L'ordre dans $\mathbb{R}$

Tronc commun science 1

Exercice 01

Comparer les nombres A et B dans les cas suivants :

1) $A = 1+3\sqrt{2}$; $B = 3\sqrt{3}$
2) $A = -5\sqrt{3}$; $B = -6\sqrt{2}$
3) $A = \dfrac{x}{x+1}$; $B = \dfrac{y}{y+1}$ $(0 < x < y)$
4) $A = \dfrac{x^2+x}{x^2+x+1}$; $B = \dfrac{y^2+y}{y^2+y+1}$ $(0 < x < y)$
5) $A = \sqrt{a-b}$; $B = \sqrt{a}-\sqrt{b}$ $(0 < b < a)$
6) $A = \dfrac{1}{(x+1)(x+4)}$; $B = \dfrac{1}{(x+2)(x+3)}$ $(0 < x)$
7) $A = 1+\dfrac{1}{n}$; $B = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

Exercice 02

Soient : $A = 3\sqrt{18}-\sqrt{72}+2\sqrt{\dfrac{9}{2}}$ et $B = \sqrt{28}+\sqrt{32}-2\sqrt{2}$.

① Montrer que : $A - B = 4\sqrt{2}-2\sqrt{7}$.

② Comparer A et B.

Exercice 03

On considère les nombres a et b tels que :

$$a = 2\sqrt{5}-3\sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad b = \sqrt{39-12\sqrt{10}}.$$

① Montrer que $a \geq 0$.

② Calculer a^2 et b^2.

③ Comparer a et b puis $\dfrac{1}{a}$ et $\dfrac{1}{b}$.

Exercice 04

Soient a et b deux nombres réels tels que : $a \geq 2$ et $b \geq 2$.
On pose : $x = \sqrt{a}+\sqrt{b}$ et $y = \sqrt{ab}+1$.

① Montrer que : $x^2 - y^2 = (a-1)(1-b)$.

② Comparer x et y.

③ Application : comparer les nombres $\sqrt{3}+\sqrt{2}+1$ et $\sqrt{6}$.

Exercice 05

Soient x et y deux nombres réels strictement positifs tels que : $x^2+y^2 = 2$.

① Montrer $(x+y)^2 = 2(1+xy)$.

② En déduire que : $x+y > \sqrt{2}$.

Exercice 06

① Soit a un nombre réel tel que : $a \geq 1$.
Montrer que : $a^2 \geq a$.

② Soient x et y deux nombres réels tels que : $x \geq 1$ et $y \geq 1$.
Montrer que : $x+y \leq 2xy$.

Exercice 07

Soient x et y deux nombres réels. Montrer que :

$$x^2+y^2 \geq 2xy \quad ; \quad (x+y)^2 \geq 4xy \quad ; \quad \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \leq \frac{x^2+y^2}{2}.$$

Exercice 08

Soient x et y deux nombres réels strictement positifs.
Montrer que : $x+y \geq 2\sqrt{xy}$; $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x} \geq 2$.

Exercice 09

Soient a, b et c trois nombres réels.
On pose : $A = a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc$.

① Montrer que : $2A = (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$.

② En déduire que : $ab+ac+bc \leq a^2+b^2+c^2$.

Exercice 10

Soient a et b deux nombres réels tels que :

$$3 \leq a \leq 9 \qquad \text{et} \qquad 2 \leq b \leq 7.$$

Encadrer les expressions suivantes :

$$a+b \quad ; \quad a-b \quad ; \quad 2a+3b \quad ; \quad 2a-5b;$$
$$\frac{a}{b} \quad ; \quad \frac{2a+3b}{2a-5b} \quad ; \quad a^2+b^2.$$

Exercice 11

Soient x et y deux nombres réels tels que :

$$-4 \leq x \leq -1 \qquad \text{et} \qquad 3 \leq y \leq 5.$$

Encadrer les expressions suivantes :

$$x+y \quad ; \quad x-y \quad ; \quad xy \quad ; \quad \frac{x^2}{y^2-2xy}.$$

Exercice 12

Soient x et y deux nombres réels tels que :

$$-2 \leq x \leq 2 \qquad \text{et} \qquad 5 \leq y \leq 9.$$

Encadrer les expressions suivantes :

$$x+y \quad ; \quad x-y \quad ; \quad xy \quad ; \quad \frac{x}{y}.$$

Exercice 13

Soit x un nombre réel tel que : $5 \leq x \leq 7$.
On pose : $A = x^2-2x-8$.

① Encadrer l'expression A.

② a) Vérifier que : $A = (x-4)(x+2)$.
b) En déduire un autre encadrement de A.

③ a. Vérifier que : $A = (x-1)^2-9$.
b) En déduire un autre encadrement de A.

④ Quel est le meilleur encadrement de A?

Exercice 14

Soient x et y deux nombres réels tels que : $1 \leq x \leq 2$ et $\dfrac{1}{2} \leq y \leq \dfrac{3}{2}$.
On pose : $A = x^2-y^2+x+y$.

① Encadrer l'expression A.

② *a*) Vérifier que : $A=(x+y)(x-y+1)$.
b) En déduire un autre encadrement de A.

③ Déduire que : $\frac{3}{4}\leq A\leq\frac{29}{4}$.

✌ Exercice 15 ✌

Écrire, sans le symbole de la valeur absolue, les nombres suivants :

- $A=|3-\pi|+|2^{-3}|+|-\pi\sqrt{2}-1|-|2^{-3}-6|$.
- $B=|\frac{3}{\sqrt{15}+5}|+|\frac{1}{\sqrt{15}-5}|$.
- $C=|2x-3|+\sqrt{(2x-3)^2}$, tel que : $x\in\mathbb{R}$.

✌ Exercice 16 ✌

Soient x et y deux nombres réels tels que :

$$|x-2|<\frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad |y|\leq\frac{1}{2}.$$

Montrer que : $1<\frac{2x}{x-y}<5$.

✌ Exercice 17 ✌

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

① On considère le nombre $A=\sqrt{6-\sqrt{11}}-\sqrt{6+\sqrt{11}}$.
a) Déterminer le signe de A.
b) Calculer A^2 puis déduire la valeur de A.

② On considère le nombre $B=(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-2)\left(\sqrt{\sqrt{3}+2}\right)$.
a) Montrer que : $B^2=4$.
b) En déduire la valeur de B.

③ On considère le nombre $C=\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2-2x+1}$.
Sachant que $x\in[-1,1]$, simplifier le nombre C.

✌ Exercice 18 ✌

Soient a et b deux nombres réels tels que :

$$a\geq-2 \qquad \text{et} \qquad b\leq-1 \qquad \text{et} \qquad a-b=6.$$

① Calculer le nombre : $A=\sqrt{(a+2)^2}+\sqrt{(b+1)^2}$.

② Montrer que : $a\leq5$ et $b\geq-8$.

③ Déterminer la valeur du nombre : $B=|a+b-4|+|a+b+10|$.

✌ Exercice 19 ✌

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $|2x-3|=8$; 2) $|x-\frac{2}{3}|=-1$;
3) $|x+8|=|2x-1|$; 4) $||x|-3|=|4x+5|$;
5) $|x+2|=|x-3|$.

✌ Exercice 20 ✌

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $|x|\leq3$; 2) $|x|\geq3$;
3) $|1-x|\geq4$; 4) $|7-2x|>1$;
5) $1\leq|x+2|\leq2$.

✌ Exercice 21 ✌

Soient a et b deux nombres réels tels que :

$$a<3 \qquad \text{et} \qquad 0<b<\frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad ab=1.$$

① Montrer que : $2<a<3$.

② En déduire que : $\frac{1}{3}<b<\frac{1}{2}$.

③ Montrer que : $\frac{3}{7}<\frac{1}{a-2b}<1$.

④ Vérifier que $\frac{5}{7}$ est une valeur approchée de $\frac{1}{a-2b}$ à $\frac{2}{7}$ prés.

✌ Exercice 22 ✌

Soient a et b deux nombres réels tels que : $0<a<1$ et $b=\frac{1+\sqrt{a}}{2}$.

① Montrer que : $\frac{1}{2}<b<1$.

② Montrer que : $b-1=\frac{a-1}{2(1+\sqrt{a})}$.

③ En déduire que : $|b-1|<\frac{1}{2}|a-1|$.

④ Déduire une valeur approchée de $\frac{1+\sqrt{0,6}}{2}$ à 2×10^{-2} prés.

✌ Exercice 23 ✌

Soit $x\in\mathbb{R}*$.
On pose : $E=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

① Montrer que : $E-\frac{1}{x}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}$.

② *a*) Montrer que $\sqrt{1+x^2}+1\geq2$.
b) En déduire que : $|E-\frac{1}{x}|<\frac{1}{2}|x|$.

③ Déterminer une valeur approchée au nombre $\frac{\sqrt{0,0001}}{0,01}$ à 5×10^{-3} prés.

✌ Exercice 24 ✌

Soit $a\in\mathbb{R}_+^*$.

① *a*) Montrer que : $1+\sqrt{1+a}>2$.
b) En déduire que : $0<\frac{1}{1+\sqrt{1+a}}<\frac{1}{2}$.
c) Montrer que : $1<\sqrt{1+a}<1+\frac{a}{2}$.
d) Donner un encadrement du nombre $\sqrt{1,04}$.

② *a*) Montrer que : $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}=\sqrt{a+1}-\sqrt{a}$.
b) En déduire la valeur de la somme :
$S=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$.

✌ Exercice 25 ✌

Soit $n\in\mathbb{N}$.

① Montrer que : $\frac{n}{n+1}<\frac{n+1}{n+2}$.

② On considère les nombres : $A=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{97}{98}\times\frac{99}{100}$
et $B=\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\ldots\times\frac{96}{97}\times\frac{98}{99}$.
a) Montrer que : $A<B$.
b) Calculer le produit $A\times B$.
c) En déduire que : $A<\frac{1}{10}<B$.