

Contenus

- Définition d'un ensemble par compréhension et par extension, partie d'un ensemble ;
- Ensemble des parties d'un ensemble ; la notation $\mathcal{P}(E)$;
- Inclusion ; égalité ; complémentaire ;
- Intersection, réunion et différence de deux ensembles, lois de Morgan ;
- Propriétés de l'intersection et de la réunion ;
- Produit cartésien de deux ensembles.

Capacités attendues

- Déterminer un ensemble par compréhension ou par extension ;
- Maîtriser la relation entre les règles de la logique et les opérations sur les ensembles.

I Notion d'ensemble

1 Définition et exemples

Exemples

\mathbb{N} ensemble des entiers naturels, $\{0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$.

\mathbb{Z} ensemble des entiers relatifs, $\{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$.

\mathbb{D} ensemble des décimaux, c'est-à-dire des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ où a et n sont des entiers relatifs. Les décimaux comportent les entiers et les nombres qui peuvent s'écrire sous une forme décimale avec un nombre fini de chiffres non nuls après la virgule.

L'ensemble des diviseurs de 12 est : $D_{12} = \{-12; -6; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 6; 12\}$.

L'ensemble des lettres constituant le mot maths est : $\{t; h; m; a; s\}$.

Définition

Nous appellerons ensemble une collection d'objets. Chacun de ces objets est appelé élément de l'ensemble.

Si un élément a fait partie d'un ensemble E , on dira que a appartient à E , ou E contient a , et on notera : $a \in E$. Si a n'appartient pas à E , on notera : $a \notin E$.

2 Construire des ensembles

a Définition en extension

On peut définir un ensemble fini en énumérant les éléments qui le constituent.

Par exemple : $\{1; 2; 3; 4; 5\}$ est un ensemble constitué des 5 éléments 1, 2, 3, 4 et 5.

On utilisera des accolades pour délimiter les éléments de l'ensemble. L'ordre des éléments, et le fait qu'ils soient redoublés n'a aucune importance dans la définition de l'ensemble.

b Définition en compréhension

On s'appuie sur un ensemble déjà existant, dont on sélectionne les éléments vérifiant une certaine propriété.

Par exemple :

- $\{n \in \mathbb{N} / \exists k \in \mathbb{N} \quad n = 2k + 1\}$ est l'ensemble des entiers impairs.
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$
- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} / p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{N}^* \right\}$

c un ensemble particulier

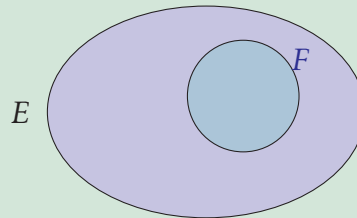
On considère en mathématiques, qu'il y a un unique ensemble, appelé ensemble vide, qui ne contient aucun élément, et qui est noté \emptyset . Si on considère un élément x quelconque, on a forcément $x \notin \emptyset$.

II

Inclusion d'ensembles

Définition

On dit qu'un ensemble F est inclus dans un ensemble E si tout élément de F appartient à E .



On note : $F \subset E$ et on lit :

- F est inclus dans l'ensemble E .
- F est contenu dans l'ensemble E .
- F est une partie de l'ensemble E .
- F est un sous ensemble de l'ensemble E .

Et on note aussi $F \not\subset E$ et on lit : F n'est pas inclus dans l'ensemble E .

$F \not\subset E$ est la négation de $F \subset E$.

$F \not\subset E$ signifie qu'il existe au moins un élément de F qui n'appartient pas à E .

Remarques

- D'après la définition précédente, tout ensemble E est inclus dans lui même : $E \subset E$.
- Lorsque le sous-ensemble F est strictement inclus dans l'ensemble E on dit que F est un sous-ensemble propre de E . On doit alors le préciser par la conjonction des deux propriétés : $F \subset E$ et $F \neq E$.
- L'ensemble vide est contenu dans tout ensemble E : $\emptyset \subset E$
- Ne pas confondre l'appartenance – qui est une relation entre un élément et un ensemble – et l'inclusion – qui est une relation entre deux ensembles.
Par exemple, on aura $a \in \{x; y; z; t\}$ mais $\{x\} \subset \{x; y; z; t\}$.
- soient E et F deux sous-ensembles de A , on a : $F \subset E \Leftrightarrow (\forall x \in A, x \in F \Rightarrow x \in E)$

Exemples

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$; $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$; $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$; $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
- $\{n \in \mathbb{N} / \exists p \in \mathbb{N} \quad n = 2p\} \subset \mathbb{N}$.
- $\{2; 3; 4\} \subset \{2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.

Méthode

- Pour démontrer qu'un ensemble F est inclus dans un ensemble E on prend un élément x quelconque de F , on utilise les hypothèses qui définissent l'ensemble F et on démontre que x vérifie les propriétés qui définissent l'ensemble E . La démonstration prend donc la structure suivante :
Soit x un élément de l'ensemble F
.....
(raisonnement)
.....
donc x est un élément de l'ensemble E
Conclusion : $F \subset E$
- Pour démontrer que $F \not\subset E$, Il suffit de trouver un élément de F qui n'est pas dans l'ensemble E (un contre-exemple suffit).

1

Égalité de deux ensembles

Définition

Deux ensembles sont égaux s'ils ont exactement les mêmes éléments. Cela se traduit par deux inclusions simultanées :

$$E = F \Leftrightarrow (F \subset E \text{ et } E \subset F)$$

Méthode

Pour démontrer l'égalité de deux ensembles E et F il faudra faire deux démonstrations d'inclusion, d'une part pour démontrer $F \subset E$ d'autre part pour démontrer $E \subset F$.

Exemple

On considère les deux ensembles suivants :

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} / \left| 1 - \frac{x}{2} \right| < 1 \right\} \quad \text{et} \quad B =]0 ; 4[$$

$$x \in A \Leftrightarrow \left| 1 - \frac{x}{2} \right| < 1 \Leftrightarrow -1 < 1 - \frac{x}{2} < 1 \Leftrightarrow -2 < -\frac{x}{2} < 0 \Leftrightarrow 0 < \frac{x}{2} < 2 \Leftrightarrow 0 < x < 4 \Leftrightarrow x \in B$$

2

Transitivité de l'inclusion

Propriété

A , B , et C étant trois ensembles, si le premier ensemble A est contenu dans le second B et si le deuxième ensemble B est contenu dans le troisième C , alors le premier ensemble A est contenu dans le troisième C ; on dit que l'inclusion est transitive.

$$\text{On a : } A \subset B \text{ et } B \subset C \Rightarrow A \subset C$$

III

Opérations sur les ensembles

1

Ensemble des parties d'un ensemble

Définition

Soit E un ensemble.

L'ensemble des parties de E est l'ensemble, généralement noté $\mathcal{P}(E)$, dont les éléments sont les sous-ensembles de E et on a : $A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow A \subset E$.

Remarque

$\mathcal{P}(E)$ n'est jamais vide car l'ensemble vide \emptyset et E sont toujours des parties de E :

$$\emptyset \in \mathcal{P}(E) \quad \text{et} \quad E \in \mathcal{P}(E).$$

Exemples

- Soit $E = \{a; b; c\}$ un ensemble de trois éléments. Les sous-ensembles de E sont :
 $\rightarrow \emptyset$ et E .
 \rightarrow les trois singletons $\{a\}$; $\{b\}$ et $\{c\}$.
 \rightarrow les trois paires $\{a; b\}$; $\{a; c\}$ et $\{b; c\}$.

L'ensemble des parties de E est donc :

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset; \{a\}; \{b\}; \{c\}; \{a; b\}; \{a; c\}; \{b; c\}; E\}$$

- $\mathbb{Z} \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$.
- $] -\pi ; \pi] \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

2

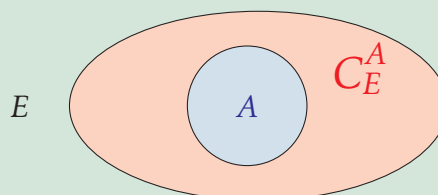
Complémentaire d'un ensemble

Définition

Si A est une partie de l'ensemble E , on appelle complémentaire de A dans E l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A .

On note le plus souvent le complémentaire de A par C_E^A , et aussi parfois par \overline{A} .

$$C_E^A = \{x \in E / x \notin A\}$$



Exemples

1 $C_{\mathbb{N}\{0\}} = \mathbb{N}^{\star}$.

2 $C_E^{\emptyset} = E$.

3 $\overline{\overline{A}} = A$

4 Si $A = \{a; b\}$ et $E = \{a; b; c; d; e\}$ alors : $C_E^A = \{c; d; e\}$

Propriété

Soit E un ensemble et soient A et B deux parties de E . On a : $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$

Démonstration : On a : $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in E, x \in A \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow (\forall x \in E, x \notin B \Rightarrow x \notin A) \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$.

3

Intersection d'ensembles

Définition

Soit E un ensemble et soient A et $B \in \mathcal{P}(E)$.

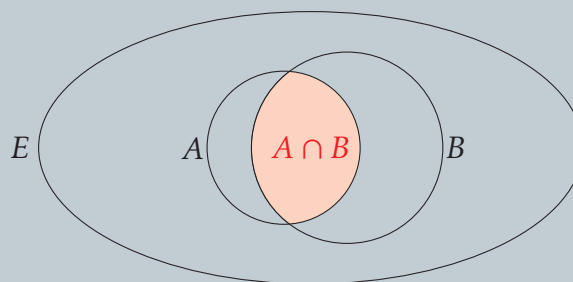
On appelle intersection de A et de B et on note $A \cap B$ l'ensemble $\{x \in E / x \in A \text{ et } x \in B\}$

Exemples

- Soient D_{12} et D_{16} respectivement l'ensemble des diviseurs de 12 et celui de 16 .
On a $D_{12} = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$ et $D_{16} = \{1; 2; 4; 8; 16\}$.
Donc $D_{12} \cap D_{16} = \{1; 2; 4\}$
- Soit $A = \{2n, n \in \mathbb{N}\}$ et soit $B = \{3n, n \in \mathbb{N}\}$
On a $A \cap B = \{6n, n \in \mathbb{N}\}$

Remarques

- Schématiquement, cela donne :



- $A \cap B$ est constitué des éléments communs à l'ensemble A et à l'ensemble B .
- En pratique on a : $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in B$

Propriétés

Soit E un ensemble.

Soient A, B et $C \in \mathcal{P}(E)$. On a :

- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cap B \in \mathcal{P}(E)$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- $A \cap E = E \cap A = A$
- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$
- $A \cap A = A$
- $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$
- $A \cap \bar{A} = \emptyset$

Définition

Soit E un ensemble et soient A et $B \in \mathcal{P}(E)$.

On dit que A et B sont disjoints si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

4

Réunion d'ensembles

Définition

Soit E un ensemble et soient A et $B \in \mathcal{P}(E)$.

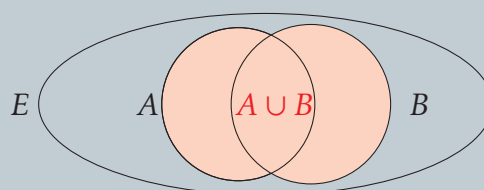
On appelle réunion (ou plus simplement union) de A et de B et on note $A \cup B$ l'ensemble défini par : $\{x \in E / x \in A \text{ ou } x \in B\}$

Exemple

- Soit $A = \{a; b; c; d\}$ et soit $B = \{x; b; y; d; z\}$.
On a $A \cup B = \{a; b; c; d; x; y; z\}$
- Soit $I = [2, 8[$ et soit $J = [-1, 3]$.
On a $I \cup J = [-1, 8[$

Remarques

- Schématiquement, on a :



- $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$
- $A \cup B = \emptyset \Rightarrow A = \emptyset \wedge B = \emptyset$

Propriétés

Soit E un ensemble.
Soient A, B et $C \in \mathcal{P}(E)$. On a :

- $A \cup B \in \mathcal{P}(E)$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- $A \cup \emptyset = \emptyset \cap A = A$
- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cup E = E$
- $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$
- $A \cup A = A$
- $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A$
- $A \cup \bar{A} = E$

5

Distributivité et lois de De Morgan

Propriété

Soit E un ensemble et soient A, B et $C \in \mathcal{P}(E)$. On a :

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$

Démonstration :

- $x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B \cap C$
 $\Leftrightarrow x \in A \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \in C)$
 $\Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ et } (x \in A \text{ ou } x \in C)$
 $\Leftrightarrow (x \in A \cup B) \text{ et } (x \in A \cup C)$
 $\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

D'où $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

- $x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in B \cup C$
 $\Leftrightarrow x \in A \text{ et } (x \in B \text{ ou } x \in C)$
 $\Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in B) \text{ ou } (x \in A \text{ et } x \in C)$
 $\Leftrightarrow (x \in A \cap B) \text{ ou } (x \in A \cap C)$
 $\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

D'où $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

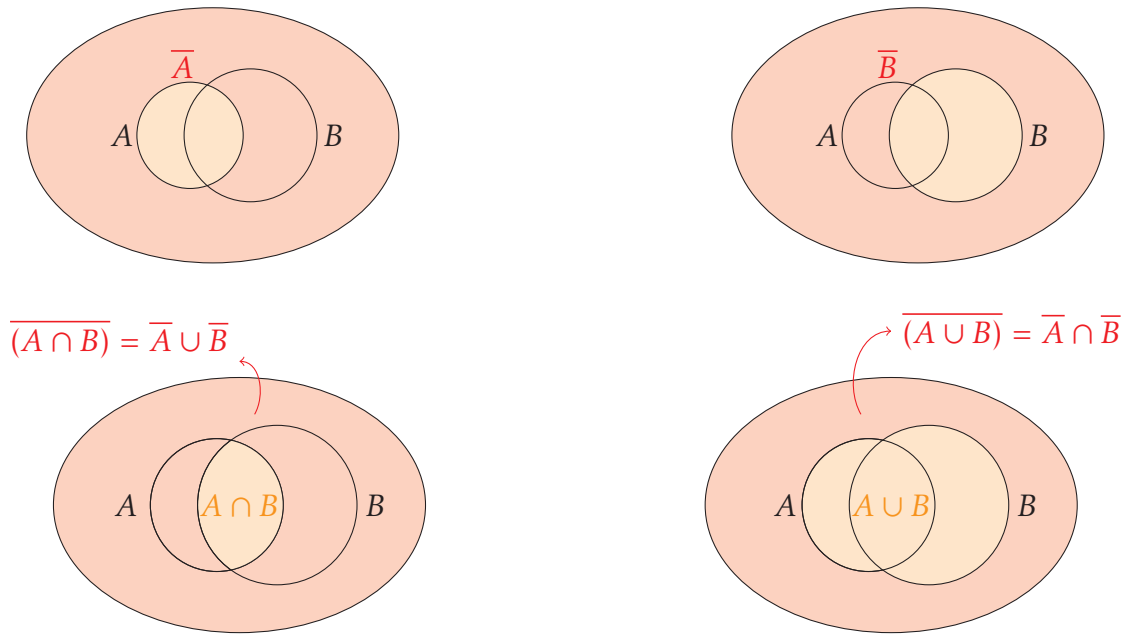
- $x \in \overline{(A \cap B)} \Leftrightarrow x \notin A \cap B$
 $\Leftrightarrow x \notin A \text{ ou } x \notin B$
 $\Leftrightarrow x \in \bar{A} \text{ ou } x \in \bar{B}$
 $\Leftrightarrow x \in \bar{A} \cup \bar{B}$

D'où $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$

- $x \in \overline{(A \cup B)} \Leftrightarrow x \notin A \cup B$
 $\Leftrightarrow x \notin A \text{ et } x \notin B$
 $\Leftrightarrow x \in \bar{A} \text{ et } x \in \bar{B}$
 $\Leftrightarrow x \in \bar{A} \cap \bar{B}$

D'où $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$

Voici les diagrammes de Venn pour les lois de Morgan :



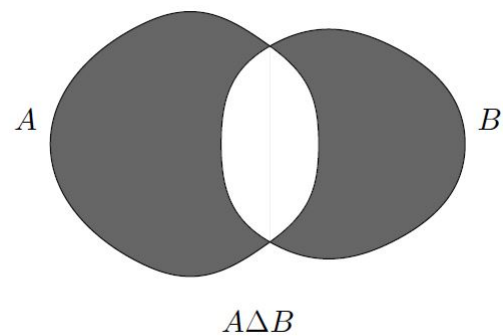
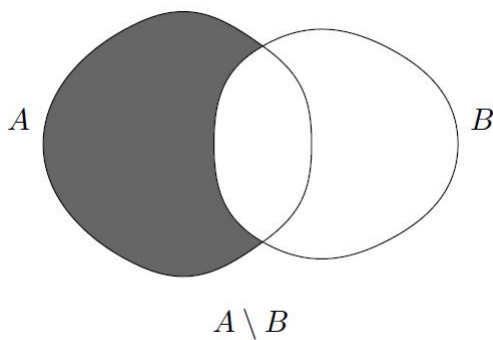
6

Différence et différence symétrique de deux ensembles

Définition

Soit E un ensemble, $A \in \mathcal{P}(E)$ et $B \in \mathcal{P}(E)$. On note :

- 1 L'ensemble A privé de B noté $A \setminus B$ est défini par $\{x \in E / x \in A \text{ et } x \notin B\}$ et on l'appelle différence de A et B .
- 2 $A \Delta B$ l'ensemble $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ et on l'appelle différence symétrique de A et B .

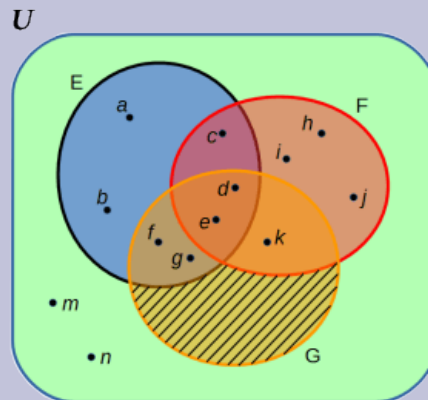


Exemples

On considère les deux ensembles $A = \{1; 2; 5; 6; 9; 10\}$ et $B = \{2; 3; 5; 7; 8; 9\}$.

- $A \setminus B = \{1; 6; 10\}$.
- $A \Delta B = \{1; 3; 6; 7; 8; 10\}$.

Dans le référentiel U représenté ci-dessous, on a : $E \Delta F = \{a, b, f, g, h, i, j, k\}$



Remarques

- La différence symétrique correspond au 'ou' exclusif : $A \Delta B$ est l'ensemble des points qui appartiennent à A ou à B , mais PAS à A et B en même temps.
- Lorsque l'on a $B \subset A$, la différence de A et B est aussi le complémentaire de B dans A .
- $A \setminus B = A \cap \bar{B}$.
- $A \subset B$ si et seulement si $A \setminus B = \emptyset$
- La différence symétrique $A \Delta B$ est aussi égale à $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

7

Produit cartésien

a

Produit cartésien de deux ensembles

Définition

Soient E et F deux ensembles.

On appelle produit cartésien (ou simplement produit) de E par F et on note $E \times F$ l'ensemble des couples ordonnés $(x; y)$ où $x \in E$ et $y \in F$.

$$A \times B = \{(x; y) / x \in A \text{ et } y \in B\}$$

avec la convention : $A \times B = \emptyset$ si $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$

Attention : l'ordre des éléments dans le couple est important : $(2; 3) \neq (3; 2)$

Exemple

Soit $A = \{1; 3\}$ et $B = \{2; 3; 6\}$.

Alors, $A \times B = \{(1; 2); (1; 3); (1; 6); (3; 2); (3; 3); (3; 6)\}$

On note : $A^2 = A \times A$ (appelé carré cartésien de A).

Remarques

- $u \in E \times F \Leftrightarrow \exists x \in E \text{ et } \exists y \in F / u = (x; y)$
- On définit l'égalité sur $E \times F$ par : $(x; y) = (x'; y') \Leftrightarrow x = x' \text{ et } y = y'$
- $E \times F = \emptyset \Leftrightarrow E = \emptyset \text{ ou } F = \emptyset$

b

Produit cartésien de trois ensembles

Définitions

Le produit cartésien de trois ensembles est défini par :

$$A \times B \times C = \{(a; b; c) / a \in A ; b \in B \text{ et } c \in C\}$$

Le produit $A \times A \times A$ est appelé cube cartésien de A et il est noté A^3 (lire « A au cube »).

Les définitions précédentes se généralisent en définissant le produit cartésien d'une famille d'ensembles

$(A_1; A_2; \dots; A_n)$ que l'on note habituellement $\prod_{i=1}^n A_i$

$$\prod_{i=1}^n A_i = \{(a_1; a_2; \dots; a_n) / a_1 \in A_1 ; a_2 \in A_2 ; \dots \text{ et } a_n \in A_n\}$$