1

I/ Ecrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

$\left(\sqrt{3}-i\right)\left(1-i\right)^4$; $\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}-\frac{\sqrt{3}-i}{1+i}$; $\frac{2}{i}\left(3i-1\right)+\left(1+i\right)^3$; $\frac{2-4i}{2i+1}$

II/ Ecrire les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique :

$\frac{\left(\sqrt{3}-i\right)^4\left(1+i\right)^2}{-2i\left(1-i\sqrt{3}\right)^2}$; $3\left(1+i\sqrt{3}\right)^2\left(-2-2i\right)^5$

III/ Soient les nombres complexes $z_1 = -1 + i$ et $z_2 = 1+i\sqrt{3}$. On pose : $Z = \frac{z_1}{z_2}$

a- Ecrire Z sous forme algébrique.

b- Ecrire Z sous forme trigonométrique.

c- En déduire les valeurs exacte de :

$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ *et* $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ puis calculer Z^{12}.

IV/ Résoudre dans C les équations suivantes :

- $(1 - i)\bar{z} = 2+3i$
- $2iz + (1 - 2i)\bar{z} = 1 - 4i$
- $z^2 - 4z + 8 = 0$

2

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A(-2i) ; B(4-2i) ; C(4+2i) et D(1).

❶ a- Ecrire $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ sous forme algébrique.

b- En déduire la nature du triangle ABC.

❷ A tout point M ≠ A d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{z-4-2i}{z+2i}$

a- Déterminer l'ensemble des points M tel que $|z'| = 1$.

b- Déterminer l'ensemble des points M tel que z' soit réel.

c- Montrer que pour tout $z \neq -2i$, $z' - 1 = \frac{-4-4i}{z+2i}$

d- Montrer que : DM'.AM = $4\sqrt{2}$.

e- En déduire que si M appartient à un cercle ζ(A,2) alors M' appartient à un cercle ζ ' que l'on précisera.

❸ Déterminer les ensembles suivants :

$E = \{ M(z) \in P \,/\, |z - 4 + 2i| = 3 \}$

$F = \{ M(z) \in P \,/\, |\bar{z} + 2i| = |z - 4 + 2i| \}$

$G = \{ M(z) \in P \,/\, |z'| = 1 \}$

3

Soit m un nombre complexe de module 2 et a et $b \in \mathbb{C}$ tel que :

$a = 1+i+m$ et $b = 1-i+m$.

1°) Déterminer m pour que a et b soient conjugués.

2°) Déterminer m pour que a et b soient de même module.

3°) Déterminer m pour que $a + ib = 0$.

4

Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$z_1 = i^{1245}$; $z_2 = \left(3-\sqrt{2}i\right)^2$;

$z_3 = \dfrac{1+i}{\sqrt{3i}}$; $z_4 = \dfrac{(1-2i)^2-(1-i)^3}{(1+3i)^3+(1+i)^2}$.

$z_5 = (2+3i)(4-i)$; $z_6 = \dfrac{1}{7-4i}$;

$z_7 = \dfrac{1+i}{1-i}$; $z_8 = \dfrac{1}{1-i}+\dfrac{1}{1+i}+\dfrac{i}{2}$.

5

Soit (O, $\vec{U}$, $\vec{V}$) un repère orthonormé du plan complexe P .

Déterminer et construire E l'ensemble des points M d'affixe z dans chaque cas :

a) $\left|\dfrac{z-2-i}{2i-z}\right| = 2$; b) $\left|\dfrac{3iz-12}{z+i+1}\right| = 3$; c) $\dfrac{z+1-i}{z+1-3i}$ est imaginaire pure .

6

Pour tout nombre complexe z, on pose

$z' = (3+i)\bar{z}+2-6i$.

a - Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tel que z' est Réel .

b - Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tel que z' a pour module 1 .

c - Trouver les nombres complexes z tel que $z' = i(2-3i)$.

7

Le plan complexe P est muni d'un repère Orthonormé directe $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soient les nombres complexes : $z_1 = (1-i)(1+2i)$ $z_2 = \dfrac{2+6i}{3-i}$ et $z_3 = \dfrac{4i}{i-1}$ ou $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$ et $M_3(z_3)$.

1°)a- Ecrire z_1 , z_2 et z_3 sous la forme cartésienne.

b- Placer les points M_1 , M_2 et M_3 sur le plan P.

2°) a- Ecrire $\dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$ sous la forme algébrique.

b- En déduire que le triangle $M_1M_2M_3$ est rectangle isocèle en M_1.

3°) Calculer l'affixe Z_4 du point M_4 pour que $M_1M_2M_4M_3$ soit un carré.

4°) Déterminer l'ensemble des points $M(z) \in P$ / $\left|\dfrac{z-z_1}{z+i}\right| = 1$.

8

Le plan complexe P est muni d'un repère Orthonormé directe $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soient les points $A(1)$, $B\left(\dfrac{-1+i}{2}\right)$ et $C\left(-\dfrac{1+i}{2}\right)$.

1°) Placer les points A , B et C sur le plan P et montrer que O est le centre de gravité du triangle ABC .

2°) a- Déterminer l'affixe du point $G_1 = Barycentre\{(A,2),(B,3)\}$.

b- En déduire l'affixe du point $G_2 = Barycentre\{(G_1,5),(C,-4)\}$.

3°) a- Déterminer l'affixe du point $D = S_{(BC)}(A)$.

b- Déterminer l'affixe du point E / $ABCD$ soit un parallélogramme

9

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls.

1°) En pose $z_1 = x_1 + i\, y_1$ et $z_2 = x_2 + i\, y_2$.

Montrer que $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2| \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2}$ est imaginaire pur.

2°)a- Montrer que

$$|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2| \Leftrightarrow z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 = 0.$$

b- Montrer que $\frac{z_1}{z_2}$ est imaginaire pur $\Leftrightarrow z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 = 0$.

10

Soit le nombre complexe $z \in C - \{-1\}$;

$z' = \frac{-iz - 2}{z + 1}$ et $f : M(z) \mapsto M'(Z')$.

On donne les points $A(a = -1)$, $B(b = 2i)$ et $C(c = -i)$.

1°) Soit $f(c) = c'$ déterminer $z_{C'}$ affixe du point C sous la forme algébrique.

2°) Déterminer z_D affixe du point D qui a pour image le point $D' / z_{D'} = \frac{1}{2}$.

3°) Soit $w = \frac{z - 2i}{z + 1}$.

a- Montrer que $z' = -i\, w$.

b- Déterminer l'ensemble des points $M(z) / w$ est imaginaire pur.

c- En déduire l'ensemble des points $M(z) / z'$ est réel.

c- Déterminer l'ensemble des points

$M(z) \in P \;/\; |w| = 1$

En déduire l'ensemble des points

$M(z) / |z'| = 1$.

11

Déterminer la forme trigonométrique de chaque nombre complexes : $z_1 = -5i$; $z_2 = 4$;

$z_3 = \frac{5 + 11i\sqrt{3}}{7 - 4i\sqrt{3}}$; $z_4 = \frac{(1-i)^2}{(1 - i\sqrt{3})^4}$

12

1 . Déterminer la forme trigonométrique de

$$Z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\, i}$$

2. En déduire $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

13

Soit $t \in [0, \pi[$. Déterminer la forme trigonométrique de chacun des nombres complexes suivants :

$Z_1 = -1 + i$;

$Z_2 = 1 + i + (1 - i)\, tg\,\theta$ avec $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$;

$Z_3 = 1 + Cost + i\, S\text{int}$; $Z_4 = 1 + i\, Cost + Sint$;

$Z_5 = (Cost + i\, Sint)^2$ et $Z_6 = \frac{1 + Cost + i\, Sint}{-1 + Cost + i\, Sint}$

14

Soit $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in]0, \pi[$, on pose

$Z = \frac{i\, z\, (z - 1)}{z + 1}$.

1°) Ecrire sous forme exponentielle chacun des

2°) Déterminer la partie réelle x de z et la partie imaginaire y de z .

15

Linéariser $\cos^3 x\ \sin 2x$; $\cos^2 2x \sin 3x$; $\cos^4 x \sin x$

16

A chaque nombre complexe $z \neq 2i$ on associe le nombre $Z' = \dfrac{iZ+1}{\overline{Z}+2i}$

1/a) On prend $z = 1+2i$ calculer alors Z ' et trouver sa forme exponentielle

b) Déterminer les nombres complexes tel que Z ' = i

2/ M, A et B sont les points d'affixes respectives Z, i et 2i

Montrer qu'on ait : $|iZ+1| = MA$ et $|\overline{Z}+2i| = MB$

En déduire l'ensemble

$E = \{ M(Z) \text{ tel que } |Z'| = 1 \}$

3/ On suppose que $Z = \tan\theta + 2i$; $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$

Chercher en fonction de θ le module et argument de Z ,

17

1/a) Mettre sous forme algébrique : $\left(\sqrt{3} - 3i\right)^2$

b) Résoudre dans C l'équation :

$z^2 - \left(\sqrt{3} + i\right)z + 2 + 2\sqrt{3}\,i = 0$

2/ Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A et B d'affixes respectives $2i$ et $\sqrt{3} - i$.

a) Ecrire sous forme trigonométrique les nombres

b) complexes $2i$ et $\sqrt{3} - i$.

c) Placer, dans le plan P les points A et B

d) Soit C le point du plan tel que : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB}$.

Déterminer l'affixe du point C

e) Montrer que le point C appartient au cercle de centre O et passant par A.

f) Montrer que le quadrilatère OACB est un losange.

18

Soit les équations (E) : (z² - (5+2i)z +4+ 2i) = 0 et (E') : (z² - 2(2-2i)z - 4 – 8i)=0 où z un nombre complexe.

1/a- Donner les racines carrées du complexe 5 + 12i.

b- Résoudre dans $\mathbb{C}$, les équations (E) et (E').

2/ Dans le plan complexe P muni d'un R.O.N (O $\vec{u}, \vec{v}$) on considère les points

A(-2i) ; B(4-2i) ; C(4+2i) et D(1).

a- Placer les points A,B,C et D (unité 1 cm).

b- Préciser la nature du triangle ABC.

c- Soit E le point tel que : $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$.

Déterminer l'affixe de E.

d- Quelle est la nature du quadrilatère BAEC.

3/ A tout point M d'affixe z distinct de A on fait associes le point M' d'affixe z' $= \dfrac{z-(4+2i)}{z+2i}$.

a- Déterminer l'ensemble : E = $\{M(z) / |z'| = 1\}$.

b- Déterminer l'ensemble : F = $\{M(z) / z' \in i\mathbb{R}\}$.

4/a- Montrer que $\forall z \neq -2i$ on a :

(z' – 1)(z + 2i) = - 4 - 4i.

b- Donner le module est un argument de $-4-4i$.

c- En déduire que DM'.AM = $4\sqrt{2}$ et que

$(\vec{u},\overrightarrow{DM'})+(\vec{u},\overrightarrow{AM})\equiv\frac{5\pi}{4}[2\pi]$.

5/ On suppose que $M\in\zeta_{(A;2\sqrt{2})}$. Déterminer et construire l'ensemble où varie le point M'.

19

Soit θ un réel de l'intervalle $[0,2\pi[$

1/a) Vérifier que $(e^{i\theta}-i)^2=-1+e^{2i\theta}-2ie^{i\theta}$

b) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $z^2-2iz+2ie^{i\theta}-e^{2i\theta}=0$

2/ On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $e^{i\theta}$ et $2i-e^{i\theta}$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$

a) Déterminer et construire l'ensemble ζ_1 décrit par le point M_1 lorsque θ varie dans $[0,2\pi[$

b) Calculer l'affixe du milieu I du segment $[M_1M_2]$

c) Déduire et construire l'ensemble ζ_2 décrit par le point M_2 lorsque θ varie dans $[0,2\pi[$

3/a) Montrer que $(M_1M_2)^2=8(1-\sin\theta)$

b) Déduire la valeur de θ pour laquelle M_1M_2 est maximale.

20

Soi $P(z)=z^3-(4+3i)z^2+(5+8i)z+4-7i$

1/a) Calculer P(i)

b) Déterminer les nombres complexes a , b et c tel que pour tout nombre complexes z :

$$P(z)=(z-i).(az^2+bz+c)$$

c) Résoudre alors l'équation $P(z)=0$

2/ Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A(i) ; B(2 – i) et C (2+3i)

a) Placer les points A ; B et C

b) En déduire que ABC est un triangle isocèle rectangle en A

21

1/a) Ecrire sous forme algébrique : $(9+2i)^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E):z^2+(9-2i)z-18i=0$

2/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E'):Z^4+(9-2i)Z^2-18i=0$

3/ le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$

a) Placer les points A et B d'affixes respectives $1+i$ et $3i$

b) Soit C le point d'affixe $1+\alpha i$ où $\alpha\in\mathbb{R}$

Déterminer α pour que le triangle ABC soit rectangle en C

c) Pour $\alpha=3$ déterminer l'affixe du point D pour que ABCD soit un parallélogramme

22

Dans le plan complexe muni du repère orthonormé

$(O, \vec{u}, \vec{v})$,direct on considère le point

M d'affixe $z = x + iy$ .On suppose que dans tout

l'exercice que $z \neq 2i$ .On note A le point d'affixe 1 et

B le point d'affixe $2i$.

1°) Résoudre les équations :

a/ $\frac{z-1}{z-2i} = i$ b/ $\frac{z-1}{z-2i} = -1$

On appellera C et D les points images des solutions

respectivement de a/ et b/

2°) On pose $Z = \frac{z-1}{z-2i} = X + iY$, X et Y étant des

réels.

Déterminer X et Y en fonction de x et y

3°) Déterminer et représenter l'ensemble (E) des

points M tels que Z soit réel

Montrer que D appartient à (E) .

4°) Montrer que l'ensemble (F) des points M tels

que Z soit imaginaire pur ou nul

est un cercle privé d'un point, dont on déterminera le

centre et le rayon.

Vérifier que C appartient à (F) et représenter

l'ensemble (F) .

5°) Déterminer et représenter l'ensemble (G) des

points M tels que $|Z| = 1$

23

On considère le nombre complexe : $a = -4\sqrt{3} - 4i$.

Déterminer le module et un argument de a .

2°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 = -4\sqrt{3} - 4i$

(on donnera les solutions sous forme trigonométrique)

3°) Soit : $u = (-1-i) + \sqrt{3}(1-i)$.

a- Calculer u^2 .

b- En déduire le module et un argument de u .c- Dans

le plan complexe rapporté à un repère orthonormé

$(O, \vec{U}, \vec{V})$

c- on considère les points A, B et C d'affixes

respectives u ; $\sqrt{3}(1-i)$ et $(-1-i)$

Montrer que OBAC est un rectangle.

24

On donne les nombres complexes suivants :

$u = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $v = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

1/ a- Ecrire u et v sous forme trigonométrique.

b- Montrer que : ∀ les entiers naturels m (pair) et n

(impair), on a : $u^{4m} + v^{3n} = 0$.

2/ On pose : $w = \frac{v}{u}$.

a- Ecrire sous formes algébrique le nombre

complexe w.

b- En déduire les valeurs de

$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

3/ Dans le plan complexe rapporté a un repère

orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère les points

A, B et C d'affixes respectifs : u , v et $(1 - i)u + iv$.

a- Montrer que : $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i$

b- Déduire que le triangle ABC est isocèle rectangle.

25

Dans le plan complexe rapporté a un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère les points

A, B, C et D d'affixes respectifs : -2i , 4 – 2i , 4 + 2i et 1.

1/ Préciser la nature du triangle ABC.

2/ On désigne par f l'application qui à tout point M(z) distinct de A associe le point M'(z')

tel que : $z' = \dfrac{z - 4 - 2i}{z + 2i}$

a- Déterminer les images de B et C par f.

b- Déterminer l'ensemble des points M(z) tels que : $|z'| = 1$.

c- - Déterminer l'ensemble des points M(z) tels que : z' est réel.

3/ a- Démontrer que pour tout $z \neq -2i$, on a : $(z' - 1)(z + 2i) = -4 - 4i$

b- En déduire que si M varie sur $\xi(A,4)$ alors M' varie sur un cercle ξ' que l'on précisera.

26

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormé direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$

1/ a- Vérifier que : $8 - 6i = (3 - i)^2$

b- Résoudre dans C, l'équation (E):

$z^2 + (1 + i)z - 2(1 - i) = 0$

2/ Soit θ un réel de $[0,\pi]$. On considère l'équation

$(E_\theta) : z^2 + (1 + e^{i\theta})z - 2(1 - e^{i\theta}) = 0$

a- Vérifier que (-2) est une solution de (E_θ) .

b- Déterminer l'autre solution de (E_θ) .

3/ Soit A et M_θ les pointe d'affixes respectives : -2 et $1 - e^{i\theta}$; $\theta \in [0,\pi]$.

a- Calculer AM_θ en fonction de θ.

b- Déterminer la valeur de θ de $[0,\pi]$ pour laquelle AM_θ soit maximale.

27

1/ Résoudre dans C l'équation (E) : $z^2 - 2iz - 1 = 0$

2/ Soit θ un réel. On donne l'équation (E_θ):

$z^2 - 2i(\sin\theta)z - 1 = 0$

a- Résoudre dans C l'équation (E_θ) on notera z_1 et z_2 les solutions de (E_θ) .

b- Mettre z_1 , z_2 et z_1/z_2 sous forme exponentielle .

3/ On donne l'équation $(E'_\theta) : z^4 - 2i(\sin\theta)z^2 - 1 = 0$.

Déduire en utilisant 2/ les solutions de (E'_θ) .

4/ Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormé direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$ et soit $\theta \in]0 , \pi/2[$.

On donne les points A(cosθ + isinθ) , B(-cosθ + isinθ) et C(2isinθ).

a- Vérifier que : $z_A = z_C - z_B$ et en déduire que OACB est un parallélogramme.

b- Déduire 2/b- que OAB est un triangle isocèle en O.

c- Déterminer les valeurs de θ pour que OACB soit un carré.

5/ a- Montrer que l'aire du losange OACB est égale $2|\sin 2\theta|\ cm^2$.

b- Déterminer la valeur de θ pour que l'aire soit maximale.

28

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormé direct $\left(o,\vec{u},\vec{v}\right)$.

1/ Résoudre dans C l'équation : $z^2 - (3 + i)z + 4 = 0$

2/ Soit l'equation (E): $z^3 - (3+2i)z^2 + 3(1 + i)z - 4i = 0$.

a- Montrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera.

b- Achever la résolution de l'équation (E).

3/ Soient les points A , B et C d'affixes respectives : i , $1 - i$ et $2 + 2i$.

a- Quelle set la nature du triangle ABC.

b- Déterminer l'affixe du point D tel que ABDC soit u carré.

4/ On considère la fonction g :

$$\begin{aligned} P &\to P \\ M &\mapsto M'(z') \text{ tel que } z' = (1 + i)z + 1 \end{aligned}$$

a- Montrer que : $z' - i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z - i)$

b- En déduire que : $AM' = \sqrt{2}\ AM$ et que

$\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM'}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

29

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormé direct $\left(o,\vec{u},\vec{v}\right)$.

I/ Soit l'équation (E): $z^3 + z^2 - (1 + i)z + 2(1 - i) = 0$.

1/ a- Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle que l'on déterminera.

b- Vérifier que $-i$ est solution de (E).

c- Résoudre alors l'équation (E).

II/**1/ a- Ecrire $(10 + 11i)^2$ sous forme algébrique.**

b- Résoudre dans C l'équation :

$z^2 - (6 - 11i)z - 16 - 88i = 0$

2/ a- Calculer $(2 + i)^3$.

b- Résoudre dans C l'équation :

$z^6 - (6 - 11i)z^3 - 16 - 88i = 0$

III/ On considère les points A , B et C d'affixes respectives : $2e^{i\theta}$, $e^{i\theta} + 1$ et $e^{i\theta} - 1$, $\theta \in]0 , \pi[$.

1/ Ecrire z_B et z_C sous forme exponentielle.

2/ a- Montrer que le quadrilatère OBAC est un rectangle.

b- Déterminer le réel θ tel que OBAC soit un carré.

3/ Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z_B lorsque θ varie dans $]0 , \pi[$.

30

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A(-2i) ; B(4-2i) ; C(4+2i) et D(1).

1/ a- Ecrire $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ sous forme algébrique.

b- En déduire la nature du triangle ABC.

2/ A tout point $M \neq A$ d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{z - 4 - 2i}{z + 2i}$

a-Déterminer l'ensemble des points M tel que $|z'| = 1$.

b- Déterminer l'ensemble des points M(z) tel que z' soit imaginaire pur.

b- Montrer que pour tout $z \neq -2i$, $z' - 1 = \frac{-4 - 4i}{z + 2i}$

c- Montrer que : $DM'.AM = 4\sqrt{2}$.

d- En déduire que si M appartient à un cercle $\zeta(A,2)$

alors M' appartient à un cercle ζ ' que l'on précisera.

3/ Déterminer les ensembles suivants :

E = { M(z) $\in$P / $|z - 4 + 2i| = 3$ }

31

I/ Soient les nombres complexes $z_1 = -1 + i$ et

$z_2 = 1+i\sqrt{3}$. On pose : $Z = \frac{z_1}{z_2}$

a- Ecrire Z sous forme algébrique.

b- Ecrire Z sous forme trigonométrique.

c- En déduire les valeurs exacte de :

$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ *et* $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ puis calculer Z^{12}.

II/ Soient les points A, B et C d'affixes respectifs :

-1 – i, 2 + i et -3 + 2i

a- Ecrire sous forme algébrique : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.

b- En déduire la nature du triangle ABC.

III/ Soient les points A, B et C d'affixes respectifs : -2i, $\sqrt{3} - i$ et $\sqrt{3} + i$

a- Ecrire les affixes de A, B et C sous formes exponentielles.

b- Montrer que OACB est un losange.

c- Montrer que $\frac{z_C}{z_B} = e^{i\frac{\pi}{3}}$, en déduire une mesure de $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$.

- Quelle est alors la nature du triangle OBC ?

32

1/a- Mettre sous forme algébrique $(3 - i)^2$.

b- Résoudre dans C, l'équation : $z^2 - (5+3i)z + 2 + 9i = 0$

2/ On considère dans C l'équation, (E) :

$z^3 - (5+2i)z^2 + (5+4i)z + 2i - 9 = 0$

a- Vérifier que –i est une solution de (E) .

b- Résoudre dans C l'équation (E) .

3/ Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormé direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectifs : -i, 1 + 2i et 4 + i.

a- Placer les points A, B et C dans le repère $(o, \vec{u}, \vec{v})$

b- Ecrire $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ sous forme algébrique.

c- En déduire la nature du triangle ABC.

33

1/ a- Mettre sous forme algébrique : $(1 - 2i)^2$.

b- Résoudre dans C : $z^2 + z + 1 + i = 0$.

2/ Soit l'équation (E) : $z^3 - z^2 - (1-i)z - 2 - 2i = 0$

a- Montrer que (E) admet une solution réelle que l'on déterminera.

b- Achever la résolution de l'équation (E).

3/ Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormé direct $\left(o, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectifs : 2, -i et -1+i.

a- Déterminer la forme trigonométrique du nombre complexe : $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$.

b- Déduire la nature du triangle ABC.

4/ a- Déterminer les racines cubiques de –i.

b- Déterminer les racines cubiques de –1+i.

c- Résoudre dans C l'équation : $z^6 + z^3 + 1 + i = 0$.

5/ a- Déterminer l'ensemble des points M(z) tel que :

$(1 + 3i)z + (1 - 3i)\overline{z} = 2$

b- Soit M'(z') tel que : $z' = \dfrac{i\overline{z}}{i-\overline{z}}$. Montrer que

$(z'+i)(\overline{z} - i) = 1$.

c- En déduire que : BM'.BM = 1.

34

I) On considère les points A , B et C d'affixes

respectives : $2e^{i\theta}$, $e^{i\theta} + 1$ et $e^{i\theta} - 1$, $\theta \in]0 , \pi[$.

1/ Ecrire z_B et z_C sous forme exponentielle.

2/ a- Montrer que le quadrilatère OBAC est un rectangle.

b- Déterminer le réel θ tel que OBAC soit un carré.

3/ Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z_B lorsque θ varie dans $]0 , \pi[$.

II) Soit l'équation (E) : $z^2 - e^{i\theta}z + (1-i)e^{2i\theta} = 0$ avec $\theta \in [0,2\pi]$.

a- Ecrire sous forme algébrique $(1+2i)^2$.

b- Résoudre dans C, l'équation (E).

On considère les points M, M_1 et M_2, d'affixes respectives : $z_0 = e^{i\theta}$, $z_1 = -ie^{i\theta}$ et $z_2 = (1+i)\, e^{i\theta}$

a- Ecrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

b- Montrer que le quadrilatère OM_1MM_2 est un parallélogramme.

35

1) a- Vérifier que : $(1 - i)^2 = -2i$

b- Résoudre dans C, l'équation :

$2z^2 - (3+5i)z - 2 + 4i = 0$

2) On considère l'équation dans C, l'équation (E) :

$2z^3 - (7 + 5i)z^2 + (4 + 14i)z + 4 - 8i = 0$

a- Vérifier que 2 est une solution de (E).

b- Résoudre alors l'équation (E).

3) le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 2$; $z_B = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ et $z_C = 1 + i$

a- Montrer que les triangles OBC et OAC sont rectangle en C.

b- En déduire que les points A, B et C sont alignés.

4) A tout point M d'affixe z on associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = -\frac{1}{2}z + \frac{3}{2}(1+i)$

a- Montrer que $\dfrac{z'-z_C}{z-z_C} = -\dfrac{1}{2}$.

b- En déduire que les points C, M et M' sont alignés.

36

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation

$(E) : z^2 - (3-i)z + 4 = 0$.

1°) a- Résoudre dans C l'équation (E). On note z_1 la solution / $\operatorname{Im}(z_1) > 0$

b- Mettre z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

2°) Soit dans C l'équation

$(E') : 3z^3 + (-9+i)z^2 + (14+6i)z - 8i = 0.$

a- Vérifier que $z_0 = \frac{2}{3}i$ est une solution de (E').

b- Déterminer les nombres complexes a , b et c tel que $\forall x \in \mathbb{C}$ on a :

$$3z^3 + (-9+i)z^2 + (14+6i)z - 8i = (z - z_0)(az^2 + bz + c).$$

c- Résoudre alors l'équation (E').

3°) Le plan est rapporté à un R.O.N direct, on considère les points A , B et C d'affixes respectives :

$z_A = 1+i \quad , z_B = 2-2i$ et $z_C = \frac{2}{3}i$.

a- Calculer $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ et montrer que

$$\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] .$$

b- En déduire la nature du triangle ABC .

c- Ecrire une équation cartésienne du cercle ζ circonscrit au triangle ABC .

37 Pour tout nombre complexe non nul z, On pose $w = z + \frac{4}{z}$.

1°) Soit θ un réel donné.

a- Résoudre dans C l'équation : $z + \frac{4}{z} = 4\cos\theta$.

b- Ecrire les solutions trouvées sous forme exponentielle.

Dans tout la suite le plan complexe est rapporté à un R.O.N direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

2°) Atout nombre complexe z on associe le point M d'affixe z .

Déterminer et construire l'ensemble E des points M tels que le nombre complexe w est un réel.

3°) Soient A, B et C les points d'affixe respectives $2e^{i\theta}$; $4\cos\theta$ et $2e^{-i\theta}$ où θ est un réel de l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

a- Placer, pour $\theta = \frac{\pi}{6}$. Les points A, B et C dans le repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

b- Vérifier que pour tout valeur de θ dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ les points A, B et C appartiennent à l'ensemble E.

c- Montrer que pour tout valeur de θ dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ le quadrilatère OABC est un losange.

Pour quelle valeur de θ ce quadrilatère est-il un

38 Dans le plan complexe muni du repère orthonormal $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$,direct, on considère le point M d'affixe $z = x + iy$ .On suppose que dans tout l'exercice que $z \neq 2i$ .On note A le point d'affixe 1 et B le point d'affixe $2i$.

1°) Résoudre les équations :

a- $\frac{z-1}{z-2i} = i \;(*)$ b- $\frac{z-1}{z-2i} = -1 \;(**)$

On appellera C et D les points images des solutions respectivement $(*)$ et $(**)$.

2°) On pose $Z = \frac{z-1}{z-2i} = X + iY$, X et Y étant des réels.

Déterminer X et Y en fonction de x et y .

3°) Déterminer et représenter l'ensemble (E) des point tels que Z soit réel

Montrer que D appartient à (E) .

4°) Montrer que l'ensemble (F) des points M tels que soit imaginaire pur ou nul

est un cercle privé d'un point, dont on déterminera le centre et le rayon.

Vérifier que C appartient à (F) et représenter l'ensemble (F).

5°) Déterminer et représenter l'ensemble (G) des points tels que $|Z|=1$

39

1°)a- Résoudre dans l'ensemble C l'équations :

$z^2-\sqrt{3}z+1=0$.

b- Ecrire les solutions trouvées sous la forme exponentielle.

c- Résoudre dans l'ensemble C l'équations :

$z^4-\sqrt{3}z^2+1=0$.

2°) Soit θ un réel de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

a- On considère dans C l'équation :

$$(E): z^2-2\sin\theta\, z+1=0.$$

Vérifier que $e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$ et $e^{-i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$ sont les solutions de (E).

b- Résoudre dans l'ensemble C l'équations $z^4-2\sin\theta\, z^2+1=0$.

40

Soit m un réel non nul.

1°) Résoudre dans C l'équation :

$z^2-2iz-(1+m^2)=0$..

2°) Pour tout nombre complexe z, on pose :

$f(z)=z^3-3iz^2-(3+m^2)z+i(1+m^2)$.

a- Vérifier que $f(i)=0$;en déduire une factorisation de $f(z)$.

b- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z)=0$.

3°) le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A, M' et M'' d'affixes respectives i, $i+m$ et $i-m$.

a- Vérifier que A est le milieu du segment $[M'M'']$

b- Montrer que le triangle $OM'M''$ est isocèle.

Déterminer les valeurs de m pour que le triangle $OM'M''$ soit équilatéral

41

Soient Z_1 et Z_2 deux nombres complexes non nuls et non réels tels que : $Z_1\times Z_2=1$ et $|Z_1-Z_2|=2$. Soit r le module de Z_1 et θ un argument de Z_1. On suppose que $r\geq 1$ et $\theta\in[0;\frac{\pi}{2}]$. Le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$. Soient les points A, B, M_1 et M_2 d'affixes respectives -1, 1, Z_1 et Z_2

1) a) Donner l'écriture exponentielle de Z_2.

b) Montrer que : $|Z_1-Z_2|^2=r^2+\frac{1}{r^2}-2\cos 2\theta$

c) Déduire que : $r-\frac{1}{r}=2\cos\theta$

2) Calculer les distances AM_2 et BM_1.
3) Montrer que : (AM_1) // (BM_2)
4) Soit Δ une demi-droite d'origine O incluse dans le premier quadrant et M_1 un point de Δ. Déduire de ce qui précède une construction de M_2.

Soient les nombres complexes suivants $z_1=\sqrt{2}+i\sqrt{6}$,

$z_2=1-i$ et $Z=\dfrac{z_1}{z_2}$

1) Ecrire z_1 , z_2 et Z sous forme trigonométrie
2) Ecrire Z sous forme algébrique
3) En déduire les valeurs exactes de $\cos(\frac{7\pi}{12})$ et $\sin(\frac{7\pi}{12})$
4) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3=\sqrt{2}+i\sqrt{6}$
5) a) Pour n un entier naturel non nul donner la forme trigonométrique Z^n

   b) Trouver le plus petit entier n non nul pour que Z^n soit réel .

43

1°) a)Calculer $(1+2i)^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, 1'équation d'inconnue z suivants. $z^2+i\sqrt{3}\,z-i=0$.

2°) Soit θ un réel de 1'intervalle $[0,\frac{\pi}{2}]$.

On considère 1'équation d'inconnue z :

(E_θ) $z^2+(2i\sin\theta)z-2i\cos\theta=0$.

a) Vérifier que $(\cos\theta+i)^2=-\sin^2\theta+2i\cos\theta$.

b) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation (E_θ).

3°) Dans le plan P muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A , B et C d'affixes respectives : $z_1=i$, $z_2=\cos\theta+(1-\sin\theta)i$ et $z_3=-\cos\theta-(1+\sin\theta)i$.

a) Ecrire z_2 et z_3 sous forme exponentielle.

b) Déterminer le réel θ de $[0,\frac{\pi}{2}]$ pour que A, B et C soient alignés.

c) Déterminer le réel θ de $[0,\frac{\pi}{2}]$ pour que B et C appartiennent à un cercle de centre O.

Quel est le rayon de ce cercle ?

44

Soit le nombre complexe $z=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

1)a/ Calculer z^2 puis déterminer sa forme trigonométrique

b/ En déduire la forme trigonométrique de z

2) Donner les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

3) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$

a/ Construire le point A, B et C d'affixes respectives z, z^2, iz^2

b/ Placer le point D symétrique de A par rapport à l'axe des ordonnés et écrire z_D sous forme trigonométrique.

45

Soit $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ M_1 et M_2 deux points d'affixes respectives

$z_1=1+i+(1-i)\,\mathrm{tg}\alpha$ et $z_2=1+i-(1-i)\mathrm{tg}\alpha$

1) a/ Vérifier que $z_1=(1+i)(1-i\,\mathrm{tg}\alpha)$

b/ Donner la forme trigonométrique de z_1.

2) Donner la forme trigonométrique de z_2.

3) Soit le point A d'affixe 1+ i, montrer que (OA) est la médiatrice de $[M_1M_2]$.

4) Montrer que lors que $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, le point M decrit une droite Δ que l'on preciséra.

46 Soit $\theta \in\ ]-\pi/2,\ \pi/2[$. On considère l'équation : (E_θ) : $Z^2 - (2i + e^{i\theta})Z - 1 + ie^{i\theta} = 0$.

1) Résoudre dans C l'équation (E_θ).

2) On pose $Z_1 = i + e^{i\theta}$

a) Prouver que $Z_1 . e^{-i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})} = 2\cos(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4})$

b) En déduire la forme exponentielle de Z_1.

3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $e^{i\theta}$; Z_1 et i.

a) Prouver que OABC est un losange.

b) Montrer que OB.AC = $2\cos\theta$

c) En déduire θ pour que l'aire du losange OABC soit égale à 1/2.

4) Résoudre dans C l'équation $Z^4 - (2i + 1)Z^2 - 1 + i$

47

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On donne les points A (2i) , B(2) et I = A * B (unité : 2cm)

On considère la fonction f qui à tout point M distinct de A , d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' tel que

$z' = \frac{2z}{z-2i}$.

1°/ a) Montrer que f admet comme point invariants le point O et un deuxième point dont on précisera l'affixe

b) Déterminer les images par f des points B et I .

2°/ Soit M un point quelconque distinct de A et de O . Etablir que :

$$\begin{cases} (\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) + 2k\pi ,\ k \in Z . \\ OM' = 2\,\frac{MO}{MA} \end{cases}$$

3°/ Soit Δ la médiatrice de [OA] ;

Montrer que les transformations par f des points de (Δ) appartiennent à un cercle (C) que l'on précisera

4°/ Soit (Γ) le cercle de diamètre [OA] , privé du point A , Montrer que les transformés par f des points de (Γ) appartiennent à une droite (D) que l'on précisera .

5°/ Tracer (Δ) , (Γ) , (C) et (D) sur une même figure .

48

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct (O , $\vec{u}$, $\vec{v}$). On donne les points A et B d'affixes respectives 1 et – i ,

On considère la fonction f qui à tout point M distinct de B , d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{1-z}{1-iz}$.

1°/ Déterminer l'ensemble E_1 des points M pour lequel z' soit réels.

2°/ Déterminer l'ensemble E_2 des points M pour lequel | z' | = 1.

3°/ a) Montrer que $\forall$ z $\in$ **C** \{ -i }, on a : $z'+1 = \frac{-1+i}{z+i}$

b) En déduire que BM . BM' = $\sqrt{2}$ et

$(\vec{u}, \overrightarrow{BM}) + (\vec{u}, \overrightarrow{BM'}) \equiv \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$.

c) Montrer que si M appartient au cercle C de centre B et de rayon 1 alors le point M' appartient à un cercle C' que l'on déterminera .

d) Montrer que si M appartient à la droite D d'équation $y = x - 1$ alors le point M' appartient à une droite D' que l'on déterminera

49

1°/ a) Vérifier que : $(1 - 2i)^2 = -3 - 4i$.

b) Résoudre dans C , l'équation (E) :

$z^2 - (3 + 4i)z + 7i - 1 = 0$.

2°/ On considère, dans C l'ensemble des nombres complexes, l'équation :

$(E) : z^3 - (3 + 5i)z^2 + (10i - 5)z + 7 + i = 0$

a) Vérifier que $z_0 = i$ est une solution de l'équation (E)

b) Déterminer les nombres complexes a , b , c tels que , pour tout nombre complexe z :

$z^3 - (3 + 5i)z^2 + (10i - 5)z + 7 + i$

$= (z - i)(az^2 + bz + c) = 0$.

c) Résoudre dans C , l'équation (E) .

3°/ Dans le plan complexe P, rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $1 + 3i$; i et $2 + i$.

a) Placer sur une figure les points A, B et C.

b) Montrer que le triangle ABC est un triangle

50

Soit $P(z) = z^3 - (4 + 3i)z^2 + (5 + 8i)z + 4 - 7i$

1/a) Calculer P(i)

b) Déterminer les nombres complexes a , b et c tel que pour tout nombre complexes z :

$P(z) = (z - i).(az^2 + bz + c)$

c) Résoudre alors l'équation $P(z) = 0$

2/ Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A(i) ; B(2 – i) et C (2+3i)

a) Mettre sous forme exponentielle le nombre complexe $u = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

b) En déduire que ABC est un triangle isocèle rectangle en A

51

1/ Résoudre dans **C**, l'équation (E) : $z^2 + z + 1 + i = 0$

2/ Résoudre dans C les équations, $z^3 = i$ et $z^3 = -1 + i$.

3/ En déduire les solutions, dans C , de l'équation (E') :

$Z^6 + Z^3 + 1 + i = 0$

52

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct :$(O; \vec{u}, \vec{v})$

On désigne par A , B et C les points d'affixes respectives i , -1 et 1

Soit l'application f du P dans P qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que

$z' = \frac{z+1}{z-i}$ (z un nombre complexe diffèrent de i)

1)a) Déterminer l'affixe $z_{C'}$ du point C' image de point C par f

b) Donner la forme exponentielle de $z_{C'}$

2)a)Déterminer l'ensembles des points M tels que z' soit réel.

b) Déterminer l'ensemble de point M tel que z' soit imaginaire pure

3)a) Montrer que pour tout z $\neq$ i on a : $OM' = \frac{BM}{AM}$

b) Déterminer l'ensemble des points M' lorsque M décrit la médiatrice de segment $[AB]$

4)a)Montrer que $|(z'-1)(z-i)| = \sqrt{2}$

b) En déduire l'ensemble des points M' lorsque le point M décrit le cercle de centre A est de rayon $\sqrt{2}$

53

Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2-(1+3i)z-2+i=0$

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

2) On pose $f(z)=z^3-(2+3i)z^2+(4i-1)z+2-i$

a) Montrer que l'équation f(z)=0 admet dans $\mathbb{C}$ une solution réelle que l'on déterminera

b) Déterminer les complexes b et c tels que $f(z)=(z-1)(z^2+bz+c)$ quelque soit z $\in\mathbb{C}$

c) Résoudre alors l'équation $f(z)=0$

3) Soit dans le plans muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ les points A (1+2i), B(i) et C(1)

a) placer les points A, B et C puis déterminer la nature du triangle ABC

b) Déterminer l'aire du trapèze OBAC

54

$(O;\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormé direct du plan complexe. Soit *A* le point d'affixe 1 + *i*.

Au point *M* d'affixe *z*, on associe le point *M*' d'affixe *z*' telle que $z' = \frac{1}{2}(z+i\bar{z})$.

1. On pose $z = x+iy$ et $z' = x'+iy'$ avec *x*, *y*, *x*' et *y*' réels.

a. Démontrer les égalités suivantes : $x' = \frac{1}{2}(x+y)$ et $y' = \frac{1}{2}(x+y)$. En déduire que le point *M*' appartient à la droite (O*A*).

b. Déterminer l'ensemble des points *M* du plan tels que *M* =*M*'.

c. Démontrer que pour tout point *M* du plan les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont orthogonaux.

2. Soit *r* la rotation de centre *O* et d'angle $\frac{\pi}{2}$. M_1 est le point d'affixe z_1 image de *M* par *r*, M_2 le point d'affixe $z_2 = \bar{z}$, M_3 le point d'affixe z_3 tel que le quadrilatère $OM_1M_3M_2$ soit un parallélogramme.

a. Dans cette question uniquement *M* a pour affixe 4 + *i*, placer les points *M*, M_1, M_2, M_3.

b.Exprimer z_1 en fonction de *z*, puis $z_3$en fonction de *z*.

c. $OM_1M_3M_2$ est-il un losange ? Justifier.

d. Vérifier que $z' - z = \frac{1}{2}iz_3$. En déduire que $MM' = \frac{1}{2}OM_3$.

3. Démontrer que les points *M*, M_1, M_2 et M_3 appartiennent à un même cercle de centre *O* si et seulement si $MM' = \frac{1}{2}OM$.

55

1. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points

– *A* d'affixe *a*, $a \in \mathbb{C}$;

– *B* d'affixe *b* +*i*, $b \in \mathbb{C}$;

– *C* image de *B* dans la rotation de centre *A* et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a. Déterminer une relation entre a et b pour que le point C appartienne à l'axe $(O\,;\vec{v})$.

b. Exprimer alors l'affixe du point C en fonction de a.

2. Dans cette question, on pose $a=\sqrt{3}$ et $b = 0$. On considère les points C d'affixe $c = -i$ et D d'affixe $d=2+\sqrt{3}-2i\sqrt{3}$.

a. Quelle est la nature du triangle ABC ?

b. Calculer le quotient $\frac{d-a}{c-a}$; que peut-on en déduire pour le triangle ACD ?

c. Déterminer l'affixe du point E image de D dans la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

d. Déterminer l'affixe du point F image de D dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

e. Déterminer la nature du triangle BEF.

56

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. Soit (C) le cercle de centre O et de rayon 1.

On considère le point A de (C) d'affixe $z_A=e^{i\frac{\pi}{3}}$.

1. Déterminer l'affixe z_B du point B image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. Déterminer l'affixe z_C du point C image de B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

2. a. Justifier que (C) est le cercle circonscrit au triangle ABC. Construire les points A, B et C sur la feuille de papier millimétré.

b. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.

3. Soit h l'homothétie de centre O et de rapport -2.

a. Compléter la figure en plaçant les points P, Q et R images respectives des points A, B et C par h.

b. Quelle est la nature du triangle PQR ? Justifier.

4. a. Donner l'écriture complexe de h.

b. Calculer $z_A+z_B+z_C$. En déduire que A est le milieu du segment $[QR]$.

c. Que peut-on dire de la droite (QR) par rapport au cercle (C) ?

57

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation d'inconnue z : $z^2+8z\sqrt{3}+64=0$

2. On considère les points A et B qui ont pour affixes respectives les nombres complexes $a=-4\sqrt{3}-4i$ et $b=-4\sqrt{3}+4i$.

Calculer les distances OA, OB et AB. En déduire la nature du triangle OAB.

3. On désigne par C le point d'affixe $c=\sqrt{3}+i$ et par D son image par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Déterminer l'affixe d du point D.

4. On appelle G le barycentre des points pondérés $(O\,;-1)$, $(D\,;1)$ et $(B\,;1)$.

a. Montrer que le point G a pour affixe $g=-4\sqrt{3}+6i$.

b. Placer les points A, B, C, D et G sur une figure (unité graphique : 1 cm).

c. Démontrer que le quadrilatère *OBGD* est un parallélogramme.

5. a. Justifier l'égalité $\frac{c-g}{a-g}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b. En déduire une mesure en radians de l'angle $(\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GC})$, ainsi que la valeur du rapport $\frac{GC}{GA}$.

Que peut-on en déduire concernant la nature du triangle *AGC* ?

58

1. a. Démonstration de cours : étudier la résolution dans **C** de l'équation $az^2+bz+c=0$, *a*, *b*, *c* étant trois réels avec *a* non nul.

b. Résoudre l'équation $z^2-2\sqrt{2}z+4=0$. On appellera z_1 et z_2 les solutions, z_1 ayant sa partie imaginaire positive.

c. Donner la forme exponentielle de z_1 et z_2 puis celle de $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2$.

2. Dans le plan complexe muni d'un repère othonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$ d'unité 1 cm, on considère les points M_1 d'affixe $\sqrt{2}(1+i)$, M_2 d'affixe $\sqrt{2}(1-i)$ et *A* d'affixe $z_A=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

a. Déterminer l'affixe z_3 du point M_3 image de M_2 par l'homothétie *h* de centre *A* et de rapport –3.

b. Déterminer l'affixe z_4 du point M_4 image de M_2 par la rotation *r* de centre *O* et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

c. Représenter les points *O*, *A*, M_1, M_2, M_3, M_4

d. Calculer $\frac{z_3-z_1}{z_4-z_1}$. Que peut-on en conclure ?

59

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points *A*, *B*, *C* d'affixes respectives $a=-1+2i$, $b=1+3i$, $c=4i$.

1. Montrer que le triangle *ABC* est isocèle en *A*.

2. Soit *I* le milieu de [*BC*] et z_I son affixe.

a. Quel est l'ensemble des points *M* du plan distincts de *A* dont l'affixe *z* est telle que $\frac{z-z_I}{z-z_A}$ soit un réel ?

b. Déterminer l'unique réel *x* tel que $\frac{x-z_I}{x-z_A}$ soit un réel.

c. Soit $z_{\overrightarrow{AI}}$ l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AI}$; donner une forme trigonométrique de $z_{\overrightarrow{AI}}$.

3. a. Soit *G* le point d'affixe –3. Montrer qu'il existe deux rotations de centre *G*, dont on déterminera les angles, telles que les images de *A* et *I* par ces rotations soient toutes deux sur l'axe des réels.

b. Soit r_1 la rotation de centre *G* et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{4}$. Déterminer l'écriture complexe de r_1.

4. Soit *A*', *B*' et *C*' les images respectives de *A*, *B*, et *C* par la rotation r_1 ; soient *a*', *b*' et *c*' leurs affixes.

Quelle est l'image par r_1 de l'axe de symétrie du triangle *ABC* ? En déduire que $b'=\overline{c'}$.

60

1. Résoudre le système suivant d'inconnues complexes *z* et *z*' : $\begin{cases} z+iz'=-1 \\ z-z'=2+i \end{cases}$.

On donnera les solutions sous forme algébrique. 2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 3 cm.

a. Placer dans le plan les points *A*, *B* et *C* d'affixes respectives $z_A = -1$, $z_B = 2i$ et $z_C = -2 + i$.

b. Calculer les modules des nombres complexes : $z_B - z_C$ et $z_B - z_A$. Donner une interprétation géométrique de ces résultats.

c. On note *I* le milieu du segment [*AC*]. Préciser l'affixe du point *I* puis calculer la distance *BI*.

d. Déterminer l'aire en cm² du triangle *ABC*.

61

A tout nombre complexe *z* on associe le nombre complexe égal à $f(z)=\frac{1}{6}\left((3+4i)z+5\bar{z}\right)$

1. Calculer *f*(3), *f*(*i*) et *f*(1 – 4*i*).

2. Exprimer $z'=\dfrac{f(z)-z}{1+2i}$ à l'aide de *z* et de $\bar{z}$.

3. En déduire que *z'* est réel pour tout *z* complexe.

62

Soit (E) l'équation complexe : $\dfrac{1}{z}-2\bar{z}+z-1=0$.

1. Démontrer que $z = x + iy$ avec *x* et *y* réels est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{cases} -x^2-x-3y^2+1=0 \\ (2x-1)y=0 \end{cases}.$$

2. En déduire la résolution de l'équation (E) dans $\mathbb{C}$

63

Partie A

1. Déterminer le complexe α tel que $\begin{cases} \alpha(1+i)=1+3i \\ i\alpha^2=-4+3i \end{cases}$

2. Pour tout nombre complexe *z*, on pose $f(z)=z^2-(1+3i)z+(-4+3i)$. Montrer que $f(z)$ s'écrit sous la forme $(z-\alpha)(z-i\alpha)$. En déduire les solutions (sous forme algébrique) de l'équation $f(z)=0$.

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, unité graphique 5 cm.

1. On considère les points *A* et *B* d'affixes respectives $a=2+i$ et $b=-1+2i$. Placer *A* et *B* dans le repère et compléter la figure au fur et à mesure. Montrer que $b=ia$, en déduire que le triangle *OAB* est un triangle isocèle rectangle tel que $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=\dfrac{\pi}{2}$.

2. On considère le point *C* d'affixe $c=-1+\dfrac{1}{2}i$.

Déterminer l'affixe du point *D* tel que le triangle *OCD* soit un triangle isocèle rectangle tel que

$\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}\right)=\dfrac{\pi}{2}$

On pourra conjecturer l'affixe de *D* à l'aide de la figure pour traiter la question suivante.

3. Soit *M* le milieu du segment [*BC*]. On appelle $z_{\overrightarrow{OM}}$ et $z_{\overrightarrow{DA}}$ les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{DA}$. Prouver que $\dfrac{z_{\overrightarrow{OM}}}{z_{\overrightarrow{DA}}}=\dfrac{1}{2}i$.

4. Donner une mesure en radians de $\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{OM}\right)$.

5. Prouver que $OM=\dfrac{1}{2}DA$.

6. On appelle *J*, *K* et *L* les milieux respectifs des segments [*CD*], [*DA*] et [*AB*]. On admet que le quadrilatère *JKLM* est un parallélogramme ; démontrer que c'est un carré.

64

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, unité graphique : 1 cm.

1. On désigne par A, B et I les points d'affixes respectives : $z_A = 3 + 2i$, $z_B = -3$ et $z_I = 1 - 2i$.

a. Faire une figure que l'on complétera au cours de l'exercice.

b. Écrire sous forme algébrique le nombre complexe $Z = \dfrac{z_I - z_A}{z_I - z_B}$. Que peut-on en déduire sur la nature du triangle IAB ?

c. Calculer l'affixe z_C du point C image de I par l'homothétie de centre A et de rapport 2.

d. Soit D le barycentre du système $\{(A, 1)\,;(B, -1)\,;(C, 1)\}$; calculer l'affixe z_D du point D.

e. Montrer que $ABCD$ est un carré.

2. Déterminer et construire l'ensemble Γ_1 des points M tels que $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = \dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right\|$.

3. On considère l'ensemble Γ_2 des points M du plan tels que : $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = 4\sqrt{5}$.

a. Montrer que B appartient à Γ_2.

b. Déterminer et construire l'ensemble Γ_2.

65

1. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue Z : (E) $Z^3 - 12Z^2 + 48Z - 128 = 0$.

a. Vérifier que 8 est solution de cette équation.

Déterminer les nombres réels α, β, γ tels que, pour tout complexe Z,

$$Z^3 - 12Z^2 + 48Z - 128 = (Z-8)(\alpha Z^2 + \beta Z + \gamma).$$

b. Résoudre l'équation (E).

2. $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormal direct du plan orienté, l'unité graphique est 1 cm.

On considère les points A, B, C d'affixes respectives $a = 2 - 2i\sqrt{3}$, $b = 2 + 2i\sqrt{3}$, $c = 8$.

a. Calculer le module de a (noté $|a|$) et son argument θ. Placer les trois points A, B et C.

b. Calculer le complexe $q = \dfrac{a-c}{b-c}$, déterminer son module et son argument θ. En déduire la nature du triangle ABC.

c. Déterminer le barycentre D des points pondérés $(A, |a|)$, $(B, |b|)$, $(C, |c|)$. Placer D.

d. Déterminer l'ensemble E des points M du plan tels que $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|$. Tracer

66

Partie A

On considère l'équation : (E)

$z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = 0$ où z est un nombre complexe.

1. Démontrer que le nombre complexe i est solution de cette équation.

2. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que, pour tout nombre complexe z on ait :

$$z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = (z-i)\left(az^2 + bz + c\right).$$

3. En déduire les solutions de l'équation (E).

Partie B

Dans le plan complexe, rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on désigne par *A*, *B* et *C* les points d'affixes respectives *i*, 2 + 3*i* et 2 − 3*i*.

1. Soit *r* la rotation de centre *B* et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Déterminer l'affixe du point *A*', image du point *A* par la rotation *r*.

2. Démontrer que les points *A*', *B* et *C* sont alignés et déterminer l'écriture complexe de l'homothétie de centre *B* qui transforme *C* en *A*'

67

On désigne par M_n le point du plan complexe d'affixe z_n définie par:

$$z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{in\frac{\pi}{3}} = \left(\frac{1}{2}\right)^n (\cos n\frac{\pi}{3} + i\sin n\frac{\pi}{3})$$

où *n* est un nombre entier naturel et où M_0 est le point d'affixe $z_0 = 1$.

1. Déterminer les valeurs de *n* pour lesquelles z_n est réel.

2. Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal. $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité = 8 cm).

a. Représenter dans P les points M_0, M_1, M_2, M_3, M_4.

b. Calculer en fonction de *n* les longueurs des trois côtés du triangle OM_nM_{n+1}. Montrer que ce triangle est rectangle.

3. On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$a_n = |z_{n+1} - z_n|$.

a. Montrer que la suite (a_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b. Calculer $l_n = \sum_{k=0}^{k=n} a_k$. Déterminer la limite de l_n quand *n* tend vers $+\infty$.

4. a. Calculer en fonction de *n* l'aire b_n du triangle OM_nM_{n+1}.

b. Calculer $s_n = \sum_{k=0}^{k=n} b_k$. Déterminer la limite de b_n quand *n* tend vers $+\infty$.

68

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. L'unité graphique est 4 cm.

Soit λ un nombre complexe non nul et différent de 1.

On définit, pour tout entier naturel *n*, la suite (z_n) de nombres complexes par : $\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = \lambda z_n + i \end{cases}$.

On note M_n le point d'affixe z_n.

1. Calcul de z_n en fonction de *n* et de λ.

a. Vérifier les égalités : $z_1 = i$; $z_2 = (\lambda+1)i$; $z_3 = (\lambda^2+\lambda+1)i$.

b. Démontrer que, pour tout entier *n* positif ou nul, $z_n = \dfrac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}i$.

2. Étude du cas $\lambda = i$.

a. Montrer que $z_4 = 0$.

b. Pour tout entier naturel *n*, exprimer z_{n+1} en fonction de z_n.

c. Montrer que M_{n+1} est l'image de M_n par une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

d. Représenter les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4 dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

3. Caractérisation de certaines suites (z_n).

a. On suppose qu'il existe un entier naturel *k* tel que

$\lambda^k = 1$. Démontrer que, pour tout entier naturel *n*, on a l'égalité : $z_{n+k} = z_n$.

b. Réciproquement, monter que s'il existe un entier naturel *k* tel que, pour tout entier naturel *n* on ait l'égalité $z_{n+k} = z_n$ alors : $\lambda^k = 1$.

69

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.

On réalisera une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.

On considère les points *A* d'affixe *i*, *B* d'affixe −2*i* et *D* d'affixe 1.

On appelle *E* le point tel que le triangle *ADE* soit équilatéral direct.

Soit *f* l'application qui à tout point *M* d'affixe *z* ($z \neq i$) associe le point *M*' d'affixe *z*' définie par $z' = \dfrac{2z-i}{iz+1}$.

1. Démontrer que le point *E* a pour affixe $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+i)$.

2. Exprimer sous forme algébrique l'affixe du point *D*' associé au point *D* par l'application *f*.

3. a. Démontrer que, pour tout nombre complexe *z* différent de *i*, $(z'+2i)(z-i)=1$.

b. En déduire que pour tout point *M* d'affixe *z* ($z \neq i$) : $BM' \times AM = 1$ et $\left(\vec{u}, \overrightarrow{BM'}\right) = -\left(\vec{u}, \overrightarrow{AM}\right) + k \times 2\pi$ où *k* est un entier relatif.

4. a. Démontrer que les points *D* et *E* appartiennent au cercle (C) de centre *A* et de rayon $\sqrt{2}$.

b. En utilisant les résultats de la question 3. b, placer le point *E*' associé au point *E* par l'application *f*. On laissera apparents les traits de construction.

5. Quelle est la nature du triangle *BD*'*E*' ?

70

A tout complexe *z* différent de $3-i$ on associe le complexe $f(z) = \dfrac{2iz-4+2i}{z-3+i}$.

1. Calculer $f(1+i)$.

2. Déterminer le complexe *z* tel que $f(z) = 1+i$.

3. On appelle *x* et *y* la partie réelle et la partie imaginaire de *z*. Déterminer en fonction de *x* et *y* la partie réelle *X* et la partie imaginaire *Y* de $f(z)$.

4. Dans le plan complexe, on appelle *A* le point d'affixe $-1-2i$, *B* le point d'affixe $3-i$ et *M* le point d'affixe *z*. Montrer que $|f(z)| = \dfrac{2MA}{MB}$.

Donner une interprétation de $\arg(f(z))$ à l'aide de l'angle $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA})$.

71

Dans le plan complexe (P)muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 4 cm, on considère le point *A* d'affixe $a = -1$ et l'application *f*, du plan (P) dans lui·même, qui au point *M* d'affixe *z*, distinct de *A*, associe le point *M*' = *f*(*M*) d'affixe *z*' tel que : $z' = \dfrac{iz}{z+1}$.

1. Déterminer l'affixe des points *M* tels que *M*' = *M*.

2. Démontrer que pour tout point *M* distinct de *A* et de *O*, on a :

$$OM' = \frac{OM}{AM} \text{ et } \left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM'}\right) = \left(\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MO}\right) + \frac{\pi}{2} \text{ à } 2\pi \text{ près.}$$

3. a. Soit B le point d'affixe $b=-\frac{1}{2}+i$. Placer dans le repère le point B et la médiatrice (Δ) du segment[OA].

b. Calculer sous forme algébrique l'affixe b' du point B' image du point B par f.

Établir que B' appartient au cercle (C) de centre O et de rayon 1.

Placer le point B' et tracer le cercle (C) dans le repère.

c. En utilisant la question 2, démontrer que, si un point M appartient à la médiatrice (Δ), son image M' par f appartient au cercle (C).

d. Soit C le point tel que le triangle AOC soit équilatéral direct. En s'aidant des résultats de la question 2, construire, à la règle et au compas, l'image du point C par f (on laissera apparents les traits de construction).

4. Dans cette question, on se propose de déterminer, par deux méthodes différentes, l'ensemble (Γ) des points M distincts de A et de O dont l'image M' par f appartient à l'axe des abscisses.

Les questions a. et b. peuvent être traitées de façon indépendante.

a. On pose $z=x+iy$ avec x et y réels tels que $(x, y) \neq (-1, 0)$ et $(x, y) \neq (0, 0)$.

Démontrer que la partie imaginaire de z' est égale à :

$$\mathrm{Im}(z')=\frac{x^2+y^2+x}{(x+1)^2+y^2}.$$

En déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (Γ) et le tracer dans le repère.

b. À l'aide de la question 2, retrouver géométriquement la nature de l'ensemble (Γ).

72

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 4 cm. On note A et B les points d'affixes respectives 1 et i. À tout point M, distinct de A et d'affixe z, est associé le point M' d'affixe Z définie par : $Z=\frac{(1-i)(z-i)}{z-1}$.

1. a. Calculer l'affixe du point C' associé au point C d'affixe $-i$.

b. Placer les points A, B et C.

2. Soit $z = x + iy$ où x et y désignent deux nombres réels.

a. Montrer l'égalité :

$$Z=\frac{(x-1)^2+(y-1)^2-1}{(x-1)^2+y^2}-i\frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2}.$$

b. Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z telle que Z soit réel.

c. Déterminer l'ensemble F des points M d'affixe z telle que Re(Z) soit négatif ou nul.

3. a. Écrire le nombre complexe $(1-i)$ sous forme trigonométrique.

b. Soit M un point d'affixe z, distinct de A et de B.

Montrer que Z est un réel non nul si et seulement s'il existe un entier relatif k tel que $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})=\frac{\pi}{4}+k\pi$.

c. En déduire l'ensemble des points M vérifiant $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})=\frac{\pi}{4}+k\pi$.

d. Déterminer l'ensemble des points M vérifiant $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})=\frac{\pi}{4}+2k\pi$.

73 Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. Unité graphique : 4 cm.

On considère la transformation *f* du plan qui, à tout point *M* d'affixe *z*, associe le point *M'* d'affixe *z'* telle que $z'=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)z$.

1. Montrer que la transformation *f* est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle.

2. On définit la suite de points (M_n) de la façon suivante : M_0 est le point d'affixe z_0 = 1 et, pour tout nombre entier naturel *n*, $M_{n+1}=f(M_n)$.On note z_n l'affixe du point M_n.

a. Justifier que, pour tout nombre entier naturel *n*, $z_n=e^{\frac{i3n\pi}{4}}$.

b. Construire les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4.

c. Montrer que pour tout nombre entier naturel *n*, les points M_n et M_{n+8} sont confondus.

3. Prouver que les triangles $M_0M_1M_2$ et $M_7M_0M_1$ ont la même aire. Préciser la valeur exacte de cette aire.

74 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct. On supposera connus les résultats suivants :

• Pour tous points *A*, *B* et *C* du plan d'affixes respectives *a*, *b* et *c*, avec $A\neq C$ et $A\neq B$:

$\left|\frac{b-a}{c-a}\right|=\frac{AB}{AC}$ et $\arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right)=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)+k\times 2\pi$ où *k* est un entier relatif ;

• Soit *z* un nombre complexe et soit θ un nombre réel : $z=e^{i\theta}$ si et seulement si $|z|=1$ et $\arg(z)=\theta+k\times 2\pi$ où *k* est un entier relatif.

Démontrer que la rotation *r* d'angle θ et de centre Ω d' affixe ω est la transformation du plan qui à tout point *M* d'affixe *z* associe le point *M'* d'affixe *z'* telle que : $z'-\omega=e^{i\theta}(z-\omega)$.

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 1 cm).

Soit *f* l'application qui, à tout point *M* d'affixe *z* associe le point *M'* d'affixe *z'* telle que : $z'=iz+4+4i$.

1. a. Déterminer l'affixe ω du point Ω telle que $f(\omega)=\omega$.

b. Montrer que, pour tout nombre complexe *z* on a : $z'-4i=i(z-4i)$.

c. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de *f*.

2. On note *A* et *B* les points d'affixes respectives *a* = 4 – 2*i* et *b* = –4 + 6*i*.

a. Placer les points *A*, *B* et Ω sur une figure que l'on completera au fur et à mesure des questions.

b. Déterminer les affixes des points *A'* et *B'* images respectives des points *A* et *B* par *f*.

3. On appelle *m*, *n*, *p* et *q* les affixes des points *M*, *N*, *P* et *Q*, milieux respectifs des segments [*AA'*], [*A'B*], [*BB'*] et [*B'A*].

a. Déterminer *m*. On admettra que *n* = 1+7*i*, *p* = –3+3*i* et *q* = 1 – *i*.

b. Démontrer que *MNPQ* est un parallélogramme.

c. Déterminer la forme algébrique du nombre complexe

$\frac{q-m}{n-m}$. En déduire la nature du quadrilatère *MNPQ*.

4. Démontrer que les droites (*B'A*) et (Ω *N*) sont perpendiculaires.

75

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

On considère la transformation ponctuelle *f* qui, à tout point *M* d'affixe *z* associe le point *M'* d'affixe *z'* définie par : $z' = z^2 + 1$.

1. Déterminer les antécédents du point *O*.

2. Existe-t-il des points invariants par *f* ? Si oui, préciser leurs affixes respectives.

3. Montrer que deux points symétriques par rapport à *O* ont la même image. Que peut-on dire des images de deux points symétriques par rapport à l'axe des abscisses ?

4. Soit *A* le point d'affixe $z_A = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$. Déterminer l'affixe du point *A'* image de *A* par *f* puis prouver que les points *O*, *A* et *A'* sont alignés.

5. Soit θ un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0\,;2\pi[$ et *N* le point d'affixe $e^{i\theta}$.

a. Montrer que *N* appartient au cercle (Γ) de centre *O* et de rayon 1.

b. Lorsque θ varie, montrer que *N'*, image du point *N* par *f* reste sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

c. Vérifier que $\overrightarrow{ON'} = (2\cos\theta)\overrightarrow{ON}$. En déduire que les points *O*, *N* et *N'* sont alignés.

d. Expliquer la construction du point *N'*.

76

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ ayant comme unité graphique 2cm.

1. a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.

b. On pose $a = \sqrt{3} + i$ et $b = \sqrt{3} - i$, exprimer *a* et *b* sous forme exponentielle.

c. Placer *A*(*a*) et *B*(*b*) dans le repère précédent.

2. a. Soit *r* la rotation de centre *O* et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Donner l'expression complexe de *r*, puis déterminer l'image *A'* de *A* par cette rotation (*On exprimera a' sous forme algébrique et exponentielle*). Placer *A'* dans le repère précédent.

b. Soit *h* l'homothétie de centre *O* et de rapport $-\frac{3}{2}$.

Donner l'expression complexe de *h*, puis déterminer l'image *B'* de *B* par cette homothétie (*On exprimera b' sous forme algébrique et exponentielle*). Placer *B'* dans le repère précédent.

77

$Soit\ \omega = cos\frac{2\pi}{7} + isin\frac{2\pi}{7}$

1) Demontrer que :

$1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 = 0$ et

$$2 + \frac{\omega}{1+\omega^2} + \frac{\omega^2}{1+\omega^4} + \frac{\omega^3}{1+\omega^6} = 0$$

2) Deduire la valeur de

$$\frac{1}{cos\frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{cos\frac{4\pi}{7}} + \frac{1}{cos\frac{6\pi}{7}}$$

78

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$.

On désigne par (ζ) le cercle de centre O et de rayon 1 et par I et A les points d'affixes respectives 1 et $a=\sqrt{3}+i$

1/ Donner la forme exponentielle de a puis la construire.

2/ Soit B le point d'affixe b = $\dfrac{a-1}{1-\bar{a}}$.

a- Vérifier que $b\bar{b}=1$. En déduire que le point B appartient au cercle (ζ).

b- Montrer que $\dfrac{b-1}{a-1}$ est un réel. En déduire que les points A, B et I sont alignés.

c- Construire le point B dans le repère $(o,\vec{u},\vec{v})$.

3/ Soit θ un argument du nombre complexe b.

Montrer que : $\cos\theta = \dfrac{2\sqrt{3}-3}{5-2\sqrt{3}}$ et $\sin\theta = \dfrac{2-2\sqrt{3}}{5-2\sqrt{3}}$

79

Soit le nombre complexe $z_0 = 1+i\sqrt{3}$.

1/ a- Ecrire z_0 sous forme exponentielle.

b- Montrer que pour tout n $\in$ IN on a :

$$z_0^{\,n}+(\bar{z}_0)^n = 2^{n+1}\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right).$$

2/ Soit Z = $1-\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3})$

a- Montrer que Z = $\sqrt{2}\,z_0\,e^{i\frac{\pi}{4}}$.

b- Donner la forme trigonométrique de Z.

c- En déduire les valeurs de $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$.

80

Soit f(z) = $z + j^2\bar{z}$ avec $j=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

1/ Vérifier que : $j^2 = \bar{j}$ et $j^3 = 1$.

2/ Etablir que $|f(z)|^2 - 2|z|^2 = 2\mathcal{R}e(jz^2)$

3/ Montrer que pour tout z $\in \mathbb{C}$, on a : $j^2f(z)$ est un réel.

4/ Soit n $\in$ IN*, on définit l'application f^n par

$$\begin{cases} f^1 = f \\ f^n = f \circ f^{n-1} \end{cases}$$

a- Calculer $f^2(z)$ puis $f^3(z)$.

b- Montrer que $f^n(z) = 2^{n-1}f(z)$.

81

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$, on donne un triangle ABC rectangle en A, un cercle (C) de centre A et de rayon 2 et le point H milieu de [BC] (Voir figure ci dessous).

1) Donner la forme cartésienne des affixes z_A et z_B des points A et B.

2) Soit z_C l'affixe du point C.

a) Déterminer graphiquement $|z_C - z_A|$ ainsi que arg $(z_C - z_A)$.

b) Déduire alors que $z_C = 2(1+e^{\frac{i\pi}{4}})$

c) Donner la forme exponentielle de z_C .

3) Prouver que l'affixe z_H de H est égal à $(1+\sqrt{2})e^{\frac{i\pi}{4}}$ et calculer OH