Equations différentielles

I. Equations différentielles du premier ordre :

1. L'équation différentielle $y' = ay$ $(a \in \mathbb{R}^*)$

Activité :

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2e^{-4x}$.
On pose $y = f(x)$ et $y' = f'(x)$ et $y'' = f''(x)$ .Montrer que : $y'' + 3y' - 4y = 0$.

Toutes les équations où l'inconnue est une fonction, et qui se présente sous la forme d'une relation entre cette fonction et ses dérivées est appelée ***équation différentielle.***

Propriété :

Soit a un nombre réel non nul.
Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay$ est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ke^{ax}$ où k est un nombre réel quelconque.

Exemple :

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(E): y' + 2y = 0$ est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ke^{-2x}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Application ① :

1. Résoudre les équations différentielles suivantes :
   ❶ $y' = 3y$ ❷ $y' + 5y = 0$
2. a. Résoudre l'équation différentielle :(E) $3y' - 2y = 0$.
   b. Déterminer la solution de (E) qui vérifie : $y(3) = -1$.

2. L'équation différentielle $y' = ay + b$ $(a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R})$

Propriété :

Soient a et b deux nombres réels tels que $a \neq 0$.
L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ est l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$.

Exemple :

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(E): y' = 3y + 2$ est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :$f(x) = ke^{3x} - \frac{2}{3}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Déterminons la solution g de l'équation (E) qui vérifie la condition $g(-1) = \frac{1}{3}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = ke^{3x} - \frac{2}{3}$.

La condition $g(-1) = \frac{1}{3}$ donne $ke^{-3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

Donc $k = e^3$ il s'ensuit donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) : g(x) = e^{3x+3} - \frac{2}{3}$.

Application ② :

1. Résoudre l'équation différentielle : $(E) : y' + 2y - 4 = 0$
2. Déterminer la solution de (E) dont la courbe passe par le point $A(-\ln(2), 6)$

II. Equation différentielles du second ordre : $y'' + ay' + by = 0$

Définition :

Soient a et b deux nombres réels.
L'équation $r^2 + ar + b = 0$, où r est l'inconnue, s'appelle ***l'équation caractéristique*** de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$.

Propriété :

Remarques

Pr. LATRACH ABDELKBIR

On considère (E) l'équation différentielle (E): $y'' + ay' + by = 0$ et soit Δ le discriminant de son équation caractéristique (E'): $r^2 + ar + b = 0$.

- Si $\Delta > 0$, alors les solutions de (E) sont les fonctions $x \mapsto \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$ tel que $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ où r_1 et r_2 sont les solutions de (E').
- Si $\Delta = 0$, alors les solutions de (E) sont les fonctions $x \mapsto (\alpha + \beta x)e^{r_0 x}$ tel que $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ où r_0 est la solution de (E').
- Si $\Delta < 0$, alors les solutions de (E) sont les fonctions $x \mapsto (\alpha \cos(qx) + \beta \sin(qx))e^{px}$ tel que $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ où $r_1 = p + iq$ et $r_2 = \overline{r_1}$sont les solutions de (E').

Application ③ :

1. Résoudre les équations différentielles suivantes :

(E_1): $y'' - 3\,y' + 2y = 0$.

(E_2): $y'' + 4\,y' + 4y = 0$.

(E_3): $y'' - 4\,y' + 13y = 0$.

2. **a.** Résoudre l'équation différentielle : (E'): $y'' - 5\,y' + 6y = 0$

b. Déterminer la solution g de l'équation (E') vérifiant les conditions initiales : $g(0) = 1 \; et \; g'(0) = 2$

3. **a.** Résoudre l'équation différentielle : (E''): $y'' + 4y = 0$

b. Déterminer la solution g de l'équation (E'') vérifiant les conditions initiales : $g(\frac{\pi}{2}) = 1 \; et \; g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.