Chapitre I

Continuité et limites

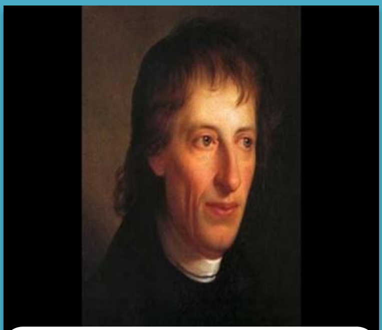
<u>Hstorique</u>

C’est l’élaboration d’une démonstration précise du théorème des valeurs intermédiaires, qui amena Bolzano (1817) à définir la notion de continuité d’une fonction.

Le théorème des valeurs intermédiaires, qui semble géométriquement évident, a été utilisé sans scrupules par Euler et Gauss.

Bolzano, cependant estime qu’une démonstration précise est nécessaire pour atteindre une plus grande rigueur en Analyse

(E.Hair et al,L’analyse au fil de l’histoire,2000).



Bolzano Bernard

(1781-1848)

Karl Weierstrass

(1815-1897)

Leonhard Euler

(1707-1783)

Friedrich gauss (1777-1855)

I. Limite d'une fonction en un point

1. Rappel

Définition

Soit *f une* fonction définie sur un intervalle I de ℝ, $a \in I$ et l un réel donné. On dit que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers a lorsque : « $f(x)$ devient aussi proche de l que l'on veut lorsque x est suffisamment proche de a ». On écrit alors $\lim_{x \to a} f(x) = l$

Autrement dit : $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f)\left(0 < |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon\right)$

Exemple : soit f la fonction définie par

$f(x) = 2x^2 + 3x + 1$

Démontrer par définition que $\lim_{x \to 1} f(x) = 6$

$\lim_{x \to 1} f(x) = 6$

$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in \mathbb{R})$

$\left(0 < |x - 1| < \alpha \Rightarrow |f(x) - 6| < \varepsilon\right)$

Soit $\varepsilon > 0$ on a

$f(x) - 6 = 2x^2 + 2x - 5 = (x-1)(2x+5)$ alors

$|f(x) - 6| = |(x-1)(2x+5)|$ soit

$I = \left]1 - \frac{1}{2}; 1 + \frac{1}{2}\right[= \left]\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right[$ un intervalle de centre 1

$$x \in I \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \\ |x - 1| < \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x - 1| < \frac{1}{2} \\ 6 < 2x + 5 < 8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |x - 1| < \frac{1}{2} \\ 6 < 2x + 5 < 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x - 1| < \frac{1}{2} \\ |2x + 5| < 8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |x - 1| < \frac{1}{2} \\ |2x + 5| < 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x - 1| < \frac{1}{2} \\ |x - 1||2x + 5| < 8|x - 1| \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |x - 1| < \frac{1}{2} \\ |x - 1||2x + 5| < 8|x - 1| \end{cases}$$

Pour que $|f(x) - 6| < \varepsilon$ il suffit que $\Rightarrow \begin{cases} |x - 1| < \frac{1}{2} \\ 8|x - 1| < \varepsilon \end{cases}$

$\Rightarrow |x - 1| < \frac{\varepsilon}{8}$ Alors on pose $\alpha = \inf\left(\frac{1}{2}; \frac{\varepsilon}{8}\right)$

Par suite $(\forall \varepsilon > 0)\left(\exists \alpha = \inf\left(\frac{1}{2}; \frac{\varepsilon}{8}\right) > 0\right)(\forall x \in \mathbb{R})$
$\left(0 < |x - 1| < \alpha \Rightarrow |f(x) - 6| < \varepsilon\right)$

2. L'unicité de la limite

Proprieté

Si une fonction f admet une limite $l \in \mathbb{R}$ en un point a, cette limite est unique

Démonstration : supposons qu'il existe deux limites l_1 et l_2 tel que $l_1 \neq l_2$ on a

$\lim_{x \to a} f(x) = l_1 \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha_1 > 0)(\forall x \in \mathbb{R})\left(0 < |x - a| < \alpha_1 \Rightarrow |f(x) - l_1| < \varepsilon\right)$

Et $\lim_{x \to a} f(x) = l_2 \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha_2 > 0)(\forall x \in \mathbb{R})\left(0 < |x - a| < \alpha_2 \Rightarrow |f(x) - l_2| < \varepsilon\right)$

On prend $\varepsilon = \frac{|l_2 - l_1|}{2} > 0$. $|l_1 - l_2| = |l_1 - f(x) + f(x) - l_2|$

$$\leq |l_1 - f(x)| + |f(x) - l_1|$$

$$< \varepsilon + \varepsilon = \frac{|l_2 - l_1|}{2} + \frac{|l_2 - l_1|}{2} = |l_1 - l_2|$$

Donc $|l_1 - l_2| < |l_1 - l_2|$ qui est absurde donc $l_1 = l_2$

3. Limites des fonctions usuelles

Propriété Soit P et Q deux polynômes et a un nombre réel. On a

1) $\lim\limits_{x \to a} P(x) = P(a)$ 2) si $Q(a) \neq 0$ alors $\lim\limits_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$

3) $\lim\limits_{x \to a} \sin x = \sin a$ 4) si $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ alors $\lim\limits_{x \to a} \tan x = \tan a$

5) $\lim\limits_{x \to a} \cos x = \cos a$ 6) si $a > 0$ alors $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$

7) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 8) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ 9) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

4. Operations sur les limites

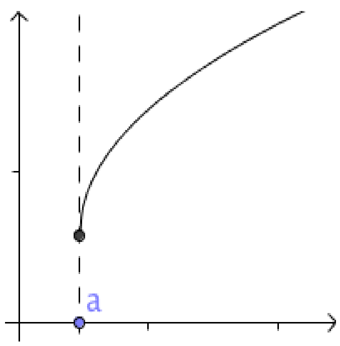
Propriété : soient f et g deux fonctions et a un nombre réel tel que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l'$. On a

1) $\lim\limits_{x \to a} (f.g)(x) = l\,l'$ 2) $\lim\limits_{x \to a} (f+g)(x) = l + l'$; 3) si $l' \neq 0$ alors $\lim\limits_{x \to a} \left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{l'}$ et $\lim\limits_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{l}{l'}$

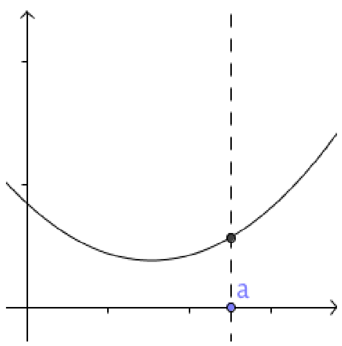
II. Continuité d'une fonction numérique

1. La continuité en un point

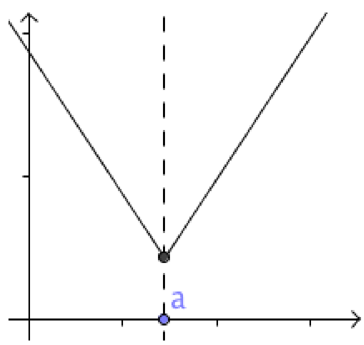
<u>**Exemples et contre-exemples :**</u>



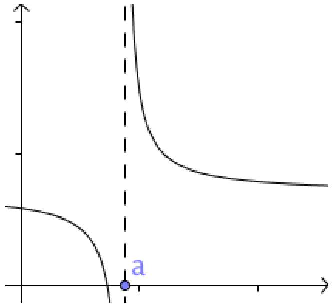
***f* est continue en a**



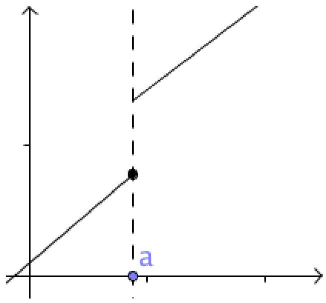
***f* est continue en a**



***f* est continue en a**



f **n'est pas continue en a**



f **n'est pas continue en a**

La courbe représentative d'une fonction continue se trace sans lever le crayon c –à-d il n y a pas de saut.

Comment définir « proprement « une telle propriété ?

Définition Soit une fonction f définie sur un intervalle I contenant un réel a.

- f est <u>continue en a</u> si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Remarque :

- f est continue en a si $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f)\left(0 < |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon\right)$

- si f est définie en un point a et f n'admet pas une limite en ce point ou la limite est infinie alors on dit que la fonction f est discontinue en a.

Exemples :

1.Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x - 1} & si \;\; x \neq 1 \\ f(1) = -3 \end{cases}$$

Montrons que f est continue en 1.

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x - 4)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} x - 4 = -3$$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) = -3$ donc f est continue en 1

2.Soit g la fonction définie par **:**

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{\sin(x - 2)}{x^2 - 2x} & si \;\; x \neq 0 \;\; et \;\; x \neq 2 \\ g(2) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Etudions la continuité de g en 2

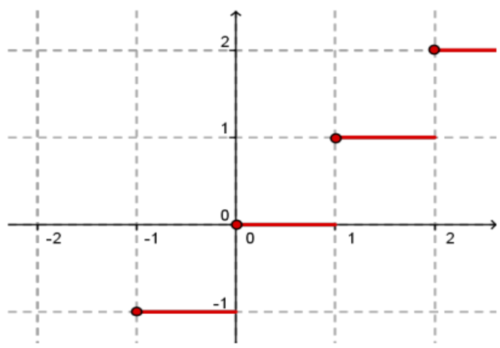
On **a** $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sin(x - 2)}{x^2 - 2x}$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{1}{x}\left(\frac{\sin(x - 2)}{x - 2}\right) = \frac{1}{2} = g(2)$$

donc la fonction g est continue en 2

3. Soit h la fonction numérique définie sur l'intervalle $[-1; 2]$ par $h(x) = E(x)$

On représente la fonction h



On a $(\forall x \in [-1; 0[)\; h(x) = -1$

$(\forall x \in [0; 1[)\; h(x) = 0$

$(\forall x \in [1; 2[)\; h(x) = 1$ $\quad h(2) = E(2) = 2$

On remarque que la courbe (C_h) est discontinue au point 0 et 1 et 2 et par suite la fonction h est discontinue au point 0,1 et 2

Exercice :

1. Soit f la fonction définie par $\begin{cases} f(x)=\dfrac{-2x^2-x+1}{x+1} & si\ \ x\neq -1 \\ f(-1)=1 \end{cases}$

La fonction f est-elle continue en -1 ?

2. Soit g la fonction définie par $\begin{cases} g(x)=\dfrac{x+\tan 2x}{\sin 3x} & ;\ x\neq 0 \\ g(0)=1 \end{cases}$

La fonction g est-elle continue en 0 ?

2. La continuité à gauche et la continuité à droite

Définition

1) Soit f la fonction définie sur un intervalle de la forme $]a-\alpha;a]$ $(\alpha>0)$

On dit la fonction f est continue à gauche en a ssi $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=f(a)$

2) Soit f la fonction définie sur un intervalle de la forme $[a;a+\alpha[$ $(\alpha>0)$

On dit la fonction f est continue à droite en a ssi $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$

Exemples :

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x)=3-x^2 & ;\ x\leq 0 \\ f(x)=\dfrac{x^2-3}{2x-1} & ;\ x>0 \end{cases}$

Etudier la continuité de f à droite et à gauche de 0

On a $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2-3}{2x-1}=3=f(0)$ donc f est continue à droite de 0

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} 3-x^2=3=f(0)$ donc f est continue à gauche de 0

Propriété : f est continue en a ssi f est continue à gauche et à droite en a

Exemple Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sin 2x}{x} & si\ \ x<1 \\ f(x)=x^2-1 & si\ \ x\in[0,2[\\ f(x)=\sqrt{x+7} & si\ \ x\geq 2 \end{cases}$$

Etudions la continuité de f en 0 et 2

- <u>Etude de la continuité en 0</u>

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin 2x}{x}=2\neq f(0)\quad (f(0)=-1)$

- d'où f n'est pas continue à gauche en 0 et donc f n'est pas continue en 0.

- <u>Etude de la continuité en 2</u>

- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2-1)=3=2=f(2)\ \Rightarrow$ donc f est continue à gauche en 2

- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{x+7}=3=2=f(2)\ \Rightarrow$ donc f est continue à droite en 2

Conclusion : f est continue à droite et à gauche en 2 donc f est continue en 2

Exercice : soit g la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + 2x & ; x \leq 1 \\ f(x) = a\dfrac{\sin(x-1)}{x-1} & ; x > 1 \end{cases}$$

Déterminer la valeur de a pour que g soit continue en 1.

Réponse : g est continue en 1

$\Leftrightarrow \lim_{x \to 1^+} g(x) = \lim_{x \to 1^-} g(x)$

On a $\lim_{x \to 1^-} g(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 + 2x = 3 = g(1)$ alors

$\lim_{x \to 1^+} g(x) = g(1) = 3 \Leftrightarrow \lim_{x \to 1^+} \dfrac{a\sin(x-1)}{x-1} = 3$ on pose

$t = x - 1$ donc $\lim_{x \to 1^+} \dfrac{a\sin(x-1)}{x-1} = 3 \Leftrightarrow \lim_{x \to 0} \dfrac{a\sin t}{t} = 3$

alors $a = 3$

3. Prolongement par continuité

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert, sauf en un réel a de I.

Si f admet une limite finie l en a alors la fonction g définie sur I par $g(x) = \begin{cases} f(x) & ; x \neq a \\ l & ; \quad x = a \end{cases}$

Est continue en a. on dit f est prolongeable par continuité en a et que g est son prolongement par continuité

Exemples : soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

On a $1 \notin D_f$ et on a

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} x^2 + x + 1 = 3$$

donc f admet un prolongement par continuité en 1 définie

par : $g(x) = \begin{cases} f(x) & ; x \neq 1 \\ 3 & ; \quad x = 1 \end{cases}$

Exercice : donner le prolongement par continuité de f en $\boldsymbol{a}$ dans les cas suivants

1. $f(x) = \dfrac{x^3 - c^3}{x - c}$ $\quad avec\ c \in \mathbb{R}\ ;\ a = c$
2. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ $\quad ; a = 0$
3. $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x}$ $; a = 0$

4. La continuité d'une fonction sur un intervalle

Définition :

- f est continue sur I si f est continue en tout point de I
- f est continue sur $]a;b[$ si f est continue en tout point de $]a;b[$
- f *est continue sur* $[a;b]$ si f est continue en tout point de $]a;b[$ et continue à droite en a et à gauche en b
- f *est continue sur* $[a;b[$ si f est continue en tout point de $]a;b[$ et continue à droite en a .

Exemples :

- Les fonctions $x \mapsto |x|$, $x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N})$ et plus généralement les fonctions polynômes sont continués sur $\mathbb{R}$.

Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0;+\infty[$.
- La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.

Remarque :

Les flèches obliques d'un tableau de variation traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.

Exemple :

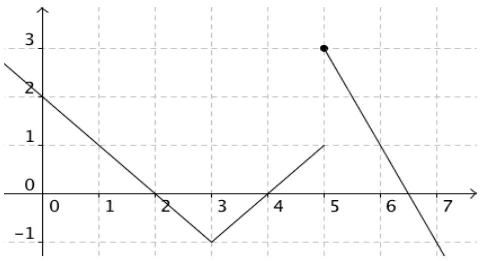
On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(x) = -x+2 & pour\ x<3 \\ f(x) = x-4 & pour\ 3 \le x < 5 \\ f(x) = -2x+13 & pour\ x \ge 5 \end{cases}.$$

La fonction *f* est-elle continue sur $\mathbb{R}$?Les fonctions $x \mapsto -x+2$, $x \mapsto x-4$ et $x \mapsto -2x+13$ sont des fonctions polynômes donc continues sur $\mathbb{R}$.

Ainsi la fonction *f* est continue sur $]-\infty;3[$, sur $[3;5[$ et sur $[5;+\infty[$

.



Etudions alors la continuité de *f* en 3 et en 5 :

- $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x<3}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x<3}} (-x+2) = -3+2 = -1$

$\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x>3}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x>3}} (x-4) = 3-4 = -1$

$\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x<3}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x>3}} f(x) = f(3)$ donc la fonction *f* est continue en 3.

- $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ x<5}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ x<5}} (x-4) = 5-4 = 1$

$\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ x>5}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ x>5}} (-2x+13) = -2\times5+13 = 3$

La limite de *f* en 5 n'existe pas. On parle de limite à gauche de 5 et de limite à droite de 5.

La fonction *f* n'est donc pas continue en 5.

La fonction *f* est continue sur $]-\infty;5[$ et sur $[5;+\infty[$.

5. Les opérations sur les fonctions continues

Propriété

Soient *f* et g deux fonctions continues définies sur un intervalle I, soit un réel $a \in I$ si les fonctions *f* et g sont continués en *a*, alors

1. La fonction λf est continue en *a* avec $\lambda \in \mathbb{R}$
2. La fonction $f+g$ est continue en *a*
3. La fonction $f.g$ est continue en *a*
4. La fonction $\frac{f}{g}$ est continue en *a si* $g(a) \neq 0$
5. La fonction $|f|$ est continue en *a*
6. - Si $f(a) > 0$ alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue en *a*

- Si $f(a) = 0$ et si f définie au voisinage de a alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue en *a*

Exemples :

1) Soit f la fonction définie par

$$f(x)=\frac{x^2-2x+3}{2|x+1|-5}$$

On a $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{7}{2};\frac{3}{2}\right\}$ soit $f_1(x)=x^2-2x+3$ et

$f_2(x)=2|x+1|-5$

f_1 est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme en particulier est continue sur D_f

f_2 est continue sur $\mathbb{R}$ (car c'est la somme de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$) en particulier est continue sur D_f et tel que $(\forall x\in D_f)\, f_2(x)\neq 0$ alors la fonction $f=\frac{f_1}{f_2}$ est continue sur D_f .

2) Soit g la fonction définie par

$$g(x)=\sqrt{x^2+1}\sin x$$

On montre que g est continue sur $\mathbb{R}$

- Comme la fonction $x\mapsto x^2+1$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$ alors la fonction $x\mapsto\sqrt{x^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$
- La fonction $x\mapsto\sin x$ est continue sur $\mathbb{R}$

Et par suite la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$

Application

1) Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{\sqrt{x-2}}{4-x}$

Démontrer que la fonction f est continue sur $[2;4[$

2) Etudier la continuité de la fonction $x\mapsto xE(x)$ sur l'intervalle $[0;2]$

6. Composée de deux fonctions

A. Continuité de la composée de deux fonctions

Propriété

Soit *f* une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant un réel *a* et g une fonction définie sur un intervalle ouvert J contenant $f(a)$.

Si *f* est continue en *a* et g continue en $f(a)$ alors la fonction go*f* est continue en *a*.

Démonstration :

Soit $\varepsilon>0$, montrons qu'il existe $\alpha>0$ tel que pour tout $x\in I$

$|x-a|<\alpha\Rightarrow|gof(x)-gof(a)|<\varepsilon$

g est continue en f(a) donc il existe $\beta>0$ tel que pour tout $y\in J$

$|y-f(a)|<\beta\Rightarrow|g(y)-g(f(a))|<\varepsilon$ (*)

f est continue en *a* donc il existe $\alpha>0$ tel que pour tout $x\in I$

$|x-a|<\alpha\Rightarrow|f(x)-f(a)|<\beta$ (**)

soit $x\in I$ tel que $|x-a|<\alpha$ alors d'après (**) $|f(x)-f(a)|<\beta$ Et d'après (*) $|g(y)-g(f(a))|<\varepsilon$

(en prenant y = *f* (x))

ou encore $|g(f(x))-g(f(a))|<\varepsilon$.   CQFD

Conséquence :

Soient f et g sont deux fonctions.

$$\begin{cases} f \text{ continue sur un intervalle } I \\ g \text{ continue sur un intervalle } J \\ f(I) \subset J \end{cases} \Rightarrow gof \text{ continue sur } I$$

Remarque : si $J = \mathbb{R}$ alors la troisième condition devient inutile

Exemples :

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = \cos(2x^2 - 3x + 4)$ on montre que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$

Comme les fonctions

$$f_1 : x \mapsto 2x^2 - 3x + 4 \quad et \quad f_2 : x \mapsto \cos x$$

sont continue sur $\mathbb{R}$

Et $(f_1(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R})$ alors la fonction $f = f_2 o f_1$ est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \sin(x^2 - 3x).$$

Montrer que h est continue sur $\mathbb{R}$.

Posons $f(x) = x^2 - 3x$. On a :

$h(x) = \sin(f(x)) = (\sin of)(x)$ donc $h = \sin of$

La fonction f est une fonction polynôme donc elle est continue sur $\mathbb{R}$.

La fonction sinus est continue sur $\mathbb{R}$.

La composée de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Donc h est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice :

Soit F la fonction définie sur $]0;2[$ par : $F(x) = \tan\left(\frac{(x-1)\pi}{2}\right)$

Montre que f est continue sur $]0;2[$

Solution :

Posons $f(x) = \frac{(x-1)\pi}{2}$ et $g(x) = \tan x$

On a : pour tout $x \in I =]0;2[$

$$F(x) = \tan(f(x)) = g(f(x))$$
$$= (gof)(x) \Rightarrow F = gof$$

- f est continue $]0;2[$ (restriction d'une fonction polynôme)
- g est continue sur $J = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$
- $x \in I =]0;2[\Leftrightarrow 0 < x < 2 \Leftrightarrow -1 < x - 1 < 1$
  $\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < f(x) < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow f(x) \in J$

Donc $f(I) \subset J$

Les trois conditions sont réalisées donc $F = gof$ est continue sur $]0;2[$

B. Composée d'une fonction continue et d'une fonction admet une limite

Proprieté

Soit f une fonction définie sur un ensemble $I =]a-r;a+r[\; (r>0)$ et g une fonction définie sur un intervalle ouvert J de centre l *tel que* $f(I) \subset J$

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ et g continue en l alors $\lim\limits_{x \to a} (gof)(x) = g(l)$

Démonstration **:**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I tel que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ et $a \notin I$ donc f admet un prolongement par continuité f_1 en a $(f_1(a) = l)$

Comme g est continue en l alors la fonction gof_1 est continue en a donc $\lim\limits_{x \to a} (gof_1)(x) = g(f_1(a))$ c -à -d $\lim\limits_{x \to a} (gof)(x) = g(l)$

Remarque : la propriété précédente reste valable à gauche et a droite en a et en $+\infty$ *et* $-\infty$ avec remplacement de l'intervalle I par un intervalle convenable

Exemple :

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \cos\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}\right)$$

On calcul $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

On a la fonction $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = \lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x+1}+1 = 2$

et on a la fonction $x \longmapsto \cos x$ est continue en 2

alors $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \cos(2)$

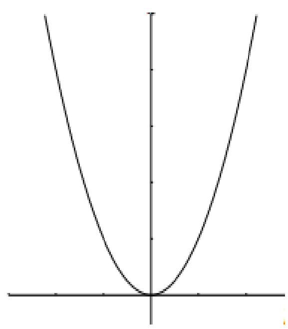
Application : calculer les limites suivantes ***:***

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - 2\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^3$; 2. $\lim\limits_{x \to 0} \tan\left(\frac{\pi \sin x}{3x}\right)$; 3. $\lim\limits_{x \to -\infty} \tan\left(\frac{\pi x + 1}{x+2}\right)$

C. Image d'un intervalle et d'un segment par une fonction continue

❖ Image d'un intervalle et d'un segment par une fonction continue

Exemple : on considère la fonction f définie par : $f(x) = x^2$

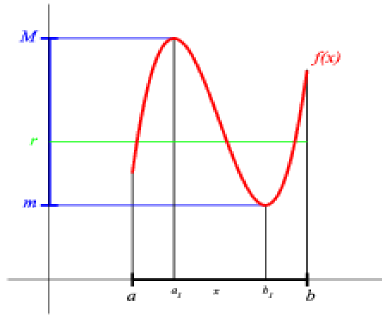


On a $f([-1;1]) = ([-1;1])$; $f([0;1]) = ([0;1])$

$f(]-1;1[) = ([0;1[)$; $f([-1,1[) = ([0;1])$; $f(\mathbb{R}) = ([0;+\infty[)$

Propriété Si une fonction numérique *f* est continue sur un intervalle I, alors son image par *f* est , aussi ,un intervalle .

1) Si une fonction f est continue sur un segment $[a;b]$,alors son image par f est le segment $[m;M]$ ou m et M sont, respectivement, les valeurs minimale et maximale de f sur le segment $[a;b]$.



Autrement dit

- **L**'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle
- **L**'image d'un segment par une fonction continue est un segment

Remarques :

- si *f* est une fonction continue sur un intervalle I, alors I et *f* (I) sont des intervalles, mais ils ne sont pas ,nécessairement, de même type .
- « *f* est une fonction continue sur le segment $[a;b]$ » est une condition suffisante pour que l'image du segment $[a;b]$ par la fonction f soit, aussi, un segment ; mais cette condition n'est pas nécessaire car on peut avoir l'image d'un segment $[a;b]$ par une fonction non continue est un segment.

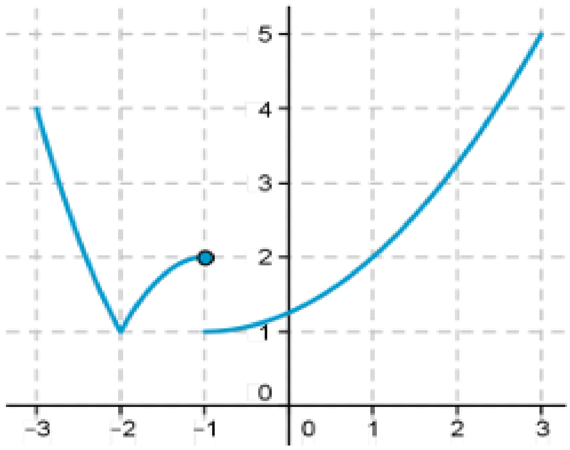
Exemple :

On a : f est continue sur l'intervalle sur $[-3;-1]$ et $]-1;3]$

$f\left([-3;-1]\right)=[1;4]$ et $f\left(]-1;3]\right)=]-1;5]$

On a, aussi f n'est pas continue sur le segment $[-2;1]$ et on a

$f\left([-2;1]\right)=[1;2]$

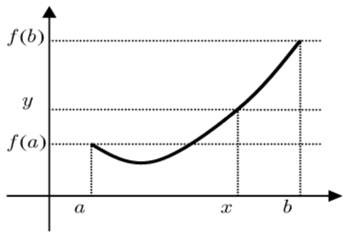
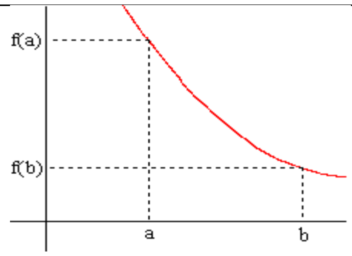


Courbe de la fonction *f*

❖ Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone

Propriété Soit f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I,

Le tableau suivant détermine f (I) ,selon le sens de monotonie de f et le type d'intervalle I

L'intervalle I	Si f est une fonction	
	Strictement croissante sur I, alors f (I) est égal à 	Strictement décroissante sur I, alors f (I) est égal à 
$[a;b]$	$[f(a);f(b)]$	$[f(b);f(a)]$
$[a;b[$	$\left[f(a);\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x);f(a)\right]$
$]a;b]$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x);f(b)\right]$	$\left[f(b);\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$]a;b[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x);\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x);\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$[a;+\infty[$	$\left[f(a);\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x);f(a)\right]$
$]a;+\infty[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x);\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x);\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$]-\infty;a]$	$\left]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x);f(a)\right]$	$\left[f(a);\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right[$
$]-\infty;a[$	$\left]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x);\lim\limits_{x\to a^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^-} f(x);\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right[$
$]-\infty;+\infty[=\mathbb{R}$	$\left]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x);\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x);\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right[$

Exemple : soit f la fonction numérique à variable réelle, définie par $f(x)=\dfrac{x-3}{x-2}$ on a $D_f=]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ et f continue sur $D_f=]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ (car c'est une fonction rationnelle) et on a $f'(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}>0$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty;2[$ et sur $]2;+\infty[$ et on a $f(]2;+\infty[)=]-\infty;1[$ et $f(]-\infty;-3])=\left]1;\dfrac{6}{5}\right]$

Application :

1. Soit g la fonction définie par $g(x)=x^2-2x+3$

   Déterminer les images des intervalles suivants : $I=]-\infty;0]$; $J=[1;2]$; $K=[-1;2]$

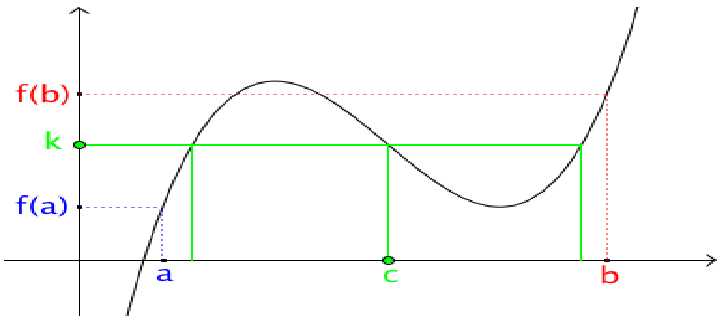
2. Soit a un nombre réel. On considère la fonction f suivante $f(x) = \dfrac{ax+1}{x-3}$

Déterminer a sachant que $f\left(]3;4]\right) = [9;+\infty[$

D. Théorème des Valeurs intermédiaires

Propriété On considère la fonction f définie et continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.



Démonstration :

Comme f est continue sur $[a\,;\,b]$ alors il existe deux nombres réel M et m tel que $f([a\,;\,b]) = [m\,;\,M]$ comme f(a) et f(b) appartiennent à $[m\,;\,M]$ (supposons que $f(a) \le f(b)$) donc $[f(a);f(b)] \subset [m;M]$ c -à-d $[f(a);f(b)] \subset f([a;b])$ Donc pour tout k compris entre f(a) et f(b) (c.-à-d. $k \in f([a;b])$)

Il existe au moins un réel c de $[a\,;\,b]$ tel que $f(c) = k$

Conséquence :

Dans ces conditions, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a\,;\,b]$.

Cas particuliers :

- Dans le cas où la fonction f est strictement monotone sur l'intervalle $[a\,;\,b]$ alors le réel c est unique.

- si $f(a) \times f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]a,b[$. Si de plus f est strictement monotone sur I, alors c'est unique.

Exemple : On considère la fonction numérique f définie par $f(x) = x^3 - 10x + 14$

On a f est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme donc est continue sur $[1;3]$

On a $f(1)=5$ et $f(3)=11$. Le nombre 8 est compris entre $f(1)$ et $f(3)$ alors l'équation f(x)=8 admet au moins une solution dans l'intervalle $[1;3]$

Application :

1) On considère la fonction g définie par $g(x)=1-x+\sin x$

Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet au moins une solution sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$

2) On considère la fonction h définie par : $h(x)=x^3-2x^2+2$

Montrer que l'équation $x\in\mathbb{R}$ $f(x)=0$ admet une seule solution α

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ *par* $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x(1-x)}{\sin(\pi x)} & si\ x \in]0,1[\\ f(0) = f(1) = \dfrac{1}{\pi} \end{cases}$

Etudier la continuité de f sur $[0,1]$

Correction

Rappel : f est une fonction continue sur $[a,b]$ ssi

- f est continue à droite en a
- f est continue à gauche en b
- f est continue sur $]a,b[$

❖ Etudions la continuité de f en 0

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x(1-x)}{\sin(\pi x)}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sin(\pi x)}.(1-x) = \frac{1}{\pi} = f(0)$$

Donc f est continue à droite en 0

❖ Etudions la continuité de f à gauche en 1

on pose

$t = x - 1$ donc $x = t + 1$

$x \to 1^- \Leftrightarrow t \longrightarrow 0^-$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x(1-x)}{\sin(\pi x)}$$

$$= \lim_{t\to 0^-} \frac{(t+1)}{\sin(\pi t + \pi)}.(-t) = \frac{1}{\pi} = f(1)$$

Donc f est continue à gauche en 1.

❖ Etudions la continuité de f en $]0,1[$

On la fonction $x \longmapsto x(x-1)$ est une fonction polynôme donc est continue sur IR en particulier est continue sur $]0,1[$

la fonction $x \longmapsto \sin(\pi x)$ est continue sur IR en particulier est continue sur $]0,1[$

et on a $(\forall x \in IR)\ x \in]0,1[\ \Longrightarrow 0 < x < 1$

$$\Longrightarrow 0 < \pi x < \pi$$

$$\Longrightarrow 0 < \sin(\pi x) < 1$$

Donc $\forall x \in]0,1[\ \sin(\pi x) \neq 0$ et par suite f est continue sur $]0,1[$ car c'est le quotient de deux fonctions continues sur $]0,1[$

Conclusion : f est continue sur $[0,1]$

Exercice 2

Soit f la fonction définie par : $f(x) = E(x) + \big(x - E(x)\big)^2$

1) Etudier la continuité de f en $x_0 = 2$
2) Etudier la continuité de f en $x_1 = \sqrt{2}$
3) Etudier la continuité de f sur IR

Correction

1) On étudier la continuité de f en $x_0 = 2$

Il suffit de donner l'expression de f(x) sur les deux intervalles $[1,2[$ et $[2,3[$

On $D_f = IR$ et $f(2) = 2$.

- Pour tout x de $[1,2[$ on a $f(x) = 1 + (x-1)^2$

  car $((E(x) = 1)$

et par suite $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} 1 + (x-1)^2 = 2 = f(2)$

donc la fonction est continue à gauche en 2

- Pour tout x de $[2,3[$ on a $f(x) = 2 + (x-2)^2$

car $((E(x) = 2)$

et par suite $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} 2 + (x-2)^2 = 2 = f(2)$

donc la fonction est continue à droite en 2

comme la fonction f est continue à droite et a gauche en 2

alors la fonction f est continue en 2

2) Etudions la continuité de f en $x_1 = \sqrt{2}$

Comme les deux fonctions $g: x \longmapsto E(x)$ et $h: x \longmapsto x$ sont continués en $x_1 = \sqrt{2}$ alors la fonction $f = g + (h-g)^2$ est continue en $x_1 = \sqrt{2}$

3) On étudier la continuité de f sur IR

- Comme les deux fonctions $g : x \longmapsto E(x) et\ h : x \longmapsto x$ sont continuées sur tout intervalle inclus dans $(IR - \mathbb{Z})$

Alors la fonction $f = g + (h-g)^2$ est continue sur tout intervalle inclus dans $(IR - \mathbb{Z})$

- On étudie la continuité de f en tout point de $\mathbb{Z}$

Soit k un élément de $\mathbb{Z}$ on a $f(k) = k$ et par suite

$(\forall x \in [k-1, k[)\ f(x) = k - 1 + (x - k + 1)^2$

(car $E(x) = k - 1$)

Donc $\lim\limits_{x \to k^-} f(x) = k = f(k)$ et par suite f est continue à gauche en k

$(\forall x \in [k, k+1[)\ f(x) = k + (x-k)^2$

(car $E(x) = k$)

Donc $\lim\limits_{x \to k^+} f(x) = k = f(k)$ et par suite f est continue à droite en k

Comme f est continue à gauche et à droite en k alors f est continue en k. et par suite f est continue sur IR.

Exercice 3

$$Soit\ f\ la\ fonction\ définie\ par\ f(x) = \frac{\sqrt{2x} - \sqrt{1+x^2}}{x - \sqrt{x}}$$

1) Déterminer D_f le domaine de définition de f
2) Calculer les limites suivantes $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
3) Démontrer que f est admet un prolongement par continuité en $x_0 = 1$ à déterminer

Correction

1) On détermine D_f

$$x \in D_f \Leftrightarrow x \geq 0\ et\ x - \sqrt{x} \neq 0$$
$$\Leftrightarrow x \geq 0\ et\ \sqrt{x}\left(\sqrt{x} - 1\right) \neq 0$$
$$\Leftrightarrow x \geq 0\ et\ x \neq 0\ etx \neq 1$$
$$\Leftrightarrow x \in]0,1[\cup]1, +\infty[$$

Et par suite $D_f =]0,1[\cup]1, +\infty[$

2) On calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

Soit $x \in]1, +\infty[$ on a

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x} - \sqrt{1+x^2}}{x - \sqrt{x}} = \frac{x\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}} - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right)}{x\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}} - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{x}}}$$

$$On\ a\ \lim_{x \to +\infty} 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = 0\ \ et$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}} - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = -1$$

alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$

On calcule $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

Ona $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{2x} - \sqrt{1+x^2} = -1$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} x - \sqrt{x} = 0^-$

Alors $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

3) on a $1 \notin D_f$. Soit x un élément de D_f on a

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x} - \sqrt{1+x^2}}{x - \sqrt{x}} = \frac{\left(\sqrt{2x} - \sqrt{1+x^2}\right)\left(x + \sqrt{x}\right)}{x^2 - x}$$
$$= \frac{\left(2x - 1 - x^2\right)\left(x + \sqrt{x}\right)}{\left(x^2 - x\right)\left(\sqrt{2x} + \sqrt{1+x^2}\right)}$$
$$= \frac{-(x-1)^2\left(x + \sqrt{x}\right)}{x(x-1)\left(\sqrt{2x} + \sqrt{1+x^2}\right)}$$
$$= \frac{-(x-1)\left(x + \sqrt{x}\right)}{x\left(\sqrt{2x} + \sqrt{1+x^2}\right)}$$

Et par suite

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{-(x-1)\left(x + \sqrt{x}\right)}{x\left(\sqrt{2x} + \sqrt{1+x^2}\right)} = 0$$

Donc la fonction f est prolongeable par continuité en 1

Soit g ce prolongement on a :

$$\begin{cases} g(x) = f(x)\ si\ x \in]0,1[\cup]1, +\infty[\\ g(1) = 0 \end{cases}$$

Exercice 4

Soit f une fonction définie de IR de $]-\infty,1[$ et g une fonction definie de IR vers $]1,+\infty[$,tels que f et g sont continués sur IR et que $(\exists(x_1,x_2)\in IR^{*+2}/x_1<x_2\ et\ f(x_1)=x_1\ et\ g(x_2)=x_2$

Démontrer $(\exists x_3\in]x_1,x_2[/\ f(x_3).g(x_3)=x_3$

Correction

On considère la fonction h définie par :

$$(\forall x\in IR)\ h(x)=f(x).g(x)-x$$

- On a la fonction $x\longmapsto f(x).g(x)$ est continue sur IR car c'est le produit de deux fonctions continues sur IR.

Et par suite la fonction h est continue sur IR car c'est la somme de deux fonctions continues sur IR

- On a $h(x_1)=f(x_1).g(x_1)-x_1=x_1(g(x_1)-1)$

Et $h(x_2)=f(x_2).g(x_2)-x_2=x_2(f(x_2)-1)$

Et par suite $h(x_1)>0$ puis on a

$f:IR\longrightarrow]-\infty,1[$donc $f(x_2)-1<0\ et\ x_2>0$ et par suite $h(x_1).h(x_2)<0$ Et come h est continue sur IR donc elle continue sur le segment $[x_1,x_2]$ et d'après le théorème des valeurs intermédiaires :

$(\exists x_3\in]x_1,x_2[/\ h(x_3)=0$

C à d $(\exists x_3\in]x_1,x_2[/\ f(x_3).g(x_3)-x_3=0$

C à d $(\exists x_3\in]x_1,x_2[/\ f(x_3).g(x_3)=x_3$

Exercice 5

Soient $\beta\ et\ \lambda$ deux elements de IR^{*+} et f une fonction definie et continue sur l'intervalle [0,1] tel que $f(1)\neq f(0)$

Démontrer que $\exists x_0\in]0,1[:\ \lambda f(0)+\beta f(1)=(\lambda+\beta)f(x_0)$

Correction

On considère la fonction g définie [0,1] par

$\forall x\in[0,1]\ g(x)=(\lambda+\beta)f(x)-\ \lambda f(0)-\beta f(1)$

On a $g(0)=\beta\big(f(0)-f(1)\big)$ et

$$g(1)=\lambda\big(f(1)-f(0)\big)$$

Donc $\mathrm{g}(1).\mathrm{g}(0)=-\lambda\beta\big(f(0)-f(1)\big)^2$ et on a d'après les données $f(1)\neq f(0)$ et $\lambda>0$ et $\beta>0$

Donc $\mathrm{g}(1).\mathrm{g}(0)<0$

Et on a g est continue sur [0,1] car c'est la somme de deux fonctions continues sur [0,1]

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires

$\exists x_0\in]0,1[:g(x_0)=0$

$\exists x_0\in]0,1[:\ \lambda f(0)+\beta f(1)=(\lambda+\beta)f(x_0)$

Exercice 6

f est une fonction définie et continue sur IR et on suppose que $\exists a\in IR/\ fof(a)=a$

Démontrer que $\exists c\in IR/\ f(c)=c$

Correction

On considère la fonction g définie sur IR par

$$\mathrm{g}(x)=f(x)-x$$

on a g est continue sur IR car c'est la somme de deux fonctions continues sur IR et on a $\mathrm{g}(a)=f(a)-a$ et

$$\mathrm{g}\big(f(a)\big)=fof(a)-f(a)=a-f(a)$$

Et par suite $\mathrm{g}\big(f(a)\big).\mathrm{g}(a)=-\big(a-f(a)\big)^2$

Si $f(a)=a$ on prend $c=a$

Si $f(a)\neq a$ alors g est continue sur l'intervalle des extrémités a et $f(a)$ et on a $\mathrm{g}\big(f(a)\big).\mathrm{g}(a)<0$

Et d'après le théorème des valeurs intermédiaires

$\exists c\in IR/\ \mathrm{g}(c)=0$

C à d $\exists c\in IR/\ f(c)=c$

Exercice 7 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $\forall x, y \in \mathbb{R}, |(x) - f(y)| \leq |\sin(x) - \sin(y)|$

1. Montrer que la fonction f est 2π-périodique.

2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Correction :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, |(x) - f(x + 2\pi)| \leq |\sin(x) - \sin(x + 2\pi)| = 0$

Ce qui équivaut à ce que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x + 2\pi)$,

f est 2π périodique.

2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$,

Première méthode

$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, |x - x0| < \eta \Rightarrow |\sin(x) - \sin(x_0)| < \epsilon$ Car la fonction sin est une fonction continue. Cela entraine que pour tout $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, |x - x_0| < \eta \Rightarrow$ $|(x) - f(x_0)| \leq |\sin(x) - \sin(x0)| < \epsilon$ Cela montre que la fonction f est continue en x_0, ceci étant vrai pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

Deuxième méthode

Pour montrer que f est continue en un $x_0 \in \mathbb{R}$ quelconque. $0 \leq |(x) - f(x_0)| \leq |\sin(x) - \sin(x_0)|$ Donc

$$0 \leq \lim_{x \to x_0} |f(x) - f(x_0)|$$

$$\leq \lim_{x \to x_0} |sin(x) - sin(x_0)| = 0$$

Car sin est continue en x_0

On en déduit que $\lim_{x \to x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0$

Ce qui est équivalent à $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Autrement que f est continue en $x0$ quelconque, et donc sur $\mathbb{R}$