CHAPITRE 6

LES LIMITES DES FONCTIONS :

6.1 Activités :

6.1.1 Activité (Limite infinie en 0) :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

1) Recopier et compléter le tableau suivant :

x	-1	$-0,1$	$-0,01$	$-0,001$	0.001	0.1	1
$f(x)$							

2) Qu'en déduisez-vous pour les valeurs de $f(x)$: Quand x prend des valeurs proches de 0 (c-à-d quand x tend vers 0).

Solution :

1)

x	-1	$-0,1$	$-0,01$	$-0,001$	0.001	0.1	1
$f(x)$	1	100	10000	10^6	10^6	100	1

2) On remarque que lorsque x sa proche de 0 : $f(x)$ prend des grande valeurs :
On dit que la limite lorsque x tend vers 0 de $f(x)$ est $+\infty$:
et on écrit : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$. C'est à dire : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$.

Remarque 6.1

- On a aussi : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^4} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^6} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^8} = +\infty$.
- On général : si n est pair alors : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$.

6.1.2 Activité (Limite finie en 0) :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$

1) Recopier et compléter le tableau suivant :

x	-1	$-0,1$	$-0,01$	$-0,001$	0.001	0.1	1
$f(x)$							

2) Qu'en remarquez-vous pour les valeurs de $f(x)$: Quand x tend vers 0.

Solution :

1)

x	-1	$-0,1$	$-0,01$	$-0,001$	$0,001$	$0,1$	1
$f(x)$	1	$0,01$	$0,0001$	10^{-6}	10^{-6}	$0,01$	1

2) On remarque que lorsque x tend 0 : $f(x)$ tend vers 0 :
On a donc : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. C'est à dire : $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$.

Remarque 6.2

- On a aussi : $\lim_{x\to 0} x^3 = 0$; $\lim_{x\to 0} x^4 = 0$; $\lim_{x\to 0} x^5 = 0$.
- On général : si $n \in \mathbb{N}$ alors : $\lim_{x\to 0} x^n = 0$.

6.1.3 Activité (Limite infinie en $+\infty$ et en $-\infty$) :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x$; $g(x) = x^2$ et $h(x) = x^3$

I) 1) Recopier et compléter le tableau suivant :

x	10	100	10^3	10^4	10^5	10^8	10^{10}	...	$+\infty$
$f(x)$								...	
$g(x)$								...	
$h(x)$								...	

2) a) Qu'en remarquez-vous pour les valeurs de $f(x)$: Quand x tend vers $+\infty$.

b) Qu'en remarquez-vous pour les valeurs de $g(x)$: Quand x tend vers $+\infty$.

c) Qu'en remarquez-vous pour les valeurs de $h(x)$: Quand x tend vers $+\infty$.

II) 1) Recopier et compléter le tableau suivant :

x	-10	-100	-10^3	-10^4	-10^5	-10^8	-10^{10}	...	$-\infty$
$f(x)$								...	
$g(x)$								...	
$h(x)$								...	

2) a) Qu'en remarquez-vous pour les valeurs de $f(x)$: Quand x tend vers $-\infty$.

b) Qu'en remarquez-vous pour les valeurs de $g(x)$: Quand x tend vers $-\infty$.

c) Qu'en remarquez-vous pour les valeurs de $h(x)$: Quand x tend vers $-\infty$.

Solution :

I) 1) Le tableau :

x	10	100	10^3	10^4	10^5	10^8	10^{10}	...	$+\infty$
$f(x)$	10	100	10^3	10^4	10^5	10^8	10^{10}	...	$+\infty$
$g(x)$	100	10^4	10^6	10^8	10^{10}	10^{16}	10^{20}	...	$+\infty$
$h(x)$	10^3	10^6	10^9	10^{12}	10^{15}	10^{24}	10^{30}	...	$+\infty$

2) a) Lorsque x tend vers $+\infty$: on a $f(x)$ tend vers $+\infty$, on écrit : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$: c'est à dire : $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$

b) Lorsque x tend vers $+\infty$: on a $g(x)$ tend vers $+\infty$, on écrit : $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$: c'est à dire : $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

c) Lorsque x tend vers $+\infty$: on a $h(x)$ tend vers $+\infty$, on écrit : $\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$: c'est à dire : $\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

II) 1) Le tableau :

x	-10	-100	-10^3	-10^4	-10^5	-10^8	-10^{10}	...	$-\infty$
$f(x)$	-10	-100	-10^3	-10^4	-10^5	-10^8	-10^{10}	...	$-\infty$
$g(x)$	100	10^4	10^6	10^8	10^{10}	10^{16}	10^{20}	...	$+\infty$
$h(x)$	-10^3	-10^6	-10^9	-10^{12}	-10^{15}	-10^{24}	-10^{30}	...	$-\infty$

2) a) Lorsque x tend vers $-\infty$: on a $f(x)$ tend vers $-\infty$, on écrit : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$: c'est à dire : $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$

b) Lorsque x tend vers $-\infty$: on a $g(x)$ tend vers $+\infty$, on écrit : $\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$: c'est à dire : $\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

c) Lorsque x tend vers $-\infty$: on a $h(x)$ tend vers $-\infty$, on écrit : $\lim_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$: c'est à dire : $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

Propriété 6.1

- $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} x^4 = +\infty$
  On général : pour tous $n \in \mathbb{N}^*$: $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$
- $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} x^4 = +\infty$
  On général : soit $n \in \mathbb{N}^*$: si n est pair alors : $\lim_{x\to-\infty} x^n = +\infty$
  si n est impair alors : $\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty$

6.1.4 Limite finie d'une fonction en $+\infty$ et en $-\infty$

Propriété 6.2

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^4} = 0$
  On général : pour tous $n \in \mathbb{N}^*$: $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
- $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3} = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^4} = 0$
  On général : soit $n \in \mathbb{N}^*$: $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

6.2 Définitions et propriétés :

6.2.1 Limite finie d'une fonction en un point :

Définition 6.1
Soit $a \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$ et soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme : $I =]a-r; a+r[$ où $r > 0$. ou sur un intervalle de la forme $(I =]a-r; a+r[- \{a\})$.
Si $f(x)$ tend vers l quand x tend vers a alors on note : $\lim_{x\to a} f(x) = l$ ou ($\lim_{a} f = l$)

Exemple 6.1

- $\lim_{x\to 2} f(x) = x+1 = 3$, car si x tend vers 2 (par exemple : $x = 1,99$) on a : $f(x) = 1,99+1 = 2,99$ tend vers 3.
- $\lim_{x\to 3} f(x) = 2x+1 = 7$, car si x tend vers 3 (par exemple : $x = 2,9$) on a : $f(x) = 2\times 2,9+1 = 6,8$ tend vers 7.

Exercice 48
Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to 3} 2x+5$; 2) $\lim_{x\to 2} 8x-5$; 3) $\lim_{x\to 1} \frac{x+3}{x+1}$; 4) $\lim_{x\to 0} 2x+5$; 5) $\lim_{x\to -1} 2x+5$; 6) $\lim_{x\to 2} \sqrt{2x+5}$.

Remarque 6.3

Limite infinie en un point	Limite infinie en $\pm\infty$	Limite finie en $\pm\infty$	Limite finie en un point
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$	$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$	$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = l$	$\lim_{x\to a} f(x) = l$

6.2.2 La limite de la fonction : $x \mapsto x^n$ en 0

Proprieté 6.3
On a : $\lim_{x\to 0} x = 0$; $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$; $\lim_{x\to 0} x^3 = 0$
En général : pour tous $n \in \mathbb{N}^*$: $\lim_{x\to 0} x^n = 0$

6.2.3 Quelques opérations sur les limites :

Remarque 6.4
(Un nombre strictement positif) $\times +\infty = +\infty$
(Un nombre strictement positif) $\times -\infty = -\infty$
(Un nombre strictement négatif) $\times +\infty = -\infty$
(Un nombre strictement négatif) $\times -\infty = +\infty$

Exercice : (Les limites de la forme : $\lim_{x\to\pm\infty} a\cdot x^n$) :

Calculer les limites suivantes :
1). $\lim_{x\to+\infty} -2x^3$; 2). $\lim_{x\to-\infty} -4x^3$; 3). $\lim_{x\to-\infty} -3x^2$; 4). $\lim_{x\to+\infty} 5x^2$; 5). $\lim_{x\to-\infty} 2x^3$

Solution :

1) Calcul de la limite : $\lim_{x\to+\infty} -2x^3$. on a : $\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $-2 < 0$ donc : $\lim_{x\to+\infty} -2x^3 = -\infty$.
2) Calcul de la limite : $\lim_{x\to-\infty} -4x^3$. on a : $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $-4 < 0$ donc : $\lim_{x\to-\infty} -4x^3 = +\infty$.
3) Calcul de la limite : $\lim_{x\to-\infty} -3x^2$. on a : $\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ et $-3 < 0$ donc : $\lim_{x\to-\infty} -3x^2 = -\infty$.
4) Calcul de la limite : $\lim_{x\to+\infty} 5x^2$. on a : $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $5 > 0$ donc : $\lim_{x\to+\infty} 5x^2 = +\infty$.
5) Calcul de la limite : $\lim_{x\to-\infty} 2x^3$. on a : $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $2 > 0$ donc : $\lim_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$.

6.2.4 Limite d'une fonction polynôme en un point - limite d'une fonction rationnelle en un point :

★ **Rappelle : (Polynôme)**

- La fonction polynôme de degré 2 c'est toute fonction de la forme : $P(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.
  Exemples : $P(x) = 3x^2 - 4x + 1$; $P(x) = x^2 + 2x - 1$; $P(x) = x^2 + 1$;... donner les autres exemples ?...
- La fonction polynôme de degré 3 c'est toute fonction de la forme : $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$.
  Exemples : $P(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 1$; $P(x) = 5x^3 + x^2 + 2x - 1$; $P(x) = 2x^3 - 1$;.... donner les autres exemples ...
- La fonction polynôme de degré 5 c'est toute fonction de la forme : $P(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$ $(a \neq 0)$.
  Exemple : $P(x) = 4x^5 - 4x + 1$; $P(x) = x^5 + 2x - 1$; $P(x) = x^5 + 8$;....donner des autres exemples ...
- La fonction polynôme de degré 1 c'est toute fonction de la forme : $P(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$. et s'appelle aussi la fonction affine.
  Exemple : $P(x) = 4x + 1$; $P(x) = 2x - 1$; $P(x) = x + 2$;.... donner des autres exemples ...

Proprieté 6.4
Soient P et Q deux fonctions polynômes $x_0 \in \mathbb{R}$: on a :
• $\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$.
• Si $Q(x_0) \neq 0$ alors : $\lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

Exemples :

1) Soit P la fonction définie par : $P(x) = x^2 + x + 1$ on a :
$\lim\limits_{x\to 1} P(x) = P(1) = 1^2 + 1 + 1 = 3$ et $\lim\limits_{x\to 2} P(x) = P(2) = 2^2 + 2 + 1 = 7$

2) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x+3}{x-1}$ on a : $(D_f = \mathbb{R} - \{1\})$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) = \dfrac{2+3}{2-1} = 5$ (car : $2 \in D_f$)

6.3 La limite à droite - la limite à gauche :

Activité (Activité 9 page 110)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $(\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\} =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[)$

1) Construire la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

2) a) Recopier et compléter le tableau suivant :

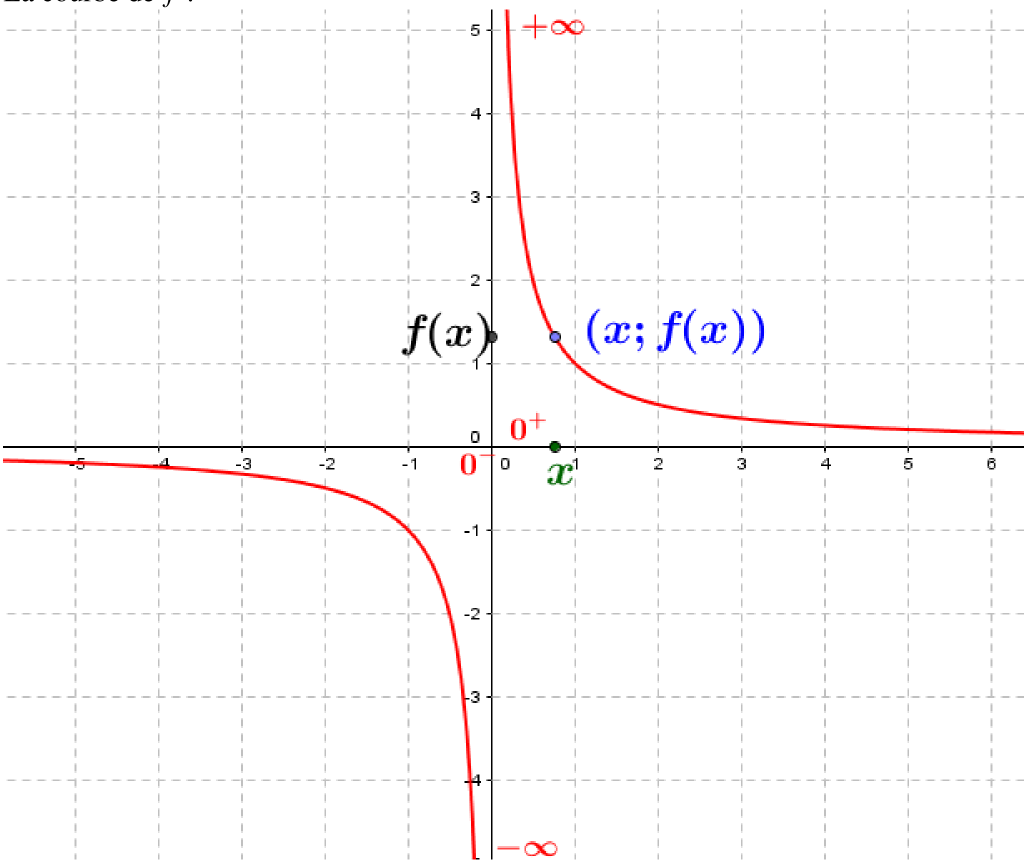
	à gauche de 0							à droite de 0			
x	-0.01	-0.001	-0.0001	-0.00001	$\cdots$	0	$\cdots$	0.00001	0.0001	0.001	0.01
$f(x)$					$\cdots$	X	$\cdots$				

b) Que remarquez-vous pour les valeurs de $f(x)$: Quand x tend vers 0 et $x > 0$: (c'est à dire quand x tend vers 0 à droite).

c) Que remarquez-vous pour les valeurs de $f(x)$: Quand x tend vers 0 et $x < 0$: (c'est à dire quand x tend vers 0 à gauche).

Solution :

1) La courbe de f :



2) a) Le tableau :

x	-0.01	-0.001	-0.0001	-0.00001	$\cdots$	0	$\cdots$	0.00001	0.0001	0.001	0.01
$f(x)$	-100	-1000	-10000	-100000	$\cdots$	X	$\cdots$	100000	10000	1000	100

b) On remarque que $f(x)$ prend des valeurs plus grands (c'est à dire : $f(x) \mapsto +\infty$) quand x vers 0 à droite.
On dit que limite de $f(x)$ est : $+\infty$ quand x tend vers 0 à droite : on écrit :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \text{ ou } \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty \quad \text{c'est à dire :} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \text{ ou } \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$$

c) On remarque que $f(x)$ prend des valeurs négatives (c'est à dire : $f(x) \mapsto -\infty$) quand x vers 0 à gauche.
On dit que limite de $f(x)$ est : $-\infty$ quand x tend vers 0 à gauche : on écrit :

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty \text{ ou } \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = -\infty \quad \text{c'est à dire :} \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \text{ ou } \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$$

Remarque 6.5
Soit $n \in \mathbb{N}^*$: On a déjà vu si : n est pair alors : $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$ donc :

- Si : n est pair alors : $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$ et $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^n} = +\infty$
- Si : n est impair alors : $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$ et $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty$

Exemple 6.2
. $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$ et $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$ et $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^5} = +\infty$ et $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^5} = -\infty$

Exercice 49
Calculer les limites suivantes :

$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^4} = \ldots$ et $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^4} = \ldots$ et $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^3} = \ldots$ et $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^3} = \ldots$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{x^2} = \ldots$ et $\lim_{x\to 0^-} \frac{-4}{x^2} = \ldots$ et $\lim_{x\to 0^+} \frac{3}{x^5} = \ldots$ et $\lim_{x\to 0^-} \frac{-2}{x^5} = \ldots$

6.4 Opérations sur les limites :

On admet toutes les opérations suivantes :

Limite d'une somme :

$\lim_{x\to a} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x\to a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to a} [f(x)+g(x)]$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

Remarque : « F.I. » signifie « Forme Indéterminée ». Ceci veut dire que l'on ne peut pas conclure directement à l'aide du tableau. Il faut étudier plus en détail la fonction pour « lever l'indétermination » et trouver la limite.

Limite d'un produit :

$\lim_{x\to a} f(x)$	l	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0
$\lim_{x\to a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to a} [f(x)\times g(x)]$	$l\times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	F.I.
		Il s'agit de la règle des signes								

Limite de l'inverse :

$\lim_{x\to a} f(x)$	l	$+\infty$	$-\infty$	0 et $f(x)>0$	0 et $f(x)<0$
$\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)}$	$\frac{1}{l}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$

Limite d'un quotient :

$\lim_{x\to a} f(x)$	l	l	$l\neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$\lim_{x\to a} g(x)$	$l'\neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0	0	$l'\neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	F.I.	F.I.
			Il faut étudier le signe de g		règle des signes		

Remarque 6.6
• Ces opérations restent valables pour : $x\to a^+$ ou $x\to a^-$ ou $x\to+\infty$ ou $x\to-\infty$.
• **Les formes indéterminées** : " $\frac{0}{0}$ " ; " $\frac{\infty}{\infty}$ " ; "$(+\infty)+(-\infty)$" ; "$0\times\infty$".

Exercice 50
Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x+\frac{1}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3+\frac{1}{x}$; 3) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+x$; 4) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+\frac{1}{x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0^+} 3x+\frac{7}{x}$;

6) $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{1}{x-3}$; 7) $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{-1}{x-2}$; 8) $\lim\limits_{x\to 5^+} \frac{2}{x-5}$; 9) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-x$;

10) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2+1)\times\frac{1}{x}$; 11) $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{2x+1}{x-1}$; 12) $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{2x+1}{x-2}$; 13) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$

Limite d'une fonction polynôme et d'une fonction rationnelle en $+\infty$ et $-\infty$

Propriété 6.5
Soient P et Q deux fonctions polynômes telles que : $P(x)=ax^n+bx^{n-1}+\cdots+\lambda$ avec $(a\neq 0)$
et $Q(x)=a'x^m+b'x^{m-1}+\cdots+\lambda'$ avec $(a'\neq 0)$ on a :

$$\lim_{x\to+\infty} P(x)=\lim_{x\to+\infty} ax^n \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} P(x)=\lim_{x\to-\infty} ax^n$$

Exemple 6.3

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-10x+7=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3+10x^2-17x+1=\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3=-\infty$ (3 est impair et $2>0$).
- $\lim\limits_{x\to+\infty} -5x^3+10x+1=\lim\limits_{x\to+\infty} -5x^3=-\infty$ (car : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ et $-5<0$)

La limite d'une fonction polynôme quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ est la limite de terme du plus grand degré.

On a aussi : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ax^n}{a'x^m}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{ax^n}{a'x^m}$

Exemple 6.4

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x^3+3x+1}{x^2-10x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x^3}{x^2}\lim\limits_{x\to+\infty}5x=+\infty$. (car $5>0$ et $x\to+\infty$)
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-7x^3+10}{-x^2-8x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-7x^3}{-x^2}\lim\limits_{x\to-\infty}7x=-\infty$. (car $7>0$ et $x\to-\infty$)

Techniques de calcul des limites

Remarque 6.7

- Si P est une fonction polynôme et $a\in\mathbb{R}$ alors : $\lim\limits_{x\to a}P(x)=P(a)$.

  Exemple 6.5
  Si : $P(x)=x^2+x+4$ *alors :* $\lim\limits_{x\to2}P(x)=P(2)=2^2+2+4=10$.

- Si f est une fonction rationnelle et $a\in D_f$:

  Exemple 6.6
  Si : $f(x)=\frac{2x+1}{x+1}$ alors : $\lim\limits_{x\to3}f(x)=f(3)=\frac{2\times3+1}{3+1}=\frac{7}{4}$.

- Limite d'une fonction polynome et d'une fonction rationnelle en $+\infty$ et en $-\infty$

▷ Si P est une fonction polynôme de degré 3 c'est à dire : $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$; $(a\neq0)$ car :
$\lim\limits_{x\to+\infty}P(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}ax^3$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}P(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}ax^3$

Exemple 6.7

Posons : $P(x)=-2x^3+5x^2+4x+1$ alors :

$$\lim_{x\to+\infty}P(x)=\lim_{x\to+\infty}-2x^3=-\infty \quad\text{et}\quad \lim_{x\to-\infty}P(x)=\lim_{x\to-\infty}-2x^3=+\infty$$

▷ Si : P est une polynôme de degré 2 c'est à dire : $P(x)=ax^2+bx+c$; $(a\neq0)$ alors :
$\lim\limits_{x\to+\infty}P(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}ax^2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}P(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}ax^2$

Exemple 6.8

Si : $P(x)=3x^2-2x+1$ alors :

$$\lim_{x\to+\infty}P(x)=\lim_{x\to+\infty}3x^2=+\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty}P(x)=\lim_{x\to-\infty}3x^2=+\infty$$

On aussi :

$$\lim_{x\to+\infty}ax+b=\lim_{x\to+\infty}ax=\begin{cases}+\infty\ ;\ (a>0)\\-\infty\ ;\ (a<0)\end{cases}\quad\text{et :}\quad \lim_{x\to-\infty}ax+b=\lim_{x\to-\infty}ax=\begin{cases}-\infty\ ;\ (a>0)\\+\infty\ ;\ (a<0)\end{cases}$$

Proprieté 6.6

$x\mapsto f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ avec : $(a\neq0)$ et $(c\neq0)$).

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}\quad\text{et}\quad\lim_{x\to-\infty}\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}$$

Exemple 6.9
. $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{3x+5} = \frac{2}{3}$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x+b}{x-1} = 2$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x-2}{x+1} = ...?$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{-x+2} = ...?$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{-x+3}{2x} = ...?$

Proprieté 6.7
La limite de la fonction : $x \mapsto f(x) = \frac{a}{cx+d}$ avec $(c \neq 0)$).

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a}{cx+d} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{a}{cx+d} = 0$$

Exemple 6.10
. $\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{4x+1} = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{4}{2x+1} = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{8}{x+1} = 0$

Autres exemples : (en général)

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{-3x^2+4x+2}{-x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-3x^2}{-x} = \lim_{x\to+\infty} 3x = +\infty$.
- $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{x^2+3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x} = +\infty$.

Proprieté 6.8
Soit $l \in \mathbb{R}$ avec : $(l \neq 0)$

- Si $l > 0$ alors : $\frac{l}{0^+} = +\infty$ et $\frac{l}{0^-} = -\infty$
- Si : $l < 0$ alors : $\frac{l}{0^+} = -\infty$ et $\frac{l}{0^-} = +\infty$

Exemple 6.11
1) $\lim_{\substack{x\to3\\x>3}} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

2) $\lim_{\substack{x\to3\\x<3}} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

3) $\lim_{\substack{x\to2\\x>2}} \frac{-1}{x-2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

4) $\lim_{\substack{x\to2\\x<2}} \frac{-1}{x-2} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

5) $\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} \frac{2x-1}{x-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

6) $\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} \frac{2x-1}{x-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

7) $\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} \frac{3x-1}{-x+1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$

8) $\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} \frac{3x-1}{-x+1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$

6.5 Autres méthodes de calcul :

1) **La forme indéterminée :** $''\frac{0}{0}''$

Par exemple calculons la limite : $\lim_{x\to2} \frac{3x-6}{x-2}$ Si on substitue, on obtient $''\frac{0}{0}''$, donc on ne peut pas calculer cette limite directement. alors il faut factorisé par : $x-2$: cette méthode est appelé la méthode de la factorisation).
$\lim_{x\to2} \frac{3x-6}{x-2} = \lim_{x\to2} \frac{3(x-2)}{x-2} = 3$

Autres exemples :

- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{5x-5}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{5(x-1)}{x-1} = 5$
- $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x-6}{x-3} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2(x-3)}{x-3} = 2.$
- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} x+1 = 2.$