CHAPITRE 4

LES SUITES NUMÉRIQUES

4.1 Définitions :

4.1.1 Activité :

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x+1$
   a) Déterminer : $f(0)$; $f(1)$; $f(-1)$; $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f(\sqrt{2})$
   b) Déterminer en fonction de x : $f(x+1)$ et $f(x-1)$ et $f(x)+1$
2) Soit U la fonction définie sur $\mathbb{N}$ par : $U(n) = 3n-1$, on note $U(n)$ par U_n
   a) Calculer : U_0 ; U_1 ; U_2 et U_{10}
   b) Déterminer U_{n+1} en fonction de n.

Solution de l'activité

1) $f(x) = 2x+1$

a) $f(0) = 2\times 0+1 = 1$; $f(1) = 2\times 1+1 = 2+1 = 3$; $f(-1) = 2\times -1+1 = -2+1 = -1$
$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\times\frac{1}{2}+1 = 1+1 = 2$; $f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}+1$

b) $f(x) = 2x+1$ donc : $f(x+1) = 2(x+1)+1 = 2x+2+1 = 2x+3$
et $f(x-1) = 2(x-1)+1 = 2x-2+1 = 2x-1$ et $f(x)+1 = 2x+1+1 = 2x+2$

2) Si on pose : $U(n) = U_n$ alors : $U_n = 3n-1$

a) $U_0 = 3\times 0-1 = 0-1 = -1$; $U_1 = 3\times 1-1 = 3-1 = 2$; $U_2 = 3\times 2-1 = 6-1 = 5$;
$U_3 = 3\times 3-1 = 9-1 = 8$; $U_{10} = 3\times 10-1 = 30-1 = 29$;

b) $U_n = 3n-1$ donc : $U_{n+1} = 3(n+1)-1 = 3n+3-1 = 3n+2$

4.1.2 Définition et exemples :

Définition 4.1
On dit une suite numérique toute fonction définie sur $\mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$).

$$\begin{array}{rcl} U:\mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & U(n) = U_n \end{array}$$

On note l'image de n par la fonction U par : U_n (au lieu de $U(n)$).

Exemple 4.1
Soit (U_n) la suite définie par : $U_n = 5n - 3$

1) Déterminer U_0 ; U_1 ; U_2 et U_3
2) Déterminer U_{n+1} en fonction de n.

Solution :

1) $U_0 = 5 \times 0 - 3 = -3$; $U_1 = 5 \times 1 - 3 = 5 - 3 = 2$; $U_2 = 5 \times 2 - 3 = 10 - 3 = 7$
2) $U_{n+1} = 5(n+1) - 3 = 5n + 5 - 3 = 5n + 2$

Exercice 25
Soit (U_n) la suite définie par : $U_n = 4n - 5$

1) Calculer : U_0 ; U_1 et U_{20}
2) Déterminer U_{n+1} en fonction de n
3) Déterminer U_{n+1} en fonction de U_n

4.2 La suite arithmétique

Définition 4.2
Soit $r \in \mathbb{R}$,

- Toute suite définie par : $U_{n+1} = U_n + r$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est une suite **Arithmétique** .
- Le nombre r ne dépend pas de n est appelé la raison de la suite (U_n).

Exemple 4.2

1) Soit (U_n) la suite définie par : $U_n = 3n + 2$:
Montrons que la suite (U_n) est arithmétique de raison $r = 3$: On a :
$$\begin{aligned} U_{n+1} &= 3(n+1) + 2 \\ &= 3n + 3 + 2 \\ &= 3n + 2 + 3 \\ &= U_n + 3 \end{aligned}$$
Donc : (U_n) est une arithmétique de raison $r = 3$.
2) Soit (U_n) la suite définie par : $U_n = 6n + 3$:
Montrons que la suite (U_n) est arithmétique On a :
$$\begin{aligned} U_{n+1} &= 6(n+1) + 3 \\ &= 6n + 6 + 3 \\ &= 6n + 3 + 6 \\ &= U_n + 6 \end{aligned}$$
Donc : (U_n) est une arithmétique de raison $r = 6$.
3) Soit (U_n) la suite définie par : $U_n = -7n + 8$:
Montrons que la suite (U_n) est arithmétique de raison $r = -7$: On a :
$$\begin{aligned} U_{n+1} &= -7(n+1) + 8 \\ &= -7n - 7 + 8 \\ &= -7n + 8 - 7 \\ &= U_n - 7 \end{aligned}$$
Donc : (U_n) est une arithmétique de raison $r = -7$.

Remarque 4.1
Pour montrer qu'une suite (U_n) est arithmétique de raison r il suffit de calculer $U_{n+1} - U_n$ et que $U_{n+1} - U_n = r$.

Exemple 4.3
Soit (U_n) la suite définie par : $U_n = -2n+5$
on a : $U_{n+1} - U_n = -2(n+1)+5-[-2n+5] = -2n-2+5+2n-5 = -2$
donc (U_n) est arithmétique de raison $r = -2$

Exercice 26
Montrer que (U_n) est une suite arithmétique de raison r (a déterminera) dans les cas suivants :

1) $U_n = 9n+5$
2) $U_n = -3n+1$
3) $U_n = \frac{1}{2}n+4$
4) $U_n = -\frac{1}{3}n+2$

Exercice 27
Soit (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = U_n + 4 \end{cases}$

1) Calculer U_1 ; U_2 et U_4.
2) Qu'on peut dire sur la nature de la suite (U_n)

4.2.1 Le terme général d'une suite arithmétique :

Propriété 4.1
Si (U_n) est une suite arithmétique de raison r alors :

- $U_n = U_0 + n \times r$
- $U_n = U_1 + (n-1)r$
- Pour tout $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \leq n$: $U_n = U_p + (n-p)r$

Exemple 4.4

1) Soit (U_n) une suite arithmétique de raison $r = 5$ et de premier terme $U_0 = 2$:
   On a : $U_n = U_0 + n \times r$ donc : $U_n = 2+5n = 5n+2$
2) Soit (U_n) une suite arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme $U_1 = 8$:
   On a : $U_n = U_1 + (n-1)r$ donc : $U_n = 8+3(n-1) = 8+3n-3 = 3n+5$
3) Soit (U_n) une suite arithmétique de raison $r = -2$ et $U_5 = 6$:
   On a : $U_n = U_5 + (n-5)r$ donc : $U_n = 6-2(n-5) = 6-2n+10 = -2n+16$

Exercice 28
Suite (U_n) une suite arithmétique de raison : r, déterminer U_n en fonction de n dans les suivants :

1) $r = 4$ et $U_0 = 8$
2) $r = \frac{1}{2}$ et $U_1 = 2$
3) $r = -5$ et $U_2 = 1$
4) $\begin{cases} U_3 = 8 \\ U_{n+1} = U_n + 4 \end{cases}$

4.2.2 La somme des termes successives d'une suite arithmétique

Proprieté 4.2
Soit (U_n) une suite arithmétique alors on a : $U_0+U_1+\cdots+U_n=(n+1)\left(\dfrac{U_0+U_n}{2}\right)$
c'est à dire :
$$\text{La somme des termes} = (\text{ le nombre des termes})\left(\frac{\text{le premier terme} + \text{ le dernier terme}}{2}\right)$$
On a aussi : $U_1+U_2+\cdots+U_n=n\left(\dfrac{U_1+U_n}{2}\right)$
et $U_p+U_{p+1}+\cdots+U_n=(n-p+1)\left(\dfrac{U_p+U_n}{2}\right)$

Exemple 4.5

1) Soit (U_n) la suite définie par : $U_n=2n$, on a (U_n) est une suite arithmétique de raison $r=2$, et on a :

$U_0+U_1+\cdots+U_n=(n+1)\left(\dfrac{U_0+U_n}{2}\right)=(n+1)\left(\dfrac{0+2n}{2}\right)=(n+1)n$, car : $U_0=0$ et $U_n=2n$

On a aussi : $U_0+U_1+\cdots+U_{20}=21\left(\dfrac{U_0+U_{20}}{2}\right)=21\left(\dfrac{0+40}{2}\right)=21\times 20=420$,

2) Soit (U_n) la suite définie par : $U_n=3n+1$, on a (U_n) est une suite arithmétique de raison $r=3$.
   a) Déterminons la somme : $U_0+U_1+\cdots U_n$ en fonction de n.
   b) Déterminons la somme : $U_1+U_2+\cdots U_n$ en fonction de n.
   c) Déterminons la somme : $U_5+U_6+\cdots U_n$ en fonction de n.
   d) Calculons la somme : $U_1+U_2+\cdots U_{14}$.
   e) Calculons la somme : $U_4+U_5+\cdots U_{16}$.

   Solution :
   a) $U_0+U_1+\cdots+U_n=(n+1)\left(\dfrac{U_0+U_n}{2}\right)=(n+1)\left(\dfrac{1+3n+1}{2}\right)=(n+1)\left(\dfrac{3n+2}{2}\right)$ car : $U_0=3\times 0+1=1$
   b) $U_1+U_2+\cdots+U_n=n\left(\dfrac{U_1+U_n}{2}\right)=n\left(\dfrac{4+3n+1}{2}\right)=n\left(\dfrac{3n+5}{2}\right)$ car : $U_1=4$
   c) $U_5+U_6+\cdots+U_n=(n-5+1)\left(\dfrac{U_5+U_n}{2}\right)=(n-4)\left(\dfrac{16+3n+1}{2}\right)=(n-4)\left(\dfrac{3n+17}{2}\right)$ car : $U_5=16$
   d) $U_1+U_2+\cdots+U_{14}=(14-1+1)\left(\dfrac{U_1+U_{14}}{2}\right)=14\left(\dfrac{4+43}{2}\right)=14\left(\dfrac{47}{2}\right)=329$
   e) $U_4+U_5+\cdots+U_{16}=(16-4+1)\left(\dfrac{U_4+U_{16}}{2}\right)=13\left(\dfrac{17+49}{2}\right)=13\left(\dfrac{64}{2}\right)=416$

Exercice 29
Soit (U_n) la suite définie par : $U_n=4n-2$,

1) Déterminer : U_0 et U_{25}
2) Montrer que (U_n) est une suite arithmétique,
3) Calculer la somme : $U_0+U_1+\cdots+U_{25}$
4) Calculer la somme : $U_8+U_9+\cdots+U_{30}$
5) Déterminer en fonction de n la somme : $U_3+U_4+\cdots+U_n$

4.3 La suite géométrique :

4.3.1 Définitions :

Définition 4.3

- Toute suite définie par : $U_{n+1} = U_n \times q$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est une suite **géométrique**
- Le nombre q ne dépend pas de n est appelé la raison de la suite (U_n).

Exemple 4.6

1) Soit (U_n) la suite définie par : $U_n = 3 \times 2^n$, on a
$U_{n+1} = 3 \times 2^{n+1} = 3 \times 2^n \times 2 = U_n \times 2$: donc (U_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$.
2) Soit (U_n) la suite définie par : $U_n = 5 \times 3^n$, on a
$U_{n+1} = 5 \times 3^{n+1} = 5 \times 3^n \times 3 = U_n \times 3$: donc (U_n) est une suite géométrique de raison $q = 3$.
3) Soit (U_n) la suite définie par : $U_n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$, on a
$U_{n+1} = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{2} = U_n \times \frac{1}{2}$:
donc (U_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$.

Remarque 4.2
Pour montrer que (U_n) est une suite géométrique de raison q il suffit de montrer que : $\frac{U_{n+1}}{U_n} = q$.

4) Soit (U_n) la suite définie par : $U_n = -2 \times 4^n$, on a :
$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{-2 \times 4^{n+1}}{-2 \times 4^n} = 4^{n+1-n} = 4$: donc donc (U_n) est une suite géométrique de raison $q = 4$.

Exercice 30
Montrer que la suite (U_n) est géométrique dans les cas suivants :

1) $U_n = -3 \times 5^n$
2) $U_n = 3 \times 6^n$
3) $U_n = 5 \times \frac{1}{3^n}$
2) $U_n = \frac{1}{2} \times 7^n$

4.3.2 Le terme général d'une suite géométrique :

Proprieté 4.3
Si (U_n) est une suite arithmétique de raison q alors :

- $U_n = U_0 \times q^n$
- $U_n = U_1 \times q^{n-1}$
- Pour tout $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \leq n$: $U_n = U_p \times q^{n-p}$

Exemple 4.7

1) Soit (U_n) une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $U_0 = 3$,
déterminons U_n en fonction de n : On a : $U_n = U_0 \times q^n = 3 \times 2^n$, donc : $U_n = 3 \times 2^n$
2) Soit (U_n) une suite géométrique de raison $q = 5$ et $U_1 = 10$,
déterminons U_n en fonction de n : On a : $U_n = U_1 \times q^{n-1} = 10 \times 5^{n-1} = 10 \times \frac{5^n}{5} = 2 \times 5^n$
donc : $U_n = 2 \times 5^n$
3) Soit (U_n) une suite géométrique de raison $q = 3$ et $U_4 = 20$,
déterminons U_n en fonction de n : On a : $U_n = U_4 \times q^{n-4} = 20 \times 3^{n-4}$, donc : $U_n = 20 \times 3^{n-4}$

Exercice 31
Soit (U_n) une suite géométrique, déterminer U_n en fonction de n dans les cas suivants :

1) $U_0 = 2$ et $q = 7$
2) $U_0 = -3$ et $q = 4$
3) $U_0 = 4$ et $q = \frac{1}{2}$
4) $U_1 = \frac{1}{3}$ et $q = 6$
5) $U_5 = 16$ et $q = 2$

4.3.3 La somme des termes successives d'une suite géométrique

Proprieté 4.4
Soit (U_n) une suite géométrique alors on a : $U_0 + U_1 + \cdots + U_n = U_0 \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right)$

c'est à dire :

$$\text{La somme des termes} = (\text{ le premier terme}) \left(\frac{1-q^{\text{le nombre des termes}}}{1-q} \right)$$

On a aussi : $U_1 + U_2 + \cdots + U_n = U_1 \left(\frac{1-q^n}{1-q} \right)$

et $U_p + U_{p+1} + \cdots + U_n = U_p \left(\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} \right)$

Exemple 4.8

1) Soit (U_n) la suite définie par : $U_n = 3 \times 2^n$, on a (U_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$ et $U_0 = 3$ et $U_1 = 6$ et $U_3 = 24$:

a)
$$\begin{aligned} U_0 + U_1 + \cdots + U_{10} &= U_0 \left(\frac{1-2^{10+1}}{1-2} \right) \\ &= 3 \left(\frac{1-2^{11}}{-1} \right) \\ &= 6141 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} U_1 + U_2 + \cdots + U_{15} &= U_1 \left(\frac{1-2^{15}}{1-2} \right) \\ &= 6 \left(\frac{1-2^{15}}{-1} \right) \\ &= 6(2^{15}-1) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} U_3 + U_4 + \cdots + U_{11} &= U_3 \left(\frac{1-2^{11-3+1}}{1-2} \right) \\ &= 24 \left(\frac{1-2^{9}}{-1} \right) \\ &= 24(2^{9}-1) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

2) Soit (U_n) la suite définie par : $U_n = 2 \times 5^n$, on a (U_n) est une suite géométrique de raison $q = 5$ et $U_0 = 2$ et $U_1 = 10$ et $U_4 = 1250$:

a)

$$\begin{aligned} U_0+U_1+\cdots+U_8 &= U_0\left(\frac{1-5^{8+1}}{1-5}\right) \\ &= 2\left(\frac{1-5^9}{-4}\right) \\ &= 2\left(\frac{5^9-1}{4}\right)=\frac{5^9-1}{2}=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} U_1+U_2+\cdots+U_{11} &= U_1\left(\frac{1-5^{11}}{1-5}\right) \\ &= 10\left(\frac{1-5^{11}}{-4}\right) \\ &= 5\left(\frac{5^{11}-1}{2}\right)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} U_4+U_5+\cdots+U_{10} &= U_4\left(\frac{1-5^{10-4+1}}{1-5}\right) \\ &= 1250\left(\frac{1-5^7}{-4}\right) \\ &= 625\left(\frac{5^7-1}{2}\right)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Exercice 32

Soit (U_n) la suite définie par : $U_n=\frac{1}{2}\times 4^n$

1) Calculer : U_0 ; U_1 et U_2.
2) Montrer que (U_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison.
3) a) Calculer : $U_0+U_1+\cdots+U_6=\ldots\ldots$
   b) Calculer : $U_2+U_3+\cdots+U_9=\ldots\ldots$
   c) Calculer : $U_1+U_2+\cdots+U_{10}=\ldots\ldots$

Résumer :

	La suite arithmétique	La suite géométrique
La relation	$U_{n+1}=U_n+r\,;\quad r\in\mathbb{R}$	$U_{n+1}=U_n\times q\,;\quad q\in\mathbb{R}$
Le terme U_n	$U_n=U_0+n\times r$	$U_n=U_0\times q^n$
Le terme U_n (en général)	$U_n=U_p+(n-p)r$	$U_n=U_p\times q^{n-p}$
La somme	$U_0+U_1+\cdots U_n=(n+1)\left(\frac{U_0+U_n}{2}\right)$	$U_0+U_1+\cdots U_n=U_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$
La somme (en général)	$U_p+U_{p+1}+\cdots U_n=(n-p+1)\left(\frac{U_p+U_n}{2}\right)$	$U_p+U_{p+1}+\cdots U_n=U_p\left(\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}\right)$