MATHÉMATIQUES

1^{re} année du baccalauréat SM-SIBM

Préparé par : M.Slimane TACHROUN

Chapitre 1

Notions de logique

Capacités attendues

— Transformer un énoncé mathématique en écriture symbolique en utilisant les connecteurs et les quantificateurs logiques et inversement ;

— Utiliser le type de raisonnement convenable selon la situation étudiée ;

— Rédiger des raisonnements et des démonstrations mathématiques claires et logiquement correctes.

1.1 Notion de la proposition - Fonction propositionnelle :

1.1.1 Notion de la proposition

Vous rencontrez de nombreux énoncés mathématiques comme :
E0 : $b^2 - 4ac$.
E1 : $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.
E2 : $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$
E3 : L'équation $5x + 7 = 0$ admet une solution dans $\mathbb{Z}$.

1. Déterminer parmi ces énoncés ceux qui ont un sens vrai , ceux qui ont un sens faux et ceux qui ont un sens qui peut être , en même temps, vrai et faux.
2. Recopier le tableau ci-dessous et inscrire chacun des codes : E0, E1, E2 et E3 des énoncés ci-dessus dans la colonne convenable :

proposition vraie	proposition fausse	n'est pas une proposition

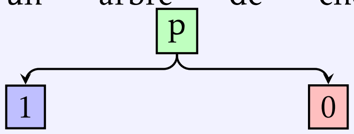
3. Donner deux exemples d'une proposition vraie et d'autres d'une proposition fausse.
4. Donner une définition d'une proposition.

Définition 1.1.1. On appelle une **proposition** un énoncé mathématique (texte mathématique) qui a un sens pouvant être vrai ou faux (mais pas les deux en même temps). Et , on note souvent une proposition par les lettres P , Q ou R …etc .

Table de vérité

Soit P une proposition. On affecte à P le nombre 1 si elle est vraie et 0 si elle est fausse. On schématise ce fait par :

un arbre de choix :



un tableau appelé table de vérité de P :

P		P
1	ou	V
0		F

Exemple 1.1.2. — La proposition P : "La somme de deux entiers consécutifs est un nombre impair" est vraie.
- — La proposition Q : "Le nombre π est rationnel" est fausse.
- — La v R : "L'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$" est vraie.
- — "$(m; n) \in \mathbb{N}^2; m - n = 5$" n'est pas une proposition car on ne peut dire si elle est vraie ou fausse.

1.1.2 Fonction propositionnelle

On considère les énoncés mathématiques suivants :
$P(x) : (x \in \mathbb{R}); \sqrt{x^2+4} = x + 2$
$Q(x; y) : \left((x; y) \in \mathbb{R}^2\right); x + y = xy$
L'énoncé $P(x)$ contient une variable x et $Q(x; y)$ contient deux variables x et y.

1. Déterminer la valeur de vérité de $P(0)$ et celle de $P(1)$.
2. Déterminer la valeur de vérité de $Q(2; 2)$ et celle de $Q(-1; 1)$.
3. les énoncés $P(x)$ et $Q(x; y)$ s'appellent des **fonctions propositionnelles**.
   Donner un exemple d'une fonction propositionnelle à une variable et un autre d'une fonction propositionnelle à deux variables.
4. Donner une définition d'une fonction propositionnelle.

Définition 1.1.3. On appelle une **fonction propositionnelle** toute phrase ou énoncé mathématique dépendant d'une (ou plusieurs) variable appartenant à un ensemble donné; elle peut être une proposition lorsque on substitue cette variable par un élément déterminé de cet ensemble .

Selon le nombre de variables , une **fonction propositionnelle** est généralement désignée par : $P(x)$, $Q(x;y)$ ou $R(x;y;z)\dots$ etc

Exemple 1.1.4.
— $P(x) : (x \in \mathbb{N}); x^2 + x = 2$ est une fonction propositionnelle et on a $P(1)$ est vraie et $P(0)$ est fausse.
— $P(a;b) : (a \in \mathbb{R})(b \in \mathbb{R}); a^2 + b^2 = 2$ est une fonction propositionnelle et on a $P(-1;1)$ est vraie et $P(0;2)$ est fausse.

1.1.3 Les quantificateurs :

Quantificateur universel - Quantificateur existentiel

Définition 1.1.5. Soit $P(x)$ une fonction propositionnelle d'une variable x d'un ensemble E.
À partir de la fonction propositionnelle ⊠$(x \in E), P(x)$⊠ , on définit :
— La proposition ⊠$(\exists x \in E), P(x)$⊠ qui se lit "il existe au moins $x \in E$ tel que $P(x)$" et qui est vraie lorsqu'il existe au moins $x \in E$ vérifiant la propriété $P(x)$.
Le symbole $\exists$ s'appelle **le quantificateur existentiel** .
— La proposition $\forall x \in E), P(x)$⊠ qui se lit "pour tout $x \in E$ on a $P(x)$ " ou "quel que soit $x \in E$ on a $P(x)$ " et qui est vraie lorsque tous les éléments de E vérifient la propriété $P(x)$.
Le symbole $\forall$ s'appelle **le quantificateur universel** .

Exemple 1.1.6.
— la proposition P : " Il existe un réel x tel que $x^2 = 1$" est vraie .
Justification : Le nombre réel $x = -1$ vérifie l'égalité $x^2 = 1$.
— La proposition Q : " Pour tout réel positif x, on a $x^2 \geq x$" est fausse.
Justification : Le nombre réel $x = \dfrac{1}{2}$ ne vérifie pas l'inégalité $x^2 \geq x$.
— La proposition S : ⊠$(\exists x \in \mathbb{R}); x^2 = -1$⊠ est fausse (aucun réel au carré ne donnera un nombre négatif)

Proposition à plusieurs quantificateurs :

Exemple 1.1.7.
— La proposition : " pour chaque entier naturel, on peut trouver un entier naturel strictement plus grand " peut s'écrire sous forme : $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N})/m > n$.
(cette proposition est vraie)
— La proposition : " il y a un entier naturel plus grand que tous les entiers naturels" peut s'écrire sous forme : $(\exists m \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})/m > n$.
(cette proposition est fausse)

Remarque 1.1.8.
- On peut permuter des quantificateurs de même nature.
- On ne peut pas permuter des quantificateurs de natures différentes.

Exemple 1.1.9. Voici une phrase vraie " Pour toute personne, il existe un numéro de téléphone ", bien sûr le numéro dépend de la personne. Par contre cette phrase est fausse : " Il existe un numéro, pour toutes les personnes ". Ce serait le même numéro pour tout le monde !

1.2 Les connecteurs logiques :

1.2.1 Connecteur logique

Définition 1.2.1. Un connecteur logique est une opération qui à deux propositions associe une troisième.

1.2.2 Négation d'une proposition :

Définition

Définition 1.2.2. Soit P une proposition, la négation de P est la proposition notée $\overline{P}$ ou *non*(
elle est vraie si et seulement si P est fausse, comme le montre la table
vérité du connecteur $\overline{P}$:
Remarque : $\overline{\overline{P}}$ et P ont la même valeur de vérité

p	$\overline{P}$
1	0
0	1

Exemple 1.2.3.
— On a P : «$3 \in \mathbb{Z}$» alors $\overline{P}$: «$3 \notin$ *mathbbZ*».
— On a Q : «$3+5=8$» alors $\overline{Q}$: «$3+5 \neq 8$»
— On a R : «$3 \times 8 < 10$» alors $\overline{R}$: «$3 \times 8 \geq 10$».
— On a S : «$\{3;8;10\} \subset \mathbb{N}$» alors $\overline{S}$: «$\{3;8;10\} \not\subset \mathbb{N}$».

Négation de la proposition quantifiée

Intuitivement :

— La négation de "Tous les éléments de l'ensemble E vérifient la propriété P" est "Il y a au moins un élément de E qui ne vérifie pas P".
— La négation de "Il y a au moins un élément de E pour lequel la propriété P est vraie" est "Pour tous les éléments de E, la propriété P est fausse".

Formellement :

— La négation de " $(\forall x \in E)$, on a $P(x)$" est " $(\exists x \in E)$ tel que $\overline{P(x)}$".
— La négation de "$(\exists x \in E)$ tel que $P(x)$" est "$(\forall x \in E)$, on a $\overline{P(x)}$".

La règle à retenir est la suivante :

Pour nier une expression commençant par ”il existe” on transforme le ”il existe” en ”pour tout” et on nie ce qui suit.
Pour nier une expression commençant par ”pour tout”, on transforme le ”pour tout” en ”il existe” et on nie ce qui suit.

Exemple 1.2.4. — La négation de ”pour tout entier naturel n, on a $n^2 \geq n$” est ”il existe un entier naturel n tel que $n^2 < n$”.

— La négation de la proposition ”Il existe un réel x tel que $x^2 = 0$” est ”Pour tout réel x, $\overline{(x^2 = 0)}$” c'est à dire ”Pour tout réel x, $x^2 \neq 0$”.

— La négation de $\forall x \in, \exists y \in, x + y = 0$ est $\exists x \in, \forall y \in, x + y \neq 0$

1.2.3 Conjonction

Définition 1.2.5. La conjonction est un connecteur logique qui à deux propositions P et Q associe la proposition $(P \wedge Q)$ qu'on appelle la conjonction de P et Q et qu'on lit P et Q définie par la table de vérité ci-contre :

P	Q	$(P \wedge Q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Exemple 1.2.6. — La proposition P : ⊠$5 + 2 = 7 \wedge 2 \times 5 < 11$⊠ est vraie.

— La proposition Q : ⊠$\{5; \frac{1}{5}\} \subset \mathbb{N} \wedge 2 \times 5 = 10$⊠ est fausse.

1.2.4 Disjonction

Définition 1.2.7. La disjonction est un connecteur logique qui à deux propositions P et Q associe la proposition $(P \vee Q)$ qu'on appelle la disjonction de P et Q et qu'on lit P ou Q définie par la table de vérité ci-contre :

P	Q	$(P \vee Q)$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Exemple 1.2.8. — la proposition P : ⊠$5 + 2 \neq 7 \vee 2 \times 5 > 11$⊠ est fausse.

— la proposition Q : ⊠$\{5; \frac{1}{5}\} \subset \mathbb{N} \vee 2 \times 5 = 10$⊠ est vraie.

1.2.5 Implication

Définition 1.2.9. • L'implication est un connecteur logique qui à deux propositions P et Q associe la proposition notée $(P \Rightarrow Q)$ et dont la valeur de vérité est celle de la proposition $(\overline{P} \vee Q]$ on lit : ”P implique Q” ou ”si P alors Q”.
$(P \Rightarrow Q)$ est alors définie par la table de vérité ci-contre.

P	Q	$(P \Rightarrow Q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

• L'implication ”$Q \Rightarrow P$ ” est appelée la réciproque de l'implication ”$P \Rightarrow Q$ ”
Une implication et sa réciproque peuvent ne pas avoir la même valeur de vérité par suite l'implication n'est pas commutative.
• La contraposée d'une implication $(P \Rightarrow Q)$ est l'implication $(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$
Une implication et sa contraposée ont la même valeur de vérité.

Exemple 1.2.10. — "$4^2 = 16 \Rightarrow 5 = -2$" est une proposition fausse.
— "Si $3 < 0$ alors 4 est un nombre pair " est une proposition vraie.

1.2.6 Équivalence

Définition 1.2.11. L'équivalence logique est un connecteur logique qui à deux propositions P et Q associe la proposition notée $(P \Leftrightarrow Q)$ et dont la valeur de vérité est celle de la proposition $[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)]$ on lit : P équivalent à Q ou P si et seulement si Q
$(P \Leftrightarrow Q)$ est alors définie par la table de vérité ci-contre.

P	Q	$(P \Leftrightarrow Q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Exemple 1.2.12. — $P : 8^2 + 6^2 = 10^2 \Leftrightarrow 5 < 20$ est une proposition vraie.
— $Q : \sqrt{4^2 + 2^2} = 4 + 2 \Leftrightarrow 3 > 2$ est une proposition fausse.

1.3 Les lois logiques

Définition 1.3.1. Les lois logiques sont des propositions formées de plusieurs propositions $A, B, C \ldots$, liées entre elles par les connecteurs logiques et qui sont toujours vraies quelque soit la valeur de vérité des propositions $A, B, C \ldots$

Propriété 1.3.2.
- $(P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P)$ *on dit que la conjonction des propositions est commutative.*
- $[(P \wedge Q) \wedge R)] \Leftrightarrow [P \wedge (Q \wedge R)]$ *on dit que la conjonction des propositions est associative.*
- $(P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee P)$ *on dit que la disjonction des propositions est commutative.*
- $[(P \vee Q) \vee R)] \Leftrightarrow [P \vee (Q \vee R)]$ *on dit que la disjonction des propositions est associative.*
- $\overline{(P \vee Q)} \Leftrightarrow (\overline{P} \wedge \overline{Q})$
- $\overline{(P \wedge Q)} \Leftrightarrow (\overline{P} \vee \overline{Q})$
- $[P \vee (Q \wedge R)] \Leftrightarrow [(P \vee Q) \wedge (P \vee R)]$
- $[P \wedge (Q \vee R)] \Leftrightarrow [(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)]$ *On dit que la conjonction et la disjonction sont distributives l'une par rapport à l'autre.*

1.4 Les grands types de raisonnement :

1.4.1 Le raisonnement par équivalences successives

Propriété 1.4.1. *Soient P, Q et R trois propositions. On a :* $[(P \Leftrightarrow R) \wedge (R \Leftrightarrow Q)] \Rightarrow (P \Leftrightarrow Q)$

Exemple 1.4.2. Montrer que : $\left(\forall\,(a;b) \in \mathbb{R}^{+} \times \mathbb{R}^{+}\right);\ a+b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \wedge b = 0$
En déduire que : $\left(\forall\,(x;y) \in \mathbb{R}^{2}\right);\ \sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} = 2 \Leftrightarrow x = 0 \ \wedge \ y = 0$

1.4.2 Le raisonnement par disjonction des cas

Propriété 1.4.3. *Soient P, Q et R trois propositions. On a :* $[(P \vee Q) \Rightarrow R] \Leftrightarrow [(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)]$

Remarque 1.4.4. Si l'on souhaite vérifier une propriété $P(x)$ pour tous les x dans un ensemble E, on montre la propriété pour les x dans une partie A de E, puis pour les x n'appartenant pas à A. C'est la méthode de disjonction ou du cas par cas.

Exemple 1.4.5. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N});\ n\,(n+1)$ est paire.

1.4.3 Le raisonnement par l'absurde

Propriété 1.4.6. *Soient p et q deux propositions. On a :* $[(\overline{p} \Rightarrow q) \wedge (\overline{p} \Rightarrow \overline{q})] \Rightarrow p$

Remarque 1.4.7. On veut montrer qu'une proposition p est vraie. On suppose que c'est sa négation $\overline{p}$ qui est vraie et on montre que cela entraîne une proposition fausse. On en conclut que p est vraie (puisque q est fausse, l'implication $\overline{p} \Rightarrow q$ ne peut être vraie que si $\overline{p}$ est fausse ou encore si p est vraie).
Le schéma du raisonnement par l'absurde est le suivant :
Quand $\overline{p} \Rightarrow q$ est une proposition vraie, et q est une proposition fausse, on peut affirmer que p est une proposition vraie.

Exemple 1.4.8. Montrer que : $\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$.

1.4.4 Le raisonnement par contraposée

Propriété 1.4.9. *Soient p et q deux propositions. On a :* $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{q})$

Remarque 1.4.10. Le schéma est le suivant :
Pour montrer que $p \Rightarrow q$ est une proposition vraie, il (faut et) il suffit de montrer que $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ est une proposition vraie

Exemple 1.4.11. montrer que $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in]2, +\infty[, \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{x}^2 - 4\mathbf{x} \neq \mathbf{y}^2 - 4\mathbf{y}$. On utilise un raisonnement par contraposée pour cela on démontre : $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in]2, +\infty[, \mathbf{x}^2 - 4\mathbf{x} = \mathbf{y}^2 - 4\mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$ Soients x et y de $]2, +\infty[$ tel que $x^2 - 4x = y^2 - 4y$

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^2 - 4\mathbf{x} = y^2 - 4\mathbf{y} &\Rightarrow \mathbf{x}^2 - 4x + 4 = y^2 - 4y + 4 \\
&\Rightarrow (x-2)^2 = (y-2)^2 \\
&\Rightarrow \mathbf{x} - 2 = y - 2 \text{ et } x - 2 = -(y-2) \\
&\Rightarrow \mathbf{x} = y \text{ et } \mathbf{x} + \mathbf{y} - 4 = 0 \\
&\Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}
\end{aligned}$$

$x + y - 4 = 0$ est impossible car $x > 2$ et $y > 2$ d'où $x + y > 4$ ou encore $x + y - 4 > 0$ Donc $x^2 - 4x = y^2 - 4y \Rightarrow x = y$ est une implication vraie c.à.d. l'implication contraposée est vraie Conclusion : $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in]2, +\infty[, \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{x}^2 - 4\mathbf{x} \neq \mathbf{y}^2 - 4\mathbf{y}$

Exemple 1.4.12. Soient a et b deux réels tels que $a \neq -b$, montrer que : $a \neq -\frac{1}{2}b \Rightarrow \frac{a-b}{a+b} \neq -3$

1.4.5 Le raisonnement par récurrence

Principe de récurrence :

Soient $n_0 \in$ et $P(n)$ une propriété portant sur les entiers $n \geq n_0$. La propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$ si et seulement si :
1. $P(n_0)$ est vraie.
2. pour $n \geq n_0$ si $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ est vraie.

Exemple 1.4.13. bo Exemple : montrer que : pour tout **n** de $\mathbb{N}$ on a 3 divise $\mathbf{n}^3 - \mathbf{n}$ (c.à.d. $3 \mid \overline{(\mathbf{n}^3 - n)}$ (1)) Remarque : $3 \mid (\mathbf{n}^3 - \mathbf{n}) \Leftrightarrow \exists \mathbf{k} \in \mathbb{N} / \mathbf{n}^3 - \mathbf{n} = 3\mathbf{k}$ - On vérifie que la relation (1) est vraie pour $\mathbf{n} = \mathbf{0}$. Pour $\mathbf{n} = 0$ on a $\mathrm{n}^3 - \mathrm{n} = 0^3 - 0 = 0 = 3 \times 0$ donc $3 \mid (0^3 - 0)$ d'où la relation (1) est vraie pour $\mathrm{n} = 0$ - On suppose que : la relation (1) est vraie pour n (et **n** de $\mathbb{N}$) c.à.d. $3 \mid (\mathbf{n}^3 - \mathbf{n})$, (ou $\exists \mathbf{k} \in \mathbb{N} / \mathbf{n}^3 - \mathbf{n} = \mathbf{3k}$). hypothèse de récurrence - On démontre que : la relation (1) est vraie pour $\mathbf{n}+1$ (c.à.d. $3 \mid ((\mathbf{n}+1)^3 - (\mathbf{n}+1))$ est vraie

) On a :
$$\begin{aligned}(n+1)^3 - (n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 \\ &= n^3 - n + 3n^2 + 3n \\ &= 3k + 3\left(n^2 + n\right) \quad \text{(hypothèse de récurrence)} \quad (\mathbf{K} = \mathbf{k} + \mathbf{n}^2 + \mathbf{n} \in \mathbb{N} \\ &= 3\left(k + n^2 + n\right) \\ &= 3K \quad \left(K = k + n^2 + n \in \mathbb{N}\right)\end{aligned}$$

Donc : $(n+1)^3 - (n+1) = 3K$ par suite $3 \mid ((n+1)^3 - (n+1))$ D'où la relation (1) est vraie pour $n+1$ Conclusion $\forall \mathbf{n} \in \mathbb{N} : 3 \mid (\mathbf{n}^3 - \mathbf{n})$

Exemple 1.4.14. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $2^n \geq n + 1$

Symboles $\sum$ et $\prod$ et les letties grecque :

a. Symbole $\sum$: La somme suivante : $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \cdots + \mathbf{a}_\mathbf{n}$ on la note par $\sum_{i=1}^{i=n} a_i$ (on utilise i ou j ou k sont des variables muettes) - Exemple 1 : $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = \sum_{i=1}^{i=n} 2\mathbf{i}$ (cet une somme qui est constitué par $n+1$ termes). - Exemple 2 : $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n+1) = \sum_{i=0}^{i=n} (2i+1)$ (cet une somme qui est constitué par n termes). - Propriétés :

$$* \sum_{j=0}^{j=n} \left(a_j + b_j\right) = \sum_{j=0}^{j=n} a_j + \sum_{j=0}^{j=n} b_j = \sum_{k=0}^{k=n} a_k + \sum_{k=0}^{k=n} b_k$$

b Symbole $\prod$ Le produit suivant : $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 \times \cdots \times \mathrm{a}_n$ on la note par $\prod_{j=1}^{j=n} \mathrm{a}_j$ (on utilise i ou j ou k sont des variables muettes) - Exemple 1 : $\sum_{j=0}^{j=n} \left(\mathrm{a}_j + \mathbf{b}_j\right) = \prod_{j=0}^{j=n} \mathrm{a}_j \times \prod_{j=0}^{j=n} \mathrm{b}_j = \prod_{k=0}^{k=n} \mathrm{a}_k \times \prod_{k=0}^{k=n} \mathrm{b}_k$ (cet un produit qui est constitué par $\mathbf{n} + \mathbf{1}$ termes). - Exemple 2 : $\prod_{j=1}^{j=n} \left(c a_j\right) = c^n \prod_{j=1}^{j=n} a_j$ (cet un produit qui est constitué par n termes et chaque terme est $\mathbf{c} \times \mathbf{a}_\mathbf{i}$) c. Exercices : Montrer que : 1. $\forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}^*$:

$1 + 2 + 3 + \cdots + \mathbf{n} = \sum_{i=1}^{i=n} \mathbf{i} = \dfrac{\mathbf{n}(\mathbf{n}+\mathbf{1})}{2}$ 2. $\forall n \in \mathbb{N}^* : 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \sum_{i=1}^{i=n} i^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. $\forall \mathbf{n} \in \mathbb{N}^* : 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + \mathbf{n}^3 = \sum_{i=1}^{i=n} \mathrm{i}^3 = \left[\dfrac{\mathrm{n}(\mathbf{n}+1)}{2}\right]^2$

1.5 Série d'exercices N°1

Exercice 1.

1. Pour chacun des énoncés suivants, indiquer la valeur de vérité 1 (s'il est vrai) ou bien 0 (s'il est faux) et faire la discussion lorsque le cas s'impose :
   E1 : le milieu de $[AB]$ est aligné avec A et B.
   E2 : deux droites non parallèles sont sécantes.
   E3 : $(a+b)$ et $(a-b)$ sont pairs lorsque a et b sont deux entiers de même parité.
   E4 : $a+b \geq a-b$.
   (Justifier en particulier le fait que E2 et E4 ne sont pas des propositions)
2. Combien y aura-t-il d'issues possibles si on considère trois propositions p, q et r simultanément ? Dresser la table de vérité qui schématise cette situation.

Exercice 2. Écrire en langage formalisé :
- L'équation $\cos x = 0$ possède au moins une solution réelle.
- Tout réel possède un inverse.
- Tout multiple de 4 et 6 est multiple de 24.
- Il existe au moins un réel x tel que : quel que soit un réel y, si $x < y$ alors $f(x) > f(y)$.

Exercice 3.

1. Proposer deux conjonctions qui sont vraies et deux autres qui sont fausses.
2. Donner la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :
   p : $(3 < 5$ et $4 \neq 1+3)$
   q : ($5 = 3+2$ et tout carré est un rectangle).
   r : (le 1er mai on n'a pas classe et le 1er janvier on a cours).
   s : (Rabat est la capitale du Maroc et Tripoli est la capitale du Liban).
3. Proposer deux disjonctions qui sont vraies et deux autres qui sont fausses.
4. Donner la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :
   p : $(3 < 5$ ou $4 \neq 1+3)$
   q : $(5 = 3+2$ ou tout carré est un rectangle).
   r : (le 1er mai on n'a pas classe ou le 1er janvier on a cours). s : (Rabat est la capitale du Maroc ou Tripoli est la capitale du Liban).
5. Donner la négation de chacune des propositions ci-dessous :
   p : " la voiture de ton père est rouge ou bleue "

q : " je n'ai qu'un seul ami ou deux "
r : " les voitures dont la puissance est quatre ou cinq chevaux payent la même taxe "

Exercice 4. On considère les trois énoncés suivants :
p : tout réel admet une racine carrée
q : le carré d'un entier impair est un entier pair
r : une équation du second degré peut admettre trois solutions.
L'implication $[(p \wedge q) \Rightarrow r]$ est-elle vraie ou fausse ?

Exercice 5. 1. Pour chacune des propositions ci-dessous, donner :
a) La valeur de vérité
b) La réciproque et sa valeur de vérité
p : $(0 \times 2 \neq 0) \Rightarrow (2 \neq 0)$
q : (12 est pair) $\Rightarrow$ (11 est premier)
r : (Un carré a quatre côtés isométriques) $\Rightarrow$ (Un losange a quatre angles isométriques)
s : (Tout triangle isocèle est équilatéral) $\Rightarrow$ (Tout triangle isocèle est rectangle)

2. Donner la valeur de vérité de chacune des propositions ci-dessous :
p : $(0 \times 2 \neq 0) \Leftrightarrow (2 \neq 0)$
q : (12 est pair) $\Leftrightarrow$ (11 est premier)
r : (Un carré a quatre côtés isométriques) $\Leftrightarrow$ (Un losange a quatre angles isométriques)
s : (Tout triangle isocèle est équilatéral) $\Leftrightarrow$ (Tout triangle isocèle est rectangle)

Exercice 6. Soit $(a, b) \in^{+} \times^{+}$. Montrer, en utilisant le raisonnement direct, que :
Si $a \leq b$ alors $a \leq \dfrac{a+b}{2} \leq b$ et $a \leq \sqrt{ab} \leq b$.

Exercice 7. Montrer, en utilisant le raisonnement par disjonction des cas, que : $(\forall x \in)$, $|x-1| \leq x^2 - x + 1$.

Exercice 8. Soient a et b deux réels positifs . Montrer, en utilisant le raisonnement par l'absurde, que :
Si $\dfrac{a}{1+b} = \dfrac{b}{1+a}$ alors $a = b$.

Exercice 9. Montrer, en utilisant le raisonnement par contraposée, que :
$(\forall (x; y) \in^2)(xy \neq 1 \; et \; x \neq y) \Rightarrow \dfrac{x}{x^2+x+1} \neq \dfrac{y}{y^2+y+1}$.

Exercice 10. Soit $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$ tel que $(n \in^{\star})$.
Démontrer par récurrence que : $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

1.6 Série d'exercices N°2

Exercice 11. 1. Écrire les propositions suivantes en langage formalisé :
p : Il existe un nombre réel strictement supérieur à tous les nombres entiers naturels.
q : Le carré d'un nombre réel est positif.
r : Tout nombre entier naturel est pair ou impair.
s : Pour tout nombre réel, il existe au moins un entier relatif plus grand que lui.

2. Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :
$A : (\exists x \in)(\sqrt{x} = 4)$.
$B : (\forall x \in)((x-1)^2 \geq 0)$.
$C : (\forall x \in)(\exists y \in)(x = 3y)$.
$D : (\forall x \in)(\exists y \in)(xy = 1)$.
$E : (\forall x \in)(\exists y \in) \quad x^2 - 2xy + 3y^2 = 0$.

Exercice 12. 1. Soient p, q et r trois propositions. Montrer que :
$[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \Rightarrow r]$.
$[p \Rightarrow (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \Rightarrow r]$.

2. On considère la proposition suivante : $P : (\forall x \in)(x < 1 \Rightarrow x^2 < 1)$
   (a) Donner la négation de la proposition P.
   (b) Étudier la vérité de la proposition P.

Exercice 13. 1. En utilisant le raisonnement par contraposée, montrer que :
   (a) $((\forall n \in) n$ impair $\Rightarrow n^2$ impair.
   (b) Soient a et b deux réels tel que $a \neq -b$. Si $a \neq -\dfrac{b}{4}$ alors , $\dfrac{2a-b}{a+b} \neq -2$.

2. En utilisant le raisonnement par disjonction de cas, montrer que :
   (a) pour tout entier naturel n, le nombre $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3 .
   (b) Résoudre dans l'équation suivante : $x|x| + 3x - 4 = 0$

3. En utilisant le contre exemple, montrer que les propositions suivantes sont fausses :

(a) $(\forall x \in)(\forall y \in) \quad x^2 + 1 \geq y^2 - 1.$

(b) On considère la fonction numérique définie par : $f(x) = x^2 - x$.
La fonction f est paire ou impaire.

Exercice 14. Montrer que :

1. $(\forall(x;y) \in^2) \quad (x-y) \in$
2. $(\forall x \in^+)(\dfrac{1}{1+\sqrt{x}} = 1-\sqrt{x}) \Rightarrow x = 0$
3. pour tout entier naturel n, le nombre $10^n - 1$ est divisible par 9.
4. $(\forall x \in) \quad (x \neq \sqrt{3} \wedge x \neq -\sqrt{3}) \Leftrightarrow \dfrac{4}{1+x^2} \neq 1$
5. $(\forall x \in)(\forall y \in)(\forall z \in)(x+y > 2z \Rightarrow (x > z \vee y > z)$
6. $(\forall n \in^*) \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k^2 = (-1)^{n+1}.\dfrac{n(n+1)}{2}$

Exercice 15.

1. Soient a et b deux nombres réels tel que : $b \neq 2a$. Montrer que : $b \neq \dfrac{1}{4}a \Rightarrow \dfrac{a+2b}{2a-b} \neq \dfrac{6}{7}$.

2. Soient a et b deux nombres réels. Montrer que : $[(\forall x \in), (a < x \Rightarrow b < x)] \Rightarrow b \leqslant a$.

3. Montrer que : $(\forall n \in), \dfrac{n+1}{n+2} \notin$.

4. Montrer que si un entier naturel n n'est pas divisible par 3 alors, le nombre $n^2 - 1$ est divisible par 3.
   En déduire que le nombre $ab(a^2 - b^2)$ est divisible par 3 quel que soient les entiers naturels a et b .

5. Montrer que : $(\forall n \in^*) \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times 2^k = 2 + (n-1) \times 2^{n+1}$.

6. Soient a et b deux réels et soient α et ϵ deux réels strictement positifs. Montrer que :
   (a) $a < b \Rightarrow]a;b[\neq \varnothing$.
   (b) $]a-\alpha; a+\alpha[\cap]b-\epsilon; b+\epsilon[\neq \varnothing \Rightarrow |a-b| < \alpha + \epsilon$