Chapitre 5

Fonction exponnentiélle

Des questions telles que « si la nombre d'habitants d'une province s'accroit tous les ans d'une trentieme , & qu'ily ait au commencement 100 000 habitants ;on veut savoir combien il y en aura au bout de 100 ans ? »

(Euler 1748, introductio ,110) ou '' un particulier doit 400 000 florins, dont in est convenu de payer tous les ans l'interet à 5 pour cent…''

En applicant la formule du binome, Euler dit sans la moindre Hesitation, ''Si N est un nombre plus grand qu'aucune quatité assignable la fraction

$\left(\frac{N-1}{N}\right)$ *egalera l' unité''. Si n tend vers l'infini,* $\left(1+\frac{1}{N}\right)^{N}$

tend vers le nombre d' Euler e

(E.Hair et al, L'analyse au fil de l'histoire ,2000)

I. fonction exponentielle neperienne

1. definition et proprieté

a) definition

La fonction $\ln$ est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$ donc elle admet une fonction réciproque définie sur l'intervalle $\ln(]0;+\infty[)=\left]\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x\,;\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x\right[=]-\infty;+\infty[=\mathbb{R}$

la fonction reciproque de la fonction $\ln$ s'appelle fonction exponentielle est notée $\exp$

Définition

la fonction reciproque de la foction $\ln$ s'appelle la fonction exponentielle est notée *exp*.

Résultats :

- l'ensemble de définition de la fonction *exp* est $\mathbb{R}$
- l'ensemble des image de la fonction *exp* est $]0;+\infty[$
- $(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in]0;+\infty[):(\exp(x)=y\Leftrightarrow x=\ln y)$

De la définition on déduit les propriétés suivantes

Proprieté 2

- La fonction *exp* est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]0;+\infty[$
- La fonction *exp* est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- On a : 1) $(\forall x\in\mathbb{R})\quad \exp(x)>0$

  2) $(\forall x\in\mathbb{R})\quad \ln(\exp(x))=x$

  3) $(\forall t\in\mathbb{R}_+^*)\quad \exp(\ln(t))=t$

Remarque :

- *Comme la fonction exp est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$ *alors pour tous réels x et y de* $\mathbb{R}$ *on a :*

  $x<y\Leftrightarrow\exp(x)<\exp(y)$ *et* $x=y\Leftrightarrow\exp(x)=\exp(y)$

II. Etude de la fonction exponentielle

1) Dérivabilité

Proprieté

La fonction exponentielle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\exp x)'=\exp x$

2) Variations

Propriété La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration : On a démontré dans le paragraphe I. que la fonction exponentielle ne s'annule jamais.

Or, par définition, $\exp(0) = 1$ donc pour tout x, $\exp x > 0$.

Comme $(\exp x)' = \exp x > 0$, la fonction exponentielle est strictement croissante.

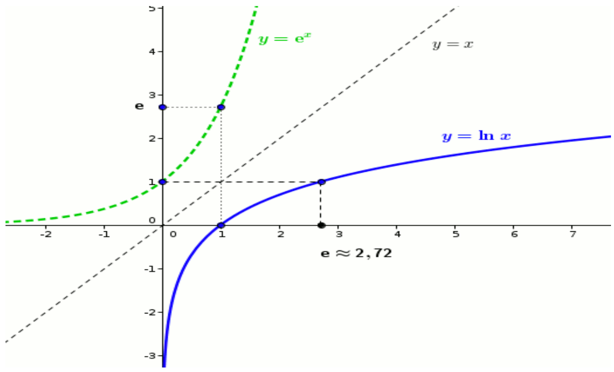
3) Limites en l'infini

Propriété $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp x = +\infty$

4) Courbe représentative

On dresse le tableau de variations de la fonction exponentielle :

x	$-\infty$	$+\infty$
$(\exp x)'$	$+$	
$\exp x$	0 ↗	$+\infty$



III. Propriété de la fonction exponentielle

1) Relation fonctionnelle

Propriété Pour tous réels x et y, on a : $\exp(x + y) = \exp x \ \exp y$

Remarque : Cette formule permet de transformer une somme en produit et réciproquement.

Démonstration :

Comme $\exp x \neq 0$, on pose $f(x) = \dfrac{\exp(x + y)}{\exp x}$ avec y un nombre réel.

Pour tout x, on a $f'(x) = \dfrac{\exp(x+y)\exp x - \exp(x+y)\exp x}{(\exp x)^2} = 0$. Donc la fonction f est constante.

Comme $f(0)=\dfrac{\exp(y)}{\exp(0)}=\exp y$, on en déduit que $\dfrac{\exp(x+y)}{\exp x}=\exp y$.

Proprieté

Pour tous réels x et y, on a :

a) $\exp(-x)=\dfrac{1}{\exp x}$; b) $\exp(x-y)=\dfrac{\exp x}{\exp y}$; c) $\exp(nx)=(\exp x)^n$ avec $n\in IN$

<u>Démonstration :</u>

a) $\exp x\exp(-x)=\exp(x-x)=\exp(0)=1$

b) $\exp(x-y)=\exp(x+(-y))$

$$=\exp x\exp(-y)$$

$$=\exp x\frac{1}{\exp y}=\frac{\exp x}{\exp y}$$

c) La démonstration s'effectue par récurrence.

L'initialisation est triviale.

La démonstration de l'hérédité passe par la décomposition :

$$\exp((n+1)x)=\exp(nx+x)=\exp(nx)\exp x=(\exp x)^n\exp x=(\exp x)^{n+1}.$$

<u>Notation nouvelle :</u>

$$\exp x=\exp(x\times 1)=(\exp(1))^x=e^x$$

On note pour tout x réel, $\exp x=e^x$

Avec cette nouvelle notation, on peut ainsi résumer l'ensemble des propriétés de la fonction exponentielle :

Proprieté

Pour tous réels x et y, on a :

a) $e^0=1$ et $e^1=e$; b) $e^x>0$ et $(e^x)'=e^x$

c) $e^{x+y}=e^xe^y$, $e^{x-y}=\dfrac{e^x}{e^y}$, $e^{-x}=\dfrac{1}{e^x}$, $(e^x)^n=e^{nx}$, avec $n\in IN$; d) $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$

<u>Remarque :</u> On retrouve les propriétés des puissances.

<u>Démonstration de d) :</u>

- Soit la fonction g définie par $g(x)=e^x-x$.

Pour x positif, $g'(x)=e^x-1\geq e^0-1=0$ car la fonction exponentielle est croissante.

Donc la fonction g est croissante sur $\left[0;+\infty\right[$.

Comme $g(0)=1$, on a pour tout x, $g(x)\geq 1$.

On dresse ainsi le tableau de variations :

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$	
$g(x)$	1	$\nearrow$	

Et donc $g(x)=e^x-x\geq 0$, soit $e^x\geq x$.

D'après le théorème de comparaison des limites, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=\lim\limits_{X\to+\infty} e^{-X}=\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{1}{e^X}=0$.

Application

Simplifier l'écriture des nombres suivants :

$$A=\frac{e^7\times e^{-4}}{e^{-5}}\qquad B=\left(e^5\right)^{-6}\times e^{-3}\qquad C=\frac{1}{\left(e^{-3}\right)^2}+\frac{\left(e^4\right)^{-1}}{e^2\times e^{-6}}$$

Correction

$$A=\frac{e^7\times e^{-4}}{e^{-5}}=\frac{e^{7-4}}{e^{-5}}=\frac{e^3}{e^{-5}}=e^{3-(-5)}=e^8$$

$$B=\left(e^5\right)^{-6}\times e^{-3}=e^{5\times(-6)}\times e^{-3}=e^{-30}\times e^{-3}=e^{-30-3}=e^{-33}$$

$$C=\frac{1}{\left(e^{-3}\right)^2}+\frac{\left(e^4\right)^{-1}}{e^2\times e^{-6}}=\frac{1}{e^{-3\times 2}}+\frac{e^{4\times(-1)}}{e^{2-6}}=\frac{1}{e^{-6}}+\frac{e^{-4}}{e^{-4}}=e^6+1$$

Propriété

Pour tous réels a et b, on a : a) $e^a=e^b \Leftrightarrow a=b$; b) $e^a<e^b \Leftrightarrow a<b$

Application :

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{x^2-3} - e^{-2x} = 0$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{4x-1} \geq 1$.

Reponse

a) $e^{x^2-3} - e^{-2x} = 0$

$\Leftrightarrow e^{x^2-3} = e^{-2x}$

$\Leftrightarrow x^2 - 3 = -2x$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow x = -3 \quad ou \quad x = 1$

Les solutions sont -3 et 1.

b) $e^{4x-1} \geq 1$

$\Leftrightarrow e^{4x-1} \geq e^0$

$\Leftrightarrow 4x - 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{4}$

L'ensemble des solutions est l'intervalle $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$

IV. Limites

Proprieté

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et pour tout entier n, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ et pour tout entier n, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$

Démonstration :

a) - On pose $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$.

On a : $f'(x) = e^x - x$ et $f''(x) = e^x - 1$.

Pour tout x strictement positif, $f''(x) = e^x - 1 \geq 0$.

On dresse alors le tableau de variations :

x	0 $\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$f''(x)$	$+$
$f'(x)$	1 $\nearrow$
Signe de $f'(x)$	$+$
$f(x)$	1 $\nearrow$

On en déduit que pour tout x strictement positif

$f(x) > 0$ et donc $e^x > \frac{x^2}{2}$. Et donc $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{2} = +\infty$, on en déduit par comparaison de limites que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

- Dans le cas général, il faut montrer que :

$$\frac{e^x}{x^n} = \left(\frac{1}{n} \times \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} \right)^n$$ et appliquer le résultat précédent.

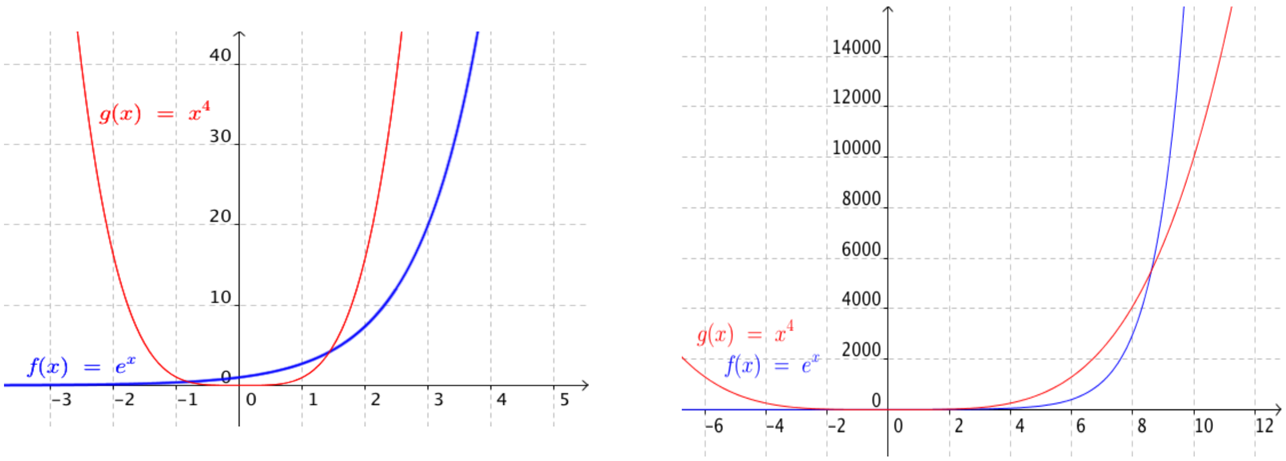
b) - $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = \lim\limits_{X \to +\infty} \left(-Xe^{-X}\right) = \lim\limits_{X \to +\infty} \left(-\frac{X}{e^X}\right) = \lim\limits_{X \to +\infty} \left(-\frac{1}{\frac{e^X}{X}} \right) = 0$.

- Dans le cas général, il faut montrer que :

$$\lim_{X \to +\infty} \left(-\frac{1}{\frac{e^X}{X^n}} \right) \leq \lim_{x \to -\infty} x^n e^x \leq \lim_{X \to +\infty} \left(\frac{1}{\frac{e^X}{X^n}} \right)$$ et appliquer le résultat précédent.

<u>Remarque :</u> Dans le cas de limites infinies, la fonction exponentielle impose sa limite devant les fonctions puissances. Sa croissance est plus rapide.

<u>Exemple</u> <u>:</u> Comparaison de la fonction exponentielle et de la fonction $x \mapsto x^4$ dans différentes fenêtres graphiques.



On constate que pour x suffisamment grand, la fonction exponentielle dépasse la fonction $x \mapsto x^4$.

Propriété 2

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^{ax} - 1}{x} = a$$ avec a un réel

<u>Démonstration :</u> Il s'agit de la définition du nombre dérivé de la fonction exponentielle en 0.

Application

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+e^{-3x}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-\frac{1}{x}}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+x}{e^x-x^2}$

Reponse

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-3x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+e^{-3x}\right)=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=1$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-\frac{1}{x}}=e^1=e$

c) Le dénominateur comprend une forme indéterminée de type " $\infty-\infty$ ".

Levons l'indétermination :

$$\frac{e^x+x}{e^x-x^2}=\frac{e^x}{e^x}\times\frac{1+\dfrac{x}{e^x}}{1-\dfrac{x^2}{e^x}}=\frac{1+\dfrac{x}{e^x}}{1-\dfrac{x^2}{e^x}}$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}=+\infty$, on a

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=0$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{x}{e^x}}{1-\dfrac{x^2}{e^x}}=\dfrac{1}{1}=1$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+x}{e^x-x^2}=1$.

V. Fonctions de la forme $x\mapsto e^{u(x)}$

Propriété Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

La fonction $x\mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I. Sa dérivée est la fonction $x\mapsto u'(x)e^{u(x)}$.

Exemple :

Soit $f(x)=e^{4x+3}$ alors $f'(x)=4e^{4x+3}$

Propriété : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

Les fonctions $x\mapsto u(x)$ et $x\mapsto e^{u(x)}$ ont le même sens de variation.

Démonstration :

On a $(e^u)'=u'e^u$

Comme $e^u>0$, u' et $(e^u)'$ sont de même signe.

Exemple :

La fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ donc la fonction $x\mapsto e^{\frac{1}{x}}$ est également décroissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.

Propriété Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

L'ensemble des fonctions primitives de la fonction $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ sur I est et les foctions $x \mapsto e^{u(x)} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$

Application :

- L'ensemble des fonctions primitives de la fonction s $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}e^{\sqrt{x+1}}$ sur $]-1;+\infty[$ est $x \mapsto e^{\sqrt{x+1}} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$
- L'ensemble des fonctions primitives de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}e^{\arctan x}$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto e^{\arctan x} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$

Exercice : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-\frac{x}{2}}$.

a) Etudier les limites de f à l'infini.

b) Calculer la dérivée de la fonction f.

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

d) Tracer la courbe représentative de la fonction f.

solution

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-\frac{x}{2}} = +\infty$ donc

$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-\frac{x}{2}} = -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-\frac{x}{2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{\frac{x}{2}}} = \lim_{x\to+\infty}\left(2\times\frac{\frac{x}{2}}{e^{\frac{x}{2}}}\right) = 0$$

b) $f'(x) = e^{-\frac{x}{2}} + x\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}} = \left(1-\dfrac{x}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}$

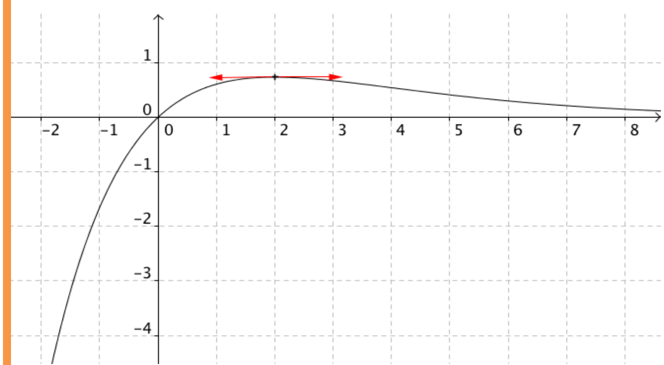
c) Comme $e^{-\frac{x}{2}} > 0$, $f'(x)$ est du signe de $1-\dfrac{x}{2}$.

f est donc croissante sur l'intervalle $\left]-\infty;2\right]$

et décroissante sur l'intervalle $\left[2;+\infty\right[$.

On dresse le tableau de variations :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\dfrac{2}{e}$	↘	0



d)

VI. La fonction exponentielle de base a

1) Définition

Définition

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $x \mapsto e^{x\ln a}$ s'appelle la fonction exponentielle de base a , notée $\exp_a$

2) Proprietés

Proprieté 1

Soit a un élément de $\mathbb{R}^{*+} - \{1\}$

$(\forall x \in \mathbb{R}) : (\exp_a(x) > 0)$

$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in]0;+\infty[) : (\exp_a(x) = y \Leftrightarrow x = \log_a y)$

Proprieté 2

Pour tous réels x et y, on a :

a) $\exp_a(x+y) = \exp_a x \ \exp_a y$; b) $\exp_a(-x) = \dfrac{1}{\exp_a x}$

c) $\exp_a(x-y) = \dfrac{\exp_a x}{\exp_a y}$; d) $\exp_a(nx) = (\exp_a x)^n$ avec $n \in IN$

Résultat : la fonction $\exp_a$ est la fonction réciproque de la fonction $\log_a$

Soit $a \in \mathbb{R}^{*+} - \{1\}$; $(\forall r \in \mathbb{Q}) : \exp_a(r) = (\exp_a(1))^r = a^r$

On entend cette écriture a $\mathbb{R}$ et on écrit $(\forall x \in \mathbb{R}) : \exp_a(x) = (\exp_a(1))^x = a^x$

Proprieté 2

- $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in]0;+\infty[) : \left(a^x = y \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln(y)}{\ln(a)}\right)$
- $(\forall x \in \mathbb{R}) \ \log_a(a^x) = x$ $\qquad (\forall t \in]0;+\infty[) : a^{\log_a(t)} = t$
- Pour tous réels x et y, on a : $a^{x+y} = a^x \times a^y$; $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$; $(a^x)^y = a^{xy}$; $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$
- Soient a et b des elements de $\mathbb{R}^{*+}$ on a : $(a \times b)^x = a^x \times b^x$; $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$

Application :

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $4^x = 18$

Cette équation s'écrit $e^{x\ln 4}=18 \Leftrightarrow x\ln 4=\ln 18 \Leftrightarrow x=\dfrac{\ln 18}{\ln 4}$ donc $S=\left\{\dfrac{\ln 18}{\ln 4}\right\}$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $3^{2x}\geq 5^{1-x}$

Cette inéquation est équivaut à $2x\ln(3)\geq(1-x)\ln(5) \Leftrightarrow (2\ln(3)+\ln(5))x\geq\ln(5)$

Donc $S=\left\{\dfrac{\ln(5)}{2\ln(3)+\ln(5)}\right\}$

3) Etude de la fonction $x\mapsto a^x$

Propriété

la fonction $x\mapsto a^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $\left(a^x\right)'=\ln a\times a^x$

Propriété

1) Si $a>1$ alors la fonction $x\mapsto a^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
2) Si $0<a<1$ alors la fonction $x\mapsto a^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$
3) Si $a>1$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=0$
4) Si $0<a<1$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=+\infty$

Si $a>1$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$\ln a$	$+$
$x\mapsto a^x$	$0 \nearrow +\infty$

Si $0<a<1$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$\ln a$	-
$x\mapsto a^x$	$+\infty \searrow 0$

Exercice 1

Soient f et g les fonctions définies de]0 ; +∞[dans $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2x+\frac{1}{2}\cdot\frac{e^x+1}{e^x-1}$ et $g(x)=2e^{2x}-5e^x+2$

a. Démontrer que $f(x)=2x+\frac{1}{2}+\frac{1}{e^x-1}=2x-\frac{1}{2}+\frac{e^x}{e^x-1}$

b. Factoriser $g(x)$.
c. Déterminer le signe de la dérivée de f.

Correction

a. $2x+\frac{1}{2}+\frac{1}{e^x-1}=2x+\frac{e^x-1+2}{2(e^x-1)}$

$=2x+\frac{1}{2}.\frac{e^x+1}{e^x-1}=f(x)$

$2x-\frac{1}{2}+\frac{e^x}{e^x-1}=2+\frac{-e^x+1+2e^x}{2(e^x-1)}$;

$=2x+\frac{1}{2}.\frac{e^x+1}{e^x-1}=f(x)$

b. $g(x)=2e^{2x}-5e^x+2, X=e^x$,

$\Delta=5^2-4\times2\times2=25-16=9=3^2$, $X=\frac{5\pm3}{4}$

$X_1=e^{x_1}=2$ et $X_2=e^{x_2}=\frac{1}{2}$

$g(x)=2(e^x-2)(e^x-\frac{1}{2})$.

c. $f(x)=2x+\frac{1}{2}+\frac{1}{e^x-1}$,

$f'(x)=2-\frac{e^x}{(e^x-1)^2}=\frac{2(e^x-1)^2-e^x}{(e^x-1)^2}$

$=\frac{2(e^{2x}-2e^x+1)-e^x}{(e^x-1)^2}=\frac{2e^{2x}-5e^x+2}{(e^x-1)^2}=\frac{g(x)}{(e^x-1)^2}$

est donc du signe de $g(x)$ et f est donc négative entre ln 2 et – ln 2, positive ailleurs.

Exercice 2

Démontrer que quel que soit le réel x on a : $\ln(e^x+1)-\ln(1+e^{-x})=x$.

Correction

$\ln(e^x+1)-\ln(1+e^{-x})=x \Leftrightarrow \ln\frac{e^x+1}{1+e^{-x}}=x$

$\Leftrightarrow \frac{e^x+1}{1+e^{-x}}=e^x \Leftrightarrow e^x+1=e^x(1+e^{-x})$

$\Leftrightarrow e^x+1=e^x+1$

Exercice 3

Résoudre les systèmes : a. $\begin{cases}2^x-3^y=5\\3\times2^x+3^y=24\end{cases}$ b. $\begin{cases}\ln x+\ln y=-2\ln 4\\e^xe^y=\frac{1}{\sqrt{e}}\end{cases}$

Correction

$\begin{cases}2^x-3^y=-1\\3\times2^x+3^y=33\end{cases}\Rightarrow 4\times2^x=32, 2^x=8, x=3$,

$\begin{cases}x=3\\8-3^y=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\3^y=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}$, S = {(3 ;2)}.

$\begin{cases}\ln x+\ln y=-2\ln 4\\e^x.e^y=\frac{1}{\sqrt{e}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\ln xy=\ln 4^{-2}\\e^{x+y}=e^{-\frac{1}{2}}\end{cases}$,

soit $\begin{cases}xy=\frac{1}{16}\\x+y=-\frac{1}{2}\end{cases}$.

Soit à résoudre l'équation : $X^2 - SX + P = 0$,

$X^2+\frac{1}{2}X+\frac{1}{16}=0\Leftrightarrow(X+\frac{1}{4})^2=0\Leftrightarrow X=-\frac{1}{4}=x=y$.

Or, bien évidemment, les valeurs négatives sont exclues car ln n'est pas définie sur $\mathbb{R}_-$ donc S = ∅.

Exercice 4

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=(x+1)^2 e^{-x}$.

Soit C la représentation graphique de la fonction g dans le repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, unité graphique 2 cm.

1. Calculer la dérivée g' de g. Montrer que $g'(x)$ est du signe de $(1 - x^2)$. En déduire les variations de g.

2. Montrer que :

a. $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$.

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ et préciser l'asymptote à C correspondante.

3. Tracer la courbe C dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. On placera en particulier les points de la courbe d'abscisses respectives –2 ; –1 ; 0 ; 1 et 3.

4. a. Par une lecture graphique, indiquer, suivant les valeurs du nombre réel k, le nombre de solutions de l'équation $g(x) = k$.

b. Prouver rigoureusement que l'équation $g(x) = 2$ admet une solution α et une seule. Prouver que α appartient à l'intervalle [– 2 ; – 1].

c. Montrer que α vérifie la relation $\alpha=-1-\sqrt{2}e^{\frac{\alpha}{2}}$.

Correction

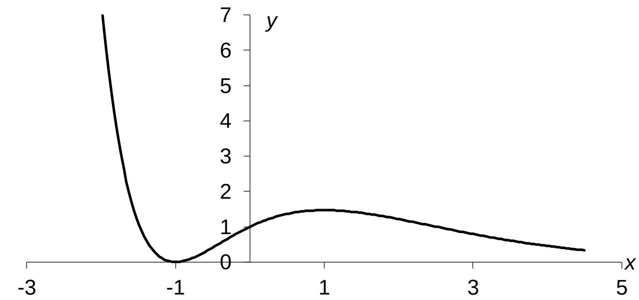
$g(x)=(x+1)^2e^{-x}$.

1. $$\begin{aligned} g'(x)&=2(x+1)e^{-x}+(x+1)^2(-e^{-x})\\ &=(x+1)e^{-x}(2-x-1)=(x+1)(1-x)e^{-x} \end{aligned}.$$

2. a. $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^{-x}=\lim\limits_{X\to+\infty} X^2e^{X}=+\infty$.

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x}=\lim\limits_{X\to-\infty} X^2e^{X}=0$.

C a une asymptote horizontale en $+\infty$.



4. a. Si $k < 0$, pas de solutions ; si $k = 0$, une seule solution : $x = -1$, si $0 < k < 4/e$, 3 solutions, si $k = 4/e$: deux solutions dont $x = 1$, enfin si $k > 4/e$, une seule solution.

b. Si $x > -1$, $f(x)$ est toujours inférieur ou égal à $4/e$ (<2), donc $f(x) = 2$ n'a pas de solution sur [1 ; +∞[.

Lorsque $x < -1$, f est continue monotone strictement croissante de $]-\infty\,;-1[$ vers $]0\,;+\infty[$. Comme 2 est dans cet intervalle, il existe une seule valeur de x pour laquelle $f(x) = 2$.

Claculons $f(-2)$=7,39 et $f(-1)$=0 ; comme 0 < 2 < 7,39 on a $-2 < \alpha < -1$.

c. Nous savons que

$f(\alpha)=2 \Leftrightarrow (\alpha+1)^2e^{-\alpha}=2$

$\Leftrightarrow (\alpha+1)^2=2e^{\alpha} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha+1=\sqrt{2e^{\alpha}}\\ \alpha+1=-\sqrt{2e^{\alpha}}\end{cases}$; comme $\alpha<-1$

on choisit la racine négative, soit $\alpha=-1-\sqrt{2}e^{\frac{\alpha}{2}}$.

Exercice 5

Soit f_k la famille de fonctions définies sur $[0,+\infty[$ par $f_k(x)=kx^2+e^{-x}$ où k est un réel **strictement positif** quelconque et g_k la famille de fonctions également définies sur $[0,+\infty[$ par $g_k(x)=2kx-e^{-x}$.

On note C_k la courbe représentative de f_k dans le repère orthonormal $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$, unité graphique : 2 cm.

1. Sens de variation de g_k

a. Calculer la dérivée g'_k de g_k ; vérifier que $g'_k(x)$ est toujours strictement positif.

b. Calculer la limite de $g_k(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

c. Déduire de ce qui précède l'existence et l'unicité d'un nombre réel $\alpha_k > 0$ tel que $g_k(\alpha_k) = 0$. Donner une valeur approchée à 10^{-1} près de α_1 et de α_2.

d. Étudier le signe de $g_k(x)$ sur [0, +∞[.

e. Montrer que $f_k'(x) = g_k(x)$; en déduire le sens de variation de f_k.

2. Comportement asymptotique de f_k en $+\infty$

a. Déterminer la limite de $f_k(x)$ en +∞.

b. Déterminer le signe de $f_k(x) - kx^2$ et sa limite en +∞. Interpréter graphiquement ce résultat ; on note P_k la courbe d'équation $y = kx^2$.

3. Construction de f_k.

a. Dresser le tableau de variation de f_k. Préciser le signe de f_k.

b. Préciser l'équation de la tangente T à C_k au point d'abscisse 0.

c. Prouver que $f_k(\alpha_k) = k\,\alpha_k(\alpha_k + 2)$.

Correction :

$f_k(x) = kx^2 + e^{-x}$, $g_k(x) = 2kx - e^{-x}$.

1. Sens de variation de g_k

a. $g'_k(x) = 2k + e^{-x}$ est toujours >0 puisque e^{-x} l'est ainsi que $2k$.

b. Comme e^{-x} tend vers 0 en $+\infty$ la fonction $g_k(x)$ se comporte comme $2kx$ et tend donc vers $+\infty$ .c. On a $g_k(0) = 0 - e^{-0} = -1$ qui est négatif et $\lim\limits_{x\to+\infty} g_k(x) = +\infty$ qui est positif ; comme g_k est continue, monotone strictement croissante elle s'annule une seule fois.

Calculons des valeurs approchées de α_1, solution de $2x - e^{-x} = 0$: on a $0,351 < \alpha_1 < 0,352$.

x	$g_1(x)$
0,35172775	−1,6116057
0,35183246	0,00026696

x	$g_2(x)$
0,20335079	−0,00258881
0,20418848	0,00144524

De même on obtient la solution de $4x - e^{-x} = 0$:

$0,203 < \alpha_2 < 0,205$.

d. Comme g_k est croissante, on a

$x < \alpha_k \Rightarrow g_k(x) < g_k(\alpha_k) = 0$ et

$x > \alpha_k \Rightarrow g_k(x) > g_k(\alpha_k) = 0$

e. Il est immédiat que $f_k'(x) = 2kx - e^{-x} = g_k(x)$; f_k est donc décroissante avant α_k et croissante après.

x	0		α_k		$+\infty$
f_k'		$-$	0	$+$	
f_k	1	$\searrow$	$f_k(\alpha_k)$	$\nearrow$	$+\infty$

2. Comportement asymptotique de f_k en $+\infty$

a. Là encore e^{-x} tend vers 0 en $+\infty$ donc f_k se comporte comme kx^2 et tend donc vers $+\infty$.

b. Comme $f_k(x) - kx^2 = e^{-x}$, cette expression est positive et tend vers 0 à linfini. La courbe P_k est donc asymptote de C_k et C_k est au dessus de P_k.

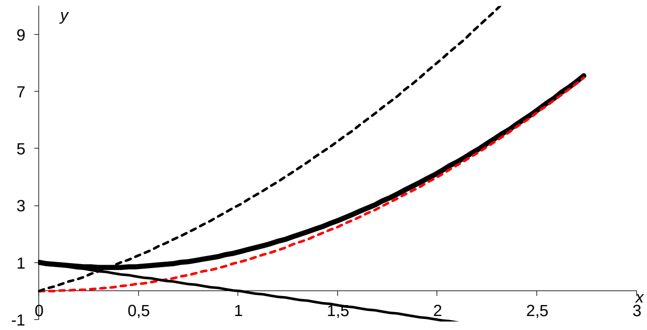
3. Construction de f_k.

a. Comme kx^2 est positif ainsi que e^{-x}, $f_k(x)$ est positive.

b. On a $f_k'(0) = -1$ et $f_k(0) = 1$ d'où la tangente : $y = -x + 1$.

c. $g_k(\alpha_k) = 0 \Leftrightarrow e^{-\alpha_k} = 2k\alpha_k$ donc

$f_k(\alpha_k) = k\alpha_k^2 + 2k\alpha_k = k\alpha_k(\alpha_k + 2)$.



Exercice 6

Soit la fonction f définie par $f(x) = xe^{-x}$ sur $[0 ; +\infty[$. On note Γ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique:10 cm).

Partie A

1. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

c. construire Γ.

2. a. Montrer que pour tout réel m de l'intervalle $\left]0 ; \frac{1}{e}\right[$, l'équation $f(x) = m$ admet deux solutions.

b. Dans le cas où $m = \frac{1}{4}$, on nomme α et β les solutions, (avec $\alpha < \beta$). Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

c. Résoudre l'équation $f(x) = m$ dans le cas où $m = 0$ et $m = \frac{1}{e}$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie sur IN par $\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \end{cases}$ où α est le réel défini à la question A. 2. b.

a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel *n*, $u_n > 0$.

b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c. La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.

2. On considère la suite (w_n) définie sur IN par $w_n = \ln u_n$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel *n*, on a $u_n = w_n - w_{n+1}$.

b. On pose $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$. Montrer que $S_n = w_0 - w_{n+1}$.

c. En déduire $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

3. On considère la suite (v_n) définie sur IN par son premier terme v_0, $v_0 > 0$, et pour tout entier *n*, par $v_{n+1} = v_n e^{-v_n}$. Existe-t-il une valeur de v_0 différente de α telle que, pour tout entier $n \geq 1$, on ait $u_n = v_n$? Si oui, préciser laquelle.

Correction :

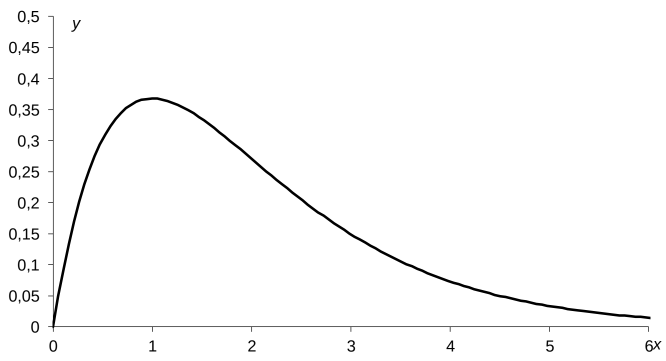
Partie A

1. a. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{X\to-\infty} -Xe^{X} = 0$.

b. $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$. L'ex ponentielle est positive, *f'* est du signe de 1 − *x*.

c.

x	0		1		$+\infty$
f'		+		−	
f	0	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0



2. a. La droite d'équation $y = m$ coupe la courbe Γ en deux points, l'équation $f(x) = m$ a donc bien deux solutions. Plus scientifiquement, lorsque *m* est dans $\left]0\,;\frac{1}{e}\right[$, il a deux antécédents par *f* : un antécédent entre 0 et 1 car *f* est croissante et continue de $]0\,;1[$ vers $\left]0\,;\frac{1}{e}\right[$, l'autre entre 1 et $+\infty$ car *f* est continue, monotone, décroissante de $]1\,;+\infty[$ vers $\left]0\,;\frac{1}{e}\right[$.

b. On cherche quand *f*(*x*) encadre 1/4 :

f(0,3573) = 0,2499 et *f*(0,3574) = 0,25001.

c. $f(x) = 0$ a l'unique solution 0 (tableau de variation) et $f(x) = \frac{1}{e}$ a pour unique solution 1.

Partie B $\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \end{cases}$

a. Comme $u_0 = \alpha > 0$ et que si $u_n > 0$ alors $u_n e^{-u_n} > 0$, il est clair que $u_n > 0$ pour tout *n*.

b. On peut faire $u_{n+1} - u_n = u_n e^{-u_n} - u_n = u_n(e^{-u_n} - 1)$;

or $u_n > 0 \Leftrightarrow -u_n < 0 \Leftrightarrow e^{-u_n} < 1 \Leftrightarrow e^{-u_n} - 1 < 0$

donc la suite (u_n) est décroissante.

c. (u_n) est décroissante et minorée par 0, elle converge donc. Soit l sa limite, on a

$le^{-l} = l \Leftrightarrow \begin{cases} l = 0 \\ e^{-l} = 1 \Leftrightarrow -l = 0 \end{cases}$; la seule possibilité est que $l = 0$.

2. $w_n = \ln u_n$.

a. Prenons le logarithme de

$$\begin{aligned} u_{n+1} = u_n e^{-u_n} &\Leftrightarrow \ln u_{n+1} = \ln u_n + \ln e^{-u_n} \\ &= \ln u_n - u_n \Leftrightarrow w_{n+1} = w_n - u_n \end{aligned},$$

soit $u_n = w_n - w_{n+1}$.

b.

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + \ldots + u_n \\ &= w_0 - \cancel{w_1} + \cancel{w_1} - \cancel{w_2} + \ldots + \cancel{w_{n-1}} - \cancel{w_n} + \cancel{w_n} - w_{n+1}. \\ &= w_0 - w_{n+1} \end{aligned}$$

c. Comme u_n tend vers 0, w_n tend vers $-\infty$, donc S_n tend vers $+\infty$.

3. En fait à partir de $u_0 = \alpha$ on a $u_1 = f(\alpha) = \frac{1}{4}$; mais $f(\beta) = \frac{1}{4}$, donc si l'on prend $v_0 = \beta$, à partir du rang 1 les deux suites seront confondues.

Exercice 7

Caractéristique de Exp et tangentes

1. Dans un repère orthonormal $(O\,; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2 cm tracer la courbe représentative (C) de la fonction exponentielle ($x \mapsto e^x$) sur l'intervalle $[-2\,; 2]$.

2. Tracer sur la même figure les tangentes à (C) aux points d'abscisses $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ et $x_3 = 1$. Chacune de ces tangentes coupe l'axe horizontal en un point d'abscisse x_1', x_2', x_3'.

Mesurer **à la règle** les trois distances $x_i - x_i'$, i = 1, 2, 3. Que constatez-vous ? (Les trois longueurs mesurées doivent apparaître clairement sur le graphique.)

3. Soit A un point de (C) d'abscisse a. Vérifiez que l'équation de la tangente (T) en A à (C) a pour équation $y = e^a x + (1-a)e^a$. Justifiez alors que le résultat du 2. est bien une constante que l'on précisera par le calcul.

4. On cherche désormais s'il y aurait d'autres courbes présentant cette propriété : soit une fonction f de courbe représentative (C), A un point de (C) d'abscisse a, (T) la tangente en A à (C) et a' l'abscisse du point d'intersection entre (T) et (Ox) quand il existe. On note f' la fonction dérivée de f.

a. Donner l'équation de la tangente (T).

b. Exprimer a' en fonction de a, $f(a)$ et $f'(a)$. En déduire $a - a'$.

c. Soit k une constante réelle. Montrer que $a - a' = k \Leftrightarrow \dfrac{f(a)}{f'(a)} = k$. Résoudre cette équation et conclure.