Ensemble des nombres entiers naturels et notions en arithmétique IN

Remarques

I. Nombres pairs- Nombres impairs

✍ Activité :

On considère les nombres : $24, \sqrt{19}, 1, 2017, 89, 1970, 8721, -8, \sqrt{34}, 0, 5, 4$

Parmi les nombres précédents trouver :

1) *Tous les nombres entiers naturels.*

On note l'ensemble des nombres entiers naturels par $\mathbb{N}$.

On a $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\dots\}$ *et* $\mathbb{N}^* = \{1,2,3,\dots\}$.

Le nombre 24 *est un nombre entier naturel. On écrit* $24 \in \mathbb{N}$ *et on dit que* 24 *appartient à* $\mathbb{N}$.

Le nombre $\sqrt{34}$ *n'est un nombre entier naturel. On écrit* $\sqrt{34} \notin \mathbb{N}$ *et on dit que* $\sqrt{34}$ *n'appartient pas à* $\mathbb{N}$.

2) *Tous les nombres pairs.*

Soit a *un nombre entier naturel. On dit que* a *est un nombre pair s'il existe un entier naturel* k *tel que:* $a = 2k$.

3) *Tous les nombres impairs.*

Soit a *un nombre entier naturel. On dit que* a *est un nombre impair s'il existe un entier naturel* k *tel que:* $a = 2k + 1$.

✍ Application :

Soient a *et* b *deux nombres de* $\mathbb{N}$ $(a \geq b)$. *Compléter le tableau suivant :*

Le nombre	a	b	$a+b$	$a-b$	$a \times b$
Parité	pair	Pair			
	Pair	Impair			
	Impair	Pair			
	Impair	Impair			

✍ Exercice : Exercice 1 de la série.

II. Multiples d'un entier naturel- ppcm de deux entiers naturels

✍ Activité :

1) *Cocher les cases convenables :*

	2	6	11	21	0	28	14	120
Multiple de 2								
Multiple de 3								
Multiple de 5								
Multiple de 9								

2) **a)**- *Déterminer* M_4 *l'ensemble de multiples de 4.*

b)- *Déterminer* M_6 *l'ensemble de multiples de 6.*

c)- *En déduire le plus petit commun multiple de 4 et 6* (*On le note* $ppcm(4,6)$ *ou* $4 \vee 6$).

Définition :

Soient a et b deux entiers naturels. On dit que b est multiple de a s'il existe un entier naturel k tel que: $b = ka$.

Application :

1) *Déterminer tous les multiples inférieure à 50 de 7.*
2) *Déterminer* $\text{ppcm}(5\ ;\ 3)$, $\text{ppcm}(12\ ;\ 18)$ *et* $\text{ppcm}(5\ ;\ 20)$.

Exercice :

Soient a, b et c trois entiers naturels.

Montrer que si a est multiple de b et c, alors il est un multiple de $2b - 3c$.

III. Diviseurs d'un entier naturel- pgcd de deux entiers naturels

Activité :

1) *Cocher les cases convenables :*

	14	6	49	81	495
Divisible par 2					
Divisible par 3					
Divisible par 5					
Divisible par 7					
Divisible par 1					

2) **a)**- *Déterminer D_{12} l'ensemble de diviseurs de 12.*

b)- *Déterminer D_{18} l'ensemble de multiples de 18.*

c)- *En déduire le plus grand commun diviseur de 12 et 18 (On le note $p\,gcd(12,18)$ ou $12 \wedge 18$).*

Définition :

Soient a et b deux entiers naturels. On dit que a est un diviseur de b s'il existe un entier naturel k tel que: $b = ka$, et on écrit a/b.

Application :

1) *Déterminer les diviseurs de* 24.
2) *Déterminer* $\text{pgcd}(8\ ;\ 6)$, $\text{pgcd}(6\ ;\ 26)$ *et* $\text{pgcd}(36\ ;\ 9)$.

Exercice : Exercice 3 de la série.

Critères de divisibilité par 2,3,5,9.

Un nombre est divisible par :

- *2 lorsque son chiffre des unités est pair.*
- *5 lorsque son chiffre des unités soit 0 soit 5.*
- *3 lorsque la somme de ses chiffres est multiple de 3.*
- *9 lorsque la somme de ses chiffres est multiple de 9.*

Exemple :

- *Le nombre* 74250 *est divisible par 2 et 5 car son chiffre des unités est 0.*

- *Le nombre* 74250 *est divisible par 3 et 9 car*: $7+4+2+5+0=18$ *est multiple de 3 et 9.*

IV. Les nombres premiers:

Activité :

Déterminer D_2, D_3, D_5, D_{13} *et* D_{37}. *Que remarquer-vous ?*

Définition :

Un entier naturel p*supérieure ou égale à 2 est dit premier, si ses seuls diviseurs sont 1 et* p.

Application :

1) *Trouver les nombres premiers parmi les nombres suivants: 17, 45, 9, 41, 27, 11, 29.*
2) *Montrer que le nombre* 1000701 *n'est pas premier.*

Remarque :

Pour étudier la primalité d'un entier naturel n, *on cherche tous les nombres premiers* p *qui vérifient:* $p \leq \sqrt{n}$.

Si n*est divisible par un de ces nombres, alors il n'est pas premier.*

Exemple :

Montrons que 97 *est un nombre premier.*

On a: $\sqrt{97} < 10$. *Les nombres premiers inférieurs strictement à 10 sont : 2, 3, 5 et 7.*

Puisque 97*n'est pas divisible par les nombres2, 3, 5 et 7, alors il est premier.*

Application : *Exercice 5 de la série.*

V. Décomposition d'un entier naturel en produit de facteurs premiers :

Activité :

1) *Vérifier que:* $1400 = 2^3 \times 5^2 \times 7^1$ ($2^3 \times 5^2 \times 7^1$ *représente une décomposition en produit de facteurs premiers du* 1400).
2) *Déterminer les entiers naturels* n, m *et* p *tels que:* $3240 = 2^n \times 3^m \times 5^p$.

Théorème :

Tout entier naturel n *supérieur ou égale à 2, se décompose de façon unique en un produit de facteurs premiers.*

Application :

Décomposer en produits de facteurs premiers les nombres : 12, 3520, 4576.

Définition :

Soient a *et* b *deux entiers naturels. On dit que* a *et* b *sont premiers entre eux si* $p\,gcd(a,b) = 1$.

Exemples :

- ✓ *On a* $p\,gcd(5,13) = 1$, *donc 5 et 13 sont premiers entre eux.*
- ✓ *On a* $p\,gcd(12,30) = 6$,*donc 5 et 13 ne sont pas premiers entre eux.*

Théorème :

○ *Le PGCD de deux entiers naturels est le produit des facteurs communs entre les deux* *décompositions de ces deux entiers affectés du plus petit exposant.*

- *Le PPCM de deux entiers naturels est le produit des facteurs communs et non communs entre les deux décompositions de ces deux entiers affectés du plus grand exposant .*

Exemple :

Calculons $p\,gcd(120,45)$ et $ppcm(120,45)$.

Application :

Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres 123 et 595 puis déduire qu'ils sont premiers entre eux.

Exercice : Exercice 11 *de la série*.