Etude analytique du produit scalaire dans le plan

Remarques

Pr. LATRACH ABDELKBIR

I. Le produit scalaire dans le plan

Définitions :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
- Le produit scalaire des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times cos(\overline{\vec{u},\vec{v}})$.
- Le nombre réel positif $\vec{u}\cdot\vec{u}$ est appelé **le carré scalaire** du vecteur $\vec{u}$ et on écrit $\vec{u}^2 = \vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.

Application ① :

Soit ABC un triangle rectangle et isocèle en B tel que $AB = 2$ et $AC = \sqrt{8}$ et $(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$.

Définition (Orthogonalité de deux vecteurs)

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$. On écrit $\vec{u}\perp\vec{v}$.

II. Expression analytique du produit scalaire dans un repère orthonormé

1. Repère orthonormé

Définition :

Soit $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ une base du plan, et O un point du plan.
- On dit que $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est une base orthonormée si : $\vec{\imath}\cdot\vec{\jmath} = 0$ et $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1$.
- On dit que $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est un repère orthonormé si $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est une base orthonormée.
- Si $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est une base orthonormée et $(\overline{\vec{\imath},\vec{\jmath}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ alors $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est appelé repère orthonormé direct.

Dans toute la suite du chapitre, on considère que le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

2. Expression analytique du produit scalaire

Propriété :

Soient $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ deux vecteurs du plan, on a $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$.

Application ② :

Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$ dans les cas suivants :
1. $\vec{u}(2;-3)$ et $\vec{v}(-1;2)$.
2. $\vec{u} = (\sqrt{3}-1)\vec{\imath} - 1\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = (\sqrt{3}+1)\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$. Conclure.

Propriété :

Soient $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ deux vecteurs du plan. On a $\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$.

Application ③ :

Déterminer la valeur de m pour que les vecteurs $\vec{u}(3;-1+m)$ et $\vec{v}(2-m;5)$ soient orthogonaux.

3. Norme d'un vecteur - distance entre deux points

Propriété (Norme d'un vecteur)

Soit $\vec{u}(x;y)$ un vecteur du plan. La norme du vecteur $\vec{u}$ est $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2} = \sqrt{x^2+y^2}$.

Propriété (Distance entre deux points)

Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points du plan, on a $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2 + (y_B-y_A)^2}$.

Application ④ :

On considère les points $A(-3;1)$;$B(1;1)$ et $C(-3;5)$.
Calculer les distances AB, AC et BC puis déterminer la nature du triangle ABC.

4. Expression de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$

Activité ①:

$\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ sont deux vecteurs non nuls tels que $(\overline{\vec{u};\vec{v}}) \equiv \theta[2\pi]$.

1. Montrer que $\cos\theta = \frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\times\sqrt{x'^2+y'^2}}$
2. On considère le vecteur $\vec{w}(-y;x)$

a. Montrer que : $(\overline{\vec{v};\vec{w}}) \equiv \frac{\pi}{2} - \theta[2\pi]$.

b. Montrer que $\sin\theta = \frac{xy'-xy'}{\sqrt{x^2+y^2}\times\sqrt{x'^2+y'^2}}$

Propriété :

Soient $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ deux vecteurs non nuls du plan et θ une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$.

On a $\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|} = \frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\times\sqrt{x'^2+y'^2}}$ et $\sin\theta = \frac{\det(\vec{u};\vec{v})}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|} = \frac{xy'-x'y}{\sqrt{x^2+y^2}\times\sqrt{x'^2+y'^2}}$.

Application ⑤ :

On considère les vecteurs $\vec{u}(-\sqrt{3};-3)$ et $\vec{v}(-1;\sqrt{3})$ et θ la mesure principale du l'angle $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$.

Calculer $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ puis déduire la valeur de θ.

Propriété :

Soit ABC un triangle. La surface de ABC est $S = \frac{|\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})|}{2}$.

Application ⑥ :

On considère les points $A(-3;1)$;$B(1;1)$ et $C(-5;-1)$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.
2. Calculer $\det(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})$puis déduire la surface du triangle ABC.
3. Calculer $\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ et $\sin(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$.

III. Droite dans le plan

Activité ②:

Soient $A(1;2)$ et $B(-2;3)$ deux points du plan et (Δ) la droite passant par A et perpendiculaire à (AB).

1. Donner une équation cartésienne de (AB).
2. Soit $M(x,y) \in (\Delta)$.
   a. Vérifier, sans calcul, que $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$.
   b. En déduire une équation cartésienne de (Δ).

1. Vecteur normal à une droite :

Définition :

Soit $(D) = D(A;\vec{u})$ une droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$ .Tout vecteur non nul et orthogonal à $\vec{u}$ est appelé **vecteur normal** à la droite (D).

Propriété :

Soit (D) une droite d'équation cartésienne : $ax+by+c=0$.

- Le vecteur $\vec{n}(a;b)$ est un vecteur normal à (D).
- Le vecteur $\vec{u}(-b;a)$ est un vecteur directeur de (D).

Application ⑦:

Donner un vecteur normal à la droite (D) dans chacun des cas suivants :

❶ $(D): -2x+5y+4=0$ ❷ $(D): 2x-1=0$ ❸ $(D): x-\frac{3}{2}y+1=0$

2. Equation d'une droite définie par un point et un vecteur normal

Propriété :

Une équation de la droite (D)passant par le point $A(x_A;y_A)$et de vecteur normal $\vec{n}(a;b)$ est $a(x-x_A)+b(y-y_A)=0$.

Exemple :

Déterminons une équation cartésienne de la droite (D) passant par le point $A(1;2)$ et de vecteur normal $\vec{n}(5;3)$.

Soit $M(x;y)$un point du plan, on a $M(x;y) \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

$$\Leftrightarrow (x-1) \times 5 + (y-2) \times 3 = 0.$$
$$\Leftrightarrow 5x - 5 + 3y - 6 = 0.$$
$$\Leftrightarrow 5x + 3y - 11 = 0.$$

Donc, une équation cartésienne de (D) est : $5x + 3y - 11 = 0$.

Application ⑧ :

Déterminer dans chacun des cas suivants une équation cartésienne de la droite (D).

❶ (D) est la droite passant par le point $A(2;3)$ et de vecteur normal $\vec{n}(2;-1)$.

❷ (D) est la médiatrice du segment $[AB]$ tel que $A(3;-1)$ et $B(-1;5)$.

3. Positions relatives de deux droites

Propriété :

Soient (D) et (D') deux droites et $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ leurs vecteurs normaux respectives. On a

- $(D) \perp (D') \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{n'} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{n'} = 0$.
- $(D)//(D') \Leftrightarrow \det(\vec{n};\vec{n}') = 0$.

Application ⑨:

Etudier la position relative des droites (D) et (D') définies par (D): $2x + y - 1 = 0$ et (D'): $-x + 2y + 3 = 0$.

4. Distance d'un point à une droite :

Propriété :

Soit (D) une droite d'équation : $ax + by + c = 0$ et $A(x_A;y_A)$ un point du plan.
La distance du point A à la droite (D) est $d(A;(D)) = \frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Exemple :

On considère la droite (D) d'équation $4x + 3y + 1 = 0$ et les points $A(2;1)$ et $B(-1;1)$.

On a $d(A;(D)) = \frac{|2\times4+1\times3+1|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{12}{5}$ et $d(B;(D)) = \frac{|-1\times4+1\times3+1|}{\sqrt{4^2+3^2}} = 0$ donc $B \in (D)$

Application ⑩ :

On considère la droite (D) d'équation $x - 2y + 8 = 0$ et le point $A(-3;5)$, H le projeté orthogonal de A sur (D).

1. Déterminer $d(A;(D))$.
2. Déterminer les coordonnées du point H.

IV. Etude analytique d'un cercle

1. Equation d'un cercle défini par son centre et son rayon

Activité ③:

On considère $(\mathcal{C})$ le cercle de centre $\Omega(1;1)$ et de rayon 2 .

1. Parmi les points A(3; 1) et B(2; 2) déterminer qui appartient au cercle $(\mathcal{C})$.
2. Soit $M(x;y)$ point du plan.

Montrer que $M(x;y) \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$.

Définition :

Le cercle $(\mathcal{C})$ de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon R est l'ensemble des points M du plan tels que $\Omega M = R$.

Propriété :

Une équation cartésienne du cercle de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon R est
$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ que l'on peut écrire $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ où
$c = a^2 + b^2 - R^2$.

Application ⑪ :

Déterminer une équation du cercle $(\mathcal{C})$ dans chacun des cas suivants :

❶ $(\mathcal{C})$ de centre $\Omega(-2;3)$ et de rayon 4 .

❷ $(\mathcal{C})$ de centre $A(2;3)$ et passe par le point $B(1;-3)$.

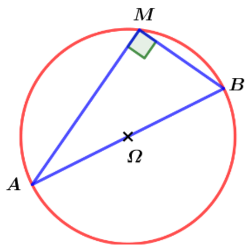
Application ⑫ :

Déterminer l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan vérifient l'équation (E) dans les cas suivants :

Pr. LATRACH ABDELKBIR

❶ (E): $x^2+y^2-4x-2y+1=0$.
❷ (E): $x^2+y^2-2x-4y+5=0$.
❸ (E): $x^2+y^2-6x+4y+14=0$.
❹ (E): $x^2-x+y^2+3y-4=0$.

2. Equation d'un cercle défini par son diamètre



On considère le cercle $(\mathcal{C})$ de diamètre $[AB]$.
On a : $M(x;y)\in(\mathcal{C}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$
$\Leftrightarrow (x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0.$

Propriété :

Soient A et B deux points distincts du plan.
L'ensemble des points Mdu plan qui vérifient $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$ est le cercle de diamètre $[AB]$ et d'équation cartésienne $(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0$.

Application ①③ :

On considère les points $A(-1;2)$ et $B(-5;4)$
Déterminer une équation du cercle $(\mathcal{C})$ de diamètre $[AB]$ par deux méthodes.

3. Représentation paramétrique d'un cercle

On considère le cercle $(\mathcal{C})$ de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon R.
On a : $M(x;y)\in(\mathcal{C}) \Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=R^2$
$\Leftrightarrow \left(\frac{x-a}{R}\right)^2+\left(\frac{y-b}{R}\right)^2=1.$
Donc il existe un réel θ tel que $\frac{x-a}{R}=\cos\theta$ et $\frac{y-b}{R}=\sin\theta$.
Alors : $M(x;y)\in(\mathcal{C}) \Leftrightarrow (\exists\theta\in IR) : \begin{cases} x=a+r\cos\theta \\ y=b+r\sin\theta \end{cases}.$

Propriété :

Le cercle $(\mathcal{C})$ de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon R est l'ensemble des points $M(x;y)$du plan qui vérifient le système (S): $\begin{cases} x=a+R\cos\theta \\ y=b+R\sin\theta \end{cases} /(\theta\in\mathbb{R})$.
Le système (S) est appelé **une représentation paramétrique** du cercle $(\mathcal{C})$.

Application ①④ :

1. Déterminer l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan qui vérifient le système :
$\begin{cases} x=-1+2\cos\theta \\ y=3+2\sin\theta \end{cases} /(\theta\in\mathbb{R})$.
2. Soit $(\mathcal{C}_1)$ le cercle de centre $\Omega(-1;2)$ et de rayon $\sqrt{3}$.
   a. Donner une représentation paramétrique du cercle $(\mathcal{C}_1)$.
   b. Donner les coordonnées de deux points du cercle $(\mathcal{C}_1)$.
3. Donner une représentation paramétrique du cercle $(\mathcal{C}_2)$ d'équation $x^2+y^2+4x-6y+9=0$.

4. Intérieur et extérieur d'un cercle

Propriété :

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle d'équation $x^2+y^2+ax+by+c=0$ et $M(x_0;y_0)$ un point du plan.
• M est un point du cercle $(\mathcal{C})$ si et seulement si $x_0{}^2+y_0{}^2+ax_0+by_0+c=0$.
• M est à l'intérieur du cercle $(\mathcal{C})$ si et seulement si $x_0{}^2+y_0{}^2+ax_0+by_0+c<0$.
• M est à l'extérieur du cercle $(\mathcal{C})$ si et seulement si $x_0{}^2+y_0{}^2+ax_0+by_0+c>0$.

Application ①⑤ :

1. Résoudre graphiquement les inéquations suivantes :
   ❶ $x^2+y^2+2x-6y+9\geq 0$.
   ❷ $x^2+y^2+2y-3<0$.
2. Résoudre graphiquement le système suivant $\begin{cases} x^2+y^2-2x+2y-7<0 \\ x-y+1>0 \end{cases}$

5. Positions relatives d'une droite et d'un cercle

Pour étudier la position relative d'un cercle $(\mathcal{C})$ de centre Ω et de rayon R avec une droite (D) on peut calculer la distance $d(\Omega;(D))$ et la comparer au rayon R.

Propriété :

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre Ω et de rayon R et (D) est une droite du plan.
- Si $d(\Omega;(D)) > R$, alors la droite (D) ne coupe pas le cercle $(\mathcal{C})$.
- Si $d(\Omega;(D)) = R$, alors la droite (D) et le cercle $(\mathcal{C})$ ont un seul point commun.
- Si $d(\Omega;(D)) < R$, alors la droite (D) coupe le cercle $(\mathcal{C})$ en deux points distincts.

Application ①⑥ :

Etudier la position relative du cercle $(\mathcal{C})$ et la droite (D), en déterminant les coordonnées des points d'intersection s'ils existent, dans chacun des cas suivants :

❶ $(\mathcal{C}): x^2+y^2+2x-2y=0$ et $(D): x+y+2=0$.
❷ $(\mathcal{C}): x^2+y^2-2x+4y-11=0$ et $(D): x+y=3$.
❸ $(\mathcal{C}): x^2+y^2+2x-6y=6$ et $(D): 4x-3y=8$.

6. Equation cartésienne d'une droite tangente à un cercle en un point donné de ce cercle

Définition :

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre Ω et de rayon R et A est un point de $(\mathcal{C})$.
On dit qu'une droite (D) est tangente à $(\mathcal{C})$ au point A si et seulement si (D) et (ΩA) sont perpendiculaires au point A.

Propriété :

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre Ω et A est un point de $(\mathcal{C})$ et M est un point d'une droite(D).
(D) est tangente à $(\mathcal{C})$ au point A si et seulement si $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{A\Omega}=0$.

Application ①⑦ :

On considère le cercle (C) d'équation $x^2+y^2-2x-4y=0$.
1. Vérifier que $A(2;4)$ est un point du cercle $(\mathcal{C})$.
2. Déterminer une équation de la tangente au cercle $(\mathcal{C})$ en A.

Exercice de synthèse :

Dans un plan muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, on considère les points $A(2;-1)$ $B(-4;-3)$,$C(1\,;-3)$.

1. a. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

   b. Calculer $cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ et $sin\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ en déduire la mesure principale de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}}\right)$.

   c. Calculer la surface du triangle ABC.
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) passant par B et perpendiculaire (AC).
3. On considère le cercle $(\mathcal{C})$ d'équation $x^2+y^2+2x+4y-5=0$.
   a. Déterminer le rayon et les coordonnées du centre de $(\mathcal{C})$.
   b. Vérifier que $(\mathcal{C})$ est le cercle de diamètre $[AB]$.
   c. Donner une équation cartésienne de la droite (Δ) tangente à $(\mathcal{C})$ au point A.
   d. Donner une représentation paramétrique de $(\mathcal{C})$.
4. Etudier la position relative du cercle $(\mathcal{C})$ et la droite (D), en déterminant les coordonnée des points d'intersection s'ils existent.
5. Résoudre graphiquement le système suivant $\begin{cases} x^2+y^2+2x+4y-5<0 \\ x+2y+10\geq 0 \end{cases}$

Pr. LATRACH ABDELKBIR