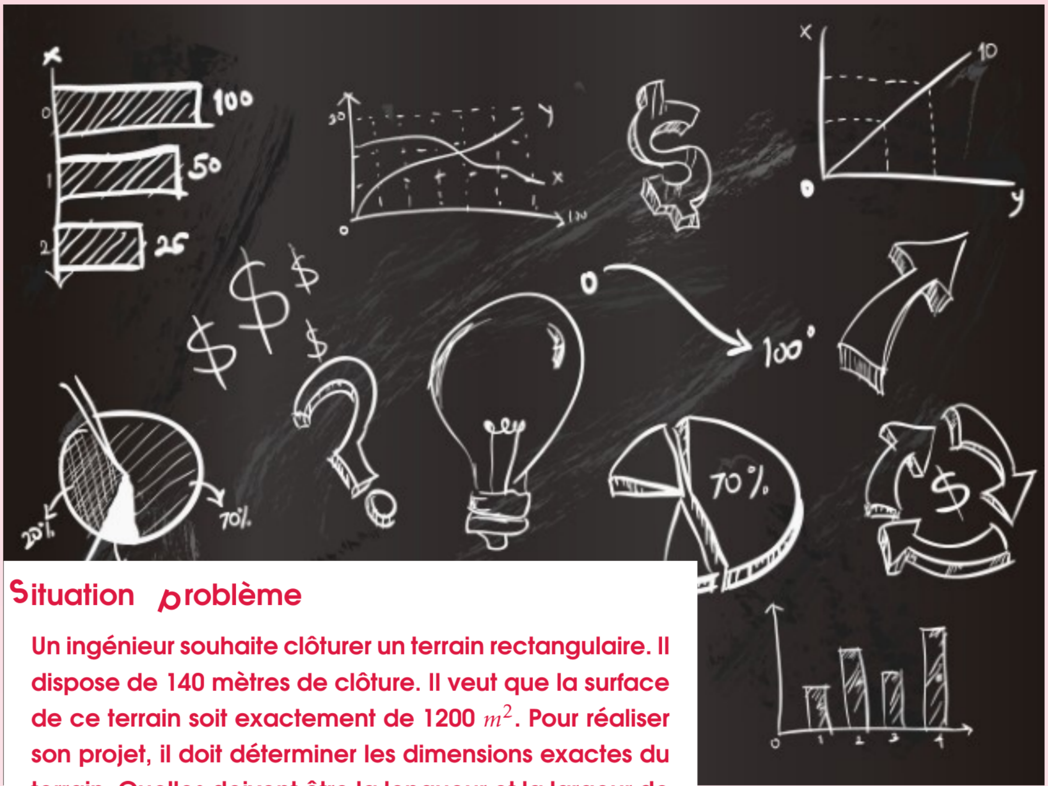
CHAPITRE

2

Équations, Inéquations et Systèmes



Situation problème

Un ingénieur souhaite clôturer un terrain rectangulaire. Il dispose de 140 mètres de clôture. Il veut que la surface de ce terrain soit exactement de 1200 m^2. Pour réaliser son projet, il doit déterminer les dimensions exactes du terrain. Quelles doivent être la longueur et la largeur de ce terrain pour respecter ces deux conditions ?

Plan du chapitre 2

COURS

I Équations et inéquations du seconde degré à une inconnue

1. Équations du seconde degré à une inconnue

Définition 1:

Toute équation s'écrit sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec a, b et c des nombres réels et $a \neq 0$ s'appelle équation du seconde degré à une inconnue.

Remarque 1:

1. Tout nombre t tel que $at^2 + bt + c = 0$ appelé solution ou racine de cette équation.
2. Le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.
3. L'écriture $ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$.

Propiété 1:

Soient a, b et c des nombres réels tels que $a \neq 0$. L'ensemble de solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ dans $\mathbb{R}$:

1. Si $\Delta < 0$ alors $S = \emptyset$.
2. Si $\Delta = 0$ alors $S = \{-\frac{b}{2a}\}$.
3. Si $\Delta > 0$ alors $S = \{\dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\}$.

Application :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $2x^2 + 3x - 5 = 0$
2. $x^2 + x + \dfrac{1}{4} = 0$
3. $x^2 - 3x + 4 = 0$

Solution:

a - Somme et produit des racines

Propiété 2:

Si l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet deux solutions x_1 et x_2 dans $\mathbb{R}$, alors :

1. $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$
2. $x_1\times x_2=\dfrac{c}{a}$

Propiété 3:

Soient s et p deux nombres réels.

1. Le système $(S):\begin{cases} x+y=s \\ xy=p \end{cases}$ admet une solution si et seulement si $s^2-4p\geq 0$.
2. Les réels x et y sont solutions de l'équation $X^2-sX+p=0$.
3. L'ensemble de solution du système (S) est $S=\{(x;y);(y;x)\}$.
4. Un tel système est appelé un système symétrique.

Application :

1. Sachant que 1 est une solution de $2026x^2-x-2025=0$, trouver la deuxième solution.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système suivant : $\begin{cases} x+y=13 \\ xy=12 \end{cases}$

Solution:

2. Signe d'un trinôme du seconde degré

Propiété 1:

Soit $ax^2 + bx + c$ un trinôme de seconde degré tel que a, b et c des réels et $a \neq 0$ et soit Δ son discriminant. On a les cas suivants :

1. Si $\Delta < 0$ alors le tableau de signe de $ax^2 + bx + c$:

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	signe de a	

2. Si $\Delta = 0$ alors le tableau de signe de $ax^2 + bx + c$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		signe de a	0	signe de a	

3. Si $\Delta > 0$ alors le tableau de signe de $ax^2 + bx + c$ (On suppose que $x_1 < x_2$) :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		signe de a	0	signe opposé de a	0	signe de a	

Remarque 1:

Pour résoudre une inéquations du seconde degré à une inconnue on se base sur l'étude de signe d'un trinôme.

Exemple 1:

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2x^2 + 2x - 12 \geq 0$

....

....

....

....

....

....

2 Résoudre dans $\mathbb{R}^+$ l'inéquation $x^2 - 2x + 3 \leq 0$ ....

....

....

....

3. Équations et inéquations du premier degré à deux inconnues

On note $\mathbb{R}^2$ l'ensemble des couples (x, y) tels que $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

Définition 1:

Tout équations de la forme (E) : $ax + by + c = 0$ où a, b et c des nombres réels tels que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ appelée équation du premier degré à deux inconnues x et y.
Un coupe (x_0, y_0) est une solution de l'équation (E) si et seulement si $ax_0 + by_0 + c = 0$.

Remarque 1:

Pour résoudre dans $\mathbb{R}^2$ l'équation $ax + by + c = 0$. On calcule x en fonction de y ou bien y en fonction de x.

Exemple 1:

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ l'équation $2x - y - 3 = 0$.

....

....

....

Propiété 1:

Une droite (D) d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ détermine deux demi-plan ouverts :

1. L'un est l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que : $ax + by + c > 0$
2. L'autre est l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que : $ax + by + c < 0$

Application :

1. Résoudre graphiquement les inéquations :
   a. $x + 2y - 2 < 0$
   b. $2x + y + 2 \geq 0$
2. En déduire les solutions du système : $(S) : \begin{cases} x + 2y - 2 < 0 \\ 2x + y + 2 \geq 0 \end{cases}$

Solution:

II Les systèmes des équations

1. Systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnue

On considère le système $(S):\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ tel que a, b, c, a', b' et c' des réels.

Le nombre $ab'-a'b$ appelé le déterminant du système (S) noté $D=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=ab'-a'b$

Et on pose $D_x=\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}=cb'-c'b$ et $D_y=\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}=ac'-a'c$.

Propiété 1:

1. Si $D=0$ alors deux cas se présents :
   a. Si $D_x\neq 0$ ou $D_y\neq 0$ alors le systèmes n'admet pas de solutions.
   b. Si $D=D_x=D_y=0$ alors le système admet une infinité de solutions.
2. Si $D\neq 0$ alors le système (S) (appelé système de Cramer) admet une solution unique dans $\mathbb{R}^2$ donnée par :

$$x_0=\frac{D_x}{D}=\frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{D} \quad et\ y_0=\frac{D_y}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{D}$$

Et on écrit $S=\{(x_0,y_0)\}$.

Exemple 1:

Résoudre par la méthode du déterminant dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes :

$$(S_1):\begin{cases} x+2y=4 \\ -x+4y=2 \end{cases} \qquad (S_2):\begin{cases} 3x+y=7 \\ 2x-y=8 \end{cases}$$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2. Systèmes de n équations du premier degré à n inconnues $(2 \leq n \leq 4)$

Exemple 1:

On considère les système $(S) : \begin{cases} x+y+z=21 \\ 2x+y=20 \\ x+2z=3 \end{cases}$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Application :

Résoudre dans $\mathbb{R}^4$ le système suivante : $(S) = \begin{cases} x-y+2z+3t=0 \\ y-2z-t=0 \\ -2z+4t=0 \\ y-t=0 \end{cases}$

Solution: