Fonctions logarithmiques

Remarques

I. Fonction Logarithme Népérien

Activité ①:

1. Montrer que la fonction $f: x \mapsto \frac{1}{x}$ admet une primitive sur $]0,+\infty[$.

La primitive de f sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en 1 est appelée fonction logarithme népérien et se note par ln.

2. Étudier les variations de la fonction ln sur $]0,+\infty[$.
3. Déduire que $\forall(x,y) \in \mathbb{R}_*^{+2}$: $ln\,(x) > ln\,(y) \Leftrightarrow x > y$.
4. Étudier le signe de la fonction ln sur $]0,+\infty[$.

1. Définition et propriétés

Définition :

La fonction ***logarithme népérien*** est la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en 1 , et se note par ***ln*** ou ***Log***.

Remarque :

Le domaine de définition de la fonction $x \mapsto \ln(u(x))$ est $D = \{x \in \mathbb{R}/\ u(x) > 0\}$.

Application ① :

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :

❶ $f(x) = ln(3x+9)$ ❷ $f(x) = ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$

❸ $f(x) = ln(x^2-2x)$ ❹ $f(x) = ln(|2x-1|)$

Propriété :

- La fonction ln est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$.
- $\forall(x,y) \in \mathbb{R}_*^{+2}$: $ln\,(x) > ln\,(y) \Leftrightarrow x > y$.
- $\forall(x,y) \in \mathbb{R}_*^{+2}$: $ln(x) = ln(y) \Leftrightarrow x = y$.

Application ② :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :

❶ $ln(x-1) = ln\,(2-x)$ ❷ $ln(x^2-2x) = 0$

❸ $ln\,(2x-1) \geq ln\,(x)$ ❹ $ln\,(x^2-3x+3) < 0$

Propriété :

- $ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$.
- $ln\,(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.

Application ③ :

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :

❶ $f(x) = ln(ln\,x)$ ❷ $f(x) = \sqrt{(x-2)\ln(x)}$

Propriété :

Soient a et b deux réels strictement positifs et $r \in \mathbb{Q}^*$, on a :

- $ln(ab) = ln(a) + ln(b)$
- $ln(a^r) = r\,ln(a)$
- $ln\left(\frac{1}{a}\right) = -ln(a)$
- $ln\left(\frac{a}{b}\right) = ln(a) - ln(b)$

Exemples :

- $ln(\sqrt{8}) = \frac{1}{2}ln(8) = \frac{1}{2}ln(2^3) = \frac{3}{2}ln\,(2)$.
- $ln\left(\frac{3}{4}\right) + ln\left(\frac{4}{3}\right) = ln(3) - ln(4) + ln(4) - ln(3) = 0$.

Application ④ :

1. Simplifier les expressions suivantes $A = ln(9) + ln\sqrt[3]{3} - ln(81)$ et $B = ln\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right) + ln\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante (E): $ln(x^2-1) + 2\,ln(2) = ln\,(4x-1)$.

Exercice ①:

1. Soient a et b deux nombres de IR_+^*. Simplifier le nombre suivant :

Pr. LATRACH ABDELKBIR

$$A = \ln(ab^2) - \ln\left(\sqrt[3]{a^2b^5}\right) + \ln\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right) - \ln\left(\sqrt[4]{a^2b^6}\right).$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $ln(x-1) + ln(x-3) = ln\,(3)$.

Propriété :

- L'équation $ln(x) = 1$ admet une solution unique sur $]0,+\infty[$ qui se note par e ($e \simeq 2{,}71$).
- Pour tout $r \in \mathbb{Q}$ on a : $ln(e^r) = r$.

Exemple :

Résoudrons l'équation $4ln(x) = 3$.

Soit $x > 0$. On a $4ln(x) = 3 \Leftrightarrow ln(x) = \frac{3}{4}$

$$\Leftrightarrow ln(x) = ln\left(e^{\frac{3}{4}}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = e^{\frac{3}{4}}.$$

Puisque $e^{\frac{3}{4}} > 0$, alors l'ensemble de solutions de cette équation est $S = \left\{e^{\frac{3}{4}}\right\}$.

Application ④ :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 - 4x + 3 = 0$.

2. En déduire les solutions de l'équation $ln\,(x)^2 - 4ln\,(x) + 3 = 0$.

Exercice ②:

Résoudre dans $\mathbb{R}$ ce qui suit :

❶ $ln^2x - lnx = 0$

❷ $ln^2\,(x) + ln(x) - 6 \geq 0$

❸ $\begin{cases} lnx^2 + lny^5 = 16 \\ lnx^3 + lny^3 = 6 \end{cases}$

❹ $\begin{cases} x - y = 2 \\ lnx + lny = ln3 \end{cases}$

2. Limites usuelles :

Propriété :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} lnx = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to0^+} lnx = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to1} \frac{ln\,(x)}{x-1} = 1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x^n} = 0 \quad (n\epsilon IN^*)$
- $\lim\limits_{x\to0} \frac{ln\,(x+1)}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to0^+} xlnx = 0.$
- $\lim\limits_{x\to0^+} x^n\,lnx = 0 \quad (n\epsilon IN^*)$

Exemple :

Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} lnx - x$.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} lnx - x = \lim\limits_{x\to+\infty} x(\frac{lnx}{x} - 1) = -\infty$ parce que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x} - 1 = -1$.

Application ⑤ :

Calculer les limites suivantes :

❶ $\lim\limits_{x\to+\infty} lnx - \sqrt{x}$

❷ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{lnx}{\sqrt{x}}$

❸ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{lnx+4}{x^2}$

❹ $\lim\limits_{x\to0^+} ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

❺ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ln\,(x^2+1)}{x}$

❻ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ln\,(x^2+1)}{x^3}$

❼ $\lim\limits_{x\to+\infty} 2ln^2x - lnx + 1$

❽ $\lim\limits_{x\to2^-} ln\,(2-x)$

❾ $\lim\limits_{x\to3} \frac{\ln\left(\frac{x}{3}\right)}{x-3}$

Exercice ③:

Calculer les limites suivantes :

❶ $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x - lnx$

❷ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - 5lnx$

❸ $\lim\limits_{x\to0^+} x^4(lnx)^3$

❹ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ln^2x}{x}$

❺ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ln^3x}{x^2}$

❻ $\lim\limits_{x\to0^+} \left(\frac{1}{x} + lnx\right)$

❼ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x+lnx}$

❽ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(2x+3)}{x^2+1}$

❾ $\lim\limits_{x\to-\infty} ln\left(\frac{x^2+x+1}{3+2x^2}\right)$

❶⓿ $\lim\limits_{x\to e} \frac{lnx-1}{x-e}$

❶❶ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2ln^2x-lnx}{1+lnx}$

❶❷ $\lim\limits_{x\to0} \frac{ln(1+2x^2-x)}{2x}$

3. Étude de la fonction $x \mapsto lnx$

➢ ***Tableau de variations :***

Pr. LATRACH ABDELKBIR

x	0	$+\infty$
$ln(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

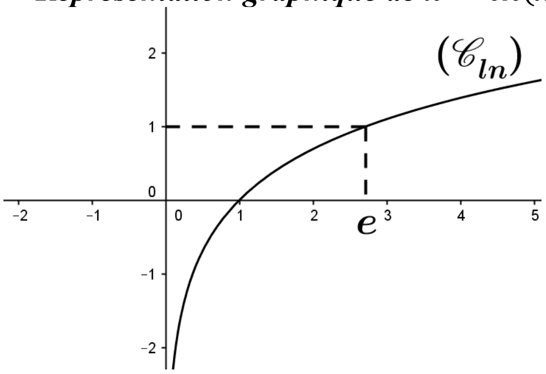
➢ ***Les branches infinies :***

- On a $\lim\limits_{x\to 0^+} lnx = -\infty$, alors l'axe des ordonnés est une asymptote verticale de (C_{ln}).
- On a $\lim\limits_{x\to +\infty} lnx = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{lnx}{x} = 0$, alors la courbe (C_{ln})admet une branche parabolique direction l'axe des abscisses .

➢ ***Concavité de la courbe de $x \mapsto \ln(x)$:***

Pour tout $x > 0$, on a $(ln(x))'' = \frac{-1}{x^2} < 0$, alors la courbe (C_{ln}) est concave.

➢ ***Représentation graphique de $x \mapsto \ln(x)$:***



4. Dérivée de la fonction $x \mapsto lnx$

Propriété :

- Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I, alors la fonction $f: x \longmapsto ln\,(u(x))$ est dérivable sur I et on a : $(\forall x \epsilon I)$: $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.
- si u est une fonction dérivable et ne s'annule pas sur l'intervalle I, alors la fonction $f: x \longmapsto ln\,(|u(x)|)$ est dérivable sur I et on a : $(\forall x \epsilon I)$: $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Exemple :

On considère la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln(\sqrt{x})$.
Comme la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable et strictement positive sur $]0, +\infty[$, alors la fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$.

Et on a : $(\forall x \epsilon]0, +\infty[)$: $f'(x) = \frac{(\sqrt{x})'}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}$.

Application ⑥ :

1. Montrer que $f \mapsto ln\,(x^2 - x + 1)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis déterminer sa dérivée.
2. Déterminer f' dans les cas suivants :
   ❶ $f(x) = ln\left(\sqrt{x^2 + 4}\right)$ ❷ $f(x) = ln(lnx)$ ❸ $f(x) = \frac{x}{ln\,(2x-1)}$

Corollaire :

Soit u est une fonction dérivable et ne s'annule pas sur un intervalle I.
Les primitives de la fonction $x \longmapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ sur I sont les fonctions $x \to ln|u(x)| + c$ tel que c $\epsilon\mathbb{R}$.

Exemple :

Déterminons les primitives de la fonction $f: x \longmapsto \frac{x}{x^2+4} - \frac{1}{4x+3}$ sur l'intervalle $I = \left]-\frac{3}{4}, +\infty\right[$.

On a $f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{(x^2+4)'}{x^2+4} - \frac{1}{4} \times \frac{(4x+3)'}{4x+3}$.

Donc les primitives de la fonction f sur $I = \left]-\frac{3}{4}, +\infty\right[$ sont $x \longmapsto \frac{1}{2} ln(|x^2 + 4|) -$

$\frac{1}{4}ln(|4x+3|)+c$.

C'est-à-dire $x \longmapsto \frac{1}{2}ln(x^2+4)-\frac{1}{4}ln(4x+3)+c$ où $c \in \mathbb{R}$.

Application ⑦ :

Déterminer l'ensemble des primitives de f dans les cas suivants :

❶ $f(x)=\frac{x-1}{x^2-2x+1}$ ❷ $f(x)=\frac{1}{xln(x)}$ ❸ $f(x)=\frac{x}{x+1}$ ❹ $f(x)=tanx$

II. Fonction Logarithme de base a

1. Définition et propriétés

Définition :

Soit a un réel strictement positif et différent de 1.
La fonction ***logarithme de base a*** est la fonction, notée par $log_a(x)$, définie sur $]0,+\infty[$ par $log_a(x)=\frac{ln(x)}{ln(a)}$.

Remarques :

- $log_e(x)=ln(x)$
- $log_a(a)=1$
- $log_a(1)=0$
- $log_a(a^r)=r(r\in Q)$

Propriété :

Pour tout réels strictement positifs x et y et pour tout $r\in\mathbb{Q}$ on a :

- $log_a(xy)=log_a(x)+log_a(y)$.
- $log_a(x^r)=rlog_a(x)$.
- $log_a\left(\frac{1}{x}\right)=-log_a(x)$.
- $log_a\left(\frac{x}{y}\right)=log_a(x)-log_a(y)$.

Exemple :

On a : $log_{\frac{1}{2}}(2^4)=4log_{\frac{1}{2}}(2)$

$=-4log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)=-4.$

Application ⑧ :

Simplifier le nombre suivant : $A=log_2(8)-log_3(27)+log_5\left(\frac{1}{125}\right)$.

2. Étude de la fonction log_a

Propriété :

Soit $a\in IR^*\backslash\{1\}$.

- Si $a>1$, alors la fonction log_a est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.
- Si $0<a<1$, alors la fonction log_a est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.

Preuve :

La fonction log_a est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a $(\forall x\in]0,+\infty[)$: $log'_a(x)=\frac{1}{xln(a)}$.

Donc le signe de $log'_a(x)$ dépend du signe de lna, ce qui nous amène à discuter deux cas :

- $a>1$ (c.-à-d. $lna>0$)
- $0<a<1$(c.-à-d. $lna<0$)

x	0	$+\infty$
$log_a(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

x	0	$+\infty$
$log_a(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

Conséquence :

Pour tout réels strictement positifs x et y. On a :

- Si $a>1$, alors $log_a(x)>log_a(y)\Leftrightarrow x>y$.
- Si $0<a<1$, alors $log_a(x)>log_a(y)\Leftrightarrow x<y$.

Application ⑨ :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

❶ $log_{\frac{1}{2}}(2-x)\leq log_{\frac{1}{2}}(x+4)$ ❷ $log_3(2-x)\leq log_3(x+4)$

3. Fonction logarithme décimal

Définition :

La fonction ***logarithme décimal*** est la fonction logarithme de base 10. Elle est notée log et On a $(\forall x \in]0,+\infty[)\ :\ \log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

Remarques :

• $log(1) = 0$ • $log(10) = 1$ • $log(10^r) = r\ (r \in Q)$

Exemple :

$log(0{,}001) = log(10^{-3}) = -3$.

Application ⑩ :

Simplifier le nombre suivant : $A = log(1000) - log(0{,}0001) + log\left(\frac{1}{10000}\right)$.

Propriété :

- $(\forall x > 0)(\forall r \in Q)$: $log(x) = r \Leftrightarrow x = 10^r$.
- $log(x) > r \Leftrightarrow x > 10^r$
- $log(x) \leq r \Leftrightarrow 0 < x \leq 10^r$

Exemple :

Le ph d'une solution aqueuse est $ph = -log\ ([H_3O^+])$. Ainsi : $[H_3O^+] = 10^{-ph}$.

Application ⑪ :

Résoudre dans IR l'équation (E): $\log(x+11) + \log(x-4) = 2$.

Exercice de synthèse : extrait de rattrapage 2022

Soit f la fonction numérique définie sur $[0\ ;+\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = x^4(lnx - 1); x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité : 1cm).

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis déterminer la branche infinie de (C) au voisinage de $+\infty$.

2. a. Montrer que f est continue à droite en 0.

b. Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 puis interpréter le résultat géométriquement.

3. a. Montrer que $f'(x) = 2x^3(lnx - 1)(2lnx - 1)$ pour tout x de l'intervalle $]0\ ;+\infty[$.

b. Dresser le tableau de variations de f.

4. a. Sachant que $f''(x) = 2x^2(6lnx - 5)lnx$ pour tout x de l'intervalle $]0\ ;+\infty[$, étudier le signe de $f''(x)$ sur $]0\ ;+\infty[$.

b. Déduire que la courbe (C) admet deux points d'inflexion dont on déterminera les abscisses.

5. a. Construire (C) dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (on prend : $\sqrt{e} \approx 1{,}6$ et $e^2 \approx 7{,}2$).

b. En utilisant la courbe (C), déterminer le nombre de solutions de l'équation $x^2(lnx - 1) = -1$.

6. On considère la fonction g définie sur IR par $g(x) = f(|x|)$.

a. Montrer que la fonction g est paire.

b. Construire (C_g) la courbe représentative de g dans le même repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Pr. LATRACH ABDELKBIR