Exercice 1

Soit f une fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par : $f(x)=\sqrt{x+1}$

1. Etudier la dérivabilité de f en 0 et l'interpréter géométriquement ce résultat
2. Determiner une approximation affine de f au voisinage de 0 .
3. Determiner une valeur aprochee de $\sqrt{1,01}$

Exercice 2

Soit g la fonction numerique definie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x\sin(2x)+a|x|$

4. Montrer que g est dérivable à droite et à gauche en 0.
5. Determiner $\boldsymbol{a}$ pour que g soit derivable en 0.
6. On supose que $\boldsymbol{a=0}$, calculer $g'(x)$ pour tout **x**de IR

Exercice 3

Soit f la fonction definie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(1+x)^3$

Montrer que f est derivable en 0 , et deduire une approximation affine de f au voisinage de 0 .

Exercice 4

On considere les fonctions f ,g et h definie sur $\mathbb{R}^+$

par $f(x)=2+(x-2)\sqrt{x+1}$ $g(x)=\sqrt{x+1}-1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}$

$h(x)=1+\frac{x}{2}-\sqrt{x+1}$

1. **a)** Etudier la monotonie de f

   b) deduire la monotonie de g

   c) Etudier la monotonie de h
2. Montrer que

   $$\forall x \in \mathbb{R}^+ : 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}<\sqrt{x+1}<1+\frac{x}{2}$$
3. Déduire un encadrement au nombre $\sqrt{1,004}$ d'amplitude 2×10^{-6}

Exercice 5

1. Montrer que $\forall x \in]0;+\infty[$ on a :

$$\cos\left(\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$ et

$$\sin\left(\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

2. Montrer que la fonction arctan est derivable n fois sur IR tq $n\in\mathbb{N}^*$, et on a $\forall x \in]0;+\infty[$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*$

$$\arctan^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}}\sin\left(n\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

Exercice 6

Soit f une fonction définie de IR vers IR par :

$$\begin{cases} f(x)=x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & ;x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de la fonction f
2. Etudier la dérivabilité de la fonction f
3. Etudier la continuité de f'

Exercice 7

En utilisant la fonction dérivé, montrer que :

1. $\forall x>0 : \arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$
2. $\forall x<0 : \arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{\pi}{2}$

Exercice 8

1. Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}$:

   $$x-\frac{x^3}{3}\leq\arctan(x)\leq x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}$$
2. Deduire : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan(x)-x}{x^3}$

Exercice 9

1. Soient f et g deux fonctions n fois derivables sur un intervalle I

   Montrer **la formule de Leibnitz**

$$\forall x \in I : (f \times g)^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

1. En utilisant la formule de Leibnitz determiner $h^{(n)}$

Tel que $h(x) = (x^3 - x)\sin x$

Exercice 10

Calculer les limites suivantes :

2. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(2x-1)^{2017} - 1}{x - 1}$
3. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{3\cos^2(x) - \sin^2(x)}{3x - \pi}$
4. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x - \sqrt{2}}$
5. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x \sin(x-1)}{(2-x)^6 - 1}$
6. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{\tan x - x}$

Exercice 11

Déterminer D_f et Calculer la fonction dérivée des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sqrt{\arctan x - \dfrac{\pi}{4}}$
2. $f(x) = \arctan\left(\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}\right)$
3. $f(x) = (\arctan(2x) + x)^5$
4. $f(x) = \sqrt{x^3}\sqrt[3]{x^2}$
5. $f(x) = \arctan\left(\sqrt[4]{x+1}\right)$
6. $f(x) = \left(\sqrt[3]{x^3 - 8}\right)^2$

Exercice 12

Déterminer la fonction primitive F de la fonction f et déterminer D_F

1. $f(x) = x^2 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3}{x^3}$
3. $f(x) = \sin x \cos(2x)$
4. $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$
5. $f(x) = \dfrac{1}{(2x+1)^2} - \dfrac{1}{(x-1)^2}$
6. $f(x) = \dfrac{\sin x}{1 + \cos^2 x}$
7. $f(x) = \sin x \cos^3 x$
8. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{1}{x} - 1\right)$

Exercice 13

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt[3]{\dfrac{1+2x}{x^4}}} \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[4]{x+1} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arctan(x^2 + x)}{x} \quad ; \quad \lim_{x \to 1} \frac{4\arctan(x) - \pi}{x - 1}$$

$$\lim_{x \to a} \frac{\sin^2 x - \sin x \sin a}{x - a}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x} - \sqrt[6]{x+1}} \quad ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{\tan x - x}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt[3]{-x^3 + x^2 + 1} + x$$

Exercice 14

Demontrer que les fonctions suivantes sont continues est derivable en x_0

1) $f(x) = (x - x_0)\sqrt{|x - x_0|}$; $x_0 \in IR$

2) $\begin{cases} f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$; $x_0 = 0$

3) $\begin{cases} f(x) = x^3 - 4x & ; \ x \leq 1 \\ f(x) = x^2 - 3x - 1 & ; \ x > 1 \end{cases}$; $x_0 = 1$

Exercice 15

Soit f la fonction numérique définie par :

$(x) = 2\sin(x) + \sin(2x)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f, sa période et sa parité. En déduire un ensemble d'étude.

2. Calculer la dérivée de f et déterminer son signe.

3. Dresser le tableau de variation.

4. Tracer la courbe représentative de f.

Exercice 16

Soit f la fonction numérique définie par :

$f(x) = 2\cos(x) + \sin(2x)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f, sa période et sa parité. En déduire un ensemble d'étude.

2. Calculer la dérivée de f et déterminer son signe sur $[-\pi, \pi]$.

3. Dresser le tableau de variation.

4. Tracer la courbe représentative de f sur $[-\pi, \pi]$.

Exercice 17

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{3}cos(3x) - \frac{3}{4}\cos(2x)$$

1. Déterminer la période de f, sa parité et en déduire un intervalle d'étude I.

2. Exprimer $\sin(3x)$ et $\sin(2x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

3. Etudier les variation de f sur I.

4. Calculer $f(0)$, (x_0) et (π) sous forme rationnelle. Où x_0 est l'unique valeur dans $]0, \pi[$ annulant $f'(x)$.

5. Dresser le tableau de variation. Tracer sommairement le graphe de f sur trois périodes.

Exercice 18

Le but de cet exercice est de montrer la formule de John MACHIN (1680-1751) :

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$

On rappelle que

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a).\tan(b)}$$

1. On pose $\theta = \arctan\left(\frac{1}{5}\right)$ calculer $\tan(2\theta)$, puis $\tan(4\theta)$.

2. Montrer que $0 \leq \arctan\left(\frac{1}{5}\right) \leq \frac{\pi}{6}$ en déduire un encadrement de $4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \frac{\pi}{4}$

3. En déduire la formule de MACHIN.

Exercice 19

Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$f(x) = xE\left(x - \frac{1}{x}\right)$

Montrer que f admet une limite en 0 et déterminer cette limite.

Exercice 20

Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par :

$f_n(x) = x^n - x - 1$, avec $n \geq 2$.

1. Montrer qu'il existe un unique $x_n \in [0; 1]$ tel que $f_n(x_n) = 0$

2. Montrer que $f_{n+1}(x_n) > 0$

3. En déduire que la suite (x_n) est décroissante et quelle converge vers une limite l.

4. deteminer l

Exercice 21

Soit a et b deux nombres réels. On définit la fonction

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} ax+b & si\ x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x+1} & si\ x > 0 \end{cases}$$

1. Donner une condition sur b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer a et b tels que f soit dérivable sur $\mathbb{R}$ et dans ce cas calculer $f'(0)$.

Les fonctions f, g et $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par :

$f(x) = x|x|$; $g(x) = x^{\frac{3}{5}}$; $h(x) = \cos\left(\sqrt{|x|}\right)$

Sont-elles dérivables en 0 ?

Exercice 22

Soit f la fonction definie par $f(x) = x - \sqrt[3]{1-x}$

1) Verifier que $D_f =]-\infty; 1]$
2) Etudier la continuité de f sur D_f
3) Etudier la derivabilité de f à droite en 1 puis donner une interpretation geometrique au resultat
4) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty; 1[$ puis donner le tableau de variations de f.
5) Determiner les branches infinies à C_f et construire C_f
6) Demontrer que f est admet une fonction reciproque definie sur un intervalle J à determiner
7) Calculer $f(0)$ puis deduire $f^{-1\prime}(-1)$
8) Demontrer que l'equation $f(x) = 0$ admet une seule solutionα sur $]0; 1[$

Exercice 23

On considere la fonction f definie par :

$f(x) = -2 + \sqrt[3]{8 - x^3}$

1) Verifier que $x \in]-\infty; 2[$
2) Etudier la continuité de f sur D_f
3) Etudier la derivabilité de f à gauche en 1
4) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty; 2[$
5) Determiner les branches infinies à C_f
6) Demontrer que f est admet une fonction reciproque definie sur un intervalle J à determiner puis donner l'expession de $f^{-1}(x)$
7) Calculer $(f^{-1})'(0)$

Exercice 23

Soit f la fonction definie par $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{x} + 1}$

1) Verifier que $D_f = [0; +\infty[$
2) Etudier la continuité de f sur D_f
3) Etudier la derivabilité à droite en 0
4) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$
5) Determiner les branches infinies à C_f
6) Demontrer que f est admet une fonction reciproque definie sur un intervalle J à determiner puis donner l'expession de $f^{-1}(x)$
7) $calculer\ (f^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right)$

Exercice 24

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$par

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1)a)Vérifier que pour tout $x > 0$ on a :

$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}$,En déduire que f est continue a droite en 0

b) Montrer que f est dérivables à droite en 0.

2)a)Montrer que pour tout $x > 0$ on a :

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+\frac{1}{x}}$$

b) Déduire alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat

3)a)Montrer que f est dérivable sur]0, +∞ [et que

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2\sqrt{x^2+1}}$$

b) Dresser le tableau de variation de f sur [0, +∞[

c)Montrer que f est une bijection de [0,+∞[sur un intervalle I que l'on précisera

d) Calculer $f(1)$, en déduire $(f^{-1})'(\sqrt{2}-1)$

Exercice 25

Soit f définie sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{1+\sin x}}$$

1. a) Montrer que $f'(x)=\dfrac{-\cos x}{\sqrt{2}(1+\sin x)^{\frac{3}{2}}}$;

$\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

b) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une solution unique λ sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

c) Montrer que $|f'(x)|\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

2. On considère la suite (U_n) définie par

$$\begin{cases}U_0=0\\ U_{n+1}=f(U_n)\ ;\ \forall n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

a) vérifier que $f\left(\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\right)\subset\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et montrer que $0\le U_n\le\frac{\pi}{2}$;$\forall n\in\mathbb{N}$

b) Montrer que $|U_{n+1}-\lambda|\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}|U_n-\lambda|$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ et déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$

Exercice 26

Soit f la fonction définie sur IR par :

$$\begin{cases}f(x)=x+2-\sqrt{x^2+2x} & ;\ x<-2\\ f(x)=\arctan\left(\sqrt{x+2}\right) & ;\ x\ge-2\end{cases}$$

1.a) montrer que la fonction f est continue en -2

b) calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

c) montrer que la courbe (C_f) admet un asymptote oblique (Δ) au voisinage de $-\infty$ et déterminer l'équation cartésienne de (Δ) puis étudier la position relative de (C_f) par rapport a (Δ) sur l'intervalle $]-\infty;-2[$

2.Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche de -2 ; interpréter géométriquement chaque résultat

3.Etudier les variations de f

4.Construire (C_f)

5.Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I=[-2;+\infty[$

6.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

b) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout x de J

c) Montrer que l'équation $g(x)=x$ admet une solution unique $\alpha\in]1;2[$

d) Construire dans le même repère $(C_{g^{-1}})$

Exercice 27

On considère la fonction f définie par

$f(x)=\arctan(3x)+2x-1$

1) Démontrer que f est une bijection de IR vers IR

Démontrer que l'équation $f^{-1}(x)=x$ admet une solution α sur IR et que $0<\alpha<\frac{1}{3}$

2) Vérifier que $\alpha=1-\arctan(3\alpha)$ et $1-\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{1}{3}$

3) Démontrer que $f^{-1}(x)<x$ $(\forall x\in]\alpha;+\infty[)$ et interpréter géométriquement cet résultat.

Exercice 28

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=x-1+3\sqrt[3]{1-x} & ;\ x\le 1 \\ f(x)=(x-1)\left(1+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right) & ;\ x>1 \end{cases}$$

1. a) montrer que la fonction f est continue en 1

b) Etudier la dérivabilité de f en 1 et interpréter géométriquement cet résultat

2. a) calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

b) Démontrer que la droite d'équation $(\Delta):y=x$ est une asymptote a (C_f) au voisinage de $+\infty$

c) Etudier la branche infini a (C_f) au voisinage de $-\infty$

3. a) Etudier les variations de *f* sur $I=]-\infty;1[$

b) Donner le tableau de variation f' sur l'intervalle $K=[1;+\infty[$ puis les variations de f sur K

4. soit g la restriction de f sur $J=]-\infty;0]$

a) Démontrer que g est une bijection de J vers un intervalle L à déterminer

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $t^3-3t-2=0$ puis déterminer $g^{-1}(-2)$ et $\left(g^{-1}\right)'(-2)$

c) Construire dans un repère orthonormé les courbes (C_f) et $(C_{g^{-1}})$

Exercice 29

Soit f la fonction définie par $f(x)=\sqrt{x^2-4}-x$

1.a) Déterminer le domaine de définition de f.

b) calculer la dérivée *f* '(x) et étudier son signe.

Etudier la dérivabilité de *f* en -2 et en 2 ; interpréter géométriquement les résultats obtenus

2.déterminer le tableau de variations de f.

Etudier les branches infinies de (C_f) ; puis construire(C_f).

Soit g la restriction de f sur $[2;+\infty[$

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

3.Construire (C_g) et (C_g-1) dans un même repère orthonormé.

4.Calculer $g^{-1}(-2)$; $g^{-1}(-1)$ et $(g^{-1})'(-1)$.

5. Déterminer l'expression de $g^{-1}(x)$.

Exercice 30

I/ Soit la fonction d définie par :.$f(x) = \sqrt{x-1} - x$

1/ Déterminer les limites de faux bornes de son domaine de définition.

2/ Etudier la dérivabilité de f en 1. Interpréter graphiquement ce résultat.

3/ Calculer le nombre dérivé de f en $x_0 = 2$.

4/ Ecrire l'équation de la tangente T à ζ_f au point $x_0 = 2$.

II/ On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{-x^2+x+2}{x+1} & si\ x < -1 \\ f(x) = \sqrt{x^2+3} & si\ x \geq -1 \end{cases}$$

1/ Déterminer le domaine de définition de f.

2/ a- Montrer que f est continue en –1.

b- Justifier la continuité de f sur son domaine de définition.

3/ a- Etudier la dérivabilité de f en-1. Interpréter graphiquement ce résultat.

b- Déterminer f'(x).

4/ Donner une l'équation de la tangente T à ζ_f au point d'abscisse 0.

Exercice 31

$$\text{Soit } f(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} & \text{si } x \geq 0 \\ 1 + \dfrac{\cos x - 1}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1/ Etudier la continuité de f en 0

2/ Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ Interpréter graphiquement le résultat

3/a) Montrer que $\forall\ x<0$ on a $1 \leq f(x) \leq 1 - \dfrac{2}{x}$

b) En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

4/a) Pour $x \geq 0$; Montrer que $f'(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$ et vérifier que $f'(x) < 1$

b) Montrer que la courbe représentative de g la restriction de f à $[0;+\infty[$ coupe $\Delta : y = x$ en point unique d'abscisse α et que $\alpha \in]1;2[$

Exercice 32

1/ Soit la fonction $g(x) = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

a)Montrer que g est dérivable sur $]-2,2[$ puis calculer $g'(x)$

b) Dresser le tableau de variation de g

c) Montrer que g admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J à préciser

d) Déduire que l'équation g(x)=0 admet une solution unique α dans $]-2,2[$

e) Donner alors le signe de g(x) sur $]-2,\ 2[$

2/ Soit la fonction $f(x) = x + \sqrt{4 - x^2}$

a)Etudier la dérivabilité de f à droite en (- 2) et àgauche en (2) ; Interpréter graphiquement les résultats

b) Dresser le tableau de variation de f

c) Tracer ζ_f dans un RO.N $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

3/a) Monter que pour $x \in [0,1]$ on a $|g(x)| \le 1$

b) En déduire que pour $x \in [0,1]$ on a $|f(x)-2| \le x$

Exercice 33

Soit f la fonction définie sur $]0,4[$ par $f(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt{4x-x^2}}$

1/a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)$; Interpréter graphiquement les résultats obtenus

b) Dresser le tableau de variation de f

c) Donner une équation de la tangente T à ζ_f au point A(2 ,0)

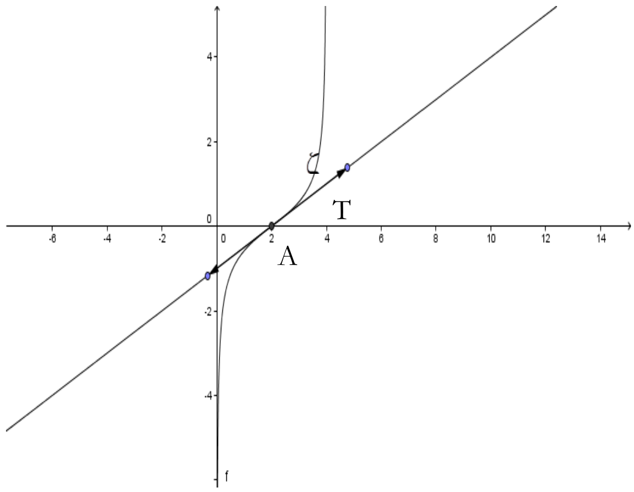
2/a) Montrer que f réalise une bijection de $]0,4[$ sur un intervalle J à préciser

b) Donner le tableau de variation de f^{-1}, fonction réciproque de f

c) Montrer que pour tout

$x \in J$ on a $:f^{-1}(x)=2(1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}})$

3/ La figure ci-dessous représente une partie de la courbe ζ_f et la tangente T dans un RO.N $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$



a) Compléter ζ_f

b) En utilisant le graphe étudier la position ζ_f et T ; Conclure

c) Tracer la courbe $\zeta_{f^{-1}}$ dans le même repère

Exercice 34

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

$$\text{Soit } f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-1}-x & \text{si } x\in[1;+\infty[\\ \dfrac{x^2+3x-3}{x-1} & \text{si } x\in]-\infty;1]\end{cases}$$

et (Γ) sa courbe représentative dans R

I- 1/ Montrer que f est continue sur $[1,+\infty[$

2/ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3/ Etudier la dérivabilité de f à droite en 1. Interpréter graphiquement le résultat.

II- 1/ Vérifier que f n'est pas continue en 1

2/ Soit Δ la droite d'équation $y = x + 4$

a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-y)$

b) Déterminer pour $x < 1$ le signe de f(x) - y

III-1/ Pour x < 1, calculer $f'(x)$ puis déterminer son signe.

2/ Déterminer une équation cartésienne de la tangente (T) à (Γ) au point E d'abscisse 0

3/ Pour $x \geq 1$ calculer $f'(x)$ puis déterminer son signe.

4/ Dresser le tableau de variation de f sur IR

Exercice 34

A) Soit la fonction f définie sur IR par :

$$f(x) = 1 + \frac{1-x}{\sqrt{x^2+1}}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1.a) Etudier les variations de f.

b) Etudier la position de la courbe (C) par rapport à sa tangente T au point d'abscisse 0.

2.a) Montrer que l'équation : f(x) = 3x admet dans [-1, + ∞ [une unique solution α .

b) Justifier que $\alpha \in]0,1[$.

3) Tracer la courbe (C).

B)Soit la fonction g définie sur $[-\pi/4, \pi/2]$ par :

$$\begin{cases} g(x) = f(tgx) \quad si \quad x \neq \pi/2 \\ \qquad g(\pi/2) = 0 \end{cases}$$

1) Vérifier que pour tout $x \in [-\pi/4, \pi/2]$ on a :

$$g(x) = 1 + \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

2) Etudier les variations de g et tracer sa courbe dans un repère orthonormé du plan.

3) Montrer que g admet une application réciproque g^{-1} définie sur un intervalle I que l'on précisera.

4) Etudier la dérivabilité de g^{-1} sur l'intervalle I puis calculer $(g^{-1})'(x)$.

5) Tracer, dans le repère contenant la courbe de g, celle de g^{-1}.

Exercice 35

Soit la fonction f définie sur]1, +∞ [par :

$$f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$$

1) dresser le tableau de variation de f.

2) a) Montrer que f réalise une bijection de]1,+∞ [sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une unique solution α dans l'intervalle]1, +∞ [

c) Vérifier que $1{,}44 < \alpha < 2$

3) Montrer que l'équation f(x) = 0 est équivalente à

(E) : $1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = x$; pour x > 1

Soit g la fonction définie sur]0, +∞[par

$$g(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

a) Vérifier que $g(\alpha) = \alpha$

b) Montrer que g est bijection de]0, +∞[sur un intervalle K que l'on précisera.

c) Calculer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in K$.

Exercice 36

On considère la fonction *f* définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -x + \sqrt{x+1} & si\ x \geq -1 \\ \dfrac{-|x^3| + x^2}{x+1} & si\ x < -1 \end{cases}$$

1) Calculer les limites de f en -∞ et +∞

2) Etudier la continuité de f en -1

3) Etudier la dérivabilité de f en -1

4) Déterminer le domaine de dérivabilité de f et donner sa fonction dérivée.

Exercice 37

Soit f la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x) = -x^3 + \sqrt{1-x} - 2 & si\ x \leq 1 \\ f(x) = \dfrac{\cos(x-1) - 1}{x-1} - 3 & si\ x > 1 \end{cases}$$

1)a) Montrer que f est continue sur chacun des intervalles $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$

b) Etudier la continuité de f en 1

$\left(\text{On rappelle que } \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = 0\right)$

2) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

3)a) Montrer que pour tout réel $x > 1$, on a :

$$-3 - \frac{2}{x-1} \leq f(x) \leq -3$$

b)En deduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, interpréter le résultat .

4) Soit g la restriction de f sur $]-\infty, 1]$

a)Montrer que g est strictement décroissante sur $]-\infty, 1]$ en déduire $g(]-\infty, 1])$

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α dans $]-\infty, 1]$

c) Vérifier que $-0,9<\alpha<-0,8$.

d) En déduire le signe de g sur $]-\infty, 1]$

Exercice 38

soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+4} - 2}{x} & si\ x < 0 \\ 0 & si\ x = 0 \\ \dfrac{x^2 \sin\left(\frac{2}{x}\right)}{x+1} & si\ x > 0 \end{cases}$$

1/a) Montrer que pour tout

$x \in]0, +\infty[$ on a : $\dfrac{-x^2}{1+x} \leq f(x) \leq \dfrac{x^2}{1+x}$

b) Déduire la limite de f à droite en 0

c) Montrer que f est continue en 0

2/a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\left(\dfrac{2}{x}\right) = 2$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

3/a) Montrer que pour tout x de $]-\infty, 0[$ on a : $f(x) \in]-\infty, 0[$

b) Justifier que $x \mapsto fof(x)$ est bien définie sur $]-\infty, 0[$

Exercice 39

Soit la fonction f définie sur IR par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x + \cos(\pi x)}{x-1} & si\ x < 1 \\ \sqrt{x^2+3} - 1 & si\ x \geq 1 \end{cases}$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f sur un repère orthonormée $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan.

1)a)Montrer que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1$

$\left(\text{On vous donne } \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1 + \cos(\pi x)}{x-1} = 0\right)$

b)En déduire que f continue en 1

c) Montrer que f est continue sur IR

2)a) Vérifier que pour tout

$x \in]-\infty; 1[\,;\ \dfrac{x+1}{x-1} \le f(x) \le 1$

b) En déduire que la droite d'équation y = 1 est une asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$

3)a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = -1$,

interpréter graphiquement le résultat obtenu.

4) a)Montrer que l'équation $f(x)$

$= 0$admet

Au moins une solution α dans $\left]-\frac{1}{2}, 0\right[$

b) Montrer que $\sin(\pi\alpha) = -\sqrt{1-\alpha^2}$

Exercice 40

Soit la fonction *f* définie sur IR par

$$f(x)=\begin{cases} x^3+3x^2-2\pi & si\ x\ge 0 \\ \dfrac{-2\pi x+sin(x^2)}{x} & si\ x<0 \end{cases}$$ **et** soit (C) sa courbe

représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) Etudier la continuité de *f* en 0.

2) a) Montrer que pour tout$x < 0$, on a :

$-2\pi+\dfrac{1}{x} \le f(x) \le -2\pi - \dfrac{1}{x}$.

b) En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$).Interpréter geometriquement ce résultat.

3) Etudier la branche infinie de (C) au voisinage de $+\infty$

4) Etudier la dérivabilité de *f* à droite et à gauche de 0

5) Montrer que *f* est dérivable sur $]0,+\infty[$ et sur$]-\infty, 0[$ calculer *f* '(x) .

6) Montrer que l'équation *f*(*x*)=0 admet une solution unique α et que $0 < \alpha < 2$.

Exercice 41

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = 2\left(x - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}\right)$$

1°/ Montrer que f est impaire et dresser son tableau de variations .

2°/ On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

Déterminer les asymptotes à (C) et étudier la position relative de (C) par rapport à son asymptote oblique .

Exercice 42

On pose pour a réel strictement positif la fonction f_a définie

sur $[0; a]$ par : Pour tout $x \in [0; a]$

$$f_a(x) = \frac{a-x}{a(a+x)}$$

(a) Justifier la dérivabilité de f_a sur $[0; a]$ et calculer sa dérivée. En déduire le tableau des variations de f_a en précisant les valeurs aux bornes.

(b)Montrer que f_a réalise une bijection de $[0; a]$ sur $\left[0; \frac{1}{a}\right]$. On note f_a^{-1} sa bijection réciproque. Donner le tableau des variations de f_a^{-1} en précisant les valeurs aux bornes.

(c) Montrer que $f_a^{-1} = f_{\frac{1}{a}}$.

Déterminer les points d'inflexion de (C) .

Construire (C) .

3°/ Soit g la fonction définie sur] 0 , π [par

g (x) = f (sinx) .

Etudier g et dresser son tableau de variations .

Montrer que la courbe (Γ) de g possède $\Delta : x = \frac{\pi}{2}$

comme axe de symétrie .

Construire (Γ) .

Exercice 43

Soit f la fonction par $f(x) = \sqrt{\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)}} x \in]0;1]$

1°/a) Etudier la derivabilité de f en 1

b) Calculer f'(x) pour x ∈]0 ,1 [

c) Montrer que f réalise une bijection de]0 ,1] sur un intervalle J que l'on precisera.

2°/ Construire dans un repère R (o, $\vec{i}$, $\vec{j}$) les courbes C_f et C_f^{-1} [Ind : calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$

3°/a) Montrer que f^{-1} est derivable sur]0 ,+ ∞ [et

$$x \in]0,+\infty[\ (f^{-1})'(x) = -\frac{4x}{\pi(1+x^4)}$$

b) Montrer que f^{-1} est derivable en 0^+ et que

$(f^{-1})'_d(0) = 0$

4°/ On pose $C(x) = f^{-1}(x) + f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ $x \in]0,+\infty[$

Montrer que C est derivable sur]0 ,+∞ [et calculer $C'(x)$

En deduire que ∀ x ∈]0, +∞[$C(x) = 1$

5°/ On pose $g(x) = \frac{1}{f^{-1}(x)}$,x ∈]0, +∞[

Etudier les variations de g et tracer (g)

Exercice 44

Soit $f(x) = 2 - \sin\frac{x}{2}$, x ∈ [- π , π] .

1°/ a) Montrer que f est une bijection de [- π,π] sur [1,3]

b) Calculer $f^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)$, $f^{-1}(2)$.

2°/ a) Montrer que pour tout x∈] 1 , 3 [.

b) Calculer $(f^{-1})'\left(\frac{5}{2}\right)$, $(f^{-1})'(2)$.

c) Montrer que pour tout x∈] 1 , 3 [,

$(f^{-1})'(x) = \frac{-2}{\sqrt{-x^2+4x-3}}$.

3°/ Dans Le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$; Tracer C_f et $C_{f^{-1}}$

Exercice 45

Soit f la fonction numérique définie par :

$f(x) = x + \sqrt{x^2-2x}$.

1°/ Montrer que la fonction f est définie sur] -∞ , 0] ∪ [2 , +∞[.

2°/ Etudier la continuité de f sur]-∞ ,0] ∪ [2 ,+∞[.

3°/ Etudier la dérivabilité de f en tout point de]-∞ ,0] ∪[2 ,+∞[.

Interpréter géométriquement le résultat obtenue .

4°/ a) Etudier les variations de f .

b) Tracer la courbe représentative (C) de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

5°/ a) Montrer que f réalise une bijection de [2 ,+∞[sur un intervalle J que l'on précisera .

b) Expliciter : $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$.

c) Tracer la courbe représentative (C') de f^{-1} dans le même repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$

Exercice 45

Soit f la fonction définie sur [1, +∞[par $f(x)=\sqrt{x-1}+1$

Soit (ζ_f) sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$

a- Etudier la dérivabilité de f à droite en 1. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b- Prouver que f est dérivable sur] 1 , +∞ [et calculer f '(x).

a- Dresser le tableau de variation de f.

b- Calculer $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$. Interpréter le résultat obtenu.

Tracer (ζ_f) .

3)a/ Montrer que f réalise une bijection de [1,+∞ [sur un intervalle J que l'on déterminera.

b/ Calculer $f^{-1}(3)$. Montrer que f^{-1} est dérivable en 3 et calculer $(f^{-1})'(3)$.

c/ Tracer $\zeta_{f^{-1}}$ la courbe représentative de f^{-1} dans le même repère

Exercice 46

Soit $f(x) = \dfrac{2x}{x+\sqrt{x^2-1}}$

Déterminer D_f.

Vérifier que pour tout $x \in D_f$, $f(x) = 2x^2 - 2x\sqrt{x^2-1}$

Montrer que f admet des primitives sur $]-\infty;-1]$

Déterminer la primitive F de f sur $]-\infty;-1]$ telle que $F(-2) = \dfrac{2}{3}$

Exercice 47

Soit f la fonction définie par $f(x) = -1+\sqrt{x^2+1}$

1/a) Déterminer le domaine de définition de f

b) Montrer que f est une fonction paire. Interpréter graphiquement ce résultat

2/ Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+$

3/a) Montrer que la droite $\Delta : y = x-1$ est une asymptote à ζ_f au voisinage de $+\infty$

b) Etudier la position relative de ζ_f et Δ

4/ Tracer ζ_f et Δ dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$

5/ Soit g la restriction de f sur $\mathbb{R}_+$

Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $\mathbb{R}_+$

Tracer $\zeta_{g^{-1}}$ courbe représentative de la fonction g^{-1} dans le même repère

Dresser le tableau de variation de g^{-1}

Expliciter $g^{-1}(x)$ ainsi que $(g^{-1})'(x)$

Exercice 48

Soit f la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x)= \sqrt{\sin x}$

1) Dresser le tableau de variation de f.

2) a- Montrer que f réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) construire C_f

c)- On note g la fonction réciproque de f. de f. Construire à partir de C_f. En précisant les demi-tangents de **C**g aux points d'abscisse 0 et 1

3) Montrer que g est dérivable sur $]0,1[$ et que

$$g'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$$

4) Soit k la fonction définie sur [0,1] par

$$k(x) = \sqrt[4]{1-x^4}$$

a – Etudier les variations de k sur [0,1]

b- Montrer que gok est dérivable sur]0: 1[

c- Déduire alors : $gok(x) + g(x) = \frac{\pi}{2}$

Exercice 49

Soit la fonction f définie sur ℝ par : $f(x) = \frac{x}{4+\cos x}$

1) Montrer que f admet dans IR une seule primitive F vérifiant F(0) = 0.

2) a) Montrer que la fonction définie sur IR par :

$g(x) = F(x) - F(-x)$ est constante.

b) Etudier alors la parité de F .

3) a) Montrer que : pour tout $t \in [0;+\infty[$ on a :

$$\frac{1}{6}t \leq f(t) \leq t$$

b) Déduire que pour tout $x \in [0;+\infty[$ on a :

$$\frac{1}{12}x^2 \leq F(x) \leq \frac{1}{2}x^2$$

4) Calculer alors $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ en déduire $\lim_{x\to-\infty} F(x)$

5) a) Etudier le comportement de la courbe (C) de F au voisinage de +∞ .

b) Dresser le tableau de variation de F.

Exercice 50

Soit la fonction f définie sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ $par\ f(x) = \frac{1}{\sin x}$

a) Etudier les variations de f .

b) Montrer que f est une bijection de $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$sur [1 , +∞ [

b) On désigne par g la fonction réciproque de f , calculer g (1) , g ($\sqrt{2}$) et g(2) .

c) Montrer que g est dérivable sur]1 ,+ ∞ [et que :

$$g'(x) = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

Exercice 51

Soit la fonction définie sur [0, +∞[par :

$f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

(1)a) Calculer la limite de en +∞.

) Montrer que $f'(x) = 1 + \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

$x \in [0;+\infty[$

c) Dresser le tableau de variation de f.

d) Montrer que la droite D : y = x+1 est une asymptote à la courbe de f au voisinage de +∞.

e) Tracer C_f ainsi que la demi tangente à C_f au point O.

2) a) Monter que f réalise une bijection de [0, +∞[sur un intervalle J à déterminer.

b) Construire dans le même repère la courbe de f^{-1}

Exercice 52

Soit la fonction f définie sur [1, +∞ [par

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$

1) Montrer que f admet des primitives sur [1, +∞ [
2) Soit F la primitive de f sur [1, +∞ [qui s'annule en 1 .Donner le sens de variation de F.
3) Soit G la fonction définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ par

$$G(x) = F\left(\frac{1}{cosx}\right)$$

a)Montrer que G est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et que

$$G'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1.$$

b) En déduire que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$,

G(x)= tan(x)-x

c) Calculer F ($\sqrt{2}$) et F (2)

4) Soit la fonction h définie sur]1,+∞ [par

$h(x) = \frac{1}{f(x)}$ *Déterminer la primitive H de h sur*]1,+∞[qui s'annule en $\sqrt{3}$

Exercice 53

Soit la fonction f définie sur [-2,+∞[par :

$f(x) = \sqrt{2x+4} - 1$

1/ Etudier la dérivabilité de f à droite en –2. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2/ a- Calculer f'(x) pour tout x ∈]-2,+∞[.

b- En déduire que f réalise une bijection sur un intervalle J, que l'on précisera.

3/ Soit f^{-1} la fonction réciproque de f.

a- Déterminer le domaine de continuité de f^{-1} et son sens de variation.

b- Montrer que f^{-1} est dérivable en -1.

c- Calculer f(0) en déduire $(f^{-1})'(1)$.

4/ Expliciter $f^{-1}(x)$ en fonction de x pour tout x ∈ J.

Exercice 54

On considère la fonction f définie par :

$f(x) = \sqrt{x^2-9} - x.$

On désigne par (ζ_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$

1/ Montrer que f est définie sur]-∞,-3]∪[3,+∞[.

2/ Montrer que la droite Δ : y = 0 est asymptote à (ζ_f) au voisinage de +∞.

3/ a- Montrer que Δ' : y = -2x est une asymptote à (ζ_f) au voisinage de -∞.

b- Etudier la position de (ζ_f) par rapport à Δ' .

4/ a- Etudier la dérivabilité de f à droite en 3 et à gauche en –3.

b- Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

5/ a- Montrer que f est dérivable sur]-∞,-3[∪]3,+∞[et

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-9}} - 1 .$$

b- Montrer que f strictement décroissante sur]-∞,-3] et strictement croissante sur [3,+∞[.

c- Dresser le tableau de variation de f.

6/ Soit g la restriction de f à l'intervalle [3,+∞[.

a- Montrer que g réalise une bijection de [3,+∞[sur un intervalle J que l'on déterminera.

b- Montrer que g^{-1} est dérivable sur [-3,0[

c- Calculer $g^{-1}(-1)$, en déduire $(g^{-1})'(-1)$

d- Expliciter $g^{-1}(x)$ pour $x \in J$.

Exercice 55

Soit la fonction f définie par $f(x) = -1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

1)a- dresser le tableau de variation de f

b- Etudier les variations de la fonction

$\varphi : x \longmapsto f(x) - x$ sur $]-1;1[$.

Montrer que l'équation f(x) = x admet dans $]-1;1[$ une solution unique α et que $\alpha \in \left]\frac{4}{5};1\right[$

Donner le signe de $\varphi(x)$

2) a- Montrer que f réalise une bijection de $]-1;1[$ sur IR , on note f^{-1} sa fonction réciproque

$$b - demontrer\ que\ f^{-1}(x) = \frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2+1}}$$

$$\forall x \in IR$$

3) Soit la suite (U_n) définie par : $U_0 \in [0\,;\alpha]$

$U_{n+1} = f^{-1}(U_n)\ \forall n \in IN$

a- Montrer que : $\forall n \in IN\ ; U_n \in [0;\alpha]$

b- Utiliser le signe de $\varphi(x)$ pour montrer que :

$\forall x \in [0;\alpha]\quad f^{-1}(x) \geq x$

Montrer alors que la suite (Un) est monotone et en déduire que (U_n) est convergente et déterminer sa limite

b) Pour tout de $]-1\,;1[$, on pose:

$$h(x) = f\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}(x+1)\right)\right)$$

c) *Montrer que* : $\forall x \in]-1;1[$

$$h(x) = -1 + \frac{1}{tg\left(\frac{\pi}{2}(x+1)\right)}$$

d) Montrer que h réalise une bijection de $]-1;1[$ sur IR. On note h^{-1} sa fonction réciproque

e) Montrer que h^{-1} est dérivable sur IR et que

$$(h^{-1})'(x) = -\frac{2}{\pi((x+1)^2+1)}$$

4) Pour tout x de IR* , on pose

$$H(x) = h^{-1}(x-1) + h^{-1}\left(\frac{1}{x} - 1\right)$$

a-Montrer que H est dérivable sur IR* et calculer H'(x)

b) Calculer $h\left(-\frac{1}{2}\right)$ et $h\left(\frac{1}{2}\right)$, en déduire que : $\forall x \in IR_+^*$

H(x) = -1 : $\forall x \in IR_-^*$; H(x) = 1

c- Pour tout n de IN* on pose

$$V_n = \sum_{k=1}^{n}\left[h^{-1}\left(\frac{1}{k}\right) + h^{-1}\left(-\frac{1}{k}\right)\right]\ et\ W_n = \frac{1}{n}V_n$$

* Montrer que $h^{-1}\left(\frac{1}{k}\right) + h^{-1}\left(-\frac{1}{k+1}\right) = -1$

$$\forall k \in IN^*$$

**) Montrer que $\forall k \in IN^*\ V_n = -n - h^{-1}\left(-\frac{1}{n+1}\right)$, en déduire que la suite (W_n) est convergente et donner sa limite.

Exercice 56

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

et F la primitive de f sur IR tel que F(0) = 0

1) a- Montrer que $\forall x \in IR_-$: $x \leq F(x) \leq x - \frac{1}{3}x^3$

b- Montrer que $\forall x \in IR_+ : \; x-\frac{1}{3}x^3 \le F(x) \le x$

2) Calculer alors : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)-x}{x^2}$

3) Soit G la fonction définie sur IR par :

$$\begin{cases} G(x)=\dfrac{F(x)}{x} & \text{si } x\neq 0 \\ G(0)=1 \end{cases}$$

a- Etudier la continuité et la dérivabilité de G en 0

b – Déterminer le signe de $H(x) = \dfrac{x}{x^2+1} - F(x)$

puis donner le sens de variation de G sur IR

4) On pose $\varphi(x) = F\left(\frac{1}{x+1}\right) + F\left(\frac{x}{x+2}\right)$

pour tout x $\in IR_+$

a- Montrer que φ est dérivable sur IR_+ et calculer

H'(x)

b- Vérifier que $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ F(tg(x)) = x puis

calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$

c- En déduire que $F\left(\frac{1}{2}\right)+F\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{\pi}{4}$

d- Montrer que F réalise une bijection de IR sur un

intervalle J que l'on précisera

Déterminer $F^{-1}(x)$ pour tout x de J

Exercice 57

Sur la figure est tracée la courbe représentative notée

(ζ_f) dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'une fonction f

définie sur IR. On sait que :

- La droite Δ d'équation y = 2x + 4 est une asymptote à (ζ_f) en $+\infty$.

- La droite d'équation y = 0 est une asymptote à la courbe (ζ_f) en $-\infty$.

- La courbe (ζ_f) admet deux tangentes aux points d'abscisses -3 et -1.

- La courbe (ζ_f) admet une demi tangente T et une demi tangente verticale au point d'abscisse -4.

1/ Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-2x)$

2/ Calculer : f'(-1) ; f'(-3) et $f'_d(-4)$.

3/ a- f est-elle dérivable à gauche en -4 ? Déterminer

alors $\lim\limits_{x\to(-4)^-}\dfrac{f(x)-f(-4)}{x+4}$

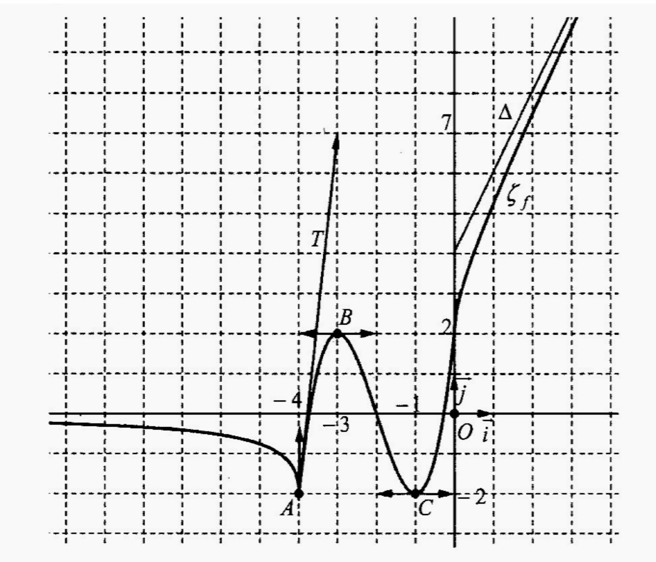
b- Montrer qu'il existe une solution unique $\alpha\in]-4,-3[$

tel que $f(\alpha) = 0$.

4/ Soit h la restriction de f à l'intervalle [-1, +∞[.

Montrer que h réalise une bijection de [-1, +∞[sur un

intervalle J que l'on précisera.



Exercice 58

Soit f la fonction définie sur IR par :

$$f(x)=\begin{cases} x^3+2x^2+x+2 & \text{si } x\le 0 \\ 1+\sqrt{x^2+1} & \text{si } x>0 \end{cases}$$

1/ Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en 0.

f est-elle dérivable en 0 ?

2/a) Calculer la fonction dérivée de f sur chaque intervalle

b) Dresser le tableau de variation de f

3/a) Montrer que la droite $\Delta : y = x+1$ est une asymptote à la courbe de f au voisinage de $(+\infty)$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$; Interpréter graphiquement le résultat

4/ Pour $x \in \left]-\infty, 0\right]$ Montrer que la courbe de f admet un point d'inflexion A

5/ Tracer (ζ_f) dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Exercice 59

Soit f la fonction définie sur

$\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{si } x \geq 0 \\ 2x^2+1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

1/ Etudier la continuité de f en 0

2/a) Etudier la dérivabilité de f en 0

b) Interpréter graphiquement les résultats trouvés

3/ Calculer la fonction dérivée de f sur chaque intervalle

4/ Dresser le tableau de variation de f

5/ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$; Interpréter graphiquement les résultats obtenues

Exercice 60

Soit f la fonction définie sur IR par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x+2}{x+2} & \text{si } x > 0 \\ 3-\sqrt{x^2+4} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

1/ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2/ a) Montrer que f est continue en 0

b) Déterminer le domaine de continuité de f

3/ a) Montrer que f n'est pas dérivable en 0

b) Déterminer les équations cartésiennes des demies tangentes à

(C_f) au point A (0,1) ; (C_f) étant la courbe représentative de f dans un repère cartésien

4/a) Calculer la fonction dérivée de f sur chaque intervalle.

b) Dresser le tableau de variation de f sur IR

5/a) Montrer que (C_f) admet une asymptote horizontale au voisinage de $(+\infty)$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-x$; Interpréter graphiquement le résultat obtenue

Exercice 61

Soit f la fonction définie sur

$\left]-1,1\right[$ par : $f(x) = -1+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

et ζ_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1/a) Justifier que f est dérivable sur

$]-1,1[$ et que: $f'(x)=\dfrac{1}{(\sqrt{1-x^2})^3}$

b) Dresser le tableau de variation de f

2/a) Montrer que I(0,-1) est un point d'inflexion de ζ_f

b) Donner une équation cartésienne de la tangente à ζ_f au point I

c) Montrer que I est un centre de symétrie pour ζ_f

3/ Tracer ζ_f en précisant les asymptotes

4/ a) Montrer que f réalise une bijection de $[0,1[$ sur un intervalle J à préciser

b) Calculer $\left(f^{-1}\right)'(-1)$

c) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$

Exercice 62

A/ Soit la fonction g défini sur IR_+ par :

$$g(x)=2\sqrt{x}-x-1$$

1°) Etudier la dérivabilité de g adroite en 0.

2°) Déterminer $g'(x)$ pour tout $x\in IR_+^*$

3°) a- Donner le tableau de variation de g.

En déduire que $g(x)\le 0\quad \forall x\in IR_+$.

B/ Soit la fonction f défini sur IR par :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{x}-x-1}{x-1} & si\ x\ge 0\ et\ x\ne 1\\ 1 & si\ \ x=1\\ \dfrac{x+1}{-x+1} & si\ \ x<0\end{cases}$$

1°) Etudier la continuité de f en 0 et en 1 .

2°) a- Etudier la dérivabilité de f en 0 et en 1 .

Interpréter géométriquement le résultat trouvé.

3°) Calculer $f'(x)$. et donner le tableau de variation de f.

Exercice 63

Soit la fonction f défini par :

$$\begin{cases}f(x)=\sqrt{x^2-1}+\pi x+cos\pi x+1\ ;\ si x>1\\ f(x)=x^2-x+\pi\quad ;\quad si\ x\ \le 1\end{cases}$$

1°) Etudier la continuité de f en 1.

2°) a- Montrer que $\forall x>1; f(x)\ge\sqrt{x^2-1}+\pi x$.

b- Déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3°) a- Etudier la dérivabilité de f sur . $[1;+\infty[$

b- Prouver que $\forall x>1\ f'(x)>0$.

4°) Montrer que $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=+\infty$

Interpréter géométriquement le résultat trouvé .

5°) Dresser le tableau de variations de f .

6°) L'équation $f(x)=0$ possède –t-elle des solutions dans IR ?

7°) Soit $h:[0;\pi]\to IR\ ; x\mapsto h(x)=f(3+sinx)$.

Etudier la dérivabilité de h sur $[0;\pi]$.

Dresser le tableau de variations de h.

Exercice 64

Soit f la fonction définie sur IR par :

$f(x)=1-x+\sqrt{x^2+3}$.

On désigne par ξ_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°) Dresser le tableau de variations de f.

2°) a- Montrer que la droite $\Delta: y = -2x + 1$ est une asymptote à ξ_f .

b- étudier la position de ξ_f par rapport à Δ .

c- Tracer ξ_f et Δ dans le même R.O.N $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3°) a- Montrer que f réalise une bijection de IR sur un intervalle J a préciser.

b- Construire $\xi_{f^{-1}}$ dans le même R.O.N $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

c – Montrer que $\forall x \in J\ f^{-1}(x) = \dfrac{-x^2 + 2x + 2}{2(x-1)}$

4°) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans IR une solution unique α et que $\alpha \in \left]\frac{3}{2}; 2\right[$.

5°) Soit g la fonction définie sur $[0\,;\pi]$ *par*

$g(x) = 1 + f'(cosx)$

$a)$ *verifier que* $\forall x \in [0;\pi]\ g(x) = \dfrac{cosx}{\sqrt{3 + cos^2 x}}$

et que $g'(x) = \dfrac{-sinx}{\left(\sqrt{3 + cos^2 x}\right)^3}$

Montrer que g réalise une bijection de $[0\,;\pi]$ sur un intervalle I a préciser .

c- Déterminer le domaine D de la dérivabilité de g^{-1}

Et *monttrer que* $\forall x \in D$

$$(g^{-1})'(x) = \frac{\sqrt{3}}{(x^2 - 1)\sqrt{1 - 4x^2}}$$

Exercice 65

Soit la fonction définie sur IR_+^* par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{1 - cos\pi x} & ;\ si \quad x \in]0;1] \\ f(x) = x - \dfrac{1}{2} + \sqrt{x^2 - 1} & ; \quad si\ x > 1 \end{cases}$$

1°) a- Montrer que f et continue en 1.

b- Etudier la dérivabilité de f en 1.

2°) Montrer que f est dérivable sur]0; 1] et sur]1; +∞[

Déterminer $f'(x)$ lorsque $x \in]0;1]$ et $x \in]1;+\infty[$

3°) Soit $g:]1;+\infty[\to IR\ \ /g(x) = x - \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 - 1}$.

a- Montrer que g réalise une bijection de]1; +∞[sur un intervalle J que l'on précisera.

b- Montrer que pour tout $x \in$ J on a

$$g^{-1}(x) = \frac{4x^2 + 4x + 5}{8x + 4}$$

4°) Soit $\varphi:]0;1] \to IR\ /\varphi(x) = \dfrac{1}{1 - cos\pi x}$

a- Montrer que φ admet une fonction réciproque φ^{-1} dont on précisera le domaine de définition.

b- Montrer que φ^{-1} est dérivable sur et que $\forall x \in \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[\ (\varphi^{-1})'(x) = \dfrac{1}{-\pi x\sqrt{2x - 1}}$

φ^{-1} est elle dérivable à droite en $\frac{1}{2}$.

5°) Montrer que l'équation $\varphi(x) = x$ admet une seul solution $x_0 \in]0;1]$.

Calculer $\varphi\left(\frac{2}{3}\right)$ et en déduire x_0.

Exercice 66

Soit f la fonction définie par fonction définie par :

$$f :]-1;1[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

1. Montrer que la fonction f est dérivable n fois sur $]-1;1[$

   Avec $n \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in]-1;1[$, on a :

   $$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}$$

   Et P_n un polynôme vérifier la relation suivante

   $$\forall n \in \mathbb{N} : P_{n+1}(x) = (1-x^2)P_n'(x) + (2n+1)xP_n(x)$$

2. a) Montrer que

   $$\forall x \in]-1;1[: (1-x^2)f'(x) - xf(x) = 0$$

   b)deduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a

   $$P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) - n^2(1-x^2)P_{n-1}(x) = 0$$

   c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $P_n' = n^2 P_{n-1}$

   d) deduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a :

   $$n^2 P_n(x) - (2n-1)xP_n'(x) - (1-x^2)P_n''(x) = 0$$

   e) calculer $P_n(0)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Exercice 67

On considere la fonction polynome P_n definie par :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(x-k) = (x-1)\times(x-2)\times\ldots\times(x-n)$$

et

la fonction f_n tel que $f_n(x) = \dfrac{P_n'(x)}{P_n(x)}$

1. Montrer par recurence que $\forall x \in \mathbb{R} - \{1,2,3,\ldots;n\}$

   on a $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x-k}$

2. Deduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\forall x \in \mathbb{R}$

   $$P_n(x)P_n''(x) < \left((P_n'(x)\right)^2$$