Calcul intégral

I. Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Activité

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle définie par $f(x) = 3x^2 - 1$.

1. Déterminer deux primitives F et G de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $F(2) - F(0), G(2) - G(0)$. Que remarquez-vous ?

Le nombre $F(b) - F(a)$ ne dépend pas du choix d'une primitive de la fonction f. Le nombre $F(b) - F(a)$ s'appelle intégrale de la fonction f de a à b elle est notée $\int_a^b f(x)dx$.

Définition

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$ et F une primitive de f sur $[a, b]$. Le nombre $F(b) - F(a)$ est appelé **intégrale** de f de a à b et on écrit : $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Exemple

Calculons l'intégrale suivante $\int_0^1 \sqrt{x+1}dx$. La fonction $x \mapsto \sqrt{x+1}$ est continue sur $[0; 1]$. Donc $\int_0^1 \sqrt{x+1}dx = \int_0^1 (x+1)'\sqrt{x+1}dx = \int_0^1 (x+1)'(x+1)^{\frac{1}{2}}dx = [\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}]_0^1 = \frac{2}{3}(\sqrt{8} - 1)$.

Application

Calculer les intégrales suivantes :

a. $\int_0^2 (x+4)dx$

b. $\int_1^e \frac{1}{x}dx$

c. $\int_{e^2}^{e^4} \frac{\ln(x)}{x}dx$

d. $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx$

e. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x)dx$

f. $\int_{-2}^{-1} x^2 e^{-x^3}dx$

Remarque

Dans l'écriture $\int_a^b f(x)dx$, on peut remplacer la variable x par n'importe quelle autre lettre. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(t)dt = \ldots$

Exercice

Calculer les intégrales suivantes :

- $I_1 = \int_{-1}^1 (2x^3 - 5x^2 + 2)dx$
- $I_2 = \int_1^2 (\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3})dx$
- $I_3 = \int_0^1 (1 - \frac{1}{x+1})dx$
- $I_4 = \int_0^1 x\sqrt{1+x^2}dx$
- $I_5 = \int_0^{\ln 3} e^x\sqrt{e^x+1}dx$
- $I_6 = \int_0^{\pi} \cos(x)\sin^5(x)dx$
- $I_7 = \int_1^2 \frac{x-1}{x^2-2x+2}dx$
- $I_8 = \int_0^1 (1-x)e^{x^2-2x+3}dx$
- $I_9 = \int_1^{e^2} \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}dx$

Conséquences

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Pour tous a, b et c de I on a :

- $\int_a^a f(x)dx = 0$.
- $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.
- $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$ (Relation de Chasles).

Exemple

$\int_{-3}^{2} |x|dx = \int_{-3}^{0} |x|dx + \int_0^2 |x|dx = \int_{-3}^{0} -xdx + \int_0^2 xdx = [-\frac{x^2}{2}]_{-3}^{0} + [\frac{x^2}{2}]_0^2 = \frac{9}{2} + 2 = \frac{13}{2}$.

Application

Calculer les intégrales suivantes :

a. $\int_{-1}^{1} \frac{2|x|}{x^2+1}dx$

b. $\int_{-1}^{5} |x^2 - 4x|dx$

c. $\int_0^2 |e^{-x+1} - 1|dx$

Propriété

Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$ et $k \in \mathbb{R}$.

- $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.
- $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$.

Application

On considère les intégrales $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(3x)\cos(x)dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(3x)\sin(x)dx$.

1. Vérifier que $\cos(3x)\cos(x) + \sin(3x)\sin(x) = \cos(2x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Vérifier que $\cos(3x)\cos(x) - \sin(3x)\sin(x) = \cos(4x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Calculer $I + J$ et $I - J$ puis en déduire I et J.

Exercice

On pose : $K = \int_0^{\ln(2)} \frac{e^t-1}{e^t+1}dt$ et $L = \int_0^{\ln(2)} \frac{1}{e^t+1}dt$. Calculer $K + L$ et $K + 2L$ puis en déduire les valeurs de K et L.

II. Intégrale et ordre - la valeur moyenne

1. Intégrale et ordre

Propriété

Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a,b]$ $(a \leq b)$.

- Si $(\forall x \in [a,b]); f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
- Si $(\forall x \in [a,b]); f(x) \leq g(x)$, alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Application

1. Montrer que : $\int_1^2 \ln(x^2+1)dx \geq 0$.
2. Montrer que : $-\frac{1}{2} \leq \int_1^2 \frac{\sin(x)}{x^2}dx \leq \frac{1}{2}$.

2. Valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment

Définition

Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$ $(a < b)$. Il existe au moins un réel $c \in [a,b]$ tel que : $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$. Le nombre $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ est appelé **valeur moyenne** de la fonction f sur l'intervalle $[a,b]$.

Exemple

La valeur moyenne de la fonction $x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$ sur l'intervalle $[1,3]$ est $\frac{1}{2}\int_1^3 \frac{2x}{1+x^2}dx$. C'est-à-dire : $\frac{1}{2}[\ln(x^2+1)]_1^3 = \frac{\ln(5)}{2}$.

Application

Calculer la valeur moyenne de la fonction $x \mapsto \frac{\ln^2(x)+x}{x}$ sur l'intervalle $[1,e]$.

III. Techniques de calcul d'intégrales

1. Utilisation des primitives

Application

1. Calculer les intégrales suivantes : $I = \int_e^{e^2} \frac{1}{x(\ln(x)+1)}dx$; $J = \int_0^1 te^{t^2}dt$; $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)dx$ et $L = \int_0^1 \frac{2x+2}{(x^2+2x+1)^2}dx$. 2. a- Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R})\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$. b- En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^1 \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}dx$.

Exercice : BAC 2002

1. Calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\frac{1}{\cos^2(x)} - 4\cos(2x))dx$. 2. Montrer que $(\frac{x}{x^2+1})' = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ pour tout réel x puis calculer $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}dx$.

2. Décomposition des fractions rationnelles en une somme de fractions rationnelles

Application

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $f(x) = \frac{x^2-6x+4}{x-1}$.

1. Déterminer les nombres réels a, b, et c pour que l'on ait pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}.$$

2. En déduire la valeur de l'intégrale : $\int_2^3 f(x)dx$.

3. Linéarisation des fonctions trigonométriques

Application

Linéariser le polynôme trigonométrique $\cos^3 x$ puis calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 x dx$.

Exercice : BAC 2003

Vérifier, pour tout réel x, que : $\sin^2 x \cos^3 x = \cos x \sin^2 x - \cos x \sin^4 x$. Calculer l'intégrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x dx$.

4. Intégration par parties

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a, b]$ telles que u' et v' continues sur $[a, b]$. On a : $(\forall x \in [a, b]); ((u)(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. Alors : $\int_a^b (u(x)v(x))'dx = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx$. D'où $\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$.

Propriété

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que ses dérivées u' et v' sont continues sur I. Pour tout $(a, b) \in I^2$ on a : $\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$.

Exemple

Calculons l'intégrale $I = \int_0^1 xe^x dx$. Posons $\begin{cases} u'(x) = e^x \\ v(x) = x \end{cases}$, alors $\begin{cases} u(x) = e^x \\ v'(x) = 1 \end{cases}$. Il s'ensuit $I = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = [xe^x]_0^1 - [e^x]_0^1 = e - e + 1 = 1$.

Remarque

Le choix des fonctions u' et v n'est pas arbitraire. Leur bonne sélection joue un rôle clé dans cette technique. Dans l'exemple précédent si notre choix est $\begin{cases} u'(x) = x \\ v(x) = e^x \end{cases}$, alors $\begin{cases} u(x) = \frac{1}{2}x^2 \\ v'(x) = e^x \end{cases}$. On obtient donc $\int_0^1 xe^x dx = [\frac{1}{2}x^2 e^x]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}x^2 e^x dx$ ce qui rend le calcul de l'intégrale voulue est très compliqué.

Application

En utilisant la formule d'intégration par parties, Calculer les intégrales suivantes : $I_1 = \int_1^e x^2 \ln x dx$; $I_2 = \int_1^2 (2x-1)e^{-2x} dx$; $I_3 = \int_0^1 \ln(x+2)dx$ et $I_4 = \int_0^\pi x^2 \cos x dx$.

Exercice : BAC 2001

1. Vérifier, pour tout $x \in [0;1]$, que : $\frac{x^3+x}{x+1} = x^2 - x + 2 - \frac{2}{x+1}$. 2. En utilisant la formule d'intégration par parties, Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 (3x^2+1)\ln(x+1)dx$.

Exercice

En utilisant la formule d'intégration par parties, Calculer les intégrales suivantes :

- $I_1 = \int_1^e x(\ln x)^2 dx$
- $I_2 = \int_1^2 x\sqrt{3-x} dx$
- $I_3 = \int_1^e \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2} dx$
- $I_4 = \int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2} dt$
- $I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$
- $I_6 = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx$
- $I_7 = \int_0^1 \ln(x+\frac{1}{2})dx$
- $I_8 = \int_0^1 x^2 e^x dx$
- $I_9 = \int_0^\pi \sin x e^x dx$

IV. Calcul d'aires et de volumes

1. Calcul des aires

Activité

On considère la fonction définie par : $f(x) = -x+2$ et (C_f) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ unité (1cm).

1. Tracer (C_f) et colorier le domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe et les droites d'équations $x=-1$ et $x=3$, puis donner une valeur de son aire en unités d'aires.
2. Calculer $\int_{-1}^{3} |f(x)|dx \times ||\vec{i}|| \times ||\vec{j}||$. Qu'est-ce qu'on peut déduire ?

Propriété

Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$ $(a<b)$, et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthogonal. L'aire du domaine délimité par (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est égale à $\int_a^b |f(x)|dx$ (en unité d'aire).

Application

Le plan est apporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec $||\vec{i}|| = 1\text{cm}$ et $||\vec{j}|| = \sqrt{2}\text{cm}$. Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sin(x)$. Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe de f et les droites d'équations : $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = -\frac{\pi}{2}$.

Exercice : BAC 2015

Soit f la fonction définie sur $]0;e[\cup]e;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{1}{x(1-\ln x)}$ et (C_f) la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ tel que $||\vec{i}||=||\vec{j}||=2$cm.

1. Montrer que $\int_1^{\sqrt{e}}\frac{1}{x(1-\ln x)}dx=\ln 2$. (Remarquer que $\frac{1}{x(1-\ln x)}=\frac{\frac{1}{x}}{1-\ln x}$)
2. Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan délimité par (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x=1$ et $x=\sqrt{e}$.

Propriété

Soient f et g deux fonctions continues sur un segment $[a,b]$, (C_f) et (C_g) les courbes représentatives de f et g dans un repère orthogonal. Soit (Δ) le domaine délimité par les courbes (C_f) et (C_g) et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$. L'aire du domaine (Δ) en unités d'aire est donnée par : $A(\Delta)=\int_a^b|f(x)-g(x)|dx$.

Application

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$ avec $||\vec{i}||=2$cm et $||\vec{j}||=2$cm. On considère les fonctions f et g définie par : $f(x)=2x^2+1$ et $g(x)=x^2+x+1$. Calculer l'aire du domaine délimité par les courbes des fonctions f et g et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=2$.

Exercice : Session Rattrapage 2017

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x)=x+1-(x^2+1)e^x$. Et (C_f) la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ tel que $||\vec{i}||=||\vec{j}||=2$cm.

1. Montrer que $H: x\mapsto(x-1)e^x$ est une fonction primitive de la fonction $h: x\mapsto xe^x$ sur $\mathbb{R}$, puis en déduire que: $\int_{-1}^{0}xe^xdx=\frac{2}{e}-1$.
2. En utilisant une intégration par parties, Montrer que: $\int_{-1}^{0}(x^2+1)e^xdx=3(1-\frac{2}{e})$.
3. Calculer en cm^2, l'aire du Domaine plan délimité par (C_f), la droite (D) d'équation $y=x+1$ et les droites d'équations : $x=-1$ et $x=0$.

2. Calcul des volumes

Propriété

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a<b$. Soit (Σ) un solide limité par deux plans $z=a$ et $z=b$ et soit $S(t)$ est l'aire de l'intersection du solide (S) avec le plan $z=t$ $(a\leq t\leq b)$. Le volume de ce solide est (en unités de volume) : $v(s)=\int_a^bS(t)dt$.

Exemple

Volume V d'un cylindre de rayon R et de hauteur h. L'intersection du plan $z=t$ avec le cylindre est un disque d'aire $S(t)=\pi R^2$. Puisque $t\mapsto S(t)$ est continue sur $[0,h]$ alors le volume de cylindre est : $V=\int_0^hS(t)dt=\int_0^h\pi R^2dt=\pi R^2\int_0^hdt=\pi R^2h$ cm^3.

Propriété

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$ $(a < b)$, et (C_f) sa courbe représentative. Le volume du solide engendré par la rotation de la courbe (C_f) autour de l'axe des abscisses un tour complet est donné par la formule : $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$ (en unités de volume).

Exemple

Le volume du solide engendré par la rotation de la courbe de la fonction $x \mapsto e^x$ sur $[0, 1]$ autour de l'axe des abscisses un tour complet est donné par :

$$V = \pi \int_0^1 (f(x))^2 dx = \pi \int_0^1 (e^x)^2 dx = \pi \int_0^1 e^{2x} dx = \pi [\frac{e^{2x}}{2}]_0^1 = \frac{\pi(e^2 - 1)}{2} \text{ u.a}$$

Application

Soit g la fonction numérique définie sur $[0, 1]$ par : $f(x) = xe^{\frac{x^2}{2}}$. Calculer le volume du solide engendré par la rotation de la courbe de la fonction g autour de l'axe des abscisses un tour complet. Répondre à la même question pour la fonction $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\cos(x)}$ sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{4}]$.