CHAPITRE

3

Généralités sur les fonctions numériques

Situation problème

Une entreprise a des coûts $C(x) = x^2 + 20x + 700$ et des revenus $R(x) = 100x$ pour x articles.

1. Quand réalise-t-elle un bénéfice ($R(x) > C(x)$) ?
2. Quel est son bénéfice maximal ?

Plan du chapitre 3

I- Fonction majorée-Fonction minorée-Fonction bornée 42
II- Fonction périodique 44
III- Extremums d'une fonction 46
IV- Monotonie d'une fonction 46
V- Représentation graphique des fonctions $x \longmapsto \sqrt{x+a}$ et $x \longmapsto ax^3$ 48
VI- Comparaison de deux fonctions 50

COURS

I Fonction majorée-Fonction minorée-Fonction bornée

Activité :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

1. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R});\ f(x) < 1$
2. L'équation $f(x) = 1$ admet-elle une solution dans $\mathbb{R}$?
3. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R});\ f(x) \geq 0$
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$
5. En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R});\ 0 \leq f(x) < 1$

Solution:

Définition 1:

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de D_f .

— On dit que f est majorée sur I s'il existe un réel M tel que : $(\forall x \in I), f(x) \leq M$.Le réel M s'appelle un **majorant** de f sur I.

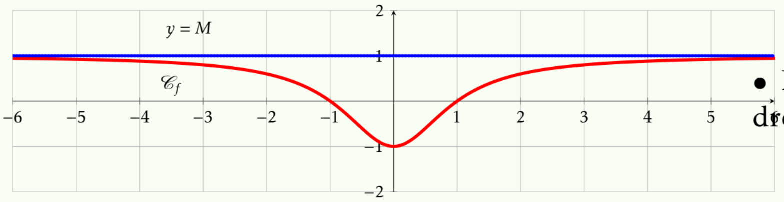
— On dit que f est minorée sur I s'il existe un réel m tel que : $(\forall x \in I), f(x) \geq m$.Le réel m s'appelle un **minorant** de f sur I.

— On dit que f est bornée sur I s'il existe deux réels M et m tel que : $(\forall x \in I), m \leq f(x) \leq M$

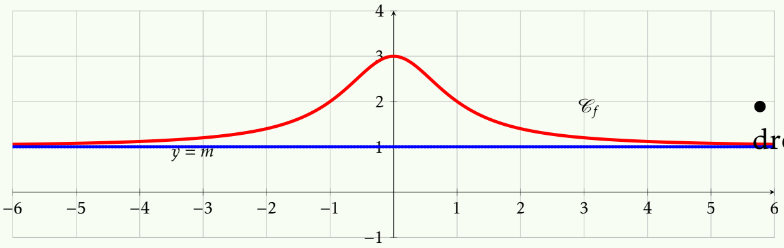
Propiété 1:

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de D_f.
La fonction f est bornée sur l'intervalle I si et seulement s'il existe un réel positif M tel que :$(\forall x \in I), |f(x)| \leq M$

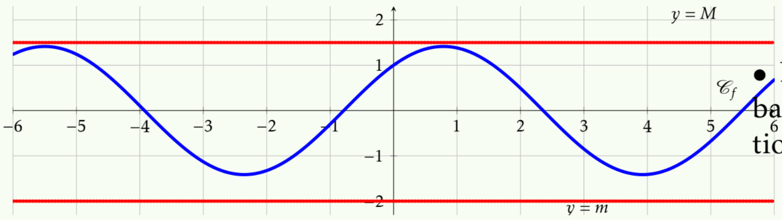
Exemple 1:



- La courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessous de la droite d'équation $y := M$.



- La courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessus de la droite d'équation $y := m$.



- La courbe $\mathscr{C}_f$ est inclus dans la barre définie par les droites d'équations $y = m$ et $y = M$

Application :

On considère les fonctions f et g définies par : $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^2+1}$ et $g(x) = \dfrac{x+1}{x^2+3}$

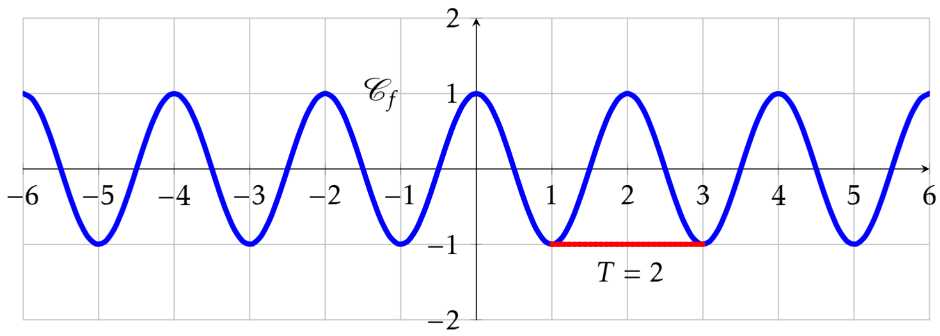
1. Montrer que f est majorée par $\frac{3}{2}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que g est minorée par 1 sur $\mathbb{R}$.

Solution:

II Fonction périodique

Activité :

1 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la courbe représentative ci-dessous :



- **a** Vérifier que : $f(1) = f(3)$; $f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right)$ et $f(1) = f(3)$;
- **b** Quelle est la relation entre $f(x+2)$ et $f(x)$ où $x \in \mathbb{R}$?

2 La fonction représentée ci-dessus est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos(\pi x)$.

- **a** Confirmer les résultats de la question **1-a)**.
- **b** Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})$; $(x-2) \in \mathbb{R}$ et $(x+2) \in \mathbb{R}$ et $f(x-2) = f(x+2) = f(x)$.**On dit dans ce cas que la fonction f est périodique de période** $T = 2$

Solution:

Définition 1:

Une fonction f est dite périodique de période T si et seulement si , pour tout réel $x \in D_f$, on a : $(x+T) \in D_f \wedge f(x+T) = f(x)$

Remarque 1:

Si f est définie sur D_f et périodique de période T alors il suffit de l'étudier sur $D_f \cap [0;T]$ ou $D_f \cap \left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right]$.

Exemple 1:

— La fonction $x \mapsto \cos(x)$ est périodique de période $T = 2\pi$;
— La fonction $x \mapsto \sin(x)$ est périodique de période $T = 2\pi$;
— La fonction $x \mapsto \tan(x)$ est périodique de période $T = \pi$.

Application :

Soit f une fonction périodique de période $T = 3$ et définie sur $\left[0;\frac{3}{2}\right]$ par : $f(x) = x^2 - x$.

1. Calculer $f(2026)$ et $f(1447)$.
2. Déterminer l'expression $f(x)$ sur $\mathbb{R}$

Solution:

Application :

1. Soit a un réel strictement positif. Montrer que les fonctions $x \mapsto \cos(ax)$ et $x \mapsto \sin(ax)$ sont périodiques et de période $T = \frac{2\pi}{a}$.
2. Déterminer la période de chacune des fonctions suivantes : $f : x \mapsto \cos\left(\frac{1}{3}x\right)$ et $g : x \mapsto \sin(2x)$

Solution:

III Extremums d'une fonction

Définition 1:

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de D_f et $x_0 \in I$.

- $f(x_0)$ est le **minimum** de f sur I si et seulement si : $(\forall x \in I), f(x) \geq f(x_0)$ et on écrit : $f(x_0) = \min_{x \in I} f(x)$
- $f(x_0)$ est le **maximum** de f sur I si et seulement si : $(\forall x \in I), f(x) \leq f(x_0)$ et on écrit : $f(x_0) = \max_{x \in I} f(x)$.
- Le maximum et le minimum sont appelés les **extremums** de la fonction f.

Application :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

1. Montrer que $\frac{1}{2}$ est une valeur maximale de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $-\frac{1}{2}$ est une valeur minimale de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Solution:

IV Monotonie d'une fonction

Définition 1:

Soit une fonction f définie sur un intervalle I. ▸ f est croissante sur $I \Leftrightarrow (\forall (a;b) \in I^2), a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$.

- ▸ f est décroissante sur $I \Leftrightarrow (\forall (a;b) \in I^2), a < b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$.
- ▸ f est strictement croissante sur $I \Leftrightarrow (\forall (a;b) \in I^2), a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$.
- ▸ f est strictement décroissante sur $I \Leftrightarrow (\forall (a;b) \in I^2), a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$.
- ▸ f est monotone sur I si elle est croissante ou décroissante sur I.
- ▸ f est strictement monotone sur I si elle est strictement croissante ou décroissante sur I.

1. Taux de variations :

Définition 1:

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et soient a et b deux nombres distincts de l'intervalle I.
Le nombre $T(a;b) = \dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$ s'appelle le taux de variation de la fonction f entre a et b .

Propiété 1:

Soit une fonction f définie sur un intervalle I .
- f est croissante sur I si et seulement si, quels que soient les nombres distinct a et b de I on a : $T(a;b) \geq 0$
- f est strictement croissante sur I si et seulement si, quels que soient les nombres distinct a et b de I on a : $T(a;b) > 0$
- f est décroissante sur I si et seulement si, quels que soient les nombres distinct a et b de I on a : $T(a;b) \leq 0$
- f est strictement décroissante sur I si et seulement si, quels que soient les nombres distinct a et b de I on a : $T(a;b) < 0$

Propiété 2:

Soit f une fonction définie sur un ensemble D_f symétrique par rapport à 0 et soient $I \subset D_f \cap \mathbb{R}^+$ et I' son symétrique par rapport à 0.
- Soit f paire, on a : si f est croissante sur I alors f est décroissante sur I' et si f est décroissante sur I alors f est croissante sur I'
- Soit f impaire, on a : si f est croissante sur I alors f est croissante sur I' et si f est décroissante sur I alors f est décroissante sur I'

Propiété 3: (Sens de variation de la fonction $f+\lambda$)

oit f une fonction définie sur un intervalle I et λ un réel. Si f est monotone sur I alors f et $f+\lambda$ ont même sens de variation sur I.

Propiété 4: (Sens de variation de la fonction λf)

oit f une fonction définie et monotone sur un intervalle I et λ un réel.
- Si $\lambda > 0$ alors les fonctions f et λf ont même sens de variation sur I.
- Si $\lambda < 0$ alors les fonctions f et λf ont des sens de variation contraires sur I.

Application :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 2|x| + 3$

1. Montrer que la fonction f est paire.
2. Montrer que la fonction f est minorée par le nombre 2.
3. Montrer que la fonction f est croissante sur $]1;+\infty[$ et décroissante sur $[0;1]$.
4. En déduire les variation de la fonction f sur les intervalles $]-\infty\,;-1\,]$ et $]-1;\,0]$.

Première année du baccalauréat Sciences Mathématiques
Prof: M.Mohammed

Solution:

V Représentation graphique des fonctions $x \longmapsto \sqrt{x+a}$ et $x \longmapsto ax^3$

Définition 1:

La courbe représentative de la fonction f dans un repère est l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$ où x parcourt le domaine de définition $\mathbb{D}$ de la fonction f.Elle est souvent notée $\mathcal{C}_f$
L'équation de cette courbe représentative est : $y = f(x)$.
La courbe représentative de la fonction carrée s'appelle une parabole et celle de la fonction inverse une hyperbole.

1. Étude de la fonction $x \longmapsto \sqrt{x+a}$ où $a \in \mathbb{R}$

Activité :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{x+a}$ où $a \in \mathbb{R}$ et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer D_f.
2. Étudier les variations de f.
3. Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ pour $a = 0$ et pour $a = 2$.
(On remarque que la courbe $\mathscr{C}_2$ est une image de $\mathscr{C}_0$ par la translation de vecteur $-2\vec{i}$**)**

Première année du baccalauréat Sciences Mathématiques
Prof: M.Mohammed

Solution:

Propiété 1:

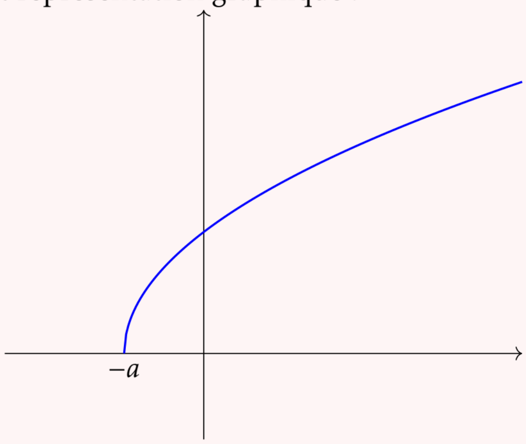
Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x+a}$.

— L'ensemble de définition de la fonction f est : $D_f = [-a;+\infty[$.

— La fonction f est croissante sur D_f.

x	$-a$	$+\infty$
$f(x)$	0 $\nearrow$	$+\infty$

— Tableau de variations et représentation graphique :



2. Étude de la fonction $x \longmapsto ax^3$ où $a \in \mathbb{R}^*$

Activité :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = ax^3$ où $a \in \mathbb{R}^*$ et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Étudier la parité de f.
2. Étudier les variations de f.

3 Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ pour $a = 1$.

Solution:

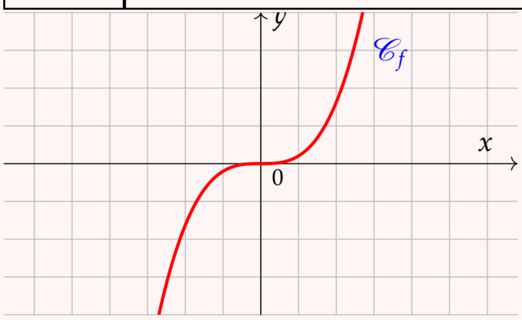
Propiété 1:

Soit f la fonction par $f(x) = ax^3$ tel que $a \neq 0$.

— L'ensemble de définition de la fonction f est : $D_f = \mathbb{R}$.
— La fonction f est impaire.
— Tableau de variations et représentation graphique :

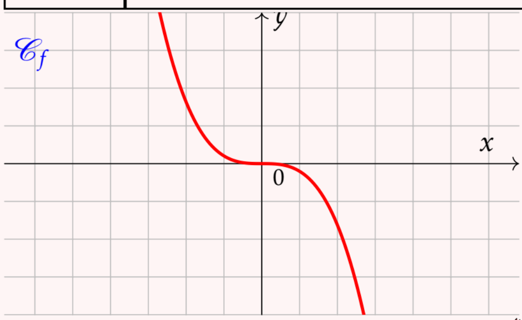
Si $a > 0$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↗	0	↗



Si $a < 0$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	0	↘

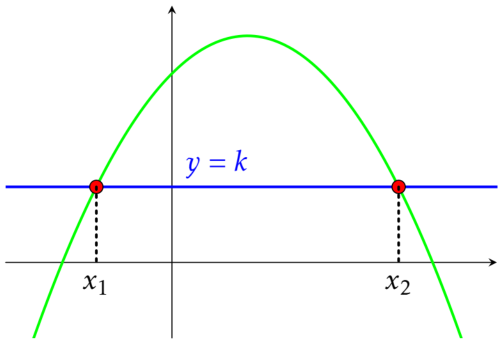


VI Comparaison de deux fonctions

1. Résolution d'une équation

a - Résolution d'équation $f(x) = k$

On trace la droite d'équation $y = k$ et on lit les abscisses des points d'intersection avec la courbe.



Donc l'ensemble des solutions de cette équation est :

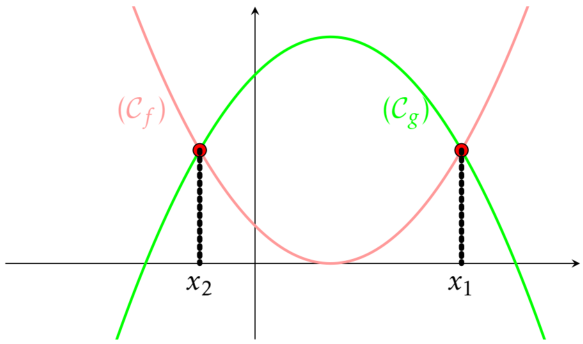
....

....

....

b - Résolution d'équation $f(x) = g(x)$

On trace les deux courbes (C_f) et (C_g) et on lit les abscisses des points d'intersection.



Donc l'ensemble des solutions de cette équation est :

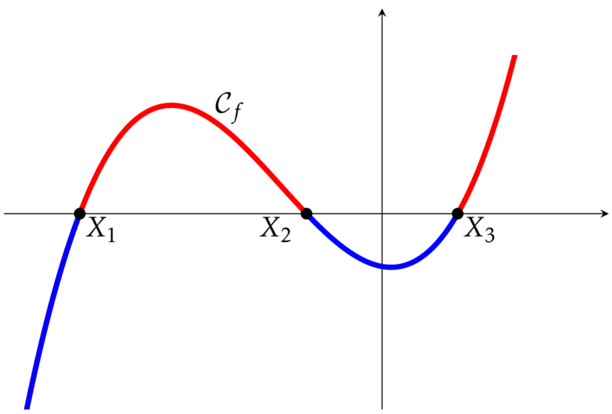
....

....

....

2. Résolution d'une inéquation

a - Résolution d'inéquation $f(x) > 0$



Donc l'ensemble des solutions de cette inéquation est :

....

....

....

b - Résolution d'inéquation $f(x) \leq g(x)$

Activité :

Soit f et g deux fonctions définies par : $f(x) = x + \dfrac{1}{x+1}$ et $g(x) = x$.

1. Déterminer D_f et D_g.
2. Étudier le signe de $f(x) - g(x)$.
3. Comparer f et g.

Solution:

Définition 1:

Soient f et g deux fonctions. On dit que f et g sont égales et on note $f = g$ si :$D_f = D_g = D$ et $(\forall x \in D) \qquad f(x) = g(x)$

Exemple 1:

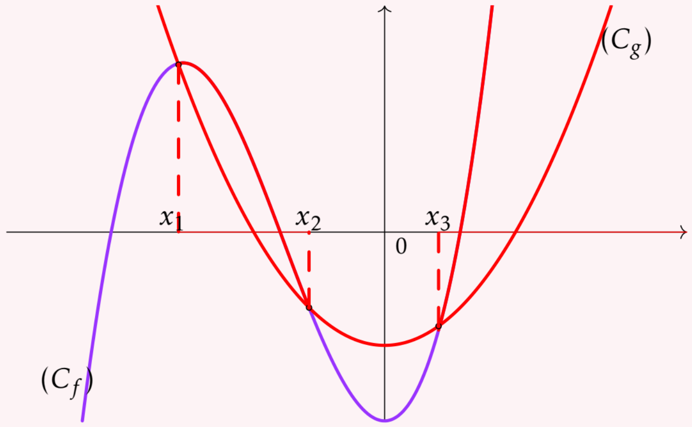
Les fonctions u et v sont-elles égales ?

1. u et v sont définies par $u(x) = 3 - \dfrac{2}{x+1}$ et $v(x) = \dfrac{3x+1}{x+1}$
   ....
   ....
   ....
   ....
2. u et v sont définies par $u(x) = x$ et $v(x) = \dfrac{x^2}{x}$
   ....
   ....
   ....
   ....

Prof: M.Mohammed

Définition 2:

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I tel que $I \subset D_f \cap D_g$.
On dit que f est supérieure ou égale à g sur I si et seulement si : $(\forall x \in I)\ f(x) \geq g(x)$



On a : $\forall x \in [x_1;x_2] \cup [x_3;+\infty[;\ f(x) \geq g(x)$
Autrement dit, l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leq g(x)$ est : $[x_1;x_2] \cup [x_3;+\infty[$
l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < g(x)$ est : $]x_1;x_2[\cup]x_3;+\infty[$

Remarque 1:

L'inéquation $f(x) \leq g(x)$ est un cas particulier d'inéquation $f(x) \leq g(x)$ avec g la fonction constante $g(x) = k$

Application :

Soient f et g deux fonctions définies par : $f(x) = x^2 - 4x + 5$ et $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ et $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1. Donner le tableau de variations de f et celui de g.
2. Calculer $f(3)$ et $g(3)$.
3. Tracer $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ dans le même repère.
4. Résoudre graphiquement l'inéquation $g(x) \leq f(x)$.
5. Montrer que : $\forall x \in]3;+\infty[; g(x) < f(x) \Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 8x - 6 > 0$
6. En déduire les solutions de l'inéquation : $x^3 - 5x^2 + 8x - 6 > 0$ dans l'intervalle $]1;+\infty[$
7. Résoudre, algébriquement, dans $]1;+\infty[$ l'inéquation : $P(x) > 0$ où $P(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 6$. **(On donne** $P(3) = 0$)

Solution: