## **CHAPITRE 2**

# CALCUL NUMÉRIQUE:

## 2.1 Équations et inéquations de premier degré a une inconnue

## **2.1.1** Équation de la forme : ax + b = 0 où $a; b \in \mathbb{R}$

Activité:

Résoudre dans  $\mathbb R$  les équations suivantes :

1) 
$$3x-5=2x+3$$
; 2)  $\frac{5x+1}{\sqrt{3}+2}=-4+x$ ; 3)  $(2x+3)(5x-1)=0$ 

4) 
$$x^2 - 4x + 4 = 0$$
; 5)  $2x + 3 = -5(x + 1) - 3$ ; 6)  $2x^2 + 2\sqrt{2}x + 1 = 0$ 

## Proprieté et Définition 2.1

- Une équation du premier degré à une seule inconnue est toute équation de la forme ax + b = 0.
- Soit S l'ensemble de solution de l'équation ax + b = 0:

$$\star \text{ Si } a \neq 0 \text{ alors } S = \left\{ -\frac{b}{a} \right\}$$

- $\star$  Si  $a \neq 0$  et b = 0 alors  $S = \mathbb{R}$  tous les nombres réels sont des solutions
- \* Si  $a \neq 0$  et  $b \neq 0$  alors  $S = \emptyset$  l'équation n'admet pas de solutions

#### Exemple 2.1

- 1) La solution de l'équation : 2x + 4 = 0 est  $x = -\frac{4}{2} = -2$  donc  $S = \{-2\}$
- 2) L'équation : x + 1 = x + 2 signifie que : 1 = 2 (impossible) donc cette équation n'admet pas de solution c'est à dire  $S = \emptyset$
- 3) L'équation 2x+4-x-5=x-1 signifie que 2x+4=2x+4 donc tous les nombres réels sont des solutions de cette équation c'est à dire  $S=\mathbb{R}$

10

#### **Exercice 7**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équation :

1) 
$$2x+6=12$$
; 2)  $|2x+6|=12$ ; 3)  $x^2-9+(x+3)(x-1)=0$ 

- 4) On pose :  $P(x) = x^2 3x + 2$ ,
  - a) Montrer que : P(2) = 0
  - b) Résoudre l'équation :  $x^2 3x + 2 = 0$
- 5) On pose :  $Q(x) = x^3 3x^2 x + 3$ ,
  - a) Montrer que : P(1) = 0 et P(3) = 0
  - b) Résoudre l'équation :  $x^3 3x^2 x + 3 = 0$

#### 2

## **Équation de la forme :** $\frac{ax+b}{cx+d} = 0$ où $a;b;c;d \in \mathbb{R}$

#### Proprieté 2.1

Propriete 2.1
Pour résoudre une équation de la forme :  $\frac{ax+b}{cx+d} = 0$  : Il faut déterminer son ensemble de définition,

L'équation :  $\frac{ax+b}{cx+d} = 0$  est définie si et seulement si  $cx+d \neq 0$  si et seulement si  $x \neq -\frac{d}{c}$ 

Donc son ensemble de définition est  $D_E = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$  et sont ensemble de solution est :  $S = \left\{ -\frac{b}{a} \right\}$ 

#### Exemple 2.2

Considérons l'équation : (E) :  $\frac{2x-6}{3x+12} = 0$ 

L'équation (E) est définie : s.s.s.i  $3x + 12 \neq 0$  s.s.s.i  $x \neq -\frac{12}{3}$  donc :  $D_E = \mathbb{R} - \{-4\}$ .

Soit  $x \in D_E$  on a: (E):  $\frac{2x-6}{3x+12} = 0 \Leftrightarrow 2x-6 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{-6}{2}$  donc  $S = \{3\}$ .

#### **Exercice 8**

Résoudre les équations :

1) . 
$$\frac{4x-2}{x-2} = 0$$
; 2).  $\frac{-2x+8}{2x-3} = 0$ ; 3).  $\frac{x+5}{4x-8} = 0$ ; 4).  $\frac{\sqrt{2}x-2}{x+3} = 0$ 

5) . 
$$\frac{4x-6}{-2x+3} = 0$$
; 6).  $\frac{2x-8}{x-4} = 0$ 

### Inéquation de premier degré a une inconnue :

#### Activité:

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations :

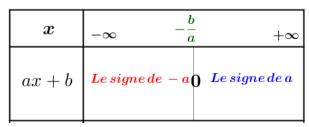
1). 
$$4x - 12 > 0$$
; 2).  $4x - 12 < 0$ ; 3).  $4x - 12 \ge 0$ ; 4).  $4x - 12 \le 0$ ;

#### **Définition 2.1**

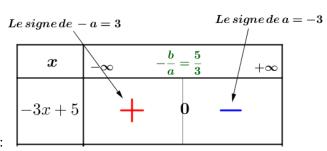
Une inéquation de premier degré a une inconnue est toute équation de la forme :

$$||ax+b| > 0||$$
 ou  $||ax+b| < 0||$  ou  $||ax+b| \ge 0||$  ou  $||ax+b| \le 0||$  avec  $a; b \in \mathbb{R}$ .

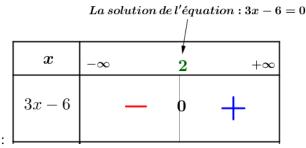
**Tableau de signe de** ax + b **où**  $a; b \in \mathbb{R}$  :



#### **Exemples:**



• Tableau de signe de : -3x + 5 ( a = -3 et b = 5 ) :



• Tableau de signe de : 3x - 6 (a = 3 et b = -6):

D'après le tableau de signe : • les solution de l'équation : 3x - 6 > 0 sont :  $S = ]2; +\infty[$ 

- les solution de l'inéquation :  $3x 6 \ge 0$  sont :  $S = [2; +\infty]$
- les solution de l'inéquation : 3x 6 < 0 sont :  $S = ]-\infty; 2[$
- les solution de l'inéquation :  $3x 6 \le 0$  sont :  $S = ]-\infty; 2]$

#### Exercice 9

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations :

1). 
$$2x+3<0$$
; 2).  $-3x+5>0$ ; 3).  $-4x+2<0$ ; 4).  $6x+1\geq 0$ ; 5).  $-5x+3\leq 0$ 

## 2.2 Équation de second degré à une inconnue

#### 2.2.1 Définitions :

#### **Définition 2.2**

- Toute équation de la forme  $ax^2 + bx + c = 0$ , où a, b, c sont des nombres réels et  $a \neq 0$ , est une équation du second degré à une inconnue dans  $\mathbb{R}$ .
- Le nombre  $\Delta = b^2 4ac$  est appelé discriminant de cette équation ou discriminant du trinôme  $ax^2 + bx + c$

#### Proprieté 2.2

On considère dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $ax^2 + bx + c = 0$  où  $a \neq 0$ , et soit S son ensemble de solutions :

- Si  $\Delta < 0$ : l'équation n'admet pas de solution et on a :  $S = \emptyset$ .
- Si  $\Delta = 0$ : l'équation admet une unique solution  $-\frac{b}{2a}$  et on a :  $S = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$ .
- Si  $\Delta > 0$ : l'équation admet deux solutions distincts à savoir :  $x_1 = \frac{-b \sqrt{\Delta}}{2a}$  et  $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$  et on a :  $S = \left\{ \frac{-b \sqrt{\Delta}}{2a}; \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$

#### Exemple 2.3

- 1) Résolvons l'équation :  $3x^2 + 3x 6 = 0$ , on a : a = 3 ; b = 3 et c = -6 donc :  $\Delta = b^2 4ac = 3^2 4 \times 3 \times -6 = 9 + 72 = 81 > 0$ , alors l'équation admet deux solutions distincts :  $x_1 = \frac{-b \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 \sqrt{81}}{2 \times 3} = \frac{-3 9}{6} = -2$  et  $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + \sqrt{81}}{2 \times 3} = \frac{-3 + 9}{6} = 1$  donc :  $S = \{-2; 1\}$
- 2) Résolvons l'équation :  $x^2 6x + 9 = 0$ , on a : a = 1 ; b = -6 et c = 9 donc :  $\Delta = b^2 4ac = (-6)^2 4 \times 1 \times 9 = 36 36 = 0$ , alors l'équation admet une unique solution qu'est :  $-\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2} = 3$ , donc :  $S = \{3\}$
- 3) Résolvons l'équation :  $x^2 + 2x + 3 = 0$ , on a : a = 1 ; b = 2 et c = 3 donc :  $\Delta = b^2 4ac = 2^2 4 \times 1 \times 3 = 4 12 = -8 < 0$ , alors l'équation n'admet pas de solution :  $S = \emptyset$
- 4) Résolvons l'équation :  $-x^2 = 6x + 8$ , alors :  $-x^2 6x 8 = 0$  on a : a = -1 ; b = -6 et c = -8 donc :  $\Delta = b^2 4ac = (-6)^2 4 \times -1 \times -8 = 36 32 = 4 > 0$ , alors l'équation admet deux solutions distincts :  $x_1 = \frac{-b \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) \sqrt{4}}{2 \times -1} = \frac{6 2}{-2} = -2$  et  $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) + \sqrt{4}}{2 \times -1} = \frac{6 + 2}{-2} = -4$  donc :  $S = \{-2; -4\}$

#### Méthode:

- Étape 0 (éventuelle) : Mets l'équation sous la forme  $ax^2 + bx + c = 0$ .
- Étape 1 : Identifie les coefficiens a,b et c de l'expression du second degré.
- Étape 2 : Calcule le discriminant  $\Delta$  en remplaçant a, b et c par leurs valeurs dans la formule  $\Delta = b^2 4ac$ .
- Étape 3 : Effectue les opérations en respectant les priorités de calcul.
- Étape 4 : Donne le signe du discriminant obtenu.
- Si  $\Delta>0$  (positif), il y a deux solutions :
  - $\underline{\text{Étape 5}}$  : Remplace a, b et  $\Delta$  par leurs valeurs dans les deux formules  $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$  et  $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ .
  - Étape 6 : Calcule. Les deux résultats obtenus sont les solutions de l'équation.
- Si  $\Delta=0$ , il y a une solution :
  - Étape 5 : Remplace a et b par leurs valeurs dans la formule  $\frac{-b}{2a}$
  - Étape 6 : Calcule. Le résultat obtenu est la solution de l'équation.
- Si  $\Delta < 0$  (négatif), il n'y a pas de solution :
  - Étape 5 : Conclue qu'il n'y a pas de solution.

#### Exercice 10

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équation suivantes :

1) 
$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

2) 
$$4y^2 + 4y + 4 = 0$$

3) 
$$t^2 + t - 2 = 0$$

4) 
$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

5) 
$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

6) 
$$x^2 + x + 2 = 0$$

7) 
$$x^2 - 3x = 3x^2 - x - 4$$

8) 
$$x^2 = 5$$

9) 
$$x^2 = -1$$

10) 
$$2x^2 - 6x + 4 = 0$$

11) 
$$x^2 - x = x^2 + x - 1$$

### 2.2.2 Factorisation d'un trinôme du second degré

#### Proprieté 2.3

On considère le trinôme  $ax^2 + bx + c$ , Soit  $\Delta$  son discriminant :

- Si  $\Delta > 0$ : alors l'équation  $ax^2 + bx + c = 0$  admet deux solutions distincts  $x_1$  et  $x_2$  et on a :  $ax^2 + bx + c = a(x x_1)(x x_2)$ .
- Si  $\Delta = 0$ : alors l'équation  $ax^2 + bx + c = 0$  admet une unique solution:  $-\frac{b}{2a}$  et on a:  $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ .
- Si  $\Delta < 0$ : alors l'équation  $ax^2 + bx + c = 0$  n'admet pas de solutions et le trinôme ne peut pas être factorisé en produit de polynômes de premier degré.

#### Exemple 2.4

- 1) l'équation :  $3x^2 + 3x 6 = 0$ , admet deux solutions : -2 et 1 alors :  $3x^2 + 3x 6 = 3(x (-2))(x 1) = 3(x + 2)(x 1)$
- 2) l'équation :  $x^2 6x + 9 = 0$ , admet une unique solution :  $-\frac{b}{2a} = 3$  alors :  $x^2 6x + 9 = (x 3)^2$
- 3) l'équation :  $x^2 + 2x + 3 = 0$ , n'admet pas de solution alors :  $x^2 + 2x + 3$  ne se factorise pas.

#### Exemple 2.5

- 1) l'équation :  $-2x^2 3x + 2 = 0$ , admet deux solutions : -2 et  $\frac{1}{2}$  alors :  $-2x^2 3x + 2 = -2(x (-2))\left(x \frac{1}{2}\right) = -2(x + 2)\left(x \frac{1}{2}\right)$
- 2) l'équation :  $2x^2 + 4x + 2 = 0$ , admet une unique solution :  $-\frac{b}{2a} = -1$  alors :  $2x^2 + 4x + 2 = 2(x+1)^2$
- 3) l'équation :  $x^2 + x + 1 = 0$ , n'admet pas de solution alors :  $x^2 + x + 1$  ne se factorise pas.

#### **Exercice 11**

Factoriser les polynômes suivants :

1) 
$$P(x) = x^2 - 7x + 12$$

2) 
$$O(x) = -3x^2 - 9x + 30$$

3) 
$$R(x) = 4x^2 + 4x + 1$$

4) 
$$L(x) = 4x^2 + 5x + 1$$

5) 
$$H(x) = 25x^2 - 10\sqrt{2}x + 2$$

6) 
$$K(x) = -3x^2 + 2x - 7$$

#### 2.2.3 Signe d'un trinôme du second degré

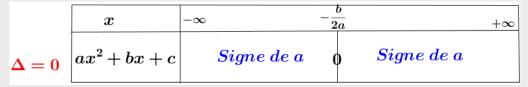
#### Proprieté 2.4

On considère le trinôme :  $P(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $(a \ne 0)$  et soit  $\Delta$  son discriminant.

• Si  $\Delta < 0$ , alors le signe de P(x) est le signe de a pour tout x de  $\mathbb{R}$ .



• Si  $\Delta = 0$ , alors le signe de P(x) est le signe de a, pour tout  $x \neq -\frac{b}{2a}$ 



• Si  $\Delta > 0$ , alors le signe de P(x) est :

 $\triangleright$  le signe de *a* à l'extérieur des racines ;

 $\triangleright$  le signe contraire de a à l'intérieur des racines ;

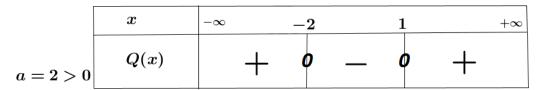


#### Exemple 2.6

1) Étudions le signe de trinôme :  $P(x) = -2x^2 + x - 1$ , Le discriminons du trinôme P(x) est :  $\Delta = 1^2 - 4 \times -2 \times -1 = -7 < 0$ alors le signe de P(x) est celui du nombre a = -2 < 0, alors P(x) < 0 pour tout x de  $\mathbb{R}$ .

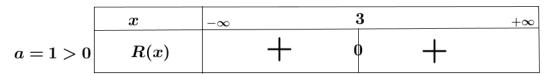
$\boldsymbol{x}$	$-\infty$ $+\infty$
P(x)	

2) Étudions le signe de trinôme :  $Q(x) = 2x^2 + 2x - 4$ , Le discriminons du trinôme Q(x) est :  $\Delta = 2^2 - 4 \times 2 \times -4 = 36 > 0$ , l'équation admet deux solution 1 et -2; alors le tableau de signe de P(x) est :



 $\operatorname{donc}: Q(x) \geq 0 \text{ pour tout } x \in ]-\infty; -2] \cup [1; +\infty[ \quad \text{et} \quad Q(x) \leq 0 \text{ pour tout } x \in [-2; 1]$ 

3) Étudions le signe de trinôme :  $R(x) = x^2 - 6x + 9$ , Le discriminons du trinôme R(x) est :  $\Delta = 36 - 36 = 0$ , l'équation admet une seule solution 3 ; alors le signe de R(x) est :  $R(x) \ge 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ 



#### **Exercice 12**

Déterminer le tableau de signe des polynômes suivants :

- $E(x) = -x^2 + 7x 12$ ;
- $\bullet F(x) = -x^2 + 4x 4$

•  $G(x) = x^2 + x + 2$ ;

- $\bullet H(x) = x^2 8x + 15$
- $K(x) = x^2 + 8x + 16$ ;
- $L(x) = -x^2 + 2x + 8$

## 2.3 Inéquation du second degré

#### **Définition 2.3**

On considère le trinôme  $P(x) = ax^2 + bx + c$ ;  $(a \neq 0)$ . Toute Inéquation de la forme :  $P(x) \geq 0$ ; P(x) > 0;  $P(x) \leq 0$  ou  $P(x) \leq 0$  est appelée **inéquation du second degré** .

#### Exemple 2.7

1) Résolvons dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation (1) :  $x^2 - 7x + 12 \ge 0$ .

Étudions d'abord le signe du trinôme :  $x^2 - 7x + 12$ .

Pour cela il faut résoudre l'équation :  $x^2 - 7x + 12 = 0$ , l'équation admet deux solutions :  $x_1 = 3$  et  $x_2 = 4$ 

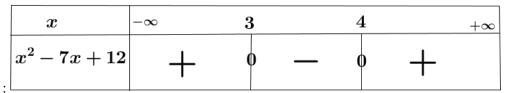


Tableau de signe de  $x^2 - 7x + 12$ :

L'ensemble de solution de l'inéquation :  $x^2 - 7x + 12 \ge 0$  est :  $S = ]-\infty; 3] \cup [4; +\infty[$ .

2) Résolvons dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation (2) :  $-x^2 + x - 1 \ge 0$ .

Étudions d'abord le signe du trinôme :  $-x^2 + x - 1$ .

Pour cela il faut résoudre l'équation :  $-x^2 + x - 1 = 0$ ,  $\Delta < 0$  l'équation n'admet pas de solution :



Tableau de signe de  $-x^2+x-1$ :

- $\triangleright$  L'ensemble de solution de l'inéquation :  $-x^2 + x 1 \ge 0$  est :  $S = \emptyset$ .
- $\triangleright$  L'ensemble de solution de l'inéquation :  $-x^2 + x 1 \le 0$  est :  $S = \mathbb{R}$ .
- 3) Résolvons dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation (2) :  $-x^2 + 4x 4 \ge 0$ .

Étudions d'abord le signe du trinôme :  $-x^2 + 4x - 4$ .

Pour cela il faut résoudre l'équation :  $-x^2 + 4x - 4 = 0$ ,  $\Delta = 0$  l'équation admet une seule solution : x = 2



Tableau de signe de  $-x^2+4x-4$ :

- $\triangleright$  L'ensemble de solution de l'inéquation :  $-x^2 + 4x 4 \ge 0$  est :  $S = \{2\}$ .
- $\triangleright$  L'ensemble de solution de l'inéquation :  $-x^2 + 4x 4 \le 0$  est :  $S = \mathbb{R}$ .
- $\triangleright$  L'ensemble de solution de l'inéquation :  $-x^2 + 4x 4 > 0$  est :  $S = \emptyset$ .
- $\triangleright$  L'ensemble de solution de l'inéquation :  $-x^2 + 4x 4 < 0$  est :  $S = \mathbb{R} \{2\}$ .

#### **Exercice 13**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes :

1) 
$$2x^2 - 3x + 3 \ge 0$$
; 2)  $-2x^2 - x - 3 > 0$ ; 3)  $x^2 + 2x - 15 \le 0$ ; 4)  $-x^2 - 4x + 5 < 0$ 

5) 
$$9x^2 + 6x + 1 \ge 0$$
; 6)  $x^2 - x + 1 > 0$ ; 7)  $x^2 - x + 1 \ge 0$ ; 8)  $-x^2 + 6x - 9 < 0$ 

9) 
$$x^2 - 2x + 1 \le 0$$
; 10)  $3x^2 - 2x - 8 > 0$ ; 11)  $x^2 - 2x + 15 \le 0$ ; 12)  $-5x^2 + 10\sqrt{5}x + 25 < 0$ 

## Système de deux équations du premier degré

**Definition 2.4**Le système (S):  $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$  est appelé système de deux équation du premier degré à deux

#### Exemple 2.8

- Méthode de substitution :
  - 1) Résolvons dans  $\mathbb{R}^2$  le système :  $(S_1)$  :  $\begin{cases} 2x y = 7 & (1) \\ 3x + 4y = 12 & (2) \end{cases}$ 
    - On déterminer l'un des inconnue en fonction de

A partir de l'équation (1), on trouve : y = 2x - 7 (3)

Dans l'équation (2), on remplace y par l'expression 2x - 7, on obtient alors l'équation du premier degré à une inconnue : 3x + 4(2x - 7) = 12 qui signifie que  $x = \frac{40}{11}$ 

- Dans l'équation (3), on remplace x par la valeur  $\frac{40}{11}$ , on obtient :  $y = 2 \times \frac{40}{11} - 7 = \frac{3}{11}$ , Donc l'ensemble des solution de  $(S_1)$  est :  $S_1 = \left\{ \left( \frac{40}{11}; \frac{3}{11} \right) \right\}$ 

- 2) Résolvons dans  $\mathbb{R}^2$  le système :  $(S_2)$  :  $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 2x + 4y = 10 \end{cases}$  (1)
  - On déterminer l'un des inconnue en fonction de l'a

A partir de l'équation (2), on trouve : 2x = -4y + 10 qui signifie que x = -2y + 5 (3) Dans l'équation (1), on remplace x par l'expression -2y+5, on obtient alors l'équation du premier degré à une inconnue : 3(-2y+5)+2y=7 qui signifie que y=2

- Dans l'équation (3), on remplace y par la valeur 2, on obtient :  $x = -2 \times 2 + 5 = 1$ , Le couple (1;2) vérifie le système ( $S_2$ ). Donc l'ensemble des solution de ( $S_2$ ) est :  $S_2 = \{(1;2)\}$ 

- Méthode de résolution par la combinaisons linéaire
  - 1) Résolvons dans  $\mathbb{R}^2$  le système  $(S_3)$ :  $\begin{cases} 2x + 4y = 22 \\ 3x 2y = 9 \end{cases}$  En multipliant les deux membres de la première équation par 3 et les deux membre de la deuxième

équation par -2, on obtient :  $\begin{cases} 6x + 12y = 66 \\ -6x + 4y = -18 \end{cases}$  - En additionnant les deux dernières équations obtenues membre à membre (pour éliminer x), on

trouve: 6x + 12y - 6x + 4y = 66 - 18 c'est à dire 16y = 48 c'est à dire y = 3

- Pour obtenir la valeur de x, on peut appliquer la même méthode en multipliant les deux membres de la première équation par 2 et les deux membre de la deuxième équation par 4, on obtient : 4x + 8y = 4412x - 8y = 36

- En additionnant les deux dernières équations obtenues membre à membre (pour éliminer y), on trouve: 4x + 8y + 12x - 8y = 44 + 36 c'est à dire 16x = 90 c'est à dire : x = 5Le couple (5;3) vérifie le système  $(S_3)$ . Donc l'ensemble des solution de  $(S_3)$  est :  $S_3 = \{(5;3)\}$ 

- 2) Résolvons dans  $\mathbb{R}^2$  le système  $(S_4)$ :  $\begin{cases} -3x + 2y = 23 \\ 2x + 5y = 29 \end{cases}$  En multipliant les deux membres de la première équation par 2 et les deux membre de la deuxième équation par 3, on obtient :  $\begin{cases} -6x + 4y = 46 \\ 6x + 15y = 87 \end{cases}$ 
  - En additionnant les deux dernières équations obtenues membre à membre (pour éliminer x), on trouve: 6x + 4y - 6x + 15y = 46 + 87 c'est à dire 19y = 133 c'est à dire : y = 7
  - Pour obtenir la valeur de x, on peut appliquer la même méthode en multipliant les deux membres de la première équation par -5 et les deux membre de la deuxième équation par 2, on obtient :  $\int 15x - 10y = -115$ 4x + 10y = 58
  - En additionnant les deux dernières équations obtenues membre à membre (pour éliminer y), on

15x - 10y + 4x + 10y = -115 + 58 c'est à dire 19x = -57 c'est à dire : x = -3Le couple (-3,7) vérifie le système  $(S_4)$ . Donc l'ensemble des solution de  $(S_4)$  est :  $S_4 = \{(-3,7)\}$ 

#### • Méthode de déterminant

#### Proprieté 2.5

On considère Le système (S): 
$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

1) Le système (S) admet une seule solution si et seulement si : 
$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$$
;

1) Le système (S) admet une seule solution si et seulement si :  $D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$ ;

Dans ce cas la solution est le couple (x; y) définie par :  $x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{D}$  et  $y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{D}$ 

2) Si 
$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$$
 alors:

 $\triangleright$  ou bien le système (S) n'admet pas de solution.

▷ ou bien le système (S) admet une infinité de solutions.

#### Exemple 2.9

1) Résolvons dans 
$$\mathbb{R}^2$$
 le système  $(S_5)$ : 
$$\begin{cases} 3x - 4y = -11 \\ 5x + 6y = 7 \end{cases}$$

1) Résolvons dans  $\mathbb{R}^2$  le système  $(S_5)$ :  $\begin{cases} 3x - 4y = -11 \\ 5x + 6y = 7 \end{cases}$ ; Le déterminant de ce système est :  $D = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 18 + 20 = 38 \neq 0$ 

Comme  $D \neq 0$  alors le système  $(S_5)$  admet une unique solution (x;y) telle que :

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} -11 & -4 \\ 7 & 6 \end{vmatrix}}{38} = \frac{-66 + 28}{38} = \frac{-38}{38} = -1$$

$$\text{et } y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -11 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}}{38} = \frac{21 + 55}{38} = \frac{76}{38} = 2$$

$$\text{Prove Possible description description of the problem of the$$

#### Exercice 14

Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  les systèmes suivants : (En utilisant les trois méthodes);

$$(S_1): \left\{ \begin{array}{l} 3x - 2y = -14 \\ 5x + 9y = 26 \end{array} \right.; \quad (S_2): \left\{ \begin{array}{l} 3x + y = 7 \\ 6x + 3y = 19 \end{array} \right.; \quad (S_3): \left\{ \begin{array}{l} 2x + y = 10 \\ 4x - 2y = -16 \end{array} \right.; \\ (S_4): \left\{ \begin{array}{l} 5x + 3y = 42 \\ -6x + 9y = 0 \end{array} \right.; \quad (S_5): \left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y = 7 \\ 6x + 4y = 19 \end{array} \right.; \quad (S_6): \left\{ \begin{array}{l} 15x + 3y = 12 \\ -30x - 6y = -24 \end{array} \right.; \right.$$

$$(S_4): \begin{cases} 5x+3y=42 \\ -6x+9y=0 \end{cases}$$
;  $(S_5): \begin{cases} 3x+2y=7 \\ 6x+4y=19 \end{cases}$ ;  $(S_6): \begin{cases} 15x+3y=12 \\ -30x-6y=-24 \end{cases}$ 

## 2.5 Proportionnalité - Pourcentage - Échelles

### 2.5.1 Proportionnalité

#### Définition

On considère quatre nombres rationnels non nul a, b, c et d. Les nombres a, b, c et d dans cet ordre forment une **proportionnalité** si et seulement si  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ .

#### Remarque

- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  Signifie que  $a \times d = b \times c$ .
- Le nombre d s'appelle la quatrième proportionnelle.

### Exemples

- Les nombres 3, 5, 9 et 15 forment dans cet ordre une proportionnalité car :  $\frac{3}{5} = \frac{9}{15}$ .
- Les nombres 2, 3, 4 et 5 ne forment pas dans cet ordre une proportionnalité car :  $\frac{2}{3} \neq \frac{4}{5}$ .

### Exemple 2:

Le tableau suivant donne les prix de pomme en dh.

Poids de pomme en kg	1	2	5	0.5	3	9
Le prix en dh	6	12	•	•	•	•

- Le tableau correspondant à une situation de proportionnalité :  $\frac{6}{1} = \frac{12}{2} = \frac{30}{5} = \dots = 6$ .
- Le coefficient de proportionnalité est 6.

## Coefficient de proportionnalité

#### Exemple

On considère le tableau suivant :

1	3	7	9
4	12	28	36

• Le tableau correspondant à une situation de proportionnalité car :

$$\frac{4}{1} = \frac{12}{3} = \frac{28}{7} = \frac{36}{9} = \boxed{4}$$

• Le coefficient de proportionnalité est : 4

### 2.5.2 Pourcentage

#### Exemple 1

Dans une classe il y a 40 élèves dont 15% sont des garçons.

Calculer le nombre des garçons dans cette classe.

Réponse : On considère le tableau de proportionnalité suivant : -

 40
 100

 x
 15

On a : 
$$x = \frac{40 \times 15}{100} = \frac{600}{100} = 6$$

Donc dans cette classe il y a 6 garçons

#### Exemple 2

Dans une classe il y a 30 élèves dont 12 sont des filles. Calculer le pourcentage des filles dans cette classe.

Réponse : On considère le tableau de proportionnalité suivant :

 $: \begin{array}{c|c} 30 & 100 \\ \hline 12 & x \end{array}$ 

On a : 
$$x = \frac{12 \times 100}{30} = \frac{1200}{30} = 40$$

Donc dans cette classe il y a 40% des filles

### **Autres exemples:**

:

#### 2.5.3 Échelle

#### Définition

L'échelle d'un plan est le coefficient de proportionnalité entre les distances sur le plan et les distances réelles. On note :  $e = \frac{\text{Distance sur le plan}}{\text{Distance réele}}$ 

#### Exemple

Sur une carte à l'échelle  $\frac{1}{50000}$ , deux villes A et B sont séparées par 4,5cm.

Quelle est la distance réelle entre A et B?

**Réponse :** A l'échelle  $\frac{1}{50000}$ , 1cm représente 50000cm, c'est à dire 500m dans la réalité.

Alors on a le tableau de proportionnalité suivant :  $\begin{vmatrix} 1 & 4,5 \\ 50000 & x \end{vmatrix}$ 

On a: 
$$x = \frac{4,5 \times 50000}{1} = 225000cm = 2250m = 2,25km$$

Donc la distance entre A et B est 2,25km