Chapitre 2

Les suites numériques

Histoire

Dans son traité d'arithmétique, As-Sawawal (1172) écrit : ‘’ Ce que l'on extrait par approximation des racines irrationnelles au moyen du calcul est ce par quoi on veut obtenir une quantité rationnelle proche de la racine irrationnelle. que ce celle là.Il peut ensuite exister une troisième quantité rationnelle, plus proche de la racine irrationnelle que la deuxième quantité et que la première, car toute quantité rationnelle supposée proche d'une racine irrationnelle, lâ différence entre elles est en vérité une ligne droite, et la ligne est susceptible d'être divisée et d'être partagé, indéfiniment. c'est pourquoi il devient possible de trouver continument une quantité rationnelle proche de la racine irrationnelle, et de trouver une quantité rationnelle plus proche que la première de l'irrationnelle, indéfiniment’’.

(R.Rashed,entre Arithmétique et algebre,1984).

As-smawal : Ibn Yahya al-Maghribi al-Samaw'al est un mathématicien et médecin de langue arabe né à Bagdad vers 1130 et mort à Maragha vers 1180

أجزاء عشرات ألوف ألوف ألوف ألوف	ه	
أجزاء ألوف ألوف ألوف ألوف	ه	س
أجزاء مئات ألوف ألوف ألوف	ه	
أجزاء عشرات ألوف ألوف ألوف	ه	
أجزاء ألوف ألوف ألوف	ه	[illegible]
أجزاء مئات ألوف ألوف	ه	
أجزاء عشرات ألوف ألوف	ه	
أجزاء ألوف ألوف	ه	[illegible]
أجزاء مئات ألوف	ه	
أجزاء عشرات ألوف	ه	
أجزاء ألوف	ه	[illegible]
أجزاء المئات	ه	
أجزاء العشرات	ه	
مرتبة الآحاد	ه	ه
مرتبة العشرات	ه	
مرتبة المئات	ه	
مرتبة الألوف	ه	[illegible]
مرتبة عشرات الألوف	ه	
مرتبة مئات الألوف	ه	
مرتبة ألوف الألوف	ه	[illegible]
مرتبة عشرات ألوف الألوف	ه	
مرتبة مئات ألوف الألوف	ه	
مرتبة ألوف ألوف الألوف	ه	[illegible]
مرتبة عشرات ألوف ألوف الألوف	ه	
مرتبة مئات ألوف ألوف الألوف	ه	
مرتبة ألوف ألوف ألوف الألوف	ه	س

Tableau d'As-samawal

I. Rappel

1) Suites majorées, minorées, bornées

Définition

- La suite (u_n) est majorée s'il existe un réel M tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$.

- La suite (u_n) est minorée s'il existe un réel m tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$.

- La suite (u_n) est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Exemples :

- Les suites de terme général $\cos(n)$ ou $(-1)^n$ sont bornées.
- La suite de terme général n^2 est minorée par 0.

Méthode : Démontrer qu'une suite est majorée ou minorée

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ et $u_0 = 2$. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est majorée par 3.

- **Initialisation :**

$u_0 = 2 < 3$

La propriété est donc vraie pour $n = 0$.

- **Hérédité :**

  - Hypothèse de récurrence :

  Supposons qu'il existe un entier n tel que la propriété soit vraie : $u_k \leq 3$.

  - Démontrons que : La propriété est vraie au rang $n+1$: $u_{n+1} \leq 3$.

On a : $u_n \leq 3$ donc $\frac{1}{3}u_n \leq \frac{3}{3} = 1$ et donc $\frac{1}{3}u_n + 2 \leq 1 + 2 = 3$ .On a donc : $u_{n+1} \leq 3$

- **Conclusion :**

La propriété est vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n, soit : $u_n \leq 3$.

2) Monotonie d'une suite

Propriété

Soit (u_n) une suite numérique

- Si $u_{n+1} > u_n$ alors la suite (u_n) est croissante.

- Si $u_{n+1} < u_n$ alors la suite (u_n) est décroissante.

3) Suite arithmétique suite géométrique

a) Suite arithmétique

Définition Une suite (u_n) est une suite arithmétique s'il existe un nombre r tel que pour tout entier n, on a :

$u_{n+1} = u_n + r$. Le nombre r est appelé raison de la suite.

Propriété

(u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_p.

Pour tout entier naturel $n \geq p$, on a : $u_{n+1} = u_p + (n - p)r$.

Et $u_p + u_{p+1} + ... + u_n = \dfrac{(n - P + 1)(u_p + u_n)}{2}$

b) Suite géométrique

Définition Une suite (u_n) est une suite géométrique s'il existe un nombre

q tel que pour tout entier n, on a : $u_{n+1} = qu_n$.

Le nombre q est appelé raison de la suite.

Propriété (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_p.

Pour tout entier naturel $n \geq p$, on a :

I. $u_n = u_p\,(q)^{n-p}$

II. $u_p + u_{p+1} + ... + u_n = u_p \dfrac{1 - q^{n-p+1}}{1-q}$ si $q \neq 1$

III. $u_p + u_{p+1} + ... + u_n = u_p(n - p + 1)$ si $q = 1$

II. Limite d'une suite numérique

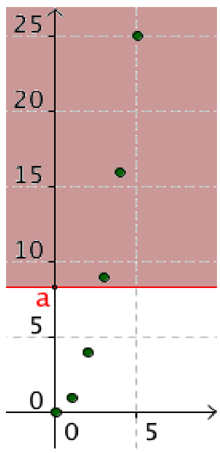
1) Limite infinie

Exemple :

La suite (u_n) définie sur ℕ par $u_n = n^2$ a pour limite $+\infty$.

En effet, les termes de la suite deviennent aussi grand que

l'on souhaite à partir d'un certain rang.



Si on prend un réel a quelconque, l'intervalle $]a ;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Définition

On dit que la suite (u_n) <u>admet pour limite $+\infty$</u> si tout intervalle $]a;+\infty[$, a réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

- On dit que la suite (u_n) <u>admet pour limite $-\infty$</u> si tout intervalle $]-\infty;b[$, b réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

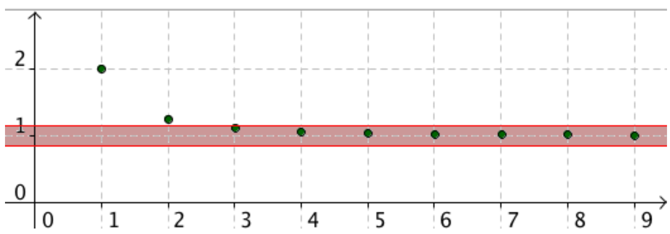
2) Limite finie

Exemple : La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$u_n = 1+\dfrac{1}{n^2}$ a pour limite 1.

En effet, les termes de la suite se resserrent autour de 1 à partir d'un certain rang.

Si on prend un intervalle ouvert quelconque contenant 1, tous les termes de la suite appartiennent à cet intervalle à partir d'un certain rang.



Définition On dit que la suite (u_n) <u>admet pour limite l</u> si tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$. C- à- d $(\forall\varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n\geq N)(u_n\in]l-\varepsilon;l+\varepsilon[)$

Une telle suite est dite <u>convergente</u>

Définition Une suite qui n'est pas convergente est dite <u>divergente</u>

Exemple : soit $(u_n)_{n\geq1}$ une suite definie par

$u_n = \dfrac{3n-1}{n+1}$ on montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$

Soit ε un element de $\mathbb{R}_+^*$ existe il un entier naturel N

tel que $(\forall n\geq N)(u_n\in]3-\varepsilon;3+\varepsilon[)$

$u_n\in]3-\varepsilon;3+\varepsilon[\Leftrightarrow -\varepsilon<u_n-3<\varepsilon$

$\Leftrightarrow |u_n-3|<\varepsilon \quad \Leftrightarrow \left|\dfrac{3}{n+1}\right|<\varepsilon$

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{n+1}<\varepsilon \quad \Leftrightarrow \dfrac{3}{\varepsilon}-1<n$

Posons $N = E\left(\left|\dfrac{3}{\varepsilon}-1\right|\right)+1 \quad ; N\in\mathbb{N}$ donc pour

tout n de $\mathbb{N}$ on a :

$(\forall n\geq N)\Rightarrow N>\left|\dfrac{3}{\varepsilon}-1\right|$ car $(x\leq|x|)$ donc d'après

le raisonnement par équivalences successives on a

$(\forall n\geq N)\ u_n\in]3-\varepsilon;3+\varepsilon[$

Remarque :

Une suite qui est divergente n'admet pas nécessairement de limite infinie.

Par exemple, la suite de terme générale $(-1)^n$ prend alternativement les valeurs -1 et 1. Elle n'admet donc pas de limite finie, ni infinie. Elle est donc divergente.

3) Limites des suites usuelles

Propriété

$\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

Démonstration de $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

Soit un intervalle ouvert $]-a\,;a[$, a réel positif non nul, contenant 0.

Pour tout n, tel que : $n > \frac{1}{a}$, on a : $0 < \frac{1}{n} < a$ et donc $\frac{1}{n} \in \left]-a\,;a\right[$ Ainsi, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $]-a\,;a[$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

Propriété Si (u_n) est une suite convergente alors sa limite est unique

Propriété

Si (u_n) est une suite convergente alors elle est bornée c-à-d $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \Rightarrow \exists M \in \mathbb{R} , \forall n \in \mathbb{N} : |u_n| \le M$

Démonstration : soit (u_n) est une suite convergente vers un réel l

Soit $\varepsilon = \frac{1}{2}$ alors $(\exists n \in \mathbb{N})(\forall n \ge N)\ u_n \in \left]l - \frac{1}{2} ; l + \frac{1}{2}\right[$

on considère l'ensemble $A = \left\{|u_0| ; |u_1| ; ... ; |u_N| ; \left|l - \frac{1}{2}\right| ; \left|l + \frac{1}{2}\right|\right\}$ et soit M le plus grand élément de A alors

$\forall n \in \mathbb{N} : |u_n| \le M$ alors (u_n) est bornée

4) Opérations sur les limites

a) Limite d'une somme

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) =$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.*

* Forme indéterminée : On ne peut pas prévoir la limite éventuelle.

Exemple : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(n^2 + n\right)$?

$\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$.

D'après la règle sur la limite d'une somme :

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(n^2 + n\right) = +\infty$

b) Limite d'un produit

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$	l	$l > 0$	$l < 0$	$l > 0$	$l < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n =$	l'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n v_n) =$	$l\,l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

Exemple : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + 1\right)\left(n^2 + 3\right)$?

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + 1\right) = 1$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(n^2 + 3\right) = +\infty$ D'après la règle sur la limite d'une produit :

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + 1\right)\left(n^2 + 3\right) = +\infty$

c) Limite d'un quotient

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$	l	l	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n =$	$l' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0 avec $v_n > 0$	0 avec $v_n > 0$	0 avec $v_n < 0$	0 avec $v_n < 0$	0	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} =$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

Exemple : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2}{-n^2 - 3}$?

$\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-n^2\right) = -\infty$ et donc

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-n^2 - 3\right) = -\infty$ D'après la règle sur la limite d'un quotient : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2}{-n^2 - 3} = 0$

Remarque : Les quatre formes indéterminées sont, par abus d'écriture : " $\infty - \infty$ ", " $0 \times \infty$ ", " $\frac{\infty}{\infty}$ " et " $\frac{0}{0}$ ".

Application :

Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n-3\sqrt{n}\right)$; b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{5n^2+4}{4n^2+3n}$; c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3n^2+n}{n+3}$; d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)$

Correction

a) on a $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 3\sqrt{n}=+\infty$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\infty-\infty$ ".

$$n-3\sqrt{n}=n\left(1-\frac{3\sqrt{n}}{n}\right)=n\left(1-\frac{3}{\sqrt{n}}\right)$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{3}{\sqrt{n}}\right)=1$ donc par limite d'un produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(1-\dfrac{3}{\sqrt{n}}\right)=+\infty$.

Et donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n-3\sqrt{n}\right)=+\infty$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(5n^2+4\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(4n^2+3n\right)=+\infty$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\dfrac{\infty}{\infty}$ ".

$$\frac{5n^2+4}{4n^2+3n}=\frac{n^2}{n^2}\times\frac{5+\frac{4}{n^2}}{4+\frac{3}{n}}=\frac{5+\frac{4}{n^2}}{4+\frac{3}{n}}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(5+\dfrac{4}{n^2}\right)=5$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(4+\dfrac{3}{n}\right)=4$ donc par limite d'un quotient $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{5+\frac{4}{n^2}}{4+\frac{3}{n}}=\dfrac{5}{4}$.

Et donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{5n^2+4}{4n^2+3n}=\dfrac{5}{4}$.

c) Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\dfrac{\infty}{\infty}$ ".

$$\frac{3n^2+n}{n+3}=\frac{n^2}{n}\times\frac{3+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}}=n\times\frac{3+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3+\dfrac{1}{n}\right)=3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{3}{n}\right)=1$ donc par limite d'un quotient $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}}=3$

Et donc par limite d'un produit $\lim\limits_{n\to+\infty} n\times\dfrac{3+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}}=+\infty$.

Soit $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3n^2+n}{n+3}=+\infty$.

d) Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\infty-\infty$ ".

$$\sqrt{n+2}-\sqrt{n}=\frac{\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}},$$

on a multiplié par l'expression conjuguée.

$$=\frac{n+2-n}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}.$$

Or par limite d'une somme $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n+2}+\sqrt{n}=+\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=0$.

Soit $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)=0$.

5) Limites et ordre

Propriété

Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite convergente tel que : $(\forall n\geq n_0)\ u_n>0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\geq 0$ c.-à-d

$$\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=l\in\mathbb{R}\\ u_n>0\end{cases}\Rightarrow l\geq 0$$

Démonstration :

Soit $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ et $(\forall n \geq n_0)\, u_n > 0$ on montre que $l \geq 0$

Supposons que $l < 0$ et $\varepsilon = -\frac{l}{2}$ alors $(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)\left(u_n \in \left]l-\varepsilon; l+\varepsilon\right[= \left]\frac{3l}{2}; \frac{l}{2}\right[\right)$

Posons $N' = \sup(N; n_0)$ alors $u_n < \frac{l}{2}$ et $u_n > 0$ $(\forall n \geq N')$ alors $0 < \frac{l}{2}$ impossible car $l < 0$

Donc d'après le raisonnement par absurde on $l \geq 0$.

Propriété

Si (u_n) est une suite convergente vers un réel l tel que : $(\forall n \in \mathbb{N})\, u_n < a$ alors $l \leq a$

c-à-d $\begin{cases} \lim_{n\to+\infty} u_n = l \in \mathbb{R} \\ u_n < a \end{cases} \Rightarrow l \leq a$

Propriété

Soit (u_n) et (v_n) deux suites convergentes tels que .Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} v_n$

c-à-d $\begin{cases} (\forall n \geq n_0):\ u_n \leq v_n \\ \lim_{n\to+\infty} u_n = l \ \ et\ \ \lim_{n\to+\infty} v_n = l' \end{cases} \Rightarrow l \leq l'$

6) Critères de convergence

a) Convergences des suites monotones

Propriété

Soit (u_n) une suite croissante définie sur $\mathbb{N}$.

Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ alors la suite (u_n) est majorée par l.

Démonstration :

Démontrons par l'absurde en supposant le contraire, soit : « Il existe un entier p, tel que $u_p > l$. »

- L'intervalle ouvert $\left]l-1; u_p\right[$ contient l.

Or, par hypothèse, $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$. Donc l'intervalle $\left]l-1; u_p\right[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang (1).

- Comme (u_n) est croissante : $u_n \geq u_p$ pour $n > p$.

Donc si $n > p$, alors $u_n \notin \left]l-1; u_p\right[$ (2).

(1) et (2) sont contradictoires, on en déduit qu'il n'existe pas $p \in \mathbb{N}$, tel que $u_p > l$

Et donc la suite (u_n) est majorée par l.

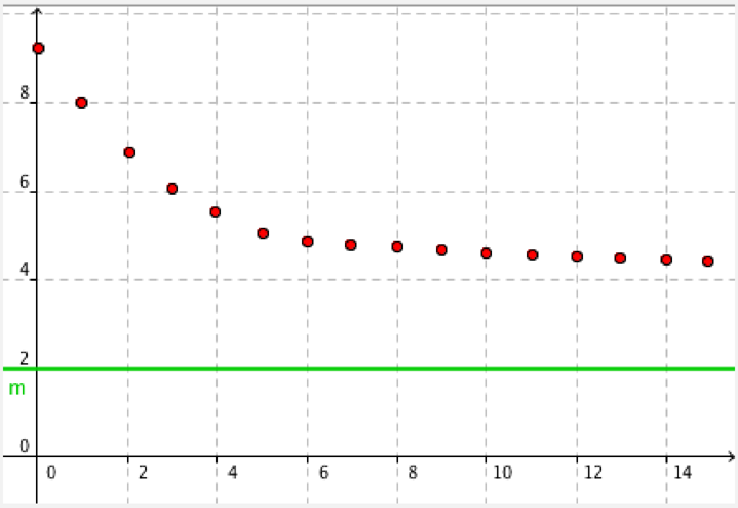
Théorème de convergence monotone :

- Si une suite croissante est majorée alors elle est convergente.
- Si une suite décroissante est minorée alors elle est convergente.

Remarque :

Ce théorème permet de s'assurer de la convergence mais ne donne pas la limite.

Dans l'exemple ci-dessous, la suite décroissante est minorée par 2. Cela prouve que la limite de la suite est supérieure à 2 mais n'est pas nécessairement égale à 2.



Exemple :

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ et $u_0 = 2$.

Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

- On a démontré dans le paragraphe I. que la suite (u_n) est croissante.

On a démontré dans la méthode précédente que la suite (u_n) est majorée par 3.

D'après le théorème de convergence monotone, on en déduit que la suite (u_n) est convergente.

Corollaire :

- Si une suite croissante est non majorée alors elle tend vers $+\infty$.
- Si une suite décroissante est non minorée alors elle tend vers $-\infty$.

Démonstration :

1) Soit un réel a.

Comme (u_n) n'est pas majorée, il existe un entier p tel que $u_p > a$.

La suite (u_n) est croissante donc pour tout $n > p$, on a $u_n \geq u_p$.

Donc pour tout $n > p$, on a $u_n > a$.

Et donc à partir d'un certain rang p, tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $]a;+\infty[$.

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2) Démonstration analogue.

Exemple :

- On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = u_n + n^2$ et $u_0 = 1$ on démontre que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

on na pout tout entier naturel $u_{n+1} - u_n = n^2 \geq 0$ donc (u_n) est croissante

- On démontre que (u_n) est n'est pas majorée

On suppose que (u_n) est majorée donc il existe un nombre réel l tel que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = l$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} - u_n = 0$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} - u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$ est contradictoire à $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} - u_n = 0$ donc (u_n) est non majorée et par suite (u_n) est croissante et non majorée alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Application

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n}$ et $a_0 > 0$

démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$

Théorème des gendarmes :

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites définies sur $\mathbb{N}$ et l un nombre réel.

Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = l$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = l$.

Par abus de langage, on pourrait dire que les suites (u_n) et (w_n) (les gendarmes) se resserrent autour de la suite (v_n) à partir d'un certain rang pour la faire converger vers la même limite.

Ce théorème est également appelé le théorème du sandwich.

Démonstration :

Soit un intervalle ouvert I contenant l.

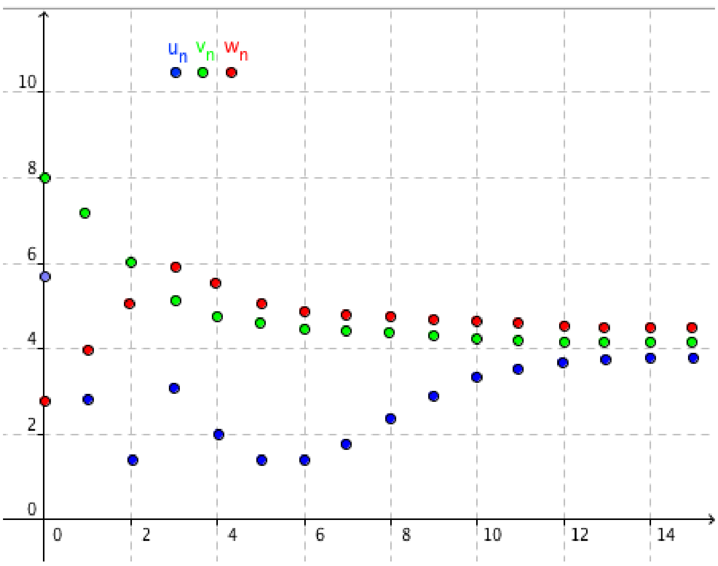
- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$, donc l'intervalle I contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang que l'on note n_1.

- $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = l$, donc l'intervalle I contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang que l'on note n_2.

- A partir d'un certain rang, que l'on note n_3, on a $u_n \leq v_n \leq w_n$.

- Ainsi pour tout $n \geq \max(n_1 ; n_2 ; n_3)$, l'intervalle I contient tous les termes de la suite (v_n).

Et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = l$



Exemple : Déterminer une limite par encadrement

Déterminer la limite suivante : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\sin n}{n}\right)$

On a : $-1\leq \sin n\leq 1$ donc $-\frac{1}{n}\leq\frac{\sin n}{n}\leq\frac{1}{n}$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sin n}{n}=0$

Et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\sin n}{n}\right)=1$

Propriété

soit q un nombre réel on a :

q	$q\leq-1$	$-1<q<1$	$q=1$	$q>1$
$\lim\limits_{n\to+\infty}q^n$	*pas de limite*	0	1	$+\infty$

Démonstration dans le cas $q>1$

Prérequis : Pour tout entier naturel n, on a : $(1+a)^n\geq 1+na$ *(inégalité de Bernoulli)*,

On suppose que $q>1$, alors on peut poser $q=a+1$ avec $a>0$.

$q^n=(1+a)^n\geq 1+na$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+na)=+\infty$ car $a>0$.

Donc d'après le théorème de comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=+\infty$.

Exemples : La suite de terme général -5×4^n a pour limite $-\infty$ car $\lim\limits_{n\to+\infty}4^n=+\infty$.

Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(-2)^n}{3}$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2^n-3^n\right)$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

a) $(-2)^n$ est une suite géométrique de raison -2 et $-2\leq-1$.

Donc $(-2)^n$ ne possède pas de limite.

Et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(-2)^n}{3}$ n'existe pas.

b) $2^n-3^n=3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n-1\right)$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$ car $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et $-1<\frac{2}{3}<1$.

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n-1\right)=-1$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}3^n=+\infty$ car 3^n est une suite géométrique de raison 3 et 3 > 1.

Donc par limite d'un produit $\lim\limits_{n\to+\infty}3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n-1\right)=-\infty$

Et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2^n-3^n\right)=-\infty$.

c) On reconnaît les n premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 1.

Donc $1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n=\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$.

$=2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=0$ comme limite d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)=1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)=2$.

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)=2$.

Propriété

Soit $\alpha\in\mathbb{Z}^*$

1. Si $\alpha>0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}n^\alpha=+\infty$
2. Si $\alpha<0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}n^\alpha=0$

III. Suites de tupe $u_{n+1}=f(u_n)$; $v_n=f(u_n)$

1) Suite de type $u_{n+1}=f(u_n)$

A) Conjecturer limite d'une suite à partir d'une courbe

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases}u_0=1\\ u_{n+1}=\dfrac{2+u_n}{u_n};(n\in\mathbb{N})\end{cases}$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x)=\dfrac{x+2}{x}$

On a $u_{n+1}=f(u_n)$ on represente la courbe de *f* (voir le figure)

La représentation graphique de la suite nous permet de conjecturer que la suite (u_n) est convergente vers 2 et que 2 est la solution de l'équation $f(x)=x$

B) Vérification de la conjecture

On considère la suite (v_n) définie par $(\forall n\in\mathbb{N}):v_n=\dfrac{u_n-2}{u_n+1}$

On a $(\forall n\in\mathbb{N}):v_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}-2}{u_{n+1}+1}$

$$=\dfrac{\dfrac{2+u_n}{u_n}-2}{\dfrac{2+u_n}{u_n}+1}=-\frac{1}{2}\left(\frac{u_n-2}{u_n+1}\right)$$

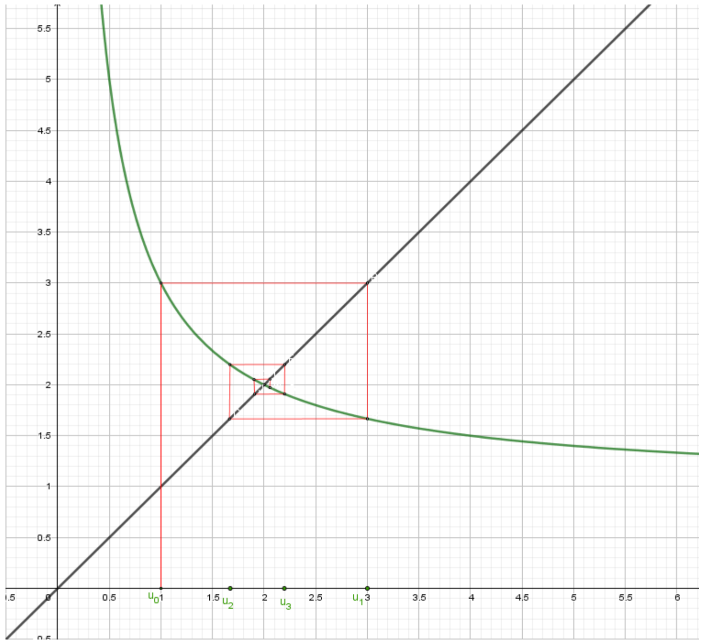
$= -\frac{1}{2}v_n$ donc (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$ et de son premier terme $v_0 = -\frac{1}{2}$ donc

$v_n = \left(\frac{-1}{2}\right)^{n+1}$ comme $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}$

donc $u_n = \frac{2 + v_n}{1 - v_n}$ et par suite

$u_n = \frac{2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^{n+1}}$ comme $-1 < \frac{-1}{2} < 1$ alors

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$



Application :

Etudier la convergence de la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n{}^2 + u_n - 1 \end{cases} ; (n \in \mathbb{N})$

Propriété

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset I$

Et soit (u_n) une suite définie par la relation : $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \in I$

Si (u_n) est convergente et sa limite est l alors l est la solution de l'équation $f(x) = x$

<u>Demonstation :</u>

(u_n) est convergente alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$

Comme f est continue en l alors $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in I)\left(0 < |x - l| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(l)| < \varepsilon\right)$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ alors $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)$ $|u_n - l| < \alpha$ il est facile

à démontrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $u_n \in I$ on a $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)$ $|f(u_n) - f(l)| < \varepsilon$ donc

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 > 0)(\forall n \geq n_0)\left(|f(u_n) - f(l)| < \varepsilon\right)$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(l)$

et comme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = l$ alors $f(l) = l$ est par suite l est la solution de l'équation $f(x) = x$

Exemple : soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}} \end{cases} ;(n \in \mathbb{N})$$

on étudie la convergence de la suite (u_n)

on considère la fonction f définie sur $I = [0;1]$ par

$$f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$$

- La fonction f est continue et croissante sur I donc :

  $f(I) = [f(0); f(1)] = \left[\dfrac{\sqrt{2}}{2};1\right]$ donc $f(I) \subset I$

- On montre que $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 \le u_n \le 1$

  Pour n=0 on a $u_0 = 1$ donc $0 \le u_0 \le 1$ la relation est vraie

  Supposons qu'il existe un entier naturel n tel que $0 \le u_n \le 1$

  Et montrons que $0 \le u_{n+1} \le 1$

  On a $0 \le u_n \le 1$ donc $u_n \in I$ donc

  $f(u_n) \in f(I)$ comme $f(I) \subset I$ alors $u_{n+1} \in I$

  c-à-d $0 \le u_{n+1} \le 1$ donc d'après la récurrence $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 \le u_n \le 1$

- On étudie la monotonie de (u_n)

Soit n un élément de $\mathbb{N}$ on a

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} - u_n$$

$$= \left(\frac{1+u_n}{2} - u_n{}^2\right)\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1+u_n}{2}} + u_n}\right)$$

$$= \left(\frac{1+u_n - 2u_n{}^2}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1+u_n}{2}} + u_n}\right)$$

$$= \left(-\frac{(2u_n+1)(u_n-1)}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1+u_n}{2}} + u_n}\right)$$

Comme $0 \le u_n \le 1$ alors $u_{n+1} - u_n \ge 0$ donc (u_n) est croissante

Et par suite on a (u_n) est majorée et croissante donc elle est convergente et sa limite est l vérifie $f(l) = l$ et $0 \le l \le 1$

On a

$$f(l) = l \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1+l}{2}} = l \Leftrightarrow 2l^2 - l - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow l = \frac{-1}{2}\ ou\ \ l = 1$$ comme

$0 \le l \le 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

Application :

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{5} \\ u_{n+1} = u_n{}^2 + \dfrac{3}{4}u_n \end{cases} ;(\forall n \in \mathbb{N})$

On considère la fonction *f* définie par $f(x) = x^2 + \dfrac{3}{4}x$

1. Soit $I = \left[0;\dfrac{1}{4}\right]$ démontrer que $f(I) \subset I$
2. a) Démontrer que $0 \le u_n \le \dfrac{1}{4}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

   b) Etudier la monotonie de la suite (u_n).

   c) Démontrer que la suite (u_n) est convergente .

   d) Déterminer la limite de (u_n).

2) Suite de type $v_n = f(u_n)$

Propriété

Si la suite (u_n) est convergente et sa limite est l et f une fonction continue en l alors la suite $(v_n) = (f(u_n))$ est convergente et sa limite est $f(l)$

Autrement dit $\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l \\ f \text{ est continue en } l \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(l)$

Exemples :

Soit (v_n) la suite definie par $v_n = \sqrt{\dfrac{4n^2+1}{n^2+2}}$

Possons $u_n = \dfrac{4n^2+1}{n^2+2}$ alors $v_n = f(u_n)$ avec

$f(x) = \sqrt{x}$. On a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{4n^2+1}{n^2+2} = 4$

Et comme f est continue en 4 alors

$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(4) = \sqrt{4} = 2$

Application **:**determiner limites des suites suivantes définie par ***:***

1) $u_n = \cos\left(\dfrac{n\pi+1}{4n-2}\right)$; 2) $v_n = \sqrt{\sqrt{\dfrac{16n^2-3n+2}{2n^2+3}}}$; 3) $w_n = \sin\left(\dfrac{\pi}{n+2}\right)$

IV. Les suites adjacentes

Propriété

On dit que les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si l'une est croissante et l'autre décroissante et que $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$

Exemples :

Soit (u_n) et (v_n) deux suite définie par $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \dfrac{-5}{n}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{6}{n} = 0$ et (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante donc (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Application : Démontrer que les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes

1) $u_n = -\dfrac{1}{n+2}$ et $v_n = \dfrac{1}{n+1}$; 2) $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n!}$

Propriété

Si les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes donc elles sont convergentes et ont même limite

Démonstration :

Si les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes

Supposons que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$

- On démontre que $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n \leq v_n$

Posons $(\forall n \in \mathbb{N})\ w_n = v_n - u_n$.

On étudie la monotonie de (w_n)

Soit n un élément de $\mathbb{N}$ on a $w_{n+1} - w_n = (v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n)$

$$= (v_{n+1} - v_n) - (u_{n+1} - u_n)$$

Comme (u_n) est croissante alors $u_{n+1} - u_n \geq 0$ et (v_n) est décroissante alors $v_{n+1} - v_n \leq 0$

Et par suite $w_{n+1} - w_n \leq 0$ alors (w_n) est décroissante et tel que $\lim_{n \to +\infty} w_n = 0$ alors $w_n \geq 0$ donc $0 \leq v_n - u_n$

et par suite $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n \leq v_n$

On a (u_n) est croissante alors $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_0 \leq u_n$

Et (v_n) est décroissante alors $(\forall n \in \mathbb{N})\ v_n \leq v_0$ alors comme $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n \leq v_n$

Alors $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$

Comme la suite (u_n) est croissante et majorée par v_0 et la suite (v_n) est décroissante et minorée par u_0 alors les deux suites (u_n) et (v_n) sont convergentes .

- Soit $\lim_{n \to +\infty} u_n = l$ et $\lim_{n \to +\infty} v_n = l'$ on montre que $l = l'$

On a $\lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = l - l'$ et comme $\lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$ alors $l - l' = 0$ alors $l = l'$.

Remarque :

Si les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes telle que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante alors :

- $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n \leq v_n$
- (u_n) est majorée par v_0
- (v_n) est minorée par u_0

Exemple :

1) Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

On démontre que les suites ont même limite

- On a $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^3} > 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$

  donc (u_n) est croissante

- On a $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{(n^2+n+1)}{n(n+1)^3} < 0$$

Donc (v_n) est décroissante

- On a $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc (u_n) et (v_n) sont adjacentes donc elles sont convergentes et ont même limite