Généralités sur les fonctions numériques

Remarques

Pr. LATRACH ABDELKBIR

I. Fonction majorée - Fonction minorée - Fonction bornée :

Activité ①:

On considère f la fonction définie par $f(x) = \frac{2x^2+3}{x^2+1}$.

1. Déterminer D_f, l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que $(\forall x \in D_f): f(x) \leq 3$.

On dit que f est majorée par 3 sur D_f.

3. Montrer que $(\forall x \in D_f): f(x) \geq 2$.

On dit que f est minorée par 2 sur D_f.

4. En déduire que $(\forall x \in D_f): 2 \leq f(x) \leq 3$.

On dit que f est bornée par 2 sur D_f.

Définitions :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que :

- f est **majorée** sur I s'il existe un réel M tel que $(\forall x \in I): f(x) \leq M$.
- f est **minorée** sur I s'il existe un réel m tel que $(\forall x \in I): m \leq f(x)$.
- f est **bornée** sur I s'il existe des réels M et m tels que $(\forall x \in I): m \leq f(x) \leq M$.

Exemple :

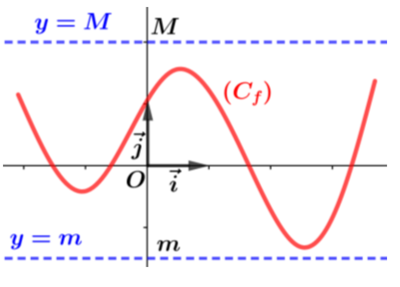
On considère La fonction $f: x \longmapsto 1 - \frac{1}{x}$.

- f est majorée sur $]0; +\infty[$ par 1. En effet $(\forall x \in]0; +\infty[): f(x) - 1 = -\frac{1}{x}$ et $-\frac{1}{x} < 0$ pour tout $\in]0; +\infty[$.
- f est minorée sur $]-\infty; 0[$ par 1. En effet $(\forall x \in]-\infty; 0[): f(x) - 1 = -\frac{1}{x}$ et $-\frac{1}{x} > 0$ pour tout $\in]-\infty; 0[$.

Remarques :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de IR et (C_f) sa courbe.

- ✓ Si f est majorée par un réel M sur I, alors (C_f) est au-dessous la droite d'équation $y = M$ sur I.
- ✓ Si f est minorée par un réel m sur I, alors (C_f) est au-dessus la droite d'équation $y = m$ sur I.



Application ① :

On considère f et g les fonctions définies respectivement par $f(x) = 3 - \sqrt{1-2x}$ et $g(x) = \sqrt{x^2+4}$.

1. Déterminer D_f et D_g.
2. Montrer que f est majorée par 3 sur D_f.
3. Montrer que g est minorée par 2 sur D_g.

Définitions :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un élément de I. On dit que :

- $f(a)$ est **la valeur minimale** (ou **le minimum**) de f sur I si $(\forall x \in I): f(x) \geq f(a)$.
- $f(a)$ est **la valeur maximale** (ou **le maximum**) de f sur I si $(\forall x \in I): f(x) \leq f(a)$.
- $f(a)$ est un **extremum** de f sur I s'il est le maximum ou le minimum de f sur I.

Exemple :

-3 est La valeur minimale de la fonction $f: x \longmapsto x^2 - 4x + 1$ sur $\mathbb{R}$. En effet :
$(\forall x \in \mathbb{R}): f(x) - (-3) = (x-2)^2 \geq 0$ et $f(2) = -3$.

✍ *Exercice ② de la a série:*

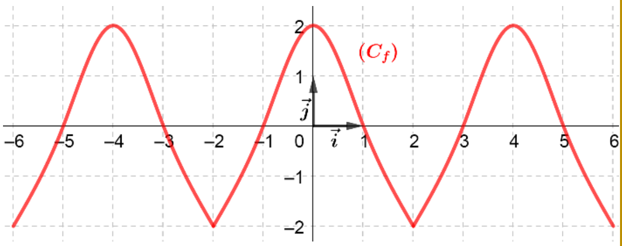
Soit f une fonction numérique définie par $f(x) = x + \frac{4}{x}$.

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.
2. a. Calculer $f(2)$.
   b. Montrer que f est minorée par 4 sur $]0; +\infty[$. Conclure.
3. Montrer que -4 est la valeur maximale de f sur $]-\infty; 0[$.

II. *Fonctions périodiques :*

✍ *Activité ②:*

La figure ci-contre représente la courbe représentative d'une fonction définie sur IR.



1. Vérifier que $f(-2) = f(2)$, $f(0) = f(4)$ et $f(1) = f(5)$.
2. Soit $x \in IR$, déterminer la relation entre $f(x+4)$ et $f(x)$.

Définition :

Soit f une fonction définie sur D et T un nombre réel strictement positif.
On dit que f est périodique (ou T-périodique) sur D si :
- $x + T \in D$ pour tout x de D .
- $f(x+T) = f(x)$ pour tout x de D.

Exemples :

- Les fonctions $x \longmapsto \sin(x)$ et $x \longmapsto \cos(x)$ sont périodiques de période 2π.
- La fonction $x \longmapsto \tan(x)$ est périodique de période π.

✍ *Application ② :*

On considère les fonctions f et g définies respectivement sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos^2(x)$ et $g(x) = sin(2\pi x)$.
Montrer que les fonctions f et g sont périodiques de périodes respectives π et 1.

III. *Comparaison de deux fonctions :*

Définition :

Soient f *et* g deux fonctions définies sur le même ensemble D. On dit que :
- f *et* g sont **égales** sur D si et seulement si, $(\forall x \in D) : f(x) = g(x)$.
- f est **supérieure ou égale** à g sur D si et seulement si, $(\forall x \in D): f(x) \geq g(x)$ et on écrit $f \geq g$.

Exemple :

Soient f *et* g deux fonctions définies sur IR^* par $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x^2+2}$ et $g(x) = x + 1$.

On a $(\forall x \in IR^*): f(x) - g(x) = \frac{1}{x^2+2} > 0$.

Donc $f > g$ sur IR^*.

_ Interprétation graphique :

Soient f *et* g deux fonctions et D un ensemble inclus dans $D_f \cap D_g$.
- ✓ Si $f > g$ sur D, alors (C_f) est strictement au-dessus de (C_g) sur D.
- ✓ Si $f \leq g$ sur D, alors (C_f) est au-dessous de (C_g) sur D.

✍ *Application ③ :*

On considère f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x + 1$ et $g(x) = -2x^2 + 4x + 1$.

1. Etudier le signe de $f(x) - g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire une comparaison entre f et g sur $\mathbb{R}$.

✍ *Exercice ③ de la série:*

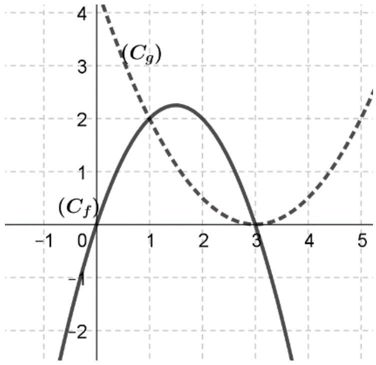
Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par ses courbes ci-contre.

1) Résoudre graphiquement les équations suivantes:

- $f(x) = 2$.
- $f(x) = 0$.
- $f(x) = g(x)$.

2) Résoudre graphiquement les inéquations suivantes :

- $f(x) < 2$
- $g(x) \geq 0$.
- $f(x) > g(x)$.



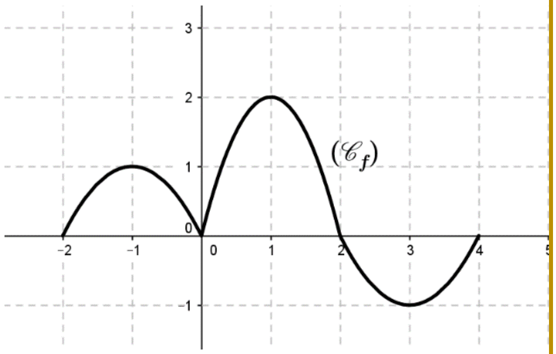
IV. *Image d'un intervalle par une fonction numérique :*

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
L'ensemble des valeurs de $f(x)$ tels que $x \in I$ est appelé **image de l'intervalle *I*** par la fonction f et on le note par $f(I)$.
Autrement dit : $f(I) = \{f(x) \;/\; x \in I\}$.

Exemple :

La figure ci-contre représente la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-2; 4]$.
Lorsque x varie sur l'intervalle $[-2; -1]$, $f(x)$ varie sur l'intervalle $[0; 1]$. Donc :
$f([-1; 1]) = [1; 3]$.
De même, on a :



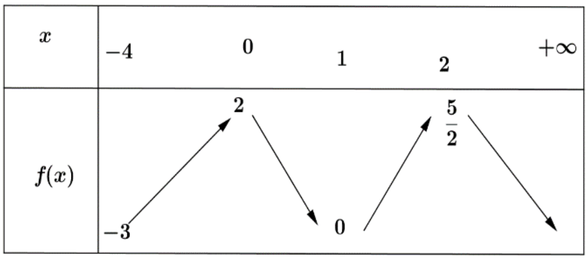
- o $f([0; 1]) = [0; 2]$
- o $f([1; 3]) = [-1; 2]$
- o $f([1; 4]) = [-1; 2]$
- o $f([0; 3[) =]-1; 2]$
- o $f(]-1; 1[) = [0; 2[$
- o $f(]-2; 4[) = [-1; 2]$

_ Technique :

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a\,; b]$.
- ✓ Si f est croissante sur $[a\,; b]$, alors : $f([a\,; b]) = [f(a)\,; f(b)]$.
- ✓ Si f est décroissante sur $[a\,; b]$, alors : $f([a\,; b]) = [f(b)\,; f(a)]$.
- ✓ Si f change de monotonie sur $[a\,; b]$, alors : $f([a\,; b]) = [m\,; M]$ avec m la valeur minimale et M la valeur maximale de f sur $[a\,; b]$.

Exercice ④ de la série :

Soit f une fonction dont le tableau de variations est le suivant :
Déterminer ce qui suit :
- $f([-4; 0])$ • $f([0; 1])$ • $f([0; 2])$
- $f([-4; 1])$ • $f(1; +\infty[)$



V. *Monotonie une fonction numérique :*

Activité ③:

On considère f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

1. Déterminer D_f, l'ensemble de définition de f.
2. Etudier la parité de f puis interpréter graphiquement le résultat.
3. Etudier la monotonie de f sur $[0; +\infty[$ puis sa monotonie sur $]-\infty; 0]$.
4. Etudier la monotonie des fonctions $3f$, $-2f$ et $f + 3$ sur $[0; +\infty[$.

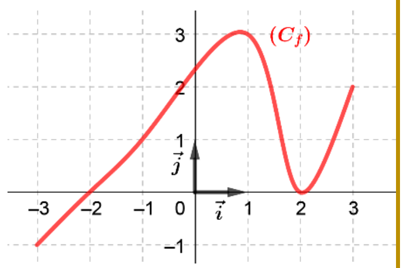
Propriété :

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I et λ un nombre réel.

- Les deux fonctions f *et* $f+k$ ont le même sens de variations sur I.
- Si $\lambda > 0$, alors f *et* λf ont le même sens de variations sur I .
- Si $\lambda < 0$, alors f *et* λf ont des sens de variations contraires sur I.

Application ④ :

Soit f une fonction définie sur $[-3;3]$ par sa courbe ci-contre .
Donner le tableau de variations des fonctions f, $f+2$ et $-3f$.



VI. *Composée de deux fonctions numériques :*

Activité ④:

On considère f et g deux fonctions définies par $f(x)=-x+5$ et $g(x)=\sqrt{x}$.

1. a.Calculer $f(1)$ puis $g(f(1))$.
b.Calculer $f(-4)$ puis $g(f(-4))$.
c.Calculer $f(8)$. Peut-on calculer puis $g(f(8))$.

2. a.Déterminer l'intervalle I tel que$g(f(x))$ est calculable pour tout x de I.
b.Déterminer l'expression de $g(f(x))$ pour tout x de I.

Définition :

g est une fonction définie sur un intervalle J et f est une fonction définie sur un intervalle I telle que, pour tout $x \in I$, on a $f(x) \in J$.
La fonction **composée** de f et g dans cet ordre, noté gof, est la fonction définie pour tout $x \in I$ par : $(gof)(x) = g\,(f(x))$.

Remarques :

- $x \in D_{gof} \Leftrightarrow x \in D_f \; et \; f(x) \in D_g$.
- En général, $gof \neq fog$.

Exemple :

Soient $f: x \mapsto x^2$, définie sur $D_f = \mathbb{R}$, et $g: x \mapsto \frac{2x}{x-4}$, définie sur $D_g = \mathbb{R}\backslash\{4\}$.

- Domaine de définition de la fonction composée gof :

On a $x \in D_{gof} \Leftrightarrow x \in D_f \; et \; f(x) \in D_g$
$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \; et \; x^2 \neq 4$
$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \; et \; x \neq -2$ et $x \neq 2$.

Donc $D_{gof} =]-\infty;-2[\, \cup\,]2;+\infty[$.

- Expression de la fonction composée gof :

On a :$\forall x \in]-\infty;-2[\, \cup\,]2;+\infty[$: $(gof)(x) = g\big(f(x)\big) = g(x^2) = \frac{2x^2}{x^2-4}$.

Application ⑤ :

1. Soient f et g deux fonctions numériques définies par $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = \frac{2x+3}{3x-6}$.
   a. Déterminer D_f, D_g et D_{gof}.
   b. Donner l'expression de la fonction gof.

2. Ecrire la fonction h définie sur $\mathbb{R}^+$ par $h(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+5}$.

Propriété :

Soient f et g deux fonctions numériques définies respectivement sur les intervalles I *et* J tels que $f(I) \subset J$.

- Si f *et* g ont même sens de variations, respectivement sur I *et* J, alors la fonction composée gof est croissante sur I .
- Si f *et* g ont des sens de variations contraires, respectivement sur I *et* J, alors la fonction composée gof est décroissante sur I .

Exemple :

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

h est la fonction de composée de $f: x \mapsto x^2$ et $g: x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$ $(h = gof)$.

○ On a f est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et $f(]-\infty; 0]) = [0; +\infty[$.

Et puisque g est décroissante sur $[0; +\infty[$, alors h est croissante sur $]-\infty; 0]$.

○ On a f est croissante sur $[0; +\infty[$ et $f([0; +\infty[) = [0; +\infty[$.

Et puisque g est décroissante sur $[0; +\infty[$, alors h est décroissante sur $[0; +\infty[$.

✍ *Application ⑥ :*

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x + 1$ et $g(x) = -2x + 1$.

1. Dresser les tableaux de variations de f et g.
2. Déterminer $f(]-\infty; 1])$ et $f([1; +\infty[)$.
3. Etudier les variations de la fonction gof sur $]-\infty; 1]$ et $[1; +\infty[$.

✍ *Exercice ⑤ de la série :*

On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = x^2 - 2x - 1$ et $g(x) = \frac{x-2}{x+2}$.

1. Donner D_f, D_g et D_{gof} .
2. Déterminer $gof(x)$ pour tout $x \in D_{gof}$.
3. Dresser les tableaux de variations de f et g.
4. Déterminer $f(]-\infty; 1])$ et $f([1; +\infty[)$.
5. Etudier les variations de la fonction gof sur $]-\infty; 1]$ et $[1; +\infty[$.

VII. Représentation graphique des fonctions $x \mapsto \sqrt{x+a}$ et $x \mapsto ax^3$:

1. Représentation graphique de la fonction $x \mapsto ax^3$:

Soient a un nombre réel non nul et $f: x \mapsto ax^3$.

On a $(\forall x \in \mathbb{R})$ $: -x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = a(-x)^3 = -ax^3 = -f(x)$.

Ce qui entraine que f est impaire, donc qu'il suffit de l'étudier sur $\mathbb{R}^+$.

Soient x et y deux éléments de $[0; +\infty[$ tels que $x < y$

➢ Si $a > 0$:.

On a : $x < y \Rightarrow x^3 < y^3$(car x et y sont positifs)

$\Rightarrow ax^3 < ay^3$ (car $a > 0$)

$\Rightarrow f(x) \prec f(y)$.

Donc f est croissante sur $[0; +\infty[$, et puisqu' elle est impaire, alors elle croissante sur $]-\infty; 0]$.

D'où f est croissante sur $\mathbb{R}$.

➢ Si $a < 0$:

On a : $x < y \Rightarrow x^3 < y^3$

$\Rightarrow ax^3 > ay^3$ (car $a < 0$)

$\Rightarrow f(x) > f(y)$.

Donc f est décroissante sur $[0; +\infty[$, et puisqu' elle est impaire, alors elle décroissante sur $]-\infty; 0]$.

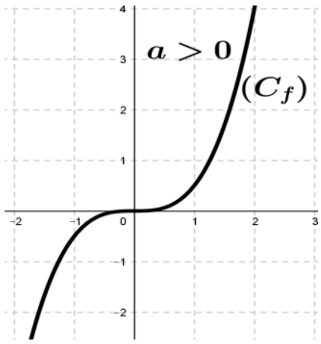
D'où f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

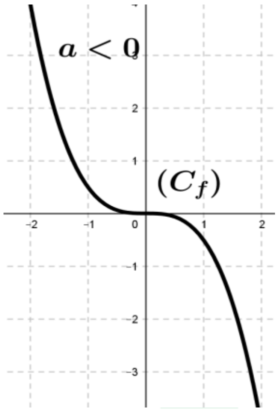
❖ $a > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↗	0	↗

❖ $a < 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	0	↘





2. Représentation graphique de la fonction $x \mapsto \sqrt{x+a}$:

Soient a un nombre réel non nul et $f : x \longmapsto \sqrt{x+a}$.
On a $D_f = [-a; +\infty[$.
Soient x et y deux éléments de $D_f = [-a; +\infty[$ tels que $x < y$.
On a : $x < y \Rightarrow x + a < y + a$

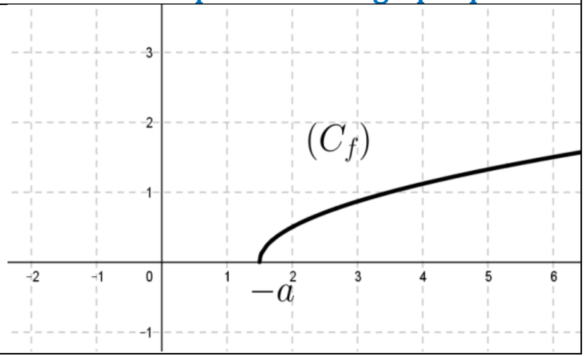
$$\Rightarrow \sqrt{x+a} < \sqrt{y+a}$$
$$\Rightarrow f(x) \prec f(y).$$

Donc f est strictement croissante sur $[-a; +\infty[$.

❖ Tableau de variations

x	$-a$	0	$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	

❖ Représentation graphique



✍ *Application ⑦ :*

On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = \sqrt{x+2}$ et $g(x) = -x^3$ et soient (C_f) et (C_g) les courbes représentatives respectives des fonctions f et g dans un repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

1. Etudier les variations de f et g.
2. Construire (C_f) et (C_g).
3. Résoudre graphiquement l'inéquation $\sqrt{x+3} + x^3 < 0$ sur $[-2; +\infty[$.

✍ *Exercice ⑥ de la série .*

Soient f et g deux fonctions définies par $f(x) = x^2 - x$ et $g(x) = \sqrt{x+2}$ et soient (C_f) et (C_g) leurs courbes respectives dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

1. a. Déterminer D_g , puis vérifier que $f(2) = g(2)$.
b. Représenter les courbes (C_f)et (C_g).
c. Déterminer graphiquement $f\left(\left]-\infty; \frac{1}{2}\right]\right)$.
d. Résoudre graphiquement sur $[-2; +\infty[$ l'inéquation $x^2 - x - \sqrt{x+2} \leq 0$.
2. on considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \sqrt{x^2 - x + 2}$.
a. Vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R}) : h(x) = (g \circ f)(x)$.
b. Déterminer les variations de la fonction h sur les intervalles $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$ et $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ en utilisant les variations de f et g.