Géométrie de l'espace

2BSF 1 et 2

Pr. Latrach Abdelkbir

Activité ⓪ :

On considère dans l'espace les points $A(2;1;3)$, $B(1;1;-2)$ et $C(2;-1;0)$.

1. a. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   b. Etudier l'alignement des points A, B et C.
2. a. Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).
   b. Est-ce que le point $D(4,-3,2)$ appartient à (AB) ?
   c- Donner deux équations cartésiennes de la droite (AB).
3. Donner une équation cartésienne du plan (ABC).

Application ① :

Soient $A(2,-1,1)$, $B(5,3,1)$ et $C(6,-4,1)$ trois points de l'espace.

Calculer AB , AC et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ puis en déduire la nature du triangle ABC.

Application ② :

Montrer que $(D_1) \perp (D_2)$ dans les cas suivants :

a. (D_1) est dirigée par $\vec{u}(1,2,3)$ et
$$(D_2):\begin{cases} x = 1+4t \\ y = 2-2t \quad /t \in \mathbb{R}. \\ z = 5 \end{cases}$$

b. (D_1) est définie par les équations $x-2 = \frac{y+1}{2} = \frac{5-z}{2}$
et $$(D_2):\begin{cases} x = 3+2t \\ y = 5-3t \quad /t \in \mathbb{R} \\ z = -2-2t \end{cases}$$

Application ③:

1. Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$ passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ dans les cas suivants :
   a. $A(1,0,5)$ et $\vec{n}(-1,1,0)$.
   b. $A(\sqrt{2},-2,5)$ et $\vec{n}(-1,1,0)$.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$ passant par A et orthogonal à la droite
$$(D):\begin{cases} x = 2-3t \\ y = -3+t \quad /t \in \mathbb{R}. \\ z = 4-2t \end{cases}$$
3. Donner une équation cartésienne du plan médiateur $(\mathcal{P})$ du segment $[MN]$ tel que $M(0,5,-1)$ et $N(2,1,1)$.

Exercice ① :

On considère dans l'espace les points $A(1;1;2)$, $B(0;1;1)$ et le vecteur $\vec{n} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

1. Vérifier que les points O, A et B ne sont pas alignés.
2. Montrer que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.
3. En déduire une équation cartésienne du plan(OAB).
4. Donner une représentation paramétrique de la droite passant par le point A est orthogonale au plan (OAB).

Application ④:

Etudier l'orthogonalité des plans (P) et (Q).

- $(P): 2x+z-1=0$ et $(Q): x-2y-2z+1=0$.
- $(P): x-y-4z+1=0$ et $(Q): 4x-y-2z-3=0$.

Application ⑤ :

On considère $(\mathcal{P})$ le plan d'équation $x+y+z+1=0$ et $A(1,2,0)$ est point de l'espace.

1. Calculer $d(A,(P))$.
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par A est orthogonal à $(\mathcal{P})$.
3. Déterminer les coordonnées du point H le projeté orthogonal de A sur $(\mathcal{P})$.

Exercice ②:

On considère les points $A(-1,0,1)$, $B(1,2,-1)$ et $C(1,-1,2)$ et soit (P) le plan d'équation $x+y-z=0$.

1. ***a.*** Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).
   b. Vérifier que la droite (AB) est orthogonale à (P).
   c. Déterminer les coordonnés du point d'intersection de (AB) et (P) .
2. Montrer que la droite (AC) est parallèle à (P).
3. Donner une équation cartésienne du plan (Q) passant par B et parallèle à (P).

Application ⑥ :

1. Donner une équation cartésienne du sphère (S_1) de centre $\Omega(2,0,1)$ et de rayon $R=\sqrt{2}$.
2. a. Donner une équation cartésienne du sphère (S_2) de centre $\Omega(1,-1,2)$ et passant par le point $A(-1,4,5)$.
b. Est-ce que le point $B(1,2,-2)$ appartient à (S_2) ?

Application ⑦ :

Donner, par deux méthodes, une équation cartésienne de la sphère de diamètre $[AB]$ telle que $A(-1,3,2)$ et $B(-3,1;0)$.

Application ⑧ :

Déterminer (S) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ dans les cas suivants :

a. $x^2+y^2+z^2-4x-6y=0$.
b. $x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z+19=0$.
c. $x^2+y^2+z^2+4y-2z+5=0$.

Application ⑨ :

Déterminer une représentation paramétrique la sphère (S) d'équation $x^2+y^2+z^2=1$.

Application ① ⓪:

On considère l'ensemble (S) des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que$x^2+y^2+z^2+2x-2y+2z-1=0$.

1. Montrer que (S) est une sphère en déterminant son centre et son rayon R.
2. Etudier la position relative de (S) et les plans suivants :
   a. $(P_1): 2x+y+2z-3=0$.
   b. $(P_2): x-2y+2z+3=0$.
   c. $(P_3): x+2y-z+9=0$.

Application ① ①:

Déterminer la position relative de la droite (D) de représentative paramétrique $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t / t \in \mathbb{R} \\ z = 2 + t \end{cases}$ avec les sphères $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 + 2x = 0$ et $(S_2): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 6z + \frac{31}{3} = 0$.

❍ Exercice ③:

Soit (P) le plan d'équation $2x - 2y - 5 = 0$ et soit (S) l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que
$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 6z + 11 = 0$.

1. Montrer que (S) est une sphère don't on déterminera le centre Ω et le rayon R.
2. Montrer que le plan (P) coupe la sphère (S) selon un cercle (C) dont on déterminera le centre H et le rayon r.
3. Déterminer une équation cartésienne de chacun des deux plans tangents à (S) et parallèle à (P).
4. ***a.*** Soit (Q) le plan d'équation $x + y + z + 1 = 0$.
   a. Vérifier que le plan (P) est tangent à la sphère (S) puis déterminer leur point de contact.
5. ***a.*** Vérifier que $(P) \perp (Q)$.
   b. Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) intersection de (P) et (Q).
6. ***a.*** vérifier que le point $A(2; -1; -2)$ est un point de la sphère (S).
   b. Déterminer une équation cartésienne du plan (Q) tangente à la sphère (S) au point A.

✍ Application ① ②:

Calculer le produit vectoriel des vecteurs $\vec{u}(-1,3,0)$ et $\vec{v}(2,-6,1)$.

✍ Application ① ③:

On considère les points $A(2,4,-5)$, $B(1,0,4)$ et $C(0,3,1)$.

1. Vérifier que les point A, B et C ne sont pas alignés.
2. Donner une équation du plan (ABC).

✍ Application ① ④:

On considère les points $A(-1,2,0)$, $B(3,0,4)$ et $C(-2,1,2)$.

1. Vérifier que les point A, B et C ne sont pas alignés.
2. Déterminer l'aire du triangle ABC.

✍ Application ① ⑤:

1. Calculer la distance du point $M(3,2,1)$ à la droite $(D): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 \quad / t \in \mathbb{R}. \\ z = -t \end{cases}$
2. ***a.*** Calculer la distance du point $N(-1,2,0)$ à la droite $(\Delta): \begin{cases} x - y = 1 \\ y + z = 2 \end{cases}$.
   b. Déterminer les coordonnées de H projeté orthogonal de N sur (Δ).

❍ Exercice ④:

Soit (S) la sphère de centre $\Omega(1; -1; 0)$ et de rayon $R = \sqrt{3}$.

1. Donner l'équation cartésienne de (S).
2. On considère les droites $(D_1): \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 + 4t \\ z = 5 + 4t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$, $(D_2): \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -2 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ et $(D_3): \begin{cases} x = -2 + 6t \\ y = 4t \\ z = t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

Calculer les distances $d(\Omega, (D_1))$, $d(\Omega, (D_2))$ et $d(\Omega, (D_3))$ puis étudier (S) et les droites (D_1), (D_2) et (D_3).

✍ Application ① ⑤:

On considère les plans $(P): 2x + z - 1 = 0$ et $(Q): x - 2y - 2z + 1 = 0$.

1. Vérifier que (P) et (Q) sont sécantes suivant une droite (D) en déterminant un vecteur directeur.
2. Donner une représentation paramétrique de (D).

❍ Exercice ⑤:

On considère les points $A(0; -2; -2)$; $B(1; -2; -4)$; $C(-3; -1; 2)$.

1. ***a***-Montrer que : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k}$.
   b- En déduire $2x + 2y + z + 6 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).
2. Soit (S) la sphère d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 23 = 0$.
   Montrer que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(1; 0; 1)$ et que son rayon est $R = 5$.
3. ***a***-Vérifier que : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et orthogonale au plan (ABC).
   b-Déterminer les coordonnées du point H intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC).
4. Vérifier que $d(\Omega; (ABC)) = 3$ puis montrer que le plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle de rayon 4 et on déterminera le centre.

❍ Exercice ⑤: Rattrapage 2017

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$,on considère la sphère (S) dont une equation cartésienne $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 1 = 0$.
Et le plan (P) d'équation $y - z = 0$.

1. ***a***- Montrer que le centre de (S) est $\Omega(1; 1; 1)$ et que son rayon $R = 2$.
   b- Calculer $d(\Omega; (P))$ et en déduire le plan (P) coupe la sphère (S) selon un cercle (C).
   c-Déterminer le centre et le rayon du cercle (C).
2. Soit (Δ) la droite passant par le point $A(1; -2; 2)$ et orthogonal au plan (P).
   a-Montrer que $\vec{u}(0; 1; -1)$ est un vecteur directeur de la droite (Δ).
   b-Montrer que: $\|\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u}\| = \sqrt{2}\|\vec{u}\|$ et en déduire que la droite (Δ) coupe la sphère (S) en deux points.
   c-Déterminer le triple des coordonnées de chacun des points d'intersection de la droite (Δ) et la sphère (S).

Pr. Latrach Abdelkbir