Représentation graphique d'une fonction

Remarques

Pr. LATRACH ABDELKBIR

I. Branches infinies :

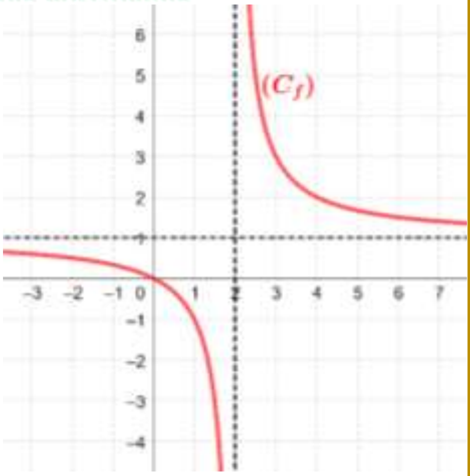
Dans tout le chapitre le plan est muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

Définition :

Soient f une fonction numérique et (C_f) sa courbe représentative.
On dit que (C_f) admet une ***branche infinie*** si l'un des coordonnées d'un point de (C_f) tend vers l'infini.

1. Asymptote verticale – Asymptote horizontale :

Activité ① :



Soit f la fonction définie sur $IR\backslash\{2\}$ par $f(x)=\frac{x}{x-2}$.

1. a. Calculer limites de f au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$.
b. Que peut-on dire sur (C_f) au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$?

2. Calculer $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$.
b. Que peut-on dire sur (C_f) au voisinage de 2?

Définition :

Soient f une fonction numérique et a et b deux nombres réels.

- Si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\infty$, alors on dit que la droite d'équation $x=a$ est une ***asymptote verticale*** à la courbe (C_f).
- Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$, alors on dit que la droite d'équation $y=b$ est une ***asymptote horizontale*** à la courbe (C_f) au voisinage de ∞.

Exemple :

On considère f la fonction définie par $f(x)=\frac{3x^2+x-2}{x^2-4}$.

- On a $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{3x^2+x-2}{x^2-4}=+\infty$ alors (C_f) admet une asymptote verticale d'équation $x=2$.
- Et on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2+x-2}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{x^2}=3$. Donc (C_f) admet une asymptote horizontale d'équation $y=3$ au voisinage de $+\infty$.

Application ① :

On considère f et g deux fonctions définies respectivement par $f(x)=5+\frac{x}{x^2+3}$ et $g(x)=\frac{x+1}{(x-4)^2}$.

3. Calculer limites de f au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$. Interpréter graphiquement les résultats.

4. Montrer que la droite d'équation $x=4$ est une asymptote verticale à la courbe de g.

Application ② :

On considère f la fonction définie par son tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1

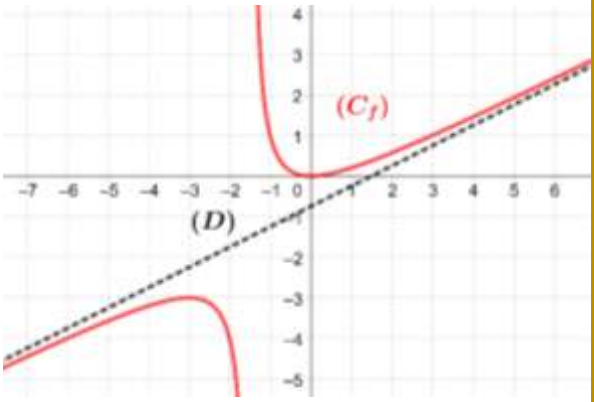
Déterminer les éventuelles asymptotes à la courbe de f.

2. Asymptote oblique :

Dans ce paragraphe, f étant une fonction qui admet une limite infinie au voisinage de ∞.

Activité ② :

Soit f la fonction définie sur $IR\backslash\{-\frac{3}{2}\}$ par $f(x)=\frac{x^2}{2x+3}$ et (D) est la droite d'équation $y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$.



1. Calculer limites de f au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)-\left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}\right)$.

Que peut-on dire sur (C_f) et la droite (D)?

Définition :

Soient a et b deux réels tels que $(a\neq 0)$.
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(ax+b)=0$ (respectivement $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(ax+b)=0$), alors on dit que la droite d'équation $y=ax+b$ est une ***asymptote oblique*** à la courbe de f au voisinage de $+\infty$ (respectivement$-\infty$).

Propriété :

La droite d'équation $y=ax+b$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$ (respectivement au voisinage de $-\infty$) si et seulement s'il existe une fonction h telle que $f(x)=ax+b+h(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=0$ (respectivement $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=0$).

Exemple :

On considère f la fonction définie par $f(x)=2x-3+\frac{x}{2x^2+1}$.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(2x-3)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}=0$.

Donc la droite d'équation $y=2x-3$ est une asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

Application ③ :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ par : $f(x)=\frac{2x^2-7x+8}{x-3}$.

Montrer que la droite d'équation $y=2x-1$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

Propriété :

Soient a et b deux réels tels que $(a\neq 0)$.
La droite d'équation $y=ax+b$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$ (respectivement au voisinage de $-\infty$) si et seulement si $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-ax=b$ (respectivement $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-ax=b$).

Application ④ :

Déterminer l'équation de l'asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ à la courbe (C_f) dans chacun des cas suivants :

❶ $f(x)=\frac{3x^3+x^2-1}{x^2}$ ❷ $f(x)=\frac{\sin(x)}{x}+2x$

3. Branches paraboliques :

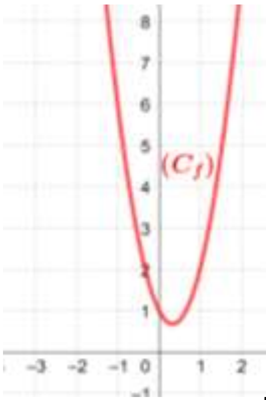
Définition :

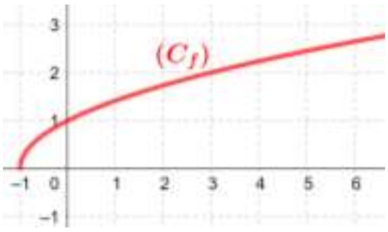
Soit f une fonction tel que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ et (C_f) sa courbe représentative dans repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

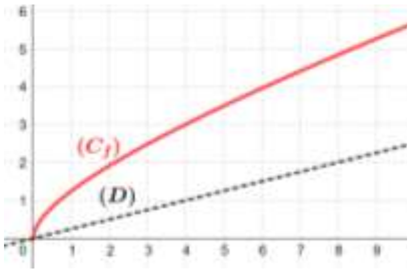
- Si $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$, alors on dit que (C_f) admet une ***branche parabolique de direction l'axe des abscisses*** au voisinage de ∞ .

Pr. LATRACH ABDELKBIR

- Si $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty$, alors on dit que (C_f) admet une ***branche parabolique de direction l'axe des ordonnées*** au voisinage de ∞ .
- Si $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ et $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax)=\infty$, alors on dit que (C_f) admet une ***branche parabolique de direction la droite d'équation $y=ax$*** au voisinage de ∞ .







(C_f)admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.	(C_f)admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.	(C_f)admet une branche parabolique de direction la droit (D).

❍ Exemples :

On considère f, g et h les fonctions définies respectivement par $f(x)=3x^2-2x+1$, $g(x)=\sqrt{3x-2}$ et $h(x)=2x^2+\sqrt{x}$.

- On a $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}3x^2-2x+1=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2-2x+1}{x}=+\infty$.

Donc (C_f)admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

- On a $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{3x-2}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3x-2}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{3x-2}{x^2}}=0$.

Donc (C_f)admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.

- On a $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}2x+\sqrt{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}2+\frac{1}{\sqrt{x}}=2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)-2x=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$. Donc (C_f)admet une branche parabolique de direction droite d'équation $y=2x$ au voisinage de $+\infty$.

✍ Application ⑤ :

Déterminer la branche parabolique de (C_f) au voisinage $+\infty$ de dans chacun des cas suivants

❶ $f(x)=x^3-4x^2-1$ ❷ $f(x)=\sqrt{x+1}-2x$ ❸ $f(x)=\frac{2x-5}{\sqrt{x}+3}$

Résumé :

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ → (C_f) admet une asymptote verticale d'équation $x = a$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = l$ → (C_f) admet une asymptote horizontale d'équation $x = l$ au voisinage de ∞

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ → $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$:

- 0 → (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de ∞
- ∞ → (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de ∞
- a → $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - ax)$:
  - ∞ → (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$ au voisinage de ∞
  - b → (C_f) admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$ au voisinage de ∞

II. Concavité d'une courbe - Points d'inflexion :

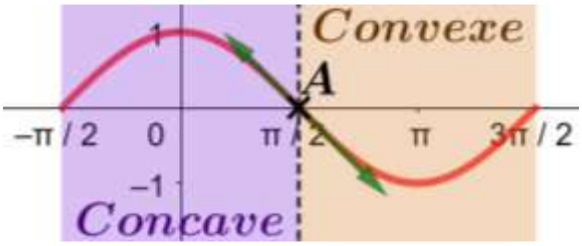
Définition :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$. On dit que (C_f) est :

- On dit que (C_f) est ***convexe*** (ou admet ***une concavité dirigée vers les ordonnées positives***), si (C_f) est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.
- On dit que (C_f) est ***concave*** (ou admet ***une concavité dirigée vers les ordonnées négatives***), si (C_f) est entièrement située au-dessous de chacune de ses tangentes.
- $A(a; f(a))$ est un point d'inflexion de (C_f) si la courbe traverse sa tangente en ce point.

Exemple :

La figure ci-dessous représente la courbe de la fonction $cosinus$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.



La fonction cosinus est concave sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ et convexe sur $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ et $A\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$ est un point d'inflexion de (C_{cos}).

Remarque :

Un point d'inflexion est un point de (C_f) où la courbe (C_f) change de concavité.

Propriété :

Soient f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I et (C_f) sa courbe représentative et $a \in I$.

- Si f'' est positive suor l'intervalle I, alors (C_f) est convexe
- Si f'' est négative sur l'intervalle I, alors (C_f) est concave.
- Si f'' s'annule en a en changeant de signe, alors le point $A(a; f(a))$ est u point d'inflexion de (C_f).

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$.
Etudions la concavité de (C_f)en précisant les points d'inflexion.

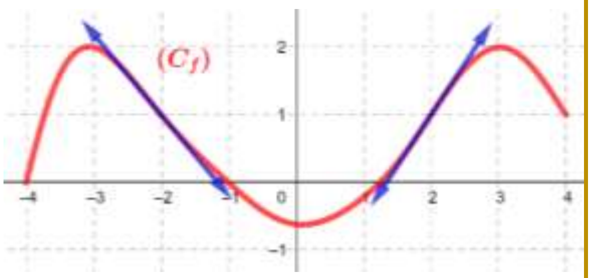
Application ⑥ :

Etudier la concavité de courbe de la fonction f en précisant les points d'inflexion s'ils existent dans chacun des cas suivants :

❶ $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - 2x^2 + 3x + 5$ ❷ $f(x) = x + \frac{1}{x-1}$

Application ⑦ :

La figure ci-contre représente la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-4; 4]$.
Etudier la concavité de courbe de la fonction f en précisant les points d'inflexion s'ils existent.



III. Eléments de symétrie d'une courbe :

1. Axe de symétrie :

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un ensemble D et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
La droite (Δ) d'équation $x = a$ $(a \in \mathbb{R})$ est un ***axe de symétrie*** de la courbe (C_f) si et seulement si : $\begin{cases} (\forall x \in D); & (2a - x) \in D \\ (\forall x \in D); & f(2a - x) = f(x) \end{cases}$.

Exemple :

Montrons que la droite d'équation (Δ): $x = -\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe de la fonction f définie par $f(x) = x^2 + x + 1$.

Application ⑧ :

Montrer que la droite (D) est un axe de symétrie de (C_f)dans chacun des cas suivants :

- $f(x) = \frac{-3}{x^2-4x+7}$ et $(D): x = 2$.
- $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$ et $(D): x = \frac{5}{2}$.

2. Centre de symétrie :

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un ensemble D et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
Le point $\Omega(a; b)$ tel que $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ est un ***centre de symétrie*** de la courbe (C_f) si et seulement si : $\begin{cases} (\forall x \in D); & (2a - x) \in D \\ (\forall x \in D); & f(2a - x) + f(x) = 2b \end{cases}$.

Exemple :

Montrons que le point $\Omega(1; 1)$ est un centre de symétrie de la courbe de la fonction f définie par $f(x) = \frac{x}{x-1}$.

Application ⑨ :

Montrer que le point Ω est un centre de symétrie de (C_f)dans chacun des cas suivants :

- $f(x) = \frac{-2x^2+7x-5}{2x-1}$ et $\Omega\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$.
- $f(x) = 2x^3 + 6x^2 + 3x + 3$ et $\Omega(-1; 4)$.