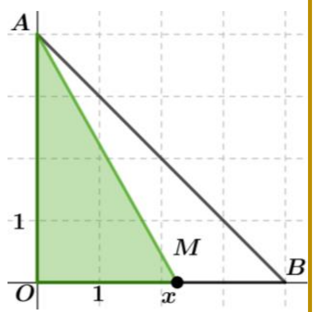
Limite d'une fonction

Remarques

I. Limite finie et infinie d'une fonction en un point :

1. Limite finie d'une fonction en un point :

Exemple introductif :



Dans la figure ci-contre OAB est un triangle de surface $8cm^2$ et M un point mobile d'abscisse x sur le segment $[OB]$. On considère $f(x)$ la surface du triangle OAM.

- On remarque que $f(x)$ prend des valeurs proches de plus en plus de 8 lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de 4. On dit que $f(x)$ tend vers 8 lorsque x tend vers 4 et on écrit $\lim_{x\to 4} f(x) = 8$.
- On remarque que que $f(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0. Donc la limite de f en 0 est 0 et on écrit $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.
- On a $f(x) = 2x$, on trouve alors $\begin{cases} \lim_{x\to 4} f(x) = \lim_{x\to 4} 2x = 2\times 4 = 8 \\ \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} 2x = 2\times 0 = 0 \end{cases}$.

Définition :

Soit a et l deux nombres réels. Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle de la forme $]a - x_0; a + x_0[$ ou sur un ensemble de la forme $]a - x_0; a + x_0[- \{a\}$ où $(\alpha \in \mathbb{R}^{*+})$.
Si $f(x)$ tend vers l quand x tend vers a, on écrit: $\lim_{x\to a} f(x) = l$ ou $\lim_{a} f(x) = l$.

Propriété :

Soit f une fonction numérique, a et l deux nombres réels.
Si f admet une limite l en a alors cette limite est unique.

Remarques :

- On rencontre parfois lors de calcul de certaines limites en un point a la forme indéterminée suivante " $\frac{0}{0}$ ".
- Les formes indéterminées sont " $\frac{0}{0}$ ", " $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ", " $+\infty - \infty$" et " $0 \times \pm\infty$".

Exemple ① :

Calculons $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$.
On ne peut pas calculer cette limite directement parce que on obtient la forme indéterminée " $\frac{0}{0}$ ".

On a
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} &= \lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} \\ &= \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} \\ &= \lim_{x\to 3} \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4+1}+2} = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Exemple ② :

Calculons $\lim_{x\to -1} \frac{2x^3+2x^2+x+1}{x^2+3x+2}$.
On ne peut pas calculer cette limite directement parce que on obtient la forme indéterminée " $\frac{0}{0}$ ".
La division euclidienne de $2x^3 + 2x^2 + x + 1$ et $x^2 + 3x - 2$ par $x + 1$, donne :
$2x^3 + 2x^2 + x + 1 = (x + 1)(2x^2 + 1)$ et $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$.

Donc
$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1} \frac{2x^3+2x^2+x+1}{x^2+3x+2} &= \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(2x^2+1)}{(x+1)(x+2)} \\ &= \lim_{x\to -1} \frac{2x^2+1}{x+2} \\ &= \frac{2(-1)^2+1}{-1+2} = 3.\end{aligned}$$

Pr. LATRACH ABDELKBIR

Application ① :

Calculer les limites suivantes :

❶ $\lim\limits_{x\to1}\frac{x+4}{x+5}$ ❷ $\lim\limits_{x\to2}\frac{x-2}{x^2-4}$ ❸ $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2+3x}{x^2-4x}$ ❹ $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

❺ $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-x-2}{x^2-3x+2}$ ❻ $\lim\limits_{x\to1}\frac{3x^3-4x+1}{x^2-4x+3}$ ❼ $\lim\limits_{x\to1}\frac{3x^2-5x+2}{\sqrt{x}-1}$ ❽ $\lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{3-\sqrt{x+4}}$

Exercice ② de la série.

2. Limite infinie d'une fonction en un point :

Propriété :

Soit f une fonction numérique, a et l deux nombres réels.

- Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a, on écrit: $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$ ou $\lim\limits_{a}f(x)=+\infty$.
- Si $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers a, on écrit: $\lim\limits_{x\to a}f(x)=-\infty$ ou $\lim\limits_{a}f(x)=-\infty$.

Limite à droite et à gauche d'une fonction en un point :

Définition :

Soient f une fonction numérique et a un nombre réel.

- La limite de f à droite en a, notée $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}}f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$, est la limite de f lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches et supérieures de a.
- La limite de f à gauche en a, notée $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}}f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)$, est la limite de f lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches et inférieures de a.

Propriété :

On admet les limites suivantes :

- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x}=+\infty$ • $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{1}{x}=-\infty$ • $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\sqrt{x}=0$ • $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$ • $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x^n}=+\infty$
- Si n est pair, alors $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{1}{x^n}=+\infty$.
- Si n est impair, alors $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{1}{x^n}=-\infty$.

Exemple :

Calculons $\lim\limits_{x\to3^+}\frac{x+2}{3x-x^2}$ et $\lim\limits_{x\to3^-}\frac{x+2}{3x-x^2}$.

Le tableau de signe de $3x-x^2$ est

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$3x-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Et on a $\lim\limits_{x\to3^+}x+2=5$ et $\lim\limits_{x\to3^+}3x-x^2=0^-$. Donc $\lim\limits_{x\to3^+}\frac{x+2}{x^2-3x}=-\infty$.

Et on a $\lim\limits_{x\to3^-}3x-x^2=0^+$. Donc $\lim\limits_{x\to3^+}\frac{x+2}{x^2-3x}=+\infty$.

Application ② :

Calculer les limites suivantes :

❶ $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{x+3}{x-2}$ ❷ $\lim\limits_{x\to2^-}\frac{x+3}{x-2}$ ❸ $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^3-1}{x^2-x}$ ❹ $\lim\limits_{x\to2^-}\frac{4x^2-x+5}{x-4}$

❺ $\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{3x-2x^2}{x-x^3}$ ❻ $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{2x+3}{1-x^2}$ ❼ $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{|x-1|}$ ❽ $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+}\frac{3x^2-x-1}{1-2x}$

Exercice ③ de la série.

Théorème :

Soit f une fonction numérique. On a :

$$\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=l\ et\ \lim\limits_{x\to a^+}f(x)=l\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to a}f(x)=l.$$

Remarques :

- Le théorème reste valable si l est un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.
- Si $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=l$ et $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=l'$ tel que $l\neq l'$ on dit que f n'a pas de limite en a.

Exemple :

Pr. LATRACH ABDELKBIR

Soit f la fonction définie par $\begin{cases} f(x) = -x+1; & x \geq 3 \\ f(x) = x^2 - 4x + 1; & x < 3 \end{cases}$.

On $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} -x + 1 = -2$ et $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} x^2 - 4x + 1 = -2$.

Puisque $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -2$, alors f a une limite en a et on a : $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = -2$.

Application ③ :

1. On considère la fonction f définie par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x-1}; & x < 1 \\ f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}; & x > 1 \end{cases}$.

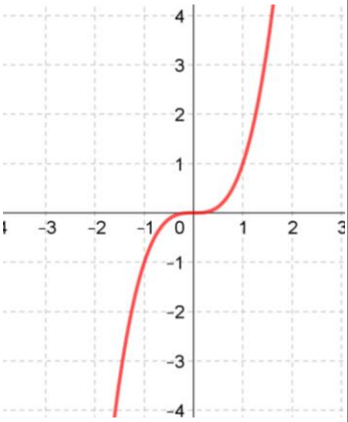
Calculer $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$. Conclure.

2. On considère la fonction g définie par : $\begin{cases} g(x) = \dfrac{x^2+1}{-x+3} & ; x \leq 2 \\ g(x) = 1 - ax^2 & ; x > 2 \end{cases}$

Déterminer une valeur de a pour laquelle g admet une limite en 2.

II. Limite finie et infinie d'une fonction en $+\infty$ ou en $-\infty$

Activité ① :



La figure ci-contre représente la courbe de la fonction $f : x \mapsto x^3$ dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

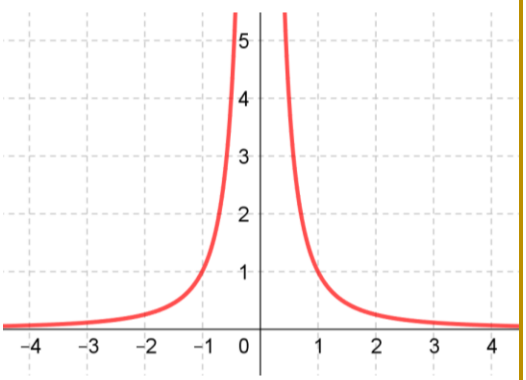
1. Que peut-on remarquer pour les valeurs de $f(x)$ quand x prend des valeurs de plus en plus grandes ?
2. Que peut-on remarquer pour les valeurs de $f(x)$ quand x prend des valeurs de plus en plus petites ?
3. Exprimez vos remarques dans les questions 1. et 2. en utilisant les symbole lim .

Propriété :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{R}^*$, On admet les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty \ ; & n \ pair \\ -\infty \ ; & n \ impair \end{cases}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} k\,x^n = \begin{cases} +\infty \ ; & k > 0 \\ -\infty \ ; & k < 0 \end{cases}$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} kx^n = \begin{cases} +\infty & ; k > 0 \text{ et } n \ pair \\ -\infty & ; k < 0 \text{ et } n \ pair \\ -\infty & ; k > 0 \text{ et } n \ impair \\ +\infty & ; k < 0 \text{ et } n \ impair \end{cases}$

Activité ② :



La figure ci-contre représente la courbe de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

1. Que peut-on remarquer pour les valeurs de $f(x)$ quand x prend des valeurs de plus en plus grandes ?
2. Que peut-on remarquer pour les valeurs de $f(x)$ quand x prend des valeurs de plus en plus petites ?
3. Exprimez vos remarques dans les questions 1. et 2. en utilisant les symbole lim .

Propriété :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{R}^*$, On admet les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{k}{x^n} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{k}{x^n} = 0$

Exemples :

Calculons les limites suivantes $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2+5}{4x^2}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-3x^3+x}{x^3}$.

Propriété :

Pr. LATRACH ABDELKBIR

Soient P et Q deux fonctions polynômes et a un réel.
Si ax^n et bx^m sont respectivement les termes du plus haut degré des polynômes P et Q, alors :

$$\lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty} ax^n \; ; \; \lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty} ax^n \; ; \; \lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{ax^n}{bx^m} \; ; \; \lim_{x\to-\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{ax^n}{bx^m}$$

Application ④ : Exercice ④ de la série

Calculer les limites suivantes :

- $\lim_{x\to+\infty} 1 + 5x^2 + 8x$
- $\lim_{x\to-\infty} -5x^3 + 1$
- $\lim_{x\to-\infty} x + (1-\sqrt{2})x^2 + 4$
- $\lim_{x\to+\infty} \frac{4+2x^3}{3x^3+5x^2+1}$
- $\lim_{x\to-\infty} \frac{(2-\sqrt{3})x^3 - x^2}{2x^2-3}$
- $\lim_{|x|\to+\infty} \frac{|x|-3x}{|x+5|}$

Exercice ① de la série.

Propriété :

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle de la forme $[a;+\infty[$ où $(a \in \mathbb{R})$ telle que $(\forall x \in [a;+\infty[) : f(x) \geq 0$.

- Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ et $l \geq 0$, alors : $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{f(x)} = \sqrt{l}$.
- Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, alors : $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{f(x)} = +\infty$.

Remarque :

- Cette propriété reste valable aussi quand x tend vers $-\infty$ ou vers un réel a ou à droite en a ou à gauche en a.

Application ⑤ :

Calculer les limites suivantes :

❶ $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x+5}$ ❷ $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{3x^2-5x+1}$ ❸ $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x+1}{x-4}}$

III. Opérations sur les limites :

Dans tous ce qui suit, a est un nombre réel ou $+\infty$ou $-\infty$,l et l' sont des nombres réels.
Ces résultats restent valables pour les limites à droite et à gauche en a.

$\lim_{x\to a} f(x)$	$\lim_{x\to a} g(x)$	$\lim_{x\to a}(f+g)(x)$	$\lim_{x\to a}(fg)(x)$	$\lim_{x\to a} \left({}^{f}/_{g}\right)(x)$
l	$l' \neq 0$	$l+l'$	ll'	l/l'
$l>0$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0
$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$F.I$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$F.I$
$+\infty$	$-\infty$	$F.I$	$-\infty$	$F.I$
0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$F.I$	0
$+\infty$	0	$+\infty$	$F.I$	$\pm\infty$
0	0	0	0	$F.I$
$l \neq 0$	0	l	0	$\pm\infty$

Application ⑥ :

Calculer les limites suivantes :

❶ $\lim_{x\to0^+} 3x + 7 + \frac{1}{\sqrt{x}}$ ❷ $\lim_{x\to-\infty} \left(-3+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{2}{x}\right)$ ❸ $\lim_{x\to-\infty} \frac{1+\frac{4}{x^3}}{2-x^5}$

❹ $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+5x-3}}{x}$ ❺ $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2-x+3} - 2x + 1$ ❻ $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x} + x$

IV. Limite de fonctions trigonométriques :

Propriété :

- $\lim_{x\to a} cos(x) = cos(a)$
- $\lim_{x\to a} sin(x) = sin(a)$

Pr. LATRACH ABDELKBIR

- $\lim_{x\to a} tan(x) = tan(a) \quad si\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}.$

Exemples :

$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \sin x = \frac{1}{2}$; $\lim_{x\to-\frac{\pi}{4}} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\lim_{x\to\pi} \tan x = 0$; $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \tan x = \sqrt{3}$

Remarques :

- Les fonctions $x \mapsto sin(x)$, $x \mapsto cos(x)$ et $x \mapsto tan(x)$ n'ont pas de limite en $\pm\infty$.
- $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan x = +\infty$ et $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = -\infty$.

Propriété :

Soit a un réel non nul, on a :
$\lim_{x\to 0} \frac{sin(ax)}{ax} = 1$; $\lim_{x\to 0} \frac{1-cos(ax)}{(ax^2)} = \frac{1}{2}$; $\lim_{x\to 0} \frac{1-cos(ax)}{(ax^2)} = \frac{1}{2}$.

Exemple :

Calculons $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x}$.

Application ⑦ :

Calculer les limites suivantes :

❶ $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\tan 5x}$ ❷ $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{x}$ • $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{4x}$ ❹ $\lim_{x\to 2} \frac{\sin(x-2)}{x-2}$

❺ $\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos\sqrt{x}}{x}$ ❻ $\lim_{x\to 1} \frac{\tan \pi x}{x-1}$ ❼ $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{x-\frac{\pi}{4}}$ ❽ $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$

V. Limites et ordre :

Propriété :

Soit a et l deux réels et $I = [a; +\infty[$.Soit f,g et h des fonctions numériques définies sur I.

- Si $\begin{cases} (\forall x \in I)\ g(x) \leq f(x) \\ \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \end{cases}$, alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
- Si $\begin{cases} (\forall x \in I)\ g(x) \geq f(x) \\ \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty \end{cases}$, alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
- Si $\begin{cases} (\forall x \in I); |f(x) - l| \leq g(x) \\ \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0 \end{cases}$, alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$.
- Si $\begin{cases} (\forall x \in I); g(x) \leq f(x) \leq h(x) \\ \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} h(x) = l \end{cases}$, alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$.

Remarque :

Ces propriétés restent valables aussi quand x tend vers $-\infty$ ou vers un réel a ou à droite en a ou à gauche en a.

Application ⑧ :

1. a. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2-\cos x} \leq 1$.

b. Calculer les limites suivantes : $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2-\cos x}$; $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{2-\cos x}$

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 2$.

Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)\ |f(x) - 2| \leq |x|$ puis déduire $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Pr. LATRACH ABDELKBIR