01 Soit la fonction f définie $[-4;4]$ par $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.
3. Donner l'équation de la droite (T), tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0.
4. Tracer dans repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ la courbe $(\mathcal{C}_f)$ ainsi que ses tangentes.

02 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2 - \frac{2(1-x)}{x^2+1}$$

On note $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative.

1. a. Calculer $f'(x)$; vérifier que $f'(x) = \dfrac{-2(x^2-2x-1)}{(x^2+1)^2}$.

   b. Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f.
   On ne demande pas les valeurs exactes des extremums mais une valeur arrondie aux centièmes.
2. Déterminer l'équation de la tangente T à $(\mathcal{C}_f)$ au point A d'abscisse 1.
3. On veut montrer qu'il existe un point B de $(\mathcal{C}_f)$ tel que la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ en B soit parallèle à la droite Δ d'équation $y = -x$.

   a. Montrer que le problème revient à résoudre l'équation $x^4 + 4x + 3 = 0$.

   b. Vérifier que $x^4 + 4x + 3 = (x+1)^2(x^2 - 2x + 3)$.

   c. Conclure.
4. Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ ainsi que ses tangentes.
5. Résoudre $f(x) = 0$ et interpréter graphiquement.
6. Déterminer les coordonnées du point d'intersection entre $(\mathcal{C}_f)$ et la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = 2$, puis la position relative entre $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{D})$. Tracer $(\mathcal{D})$.
7. Démontrer que la fonction f est minorée par -1 sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que $f(x) > -1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

03 Soit $g :]-\infty, 0[\to \mathbb{R},\ x \mapsto x + 1 + \dfrac{1}{x}$. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de g dans un repère orthonormé d'unité 1cm.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$, interpréter le résultat.
2. Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}$ en $-\infty$.
3. Déterminer la position relative de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$.
4. Montrer que pour tout $x < 0$, $g'(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$ et dresser le tableau de variation de g.
5. Représenter $\mathcal{D}$ et l'allure de $\mathcal{C}$.

04 **Partie A**

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ et on note C_f sa courbe représentative.
C_f passe par le point A de coordonnées $(1;1)$.
C_f admet la droite (d) d'équation $y = -x + 2$ pour tangente au point A.

1. En utilisant les données du texte et en justifiant la réponse, déterminer $f(1)$ et $f'(1)$.
2. f est de la forme $f(x) = \dfrac{x^2 + ax + b}{x}$; exprimer $f'(x)$ en fonction des coefficients a et b.
3. En déduire la valeur des coefficients a et b.

Partie B

On suppose pour la suite que $a = -2$ et $b = 2$ et on a alors $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x}$ définie sur $]0;+\infty[$.

1. Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variations.
   Donner la valeur exacte du minimum puis sa valeur arrondie aux centièmes.
2. Déterminer l'équation réduite de la tangente (d_1) à la courbe au point d'abscisse 2.
3. Dans un repère orthonormé, tracer C_f, (d) et (d_1).

05 Soient f et g les fonctions définies respectivement sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par :

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 2x + 3 \qquad\qquad g(x) = \frac{2x^2 - x - 3}{x - 1}$$

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leurs courbes représentatives dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1ère Partie : Étude de la fonction f

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
2. Calculer f' la fonction dérivée de f, puis dresser le tableau de variations de f.

2ème Partie : Étude de la fonction g

1. Déterminer les limites de g aux bornes de son domaine de définition et interpréter graphiquement.
2. a. Déterminer les réels a, b et c tels que

$$g(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$$

   b. En déduire que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = ax + b$ est asymptote à $\mathcal{C}_g$; déterminer la position relative de $(\mathcal{D})$ et $\mathcal{C}_g$.
3. Calculer g' la fonction dérivée de g, puis dresser le tableau de variations de g.

3ème Partie :

1. a. Vérifier que $f(x) = g(x) \Longleftrightarrow x(x+1)(x-2)(2x-3) = 0$

   b. En déduire les coordonnées de tous les points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
2. a. Déterminer l'équation de la droite (T), tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $-\dfrac{1}{2}$.

   b. En quels points $\mathcal{C}_g$ admet-elle une tangente parallèle à (T) ?
3. Construire les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

06 On considère les fonctions f et g définies respectivement sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2+3x-5}{x-1} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x + 5$$

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, les courbes représentatives de f et de g dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Partie A - Étude de la fonction f

1. Étudier les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
2. Écrire $f(x)$ sous la forme $ax+b+\dfrac{c}{x-1}$; en déduire que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique (d).
   Préciser la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de (d).
3. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet un centre de symétrie I dont on précisera les coordonnées.
4. Calculer f' la dérivée de f, puis dresser le tableau de variations de f.

Partie B - Étude de la fonction g

1. Étudier les limites de g aux bornes de son domaine de définition.
2. Calculer g' la dérivée de g, puis dresser le tableau de variations de g.

Partie C - Tangentes aux courbes

1. Écrire l'équation de la tangente T_A à $\mathcal{C}_f$ au point A de la courbe d'abscisse $\dfrac{1}{2}$.
2. Montrer que $\mathcal{C}_g$ admet des tangentes parallèles à T_A en un ou plusieurs points dont on précisera les coordonnées.

07 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(2x) - 2\cos(x)$

1. Montrer que f est périodique et déterminer sa parité éventuelle.
2. Démontrer que $f'(x) = 2\sin(x)(1-2\cos(x))$
3. Étudier le sens de variation de f sur $[0;\pi]$.
4. Construire la courbe représentative de f sur $[-\pi;3\pi]$ en expliquant votre construction.

08 Soit f, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin(x)(\cos(x)+1)$.

1. Justifier que l'on peut réduire l'intervalle d'étude à $[0;\pi]$.
2. Montrer que $f'(x) = (\cos(x)+1)(2\cos(x)-1)$, puis dressez le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0;\pi]$ (on justifiera les signes trouvés dans le tableau).
3. Montrer que $(\mathcal{C}_f)$, la courbe représentative de la f, est concave sur $[0;\pi]$
4. Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0.
5. Construire (T) et $(\mathcal{C}_f)$ sur l'intervalle $[-\pi;3\pi]$ en justifiant la construction.

09 **Partie A :**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3(x-1)^3}{3x^2+1}$ et soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal d'unité $1cm$.

1. Montrez qu'il existe un unique triplet de réels $(a;b;c)$, que l'on déterminera, tel que pour tout réel x : $f(x) = ax + b + \dfrac{cx}{3x^2+1}$.
2. Déterminez les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
3. Montrez que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = \dfrac{9(x-1)^2(x+1)^2}{(3x^2+1)^2}$, où f' est la fonction dérivée de la fonction f.
4. Dressez le tableau de variation de la fonction f.
5. Donnez l'équation réduite de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0.
6. Tracez la tangente (T) ainsi que la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

Partie B : On pourra dans cette partie utiliser certains résultats de la partie A.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{3(\sin(x)-1)^3}{3\sin^2(x)+1}$.

1. Montrez que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $g'(x)$, où g' est la fonction dérivée de la fonction g.
2. Montrer que pour tout x réel, on a $g'(x) = \dfrac{9\cos^5(x)}{(3\sin^2(x)+1)^2}$.
3. Dressez le tableau des variations de la fonction g sur $[-\pi;\pi]$.
4. Tracez sur un nouveau graphique, la courbe représentative de la fonction g sur $[-\pi;2\pi]$.