Géométrie de l'espace

Remarques

Dans tout ce qui suit l'espace est rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Activité ⓪ :

On considère dans l'espace les points $A(2;1;3)$, $B(1;1;-2)$ et $C(2;-1;0)$.

1. a. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
b. Etudier l'alignement des points A, B et C.

2. a. Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).
b. Est-ce que le point $D(4,-3,2)$ appartient à (AB) ?
c- Donner deux équations cartésiennes de la droite (AB).

3. Donner une équation cartésienne du plan (ABC).

I. Produit scalaire dans l'espace et applications

1. Définition :

Définition :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace, A, B et C trois points de l'espace tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.
Il existe au moins un plan (P) contenant les points A, B et C .
Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u}.\vec{v}$, est le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ dans le plan $(\mathcal{P})$.

Remarque :

Toutes les propriétés du produit scalaire dans le plan s'étendent dans l'espace.

Conséquences :

- Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan et A, B et C trois points du l'espace tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$. Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB). On a $\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls, alors $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\overline{\vec{u},\vec{v}})$.
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonale si et seulement si $\vec{u}.\vec{v}=0$.
- Le produit scalaire $\vec{u}.\vec{u}$ est un nombre positif, noté $\vec{u}^2$, et appelé le carré scalaire de $\vec{u}$.

Propriété :

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ Trois vecteurs de l'espace et $k\in\mathbb{R}$.
- $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$;
- $(k\vec{u}).\vec{v}=k(\vec{u}.\vec{v})$;
- $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$;
- $(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$.

2. Expression analytique du produit scalaire dans l'espace :

Propriété :

Si $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ et $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}$ deux vecteurs de l'espace, alors :
$\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'+zz'$.

Conséquences :

- Si $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
- Si $A(x_A,y_A,z_A)$ et $B(x_B,y_B,z_B)$ deux points de l'espace, alors $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$.

Application ① :

Soient $A(2,-1,1)$, $B(5,3,1)$ et $C(6,-4,1)$ trois points de l'espace.
Calculer AB , AC et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ puis en déduire la nature du triangle ABC.

3. Applications du produit scalaire

a. Orthogonalité de deux droites dans l'espace

Pr. LATRACH ABDELKBIR

Propriété :

Soient (D_1) et (D_2) deux droites de l'espace dirigées respectivement par $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.
(D_1) et (D_2) sont perpendiculaire si et seulement si $\vec{u}_1.\vec{u}_2 = 0$.

Application ② :

Montrer que $(D_1) \perp (D_2)$ dans les cas suivants :

a. (D_1) est dirigée par $\vec{u}(1,2,3)$ et (D_2): $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 - 2t \\ z = 5 \end{cases}$ $/t \in \mathbb{R}$.

b. (D_1) est définie par les équations $x - 2 = \frac{y+1}{2} = \frac{5-z}{2}$ et (D_2): $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 5 - 3t \\ z = -2 - 2t \end{cases}$ $/t \in \mathbb{R}$

b. Équation cartésienne d'un plan défini par un point et un vecteur normal

Propriété :

Soient $\vec{u}(a,b,c)$ un vecteur non nul et A un point de l'espace et $k \in \mathbb{R}$.
L'ensemble des points M de l'espace tels que $\vec{u}.\overrightarrow{AM} = k$ est un plan d'équation $ax + by + cy + d = 0$ $(d \in \mathbb{R})$.

Exemple :

Soient $\vec{u}(2,3,-5)$ un vecteur et $A(0,2.-1)$ un point de l'espace.
Déterminons $(\mathcal{P})$ L'ensemble des points M de l'espace tels que $\vec{u}.\overrightarrow{AM} = -2$.
On a $M(x,y,z) \in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow \vec{u}.\overrightarrow{AM} = -2$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y-2 \\ z+1 \end{pmatrix} = -2$$
$$\Leftrightarrow 2x + 3(y-2) - 5(z-1) = -2$$
$$\Leftrightarrow 2x + 3y - 5z + 1 = 0.$$

D'où $(\mathcal{P})$ est le plan d'équation $2x + 3y - 5z + 1 = 0$.

Propriété :

Soit $\vec{n}(a,b,c)$ un vecteur non nul et $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de l'espace.
Il existe un unique plan $(\mathcal{P})$ passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ (C-à-d est un vecteur directeur d'une droite orthogonale à $(\mathcal{P})$).

$$M(x,y,z) \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0.$$

Exemple :

Déterminons une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$ passant par $A(1,-2,3)$ et de vecteur normal $\vec{n}(1,-3,-2)$.
Soit $M(x,y,z)$ un point de $(\mathcal{P})$. On a $\overrightarrow{AM}(x-1, y+2, z-3)$.
On a $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0 \Leftrightarrow (x-1) - 3(y+2) - 2(z-3) = 0$
$\Leftrightarrow x - 3y - 2z - 1 = 0$.

Méthode II :

Puisque $(\mathcal{P})$ est de vecteur normal $\vec{n}(1,-3,-2)$, alors $(\mathcal{P})$: $x - 3y - 2z + d = 0$.
Or $A \in (P)$, alors $1 - 3(-2) - 2(3) + d = 0$ et $d = -1$.
D'où (P): $x - 3y - 2z - 1 = 0$.

Application ③:

1. Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$ passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ dans les cas suivants :
  a. $A(1,0,5)$ et $\vec{n}(-1,1,0)$.
  b. $A(\sqrt{2},-2,5)$ et $\vec{n}(-1,1,0)$.

2. Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$ passant par A et orthogonal à la droite (D): $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -3 + t \\ z = 4 - 2t \end{cases}$ $/t \in \mathbb{R}$.

3. Donner une équation cartésienne du plan médiateur $(\mathcal{P})$ du segment $[MN]$ tel que $M(0,5,-1)$ et $N(2,1,1)$.

Exercice ① :

Pr. LATRACH ABDELKBIR

On considère dans l'espace les points $A(1;1;2)$, $B(0;1;1)$ et le vecteur $\vec{n} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

1. Vérifier que les points O, A et B ne sont pas alignés.
2. Montrer que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.
3. En déduire une équation cartésienne du plan (OAB).
4. Donner une représentation paramétrique de la droite passant par le point A est orthogonale au plan (OAB).

c. Orthogonalité de deux plans dans l'espace

Propriété :

Soient (P) et (Q) deux plans de l'espace et $\vec{n}_{(P)}$ et $\vec{n}_{(Q)}$ sont respectivement deux vecteurs normaux de (P) et (Q).

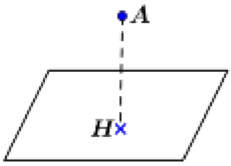
- (P) et (Q) sont orthogonales si et seulement si $\vec{n}_{(Q)} \cdot \vec{n}_{(P)} = 0$.
- (P) et (Q) sont parallèles si et seulement si $\vec{n}_{(Q)}$ et $\vec{n}_{(P)}$ sont parallèles.

Application ④:

Etudier l'orthogonalité des plans (P) et (Q).

- $(P): 2x + z - 1 = 0$ et $(Q): x - 2y - 2z + 1 = 0$.
- $(P): x - y - 4z + 1 = 0$ et $(Q): 4x - y - 2z - 3 = 0$.

4. Distance d'un point de l'espace à un plan



Soient (P) un plan et A un point de l'espace et H la projection orthogonale de A sur le plan (P).
La distance du point A au plan (P) est la distance AH et on la note par $d(A,(P))$.

Propriété :

Soient (P) un plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ et $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de l'espace.
La distance du point A au plan (P) est : $d(A,(P)) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Exemple :

Calculons la distance du point $A(1,-1,2)$ du plan (P) d'équation $(P): 2x + y - z + 1 = 0$.
On a $\vec{n}(2,1,-1)$ est un vecteur normal de $(\mathcal{P})$.
Donc $d(A,(P)) = \frac{|2\times1-1-2+1|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}} = 0$, en déduit que $A \in (P)$.

Application ⑤ :

On considère $(\mathcal{P})$ le plan d'équation $x + y + z + 1 = 0$ et $A(1,2,0)$ est point de l'espace.

1. Calculer $d(A,(P))$.
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par A est orthogonal à $(\mathcal{P})$.
3. Déterminer les coordonnées du point H le projeté orthogonal de A sur $(\mathcal{P})$.

Exercice ②:

On considère les points $A(-1,0,1)$, $B(1,2,-1)$ et $C(1,-1,2)$ et soit (P) le plan d'équation $x + y - z = 0$.

1. *a.* Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).
   b. Vérifier que la droite (AB) est orthogonale à (P).
   c. Déterminer les coordonnés du point d'intersection de (AB) et (P) .
2. Montrer que la droite (AC) est parallèle à (P).
3. Donner une équation cartésienne du plan (Q) passant par B et parallèle à (P).

II. Etude analytique d'une sphère

1. Equation cartésienne d'une sphère

La sphère (S) de centre $\Omega(a,b,c)$ et de rayon R est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\Omega M = R$ et on la note par $S(\Omega, R)$.

On a $M(x,y,z) \in (S) \Leftrightarrow \Omega M = R$

$$\Leftrightarrow \Omega M^2 = R^2$$
$$\Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+a^2+b^2+c^2=R^2.$$

Cette équation est appelée ***équation cartésienne*** de la sphère (S).

Application ⑥ :

1. Donner une équation cartésienne du sphère (S_1) de centre $\Omega(2,0,1)$ et de rayon $R=\sqrt{2}$.
2. a. Donner une équation cartésienne du sphère (S_2) de centre $\Omega(1,-1,2)$ et passant par le point $A(-1,4,5)$.

b. Est-ce que le point $B(1,2,-2)$ appartient à (S_2) ?

Propriété :

Soient A et B deux points de l'espace.
L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$ est la sphère de diamètre $[AB]$

Application ⑦ :

Donner, par deux méthodes, une équation cartésienne de la sphère de diamètre $[AB]$ telle que $A(-1,3,2)$ et $B(-3,1;0)$.

2. Etude de l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+a^2+b^2+c^2+d=0$

Propriété :

Soient a, b et c et d des réels tels que $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ et (S) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+a^2+b^2+c^2+d=0$.

- Si $a^2+b^2+c^2-4d>0$, (S) est une sphère de centre $\Omega\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2},-\frac{c}{2}\right)$ et de rayon $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2-4d}}{2}$.
- Si $a^2+b^2+c^2-4d=0$, (S) est le point $\Omega\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2},-\frac{c}{2}\right)$.
- Si $a^2+b^2+c^2-4d<0$, (S) est l'ensemble vide.

Exemple :

Soit (S) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que $(S): x^2+y^2+z^2-2y+3z+2=0$.

On a $x^2+y^2+z^2-2y+3z+2=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-2y+z^2+3z+2=0$

$$\Leftrightarrow (x-0)^2+(y-1)^2-1+\left(z+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+2=0$$

$$\Leftrightarrow (x-0)^2+(y-1)^2+\left(z+\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2.$$

D'où (S) est une sphère de centre $\Omega\left(0,1,-\frac{3}{2}\right)$ et de rayon $R=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Application ⑧ :

Déterminer (S) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ dans les cas suivants :

a. $x^2+y^2+z^2-4x-6y=0$.
b. $x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z+19=0$.
c. $x^2+y^2+z^2+4y-2z+5=0$.

3. Représentation paramétrique d'une sphère

Soit (S) une sphère de centre $\Omega(a,b,c)$ et de rayon R.

$$M(x,y,z)\in(S)\Leftrightarrow\begin{cases}x=a+R\sin\varphi\cos\theta\\ y=b+R\sin\varphi\sin\theta\ /(\varphi,\theta)\in\mathbb{R}^2\\ z=c+R\cos\varphi\end{cases}$$

Ce système est appelé ***représentation paramétrique*** de (S).

Application ⑨ :

Déterminer une représentation paramétrique la sphère (S) d'équation $x^2+y^2+z^2=1$.

4. Position relative et d'une sphère et un plan et d'une sphère et une droite

a. Position relative et d'une sphère et un plan

Propriété :

Soient (S) la sphère de centre Ω et de rayon R et (P) un plan dans l'espace et $d=d(\Omega;(P))$.

Pr. LATRACH ABDELKBIR

- Si $d > R$, alors (P) ne coupe pas (S).
- Si $d > R$, alors (P) est tangent à (S) en un point H le projeté orthogonale de Ω sur (P).
- Si $d < R$, alors (P) coupe (S) suivant un cercle de centre H le projeté orthogonale de Ω sur (P) et de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.

Application ① ⓪:

On considère l'ensemble (S) des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que
$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 2z - 1 = 0$.

1. Montrer que (S) est une sphère en déterminant son centre et son rayon R.
2. Etudier la position relative de (S) et les plans suivants :
   a. $(P_1): 2x + y + 2z - 3 = 0$.
   b. $(P_2): x - 2y + 2z + 3 = 0$.
   c. $(P_3): x + 2y - z + 9 = 0$.

b. Position relative et d'une sphère et une droite

L'intersection d'une sphère et d'une droite est soit un deux-points, un point ou l'ensemble vide.

Application ① ①:

Déterminer la position relative de la droite (D) de représentative paramétrique
$\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t / t \in \mathbb{R} \\ z = 2 + t \end{cases}$ avec les sphères $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 + 2x = 0$ et
$(S_2): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 6z + \frac{31}{3} = 0$.

Exercice ③:

Soit (P) le plan d'équation $2x - 2y - 5 = 0$ et soit (S) l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 6z + 11 = 0$.

1. Montrer que (S) est une sphère don't on déterminera le centre Ω et le rayon R.
2. Montrer que le plan (P) coupe la sphère (S) selon un cercle (C) dont on déterminera le centre H et le rayon r.
3. Déterminer une équation cartésienne de chacun des deux plans tangents à (S) et parallèle à (P).
4. *a.* Soit (Q) le plan d'équation $x + y + z + 1 = 0$.
   a. Vérifier que le plan (P) est tangent à la sphère (S) puis déterminer leur point de contact.
5. *a.* Vérifier que $(P) \perp (Q)$.
   b. Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) intersection de (P) et (Q).
6. *a.* vérifier que le point $A(2; -1; -2)$ est un point de la sphère (S).
   b. Déterminer une équation cartésienne du plan (Q) tangente à la sphère (S) au point A.

III. *Produit vectoriel*

1. *Définition*

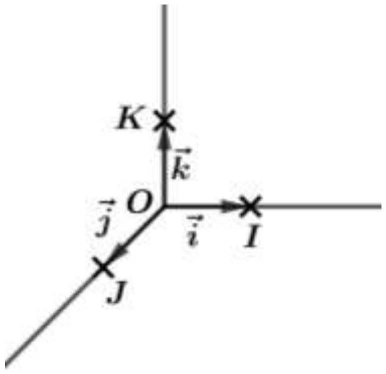
Trois demi-droites non coplanaires de l'espace $[OI)$, $[OJ)$ et $[OK)$ constituent dans cette ordre un ***trièdre*** noté $([OI), [OJ), [OK))$.

Le ***bonhomme d'ampère*** est une personne virtuelle placé le long de $[OK)$, les pieds en O et qui regarde dans la direction de $[OI)$. Si la cote $[OJ)$ est à sa gauche, on dit que le trièdre $([OI), [OJ), [OK))$ est ***direct***.

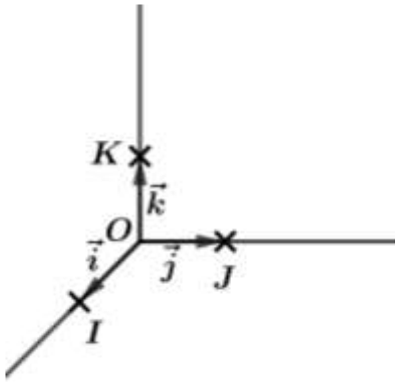
Soient $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ des vecteurs définis par : $\vec{\imath} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{\jmath} = \overrightarrow{OJ}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$.

Si que le trièdre $([OI), [OJ), [OK))$ est direct on dit que le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est direct.

La base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est dit directe si le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est direct.



$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est indirect

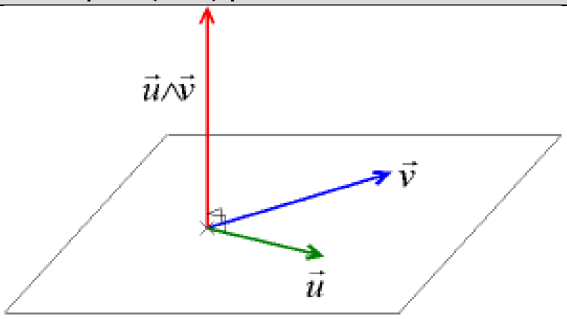


$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est direct

Définition :

Le produit vectoriel de deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ tel que :

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$, tel que :
  - $\vec{w} \perp \vec{u}$ et à $\vec{w} \perp \vec{v}$.
  - La base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est de sens direct.
  - $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \left|sin\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right)\right|$.



Propriété :

- $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$.
- $\vec{u} \wedge \vec{0} = \vec{0} \wedge \vec{u} = \vec{0}$.
- $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{v} \wedge \vec{w}$.
- $(\alpha \in \mathbb{R})\ \ (\alpha\, \vec{u}) \wedge \vec{v} = \alpha(\vec{u} \wedge \vec{v})$.

2. Forme analytique du produit vectoriel

Propriété :

Soient $\vec{u}(a, b, c)$ et $\vec{v}(a', b', c')$ deux vecteurs de l'espace.

On a : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \vec{k}$.

Exemple :

Calculons le produit vectoriel des vecteurs $\vec{u}(0,1,-2)$ et $\vec{v}(-3,1,2)$.

On a $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = 4\vec{\imath} + 6\vec{\jmath} + 3\vec{k}$.

Application ① ②:

Calculer le produit vectoriel des vecteurs $\vec{u}(-1,3,0)$ et $\vec{v}(2,-6,1)$.

3. Applications du produit vectoriel

a. Equation d'un plan défini par trois points non alignés

Si $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$, alors les point A, B et C ne sont pas alignés, par suite le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est normal au plan (ABC).

Application ① ③:

On considère les points $A(2,4,-5)$, $B(1,0,4)$ et $C(0,3,1)$.

1. Vérifier que les point A, B et C ne sont pas alignés.
2. Donner une équation du plan (ABC).

b. L'aire d'un triangle

Propriété :

- Soit ABC est un triangle. L'aire de ABC est $S_{ABC} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$.
- Soit $ABCD$ est un parallélogramme. L'aire de $ABCD$ est $S_{ABCD} = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$.

Application ① ④:

On considère les points $A(-1,2,0)$, $B(3,0,4)$ et $C(-2,1,2)$.

1. Vérifier que les point A, B et C ne sont pas alignés.
2. Déterminer l'aire du triangle ABC.

c. Distance d'un point à une droite

Soit (D) une droite passant par A et dirigée par un vecteur $\vec{u}$.
La distance d'un point M de la droite (D) est la distance MH tel que H le projeté orthogonal de M sur (D). On note cette distance par $d(M, D(A, \vec{u}))$.
Pour déterminer les coordonnées du points H on utilise : $H \in (D)$ et $\overrightarrow{MH}.\vec{u} = 0$.

Propriété :

$$d(M, D(A, \vec{u})) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

Application ① ⑤:

1. Calculer la distance du point $M(3,2,1)$ à la droite (D): $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 \quad /t \in \mathbb{R}. \\ z = -t \end{cases}$
2. *a*. Calculer la distance du point $N(-1,2,0)$ à la droite (Δ): $\begin{cases} x - y = 1 \\ y + z = 2 \end{cases}$.

   b. Déterminer les coordonnées de H projeté orthogonal de N sur (Δ).

Exercice ④:

Soit (S) la sphère de centre $\Omega(1; -1; 0)$ et de rayon $R = \sqrt{3}$.

1. Donner l'équation cartésienne de (S).
2. On considère les droites (D_1): $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 + 4t \\ z = 5 + 4t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$, (D_2): $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -2 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ et

   (D_3): $\begin{cases} x = -2 + 6t \\ y = 4t \\ z = t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

Calculer les distances $d(\Omega, (D_1))$, $d(\Omega, (D_2))$ et $d(\Omega, (D_3))$ puis étudier les positions relatives de (S) et les droites (D_1), (D_2) et (D_3).

a. Intersection de deux plans

Propriété :

Soient (P) et (Q) deux plans de l'espace et $\vec{n}_{(P)}$ et $\vec{n}_{(Q)}$ sont respectivement deux vecteurs normaux de (P) et (Q).
Si $\vec{n}_{(P)} \wedge \vec{n}_{(Q)} \neq \vec{0}$, alors (P) et (Q) sont sécantes suivant une droite (D) dirigée par le vecteur $\vec{n}_{(P)} \wedge \vec{n}_{(Q)}$.

Application ① ⑥:

On considère les plans $(P): 2x + z - 1 = 0$ et $(Q): x - 2y - 2z + 1 = 0$.

1. Vérifier que (P) et (Q) sont sécantes suivant une droite (D) en déterminant un vecteur directeur.
2. Donner une représentation paramétrique de (D).

Exercice ⑤:

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$,on considère les points : $A(0; -2; -2)$; $B(1; -2; -4)$; $C(-3; -1; 2)$

1) ***a***-Montrer que : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k}$.

b- En déduire $2x + 2y + z + 6 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

2) Soit (S) la sphère d'équation cartésienne $x^2+y^2+z^2-2x-2z-23=0$.
Montrer que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(1;0;1)$ et que son rayon est $R=5$.

3) a-Vérifier que : $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2t \\ z=1+t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et orthogonale au plan (ABC).

b-Déterminer les coordonnées du point H intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC).

4) Vérifier que $d(\Omega;(ABC))=3$ puis montrer que le plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle de rayon 4 et on déterminera le centre.

❍ Exercice ⑤: Rattrapage 2017

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$,on considère la sphère (S) dont une équation cartésienne $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-1=0$.
Et le plan (P) d'équation $y-z=0$.

1)a- Montrer que le centre de (S) est $\Omega(1;1;1)$ et que son rayon $R=2$.

b- Calculer $d(\Omega;(P))$ et en déduire le plan (P) coupe la sphère (S) selon un cercle (C).

c-Déterminer le centre et le rayon du cercle (C).

2) Soit (Δ) la droite passant par le point $A(1;-2;2)$ et orthogonal au plan (P).

a-Montrer que $\vec{u}(0;1;-1)$ est un vecteur directeur de la droite (Δ).

b-Montrer que: $\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}\|=\sqrt{2}\|\vec{u}\|$ et en déduire que la droite (Δ) coupe la sphère (S) en deux points.

c-Déterminer le triple des coordonnées de chacun des points d'intersection de la droite (Δ) et la sphère (S).

Pr. LATRACH ABDELKBIR