Nombres complexes

I. L'ensemble des nombres complexes

1. L'ensemble $\mathbb{C}$ - L'écriture algébrique

Théorème

Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$ appelé l'ensemble des nombres complexes, il contient l'ensemble $\mathbb{R}$ et il vérifie ce qui suit :

- L'ensemble $\mathbb{C}$ contient un élément irréel i qui vérifie $i^2 = -1$.
- Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit de façon unique sous la forme $z = a + ib$ où a et b sont deux nombres réels.

Vocabulaire

- L'écriture $z = a + ib$ s'appelle **l'écriture algébrique** du nombre complexe z.
- Le nombre a est appelé **partie réelle** du nombre z qu'on note par $\Re(z)$.
- Le nombre b est appelé **partie imaginaire** du nombre z qu'on note $\Im(z)$.
- Tout nombre qui s'écrit sous la forme ib est dit nombre **imaginaire pur**, et l'ensemble des nombres imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$.

Exemples

- $z_1 = 5 + 7i$, alors $\Re(z_1) = 5$ et $\Im(z_1) = 7$.
- $z_2 = 1 - i$, alors $\Re(z_2) = 1$ et $\Im(z_2) = -1$.
- $z_3 = 5$, alors $\Re(z_3) = 5$ et $\Im(z_3) = 0$.
- $z_4 = 3i$, alors $\Re(z_4) = 0$ et $\Im(z_4) = 3$ (on a z_4 est un nombre imaginaire pur).
- $z_5 = 1 - \sqrt{5} + \sqrt{2} - \frac{\pi}{2} + 4i$, alors $\Re(z_5) = 1 - \sqrt{5} + \sqrt{2} - \frac{\pi}{2}$ et $\Im(z_5) = 4$.

Application

Écrire sous la forme algébrique les nombres suivants : $z_1 = 4i - (2+5i)$ et $z_2 = 3(1+i) + i(i+1)$.

Propriété : Égalité de deux nombres complexes

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes on a :

- $z = z' \Leftrightarrow a = a'$ et $b = b'$.
- $z = 0 \Leftrightarrow a = 0$ et $b = 0$.

Application

Déterminer la valeur des nombres réels a et b dans les cas suivants :

- $(1 + 2i)a + b = 5 - 4i$
- $(2 + i)a + (3 - 2i)b = 1 + 4i$

2. Opérations dans $\mathbb{C}$

Les opérations de la somme et le produit de $\mathbb{R}$ se prolongent en $\mathbb{C}$ et elles ont les mêmes propriétés.

Propriété

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$. On a :

- $z + z' = (a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$.
- $z \times z' = (a + ib) \times (a' + ib') = aa' - bb' + i(ab' + a'b)$.
- $\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} \quad (z \neq 0)$.

Application

Écrire sous la forme algébrique les nombres suivants :

- $z_1 = (2 + 3i)(-1 + i)$
- $z_3 = \frac{1}{2+3i} + (2 + i)^2$
- $z_5 = \frac{1+i}{1-i}$
- $z_2 = (1 + \sqrt{3}i)(1 - \sqrt{3}i)$
- $z_4 = -\frac{1}{4i}$
- $z_6 = (\frac{1+i}{1-i})^{14}$

Remarque

Pour tout nombre complexe z, on a : $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Im(z) = 0$ et $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \Re(z) = 0$.

Exercice

1. Soit $z = (x + i)[(x + 5) - i(x - 7)]$ tel que x est réel.
   Déterminer le réel x dans chacun des cas :
   a. $z \in \mathbb{R}$
   b. $z \in i\mathbb{R}$
   c. $\Im(z) = 2\Re(z)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes : $(E_1) : iZ - 1 = Z + 3i$ et $(E_2) : \frac{Z+i}{Z-i} = i$.

Exercice

Soit M un point du plan complexe d'affixe $z = x + iy$, M' le point d'affixe $z' = \frac{z+1}{z-1}$.

1. Écrire z' sous la forme algébrique.
2. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que z' est un nombre réel.
3. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que z' est un nombre imaginaire pur.

II. Représentation géométrique d'un nombre complexe

1. Définitions

Le plan (P) est rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

Définition

- Tout nombre complexe $z = x + iy$ (tels que x et y deux réels) associé à un unique point M, appelé **l'image** de z, des coordonnées (x, y) et on écrit $M(z)$.
- Tout point $M(x, y)$, le nombre complexe $z = x + iy$ s'appelle **l'affixe du point** M et on écrit $z = \text{aff}(M)$.
- Le vecteur $\vec{u}(x, y)$ s'appelle **l'image vectoriel** du nombre $z = x+iy$ et le nombre z s'appelle **l'affixe** du vecteur $\vec{u}$ et on écrit $z = \text{aff}(\vec{u})$.

Application

Construire dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{e_1}, \vec{e_2})$ les points $A(-1+i)$, $B(2-2i)$, $C(\frac{1}{2}i)$ et $D(2+2i)$.

Propriété

Soient $A(z_A)$ et $B(z_B)$ deux points du plan complexe. On a :

- $z_{\vec{AB}} = z_B - z_A$.
- L'affixe du point I le milieu du segment $[AB]$ est $\frac{z_A+z_B}{2}$.

Démonstration

On sait que $\vec{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$, alors $\text{aff}(\vec{AB}) = (x_B - x_A) + i(y_B - y_A) = x_B + iy_B - (x_A + iy_A) = z_B - z_A$.

Application

On considère dans le plan complexe les points : $A(2i)$, $B(1-i)$ et $C(3)$.

1. Déterminer l'affixe des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $3\vec{AB} - \vec{BC}$.
2. Déterminer l'affixe du point D sachant que $ABCD$ est un parallélogramme.
3. Déterminer l'affixe du point I le centre du parallélogramme $ABCD$.

2. Colinéarité de deux points

Propriété

Soient $A(z_A), B(z_B)$ et $C(z_C)$ trois points du plan complexe. Les points A, B et C sont alignés si et seulement si $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbb{R}$.

Démonstration

Les points A, B et C sont alignés si et seulement il existe un réel k tel que $\vec{AB} = k\vec{AC}$. Et on a : $\vec{AB} = k\vec{AC} \Leftrightarrow z_B - z_A = k(z_C - z_A) \Leftrightarrow \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = k \in \mathbb{R}$.

Application

On considère dans le plan complexe les points $A(4; -6), B(-2; 3)$ et $C(-1; \frac{3}{2})$. Montrer que les points A, B et C sont alignés.

3. Points cocycliques

Propriété

Soient $A(z_A), B(z_B), C(z_C)$ et $D(z_D)$ quatre points non alignés et deux à deux distincts du plan complexe. Les points A, B, C et D sont **cocycliques** (appartiennent au même cercle) si et seulement si : $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} \times \frac{z_C - z_D}{z_A - z_D} \in \mathbb{R}$.

Application

On considère dans le plan complexe les points $A(1+i), B(3+i), C(2+2i)$ et $D(2)$. Montrer que les points A, B, C et D sont cocycliques.

III. Conjugué d'un nombre complexe

Définition

Soit $z = a + ib$, où a et b sont deux réels. Le nombre $a - ib$ est appelé le **conjugué** du nombre complexe z, et on le note par $\overline{z}$.

Exemples

- $z_1 = 5 + 6i$, alors $\overline{z_1} = 5 - 6i$.
- $z_2 = -1 - i$, alors $\overline{z_2} = -1 + i$.
- $z_3 = i$, alors $\overline{z_3} = -i$.
- $z_4 = 6$, alors $\overline{z_4} = 6$.

Interprétation géométrique

Soit z un nombre complexe. Dans le plan complexe, le point $M(\overline{z})$ est symétrique au point $M(z)$ par rapport à l'axe réel.

Propriété

Soient z et z' deux nombres complexes et n un nombre relatif.

- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.
- $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.
- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}} \quad (z' \neq 0)$.
- $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n \quad (z \neq 0)$.

Exemples

- $(2 - i)(1 + i)^2 = (1 + i)(-2i) = 2 - 2i$.
- $\frac{1}{\sqrt{2}i - \sqrt{2}} = \frac{1}{-\sqrt{2} - \sqrt{2}i} = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{2}i}{4}$.

Application

Soit z un nombre complexe différent de $-2i$. Simplifier l'expression $\frac{\overline{iz}}{z+2i}+i(\overline{\frac{3+z}{z-2i}})$.

Exercice

On pose $z=x+iy$ où x et y sont deux réels.

1. a) Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $3iz-\overline{z}$.
   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $3iz-\overline{z}=8i$.
2. Déterminer les nombres complexes z pour que $3iz-\overline{z}$ soit un nombre imaginaire pur.
3. Résoudre l'équation $\frac{4z-2}{z+1}=-3+i$.

Propriété

Pour tout nombre complexe z, on a :

- $z+\overline{z}=2\Re(z)$ et $z-\overline{z}=2i\Im(z)$.
- $z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z=\overline{z}$.
- $z\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow \overline{z}=-z$.

Application

On pose : $u=\frac{2+3i}{3+2i}$ et $v=\frac{2-3i}{3-2i}$. Sans calculer $u+v$ et $u-v$, montrer que $u+v$ est réel et que $u-v$ est imaginaire pur.

IV. Module d'un nombre complexe

Définition

Soit $z=x+iy$, où x et y deux nombres réels, un nombre complexe. Le **module** du nombre complexe z, est le nombre réel positif noté $|z|$ et qui est défini par :

$$|z|=\sqrt{z\overline{z}}=\sqrt{x^2+y^2}$$

Exemples

- $|3-4i|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$
- $|1-i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$
- $|i|=\sqrt{1^2}=1$
- $|-i|=\sqrt{(-1)^2}=1$
- $|\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i|=1$

Propriété

Soient z et z' nombres complexes et n un nombre relatif.

- $|z| = |-z| = |\overline{z}|$.
- $|z \times z'| = |z| \times |z'|$.
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.
- $|\frac{z}{z'}| = \frac{|z|}{|z'|} \quad (z' \neq 0)$.
- $|z^n| = |z|^n \quad (z \neq 0)$.

Application

On pose $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$.

1. Calculer $|z_1|$ et $|z_2|$.
2. En déduire le module des nombres suivants : $z_1 \times z_2, z_1^6$ et $(\frac{z_1}{z_2})^2$.

Interprétation géométrique

Soit $M(z)$ un point du plan complexe tel que $z = x + iy$. On sait que $OM = ||\overrightarrow{OM}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Et on a $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Alors $OM = |z|$.

Propriété

Soient $A(z_A)$ et $B(z_B)$ deux points du plan complexe. On a : $AB = |z_B - z_A|$.

Application

Dans le plan complexe, on considère les points $A(-1 + 6i), B(1 + 9i)$ et $C(2 + 4i)$. Montrer que le triangle ABC est isocèle.

On muni le plan (P) par un repère orthonormé direct $(O; \vec{e_1}, \vec{e_2})$.
Soit $M(z)$ un point du plan complexe (P) différent de O.
On appelle **argument** du nombre complexe z, la mesure de l'angle orienté $(\vec{e_1}, \overrightarrow{OM})$ qu'on note par le symbole $\arg(z)$.
Et on a $\arg(z) = \theta[2\pi]$ (c-à-d $\arg(z) = \theta + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$).

Propriété

Soit z un nombre complexe.

- $z \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg(z) = 0[2\pi]$.
- $z \in \mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg(z) = \pi[2\pi]$.
- $z \in i\mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
- $z \in i\mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg(z) = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Exemples

- $\arg(2i) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$
- $\arg(\sqrt{5} - \sqrt{7}) = \pi[2\pi]$
- $\arg(1 + \sqrt{3}) = 0[2\pi]$
- $\arg(-2i) = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Propriété

Soit z un nombre complexe non nul.

- $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)[2\pi]$.
- $\arg(-z) = \pi + \arg(z)[2\pi]$.

2. La forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul et θ son argument. On sait que $\cos\theta = \frac{x}{|z|}$ et $\sin\theta = \frac{y}{|z|}$ alors $x = |z|\cos\theta$ et $y = |z|\sin\theta$. C.à.d. $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$. Cette écriture s'appelle la **forme trigonométrique** du nombre complexe z et on le note par $[|z|;\theta]$.

Exemples

Déterminons la forme trigonométrique des deux nombres complexes $z = 2 + 2i$ et $z' = 2 - 2i$.

Application

Écrire sous la forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

- $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$
- $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$
- $z_3 = -1 - i\sqrt{3}$
- $z_4 = -2\sqrt{3} + 2i$
- $z_5 = 4$
- $z_6 = -7$

Propriété

Soient z et z' deux éléments de $\mathbb{C}^*$ tels que $z = [r;\theta]$ et $z' = [r';\theta']$ et $n \in \mathbb{N}$:

- $[r,\theta] = [r',\theta'] \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \theta = \theta' + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \end{cases}$.
- $z \times z' = [r,\theta] \times [r',\theta'] = [rr', \theta + \theta']$.
- $\frac{1}{z} = \frac{1}{[r,\theta]} = [\frac{1}{r}, -\theta]$.
- $\frac{z}{z'} = \frac{[r,\theta]}{[r',\theta']} = [\frac{r}{r'}, \theta - \theta']$.
- $z^n = [r,\theta]^n = [r^n, n\theta]$.

Application

On considère z_1, z_2 et z_3 trois nombres complexes non nuls tels que $\arg(z_1) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $\arg(z_2) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$. Déterminer l'argument du nombre z_3 dans les cas suivants :

a. $z_3 = z_1 z_2^2$.

b. $z_3 \times \overline{z_2} = 4z_1$.

Exercice

On pose $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = 1 + i$.

1. Écrire z_1 et z_2 sous la forme trigonométrique puis en déduire la forme trigonométrique...

Exercice

Déterminer dans le plan complexe l'ensemble (E) des points $M(z)$ dans les cas suivants :

a. $|z - 2 + i| = |z - 4i|$

b. $|z + i| = |z - 1 + i|$

c. $|z - 2 + i| = 4$

d. $|iz - 2| = |z + 1 - i|$

e. $|z| = |z + 1 - i|$

V. La forme géométrique d'un nombre complexe

1. Argument d'un nombre complexe

2. Écrire Z sous la forme algébrique, où $Z = \frac{z_1^2}{z_2}$.
3. En déduire la valeur de $\cos(\frac{5\pi}{12})$ et $\sin(\frac{5\pi}{12})$.
4. Montrer que $z_1^{12} \in \mathbb{R}$.

3. Angle entre deux vecteurs - Argument d'un nombre complexe

Propriété

Soient $A(z_A), B(z_B), C(z_C)$ et $D(z_D)$ des points du plan complexe. On a :

- $(\vec{e_1}, \vec{AB}) \equiv \arg(z_B - z_A)[2\pi]$.
- $(\vec{AB}, \vec{AC}) \equiv \arg(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A})[2\pi]$.
- $(\vec{AB}, \vec{DC}) \equiv \arg(\frac{z_C - z_D}{z_B - z_A})[2\pi]$.

Application

On considère dans le plan complexe les points $A(2; 2), B(2; -1), C(4; 2)$ et $D(6; 2)$.

1. Calculer $(\vec{AD}, \vec{AC})$, que peut-on déduire ?
2. Calculer $(\vec{AC}, \vec{AB})$. Que peut-on dire de la position des deux droites (AB) et (AC) ?

Exercice

Dans le plan complexe on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = \sqrt{3} - i$, $z_B = -z_A$ et $z_C = \sqrt{3} + 3i$ et soit D le point symétrique de C par rapport à l'axe réel.

1. Calculer $\frac{z_A - z_D}{z_A - z_C}$ puis déduire que les points A, D et C sont alignés.
2. Vérifier que $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$.
3. Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

Exercice

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a = \sqrt{3}, b = 2+i\sqrt{3}, c = 2-\sqrt{3}+2i, d = (2-\sqrt{3})i$. Montrer que ABCD est un carré.

VI. Représentation complexe des transformations usuelles

1. La translation

Soit $t_{\vec{u}}$ une translation de vecteur $\vec{u}(z_{\vec{u}})$ et soit $M'(z_{M'})$ l'image du point $M(z_M)$ par la translation $t_{\vec{u}}$. On a : $t_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \vec{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow z_{M'} - z_M = z_{\vec{u}} \Leftrightarrow z_{M'} = z_M + z_{\vec{u}}$. Cette écriture s'appelle la **représentation complexe de la translation** $t_{\vec{u}}$.

Application

On considère la translation t de vecteur $\vec{u}(-1+2i)$.

1. Déterminer la représentation complexe de la translation t.
2. Déterminer l'affixe du point A' l'image de A(2i) par la translation t.
3. Déterminer l'affixe de B tels que t(B) = B' et B'(2-3i).

2. L'homothétie

Soient $\Omega(z_\Omega)$ un point du plan complexe et k un élément de $\mathbb{R}^*$. Soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport k. Soit $M'(z_{M'})$ l'image de $M(z_M)$ par l'homothétie h. On a : $h(M) = M' \Leftrightarrow \Omega\vec{M'} = k\Omega\vec{M} \Leftrightarrow z_{M'} - z_\Omega = k(z_M - z_\Omega) \Leftrightarrow z_{M'} = z_\Omega + k(z_M - z_\Omega) \Leftrightarrow z_{M'} = kz_M + z_\Omega(1-k)$. Cette écriture s'appelle la **représentation complexe de l'homothétie** h.

Application

On considère l'homothétie de centre $\Omega(2-i)$ et de rapport 4.

1. Déterminer la représentation complexe de l'homothétie h.
2. Déterminer l'affixe du point A' l'image de A(1+i) par l'homothétie h.
3. Déterminer l'affixe de B où $h(B) = B'$ et $B'(2i)$.

Exercice

Connaître la nature des transformations usuelles suivantes dont la représentation complexe est comme suit :

a. $z' = z - 3i$.

b. $z' + 2i = -5(z+2i)$.

c. $z' = 1 - z$.

d. $z' = 4z - 3i$.

VII. Notation exponentielle - Applications trigonométriques

1. Notation exponentielle d'un nombre complexe

Activité

1. On considère le nombre complexe $z = 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{6}$. Montrer que $z = [4\sqrt{2}; \frac{\pi}{3}]$.
2. On écrit z sous la forme $z = 4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$. Cette écriture s'appelle une **forme exponentielle** du nombre complexe z.
3. Donner une forme exponentielle des nombres complexes suivants : $z_1 = 1 - i, z_2 = 2i, z_3 = 3 + 3i\sqrt{3}$ et $z_4 = -3$.

Définition

Tout nombre complexe z de module r et d'argument θ s'écrit sous la forme $z = re^{i\theta}$. Cette écriture s'appelle la **forme exponentielle** du nombre z.

Exemples

- $e^{i\pi} = -1$.
- $2e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}) = 2(\cos(\pi - \frac{\pi}{4}) + i\sin(\pi - \frac{\pi}{4})) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

Application

1. Écrire sous la forme algébrique les nombres complexes : $z_1 = 4e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = e^{i\frac{5\pi}{4}}$.
2. Écrire sous la forme exponentielle le nombre complexe $z = -3(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})$.

Propriété

Soient r, r', θ et θ' des nombres réels. On a :

- $|e^{i\theta}| = 1$.
- $\arg(e^{i\theta}) = \theta[2\pi]$.
- $e^{i\theta} = e^{-i\theta}$.
- $re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$.
- $\frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$.
- $\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$.
- $(\forall n \in \mathbb{Z})(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$.

Application

On pose : $z_1 = 1 - i, z_2 = 2i$ et $z_3 = 3 + 3i\sqrt{3}$. Écrire sous la forme exponentielle les nombres suivants : $a = \frac{z_1}{z_3}, b = z_1^8, c = \frac{z_2 z_3}{z_1}$.

2. Formule de Moivre - Formules d'Euler - Applications

a. Formule de Moivre

On a : $(\forall n \in \mathbb{Z})(\forall \theta \in \mathbb{R}) : (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$. Ainsi : $(\forall n \in \mathbb{Z})(\forall \theta \in \mathbb{R}) : (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$. Cette égalité s'appelle la **formule de Moivre**.

Propriété (formule de Moivre)

$(\forall n \in \mathbb{Z})(\forall \theta \in \mathbb{R}) : (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.

Application

1. Écrire par deux méthodes différentes $(\cos(x) + i\sin(x))^2$ sous la forme algébrique.
2. En déduire la valeur de $\cos(2x)$ et $\sin(2x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

b. Formules d'Euler

On sait que : $(\forall \theta \in \mathbb{R}) \begin{cases} e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) & (1) \\ e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i\sin(\theta) & (2) \end{cases}$

La somme des deux égalités donne : $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$.
En soustrayant l'équation (1) de l'équation (2) on obtient : $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$.
Ces deux formules résultantes s'appelle les **formules d'Euler**.

Propriété (formules d'Euler)

$(\forall \theta \in \mathbb{R}) \quad \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$.

Application

1. En utilisant les formules d'Euler, montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) : (\cos(x))^2 = \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}$. On dit dans ce cas-là qu'on a **linéarisé** le polynôme trigonométrique $(\cos(x))^2$.
2. Linéariser les expressions suivantes $\sin^2(x)$ et $\cos^3(x)$.

VIII. Équations de second degré dans $\mathbb{C}$

Propriété

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $az^2 + bz + c = 0$ où a, b et c sont des réels et $a \neq 0$. Le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$ s'appelle le discriminant de l'équation.

- Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet deux solutions réelles $z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une solution réelle double $z_0 = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, alors l'équation admet deux solutions complexes conjuguées distinctes : $z_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \overline{z_1} = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Application

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :
   - $(E_1) : z^2 = -4$
   - $(E_2) : z^2 + 2\sqrt{3}z + 4 = 0$
   - $(E_3) : 2z^2 - 3z + 2 = 0$
2. On pose $p(z) = z^3 - 6z^2 + 12z - 16$.
   a. Déterminer les réels a et b tels que : $(\forall z \in \mathbb{C})\, p(z) = (z-4)(z^2 + az + b)$.
   b. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $p(z) = 0$.

IX. La représentation complexe de la rotation

Soit R une rotation de centre $\Omega(z_\Omega)$ et de mesure d'angle θ, et soit $M'(z_{M'})$ l'image de $M(z_M)$ par la rotation R. On a : $R(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\Omega\vec{M}, \Omega\vec{M}') \equiv \theta[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z_{M'} - z_\Omega| = |z_M - z_\Omega| \\ \arg(\frac{z_{M'} - z_\Omega}{z_M - z_\Omega}) \equiv \theta[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |\frac{z_{M'} - z_\Omega}{z_M - z_\Omega}| = 1 \\ \arg(\frac{z_{M'} - z_\Omega}{z_M - z_\Omega}) \equiv \theta[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \frac{z_{M'} - z_\Omega}{z_M - z_\Omega} = e^{i\theta}$

Propriété

Soit R une rotation de centre $\Omega(z_\Omega)$ et de mesure d'angle θ, et soit $M'(z_{M'})$ l'image de $M(z_M)$ par la rotation R. On a :

$$z_{M'} = (z_M - z_\Omega)e^{i\theta} + z_\Omega.$$

Application

1. On considère la rotation R de centre $\Omega(2+3i)$ et de mesure d'angle $\frac{\pi}{2}$.
   a. Déterminer la représentation complexe de la rotation R.
   b. Déterminer l'affixe du point A' l'image de A(2-i) par la rotation R.
   c. Déterminer l'affixe du point B avec R(B) = B' et B'(-2-4i).
2. Déterminer l'image du point M(4i) par la rotation de centre O et de mesure d'angle $\frac{5\pi}{6}$.

Exercice

On considère la transformation F représentée par : $z' = -iz + i - 1$.

1. Montrer qu'il existe un point unique M du plan complexe (P) invariant par la transformation F. Notons ce point par Ω et son affixe par ω.
2. Vérifier, pour tout $M(z)$ et $M'(z')$ du plan (P), que :
$$F(M) = M' \Leftrightarrow z' - \omega = -i(z - \omega).$$
3. En déduire la nature de la transformation F.

Exercice de synthèse : Session Normale 2020

1. On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation

$$(E) : z^2 - 2(\sqrt{2} + \sqrt{6})z + 16 = 0.$$

   a. Vérifier que $\Delta = -4(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2$.

   b. En déduire les solutions de l'équation (E).

2. On considère les nombres complexes $a = (\sqrt{6}+\sqrt{2})+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})$, $b = 1+i\sqrt{3}$ et $c = \sqrt{2}+i\sqrt{2}$.

   a. Vérifier que $b\overline{c} = a$ puis déduire que : $ac = 4b$.

   b. Écrire les deux nombres complexes a et b sous forme trigonométrique.

   c. En déduire que $a = 4(\cos(\frac{\pi}{12}) + i\sin(\frac{\pi}{12}))$.

3. Dans le plan complexe est rapport à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On considère les points B, C et D d'affixes respectives b, c et d tel que $d = a^4$. Soit z l'affixe du point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{12}$.

   a. Vérifier que $z' = \frac{1}{4}az$.

   b. Déterminer l'image du point C par la rotation R.

   c. Déterminer la nature du triangle OBC.

   d. Montrer que $a^4 = 128b$ et en déduire que les points O, B et D sont alignés.