Notions de logique - 1BSF

Pr. Latrach Abdelkbir

✍ *Activité ①:*

Mettre une croix (x) dans la case qui convient :

Textes mathématiques	*Vrai*	*Faux*	*On ne peut pas décider sa vérité*	*N'a pas de sens*
• 15×2				
• $12 \times 3 + 4 = 20$				
• $-6 \notin \mathbb{N}$				
• 2 est une racine du polynôme $P(x) = x^2 - x - 2$.				
• Chaque nombre impair et un nombre premier.				
• $(x \in \mathbb{Z}): x + 5 \geq 0$.				
• Soient x, y *de* $\mathbb{Z}$, *on a* $2x - y = 1$				

✍ *Application ①:*

Déterminer la vérité de chacun des propositions suivantes :

- P: " $\left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{7}{3}$ " .
- Q: " $\sqrt{3+\sqrt{5}} \times \sqrt{3-\sqrt{5}} \in \mathbb{N}$ ".
- R :"L'équation $x^2 - 3x + 5 = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$".

✍ *Activité ②:*

1. Mettre une croix (x) dans la case qui convient :

Proposition	Vrai	Faux
• Le carré de tout nombre réel est positif.		
• Il existe un nombre réel inférieur strictement à 1.		
• Tout nombre réel est décimal.		
• L'équation $x^2 = 0$ admet une unique solution reélle.		

Les propositions précédentes apparaissent sous forme de phrases, mais on peut les écrire à l'aide symboles.
Si on symbolise "pour tout " ou " quel que soit " avec le symbole ∀ et " Il existe au moins" avec le symbole ∃, alors la première proposition du tableau devient $(\forall x \in \mathbb{R}): x^2 \geq 0$ et la deuxième devient $(\exists x \in \mathbb{R}): x < 1$.
Les symboles ∀ et ∃ sont appelés les quantificateurs.

2. Compléter le tableau suivant en utilisant les symboles ∀ et ∃.

Proposition	*Proposition par les quantificateurs*
• Tous les entiers naturels sont positifs	•
•	• $(\exists x \in \mathbb{R}): x^2 = -1$
• L'équation $\mathbf{3x - 2 = 0}$ admet une solution réelle.	•
• Tout nombre réel est décimal.	•
•	• $(\forall x \in \mathbb{R}): x^2 - x + 1 > 0$
• Pour tout réel x, il existe au moins un entier naturel $\boldsymbol{n}$ tels que $\boldsymbol{x < n + 1}$	•
•	• $(\forall m \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N}) : m = 2n$

✍ *Application ②:*

Réécrire les propositions suivantes en utilisant les quantificateurs logiques

- P_1 : "La valeur absolue de tout nombre réel non nul est strictement positive".
- P_2 : "Il existe au moins un nombre réel x tel que $2x^2 - 3x = 0$".
- P_3 : "L'équation $x - 2\sqrt{x} + 1 = 0$ admet une unique solution réelle".
- P_4 : "Le polynôme $P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ admet au moins une racine".
- P_5 : "Pour tout nombre réel x, il existe au moins un entier N tels que $N \leq x < N + 1$".
- P_6 : "Il existe un entier multiple de tous les autres".

✍ *Exercice ①:*

Déterminer la valeur de vérité de chacun des propositions suivantes :

• P_1 : "$(\exists x \in \mathbb{R}): x^2 + x - 1 = 0$".	• P_2 : "$(\forall x \in \mathbb{R}): x^2 + 3x + 7 < 0$".
• P_3 : "$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}): x \leq y$".	• P_4 : "$(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}): x \leq y$".
• P_5 : "$(\forall y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}): x \leq y$".	• P_6 : "$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})$": $x \leq y$".

✍ *Application ③:*

Compléter le tableau suivant :

La proposition P	**La négation $\bar{P}$**
• $(\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 + 2x + 1 \geq 0$	•
• $(\forall x \in \mathbb{N}) : x^2 - 2x < 0$	•
• $(\forall x \in \mathbb{Q}): \sqrt{x} \notin \mathbb{Q}$	•

• $(\exists x \in \mathbb{R}): x \in \mathbb{Q}$	•
• $(\exists x \in \mathbb{N})$: x est pair	•
• $(\exists x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N}): x \prec y$	•
• $(\forall x \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{Z}) : x - y = 3$	•
• Tout triangle est rectangle	•
• $(\forall x \in \mathbb{Q})(\forall y \in \mathbb{Z}): x \times y \in \mathbb{Z}$	•

✍ Application ④:

Déterminer la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :

- P_1 : (3 est impair) et $(3 = 5)$.
- P_2 : $(4 \times 8 = 20)$ *ou* (10 *est pair*).
- P_3 : $(9 - 3 = 6)$ *et* $(-1 \in \mathbb{Z})$.
- P_4 : $(-4 \in \mathbb{N})$ ou $(\forall x \in \mathbb{R}: x^2 + 1 > 0)$.

✍ Application ⑤:

Nier les deux propositions suivantes :

- P: "$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}): x \leq y$ *ou* $x \geq y$".
- Q: "$(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}): y^2 = x$ *et* $x > 0$" .

✍ Application ⑥:

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que n *pair* $\Longrightarrow n^2$ *pair*.
2. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$: $\left(\frac{1}{1+\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x} \Longrightarrow x = 0\right)$.

✍ Exercice ②:

Soient x et y de $\mathbb{R}$. Montrer que $1 + xy = x + y \Longrightarrow x = 1$ *ou* $y = 1$.

✍ Exercice ③:

1. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})$: $3 \leq x \leq 5 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4} \leq \frac{1}{x-1} \leq \frac{1}{2}$.
2. **a.** Montrer que $(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R})$: $a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = b = 0$.
   b. En déduire $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+)$: $x + y + 2 = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} \Rightarrow x = y = 1$.

✍ Application ⑦:

Déterminer la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :

- P_1 : 3 est *impair* $\Leftrightarrow 3 = 5$.
- P_2 : $4 \times 8 = 20 \Leftrightarrow 10$ *est pair*.
- P_3 : $-1 \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 9 - 3 = 6$.
- P_4 : $-4 \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}): x^2 + 1 \succ 0$.

✍ Application ⑧:

Montrer que les propositions suivantes sont des lois logiques :

- $P \Leftrightarrow \urcorner(\urcorner P)$
- $P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \urcorner Q \Rightarrow \urcorner P$
- $\urcorner(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow P$ *et* $\urcorner Q$
- $[(P \Rightarrow Q) et (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

✍ Application ⑨:

Montrer que les propositions suivantes sont fausses :

- P_1 : " $(\forall x \in \mathbb{R}): x + 1 = 2$".
- P_2 : " $(\forall x \in \mathbb{R}^*): x + \frac{1}{x} \geq 2$".
- P_3 : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+)$: $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

✍ Application ①⓪:

1. Montrer que : $(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R})$: $a + b > 1 \Longrightarrow a > \frac{1}{2}$ *ou* $b > \frac{1}{2}$.
2. Montrer que : $(\forall x > 1)(\forall y > 1)$: $x \neq y \Longrightarrow \frac{x}{1+x^2} \neq \frac{y}{1+y^2}$.

✍ Application ①①:

1. Montrer que : $(\forall x \neq -1)(\forall y \neq -1)$: $\frac{x}{1+x} = \frac{y}{1+y} \Leftrightarrow x = y$.
2. Montrer, pour tout x de $\mathbb{R}^+$, que $\left(\sqrt{2x+2} = 1 + \sqrt{x}\right) \Leftrightarrow (x = 1)$.
3. Montrer, pour tout x de $[1; +\infty[$, que $\frac{\sqrt{x-1}}{x} \leq \frac{1}{2}$.

✍ Exercice ④:

1. Soit x un réel. Montrer que : $\frac{2}{\sqrt{1+x^2}} = 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$ *ou* $x = -\sqrt{3}$.
2. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$: $|x - 1| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{5} < \frac{1}{x+1} < \frac{2}{3}$.
3. Soient $a \in [1; +\infty[$ et $b \in [4; +\infty[$. Montrer que
   $$\sqrt{a-1} + 2\sqrt{b-4} = \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow a = 2 \text{ et } b = 8.$$

✍ Application ①②:

Soit $n \in IN$. Montrer que $n^2 + n$ est pair.

✍ Exercice ⑤:

1. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})$: $|x - 1| \leq x^2 - x + 1$.
2. Soient x, y et z de $\mathbb{R}_+^*$ tels que : $x + y + z < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ et $xyz > 1$.
   Montrer que $x \neq 1, y \neq 1$ *et* $z \neq 1$.

✍ Application ①③:

1. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$: $2/5^n - 3^n$.
2. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$: $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
3. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$: $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.