-2;1)$, $B(-1;2)$ et $C(1;4)$. Soit $K$ milieu de $[BC]$.
Soit $\Gamma$ l'ensemble des points $M$ défini par : $\Gamma = \left\{M \in P/\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{MC}\right\}$

**1** **a.** Montrer que $M(x;y) \in \Gamma \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 4y + 3 = 0$

**b.** En déduire que $\Gamma$ est un cercle dont on précisera les caractéristiques.

**c.** Vérifier que $\Gamma$ passe par $A$. Tracer $\Gamma$.

**2** Soit la droite $(T) : x + y - 3 = 0$. Montrer que $(T)$ est tangente à $\Gamma$ en $K$.

**3** Soit $H(x;y)$ le projeté orthogonal de $O$ sur la droite $(T)$.

En tenant compte que $\overrightarrow{OH}$ est un vecteur normal à $T$ et que $H$ appartient à $T$, déterminer les coordonnées de $H$.

**08** Dans le plan orienté de sens direct, on considère un rectangle $ABCD$ tel que :
$BC = 4$, $AB = 2BC$ et $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. On désigne par $J$ le point du segment $[CD]$ tel que $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CD}$.

**1** **a.** Calculer $AC$ puis $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

**b.** En déduire que $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

**2** **a.** Calculer $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CJ}.\overrightarrow{CA}$

**b.** En déduire que les droites $(AC)$ et $(BJ)$ sont perpendiculaires.

**3** Soit $G$ le barycentre des points pondérés $(A;2)$ et $(B;3)$

**a.** Construire le point $G$

**b.** Pour tout $M$ du plan, on pose $\overrightarrow{U} = 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}$.
Exprimer $\overrightarrow{U}$ à l'aide de $\overrightarrow{MG}$

**c.** Déterminer et construire l'ensemble $\Delta = \left\{M \in P / \ \overrightarrow{U}.\overrightarrow{AB} = 0\right\}$

**09**