CHAPITRE

1

Notion de logique

Situation problème

Un trésor est caché dans l'une des trois salles A, B ou C.
Sur chaque porte, une inscription est notée :
Salle A : "Le trésor n'est pas ici."
Salle B : "Le trésor n'est pas dans la salle C."
Salle C : "Le trésor est ici."
Sachant qu'au moins une inscription est vraie et qu'au moins une est fausse, comment déterminer où se trouve le trésor ?

Plan du chapitre 1

COURS

I Assertion -proposition - Fonction propositionnelle :

1. Notion d'assertion

Activité :

Répondre par vraie ou faux :

1. Tout nombre paire est divisible par 4
2. La somme de deux nombres impairs est un nombre pair
3. $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel
4. La fonction $f(x) = x^2$ est une fonction paire

Solution:

Définition 1:

Une assertion (= proposition) est une phrase mathématique à laquelle on peut attribuer une et une seule valeur de vérité, à savoir vrai (V en abrégé) ou faux (F en abrégé) et elle est généralement désignée par une lettre : P, Q, R ou S ...

Remarque 1:

On désigne par V ou 1 la valeur de vérité d'une proposition vraie , et par F ou 0 la valeur de vérité d'une assertion fausse

Prof: M.Mohammed

Définition 2:

Soit P une assertion. On affecte à P le nombre 1 si elle est vraie et 0 si elle est fausse. On schématise ce fait par : un tableau appelé table de vérité de P :

P
1
0

ou

P
V
F

Exemple 1:

1. P : " La somme de deux entiers consécutifs est un nombre impair " est une assertion vraie.
2. Q : " Le nombre π est rationnel " est une assertion fausse.
3. R : " L'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$ " c'est une assertion vraie car $\Delta > 0$.
4. $S(m,n)$: " $(m;n) \in \mathbb{N}^2; m - n = 5$" n'est pas une assertion car on ne peut dire s'il est vrai ou faux.

Application :

Déterminer la valeur de vérité de chacun des propositions suivantes :

— P : " $\left(\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\right)^2 = \dfrac{7}{5}$ ".
— Q : " $cos(\dfrac{\pi}{7}) > 1$".
— R : "$\sqrt{3+\sqrt{5}} \times \sqrt{3-\sqrt{5}} \in \mathbb{N}$ ".
— R : " Les solutions de l'équation $2023x^2 - 2024x + 1 = 0$ sont 1 et -3 ".

Solution:

2. Fonction propositionnelle

Activité :

On considérer l'expression (C) : "$(x \in \mathbb{R}); x^2 - x \geqslant 0$"

1. L'expression $C(x)$ est-elle vraie pour : $x = 2$; $x = \dfrac{1}{2}$; $x = -1$; $x = \dfrac{2}{5}$

2 Que peut-on déduire ?

Solution:

Définition 1:
On appelle une **fonction propositionnelle** toute phrase ou énoncé mathématique dépendant d'une (ou plusieurs) variable appartenant à un ensemble donné ; elle peut être une assertion lorsque on substitue cette variable par un élément déterminé de cet ensemble .
Selon le nombre de variables , une **fonction propositionnelle** est généralement désignée par : $P(x)$, $Q(x;y)$ ou $R(x;y;z)$ ...etc

Exemple 1:

1. $P(x) : (x \in \mathbb{N}); x^2 + x = 2$ est une fonction propositionnelle.
On a $P(1)$ est une assertion vraie et $P(0)$ est une assertion fausse.
2. $P(a;b) : (a \in \mathbb{R})(b \in \mathbb{R}); a^2 + b^2 = 2$ est une fonction propositionnelle.
On a $P(-1;1)$ est une assertion vraie et $P(0;2)$ est une assertion fausse.

II Les quantificateurs Logique :

1. Quantificateur universel - Quantificateur existentiel

Activité :

Soit $A(x)$ et $B(x)$ deux fonctions proportionnelles telle que :

$$A(x) : "(x \in \mathbb{R}); x^2 + x + 1 > 0 \quad \text{et} \quad B(x) : "(x \in \mathbb{R}); x^2 + 2x - 3 = 0$$

1. Est ce que $A(x)$ est vraie pour tous les nombres réel ? justifier .
2. Vérifier que $B(x)$ est vraie pour certains valeurs de x (On prend $x = 1$ ou $x = -3$) et fausse pour d'autre valeurs $(x = 0)$

Prof: M.Mohammed

Solution:

Définition 1:

Soit $P(x)$ une fonction propositionnelle d'une variable x d'un ensemble E.
À partir de la fonction propositionnelle $''(x \in E), P(x)''$, on définit :

1. L'assertion $''(\exists x \in E), P(x)''$ qui se lit : "il existe au moins $x \in E$ tel que $P(x)$".
Elle est vraie lorsqu'il existe au moins $x \in E$ vérifiant la propriété $P(x)$.
Le symbole $\exists$ s'appelle **le quantificateur existentiel** .
2. L'assertion $''(\exists! x \in E), P(x)''$ qui se lit : "il existe un et unique $x \in E$ tel que $P(x)$".
Elle est vraie lorsqu'il existe un et unique $x \in E$ vérifiant la propriété $P(x)$.
3. L'assertion $''(\forall x \in E), P(x)''$ qui se lit :
"pour tout $x \in E$ on a $P(x)$ " ou "quel que soit $x \in E$ on a $P(x)$ ".
Elle est vraie lorsque tous les éléments de E vérifient la propriété $P(x)$.
Le symbole $\forall$ s'appelle **le quantificateur universel** .

Exemple 1:

1. Soit P : " Il existe un réel x tel que $x^2 = 1$".
Écriture formalisée : $P : \exists x \in \mathbb{R},\ x^2 = 1$.
Valeur de vérité : P est vraie car le nombre réel $x = -1$ vérifie l'égalité $x^2 = 1$.
2. Soit Q : " Pour tout réel positif x, on a $x^2 \geq x$".
Écriture formalisée : $Q : \forall x \in \mathbb{R}^+,\ x^2 \geq x$
Valeur de vérité : Le nombre réel $x = \frac{1}{2}$ ne vérifie pas l'inégalité $x^2 \geq x$. Alors Q est fausse.
3. Soit R : " Pour tout réel x non nul, il existe un réel y tel que $xy = 1$".
Écriture formalisée : $R : (\forall x \in \mathbb{R}^*)(\exists y \mathbb{R}),\ xy = 1$
Valeur de vérité : Soit $x \in \mathbb{R}^*$; en considérant $y = \frac{1}{x}$ on obtient $x \times \frac{1}{x} = 1$. D'où R est vraie .
4. Soit S :" $(\exists x \in \mathbb{R}); x^2 = -1$".
S est une assertion fausse car aucun réel au carré ne donnera un nombre négatif.
5. Soit T :" $(\exists! x \in \mathbb{R}^*); x^2 = -x$".
T est une assertion vraie car l'équation $x^2 = -x$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}^+$.

2. Assertions à plusieurs quantificateurs :

Exemple 1:

1. L'assertion : " pour chaque entier naturel, on peut trouver un entier naturel strictement plus grand " peut s'écrire sous forme : $(\forall n \in N)(\exists m \in N),\ m > n.$
(cette assertion est vraie)
2. L'assertion : " il y a un entier naturel plus grand que tous les entiers naturels" peut s'écrire sous forme : $(\exists m \in N)(\forall n \in N),\ m > n.$
(cette assertion est fausse)

Remarque 1:

L'ordre d'écriture des quantificateurs est fondamental pour le sens d'une phrase formelle :

1. On peut permuter des quantificateurs de même nature.
2. On ne peut pas permuter des quantificateurs de natures différentes.

Exemple 2:

1. Voici une phrase vraie " Pour toute personne, il existe un numéro de téléphone ", bien sûr le numéro dépend de la personne.
2. Par contre cette phrase est fausse : " Il existe un numéro, pour toutes les personnes". Ce serait le même numéro pour tout le monde !

Application :

Écrire les propositions suivant a l'aide des quantificateurs logique :

1. P : " tout réel inférieur au égal a 1 et négatif ".
2. Q : " L'équation $x^2 - 2x + 3 = 0$ admet au moins une racine réel ".
3. R : " pour tout réel x , il existe un entier naturel n tel que $x < n$ ".
4. S : " il n'existe aucun rationnel solution de l'équation $x^2 - 2 = 0$ ".

Solution:

III Les connecteurs logiques - Opération sur les propositions :

Définition 1:
Un connecteur logique est une opération qui à deux assertions associe une troisième.

1. Négation d'une assertion :

Activité :

Ahmed et Jawad jouent à un jeu qui consiste à ce qu'Ahmed doive dire l'opposé de tout ce que Jawad dit. Voici les paroles de Jawad, donnez ce qu'Ahmed doit dire.

1. $\sqrt{2}$ est un entier naturel
2. 4 est nombra pair
3. $\sqrt{2}+3 \ = 2$
4. 20 et un multiple de 5
5. l'ensemble des nombres impairs est finie

Prof: M.Mohammed

Solution:

Définition 1:

Soit P une assertion, la négation de P est l'assertion notée $\overline{P}$, $\neg P$ ou non(P) ; elle est vraie si et seulement si P est fausse, comme le montre la table de vérité du connecteur $\overline{P}$:
Remarque : $\overline{\overline{P}}$ et P ont la même valeur de vérité

P	$\overline{P}$
1	0
0	1

Exemple 1:

1. P : " $3 \in \mathbb{Z}$" alors $\overline{P}$: " $3 \notin \mathbb{Z}$".
2. Q : " $3+5=8$" alors $\overline{Q}$: " $3+5 \neq 8$"
3. R : " $3\times 8 < 10$" alors $\overline{R}$: " $3\times 8 \geq 10$".
4. S : "$\{3;8;10\} \subset \mathbb{N}$" alors $\overline{S}$: " $\{3;8;10\} \not\subset \mathbb{N}$".

Propiété 1:

Intuitivement :

1. La négation de "Tous les éléments de l'ensemble E vérifient la propriété P" est "Il y a au moins un élément de E qui ne vérifie pas P".
2. La négation de "Il y a au moins un élément de E pour lequel la propriété P est vraie" est "Pour tous les éléments de E, la propriété P est fausse".

Formellement :

1. La négation de " $(\forall x \in E)$, on a $P(x)$" est " $(\exists x \in E)$ tel que $\overline{P(x)}$".
2. La négation de "$(\exists x \in E)$ tel que $P(x)$" est "$(\forall x \in E)$, on a $\overline{P(x)}$".

Remarque 1:

1. La règle à retenir est la suivante :
Pour nier une expression commençant par "il existe" on transforme le "il existe" en "pour tout" et on nie ce qui suit.
Pour nier une expression commençant par "pour tout", on transforme le "pour tout" en "il existe" et on nie ce qui suit.

2 $(\exists\,!\,x \in E)\,;\mathrm{P}(x) \quad \Leftrightarrow \quad (\exists\; x \in E\,;\mathrm{P}(x)\,)$ et $(\forall\; y \in E\,;\mathrm{P}(y)) \;\Rightarrow\; y{=}x\,)$
Alors la négation de $(\exists\,!\,x \in E)\,;\mathrm{P}(x)$" c'est : $(\forall\; x \in E\,;\overline{P(x)}\,)$ ou $(\exists\; y \in E\,;\mathrm{P}(y)$ et $y \neq x\,)$

3 Pour déterminer la négation d'une proposition il faut déterminer la négation de Certains Symboles :

Le symbole	$=$	$>$	$<$	$\in$	$\subset$	$\forall$	$\neq$	$\leqslant$	$\geqslant$	$\notin$	$\not\subset$	$\exists$
la négation	$\neq$	$\leqslant$	$\geqslant$	$\notin$	$\not\subset$	$\exists$	$=$	$>$	$<$	$\in$	$\subset$	$\forall$

Exemple 2:

a) On a : P : "pour tout entier naturel n, on a $n^2 \geq n$".
Alors $\overline{P}$: "il existe au moins un entier naturel n tel que $n^2 < n$".

b) On a : Q : "Il existe au moins un réel x tel que $x^2 = 0$". Alors $\overline{Q}$:"Pour tout réel x, $x^2 \neq 0$".

c) On a : $R : \forall x \in R, \exists y \in R, x+y=0$. Alors $\overline{R} : \exists x \in R, \forall y \in R, x+y \neq 0$

Propiété 2:

Pour Montrer que la proposition $(\forall x \in E); p(x)$ est fausse ; il suffit de montrer que sa négation $(\exists x \in E); \overline{p(x)}$ est vraie . ce type de raisonnement est appelé raisonnement par contre exemple

Application :

Donner la négation des propositions suivantes

1 P : " $(\forall x \in \mathbb{R})\,;\, x^2 + 2x - 3 > 0$ ".

2 Q : " $(\exists n \in \mathbb{N})\,;\, \sqrt{n^2+1} \in \mathbb{N}$ ".

3 R :" $(\forall y \geqslant 0)\ (\exists x \in \mathbb{R})\ ;\ y = x^2$".

Solution:

Exercice 1: Pour appliquer

Montrer que la proposition " $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\,;\, x + \sqrt{x} \geqslant\; 2$ " est fausse.

2. Conjonction et Disjonction de deux propositions

Activité :

Recopier les expressions suivantes et les compléter par l'un des liens logiques suivants : " ou " ou " et "

1. $x(x-1)=0$ signifie que : $x=0$ .... $x=1$.
2. ABCD est un losange signifie que : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ ..... $AB=BC$
3. Sot x un réel , on a : $|x|=x$ .....$|x|=-x$
4. Sot x un réel ,$|x|<1$ signifie que : $1>x$ .....$-1<x$

Solution:

a - Conjonction de deux propositions

Définition 1:

La conjonction est un connecteur logique qui à deux assertions (P et Q) associe l'assertion $(P \wedge Q)$ appelée la conjonction de P et Q et qu'on lit (P et Q) définie par la table de vérité ci-contre

P	Q	$(P \wedge Q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Notez Bien :

On dit que (P et Q) est vraie si et seulement si les deux propositions P et Q sont vraies

Remarque 1:

1. La conjonction (P et Q) et (Q et P) ont le même sens on dit que la conjonction est une opération commutative
2. les propositions $[(P \text{ et } Q) \text{ et } R]$ et $[P \text{ et } (Q \text{ et } R)]$ ont le même sens on dit que la conjonction est une opération Associative

Exemple 1:

1. P : " $5+2=7$ et $2\times 5<11$ " est une proposition vraie.
2. Q : " $\{5;\frac{1}{5}\}\subset N$ et $2\times 5=10$ " est une proposition fausse.
3. R : " $\sqrt{3}=\sqrt{\sqrt{9}}$ et $\sqrt{3}\in\mathbb{Q}$" est une proposition fausse

Exemple 2:

P	Q	la vérité de P	la vérité de Q	la vérité $(PetQ)$
7 est un nombre impair	4 est un nombre premier	1	0	0
3 divise 17	25 est un multiple de 7	0	0	0
5 est négatif	12 est positif	0	1	0
$2+3=5$	$\exists x\in R, x<0$	1	1	1

b - Disjonction de deux propositions

Définition 2:

La disjonction est un connecteur logique qui à deux assertions P et Q associe l'assertion $(P\vee Q)$ qu'on appelle la disjonction de P et Q et qu'on lit (P ou Q) définie par la table de vérité ci-contre

P	Q	$(P\vee Q)$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Notez Bien :
On dit que (P ou Q) est faux si et seulement si les deux propositions P et Q sont faux

Exemple 3:

P	Q	la vérité de P	la vérité de Q	la vérité $(PouQ)$
7 est un nombre impair	4 est un nombre premier	1	0	1
3 divise 17	25 est un multiple de 7	0	0	0
5 est négatif	12 est positif	0	1	1
$2+3=5$	$\exists x\in R, x<0$	1	1	1

Remarque 2:

1. La proposition (P ou Q) et (Q ou P) ont le même sens on dit que la disjonction est une opération commutative
2. les propositions $[(P \text{ ou } Q) \text{ ou } R]$ et $[P \text{ ou } (Q \text{ ou } R)]$ ont le même sens on dit que la disjonction est une opération Associative

Exercice 1: Pour appliquer

Soit P une proposition , Montrer que $\left(\overline{\overline{P}\ ou\ P}\right)$ est fausse.

3. Implication et Équivalence de deux propositions

a - Implication de deux propositions

Activité :

Étudier la valeur de vérité des deux propositions suivants :

1. Si ABC est un triangle rectangle en A alors on a $BC^2 = AB^2 + AC^2$
2. Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$ alors on a ABC est un triangle rectangle en A

Solution:

Définition 1:

L'implication est un connecteur logique qui à deux assertions P et Q associe l'assertion notée $(P \Rightarrow Q)$ et dont la valeur de vérité est celle de l'assertion $[\overline{P} \vee Q]$ on lit : "P implique Q" ou "si P alors Q".
$(P \Rightarrow Q)$ est alors définie par la table de vérité ci-contre.

P	Q	$(P \Rightarrow Q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Notez Bien :
On dit que $(P \Rightarrow Q)$ est faux si et seulement si P et vraie et Q est faux (L'ordre est important)

Remarque 1:

1. L'implication $P \Rightarrow$ Q est appelé l'implication réciproque de Q $\Rightarrow$ P
2. Les deux implications $P \Rightarrow$ Q et Q $\Rightarrow$ P n'ont pas le même sens c'est pour cela on dit que l'implication est une opération non commutative

Exemple 1:

P	Q	la vérité de P	la vérité de Q	la vérité $(P \Rightarrow Q)$
7 est un nombre impair	4 est un nombre premier	1	0	0
3 divise 17	25 est un multiple de 7	0	0	1
5 est négatif	12 est positif	0	1	1
$2+3=5$	$\exists x \in R, x<0$	1	1	1

Remarque 2:

La transitivité de l'implication :
Soient P , Q et R trois propositions on a : $(P \Rightarrow Q \ \ et \ \ Q \Rightarrow R) \Rightarrow P \Rightarrow R$

Application :

1. Soient x et y deux réels non nuls , Montrer que $2x+4y=1 \Rightarrow \dfrac{1}{x^2+y^2} \leqslant 20$
2. Soient a et b deux réels ; Montrer que : $a^2+b^2=1 \Rightarrow |a+b| \leqslant \sqrt{2}$
3. Soient a et b deux réels ; Montrer que : $(|a|<1 \ \text{ et } \ |b|<1) \Rightarrow |a+b|<|1+ab|$

Solution:

b - Condition suffisante - Condition nécessaire

Il s'agit d'une autre façon d'exprimer les implications .Les phrases suivantes ont le même sens :

1. P $\Rightarrow$ Q
2. Pour que la proposition P est Vraie , il faut que la proposition Q est vraie .
3. Q est une condition nécessaire pour que la proposition P soit vraie
4. Pour que la proposition Q est vraie ,il suffit que la proposition P est vraie
5. P est une condition suffisante pour que la proposition Q soit vraie .

Prof: M.Mohammed

La même implication peut donc s'écrire :

1 Soit comme une condition suffisante :
Pour que la conclusion soit vraie , il suffit que l'hypothèse soit vraie .

2 Soit comme une condition nécessaire :
Pour que l'hypothèse soit vraie ,il faut que la conclusion soit vraie .

Exemple 2:

On sait que l'implication suivante est vraie :

$$\text{ABC est un triangle équilatéral} \quad \Rightarrow \quad \text{ABC est un triangle isocèle}$$

a) La condition ABC est un triangle équilatéral est suffisante pour que le triangle ABC soit isocèle

b) La condition ABC est un triangle isocèle est nécessaire pour que le triangle ABC soit équilatéral

c - Équivalence de deux propositions

Activité :

On considèrent $H(x) : ax^2 + bx + c = 0$, avec $(a \neq 0)$, b et c des réel
Soit P et Q deux propositions tel que :
P : "H admet deux solution de signe différent " et Q : $"ac < 0"$

1 Montrer que $P \Rightarrow Q$

2 Montrer que $Q \Rightarrow P$

NB : on a montrer que $P \Rightarrow Q$ et que $Q \Rightarrow P$ on note cela par P $\Leftrightarrow$Q et on dit que :
P est équivalente a Q

Solution:

Définition 2:

L'équivalence logique est un connecteur logique qui à deux assertions P et Q associe l'assertion notée $(P \Leftrightarrow Q)$ et dont la valeur de vérité est celle de l'assertion $[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)]$ on lit : P équivalent à Q ou P si et seulement si Q
$(P \Leftrightarrow Q)$ est alors définie par la table de vérité ci-contre.

P	Q	$(P \Leftrightarrow Q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Notez Bien :
On dit que $(P \Leftrightarrow Q)$ est vraie si et seulement si P et Q est on la même valeur de vérité

Exemple 3:

P	Q	la vérité de P	la vérité de Q	la vérité $(P \Leftrightarrow Q)$
7 est un nombre impair	4 est un nombre premier	1	0	0
3 divise 17	25 est un multiple de 7	0	0	1
5 est négatif	12 est positif	0	1	0
$2+3=5$	$\exists x \in R, x<0$	1	1	1

Remarque 3:

1. La proposition $(P \Leftrightarrow Q)$ et $(Q \Leftrightarrow P)$ ont la même valeur de vérité , on dit que l'équivalence est une opération commutative
2. Soient P , Q et R trois propositions alors on a : $[P \Leftrightarrow Q \quad et \quad Q \Leftrightarrow R] \Rightarrow (P \Leftrightarrow Q)$, on dit que l'équivalence est une opération transitive

Propiété 1:

1. $[\,(\forall x \in E)\ \ A(x)\ et\ B(x)\,] \Leftrightarrow (\forall x \in E)\ \ A(x)$ et $(\forall x \in E)\ \ B(x)$
2. $[\,(\exists x \in E)\ \ A(x)\ ou\ B(x)\,] \Leftrightarrow (\exists x \in E)\ \ A(x)$ ou $(\exists x \in E)\ \ B(x)$

Remarque 4:

La proposition : $[\,(\exists x \in E)\ \ A(x)\ et\ B(x)\,] \Leftrightarrow (\exists x \in E)\ \ A(x)$ et $(\exists x \in E)\ \ B(x)$
n'est pas toujours vraie comme le montre l'exemple suivante :
Considerons les deux proposition suivantes :
P : $[(\exists x \in R)\ \ cos(x)=0\ et\ (\exists x \in R)\ sin(x)=0]$ et Q : $[(\exists x \in R)\ \ cos(x)=0\ et\ sin(x)=0]$
La proposition P est vraie car $cos(0)=0$ et $sin(\frac{\pi}{2})=0$, Dans les deux affirmations :
$(\exists x \in R)\ \ cos(x)=0$ et $(\exists x \in R)\ sin(x)=0$ la lettre x ne désigne pas forcément un même nombre
.
La proposition Q est évidement fausse car pour tout x de R on a $cos^2 x + sin^2 x = 1 \neq 0$

Application :

1. Soient a et b deux réels positifs , Montrer que $a^2+b^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad a=b=0$
2. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^{2}$ tel que $x>1$ et $y \geq 4$ Montrer que
$$\sqrt{x-1} + 2\sqrt{y-4} = \frac{x+y}{2} \quad \Leftrightarrow \quad (x=2 \quad et \quad y=8)$$

Solution:

Propiété 2:

Soient P, Q, R trois assertions. Nous avons les équivalences (vraies) suivantes :

1. $P \Leftrightarrow non\ (non\ (P))$
2. $(P\ et\ Q) \Leftrightarrow (Q\ et\ P)$
3. $(P\ ou\ Q) \Leftrightarrow (Q\ ou\ P)$
4. $non\ (P\ et\ Q) \Leftrightarrow (non\ P)\ ou\ (non\ Q)$
5. $non\ (P\ ou\ Q) \Leftrightarrow (non\ P)\ et\ (non\ Q)$
6. $P\ et\ (Q\ ou\ R) \Leftrightarrow (P\ et\ Q)\ ou\ (P\ et\ R)$
7. $P\ ou\ (Q\ et\ R) \Leftrightarrow (P\ ou\ Q)\ et\ (P\ ou\ R)$
8. $P \Rightarrow Q \Leftrightarrow non\ (Q) \Rightarrow non(P)$

Preuve : Utiliser les tableaux de vérité

IV Les lois logiques

1. La loi logique

Définition 1:

Les lois logiques sont des assertions formées de plusieurs assertions P, Q, R ... , liées entre elles par les connecteurs logiques et qui sont toujours vraies quelque soit la valeur de vérité des assertions P, Q, R ...

Exemple 1:

Montrer que la proposition $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ est une loi logique

Réponse :

P	Q	$(Q \Rightarrow P)$	$p \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1

La proposition $p \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$ est toujours vraies quelles que soient les valeurs de vérité des proposition P et Q , par suite $p \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$ est une loi logique .

2. La lois de MORGAN

Propiété 1:

Soit p et q deux proposition . Les deux propositions suivantes sont les lois de morgan

$$\overline{(P \vee Q)} \Leftrightarrow (\overline{P} \wedge \overline{Q}) \quad \text{et} \quad \overline{(P \wedge Q)} \Leftrightarrow (\overline{P} \vee \overline{Q})$$

Preuve :

P	Q	$(Q ou P)$	$\overline{(Q ou P)}$	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$\overline{P} et \overline{Q}$	$\overline{(Q ou P)} \Leftrightarrow \overline{P} et \overline{Q}$
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	0	1	1	1	1	1

Application :

Déterminer la négation des propositions suivantes :

1. $(P \Rightarrow Q)\ et\ (P \Leftrightarrow Q)$
2. $(\exists x \in \mathbb{R})\ ,\ 0 \leqslant x < 1$
3. $(\forall x \in \mathbb{R})\ ,\ x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$

Solution:

Propiété 2:

Soit P , Q et R trois propositions .les deux propositions suivantes sont des lois logiques (La distributivité) :

1. P et (P ou R) ⇔ (P et Q) ou (P et R)
2. P ou (P et R) ⇔ (P ou Q) et (P ou R)

Application :

1. Développons $(x-1)(y-2)$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases} xy - y + 2 - 2x = 0 \\ x^2y - (y^2+1)x + y = 0 \end{cases}$

Solution:

Propiété 3:

1. $(P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P)$
2. $[(P \wedge Q) \wedge R)] \Leftrightarrow [P \wedge (Q \wedge R)]$
3. $(P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee P)$
4. $[(P \vee Q) \vee R)] \Leftrightarrow [P \vee (Q \vee R)]$
5. $[P \vee (Q \wedge R)] \Leftrightarrow [(P \vee Q) \wedge (P \vee R)]$
6. $[P \wedge (Q \vee R)] \Leftrightarrow [(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)]$

Preuve : Utiliser le tableau de vérité

V Les grands types de raisonnement mathématiques :

1. Le Raisonnement direct

Définition 1:

Si on a l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie et on a dans un exercice comme donnée la proposition P donc on déduit que la proposition Q est vraie . Ce mode de raisonnement s'appelle raisonnement par par déduction .

Exercice 1: Pour appliquer

Montrer que si $a, b \in Q$ alors $a+b \in Q$.
Réponse :

Prenons $a, b \in Q$. Alors $a = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ et $b = \frac{p'}{q'}$ avec $p' \in \mathbb{Z}$ et $q' \in \mathbb{N}^*$ $a+b = \frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq'+qp'}{qq'}$
Or r le numérateur $pq'+qp'$ est bien un élément de Z; le dénominateur qq' est lui un élément de $\mathbb{N}^*$
Donc $a+b$ s'écrit bien de la forme $a+b = \frac{p''}{q''}$ avec $p'' \in \mathbb{Z}$ et $q'' \in \mathbb{N}^*$, Ainsi $a+b \in Q$.

2. Le raisonnement par équivalences successives

Propiété 1:

Soient P, Q et R trois assertions. On a : $[(P \Leftrightarrow R) \wedge (R \Leftrightarrow Q)] \Rightarrow (P \Leftrightarrow Q)$

Pour ce type de raisonnement , on passe de P à Q (Ou de Q à P), en utilisant à chaque fois des équivalences . cette méthode et plus courte mais plus fastidieuse puisqu'on doit vérifier que chaque enchainement logique de la démonstration est bien une équivalence et pas seulement une implication.

Exemple 1:

1. Montrer que : $(\forall (a;b) \in R^+ \times R^+) ; a+b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \ \wedge \ b = 0$.
2. En déduire que : $\left(\forall (x;y) \in R^2\right) ; \sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} = 2 \Leftrightarrow x = 0 \ \wedge \ y = 0$

3. Le Raisonnement par contre exemple

Définition 1:

Pour prouver que la propriétés suivante est fausse :$\forall x \in E$, $P(x)$ il suffit de prouver que $\exists x \in E$, $\overline{P(x)}$ est vraie (c.à.d. de trouver un élément x de E qui ne vérifie pas $P(x)$ ce qu'on appelle contre exemple

Exemple 1:

Est ce que la somme de deux nombres irrationnelle est un nombre irrationnelle ?
Or on a $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ sont deux nombres irrationnelle mais leur somme$-\sqrt{2}+\sqrt{2} = 0$ n'est pas un nombre irrationnelle .

4. Le raisonnement par disjonction des cas

Propiété 1:

Soient P, Q et R trois assertions. Le raisonnement par par disjonction des cas ce basé sur la loi logique suivant : $[(P \vee Q) \Rightarrow R] \Leftrightarrow [(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)]$

Remarque 1:

Si l'on souhaite vérifier une propriété $P(x)$ pour tous les x dans un ensemble E, on montre la propriété pour les x dans une partie A de E, puis pour les x n'appartenant pas à A. C'est la méthode de disjonction ou du cas par cas.

Exemple 1:

Montrer que pour tout entier naturel on a $n(n^2+5)$ est un nombre pair.

Application :

1. Montrer que : $(\forall n \in N);\ n\left(n^2+5\right)$ est paire.
2. Montrer que : $(\forall n \in N);\ n(n+1)$ est paire.
3. Résoudre dans R l'équation suivante : $x^2-3|x|+2=0$.
4. Résoudre dans R l'équation suivante : $x^2-3|x-2|-4=0$.
5. Montrer que $(\forall n \in N)$; on a $\sqrt{x^2+1}-x>0$

Solution:

5. Le raisonnement par l'absurde

Propiété 1:

Soient P et Q deux assertions. Le raisonnement par absurde ce basé sur la loi logique suivant :

$$[\,(\overline{P} \Rightarrow Q)\ \wedge\ (\overline{P} \Rightarrow \overline{Q})\,] \Rightarrow P$$

Remarque 1:

On veut montrer qu'une assertion P est vraie. On suppose que c'est sa négation $\overline{P}$ qui est vraie et on montre que cela entraîne une assertion fausse. On en conclut que P est vraie (puisque Q est fausse, l'implication $\overline{P} \Rightarrow Q$ ne peut être vraie que si $\overline{P}$ est fausse ou encore si P est vraie).

Exercice 1: Pour appliquer

Montrer que : $\sqrt{2} \notin Q$.

Application :

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*$ on a $\sqrt{1+x^2} \neq 1 + \dfrac{x^2}{2}$
2. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ on a $\sqrt{n^2+n} \in \mathbb{N}$

Solution:

6. Le raisonnement par contraposée

Propiété 1:

Soient P et Q deux assertions.
L'implication $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ est appelé la contraposer de l'implication $P \Rightarrow Q$ et on note :

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$$

Remarque 1:

Pour montrer que $P \Rightarrow Q$ est une assertion vraie, il (faut et) il suffit de montrer que $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ est une assertion vraie

Exemple 1:

Soients a et b deux réels tels que $a \neq -b$, montrer que : $a \neq -\dfrac{1}{2}b \Rightarrow \dfrac{a-b}{a+b} \neq -3$.

Application :

En utilisant le raisonnement par contraposée , Montrer l'implication suivantes :
$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x \notin [-1, 4] \quad \Rightarrow x^2 - 3x - 4 > 0$

Prof: M.Mohammed

Solution:

7. Le raisonnement par récurrence

Activité :

Soit $P(n)$ la fonction proportionnelle définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $2^n \geq n$

1. Vérifier que la proposition $P(1)$ est vraie
2. Montrer que $(\forall k \in \mathbb{N}^*)$ on a $2k \geq k+1$
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $P(n)$ est vraie , Montrons que $P(n+1)$ est vraie .
4. En déduire que les propositions $P(2)$; $P(5)$ et $P(7)$ sont vraie

Solution:

Propiété 1:

Soient $n_0 \in N$ et $P(n)$ une propriété qui d'un entier naturel n ou $n \geq n_0$.
La propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$ si et seulement si :

1. $P(n_0)$ est vraie.

2 pour $n \geq n_0$ on a $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

Remarque 1:

On peut décomposer la démonstration en trois étapes

1 Étape 1 : Initialisation : Vérifier que $P(n_0)$ est vraie

2 Étape 2 : Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $p(n)$ est vraie et on montre que $P(n+1)$ est vraie

3 Étape 3 : Conclusion : D'après le principe de récurrence la proposition $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$

Exercice 1: Pour appliquer

1 Montrer par récurrence $(\forall n \in N)$: $2^n \geq n+1$

2 Montrer par récurrence $(\forall n \in N^*)$: $1+2+3+......+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

3 Montrer que $7^n - 3^n$ est divisible par 4 , pour tout $n\mathbb{N}$