Suites numériques

1BSF 1 et 2

Pr. Latrach Abdelkbir

Activité ①:

1. Compléter avec deux chiffres qui correspondent à la séquence de chacune des listes suivantes :

a. $0, 3, 6, 9, \ldots$

b. $1, 2, 4, 8, \ldots$

c. $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots$

2. Quelle est la relation que l'on adopte dans chaque liste pour passer d'un terme au terme suivant ?

Application ①:

Soit la suite (u_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*): u_n = 2 + \frac{3}{n}$.

1. Calculer les trois premiers termes de (u_n).

2. Calculer $u_n + 1,\ u_{n+1},\ u_{2n}$ et u_{2n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Trouver l'indice n tel que $u_n = \frac{43}{21}$.

Application ②:

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies respectivement par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n} \end{cases}; n \in \mathbb{N}$ et $\begin{cases} v_0 = 2\,, v_1 = -1 \\ v_{n+2} = 2v_{n+1} + v_n;\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

1. Calculer u_1, u_2, v_3 et v_4.

2. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = \frac{2}{2n+1}$.

Activité ②:

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{n+4}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $u_n \leq 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que $u_n \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. En déduire que $1 \leq u_n \leq 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Application ③:

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} U_0 = 4 \\ U_{n+1} = \dfrac{4U_n - 3}{U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

.Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}): U_n \geq 3$.

Exercice ①:

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{2U_n + 1}{U_n + 2} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}): 0 \leq U_n \leq 1$.

Application ④:

Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans les cas suivants :

1. $u_n = \frac{3}{n+1}$ **2.** $u_n = n^2 + 2n$ **3.** $u_n = \sqrt{n+1}$ **4.** $u_n = (-1)^n$

Application ⑤:

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = 4 - \frac{3}{u_n} \end{cases};\ \forall n \in \mathbb{N}$

1. Calculer u_1 et u_2 .

2. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}): u_n > 3$.

3. a. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}): U_{n+1} - U_n = \dfrac{(1-U_n)(U_n-3)}{U_n}$.

b. Etudier la monotonie de la suite (u_n).

c. En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}): u_n \leq 6$.

Exercice ②:

Soit (v_n) la suite définie par : $\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}\left(v_n + \frac{4}{v_n}\right) \end{cases};\ \forall n \in \mathbb{N}$

1. Calculer v_1 et v_2 .

2. Montrer que la suite (v_n) est minorée par 2.

3. Etudier la monotonie de la suite (v_n).

4. En déduire que la suite(v_n) est majorée par 3.

Activité ③:

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = 3n + 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Vérifier que $u_1 = u_0 + 3, u_2 = u_1 + 3$ et $u_3 = u_2 + 3$.

2. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}): u_{n+1} = u_n + 3$.

Application ⑥:

Soit (u_n)la suite définie par :$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{u_n} \end{cases};\ (\forall n \in \mathbb{N})$

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ v_n = \frac{1}{u_n - 1}$

Montrer que (v_n) est une suite arithmétique , préciser sa raison et son premier terme .

Application ⑦:

Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_1 = 5$ et $r = 2$.

1. Calculer u_5 ; u_{10} et u_{100} .

2. Déterminer le terme général de la suite (u_n).

3. Est-ce que 203 est un terme de la suite (u_n).

Application ⑧:

Soit (v_n) une suite arithmétique telle que $v_3 = 2$ et $v_7 = 14$.

1. Détermine la raison r de cette suite et son premier terme v_0.

2. Exprimer v_n en fonction de n.

3. Calculer la somme : $S = v_4 + v_5 + v_6 + \ldots + v_{25}$.

Exercice ③:

Soit (u_n)la suite définie par :$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{5u_n - 1}{u_n + 3} \end{cases};\ (\forall n \in \mathbb{N})$

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ v_n = \frac{1}{u_n - 1}$.

1. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}): u_n > 1$.

2. Etudier la monotonie de la suite (u_n).

3. Montrer que (v_n)est une suite arithmétique, préciser sa raison et son premier terme .

4. Exprimer v_n puis u_n en fonction n.

5. Calculer la somme : $S = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n$.

Activité ④:

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 3 \times 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Vérifier que $u_1 = 2u_0, u_2 = 2u_1$ et $u_3 = 2u_2$.

4. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}): u_{n+1} = u_n + 3$.

Application ⑨:

Soit (u_n)la suite définie par :$\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1 \end{cases};\ (\forall n \in \mathbb{N})$

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ v_n = u_n + 3$

Montrer que (v_n)est une suite géométrique, préciser sa raison et son premier terme .

Application ⑩:

Soit (v_n) une suite de raison $q = 2$ et de premier terme $v_1 = 5$.

1. Calculer u_4.

2. Exprimer v_n en fonction de n.

Application ⑪:

Soit (u_n) une suite géométrique telle que $q = 3$ et $U_4 = 12$.

Calculer la somme $S = U_4 + U_5 + U_6 + \ldots + U_{2006}$.

✍ **Exercice ④ :**

Soit (u_n)la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n+3}{u_n+4} \end{cases}$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$; $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+3}$.

1. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}): 0 < u_n < 1$.
2. En déduire la monotonie de la suite (u_n).
3. Montrer que (v_n)est une suite géométrique , préciser sa raison et son premier terme .
4. Exprimer v_n puis u_n en fonction n.

Calculer la somme : $S = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n$.