IV Exercices

01 Soit $E = a, b, c$ un ensemble. Peut-on écrire :

$a)\ a \in E$	$b)\ a \subset E$	$c)\ \{a\} \subset E$
$d)\ \varnothing \in E$	$e)\ \varnothing \subset E$	$f)\ \{\varnothing\} \subset E$

02 Écrire en extension l'ensemble A tel que : $A = \{(x;y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / x^2 + xy - 2y^2 + 5 = 0\}$

03 On considère les deux ensembles suivants :
$A = \left\{x \in \mathbb{N} / \dfrac{3x+2}{x-2} \in \mathbb{Z}\right\}$ et $B = \left\{x \in \mathbb{N} / \dfrac{5x+7}{x-1} \in \mathbb{N}\right\}$.
Déterminer en extension les ensembles A et B.

04 On considère les ensembles suivants :

$$A = \{x \in \mathbb{Z} / x = 2n - 1; n \in \mathbb{N}\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{Z} / x = 501 - 3m; m \in \mathbb{N}\}$$
$$C = \{x \in \mathbb{Z} / x = 501 - 6p; p \in \mathbb{N} \ \wedge p \leq 83\}$$

Montrer que $A \cap B = C$.

05 On considère les ensembles suivants :

$$A = \{x \in \mathbb{R} / |x-1| \leq 2\}$$
$$B = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{2x}{x+2} \leq 0\right\}$$

Déterminer $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ et $B \setminus A$.

06 Soient A , B et C des parties de l'ensemble E.

1. Montrer que : $A \subset B \Rightarrow A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$.
2. Montrer que : $A \cup B \subset [(A \cap C) \cup (B \cap \overline{C})]$.

07 Soient a , a' , b et b' des réels tel que : $aa' = 4(b + b')$.
On pose : $A = \left\{x \in \mathbb{R} / x^2 + ax + b = 0\right\}$ et $B = \left\{x \in \mathbb{R} / x^2 + a'x + b' = 0\right\}$.
Montrer que : $A \neq \varnothing \vee B \neq \varnothing$.

08

1) Exprimer en compréhension les deux ensembles suivants :
$E = \{1;3;5;7;9;....\}$
$F = \{1;10;100;1000;....\}$.

2) Écrire en compréhension l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ et l'ensemble des nombres décimaux $\mathbb{D}$.

09 Déterminer en extension l'ensemble des parties de l'ensemble $E = \{a;b;1;2\}$

10 Soit E un ensemble .
A , B et C trois parties de E telles que : $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$.
Montrer que : $B = C$.

11 Soient A , B et C trois parties d'un ensemble E .
Montrer que : $A \cap B = A \cap C \Leftrightarrow A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$.

12 Soit E un ensemble .
Pour tout $A,B \in \mathrm{P}(E)$, on pose : $A\Delta B = (A - B) \cup (B - A)$.

1) a) Montrer que : $A - B = A \cap \overline{B}$.
   b) En déduire que : $A \subset B \Leftrightarrow A - B = \varnothing$

2) Montrer les égalités suivantes :
   a) $A\Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$
   b) $A\Delta B = \overline{A}\Delta\overline{B}$.
   c) $A - B = (A \cup B)\,\Delta B$.

3) Montrer que : $A\Delta B = \varnothing \Leftrightarrow A = B$

13 Étant données A, B et C trois parties d'un ensemble E, montrer que :

1) $A\Delta B = A\Delta C \Leftrightarrow B = C$.

2) $A - B = A \Leftrightarrow B - A = B$.

3) $A\Delta B = A \cap B \Rightarrow A = B = \varnothing$

14 Montrer que les deux ensembles suivants sont disjoints (c.à.d : leur intersection est vide) .

$$A = \left\{\frac{5+4k}{10} / k \in \mathbb{Z}\right\} \; et \; B = \left\{\frac{5+8k}{20} / k \in \mathbb{Z}\right\}$$

15 Déterminer en extension les ensemble A et B sachant que :

- $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; ...; 10; 11\}$
- $A \cap B = \{4; 5; 6; 11\}$
- $A \backslash B = \{7; 8; 9; 10\}$

16 On considère les deux ensembles :
$E = [-1; 1]$ et $F = \left\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}$.
Vérifier que $F \neq \varnothing$ puis montrer que : $E \times E \subsetneq E^2$.

17 On considère les deux ensembles :
$A = \{x \in \mathbb{R} / \; |x + 1| > 3\}$
et $B = \left\{x \in \mathbb{R} / \dfrac{|x|}{1 + x^2} \leqslant 2\right\}$.

1) Écrire en compréhension les deux ensembles $\overline{A}$ et $\overline{B}$, les complémentaires respectivement de A et de B dans $\mathbb{R}$.

2) Montrer que : $\overline{A} \subset \overline{B}$

18 On considère les deux ensembles :
$A = \{x \in \mathbb{R} / \; |x + 1| > 3\}$
et $B = \left\{x \in \mathbb{R} / \dfrac{|x|}{1 + x^2} \leqslant 2\right\}$.

1) Écrire en compréhension les deux ensembles $\overline{A}$ et $\overline{B}$, les complémentaires respectivement de A et de B dans $\mathbb{R}$.

2) Montrer que : $\overline{A} \subset \overline{B}$

19 Considérons les deux ensembles :
$A = \{(2k + 1)\pi \;,\; k \in \mathbb{Z}\}$ et $B = \left\{\dfrac{-\pi}{3} + \dfrac{2k\pi}{3} \;;\; k \in \mathbb{Z}\right\}$.
Montrer que $A \subset B$.

20 Considérons les deux ensembles :
$C = \left\{\dfrac{-\pi}{2} + \dfrac{2k\pi}{3} \;;\; k \in \mathbb{Z}\right\}$ et $D = \left\{\dfrac{-\pi}{3} + \dfrac{k\pi}{3} \;;\; k \in \mathbb{Z}\right\}$.
Montrer que $C \cap D = \varnothing$.

21 A , B et C sont des trois parties d'un ensemble non vide E , montrer que :

1) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

2) $C_{E \times E}^{A \times B} = \left(C_E^A \times E\right) \cup \left(C_E^B \times E\right)$