Chapitre 7

Les équations différentiélles

Histoire

Le pendule isochrome. le probleme consiste à modifier le pendule standard pour rendr
La periode independante de l'amplitude.

Hugense (1673, horologium Oscillatorium) a l'idée de modifier le cercle du pendule standard pour que laForce acceleratrice de devienne proportionnelle

à la longueur d'arc s.

Le mouvement du pendule serait alors décrit par $s'' + Ks = 0$*, dont*

les osciallations sont independantes de l'amplitude

(E.Hair et al,L'analyse au fil de l'Histoire,2000)

I. L'equation deifferentielle de premier ordre

1) Equation differentielle $y' = ay \quad a \in IR^*$

Une équation de la forme $y' = ay$, où l'inconnue y est une fonction et a est un réel , est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre coefficient constant . Résoudre dans IR une équation de la forme

$y' = ay$ c'est trouver toutes les fonction dérivables sur IR qui vérifie $y' = ay$

Proprieté

Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions définies et dérivables sur R telles que :

$y = \lambda e^{ax}$ avec $\lambda \in IR$

$y = \lambda e^{ax}$ avec $\lambda \in IR$ est appellé la solution generale de l'equation differentielle $y' = ay$

Demonstation : $y' = ay,$

$$Soit \ \frac{y'}{y} = a \Rightarrow \ln|y| = ax + k$$

$$\Leftrightarrow |y| = e^{ax+k} = e^k e^{ax}$$

$$\Leftrightarrow y = \pm Ce^{ax} = \lambda e^{ax} \ avec \ C \ réel \ positif \ \ non \ nul.$$

Exemlpes

1) La solution generale de l'equation differentielle

$y' + 3y = 0$ est $y = \lambda e^{-3x}$ avec $\lambda \in IR$

2) La demi-vie du polonium-218 est presque exactement 3 minutes.

a) Quelle proportion de la quantité initiale restera-t-il après 5 minutes?

b) Combien de temps est-il nécessaire pour que 99% du polonium-218 soit décomposé?

On pose d'abord l'équation de la décomposition radioactive . $\dfrac{dQ}{dt} = -kQ.$

On résout et on obtient . $Q = Q_0 e^{-kt}$.

Pour trouver la valeur de k, on utilise la condition initiale sur la demi-vie :

$$Q(3) = \frac{1}{2}Q_0 \Rightarrow \frac{1}{2}Q_0 = Q_0 e^{-3k} \Rightarrow k = \frac{1}{3}\ln 2$$

$$Donc \ Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{3}\ln 2} \ ou \ Q(t) = Q_0 (2)^{-\frac{t}{3}}$$

$$= Q_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}}$$

$$a) \ on \ a \ Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{3}\ln 2}$$

$$donc \ Q(5) = Q_0 e^{-\frac{5}{3}\ln 2}$$

$$En \ proportion, \frac{Q_0 e^{-\frac{5}{3}\ln 2}}{Q_0} = e^{-\frac{5}{3}\ln 2} \approx 0{,}315$$

Après 5 minutes, il reste environ 31,5% de la quantité initiale.

b) On cherche t pour que $Q(t) = 0{,}01 Q_0$

$$0{,}01 Q_0 = Q_0 e^{-\frac{t}{3}\ln 2} \Rightarrow \ln(0{,}01) = -\frac{t}{3}\ln 2$$

$$\Rightarrow t = -3\frac{\ln(0{,}01)}{\ln 2} \approx 19{,}93$$

Ça prend donc près de 20 minutes pour que 99% du polonium-218 se décompose.

Application :

Resoudre les equations differentielle suivantes :$y' + y = 0$; $y' + \sqrt{2}y = 0$; $2y' + 3y + 0$

2) La solution particuliere de ED $y' = ay$ qui verifier $y(x_0) = y_0$

Proprieté

Soit a un reel non nul .pour tous reels x_0 *et* y_0, l'equation $y' = ay$ admet une unique solution qui prend la valeur y_0 *en* x_0. C'est $y = y_0 e^{a(x-x_0)}$

Exemples

1) l'unique solution de l'eqaution differentielle $y' = 5y$ qui prend la valeur 3 en 2 est $y = 3e^{5(x-2)}$
2) l'unique solution de l'equation differentielle $y' + 2y = 0$ qui verifier la condition $y(\ln 3) = 4$ est $y = 4e^{-2(x-ln3)}$

Application :

1) Determiner la solution de l'eqation differentielle $y' + 3y = 0$ qui prend la valeur -5 en 0
2) Determiner la solution de l'eqation differentielle $y' = 5y$ qui prend la valeur 5 en $ln2$

3) L'equation differentielle $y' = ay + b$

On determine la solution generale de l'equation differentielle $y' = ay + b$

$$\text{on a } y' = ay + b \Longrightarrow y' = a\left(y + \frac{b}{a}\right)$$

$$\Longrightarrow \left(y + \frac{b}{a}\right)' = a\left(y + \frac{b}{a}\right)$$

$on\ pose\ z = y + \frac{b}{a}\ donc\ l'equation\ differentielle\ \left(y + \frac{b}{a}\right)' = a\left(y + \frac{b}{a}\right)\ devient\ z' = az$

On sait que la solution generale de l'eqution differentielle $z' = az$ est $z = \lambda e^{ax}$ avec $\lambda \in IR$

Donc on remplace z par $y + \frac{b}{a}$ $on\ obtient\ y = \lambda e^{ax} - \frac{b}{a}$

$Et\ par\ suite\ la\ solution\ generale\ de\ ED\ y = ay + b\ c'est\ y = \lambda e^{ax} - \frac{b}{a}$ avec $\lambda \in IR$

Proprieté Soient a et b deux reels non nuls

$la\ solution\ generale\ de\ ED\ y = ay + b\ c'est\ \ y = \lambda e^{ax} - \frac{b}{a}$ avec $\lambda \in IR$

Exemples

1) la solution generale de l'eqation $y' = 3y + 7$ est

$y = \lambda e^{3x} - \frac{7}{3}$ avec $\lambda \in IR$

2) la solution generale de l'eqation $y' + 2y + 5 = 0$

$est\ y = \lambda e^{-2x} - \frac{5}{2}$ avec $\lambda \in IR$

Application :

1) Determiner la solution generale de l'eqation differentielle $y' + 7y + 11 = 0$
2) Determiner la solution de l'eqation differentielle $y' = \pi y + \sqrt{2}$ qui verifier $y(0) = -1$

II. L'equation differentielle de second ordre

1) L'equation differentielle $y'' + ay' + by = 0\ avec\ (a; b) \in IR^2$

Soient a et b deuc reels. L'equation $y'' + ay' + by = 0$ telle que l'incunnue est une fonction y deux fois derivables sur IR (ou sur un intervalle I de IR) s'appelle l'equation differentielle de scond ordre.

Cas particuliers :

- Si $a = b = 0$: dans ce cas l'equation differentielle $y'' + ay' + by = 0$ devient $y'' = 0$

Donc la solution generale de cette equation est $y = \alpha x + \beta$ avec $\alpha\ et\ \beta$ sont des reels

- Si $b = 0$: dans ce cas, l'equation differentielle $y'' + ay' + by = 0$ devient $y'' + ay' = 0$

Equivaut à $(y' + ay)' = 0\ donc\ \ (\exists b \in IR): y' + ay = b$ donc d'apres ce qui precede on obtient

$y = \lambda e^{ax} + \frac{b}{a}$ avec $\lambda \in IR$

- Si $a = 0\ et\ b > 0$: donc l'equation differentielle $y'' + ay' + by = 0$ devient $y'' + +\omega^2 y = 0$ avec $\omega = \sqrt{b}$

nous avons vu déjà la solution generale de cette equation differentielle c'est $y = \alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x)$ tels $(\alpha, \beta) \in IR^2$.

2) Resolution de l'equation differentielle $y'' + ay' + by = 0$

Théorème Soit (E) une équation différentielle linéaire du second ordre de la forme : (E) : ay″ + by′ + cy = 0

On appelle equation caractéristique de l'équation (E), l'equation défini par : $ar^2 + br + c = 0$

Soit Δ le discriminant du l'equation caractéristique

Les solutions de l'équation (E) dépend du nombre de racines du l'equation caractéristique

• Si $\Delta > 0$, l'equation caractéristique admet deux racines réelles r_1 et r_2 , alors les solutions de (E) peuvent se mettre sous la forme : $y(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$, $(\lambda, \mu) \in IR^2$

• Si $\Delta = 0$, l'equation caractéristique admet une racine double r_0 , alors les solutions de (E) peuvent se mettre sous la forme : $y(x) = (\lambda + \mu x)e^{r_0 x}$, $(\lambda, \mu) \in IR^2$

• Si $\Delta < 0$, l'equation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = r_0 + i\omega$ et $r_2 = r_0 - i\omega$, alors les solutions de (E) peuvent se mettre sous la forme : $y(x) = e^{r_0 x}[\lambda\, cos(\omega x) + \mu\, sin(\omega x)]$ $(\lambda, \mu) \in IR^2$

Exemple :

1) • Résoudre dans R : 2y″ − 5y′ + 2y = 0

On calcule le discriminant du polynôme caractéristique : Δ = 25 − 16 = 9.

• On calcule ses racines : $r_1 = \dfrac{5+3}{4} = 2$ et $r_1 = \dfrac{5-3}{4} = \dfrac{1}{2}$

• On obtient les solutions suivantes : $y(x) = \lambda e^{2x} + \mu e^{\frac{x}{2}}$

2) soit m un nombre reel fixé. On rescute selon les valeurs de m les solutions de l'equation differentielle :

$$(E_m): y" - 2y' + (1-m)y = 0$$

L'equation caracteristique de ED (E_m) est $r^2 - 2r + 1 - m = 0$. On a $\Delta = 4m$

• si $m = 0$ alors $\Delta = 0$ et l'equation caractéristique une solution double c'est $r = 1$ et par suite la solution generale de l'equation (E_0) $c'est$ $y(x) = (\lambda + \mu x)e^x$, $(\lambda, \mu) \in IR^2$

• si $m > 0$ alors $\Delta > 0$ et l'equation caractéristique admet deux racines reels differents $r_1 = 1 + \sqrt{m}$ et

$r_2 = 1 - \sqrt{m}$ et par suite la solution generale de l'équation differentielle (E_m) c'est :

$y(x) = \lambda e^{(1+\sqrt{m})x} + \mu e^{(1-\sqrt{m})x}$, $(\lambda, \mu) \in IR^2$

• si $m < 0$ alors $\Delta < 0$ et l'equation caractéristique admet deux racines complexes conjugués $r_1 = 1 + i\sqrt{-m}$ et

$r_2 = 1 - i\sqrt{-m}$ et par suite la solution generale de l'équation differentielle (E_m) c'est :

$y(x) = e^x[\lambda \cos(\sqrt{-m}\, x) + \mu \sin(\sqrt{-m}\, x)]\ (\lambda, \mu) \in IR^2$

Application

1) Resoudre les equations differentielles suivantes : $y'' + y' - 3y = 0$; $y'' - 2y = 0$; $y'' - 4y' + 3y = 0$

   $y'' + y' + y = 0$; $y'' + 4y' - 5y = 0$

2) Resoudre et Discuter selon les valeurs de m l'equation differentielle $(E_m): y'' - 2my' + my = 0$

Remarque : soient x_0 et $y_0 et$ z_0 $des\ reels\ et\ y\ une\ solution\ generale\ de\ l'equationdifferentielle$

$$(E): y'' + ay' + by = 0$$

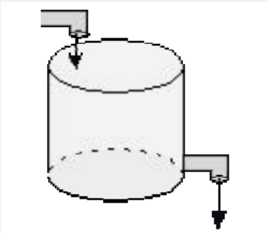
Il existe une solution unique de l'equation (E) verifie les conditions initiales suivantes : $\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = z_0 \end{cases}$

Exércice 1 **Problèmes de mélanges** On s'intéresse à la quantité q (t) d'une substance (sel, polluant, drogue, etc.) présente dans un environnement (réservoir, lac, patient, etc.) en supposant que cette substance peut être introduite dans l'environnement à un certain taux régulier (input) et qu'elle peut s'échapper de cet environnement à un autre taux (output). Comme dq dt représente le taux de variation de cette quantité, il est raisonnable de supposer qu'on

$$aura\ cette\ loi\ d'équilibre : \frac{dq}{dt} = input - output$$

Considérons l'exemple classique suivant :

Un réservoir contient initialement 500 litres d'eau pure. Ce réservoir est alimenté par un conduit qui fournit de l'eau à un débit de 4 litres/minute, avec une concentration de sel de 100 gr/litre. Un autre conduit, au bas du réservoir, laisse l'eau salée s'échapper du réservoir, à un rythme de 4 litres/minute.



Déterminez la quantité de sel présente dans le réservoir en fonction du temps. Donnez la quantité de sel dans l'eau après 10 minutes, et après une heure.

Correction

Soit $q(t)$: la quantité de sel (en kilogrammes) dans le réservoir au temps t (en minutes) q(t puisque l'eau est pure initialement

$$\frac{dq}{dt} = input - output$$

$$\begin{aligned} input &= le\ taux\ de\ variation\ de\ la\ quantité\ entrante \\ &= le\ débit\ \times la\ concentration \\ &= 4 \times \frac{litres}{minute} \times 100 \frac{grammes}{litre} = 400 \times \frac{gr}{min} \\ &= 0{,}4 \times \frac{kg}{min} \end{aligned}$$

On remarque que l'input est constant. Nous supposerons que la solution est maintenue uniforme par brassage.

À un instant t donné, la concentration dans le réservoir

$$est\ donnée\ par\ \frac{q(t)}{500} \times \frac{kg}{litre}.$$

$Comme\ l'eau\ du\ réservoir$ ayant cette concentration de sel quitte à un taux de 4 litres/minute, on peut déduire que :

$$output = \frac{q(t)}{500} \times \frac{kg}{litre} \times 4 \frac{litre}{min} = \frac{q(t)}{125} \times \frac{kg}{min}$$

Nous pouvons donc écrire l'équation différentielle de la quantité de sel dans l'eau :

$$\frac{dq}{dt} = 0{,}4 - \frac{q}{125}\ avec\ q(0) = 0$$

C'est une équation différentielle linéaire; nous en trouvons la solution générale :

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{125} = \frac{4}{10} \Rightarrow q(t) = 50 + Ce^{-\frac{t}{125}}$$

Puis utilisons la condition initiale pour trouver

$$q(t) = 50 - 50e^{-\frac{t}{125}}$$

Après 10 minutes, il y aura

$$q(10) = 50 - 50e^{-\frac{10}{125}} = 3{,}844kg$$

de sel dans ce réservoir.

Après une heure, il y aura

$$q(60) = 50 - 50e^{-\frac{60}{125}} = 19{,}061kg$$

de sel dans ce réservoir.

REMARQUE : Considérons le cas où le débit à la sortie est différent de celui à l'entrée; disons par exemple qu'il sort 3 litres/minute et qu'il entre 4 litres/minute. La concentration dans le réservoir, au temps t, sera

$$\frac{q(t)}{500+t}\ et\ non\ pas\ \frac{q(t)}{500}\ puisque$$, à chaque minute, le volume augmentera de 1 litre (débit à l'entrée - débit à la sortie) .

L'équation différentielle à résoudre est

$$\frac{dq}{dt} = 0{,}4 - \frac{4q}{500+t}$$

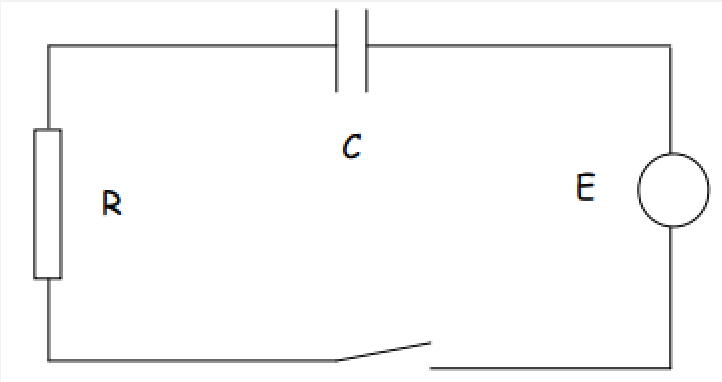
et sa solution donne

$$q(t) = \frac{2t}{25} + 40 - \frac{2{,}5 \times 10^{12}}{(t+500)^4}$$

Exércice 2

Charge d'un condensateur

On considère le montage électrique représenté par le schéma ci-dessous :



Le condensateur de capacité C = 4×10^{-4} F (farads) est monté en série avec un générateur dont la tension aux bornes est E = 6 V et un conducteur ohmique de résistance R = 88 Ω (ohms).

A l'instant initial le condensateur est déchargé et la tension est nulle à ses bornes. On ferme le circuit, et on s'intéresse à l'évolution de la tension u_c aux bornes du condensateur. D'après la loi d'Ohm et la loi d'addition des tensions, la tension u_c aux bornes du condensateur vérifie l'équation différentielle :

$$E = R \times C \times \frac{du_c}{dt} + u_c$$

. où t est le temps en secondes.

1) Ecrire une l'équation sous la forme y' = ay + b.

2) Résoudre cette équation en tenant compte des conditions initiales.

3) Donner la valeur de u_c au bout de 100 ms.

Correction

1) On pose $y = u_C$.

L'équation différentielle s'écrit alors : $E = RCy' + y$

Ou : $RCy' = -y + E$

$$ou\ y' = -\frac{1}{RC}y + \frac{E}{RC}$$

$$De\ la\ forme\ y' = ay + b\ avec\ a = -\frac{1}{RC}\ et\ b = \frac{E}{RC}$$

2) Les solutions générales de l'équation y' = ay + b

$$sont\ de\ la\ forme:\ y = ke^{at} - \frac{b}{a}\ avec\ k \in IR$$

$$Pour\ t = 0\ on\ a\ \ y(0) = 0 \Longrightarrow 0\ =\ k - \frac{b}{a} \Longrightarrow k = \frac{b}{a}$$

$$soit\ y =\ y = \frac{b}{a}(e^{at} - 1)$$

$$\frac{b}{a} = -E$$

$$On\ a\ donc\ u_C(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

3) Pout $t = 100\ ms = 100 \times 10^{-3} s\ =\ 0{,}1\ s$

$$u_C(0{,}1) = 6\left(1 - e^{-\frac{0{,}1}{88\times4\times10^{-4}}}\right) = 6\left(1 - e^{-\frac{1000}{88\times4}}\right)$$

$$= 6\left(1 - e^{-\frac{125}{44}}\right) \approx 5{,}65\ V$$

Exércice 3

1) Resoudre l'equation differentielle $y' - y = 0$ (1)

2) Soit f une fonction derivable sur IR telle que $f'(x) - f(x) = x$ (2)

   a) Determiner a et b pour que la fonction $f_0(x) = ax + b$ soit une solution de l'equation (2)

   b) Deduire toutes les solutions de l'equation (2) (poser $y = f - f_0$)

   c) Determiner l'unique solution f_1 de l'equation (2) qui verifie $f_1(0) = 0$

Correction

1) On a (1) $\Leftrightarrow y' = y$

Donc $y = \lambda e^x\ avec\ \lambda \in IR$

2)a) on a $f_0'(x) - f_0(x) = x \Leftrightarrow a - (ax + b) = x$

$$\Leftrightarrow -ax + a - b = x \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a - b = 0 \end{cases}$$

Et par suite $a = -1\ et\ b = -1$

b) resoudre l'equation (1)

$$on\ a\ f_0' - f_0 = x\ et\ f' - f = x \qquad (2)$$

donc $(f - f_0)' = f - f_0$

alors $f - f_0 = \lambda e^x\ avec\ \lambda \in IR$

et parsuite $f(x) = x - 1 + \lambda e^x\ avec\ \lambda \in IR$

c) determinantion de f_1

on a d'apres b) $f_1(x) = x - 1 + \lambda e^x\ avec\ \lambda \in IR$

$f_1(0) = 0$ donc $-1 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$

Et pae suite $f_1 = x - 1 + e^x$