Chapitre 12

Dénombrement

Capacités attendues

- Utiliser l'arbre des choix dans des situations combinatoires ;
- Utiliser le modèle combinatoire(ou de dénombrement) adéquat à la situation étudiée ;
- Application du dénombrement dans la résolution de problèmes variés.

I Ensemble fini ; cardinal d'un ensemble fini : la notation card

1 Définitions

Définition

- On appelle **ensemble** une collection d'objets, ces objets sont appelés éléments de l'ensemble.
- Un ensemble E est **fini** s'il est **vide** ou s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et une bijection de E dans $\{1;2;3;...;n\}$.
  Cet entier n est alors unique. On dit alors que E est de **cardinal** n (ou simplement que E contient n éléments), et on note :$n = card(E)$
  Par convention, $card(\varnothing) = 0$.

2 Propriétés des ensembles finis

Propriété

- Soient A et E deux ensembles finis.
  On dit que A est inclus dans E, ce que l'on note $A \subset E$, lorsque tout élément de A est un élément de E. On dit aussi que A est un sous-ensemble, ou une partie, de E.
  On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E.
- Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$.
  On appelle réunion de deux ensembles A et B, noté $A \cup B$, l'ensemble :
  $A \cup B = \{x \in E / x \in A \text{ ou } x \in B\}$
- Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$.
  On appelle intersection de deux ensembles A et B, noté $A \cap B$, l'ensemble :
  $A \cap B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \in B\}$.
  Lorsque $A \cap B = \varnothing$, on dit que A et B sont **disjoints**.
- Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$.
  On appelle différence A moins B, noté $A \setminus B$, l'ensemble :
  $A \setminus B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \notin B\}$.
- Soit $A \subset E$.
  On appelle complémentaire de A dans E, noté C_E^A ou $\overline{A}$, l'ensemble :
  $\overline{A} = \{x \in E / x \notin A\}$.

3 Propriétés des cardinaux

Théorème Si E est un ensemble fini non vide et s'il existe une bijection de E sur F, alors F est fini et $card(E) = card(F)$.

Théorème Soit B un ensemble fini,

$$A \subset B \Rightarrow A \text{ est fini ; et } card(A) \leqslant card(B)$$

Attention : la réciproque est fausse !

Théorème Soient E un ensemble fini, A et B deux parties de E.

1. A et B sont disjoints $\Leftrightarrow card(A \cup B) = card(A) + card(B)$.
2. $card(A \setminus B) = card(A) - card(A \cap B)$
3. $card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)$
4. $card(\overline{A}) = card(E) - card(A)$
5. Si $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille de parties de E **deux à deux disjointes**, alors

$$card(A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n) = \sum_{i=1}^{n} card(A_i)$$

II factorielle n

Définition Étant donné un entier naturel n on désigne par $n!$ qui se lit **factorielle** n l'entier naturel défini par : $0! = 1$ et $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$ pour $n \geqslant 1$

III Principe général du dénombrement, cardinal du produit cartésien

1 Principe du produit

Propriété Si une situation comporte p étapes offrant respectivement n_1, n_2, ..., n_p possibilités alors le nombre totale d'issues est $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_p$

2 Produit cartésien d'ensembles

Propriété Soient E_1, E_2, ..., E_n n ensembles finis.
Alors le produit $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ est un ensemble fini, de cardinal :

$$card(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n) = card(E_1).card(E_2)\ldots card(E_n) = \prod_{i=1}^{n} card(E_i)$$

En particulier, si E est fini, $card(E^n) = [card(E)]^n$.

IV Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini vers un autre ensemble fini

Théorème Le nombre des applications d'un ensemble à $p \geqslant 1$ éléments dans un ensemble à $n \geqslant 1$ éléments est : n^p.

V Nombre d'arrangements ; la notation A_n^p

1 Arrangements

Définition Soit E un ensemble de cardinal n et p un entier naturel. On appelle **arrangement** de p élément de E un p-uplet $(x_1, x_2, ..., x_p) \in E_p$ tel que $\forall (i,j) \in \{1;2;3;...;p\}, i \neq j \Leftrightarrow x_i \neq x_j$.
Ainsi, **l'ordre est important et il n'y a pas de répétition possible.**
Si E est fini de cardinal n, on note A_n^p le nombre de p-arrangements de E.

2 Nombre d'arrangements

Théorème Le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble E de cardinal n ne dépend que de n et de p.

- Si $p \leqslant n$,il y a $A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \times (n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ arrangements de cette sorte ;
- si $p > n$ il n'y a pas d'arrangements possibles de cette sorte.

VI Nombre de permutations ; la notation $n!$

Définition Tout classement ordonné de n éléments distincts est une permutation de ces n éléments. Par exemple $aebcd$ est une permutation des éléments a, b, c, d, e.

Propriété Le nombre de permutations de n éléments peut être calculé de la façon suivante : il y a n places possibles pour un premier élément, $n-1$ pour un deuxième élément, ..., et il ne restera qu'une place pour le dernier élément restant.
On remarque facilement alors qu'il y a $n(n-1)(n-2).....2.1$ permutations possibles.
Il y a donc $n!$ permutations de n éléments distincts.

Propriété Le nombre de permutations que l'on peut constituer si certains des éléments sont identiques est plus petit que si tous les éléments sont distincts.

VII Nombre de combinaisons ; la notation C_n^p

Définition Soit E un ensemble de cardinal n et p un entier naturel. On appelle **combinaison** de p éléments de E un sous-ensemble de E contenant p éléments.
Une combinaison est donc une collection de p objets pris simultanément parmi n, donc sans tenir compte de l'ordre d'apparition.

Propriété Si l'on permute les éléments de chaque combinaison simple, on obtient tous les arrangements simples. Il y a donc $p!$ fois plus d'arrangements que de combinaisons.
Donc le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble à n éléments est : $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

VIII Formule du binôme de Newton

Propriété Quels que soient les nombres réels a et b on a :

- $(a+b)^1 = C_1^0 a + C_1^1 b$
- $(a+b)^2 = C_2^0 a^2 + C_2^1 ab + C_2^2 b$
- $(a+b)^3 = C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2 b + C_2^3 ab^2 + C_3^3 b^3$
- $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + ... + C_p^n a^{n-p} b^p + ... + C_n^n b^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^p b^{n-p}$

Type de tirage : Récapitulation

Type de tirage	Successif avec remise	Successif sans remise	Simultané
Ordre	Avec ordre	Avec ordre	Sans ordre
Un cas possible	un p-uplet avec possibilité de répétition	un p-uplet d'éléments distincts	une partie de p éléments
$card\Omega$	n^p	A_n^p	C_n^p

01 J'ai trois pantalons, cinq chemises et deux paires de chaussures. De combien de façon puis-je m'habiller ?

02 On jette sur une table cinq dés de couleurs différentes et on lit sur la face supérieure de chaque dé le nombre de points. Combien y a-t-il de lectures possibles ?

03 Soit les arrangements de 3 chiffres différents choisis parmi les dix symboles de la numérotation décimale.

1. Combien d'arrangements peut-on ainsi faire ?
2. Ces arrangements sont utilisés pour numéroter les billets d'une loterie dont tous les billets sont vendus : seuls les billets dont les numéros se terminent par 02 ; 60 et 80 gagnent un lot.
   a. Quel est le nombre de billets gagnants ?
   b. Quel est le nombre de billets comportant le chiffre 0 ?
   c. Une personne achète 2 billets dont les numéros contiennent le chiffre 0. Quel est le nombre de choix lui permettant de gagner un lot et un seul ?

04 Une urne contient 9 boules : quatre boules rouges portant les numéros $0;1;2;2$ et trois boules vertes portant les numéros $1;2;2$ et deux boules noires portant les numéros $1;3$.

1. On tire simultanément 3 boules de l'urne.
   Calculer le cardinal des événements suivants :
   - A "tirer 3 boules de même couleur".
   - B "tirer 3 boules portant le même numéro".
   - C "tirer 3 boules portant des numéros dont la somme est égale à 4".
   - D "tirer au moins une boule rouge".
   - E "tirer 3 couleurs différentes".
2. On tire 3 boules simultanément et sans remise de l'urne.
   Calculer le cardinal des événements A et D .
3. On tire 3 boules simultanément et avec remise de l'urne.
   Calculer le cardinal de l'événement F " tirer exactement une boule rouge" .

05 Les billets d'une loterie sont composés des nombres de 4 chiffes tous distincts de l'ensemble $E = \{2; 3; 4; 5; 7; 8\}$.

1. Déterminer le nombre total de billets.
2. Les billets qui commencent par 27 et se terminent par un nombre impaire gagnent un lot.
   a. Déterminer le nombre de billets gagnants.
   b. Une personne achète 3 billets
      i. Déterminer le nombre de façons de gagner au moins un lot.
      ii. Déterminer le nombre de façons de ne gagner aucun lot.

06 Combien de classement peut-on former avec 27 élèves ? (On suppose qu'il n'y a pas d'ex-æquo.)

07 Une porte possède un code à 3 chiffres, chacun des chiffres pouvant être un chiffre de 1 à 9.

1. a. Combien y-a-t-il de codes possibles ?
   b. Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre pair ?
   c. Combien y-a-t-il de codes contenant au moins un chiffre 4 ?
   d. Combien y-a-t-il de codes contenant exactement un chiffre 4 ?
2. Dans cette question on souhaite que le code comporte obligatoirement trois chiffres distincts.
   a. Combien y-a-t-il de codes possibles ?
   b. Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre impair ?
   c. Combien y-a-t-il de codes comprenant le chiffre 6 ?

08 Omar et Yassir font partie d'une équipe de 8 joueurs (6 garçons et 2 filles). On décide de fabriquer un comité de 3 joueurs.

1. Combien y-a-t-il de comités possibles ?
2. Combien y-a-t-il de comités contenant exactement 2 garçons et 1 fille ?
3. Combien y-a-t-il de comités contenant au moins deux garçons ?
4. On veut que Omar et Yassir soient ensemble dans le comité. Combien y-a-t-il de comités possibles ?
5. On ne veut pas que Omar et Yassir soient ensemble dans le comité. Combien y-a-t-il de comités possibles ?

09 Dénombrer les anagrammes des mots suivants : MATHS, RIRE, ANANAS.

10 Lors d'un examen, un élève doit répondre à 10 questions sur 13.

1. Combien de choix a-t-il ?

2. Combien de possibilités a-t-il s'il doit répondre aux deux premières questions ?

3. Combien s'il doit répondre soit à la première question, soit à la deuxième ?

4. Combien s'il doit répondre à exactement 3 des 5 premières questions ?

5. Combien s'il doit répondre à au moins 3 des 5 premières questions ?

11

1. Résoudre dans $\mathbb{N}$ les équations suivantes :
   a. $A_n^2 = 72$ b. $A_n^4 = 42A_n^2$ c. $2A_n^2 + 50 = A_{2n}^2$

2. a . Développez $(a+b)^7$.
   b . Écrivez le cinquième terme du développement de $(rs^2+3)^{16}$.

12 Dans les classes de 1$^{\text{ère}}$S d'un lycée, il y a 70 élèves. Parmi eux 60 élèves aiment la physique, 50 élèves aiment les mathématiques et 35 aiment SVT. Sachant que chaque élève aiment au moins deux de ces trois matières et de plus chacun aiment la physique ou SVT.

1. Déterminer le nombre d'élèves qui aiment la physique et SVT.

2. Déterminer le nombre d'élèves qui aiment les trois matières.

13 Un centre de loisir accueille 100 enfants. Deux sports sont proposés : Le football et le tennis.
A la question : Aimez-vous le football ? 60 enfants lèvent la main.
A la question : Aimez-vous le tennis ? 45 lèvent la main.
A la question : Aimez-vous le tennis et le football ? 18 enfants lèvent la main.

1. Représenter les données par un diagramme.

2. dans chacun des cas suivants Calculer le nombre d'enfants :

   a. Qui aiment seulement le football.
   b. Qui aiment seulement le tennis
   c. Qui aiment le football ou le tennis.
   d. Qui n'aiment ni le football ni le tennis.

14 Un sac contient 9 jetons répartis comme suit :

- 4 jetons blancs marqués : 1, 1,2,6
- 5 jetons rouges marqués : 2,2,2,3,4

Partie 1 : On tire simultanément trois jetons du sac.

1. Dénombrer tous les tirages possibles.
2. Dénombrer les tirages comprenant :
   a. Trois jetons rouges.
   b. Au moins un jeton blanc.
   c. Trois jetons dont la somme des numéros marqués est égale à 8.
   d. Un jeton et un seul blanc et un jeton et un seul portant un numéro multiple de 3.

Partie 2 : On tire successivement et sans remise trois jetons du sac.

1. Dénombrer tous les tirages possibles.
2. Dénombrer les tirages dans chacun des cas suivants :
   a. Le premier jeton tiré porte le numéro 2.
   b. Obtenir un seul jeton marqué 2.
   c. Le premier jeton tiré est blanc et le deuxième jeton tiré est marqué 2.

Partie 3 : On tire successivement et avec remise trois jetons du sac.

1. Dénombrer tous les tirages possibles.
2. Dénombrer les tirages comprenant trois chiffres consécutifs.

15 Quinze candidats dont 8 garçons et 7 filles participent à un concours où les admis seront uniquement les 4 premiers candidats qui réalisent dans l'ordre les scores les plus élevés.
On suppose qu'il n'y a pas deux candidats qui rapporte un même score.

1. Quel est le nombre de résultats possibles du concours.
2. Quel est le nombre de résultats possibles où :
   a. Les admis sont tous des filles.
   b. L'unique garçon admis est en tête de liste.
   c. La liste contient un seul garçon.
   d. La liste contient au plus 3 filles.