

Chapitre 1

Les nombres complexes

Historiquement



Les nombres complexes prennent naissance au XVIème siècle lorsqu'un italien *Gerolamo Cardano* (1501 ; 1576), ci-contre, au nom francisé de *Jérôme Cardan*, introduit $\sqrt{-15}$ pour résoudre des équations du troisième degré.

En 1572, un autre italien, *Rafaele Bombelli* (1526 ; 1573) publie "*Algebra, parte maggiore dell'aritmetica, divisa in tre libri*" dans lequel il présente des nombres de la forme $a + b\sqrt{-1}$ et poursuit les travaux

de *Cardan* sur la recherche de solutions non réelles pour des équations du troisième degré.

A cette époque, on sait manipuler les racines carrées d'entiers négatifs mais on ne les considère pas comme des nombres. Lorsqu'une solution d'équation possède une telle racine, elle est dite imaginaire.

La notation i apparaît en 1777 siècle avec *Leonhard Euler* (1707 ; 1783) qui développe la théorie des nombres complexes sans encore les considérer comme de « vrais » nombres. Il les qualifie de nombres impossibles ou de nombres imaginaires.

Au XIXe siècle, *Gauss* puis *Hamilton* posent les structures de l'ensemble des nombres complexes. Les nombres sans partie imaginaire sont un cas particulier de ces nouveaux nombres. On les qualifie de « réel » car proche de la vie. Les complexes sont encore considérés comme une création de l'esprit.

Chapitre I :Les nombres complexes

I. Introduction

Considérons les équations suivantes :

$$(1) \quad x+2=0 \quad (2) \quad 4x+5=0 \quad (3) \quad x^2 - 5 = 0 \quad (4) \quad x^2 + 4 = 0$$

- ◆ Dans \mathbb{N} (ensemble des naturels), l'équation (1) n'admet pas de solution. On résout ce problème en créant les nombres négatifs. Dans \mathbb{Z} (ensemble des entiers), cette équation a comme solution -2.
- ◆ Dans \mathbb{Z} , l'équation (2) n'a pas de solution. On introduit les fractions. Dans \mathbb{Q} (ensemble des rationnels), cette équation a comme solution $-\frac{5}{4}$.
- ◆ Dans \mathbb{Q} , l'équation (3) n'a pas de solution. C'est pourquoi on introduit les nombres irrationnels. Dans \mathbb{R} (ensemble des réels), l'équation (3) admet deux solutions : $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$.
- ◆ Dans \mathbb{R} , l'équation (4) n'a pas de solution. C'est pourquoi on crée de nouveaux nombres : les nombres complexes. Ils forment l'ensemble \mathbb{C} et permettent de déterminer les solutions de cette équation.

II. L'ensemble \mathbb{C}

1. Définition

Définition

Il existe un ensemble de nombres, noté \mathbb{C} , appelé ensemble des nombres complexes qui possède les propriétés suivantes :

- \mathbb{C} contient \mathbb{R} .
- Dans \mathbb{C} , on définit une addition et une multiplication qui suivent les mêmes règles de calcul que dans \mathbb{R} .
- Il existe dans \mathbb{C} un nombre i tel que $i^2 = -1$.
- Tout élément z de \mathbb{C} s'écrit de manière unique sous la forme $z = a + ib$ avec a et b réels.

Exemples : $3+4i$; $-2-i$; $\frac{i}{3}$ sont des nombres complexes.

Vocabulaire :

- L'écriture $a + ib$ d'un nombre complexe z est appelée la forme algébrique de z .
- Le nombre a s'appelle la partie réelle et le nombre b s'appelle la partie imaginaire.

On note $\text{Re}(z) = a$ et $\text{Im}(z) = b$.

Remarques :

- Si $b = 0$ alors z est un nombre réel.
- Si $a = 0$ alors z est un nombre imaginaire pur.
- l'ensemble des nombres imaginaires purs est $i\mathbb{R}$: $i\mathbb{R} = \{iy / y \in \mathbb{R}\}$

Application :

Calculer et exprimer le résultatat sous la forme algébrique.

$$z_1 = 3 - 5i - (3i - 4) \quad z_2 = (3 - 2i)(-1 + 5i) \quad z_3 = (2 - 3i)^2$$

$$z_4 = (2i)^{13} \quad z_5 = \frac{1}{4 - 2i} \quad z_6 = \frac{1+i}{2-i}$$

Réponse

$$\begin{aligned} z_1 &= 3 - 5i - (3i - 4) & z_2 &= (3 - 2i)(-1 + 5i) & z_3 &= (2 - 3i)^2 \\ &= 3 - 5i - 3i + 4 & &= -3 + 15i + 2i - 10i^2 & &= 4 - 12i + 9i^2 \\ &= 7 - 8i & &= -3 + 15i + 2i + 10 & &= 4 - 12i - 9 \\ & & &= 7 + 17i & &= -5 - 12i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_4 &= (2i)^{13} & z_5 &= \frac{1}{4 - 2i} & z_6 &= \frac{1+i}{2-i} \\ &= 2^{13} i^{13} & &= \frac{1}{(4-2i)(4+2i)} & &= \frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{(1+i)(2+i)}{4+1} \\ &= 8192 \times (i^2)^6 \times i & &= \frac{4+2i}{(4-2i)(4+2i)} & &= \frac{1}{5}(2+i+2i-1) = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i \\ &= 8192 \times (-1)^6 \times i & &= \frac{4+2i}{16-4i^2} = \frac{4+2i}{16+4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{10}i & & \\ &= 8192i & & & & \end{aligned}$$

2. Egalité de deux nombres complexes

Propriété

- a) Deux nombres complexes sont égaux, si et seulement si, ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire c à d ($\forall(z, z') \in \mathbb{C}^2$) $z = z' \Leftrightarrow \text{Im}(z) = \text{Im}(z')$ et $\text{Re}(z) = \text{Re}(z')$.
- b) Un nombre complexe est nul, si et seulement si, sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles c à d ($\forall z \in \mathbb{C}^2$) $z = 0 \Leftrightarrow \text{Im}(z) = 0$ et $\text{Re}(z) = 0$.

Démonstration :

Conséquence immédiate de l'unicité de la forme algébrique.

Exemple d'application :

Déterminons le nombre complexe z vérifiant $2z - 5 = 4i + z$.

On a donc :

$$2z - z = 5 + 4i$$

$$z = 5 + 4i$$

III. Les opérations sur les nombres complexes

1. Somme et produit

Propriété

On considère deux complexes z et z' de formes algébriques respectives $a + bi$ et $a' + b'i$.

- La somme de z et de z' est le complexe $z + z' = (a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i$
- Si k est un réel, alors le produit de k par z est le complexe $kz = k(a + bi) = ka + kbi$
- Le produit de z et de z' est le nombre complexe $zz' = (a + bi)(a' + b'i) = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$

Exemples :

- $-1 + 7i + 3 - 2i = 2 + 5i$
- $(-1 + 7i)(3 - 2i) = -3 + 2i + 24i - 14i^2 = 14 - 3 + 23i = 11 + 23i$
- $(3 + 2i) + (5 - 4i) = 3 + 2i + 5 - 4i = 8 - 2i$
- $(-2 + i) - (4 - 4i) = -2 + i - 4 + 4i = -6 + 5i$
- $(2 - i)(3 + 4i) = 6 + 8i - 3i - 4i^2 = 6 + 8i - 3i + 4 = 10 + 5i$

2. Opposé et inverse d'un nombre complexe

Propriété

- L'opposé du nombre complexe $z = a + ib$ et $-z = -a - ib$
- Tout nombre complexe non nul $z = a + ib$ admet un inverse noté $\frac{1}{z} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$.

Exemples :

- $z = \sqrt{3} + 2i$ alors $-z = -\sqrt{3} - 2i$ et $\frac{1}{z} = \frac{1}{\sqrt{3} + 2i} = \frac{\sqrt{3} - 2i}{(\sqrt{3} + 2i)(\sqrt{3} - 2i)} = \frac{\sqrt{3} - 2i}{3 - 4i^2} = \frac{\sqrt{3} - 2i}{7} = \frac{\sqrt{3}}{7} - \frac{2}{7}i$
- $\frac{1}{1+2i} = \frac{1-2i}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{1-2i}{1-4i^2} = \frac{1-2i}{1+4} = \frac{1-2i}{5} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$

3. Quotient de deux nombres complexes

Propriété

On considère deux complexes z et z' de formes algébriques respectives $a+bi$ et $a'+b'i$

Avec $a' \neq 0$ et $b' \neq 0$ on a $\frac{z}{z'} = \frac{a+bi}{a'+b'i} = \frac{1}{a'^2+b'^2}((aa'+bb')+i(a'b-ab'))$

Exemples :

- $\frac{1+i}{\sqrt{3}+2i} = (1+i)\left(\frac{\sqrt{3}}{7} - \frac{2}{7}i\right) = \frac{\sqrt{3}}{7} - \frac{2}{7}i + \frac{\sqrt{3}}{7}i + \frac{2}{7} = \frac{\sqrt{3}}{7} + \frac{2}{7} + i\left(\frac{\sqrt{3}}{7} - \frac{2}{7}\right)$

- $\frac{3-i}{1-2i} = \frac{(3-i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{3+6i-i-2i^2}{1-4i^2} = \frac{3+6i-i+2}{1+4} = \frac{5+5i}{5} = 1+i$

IV. Représentation géométrique d'un complexe

Dans tout le chapitre, on munit le plan d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

1. Affixe d'un point /affixe d'un vecteur

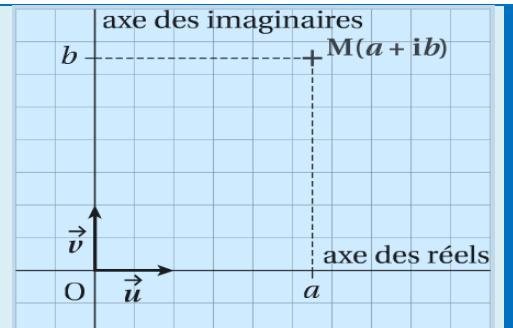
Définition

a et b sont deux nombres réels.

- A tout nombre complexe $z = a+bi$ faisons correspondre le point M de coordonnées (a, b) .

M s'appelle l'image du nombre complexe z .

On dit que z est l'**affixe** du point M est notée $aff(M)$ ou z_M



Remarques

1. L'axe (Ox) est appelé **axe réel** (c'est l'ensemble des points images des nombres réels).
2. L'axe (Oy) est appelé **axe des imaginaires** (c'est l'ensemble des points images des nombres imaginaires purs).
3. Les points images de nombres complexes conjugués sont symétriques par rapport à l'axe réel.

Définition

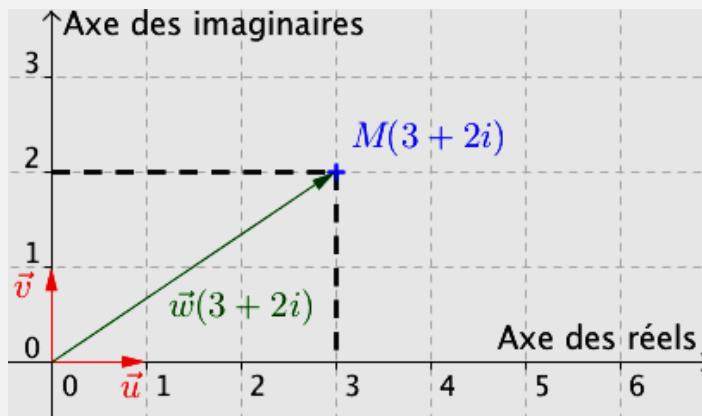
a et b sont deux nombres réels.

- A tout nombre complexe $z = a + bi$ faisons correspondre le vecteur \vec{u} de coordonnées (a, b) .

On dit que z est l'**affixe** du vecteur \vec{u} est notée $\text{aff}(\vec{u})$ ou $z_{\vec{u}}$

Exemples

- Le point $M(3 ; 2)$ a pour affixe le nombre complexe $z = 3 + 2i$.
- De même, le vecteur \vec{w} a pour affixe $z = 3 + 2i$.



Propriété

$M(z_M)$ et $N(z_N)$ sont deux points du plan.

$\vec{u}(z)$ et $\vec{v}(z')$ sont deux vecteurs du plan.

- Le vecteur \overrightarrow{MN} a pour affixe $z_N - z_M$.
- Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour affixe $z + z'$.
- Le vecteur $k\vec{u}$, k réel, a pour affixe kz .
- Le milieu I du segment $[MN]$ a pour affixe $z_I = \frac{z_M + z_N}{2}$

Démonstration :

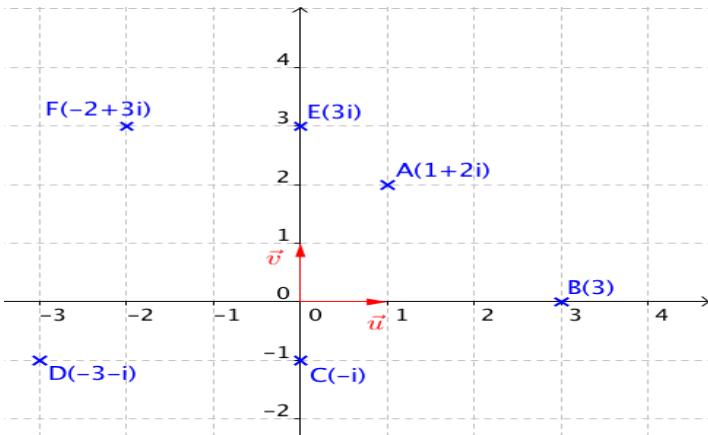
- On pose : $M(x_M; y_M)$ et $N(x_N; y_N)$.

Le vecteur \overrightarrow{MN} a pour coordonnées $(x_N - x_M; y_N - y_M)$ donc son affixe est égal à

$$(x_N - x_M) + i(y_N - y_M) = x_N + iy_N - (x_M + iy_M) = z_N - z_M.$$

b) et c) : Démonstrations analogues en passant par les coordonnées des vecteurs.

Autres exemples :



2. Application à la géométrie

Propriété 1

Soit $A(z_A)$, $B(z_B)$ et $C(z_C)$

Les points A , B et C sont alignes si et seulement si $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$

Démonstration :

Les points A , B et C sont alignes si et seulement si s'il existe un reel k tel que $\overrightarrow{AC} = k \overrightarrow{AB}$

Et on a l'affixe de \overrightarrow{AB} est $z_B - z_A$ et l'affixe de \overrightarrow{AC} est $z_C - z_A$ alors A , B et C sont alignes équivaut à

$$z_C - z_A = k(z_B - z_A) \text{ donc } \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$$

Exemples :

- Soient les points A , B et C d'affixe respectives $z_A = 6 - i$ et $z_B = 1 - 11i$ et $z_C = 7 + i$

On a $z_B - z_A = -5 - 10i$ et $z_C - z_A = 1 + 2i$ alors $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -\frac{1}{5} \in \mathbb{R}$ donc les points A , B et C sont

alignes

- Soient les points $M(z)$ et $A(1)$ et $N(z^2)$ on détermine l'ensemble des points M pour que les points M , A et N sont alignes
- Si $z=0$ alors les points M et N sont confondus avec le point O

Cours

Donc les points A,M et N sont alignes

- Si $z=1$ alors les points A,M et N sont confondus
- Supposons que $z \neq 1$ et $z \neq 0$

Les points A,M et N sont alignes si et seulement si $\frac{z^2-1}{z-1} \in \mathbb{R}$ c à d $z+1 \in \mathbb{R}$ C à d $\operatorname{Im}(z+1)=0$ si on

considère $z = a+ib$ avec a et b sont des réels donc les points A,M et N sont alignes si et seulement si $y=0$

Donc l'ensemble des points M pour que les points A,M et N sont alignes est les points appartenant à l'axe réel

Application

Démontrer que les points $M(z)$ tels que les points $M(z)$ et $B(i)$ et $M'(iz)$ sont alignes est un cercle à déterminer.

Propriété 2

Soient $A(z_A), B(z_B), C(z_C)$ et $D(z_D)$ tels que $A \neq B$ et $C \neq D$

Les droites (AB) et (CD) sont parallèle si et seulement si $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$

Exemple :

Soient les points A,B et C d'affixe respectives $z_A = -2 + 6i$ et $z_B = 4 - 3i$ et $z_C = (2 - 3i)x$ avec x un nombre

réel .On a $z_B - z_A = 6 - 9i$ et $z_C - z_A = 1 + 2i$ alors $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{x}{3} \in \mathbb{R}$ donc $(OC) \parallel (AB)$

Application :

On considère les points $A(-1), B(i)$ et soit $z \in \mathbb{C}$, et soient les points M et N d'affixes respectives z et z^2

Déterminer l'ensemble des points M pour que $(BM) \parallel (AN)$

Propriété 3

Soient $A(z_A), B(z_B), C(z_C)$ et $D(z_D)$

Les points A,B,C et D sont alignes ou cocycliques si et seulement si $\frac{z_C - z_B}{z_D - z_B} \times \frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbb{R}$

Exemple :

Soient les points A,B,C et D d'affixe respectives $a = 2 - 2i$ et $b = -1 + 7i$ et $c = 4 + 2i$ et $d = -4 - 2i$

Démontrons que les points A,B,C et D sont cocycliques

On a $\frac{c-b}{d-b} \times \frac{d-a}{c-a} = -1 \in \mathbb{R}$ donc les points A,B,C et D sont cocycliques

Propriété 3

- ♦ Si G est le barycentre de $\{(A;\alpha), (B;\beta)\}$ alors $z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B}{\alpha + \beta}$
- ♦ Si G est le barycentre de $\{(A;\alpha), (B;\beta), (C;\gamma)\}$ alors $z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$
- ♦ En général Si G est le barycentre de $\{(A_1;\alpha_1), (A_2;\alpha_2), (A_3;\alpha_3), \dots, (A_n;\alpha_n)\}$ alors

$$z_G = \frac{\alpha_1 z_{A_1} + \alpha_2 z_{A_2} + \dots + \alpha_n z_{A_n}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}$$

Exemple

Soient les points A,B et C d'affixe respectives $a = 3 + 3i$ et $b = 5 - 2i$ et $c = 7 + 11i$

Le centre de gravité du triangle ABC est le point G d'affixe $z_G = \frac{a+b+c}{3} = 5 + 4i$

Application :

Soient les points A,B et C d'affixe respectives $a = 3 + 7i$ et $b = 4 + 5i$ et $c = 3 + 7i$

Soit G est le barycentre de $\{(A;2), (B;1), (C;1)\}$ et H est le barycentre de $\{(A;1), (B;2), (C;1)\}$

Déterminer l'affixes des points G et H puis déterminer l'ensemble des points M du plan telles que

$$\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$$

V. Conjugué d'un nombre complexe

Définition

Soit un nombre complexe $z = a + ib$.

On appelle nombre complexe conjugué de z , le nombre, noté \bar{z} , égal à $a - ib$.

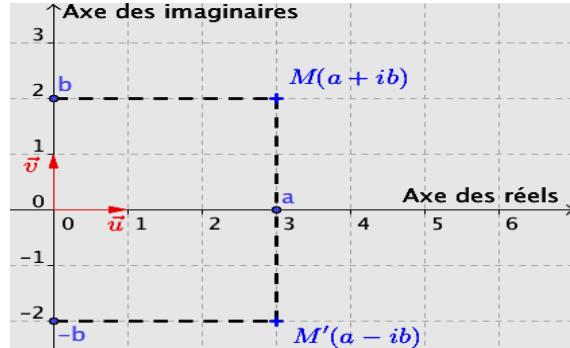
Exemples :

- $z = 4 + 5i$ et $\bar{z} = 4 - 5i$

- On peut également noter : $\overline{7 - 3i} = 7 + 3i$; $\bar{i} = -i$; $\bar{5} = 5$

Remarque :

Les points d'affixes z et \bar{z} sont symétriques par rapport à l'axe des réels.



Propriété 1

Soit z et z' deux nombres complexes et n entier naturel non nul.

a) $\overline{\bar{z}} = z$

b) $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$

c) $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$

d) $\overline{z^n} = \bar{z}^n$

e) $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}, z \neq 0$

f) $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}, z' \neq 0$

Démonstrations :

On pose $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ avec a, b, a' et b' réels.

a) $\overline{\bar{z}} = \overline{\overline{a + ib}} = \overline{a - ib} = a + ib = z$

b) $\overline{z + z'} = \overline{a + ib + a' + ib'} \\ = \overline{a + a' + i(b + b')} \\ = a + a' - ib - ib' \\ = \overline{a + ib} + \overline{a' + ib'} \\ = \bar{z} + \bar{z'}$

c) e) f) Démonstrations analogues

d) On procède par récurrence.

- L'initialisation pour $n = 1$ est triviale.

- Hérédité :

- Hypothèse de récurrence :

Supposons qu'il existe un entier $k > 1$ tel que la propriété soit vraie : $\overline{z^k} = \bar{z}^k$.

- Démontrons que : La propriété est vraie au rang $k+1$: $\overline{z^{k+1}} = \bar{z}^{k+1}$.

$$\overline{z^{k+1}} = \overline{z^k \times z} = \overline{z^k} \times \overline{z} = \bar{z}^k \times \bar{z} = \bar{z}^{k+1}$$

- Conclusion :

La propriété est vraie pour $n = 1$ et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie

pour tout entier naturel n , soit : $\overline{z^n} = \bar{z}^n$.

Exemples :

$$\cdot \overline{(2+3i)(4-i)} = (2 - 3i)(4 + i) = 11 - 10i \quad ; \quad \overline{\left(\frac{1}{\sqrt{2}+i}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}-i} = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{i}{3}$$

$$\cdot \overline{\left(\frac{1+i}{2-i}\right)} = \frac{1-i}{2+i} = \frac{1}{5} - \frac{3}{5}i \quad ; \quad \overline{(2+3i)^2} = (2-3i)^2 = -5 - 12i$$

Propriété 1

a) z est réel $\Leftrightarrow z = \bar{z}$

b) z est imaginaire pur $\Leftrightarrow z = -\bar{z}$

c) $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$ et $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$

Démonstrations :

$$z = \bar{z}$$

$$z = -\bar{z}$$

$$\Leftrightarrow a + ib = a - ib \Leftrightarrow 2ib = 0 \Leftrightarrow b = 0$$

$$\Leftrightarrow a + ib = -a + ib \Leftrightarrow 2a = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

Exemples

1) On démontre que $\forall n \in \mathbb{Z} \ z = (\sqrt{3} + i)^{2n+1} - (i - \sqrt{3})^{2n+1}$ est un réel

$$\text{On } (i - \sqrt{3})^{2n+1} = (-1(\sqrt{3} - i))^{2n+1} = (-1)^{2n+1} (\sqrt{3} - 1)^{2n+1}$$

$$\text{Comme } (-1)^{2n+1} = -1 \text{ alors } (i - \sqrt{3})^{2n+1} = -(\sqrt{3} - 1)^{2n+1}$$

$$\text{Donc } z = (\sqrt{3} + i)^{2n+1} + (\sqrt{3} - i)^{2n+1}$$

$$\bar{z} = \overline{(\sqrt{3} + i)^{2n+1} + (\sqrt{3} - i)^{2n+1}} = \overline{(\sqrt{3} + i)^{2n+1}} + \overline{(\sqrt{3} - i)^{2n+1}}$$

$$\begin{aligned} \text{Et on a} \\ = \overline{(\sqrt{3} + i)^{2n+1}} + \overline{(\sqrt{3} - i)^{2n+1}} = (\sqrt{3} - i)^{2n+1} + (\sqrt{3} + i)^{2n+1} = z \end{aligned}$$

Cours

Donc $z \in \mathbb{R}$

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct , on détermine l'ensemble des points $M(z)$

tel que $2iz - \bar{z} \in \mathbb{R}$

Posons $z' = 2iz - \bar{z}$ et soit (E) l'ensemble des points $M(z)$ tel que $z' \in \mathbb{R}$

On a

$$\begin{aligned} M \in (E) &\Leftrightarrow z' \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \overline{z'} = z' \Leftrightarrow \overline{2iz - \bar{z}} = 2iz - \bar{z} \\ &\Leftrightarrow -2i\bar{z} - z = 2iz - \bar{z} \\ &\Leftrightarrow z - \bar{z} = -2i(z + \bar{z}) \\ &\Leftrightarrow 2i \operatorname{Im}(z) = -4i \operatorname{Re}(z) \end{aligned}$$

Si on pose $z = x + iy$ avec x et y sont des réels

Alors $M \in (E) \Leftrightarrow y = -2x$ donc l'ensemble (E) est une droite d'équation $M \in (E) \Leftrightarrow y = -2x$

Application

- 1) Soit le nombre complexe $j = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$ démontrer que $\forall n \in \mathbb{Z} \quad (j^{2n} - j^n) \in i\mathbb{R}$
- 2) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $\bar{z} = (1-i)z + 3 + 2i$

Propriété 1

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe alors $z\bar{z} = a^2 + b^2$.

Démonstration :

$$z\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2$$

Exercice

Déterminer le conjugué des nombres suivants et exprimer le résultat sous la forme algébrique.

$$z_1 = (2-i)(i-5) \quad z_2 = \frac{3+2i}{i}$$

Solution

$$\begin{aligned}
 \overline{z_1} &= \overline{(2-i)(i-5)} \\
 &= \overline{(2-i)} \overline{(i-5)} = (2+i)(-i-5) \\
 &= -2i - 10 + 1 - 5i = -9 - 7i \\
 \overline{z_2} &= \overline{\left(\frac{3+2i}{i} \right)} \\
 &= \frac{\overline{3+2i}}{\overline{i}} = \frac{3-2i}{-i} \\
 &= \frac{(3-2i) \times i}{-i \times i} = 2+3i
 \end{aligned}$$

Remarque

On considère dans \mathbb{C} le polynôme $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ avec a_0, a_1, \dots, a_n sont des réels et z un nombre complexe

$$\text{On a } \overline{P(z)} = \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0} = \overline{a_n} \overline{z^n} + \overline{a_{n-1}} \overline{z^{n-1}} + \dots + \overline{a_1} \overline{z} + \overline{a_0}$$

$$\text{Comme } \overline{(z^p)} = (\overline{z})^p \text{ et } \overline{a_p} = a_p \text{ alors } \overline{P(z)} = a_n (\overline{z})^n + a_{n-1} (\overline{z})^{n-1} + \dots + a_1 \overline{z} + a_0 = P(\overline{z})$$

$$\text{Alors on déduit que } \overline{P(z)} = P(\overline{z})$$

Si α un nombre complexe tel que $P(\alpha) = 0$ alors $\overline{P(\alpha)} = P(\overline{\alpha}) = 0$ on déduit que si un nombre complexe α

est une racine à un polynôme P alors son conjugué $\overline{\alpha}$ est aussi racine de P

VI. Module d'un nombre complexe

1. Définition et interprétation géométrique

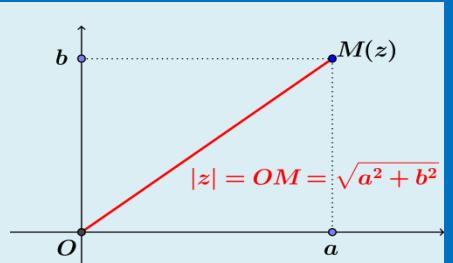
Définition

Soit z un nombre complexe quelconque de forme

$$\text{algébrique } z = a + ib.$$

On appelle module de z le nombre réel noté $|z|$ défini par :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$



Interprétation géométrique : Dans le plan complexe, si M a pour affixe z alors $OM = |z|$.

Propriétés géométriques

- Soit \vec{w} un vecteur quelconque d'affixe z . Alors $\|\vec{w}\| = |z|$

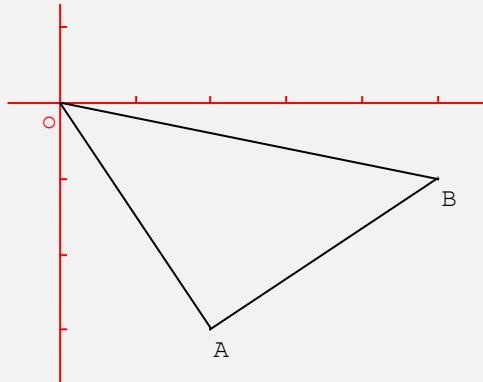
- Soient A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B . Alors : $AB = |z_B - z_A|$

Démonstration :

- Soit M le point du plan complexe tel que : $\overrightarrow{OM} = \vec{w}$. Alors z est à la fois l'affixe de M et celle de \vec{w} . Donc : $\|\vec{w}\| = OM = |z|$.
- Le vecteur \overrightarrow{AB} a pour affixe $z_B - z_A$. Par conséquent : $AB = |z_B - z_A|$.

Exemple :

- Soient A et B les points d'affixes $2 - 3i$ et $5 - i$. Etudions la nature du triangle OAB :
- $OA = |z_A| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$
- $OB = |z_B| = \sqrt{5^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$
- $AB = |z_B - z_A| = |(5 - i) - (2 - 3i)|$
 $= |3 + 2i| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$
- On remarque ainsi que : $OA = AB$ et $OB^2 = OA^2 + AB^2$. Le triangle OAB est donc rectangle isocèle rectangle en A



2. Propriétés

Propriété 1

Pour tout nombre complexe z ,

- $|z|^2 = z \times \bar{z}$
- $|z|$ est toujours positif et $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
- $|z| = |-z| = |\bar{z}|$
- Si z est un nombre réel, alors le module de z coïncide avec la valeur absolue de z .
- Si z est un imaginaire pur, alors le module de z est égal à la valeur absolue de sa partie imaginaire.
- Si M est le point d'affixe z , alors $OM = |z|$.

Propriété 2

Pour tous nombres complexes z et z' , on a :

$$1. \quad |z \times z'| = |z| \times |z'| \quad ; \quad 2. \quad \text{Pour tout entier naturel } n, \quad |z^n| = |z|^n$$

$$3. \text{ Si } z \neq 0, \text{ alors } \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|} \quad ; \quad 4. \text{ Si } z' \neq 0, \text{ alors } \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

$$5. |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

Démonstration :

1) Pour démontrer cette 1^{ère} propriété, utilisons que $|z|^2 = z \times \bar{z}$:

$$|z \times z'|^2 = (z \times z') \times (\overline{z \times z'}) = z \times \bar{z} \times z' \times \bar{z}' = |z|^2 \times |z'|^2 = (|z| \times |z'|)^2. \quad |z \times z'| \text{ et}$$

$|z| \times |z'|$ ont donc le même carré ; or ils sont tous deux positifs donc ils sont égaux .

2) Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = |z^n|$. Alors pour tout entier naturel n

$$u_{n+1} = |z^{n+1}| = |z \times z^n| = |z| \times |z^n| = |z| \times u_n. \text{ Donc la suite } (u_n) \text{ est géométrique de raison } q = |z| \text{ et de 1^{er}$$

$$\text{terme } u_0 = |z^0| = |1| = 1. \text{ Donc pour tout entier naturel } n, u_n = u_0 q^n = |z|^n.$$

On a donc à la fois : $u_n = |z^n| = |z|^n$.

3) Soit z un nombre complexe non nul . Alors $\left| z \times \frac{1}{z} \right| = |z| \times \left| \frac{1}{z} \right|$ d'une part et $\left| z \times \frac{1}{z} \right| = |1| = 1$ d'autre part . Donc

$$|z| \times \left| \frac{1}{z} \right| = 1 \text{ et comme } |z| \neq 0, \text{ on peut conclure que : } \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}.$$

$$4) \text{ Si } z' \neq 0, \text{ alors } \left| \frac{z}{z'} \right| = \left| z \times \frac{1}{z'} \right| = |z| \times \left| \frac{1}{z'} \right| = |z| \times \frac{1}{|z'|} = \frac{|z|}{|z'|}.$$

5) Soient M et M' les points d'affixes respectives z et $-z'$. Alors : $|z + z'| = |z - (-z')| = M'M$, $|z| = OM$ et

$$|z'| = |-z'| = OM'. \text{ Or , d'après l'inégalité triangulaire, } MM' \leq OM + OM', \text{ ce qui s'écrit aussi :}$$

$$|z + z'| \leq |z| + |z'| .$$

Exemples : A l'aide de ces propriétés, calculons les modules des nombres complexes suivants :

- $| (3+i)(1-i) | = | 3+i | | 1-i | = \sqrt{3^2+1^2} \times \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{10} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{5}$.
- $| (2+i)^4 | = | 2+i |^4 = (\sqrt{2^2+1^2})^4 = 25$; $\left| \frac{1}{5-i} \right| = \frac{1}{| 5-i |} = \frac{1}{\sqrt{5^2+(-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{26}}$
- $\left| \frac{3+i}{1-i} \right| = \frac{| 3+i |}{| 1-i |} = \frac{\sqrt{3^2+1^2}}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{5}$

Exercice corrigé

1) Déterminer l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie : $| z + 5i | = 6$

Soit A le point d'affixe $z_A = -5i$. Alors, pour tout nombre complexe z , $| z + 5i | = | z - z_A |$. Donc :

$| z + 5i | = 6 \Leftrightarrow | z - z_A | = 6 \Leftrightarrow AM = 6$. On en conclut que l'ensemble des points M répondant à la question est le cercle de centre A et de rayon 6.

2) Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe z

$$\text{Vérifie : } \left| \frac{3z-i}{z+1-i} \right| = 3$$

Il faut tout d'abord éliminer le point A d'affixe $-1+i$, car pour cette valeur de z le quotient précédent n'existe pas.

Ensuite, pour tout $z \neq -1+i$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \left| \frac{3z-i}{z+1-i} \right| = 3 &\Leftrightarrow \frac{| 3z-i |}{| z+1-i |} = 3 \Leftrightarrow | 3z-i | = 3 | z+1-i | \\ &\Leftrightarrow 3 \left| z - \frac{i}{3} \right| = 3 | z+1-i | \Leftrightarrow \left| z - \frac{i}{3} \right| = | z+1-i | \end{aligned}$$

En appelant B le point d'affixe $\frac{i}{3}$, la dernière égalité équivaut à : $BM = AM$. On en conclut que l'ensemble des

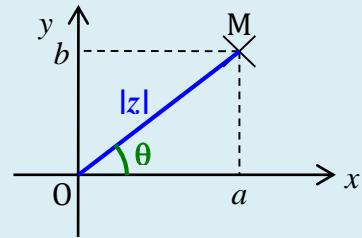
points M cherché est la médiatrice Δ du segment [AB] privée éventuellement du point A qui a été exclu dès le début. Mais comme $A \notin \Delta$, l'ensemble des solutions est toute la droite Δ .

VII. Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

1. Argument d'un nombre complexe non nul

Définition

Soit z un nombre complexe non nul et M le point du plan complexe d'affixe z . On appelle argument de z , tout réel θ tel que : $\theta = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{OM} [2\pi]$. On note alors $\arg(z) = \theta [2\pi]$



Remarques

Un nombre complexe non nul z a une infinité d'arguments ; si θ est l'un d'entre eux tout autre est de la forme $\theta + k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

On note $\arg(z) = \theta$ (modulo 2π) ou plus simplement $\arg(z) = \theta$.

- Le nombre complexe 0 n'a pas d'argument ..

Exemple :

$$1+i = 2\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right), \text{ donc } \arg(1+i) = \frac{\pi}{4} [2\pi].$$

Cas particuliers :

$$\arg(1) = 0 [2\pi], \arg(-1) = \pi [2\pi], \arg(i) = \frac{\pi}{2} [2\pi], \arg(-i) = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$$

Propriété

Soit $z \in C^*$ quelconque. Alors :

- $z \in R_+^* \Leftrightarrow \arg(z) = 0 [\pi]$ et $z \in iR_+^* \Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2} [\pi]$
- $\arg(-z) = \pi + \arg(z) [2\pi]$ et $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) [2\pi]$

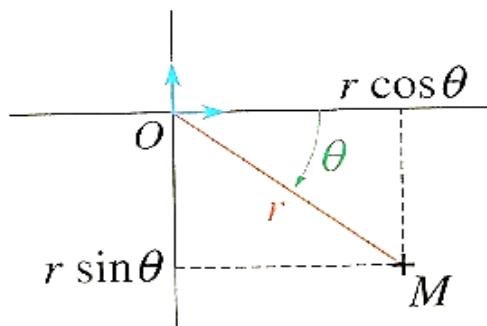
Démonstration :

- $z \in R_+^* \Leftrightarrow M \in (Ox)$ et $M \neq O \Leftrightarrow OM$ non et colinéaire à $\vec{u} \Leftrightarrow (\vec{u}; \overrightarrow{OM}) = 0 [2\pi]$
- $z \in iR_+^* \Leftrightarrow M \in (Oy)$ et $M \neq O \Leftrightarrow OM$ non et orthogonal à $\vec{u} \Leftrightarrow (\vec{u}; \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$

2. Repérages cartésiens et polaire

Dans le plan complexe, un point M distinct de O peut être repéré par ses coordonnées cartésiennes $(x ; y)$ ou par un couple $(r ; \theta)$ de coordonnées polaires avec $OM = r$, $\left(\vec{u}; \overrightarrow{OM}\right) = \theta$, on a alors

$$x = r \cos \theta \text{ et } y = r \sin \theta.$$



3. Forme trigonométrique

Propriété

Soit z un nombre complexe non nul. Alors il existe un réel strictement positif r et un réel θ tel que : $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$.

Démonstration :

Soit $z \in C^*$ quelconque et $a + ib$ sa forme algébrique.

Soit M le point d'affixe z . Comme z est différent de 0, M est distinct de O. Il admet donc un couple de

coordonnées polaires que l'on nommera $(r; \theta)$. Rappelons que $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ et que θ est un réel défini à un

multiple de 2π près par les égalités $\cos \theta = \frac{a}{r}$ et $\sin \theta = \frac{b}{r}$.

Alors $a = r \cos \theta$ et $b = r \sin \theta$. D'où : $z = a + ib = r \cos \theta + ir \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

Propriété

Soient z et z' deux nombres complexes tels que

$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ et $z' = r'(\cos \theta' + i \sin \theta')$ avec r et r' strictement positifs. Alors :

$$z = z' \Leftrightarrow r = r' \text{ et } \theta \equiv \theta' [2\pi]$$

Démonstration :

- Si $r = r'$ et $\theta = \theta' [2\pi]$, alors il est évident que $r(\cos \theta + i \sin \theta) = r'(\cos \theta' + i \sin \theta')$ et donc que $z = z'$
- Inversement, supposons que $z = z'$. Alors les points M et M' d'affixes respectives z et z' seront confondus.

On aura alors $|z|^2 = |z'|^2$. D'où $(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 = (r' \cos \theta')^2 + (r' \sin \theta')^2$ soit encore

$r^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r'^2(\cos^2 \theta' + \sin^2 \theta')$, ce qui implique que $r^2 = r'^2$. Mais r et r' étant positifs, on en déduit que $r = r'$.

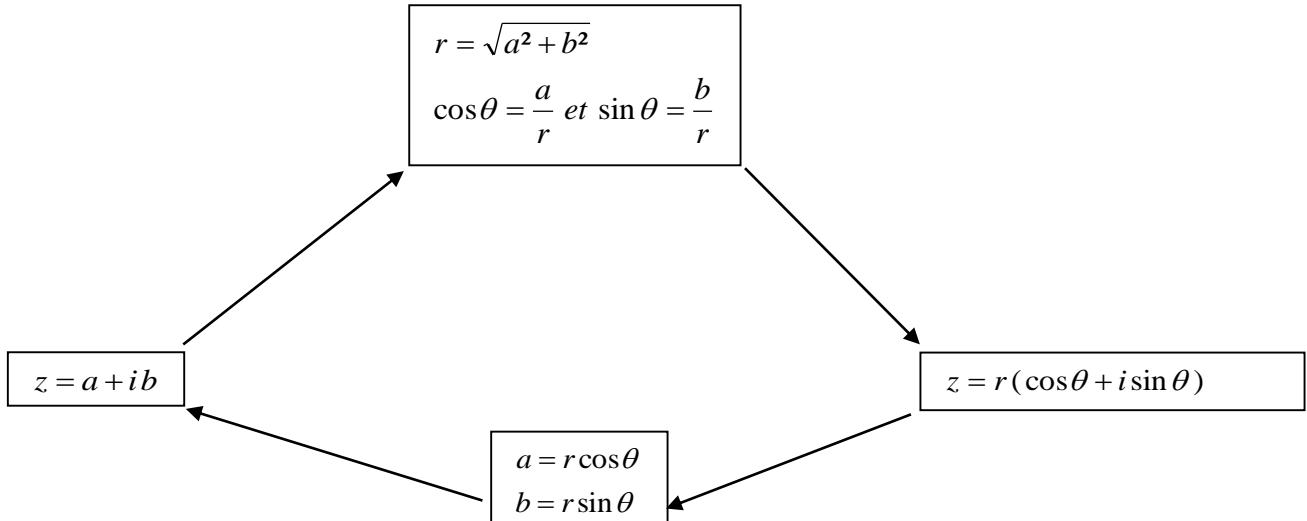
Rappelons alors que $z = z'$ c'est-à-dire que $r(\cos\theta + i \sin\theta) = r'(\cos\theta' + i \sin\theta')$. D'où :

$\cos\theta + i \sin\theta = \cos\theta' + i \sin\theta'$. La forme algébrique d'un nombre complexe étant unique, on en déduit que

$\cos\theta = \cos\theta'$ et que $\sin\theta = \sin\theta'$. D'où l'égalité de θ et de θ' à un multiple de 2π près.

Définition

L'écriture de z sous la forme $z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$ où r est un réel strictement positif et θ un réel quelconque s'appelle forme trigonométrique de z .



Exemples :

Ecrivons sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

- Si $z = 3$, alors $a = 3$ et $b = 0$. Donc $r = \sqrt{3^2 + 0^2} = 3$, $\cos\theta = \frac{3}{3} = 1$ et $\sin\theta = \frac{0}{3} = 0$, ce qui donne

$\theta \equiv 0 [2\pi]$. On en conclut que la forme trigonométrique de z est : $z = 3(\cos 0 + i \sin 0)$.

- Si $z = -4$, alors $a = -4$ et $b = 0$. Donc $r = \sqrt{(-4)^2 + 0^2} = 4$, $\cos\theta = \frac{-4}{4} = -1$ et $\sin\theta = \frac{0}{4} = 0$, ce qui

donne $\theta \equiv \pi [2\pi]$. On en conclut que la forme trigonométrique de z est : $z = 4(\cos\pi + i \sin\pi)$.

- Si $z = 2i$, alors $a = 0$ et $b = 2$. Donc $r = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$, $\cos\theta = \frac{0}{2} = 0$ et $\sin\theta = \frac{2}{2} = 1$, ce qui donne

$\theta = \frac{\pi}{2} [2\pi]$. On en conclut que la forme trigonométrique de z est : $z = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2})$.

- Si $z = -1 + i$, alors $a = -1$ et $b = 1$. Donc $r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $\cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ et

$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, ce qui donne $\theta \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi]$.

On en conclut que la forme trigonométrique de z est : $z = \sqrt{2} (\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4})$.

Propriété (argument et opérations)

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls et n un entier naturel quelconque. Alors :

$$\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z') [2\pi] ; \quad \arg(z^n) = n \times \arg(z) [2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) [2\pi] ; \quad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') [2\pi]$$

Démonstration :

- Soient $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ et $z' = r'(\cos \theta' + i \sin \theta')$ les formes trigonométriques de z et z' , avec

$$\arg(z) = \theta [2\pi] \text{ et } \arg(z') = \theta' [2\pi]. \text{ Alors :}$$

$$z \times z' = r(\cos \theta + i \sin \theta) \times r'(\cos \theta' + i \sin \theta') = rr'(\cos \theta + i \sin \theta) \times (\cos \theta' + i \sin \theta')$$

$$= rr'[(\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta') + i(\cos \theta \sin \theta' + \cos \theta' \sin \theta)] = rr'[\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')]$$

On en déduit que : $\arg(z \times z') = \theta + \theta' [2\pi]$.

- Admis

- Comme $z \times \frac{1}{z} = 1$, alors $\arg\left(z \times \frac{1}{z}\right) = \arg(1) = 0 [2\pi]$. Donc : $\arg(z) + \arg\left(\frac{1}{z}\right) = 0 [2\pi]$. D'où

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) [2\pi].$$

- Comme $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$, alors $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg\left(z \times \frac{1}{z'}\right) = \arg(z) + \arg\left(\frac{1}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') [2\pi]$

Conséquence

Soit z un nombre complexe non nul et k un réel non nul. Alors :

$$\arg(k \times z) = \begin{cases} \arg(z) [2\pi] & \text{si } k > 0 \\ \arg(z) + \pi [2\pi] & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

Exemples :

Soient $z = 1 + i$ et $z' = \sqrt{3} - i$.

Calculons $\arg(z)$, $\arg(z')$, $\arg(zz')$ et $\arg\left(\frac{z}{z'}\right)$:

Comme $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, alors

$$z = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\text{D'où } \arg(z) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

De même $|z'| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = 2$. Alors :

$$z' = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right). \text{ D'où}$$

$$\arg(z') = -\frac{\pi}{6} [2\pi].$$

Il en découle que

$$\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z') = \frac{\pi}{12} [2\pi] \text{ et que}$$

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') = \frac{5\pi}{12} [2\pi].$$

Les calculs précédents permettent alors de calculer le

cosinus et le sinus de $\frac{\pi}{12}$ et de $\frac{5\pi}{12}$. Pour cela, il

suffit de déterminer les formes algébriques et

trigonométriques de $z \times z'$ et de $\frac{z}{z'}$:

Comme $|z \times z'| = |z| \times |z'| = 2\sqrt{2}$ et que

$$\arg(z \times z') = \frac{\pi}{12} [2\pi], \text{ alors la forme}$$

trigonométrique de $z \times z'$ est :

$$z \times z' = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right).$$

Mais sa forme algébrique est

$$z \times z' = (1+i)(\sqrt{3}-i) = (\sqrt{3}+1)+i(\sqrt{3}-1). \text{ Par}$$

identification, on obtient alors : $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ et

$$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

En suivant la même démarche, on a :

$$\frac{z}{z'} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right) \text{ d'une part et}$$

$$\frac{z}{z'} = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i} = \frac{(1+i)(\sqrt{3}+i)}{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)} = \frac{\sqrt{3}-1}{4} + i\frac{\sqrt{3}+1}{4}$$

d'autre part. En identifiant, on conclut alors que

$$\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \text{ et que } \sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

2) Calculons $(\sqrt{3}-i)^6$ en déterminant son module et un de ses arguments :

$$\left|(\sqrt{3}-i)^6\right| = \left|\sqrt{3}-i\right|^6 = 2^6 = 64 \text{ et}$$

$$\arg((\sqrt{3}-i)^6) = 6\arg(\sqrt{3}-i) = 6 \times \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \pi [2\pi]$$

$$\text{Donc : } (\sqrt{3}-i)^6 = 64(\cos\pi + i\sin\pi) = -64.$$

Propriété

Pour tous points A, B, C et D du plan complexe distincts deux à deux, on a :

$$\arg(z_B - z_A) = \left(\vec{u}; \overrightarrow{AB}\right); [2\pi] \text{ et } \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}\right) [2\pi]$$

Démonstration :

Cours

- Soit M le point du plan tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$. Alors : $z_B - z_A = z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{OM}}$.

Donc $\arg(z_B - z_A) = \arg(z_M) = (\vec{u}; \overrightarrow{OM}) = (\vec{u}; \overrightarrow{AB}) [2\pi]$

$$\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_A)$$

$$= (\vec{u}; \overrightarrow{CD}) - (\vec{u}; \overrightarrow{AB})$$

$$= (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) [2\pi]$$

D'après la relation de Chasles sur les angles orientés.

Exemple :

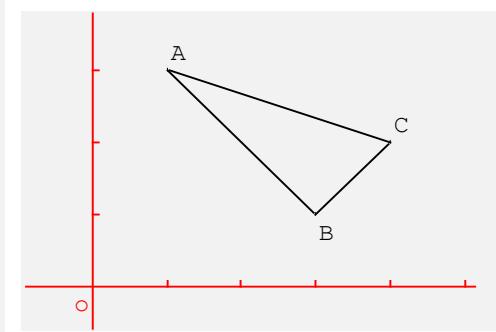
Soient A, B et C les points du plan complexe d'affixes respectives $z_A = 1 + 3i$, $z_B = 3 + i$ et $z_C = 4 + 2i$.

Démontrons que ABC est un triangle rectangle.

La figure semble indiquer que l'angle droit est au sommet B. C'est pourquoi nous allons calculer :

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) &= \arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = \arg\left(\frac{(4+2i)-(3+i)}{(1+3i)-(3+i)}\right) \\ &= \arg\left(\frac{1+i}{-2+2i}\right) = \arg\left(\frac{(1+i)(-2-2i)}{(-2+2i)(-2-2i)}\right) \\ &= \arg\left(\frac{-4i}{(-2)^2+2^2}\right) = \arg\left(-\frac{1}{2}i\right) = -\frac{\pi}{2} [2\pi] \quad \text{Le} \end{aligned}$$

triangle ABC est donc rectangle en B.



Propriété

- A, B et C (distincts) sont alignés ssi $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B}\right) = 0 \quad (\pi)$.
- A, B et C (distincts), (BC) et (AC) sont perpendiculaires ssi $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B}\right) = \frac{\pi}{2} \quad (\pi)$.
- A, B, C et D (distincts), (AB) et (CD) sont parallèles ssi $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_A - z_B}\right) = 0 \quad (\pi)$.
- A, B, C et D (distincts), (AB) et (CD) sont perpendiculaires ssi $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_A - z_B}\right) = \frac{\pi}{2} \quad (\pi)$.

VIII. Forme exponentielle d'un nombre complexe :

1. Exponentielle complexe

Soit f la fonction définie de \mathbf{R} dans \mathbf{C} par $f(\theta) = \cos\theta + i \sin\theta$. Alors :

$$\begin{aligned} f(\theta) \times f(\theta') &= (\cos\theta + i \sin\theta)(\cos\theta' + i \sin\theta') = \cos\theta \cos\theta' - \sin\theta \sin\theta' + i(\sin\theta \cos\theta' + \sin\theta' \cos\theta) \\ &= \cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta') = f(\theta + \theta') \end{aligned}$$

Cette fonction f possède donc la propriété caractéristique des fonctions exponentielles. Pour cette raison, on posera :

Définition

Soit θ un réel quelconque. On appelle exponentielle de $i\theta$ le nombre complexe noté $e^{i\theta}$ défini par $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$. Les nombres de la forme $e^{i\theta}$ sont appelés exponentielles complexes.

Exemples :

$$e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad e^{-i\frac{\pi}{4}} = \cos(-\frac{\pi}{4}) + i \sin(-\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Cas particuliers : $e^{i0} = 1$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ et $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$

Conséquence

Pour tout réel θ , $|e^{i\theta}| = 1$ et $\arg(e^{i\theta}) = \theta [2\pi]$

Propriété

Pour tous réels θ et θ' et pour tout entier naturel n , on a :

$$1. \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} ; \quad 2) \quad e^{i(\theta+\pi)} = -e^{i\theta} ; \quad 3) \quad e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$$

$$4. \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} ; \quad 5) \quad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$$

Démonstration :

$$1. \overline{e^{i\theta}} = \overline{\cos\theta + i \sin\theta} = \cos\theta - i \sin\theta = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = e^{-i\theta}$$

$$2. \quad e^{i(\theta+\pi)} = \cos(\theta + \pi) + i \sin(\theta + \pi) = -\cos\theta - i \sin\theta$$

3. Posons $Z = (e^{i\theta})^n$. Alors $|Z| = |(e^{i\theta})^n| = |e^{i\theta}|^n = 1^n = 1$ car $|e^{i\theta}| = 1$. De plus,

$$\arg(Z) = \arg((e^{i\theta})^n) = n \arg(e^{i\theta}) = n\theta [2\pi]$$

Donc Z a pour forme algébrique : $Z = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$ et par conséquent $Z = e^{in\theta}$.

4. Posons $Z = \frac{1}{e^{i\theta}}$. Alors $|Z| = \left| \frac{1}{e^{i\theta}} \right| = \frac{1}{|e^{i\theta}|} = 1$ et $\arg(Z) = \arg\left(\frac{1}{e^{i\theta}}\right) = -\arg(e^{i\theta}) = -\theta [2\pi]$.

Donc Z a pour forme algébrique : $Z = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta)$ et par suite $Z = e^{-i\theta}$.

$$5. \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i\theta} \times \frac{1}{e^{i\theta'}} = e^{i\theta} \times e^{-i\theta'} = e^{i(\theta-\theta')}$$

Remarques :

- La propriété 3 permet de retrouver rapidement les formules d'addition des sinus et cosinus, ceci en identifiant les parties réelles et les parties imaginaires des deux membres :

$$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')} \Leftrightarrow (\cos \theta + i \sin \theta) \times (\cos \theta' + i \sin \theta') = \cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' = \cos(\theta + \theta') \\ \cos \theta \sin \theta' + \cos \theta' \sin \theta = \sin(\theta + \theta') \end{cases}$$

- La propriété 4, pour $n = 2$, permet par identification des parties réelles et imaginaires des deux membres, de retrouver les formules de duplication

$$\bullet (e^{i\theta})^2 = e^{i2\theta} \Leftrightarrow (\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos(2\theta) + i \sin(2\theta) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos(2\theta) \\ 2 \sin \theta \cos \theta = \sin(2\theta) \end{cases}$$

La propriété 4 est connue sous le nom de **formule de Moivre** ; elle peut aussi s'écrire :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

Exemple :

Calculons $\left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5$ en utilisant son écriture exponentielle :

Comme $\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$, alors $\left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5 = (e^{i\frac{\pi}{3}})^5 = e^{i\frac{5\pi}{3}} = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$

Propriété (Formules d'Euler)

Pour tout réel θ , on a : $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Démonstration :

Il suffit d'écrire les formules $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$ et $z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$ pour $z = e^{i\theta}$. En effet, pour $z = e^{i\theta}$,

$$\bar{z} = e^{-i\theta}, \operatorname{Re}(z) = \cos\theta \text{ et } \operatorname{Im}(z) = \sin\theta.$$

Exemple :

Soit $Z = 1 + e^{i\theta}$ avec $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. Ecrivons Z sous forme trigonométrique :

$$Z = e^{\frac{i\theta}{2}}(e^{-\frac{i\theta}{2}} + e^{\frac{i\theta}{2}}) = e^{\frac{i\theta}{2}} \times 2\cos\theta = 2\cos\theta(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}), \text{ ce qui est la forme trigonométrique de } Z \text{ car, } \theta$$

étant compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, $2\cos\theta$ est strictement positif et est donc bien égal au module de Z .

Application

Linéariser le polynôme $P = \cos^2 5x \sin 3x$.

Correction

$$\cos 5x = \frac{e^{i5x} + e^{-i5x}}{2}$$

$$\cos^2 5x = \left(\frac{e^{i5x} + e^{-i5x}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}(e^{i10x} + 2 + e^{-i10x})$$

$$\sin 3x = \frac{e^{i3x} - e^{-i3x}}{2i}$$

$$\cos^2 5x \sin 3x$$

$$= \frac{1}{4}(e^{i10x} + 2 + e^{-i10x}) \times \frac{e^{i3x} - e^{-i3x}}{2i}$$

$$= \frac{1}{8i}(e^{i13x} - e^{i7x} + 2e^{i3x} - 2e^{-i3x} + e^{-i7x} - e^{-i13x})$$

$$= \frac{1}{8i}(e^{i13x} - e^{-i13x} - e^{i7x} + e^{-i7x} + 2e^{i3x} - 2e^{-i3x})$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{e^{i13x} - e^{-i13x}}{2i} - \frac{e^{i7x} - e^{-i7x}}{2i} + 2\frac{e^{i3x} - e^{-i3x}}{2i}\right)$$

$$= \frac{1}{4}(\sin 13x - \sin 7x + 2\sin 3x)$$

2. Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul

Soit z un nombre complexe non nul et $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ sa forme trigonométrique, avec $r > 0$. Alors, avec les notations introduites précédemment, on peut aussi écrire que $z = re^{i\theta}$.

Définition

Soit z un nombre complexe non nul. Notons $r = |z|$ et $\theta = \arg(z) [2\pi]$. Alors l'écriture de z sous la forme

$z = r e^{i\theta}$ s'appelle forme exponentielle de z .

Exemple :

$$2 = 2e^{i0}, \quad -3 = 3e^{i\pi}, \quad 5i = 5e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad 1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Les propriétés énoncées ci-dessous sont faciles à mémoriser du fait de leur similarité avec les propriétés des puissances. De plus, elles permettent de résumer conjointement les propriétés des modules et des arguments ; il suffit d'avoir à l'esprit que lorsque la forme exponentielle de z est $z = r e^{i\theta}$ (avec $r > 0$), cela signifie que

$$|z| = r \text{ et que } \arg(z) = \theta [2\pi]$$

Propriété 1

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls de formes exponentielles $z = r e^{i\theta}$ et

$z' = r' e^{i\theta'}$ et soit n un entier naturel non nul. Alors :

$$\overline{z} = r e^{-i\theta} ; \quad -z = r e^{i(\theta+\pi)} ; \quad z \times z' = rr' e^{i(\theta+\theta')} ; \quad z^n = r^n e^{in\theta} ; \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\theta} ; \quad \frac{z}{z'} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta-\theta')}$$

Exemple :

En utilisant ces propriétés, déterminons la forme exponentielle des nombres complexes suivants :

$$(-1+i)^8 = \left(\sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}} \right)^8 = (\sqrt{2})^8 e^{i\frac{24\pi}{4}} = 2^4 e^{6i\pi} = 16 e^{i0}$$

$$\frac{2-2i}{\sqrt{3}+i} = \frac{2\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2 e^{i\frac{\pi}{6}}} = \sqrt{2} e^{i(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})} = \sqrt{2} e^{-i\frac{5\pi}{12}}$$

IX. Racines $n^{\text{èmes}}$ d'un nombre complexe

1. Racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité

On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$ l'ensemble des complexes de module 1 (les affixes des points du cercle trigonométrique).

Définition

soit $n \in \mathbb{N} - \{0; 1\}$ on appelle **racine n -ième de l'unité** toute solution complexe de l'équation $z^n = 1$ d'inconnue z . l'ensemble des **racine n -ième de l'unité** est noté $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} / z^n = 1\}$

a) Etude des cas particulier $n \in \{2; 3; 4\}$

- Cas $n=2$

Les racines carrés de l'unité sont les solutions de l'équation $z^2 = 1$ dans \mathbb{C}

Les solutions de l'équation $z^2 = 1$ dans \mathbb{C} sont 1 et -1 et $\mathbb{U}_2 = \{-1; 1\}$

- Cas $n=3$

On considère l'équation (E_3) : $z^3 = 1$ si z est une solution de l'équation (E_3) alors : $|z^3| = 1$ c à d $|z|^3 = 1$ donc $|z| = 1$ car $|z|$ est un nombre réel positif .

Donc toutes les solutions de l'équation (E_3) s'écrit sous la forme $e^{i\theta}$ et vérifient $e^{i3\theta} = 1$ c à d $3\theta = 0[2\pi]$

Donc $\theta = k \frac{2\pi}{3}$ tel que $k \in \mathbb{Z}$.

Les racines cubiques de l'unité sont des nombres complexes $e^{ik\frac{2\pi}{3}}$ tel que $k \in \mathbb{Z}$.posons

$$\omega_k = e^{ik\frac{2\pi}{3}} = (\omega_1)^k \text{ tel que } k \in \mathbb{Z} \quad \omega_0 = 1 \text{ et } \omega_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et on note à } j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\omega_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ donc } \omega_2 = j^2 + \bar{j} \text{ et } \omega_3 = e^{i\frac{8\pi}{3}} = 1 \text{ et } \omega_4 = e^{i\frac{10\pi}{3}} = e^{i\frac{2\pi}{3}} \cdot e^{i2\pi} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} = j = \omega_1 \text{ et}$$

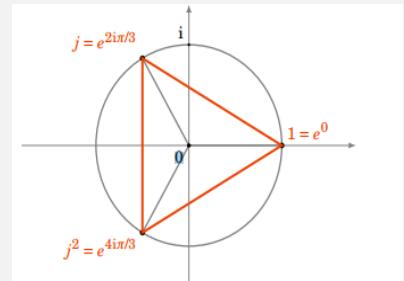
$$\omega_5 = \omega_2 \text{ donc en général } (\forall p \in \mathbb{Z}) \begin{cases} \omega_{3p} = e^{ip(2\pi)} = 1 \\ \omega_{3p+1} = e^{ip(2\pi)} \times e^{i\frac{2\pi}{3}} = j \quad \text{tel que } \mathbb{Z} = \{3p \cup 3p+1 \cup 3p+2 / p \in \mathbb{Z}\} \text{ et par} \\ \omega_{3p+2} = e^{ip(2\pi)} \times e^{i\frac{4\pi}{3}} = j^2 \end{cases}$$

suite $\mathbb{U}_3 = \{1; j; j^2\}$

Remarque :

- L'inverse d'un élément de \mathbb{U}_3 est un élément de \mathbb{U}_3 : $\frac{1}{j^2} = j$, $\frac{1}{j} = \bar{j} = j^2$
- Le produit de deux éléments de \mathbb{U}_3 est un élément de \mathbb{U}_3
- Comme $|j^2| = |j| = |1| = 1$ alors les points A_0, A_1 et A_2 d'affixes respectives $1, j$ et j^2 appartiennent au cercle trigonométrique et on a

\times	1	j	j^2
1	1	j	j^2
j	j	j^2	1
j^2	j^2	1	j



Et comme $-j^2 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ alors $\arg(-j^2) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

- Cas n=4

On considère l'équation (E_4) : $z^4 = 1$ si z est une solution de l'équation (E_4) alors : $|z|^4 = 1$ c à d $|z|^4 = 1$ donc

$|z| = 1$ car $|z|$ est un nombre réel positif .

Donc toutes les solutions de l'équation (E_4) s'écrit sous la forme $e^{i\theta}$ et vérifient $e^{i4\theta} = 1$ c à d $3\theta = 0[2\pi]$

Donc $\theta = k \frac{2\pi}{4}$ tel que $k \in \mathbb{Z}$.

Les racines d'ordre 4 de l'unité sont des nombres complexes $e^{ik\frac{2\pi}{4}}$ tel que $k \in \mathbb{Z}$. posons

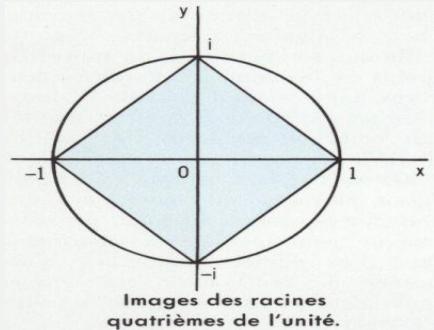
$\omega_k = e^{ik\frac{2\pi}{4}} = (\omega_1)^k$ tel que $k \in \mathbb{Z}$ $\omega_0 = 1$ et $\omega_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ $\omega_2 = i^2 = -1$ et $\omega_3 = i^3 = -i$ et $\omega_4 = i^4 = 1$ et $\omega_5 = i$ et $\omega_6 = -1$ et $\omega_7 = -i$

En général : si r est le reste de la division euclidienne de k par 4 alors $k = 4p + r$ avec $0 \leq r \leq 3$ alors donc $\omega_k = i^r$ et par suite $\mathbb{U}_4 = \{1, i, -i, 1\}$

Remarque :

- L'inverse d'un élément de \mathbb{U}_4 est un élément de \mathbb{U}_4
- Le produit de deux éléments de \mathbb{U}_4 est un élément de \mathbb{U}_4
- Les points A_0, A_1, A_2 et A_3 d'affixes respectives $1, i, -1$ et $-i$ sont des sommets de carré circonscrit par le cercle trigonométrique

\times	1	i	-1	$-i$
1	1	i	-1	$-i$
i	i	-1	$-i$	1
-1	-1	$-i$	1	i
$-i$	$-i$	1	i	-1



Propriété

Le nombre de racines n ième de l'unité est n et s'écrit sous la forme $e^{ik\frac{2\pi}{n}}$ tel que $k \in \mathbb{N}$

c à d $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{ik\frac{2\pi}{n}} / k \in \mathbb{N} \text{ et } 0 \leq k \leq n-1 \right\}$ et $\text{card } \mathbb{U}_n = n$

Démonstration :

- Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$ on considère dans \mathbb{C} l'équation (E_n) : $z^n = 1$ (ses solutions sont des racines n ième de l'unité). si z est une solution de l'équation (E_n) alors $|z|$ est aussi solution de l'équation (E_n) alors $|z| = 1$

Donc toutes les solutions de l'équation (E_n) s'écrit sous la forme $e^{i\theta}$ et vérifient $(e^{i\theta})^n = 1$ c à d $e^{in\theta} = 1$

alors $\theta = k \frac{2\pi}{n}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

- On pose $\omega_k = e^{ik\frac{2\pi}{n}} = (\omega_1)^k$ tel que $k \in \mathbb{Z}$

soit r est le reste de la division euclidienne de k par n alors $k = np + r$ avec $0 \leq r \leq n-1$ on a

$$\omega_k = (\omega_1)^{np+r} = (\omega_1)^{np} (\omega_1)^r = ((\omega_1)^n)^p (\omega_1)^r = (\omega_1)^r \text{ car } (\omega_1)^n = 1 \text{ donc } \omega_k = (\omega_1)^r = \omega_r$$

Cours

ça veut dire que les racines n'ieme de l'unité sont des nombres complexes de la forme

$$e^{ik\frac{2\pi}{n}} \text{ tel que } 0 \leq k \leq n-1$$

- soit k et k' deux entiers naturels tels que $0 \leq k \leq n-1$ et $0 \leq k' \leq n-1$ et $\omega_k = \omega_{k'}$.

alors $e^{ik\frac{2\pi}{n}} = e^{ik'\frac{2\pi}{n}}$ donc $k \frac{2\pi}{n} = k' \frac{2\pi}{n} [2\pi] \Leftrightarrow k = k' [2\pi]$ alors $k=k'$ car sinon et si $k < k'$ alors $k'-k=np$

et $0 < k'-k < n$ et ça contradictoire avec $np < n$. est par suite $\text{card } \mathbb{U}_n = n$

Propriété

- Le produit de deux éléments de \mathbb{U}_n est un élément de \mathbb{U}_n
- L'inverse d'un élément de \mathbb{U}_n est un élément de \mathbb{U}_n

Remarque : si on pose $\omega_k = e^{ik\frac{2\pi}{n}}$ alors $\frac{1}{\omega_k} = \overline{\omega_k} = \omega_{n-k}$

Propriété

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$ pour tout k de $\{0; 1; 2; \dots; n-1\}$ on pose $\omega_k = e^{ik\frac{2\pi}{n}} = (\omega_1)^k$

Pour tout nombre relatif m on pose $S(m) = (\omega_0)^m + (\omega_1)^m + (\omega_2)^m + \dots + (\omega_{n-1})^m$

- Si m est n'est pas divisible par n alors $S(m) = 0$
- Si m est divisible par n alors $S(m) = n$

Démonstration :

$$\text{On a } S(m) = 1 + (\omega_1)^m + (\omega_2)^m + \dots + (\omega_{n-1})^m = 1 + (\omega_1)^m + (\omega_1^2)^m + \dots + (\omega_1^{n-1})^m$$

$$= 1 + \omega_1^m + (\omega_1^m)^2 + (\omega_1^m)^3 + \dots + (\omega_1^m)^{n-1}$$

$$\text{On sait que pour tout } t \neq 1 \quad 1 + t + t^2 + \dots + t^{n-1} = \frac{1 - t^n}{1 - t}$$

$$\omega_1^m = 1 \Leftrightarrow \left(e^{i \frac{2\pi}{n}} \right)^m = 1 \Leftrightarrow e^{i \frac{2m\pi}{n}} = 1$$

$$\text{Et on a} \quad \Leftrightarrow \frac{2m\pi}{n} = 0 [2\pi] \Leftrightarrow (\exists p \in \mathbb{Z}) / m = pn$$

\Rightarrow Si m est divisible par n aloet $S(m) = n$

\Rightarrow Si m est n'est pas divisible par n alors $\omega_1^m \neq 1$

Donc $S(m) = \frac{1 - (\omega_1^m)^n}{1 - \omega_1^m}$ comme $(\omega_1^m)^n = (\omega_1^n)^m = 1$ alors $S(m) = 0$

Exemple :

Les racine d'ordre 8 de l'unité sont $\omega_k = e^{ik\frac{2\pi}{n}}$ tels que $0 \leq k \leq 7$

$$\begin{aligned}\omega_0 &= 1 \text{ et } \omega_1 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i), \omega_2 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \omega_3 = e^{i\frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i) \text{ et } \omega_4 = e^{i\pi} = -1; \omega_5 = e^{i\frac{5\pi}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i); \\ \omega_6 &= e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i; \omega_7 = e^{i\frac{7\pi}{4}} = e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)\end{aligned}$$

Remarque que $\omega_7 = \overline{\omega_1}$ et $\omega_6 = \overline{\omega_2}$ et $\omega_5 = \overline{\omega_3}$

Propriété 1

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$ pour tout k de $\{0; 1; 2; \dots; n-1\}$ on pose $\omega_k = e^{ik\frac{2\pi}{n}} = (\omega_1)^k$ et M_k le point d'affixe ω_k

Les points M_0, M_1, \dots et M_{n-1} sont des sommet de polygone régulier circonscrit par le cercle trigonométrique

2. Racine n 'ième d'un nombre complexe non nul

On veut déterminer les racines n 'ièmes de $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$, c'est-à-dire des nombres

$z' = R(\cos \theta' + i \sin \theta')$ tels que $(z')^n = z$ équivaut à $r(\cos \theta + i \sin \theta) = R^n(\cos n\theta' + i \sin n\theta')$

$$r(\cos \theta + i \sin \theta) = R(\cos \theta' + i \sin \theta')$$

$$\begin{cases} R^n = r \\ n\theta' = \theta + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R = \sqrt[n]{r} \\ \theta' = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \end{cases}$$

$$z' = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + k2\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + k2\pi}{n} \right), \quad 0 \leq k \leq n-1$$

Propriété 2

Soit z un nombre complexe d'argument θ : $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ et soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$

Les racines n 'ieme de z sont des nombres complexes $z_k' = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + k2\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + k2\pi}{n} \right), \quad 0 \leq k \leq n-1$

Conclusions

- ◆ Tout nombre complexe a n racines $n^{\text{ièmes}}$ complexes : pour les trouver, il suffit de remplacer dans l'expression précédente k par $0, 1, \dots, n - 1$.
- ◆ Les points images de ces racines $n^{\text{ièmes}}$ sont les n sommets d'un n -gone régulier inscrit dans le cercle de rayon $\sqrt[n]{r}$ et de centre O .

Exemple

Déterminer les racines cubiques de $z = 1 + i$.

- ◆ Recherchons d'abord la forme trigonométrique de ce nombre. Il vient successivement :

$$z = 1 + i \quad : \quad a = 1, \quad b = 1$$

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

- ◆ Il est maintenant facile de déterminer les racines cubiques demandées :

$$z' = \sqrt[3]{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{4} + k2\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4} + k2\pi}{3} \right) = \sqrt[6]{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{12} + k \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{12} + k \frac{2\pi}{3} \right) \right)$$

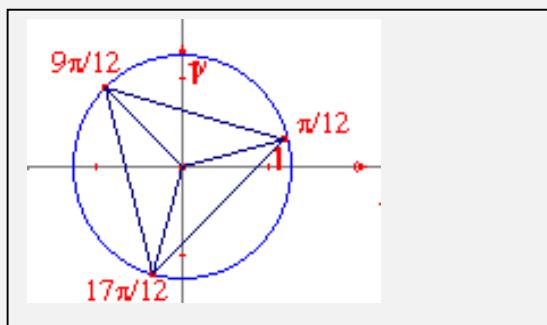
ce qui donne :

$$\bullet \quad k = 0 \quad z_1 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$$

$$\bullet \quad k = 1 \quad z_2 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{9\pi}{12} + i \sin \frac{9\pi}{12} \right)$$

$$\bullet \quad k = 2 \quad z_3 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{17\pi}{12} + i \sin \frac{17\pi}{12} \right)$$

- ◆ On peut représenter les solutions sur un cercle de rayon $\sqrt[6]{2}$



Application

1. Déterminer les racines cubiques de nombre complexe $1-i$
2. Déterminer les racines d'ordre n de -1 tel que $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$
3. Déterminer les racines d'ordre 6 de l'unité et écrire le résultat sous forme trigonométrique et algébrique puis

résoudre dans \mathbb{C} l'équation $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3 + \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^3 = 0$

X. L'équation de second degré dans

1. Racine carrée

Un nombre complexe admet toujours deux racines carrées opposées.

Note

Dans le cas où z est un réel, les racines sont faciles à calculer. Dans les autres cas, il est aisément de voir que les racines carrées seront de la forme $x+iy$ avec $xy \neq 0$.

Exemples

- ♦ Les racines carrées de -3 sont $\sqrt{3}i$ et $-\sqrt{3}i$ car $(\sqrt{3}i)^2 = -3$ et $(-\sqrt{3}i)^2 = -3$.
- ♦ Recherchons les racines carrées de $3+4i$

Méthode 1 : on cherche un nombre complexe $x+yi$ tel que $(x+yi)^2 = 3+4i$

$$x^2 - y^2 + 2xyi = 3+4i$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ y = \frac{2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \left(\frac{2}{x}\right)^2 = 3 \\ y = \frac{2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \frac{4}{x^2} = 3 \\ y = \frac{2}{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \\ y = \frac{2}{x} \end{cases} \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \quad \begin{array}{l} x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \\ \Delta = 9 - 4(1)(-4) = 25 \end{array}$$

$$x_1^2 = \frac{3+5}{2} = 4 \quad \text{et} \quad x_2^2 = \frac{3-5}{2} = -1$$

Comme x_2 est un nombre réel, $x_2^2 = -1$ est à rejeter. $x_1^2 = 4$ d'où $x = 2$ ou $x = -2$

Pour $x = 2$, on trouve $y = \frac{2}{2} = 1$.

Pour $x = -2$, on trouve $y = \frac{2}{-2} = -1$.

Les racines carrées sont donc : $2+i$, $-2-i$

Méthode 2 : on cherche un nombre complexe $x+yi$ tel que $(x+yi)^2 = 3+4i$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ -x^2y^2 = -4 \\ xy > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (-y^2) = 3 \\ x^2 \cdot (-y^2) = -4 \\ xy > 0 \end{cases}$$

On cherche donc deux nombres réels x^2 et $-y^2$ dont la somme est 3 et dont le produit est -4

On obtient $x^2 = 4$ et $-y^2 = -1$, ce qui donne $x = 2$ ou $x = -2$ et $y = 1$ ou $y = -1$
or $xy > 0$

Les racines carrées sont donc : $2+i$, $-2-i$

2. Equations du second degré dans \mathbb{C}

On considère trois nombres complexes a , b et c tels que $a \neq 0$. On veut résoudre l'équation

$az^2 + bz + c = 0$, c'est-à-dire trouver les nombres x complexes qui vérifient cette équation. Discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$. Il existe forcément un nombre complexe δ tel que $\Delta = \delta^2$.

Propriété

Si l'on écrit $\Delta = b^2 - 4ac$ alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet deux solutions

complexes

$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$$

Remarque : Ce résultat généralise les formules bien connues lorsque a , b et c sont réelles. Comme quoi, il suffit de connaître le résultat ci-dessus pour retrouver les trois cas habituellement proposés ($\Delta > 0$, $= 0$ et < 0). En effet :

- Si $\Delta > 0$ alors, alors $\Delta = \sqrt{\Delta}^2$ et on peut reprendre $\delta = \sqrt{\Delta}$. On retrouve donc que

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$, alors $\Delta = 0^2$ et on peut prendre $\delta = 0$. On retrouve donc que

$$z_1 = \frac{-b}{2a} = z_2$$

- Si $\Delta < 0$ alors, alors $\Delta = -(-\Delta) = i^2(-\Delta) = (\sqrt{i(-\Delta)})^2$ car $-\Delta > 0$ et on peut reprendre $\delta = i\sqrt{-\Delta}$. On retrouve donc que

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Exemple 1:

Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

a) $z^2 + 5 = 0$

b) $z^2 + 3z + 4 = 0$

a) $z^2 + 5 = 0$

$$\Leftrightarrow z^2 = -5$$

$$\Leftrightarrow z^2 = 5i^2$$

$$\Leftrightarrow z = i\sqrt{5} \quad ou \quad z = -i\sqrt{5}$$

Les solutions sont donc $-i\sqrt{5}$ et $i\sqrt{5}$.

b) $z^2 + 3z + 4 = 0$

On calcule de discriminant Δ du trinôme :

$$\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 4 = -7$$

$\Delta < 0$ donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-3 + i\sqrt{7}}{2} = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i \quad \text{et}$$

$$z_2 = \frac{-3 - i\sqrt{7}}{2} = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i$$

Exemple 2

Résolution de l'équation $z^2 - i = 0$

Discriminant $\Delta = 0^2 - 4(i) = 4i$

Pour trouver δ , il s'agit d'écrire i comme un carré.

Or puisque $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ on a

$$i = e^{\frac{i\pi}{2}} = \left(e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

Comme $\Delta = 4i$, on peut donc prendre

$$\delta = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}(1+i)$$

L'équation $z^2 - i = 0$ admet donc deux solutions

$$\text{complexes } z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \text{ et } z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

Exemple 3 : Résolution de l'équation

$$z^2 + (3i - 4)z + 1 - 7i = 0$$

Discriminant $\Delta = (3i - 4)^2 - 4 \times 1 \times (1 - 7i)$

$$= 7 - 24i - 4 + 28i = 3 + 4i.$$

Pour chercher δ , on

l'écrit sous la forme $\delta = \alpha + i\beta$ avec α et β des réels. Alors

$$\delta^2 = \Delta \iff (\alpha + i\beta)^2 = 3 + 4i$$

$$\iff \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta i = 3 + 4i$$

$$\iff \alpha^2 - \beta^2 = 3 \text{ et } 2\alpha\beta = 4$$

$$\iff \alpha^2 - \beta^2 = 3 \text{ et } \beta = \frac{2}{\alpha}$$

$$\iff \alpha^2 - \left(\frac{2}{\alpha}\right)^2 = 3 \text{ et } \beta = \frac{2}{\alpha}$$

$$\iff \alpha^4 - 3\alpha^2 - 4 = 0 \text{ et } \beta = \frac{2}{\alpha}$$

Or en posant $X = \alpha^2$ l'équation précédente devient $X^2 - 3X - 4 = 0$, qui est une équation du second degré à coefficients réels. Après calculs du discriminant et des racines, on obtient

$$X^2 - 3X - 4 = (X + 1)(X - 4).$$

$$\text{Par conséquent } \alpha^4 - 3\alpha^2 - 4 = (\alpha^2 + 1)(\alpha^2 - 4).$$

Comme α est réel, on en déduit que

$$\delta^2 = \Delta \iff (\alpha^2 + 1)(\alpha^2 - 4) = 0 \text{ et } \beta = \frac{2}{\alpha}$$

$$\iff \alpha^2 - 4 = 0 \text{ et } \beta = \frac{2}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \left(\alpha = 2 \text{ et } \beta = \frac{2}{2} = 1\right)$$

$$\text{ou } \left(\alpha = -2 \text{ et } \beta = \frac{2}{-2} = -1\right)$$

On peut donc prendre $\delta = 2 + i$.

$$\text{L'équation } z^2 + (3i - 4)z + 1 - 7i = 0$$

admet donc deux solutions complexes

$$z_1 = \frac{4 - 3i + 2 + i}{2} = 3 - i$$

$$\text{et } z_2 = \frac{4 - 3i - 2 - i}{2} = 1 - 2i$$

Exercice corrigé

1. On considère le polynôme P de la variable complexe z , défini par :

$$P(z) = z^3 + (1 - i\sqrt{2})z^2 + (74 - i\sqrt{2})z - 74i\sqrt{2}.$$

a. Déterminer le nombre réel y tel que iy soit solution de l'équation $P(z) = 0$.

b. Trouver deux nombres réels a et b tels que, pour tout nombre complexe z , on ait

$$P(z) = (z - i\sqrt{2})(z^2 + az + b).$$

c. Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$.

Solution

1. a. iy solution de l'équation $P(z) = 0$, soit $P(iy) = 0$,
soit

$$\begin{aligned} & -iy^3 - (1 - i\sqrt{2})y^2 + (74 - i\sqrt{2})iy - 74i\sqrt{2} = 0 \\ \Leftrightarrow & (-y^2 + \sqrt{2}y) + i(-y^3 + \sqrt{2}y^2 + 74y - 74\sqrt{2}) = 0 \end{aligned}$$

Ceci donne le système $\begin{cases} y^2 + \sqrt{2}y = 0 \\ -y^3 + \sqrt{2}y^2 + 74y - 74\sqrt{2} = 0 \end{cases}$;

la première ligne donne comme solutions $y = 0$ qui ne

convient pas dans la seconde ligne et $y = \sqrt{2}$ qui convient.

b.

$$P(z) = (z - i\sqrt{2})(z^2 + az + b) = (z - i\sqrt{2})(z^2 + z + 74).$$

c. $P(z) = 0 : z^2 + z + 74 = 0$,

$\Delta = 1 - 296 = -295 = i^2 \times 5 \times 59$ d'où les racines

$$z_1 = i\sqrt{2}, z_2 = \frac{-1 + i\sqrt{295}}{2}, z_3 = \frac{-1 - i\sqrt{295}}{2}.$$

XI. Transformations planes

1. Translation

On considère $M(z)$, $M'(z')$ et $B(b)$.

M' est l'image de M par la translation de vecteur \overrightarrow{OB} équivaut à $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{MM'}$ ca d' $z' - z = b \Leftrightarrow z' = z + b$ cette écriture s'appelle l'écriture complexe de cette translation.

Propriété (translation)

On considère $M(z)$, $M'(z')$ et $B(b)$.

L'égalité $z' = z + b$ équivaut à dire que M' est l'image de M par la translation de vecteur \overrightarrow{OB} .

$z' = z + b$ est l'écriture complexe de cette translation.

2. Homothétie

On considère $M(z)$, $M'(z')$, $\Omega(\omega)$ et k un réel non nul.

M' est l'image de M par l'homothétie de centre Ω et de rapport k donc on a

$\overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}$ c à d $z' - \omega = k(z - \omega)$ cette écriture s'appelle l'écriture complexe de cette homothétie.

Propriété (Homothétie)

On considère $M(z)$, $M'(z')$, $\Omega(\omega)$ et k un réel non nul.

L'égalité $z' - \omega = k(z - \omega)$ équivaut à dire que M' est l'image de M par l'homothétie de centre Ω et de rapport k .

$z' - \omega = k(z - \omega)$ est l'écriture complexe de cette homothétie.

Exemple :

soit $\Omega(1 + 3i)$.

L'homothétie de rapport 2 et de centre Ω transforme $M(z)$ en $M'(z')$ tels que :

$$z' - (1 + 3i) = 2(z - (1 + 3i))$$

$$\text{i.e. } z' = 1 + 3i + 2z - 2 - 6i$$

$$\text{i.e. } z' = 2z - 1 - 3i$$

L'image de $K(7 - i)$ est le point d'affixe $z' = 2(7 - i) - 1 - 3i = 14 - 2i - 1 - 3i = 13 - 5i$.

3. Rotation

la rotation r d'angle θ et de centre Ω d'affixe ω

$M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par la rotation r c à d

$$\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'} \right) = \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left| \frac{z' - \omega}{z - \omega} \right| = 1 \\ \arg \left(\frac{z' - \omega}{z - \omega} \right) = \theta \end{cases} \Leftrightarrow \frac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\theta} \Leftrightarrow z' - \omega = e^{i\theta} (z - \omega).$$

Propriété (Rotation)

On considère $M(z)$, $M'(z')$, $\Omega(\omega)$ et θ un réel.

L'égalité $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$ équivaut à dire que M' est l'image de M dans la rotation de centre Ω et d'angle θ

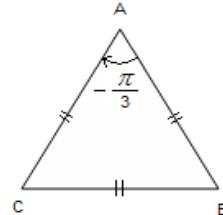
$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$ est l'écriture complexe de cette rotation.

Conséquences :

- ABC est un triangle équilatéral ssi :

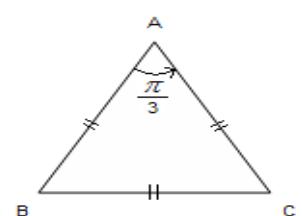
➤ B a pour image C dans la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, ssi

$$z_C - z_A = e^{\frac{i\pi}{3}}(z_B - z_A).$$



➤ B a pour image C dans la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}$, ssi

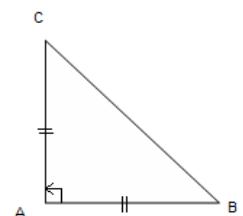
$$z_C - z_A = e^{-\frac{i\pi}{3}}(z_B - z_A).$$



- ABC est rectangle et isocèle en A ssi

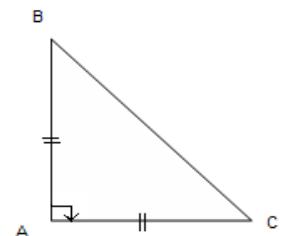
➤ B a pour image C dans la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$, ssi

$$z_C - z_A = e^{\frac{i\pi}{2}}(z_B - z_A).$$



➤ B a pour image C dans la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$, ssi

$$z_C - z_A = e^{-\frac{i\pi}{2}}(z_B - z_A).$$



Propriété

Soit φ une transformation du plan d'écriture $z' = az + b$ tels que a et b sont des nombres complexes avec $a \neq 0$

- 1) Si $a = 1$ alors φ est une translation de vecteur $\vec{u}(b)$
- 2) Si $a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ alors φ est une homothétie de rapport a et de centre $\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right)$
- 3) Si $|a| = 1$ et $a \neq 1$ alors φ est une rotation de centre $\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right)$ et d'angle $\theta = \arg a$
- 4) Si $|a| \neq 1$ alors $\varphi = RoH = HoR$ tels que H est l'homothétie de centre $\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right)$ et de rapport $|a|$ et R est la rotation de centre $\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right)$ et d'angle $\theta = \arg a$

Application

Soit F une transformation du plan définie par son écriture complexe.

Déterminer la nature de F et ses éléments caractéristiques

- 1) $z' = z - 1 + iz$;
- 2) $z' = \frac{3}{2}z + 1 - i$;
- 3) $z' = (\sqrt{3} - i)z + 1 + \sqrt{3}i$;
- 4) $z' = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z - 2i$

Exercices résolus

Exercice 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra 1 cm pour unité graphique.

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes, l'équation $\bar{z} - 3iz - 3 + 6i = 0$, \bar{z} étant le conjugué de z .
2. On considère le point A d'affixe $4 - 2i$. Déterminer la forme algébrique de l'affixe du point B tel que OAB soit un triangle équilatéral de sens direct.
3. Soit le point D d'affixe $2i$.
 - a. Représenter l'ensemble (E) des points M d'affixe z différente de $2i$ tels que :
$$\arg(z - 2i) = \frac{\pi}{4} + k \times 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$
 - b. Représenter l'ensemble (F) des points M d'affixe z tels que $z = 2i + 2e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$.
 4. A tout point M d'affixe $z \neq -2$, on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \frac{z - 1}{z + 2}$. Déterminer l'ensemble des points M tels que $|z'| = 1$.

Correction

1.

$$\begin{aligned} \bar{z} - 3iz - 3 + 6i &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - iy) - 3i(x + iy) - 3 + 6i &= 0, \text{ soit} \\ \Leftrightarrow x + 3y - 3 + i(-y - 3x + 6) &= 0 \\ \begin{cases} x + 3y - 3 = 0 \\ -3x - y + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3y + 3 \\ 8y - 3 = 0 \end{cases} \text{ et } z = \frac{15}{8} + i\frac{3}{8}. \\ \Leftrightarrow y = \frac{3}{8}, x = \frac{-9 + 24}{8} = \frac{15}{8} & \end{aligned}$$
2. OAB est un triangle équilatéral de sens direct si A a pour image B par la rotation de centre O , d'angle $\frac{\pi}{3}$.

$$r : z \rightarrow z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z \Rightarrow b = e^{i\frac{\pi}{3}}(4 - 2i)$$

$$= \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)(4 - 2i)$$
3. a. $\arg(z - 2i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Leftrightarrow (\vec{u}; \overrightarrow{DM}) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$; il s'agit de la demi-droite faisant un angle de 45° avec l'horizontale, passant par D et orientée vers la droite.
- b. $z = 2i + 2e^{i\theta} \Leftrightarrow z - 2i = 2e^{i\theta} \Leftrightarrow |z - 2i| = 2$: il s'agit du cercle de rayon 2 et de centre D .
4. $|z'| = 1 \Leftrightarrow |z - 1| = |\bar{z} + 2| = |\overline{z + 2}| = |z + 2|$ car le module du conjugué est le même que celui de l'original. Il s'agit du cercle de diamètre IJ où I a pour affixe 1 et J a pour affixe -2 privé des points I et J .

Exercice 2

Dans le plan complexe muni du repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points M et M' d'affixes respectives z et z' . On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, où x, x', y, y' sont des nombres réels.

On rappelle que \bar{z} désigne le conjugué de z et que $|z|$ désigne le module de z .

1. Montrer que les vecteurs \overrightarrow{OM} et $\overrightarrow{OM'}$ sont orthogonaux si et seulement si $\operatorname{Re}(z'\bar{z}) = 0$.

2. Montrer que les points O, M et M' sont alignés si et seulement si $\operatorname{Im}(z'\bar{z}) = 0$.

Applications

3. N est le point d'affixe $z^2 - 1$. Quel est l'ensemble des points M tels que les vecteurs \overrightarrow{OM} et \overrightarrow{ON} soient orthogonaux ?

4. On suppose z non nul. P est le point d'affixe $\frac{1}{z^2} - 1$. On recherche l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points O, N et P soient alignés.

a. Montrer que $\left(\frac{1}{z^2} - 1\right)\left(\overline{z^2 - 1}\right) = -z^2 \left|\frac{1}{z^2} - 1\right|^2$.

b. En utilisant l'équivalence démontrée au début de l'exercice, conclure sur l'ensemble recherché.

Correction

1. \overrightarrow{OM} a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OM'} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, ils

sont orthogonaux si et seulement si $xx' + yy' = 0$.

Calculons

$$z'\bar{z} = (x' + iy')(x - iy) = (x'x + y'y) + i(xy' - yx').$$

Donc $xx' + yy' = 0$ si et seulement si $\operatorname{Re}(z'\bar{z}) = 0$.

2. O, M et M' sont alignés si et seulement si

$$\det(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = 0 \Leftrightarrow xy' - yx' = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z'\bar{z}) = 0.$$

Applications

3. Prenons $z' = z^2 - 1 = x^2 - y^2 - 1 + 2xy$, alors

$$xx' + yy' = x(x^2 - y^2 - 1) + y(2xy) = x(x^2 + y^2 - 1)$$

Le produit scalaire est donc nul si $x = 0$ (axe des ordonnées) ou $x^2 - y^2 - 1 = 0$ (cercle trigonométrique).

$$4. \text{ a. On a } \overline{(z^2 - 1)} = \overline{(z^2 - 1)} = -\bar{z}^2 \left(-1 + \frac{1}{\bar{z}^2}\right) = -\bar{z}^2 \left(\frac{1}{z^2} - 1\right)$$

donc la condition du 2. se traduit par

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\left[\left(\frac{1}{z^2} - 1\right)\left(\overline{z^2 - 1}\right)\right] &= \operatorname{Im}\left[\left(\frac{1}{z^2} - 1\right)\left(-\bar{z}^2\right)\left(\frac{1}{z^2} - 1\right)\right] \\ &= \operatorname{Im}\left(-\bar{z}^2 \left|\frac{1}{z^2} - 1\right|^2\right) \end{aligned}$$

b. Comme $\left|\frac{1}{z^2} - 1\right|^2$ est réel, la partie imaginaire est celle

de $-\bar{z}^2 = -(x - iy)^2 = -x^2 + y^2 + 2ixy$. L'ensemble cherché est la réunion des axes des abscisses et des ordonnées.

Exercices résolus

Exercice

3

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. Unité graphique : 2 cm.

1. On rappelle que, pour tous nombres complexes a et b , $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$. Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes l'équation $z^3 = 8$.

2. On désigne par A , B et C les points d'affixes respectives a , b et c définies par : $a = 2$, $b = -1 + i\sqrt{3}$ et $c = -1 - i\sqrt{3}$.

On appelle r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r' la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

On pose $B' = r'(B)$ et $C' = r(C)$ et on note b' et c' les affixes respectives de B' et C' .

a. Placer les points A , B et C dans le repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

Dans la suite de l'exercice, on complètera cette figure.

b. Montrer que $b' = 2 + \sqrt{3} + 3i$.

c. Montrer que b' et c' sont des nombres conjugués.

3. On appelle M , N , P et Q les milieux respectifs des segments $[CB]$, $[BB']$, $[B'C']$ et $[C'C]$. On note m , n , p et q leurs affixes.

a. Montrer que l'affixe n du point N est égale à $\frac{1+\sqrt{3}}{2}(1+i\sqrt{3})$. En déduire que les points O , N et C sont alignés.

b. Montrer que $n+1 = i(q+1)$. Que peut-on en déduire pour le triangle MNQ ?

c. Montrer que le quadrilatère $MNPQ$ est un carré.

Correction

1. Avec $a = z$ et $b = 2$ on a : $z^3 - 2^3 = (z - 2)(z^2 + 2z + 4)$;

$\Delta = 4 - 16 = -12 = (2i\sqrt{3})^2$ d'où les solutions $z_0 = 2$,

$$z_1 = \frac{-2 - 2i\sqrt{3}}{2} = -1 - i\sqrt{3}, z_2 = \frac{-2 + 2i\sqrt{3}}{2} = -1 + i\sqrt{3}$$

2. a. $a = 2$, $b = -1 + i\sqrt{3}$ et $c = -1 - i\sqrt{3}$

b. $b' - a = e^{-i\frac{\pi}{2}}(b - a)$

$$\Leftrightarrow b' = 2 - i(-1 + i\sqrt{3} - 2) = 2 + \sqrt{3} + 3i$$

$$\Leftrightarrow c' = 2 + i(-1 - i\sqrt{3} - 2) = 2 + \sqrt{3} - 3i$$

c. $c' - a = e^{i\frac{\pi}{2}}(c - a)$. Qui est bien le conjugué de b' .

$$\begin{aligned} 3. \text{ a. } n &= \frac{b + b'}{2} = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} + 3i) \\ &= \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3} + i(\sqrt{3} + 3)) \end{aligned}$$

et $\frac{1+\sqrt{3}}{2}(1+i\sqrt{3}) = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}+i\sqrt{3}+3)$. C'est

pareil.

$$n = \frac{1+\sqrt{3}}{2}(1+i\sqrt{3}) = \frac{1+\sqrt{3}}{2}c \Leftrightarrow \overrightarrow{ON} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{OC},$$

les vecteurs sont colinéaires, les points sont alignés.

Exercices résolus

b. M a pour affixe $\frac{b+c}{2} = -1$, q est le milieu de $[CC']$

et a pour affixe le conjugué de n (puisque c et c' sont les conjugués respectifs de b et b'), soit

$$q = \frac{1+\sqrt{3}}{2}(1-i\sqrt{3}).$$

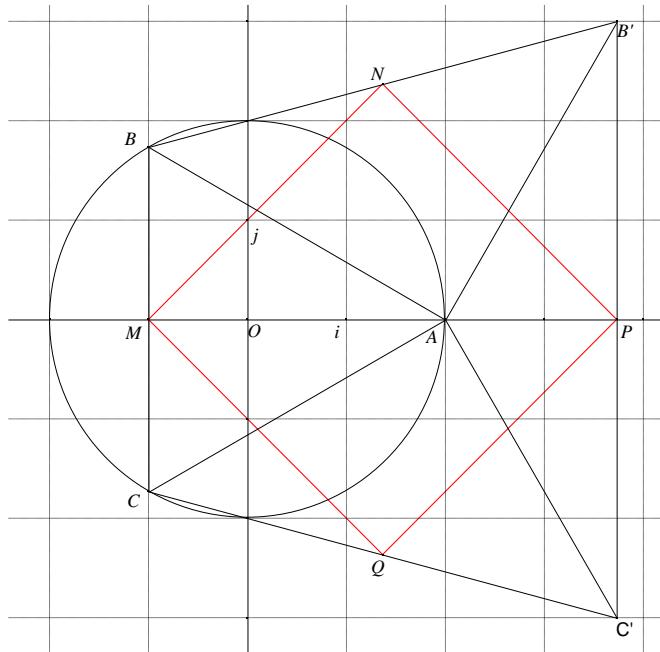
On a alors

$$n+1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}(1+i\sqrt{3}) + 1 = \frac{3+\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3}+3}{2} \text{ et}$$

$$i(q+1) = i\frac{1+\sqrt{3}}{2}(1-i\sqrt{3}) + i = \frac{\sqrt{3}+3}{2} + i\frac{3+\sqrt{3}}{2}$$

d'où $n+1 = i(q+1)$. Le triangle MNQ est un triangle rectangle isocèle car le vecteur \overrightarrow{MQ} a pour image le vecteur \overrightarrow{MN} par la rotation r .

c. Comme Q est le symétrique de N par rapport à (Ox) et que M et P sont sur (Ox) , les triangles MNP et MQP sont isométriques donc $MNPQ$ est un carré.



Exercice 4

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. Unité graphique : 0,5 cm. On note j le nombre

complexe $e^{i\frac{2\pi}{3}}$. On considère les points A , B et C d'affixes respectives $a = 8$, $b = 6j$ et $c = 8j^2$.

Soit A' l'image de B par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$, B' l'image de C par la rotation de centre A et

d'angle $\frac{\pi}{3}$, C' l'image de A par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

1. Placer les points A , B , C , A' , B' et C' dans le repère donné.

2. On appelle a' , b' et c' les affixes respectives des points A' , B' et C' .

a. Calculer a' . On vérifiera que a' est un nombre réel.

b. Montrer que $b' = 16e^{-i\frac{\pi}{3}}$. En déduire que O est un point de la droite (BB') .

c. On admet que $c' = 7 + 7i\sqrt{3}$. Montrer que les droites (AA') , (BB') et (CC') sont concourantes en O .

3. On se propose désormais de montrer que la distance $MA+MB+MC$ est minimale lorsque $M = O$.

a. Calculer la distance $OA + OB + OC$.

b. Montrer que $j^3 = 1$ et que $1+j+j^2=0$.

Exercices résolus

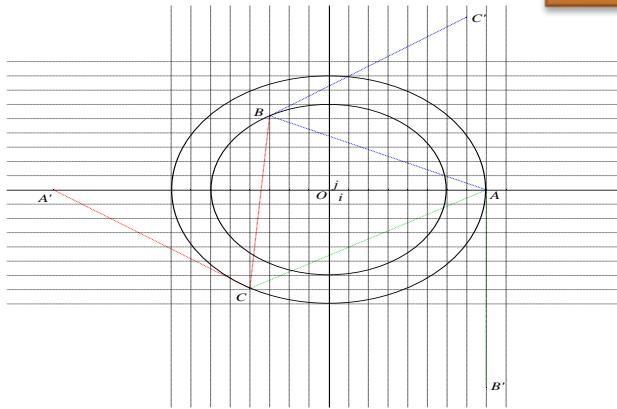
c. On considère un point M quelconque d'affixe z du plan complexe. On rappelle que $a = 8$, $b = 6j$ et $c = 8j^2$.

Déduire des questions précédentes les égalités suivantes :

$$|(a-z) + (b-z)j^2 + (c-z)j| = |a+bj^2+cj| = 22.$$

d. On admet que, quels que soient les nombres complexes z , $|z+z'+z''| \leq |z| + |z'| + |z''|$. Montrer que $MA+MB+MC$ est minimale lorsque $M = O$.

Correction



2. a. Notons au préalable que

$$b = 6j = 6e^{-i\frac{2\pi}{3}} = 6\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ et}$$

$$c = 8j^2 = 8e^{-i\frac{2\pi}{3}} = 8\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

$$a' - c = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - c) \Leftrightarrow a'$$

$$= 8e^{-i\frac{2\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{3}} \left(6e^{i\frac{2\pi}{3}} - 8e^{-i\frac{2\pi}{3}} \right)$$

$$= 8e^{-i\frac{2\pi}{3}} + 6e^{i\pi} - 8e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

$$= 8\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 6 - 8\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= -4 - 4i\sqrt{3} - 6 - 4 + 4i\sqrt{3} = -14.$$

$$b' - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(c - a) \Leftrightarrow b' = 8 + e^{i\frac{\pi}{3}} \left(8e^{-i\frac{2\pi}{3}} - 8 \right)$$

$$\text{b. } b' = 8 + 8e^{-i\frac{\pi}{3}} - 8e^{i\frac{\pi}{3}} = 8 + 4 - 4i\sqrt{3} - 4 - 4i\sqrt{3}$$

$$= 8 - 8i\sqrt{3} = 16e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

On a alors

$$(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB'}) = \arg \frac{b'}{b} = \arg b' - \arg b = -\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = -\pi$$

donc \overrightarrow{OB} et $\overrightarrow{OB'}$ sont colinéaires et O est sur (BB') .

c. A et A' sont sur (Ox) ; B , O et B' sont alignés, il suffit de montrer que C , O et C' sont alignés :

$$c' = 7 + 7i\sqrt{3} = 14\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 14e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ d'où}$$

$$(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OC'}) = \arg \frac{c'}{c} = \arg c' - \arg c = \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \pi,$$

ok.

$$3. \text{ a. } OA + OB + OC = |a| + |b| + |c| = 8 + 6 + 8 = 22.$$

$$\text{b. } j^3 = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3 = e^{i\frac{6\pi}{3}} = e^{i2\pi} = 1,$$

$$1 + j + j^2 = 1 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$$

$$|(a-z) + (b-z)j^2 + (c-z)j|$$

$$\text{c. } = |a + bj^2 + cj - z - zj^2 - zj| \\ = |a + bj^2 + cj - (1 + j + j^2)z| = 22$$

d. Utilisons $|z+z'+z''| \leq |z| + |z'| + |z''|$ avec

$(a-z)$, $(b-z)j^2$ et $(c-z)j$:

Exercices résolus

$$\begin{aligned} & |(a-z) + (b-z)j^2 + (c-z)j| \\ & \leq |a-z| + |b-z| |j^2| + |c-z| |j| \\ & = |a-z| + |b-z| + |c-z| = AM + BM + CM \end{aligned}$$

Comme $| (a-z) + (b-z)j^2 + (c-z)j | = | a+bj^2 + cj | = 22$

, cette valeur est le minimum de $MA+MB+MC$ et il est obtenu lorsque $z=0$, soit lorsque M est en O .

Exercice 5

a. On considère le nombre complexe $z = 1 - i\sqrt{3}$.

Mettre z sous forme trigonométrique. Calculer z^2 et z^3 . En déduire z^{1992} et z^{1994} .

b. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^3 + 8 = 0$ (on remarquera que cette équation a une racine évidente réelle). En déduire les solutions dans \mathbb{C} de l'équation $(iz-1)^3 + 8 = 0$. Donner les solutions sous forme algébrique

Correction

a. $z = 1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

$$z^2 = 4e^{-i\frac{2\pi}{3}} = -2 - 2i\sqrt{3}, z^3 = 8e^{-i\frac{3\pi}{3}} = -8.$$

Comme on tourne à chaque fois de 60° , tous les exposants multiples de 3 ramèneront sur l'axe réel (un coup positif, un coup négatif) ; tous les multiples de $3+1$ (comme 1, 4, 7, ...) seront sur la droite issue de O et passant par z , enfin tous les multiples de $3+2$ seront sur la droite issue de O passant par z^2 .

1992 est un multiple de 6 (3×332), on a

$$z^{1992} = 2^{1992} e^{-332i\pi} = 2^{1992}, \text{ et}$$

$$z^{1994} = 2^{1994} e^{-i\frac{2\pi}{3}} = 2^{1994} \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

b. $z^3 + 8 = 0$ a comme racine évidente -2 ; on factorise

$z + 2 : z^3 + 8 = (z + 2)(az^2 + bz + c)$ ce qui donne en

Développant et identifiant les coefficients :

$$z^3 + 8 = (z + 2)(z^2 - 2z + 4).$$

Les autres racines sont alors :

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3}, z_2 = 1 - i\sqrt{3}$$

Pour résoudre $(iz-1)^3 + 8 = 0$ on reprend l'équation précédente avec le changement d'inconnue $Z = iz - 1$, ce qui donne les solutions en Z ; on revient en arrière pour les solutions en z .

$$Z = iz - 1 \Leftrightarrow iz = Z + 1 \Leftrightarrow z = \frac{Z + 1}{i} = -iZ - i \text{ d'où}$$

les trois solutions :

$$\begin{aligned} z_0 &= -i(-2) - i = i, z_1 = -i(1 + i\sqrt{3}) - i = \sqrt{3} - 2i \text{ et} \\ z_2 &= -i(1 - i\sqrt{3}) - i = -\sqrt{3} - 2i. \end{aligned}$$

Exercice 6

Partie A

1. z_1 et z_2 sont des nombres complexes ; résoudre le système d'équations suivant
- $$\begin{cases} z_1\sqrt{3}-z_2=-2 \\ z_1-z_2\sqrt{3}=-2i \end{cases}$$
2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct de centre O , d'unité graphique 4 cm, on considère les points A et B d'affixes respectives : $z_A = -\sqrt{3} + i$ et $z_B = -1 + i\sqrt{3}$.
- Donner les écritures de z_A et z_B sous forme exponentielle. Placer les points A et B .
3. Calculer module et argument de $\frac{z_A}{z_B}$.
- En déduire la nature du triangle ABO et une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.
4. Déterminer l'affixe du point C tel que $ACBO$ soit un losange. Placer C . Calculer l'aire du triangle ABC en cm^2 .

Partie B

Soit f la transformation qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = e^{-i\frac{\pi}{6}}z$.

1. Définir cette transformation et donner ses éléments caractéristiques.
2. Quelles sont, sous forme exponentielle, les affixes de A' , B' et C' images par f de A , B et C ?
3. Quelle est l'aire du triangle $A'B'C'$ en cm^2 ?

Correction

Partie A

$$1. \begin{cases} z_1\sqrt{3}-z_2=-2 \\ z_1-z_2\sqrt{3}=-2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1\sqrt{3}-z_2=-2 \\ -z_1\sqrt{3}+z_2=2\sqrt{3}i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2z_2=-2+2i\sqrt{3} \\ z_1\sqrt{3}-z_2=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_2=-1+i\sqrt{3} \\ z_1=\frac{-3+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=-\sqrt{3}+i \end{cases}$$

$$2. z_A = -\sqrt{3} + i = 2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$z_B = -1 + i\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$3. \frac{z_A}{z_B} = \frac{2e^{i\frac{5\pi}{6}}}{2e^{i\frac{2\pi}{3}}} = e^{i\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

donc module 1 et argument $\frac{\pi}{6}$.

Le triangle ABO est isocèle en O puisque $|z_A| = |z_B|$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \arg \frac{z_B}{z_A} = -\frac{\pi}{6}$.

4. On doit avoir $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB}$, soit

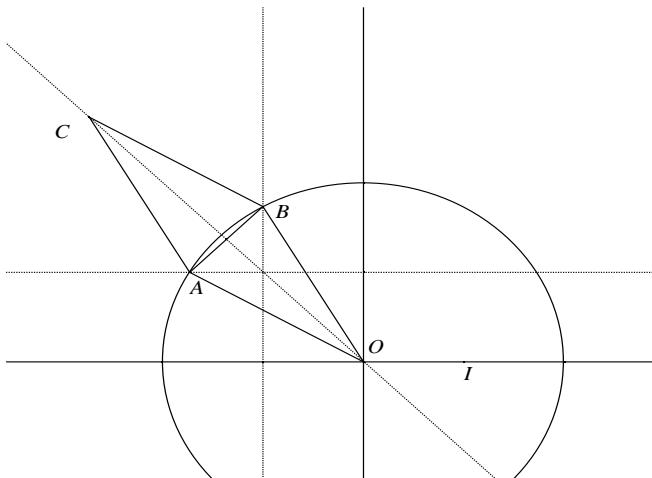
$$z_C - z_A = z_B - z_O \Leftrightarrow z_C = z_A + z_B$$

$$= -1 - \sqrt{3} + i(\sqrt{3} + 1) = (\sqrt{3} + 1)(-1 + i)$$

Exercices résolus

$$\begin{aligned}
 \frac{AB}{2} \times \frac{OC}{2} &= \frac{1}{4} |z_B - z_A| |z_C - z_O| \\
 &= \frac{1}{4} |-1+i\sqrt{3} + \sqrt{3}-i| |(\sqrt{3}+1)(-1+i)| \\
 &= \frac{1}{4} (\sqrt{3}-1) |1+i| (\sqrt{3}+1) |-1+i| \\
 &= \frac{1}{4} \times 2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 1,
 \end{aligned}$$

L'aire du triangle ABC est : soit 16 cm^2 .



Partie B

1. $z' = e^{-i\frac{\pi}{6}} z$: rotation de centre O , d'angle $-\frac{\pi}{6}$.

2.

$$z_{A'} = z_B, z_{B'} = 2i,$$

$$z_{C'} = (\sqrt{3}+1)\sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = (\sqrt{6}+\sqrt{2})e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

3. L'aire du triangle $A'B'C'$ est évidemment la même que celle de ABC ...