Calcul trigonométrique

1BSF 1 et 2

Pr. Latrach Abdelkbir

Activité ①:

Le plan(P)est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ et (C) le cercle trigonométrique qui lui est associé.

Soient a et b deux réels. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls tels que $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$ et $(\widehat{\vec{\imath};\vec{u}}) \equiv b[2\pi]$ et $(\widehat{\vec{\imath};\vec{v}}) \equiv a[2\pi]$.

1. Déterminer la mesure de l'angle orientée $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ en fonction de a et b.
2. Calculer par deux méthodes le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$.
3. En déduire que
   $cos(a-b) = cos\,a\ cos\,b + sin\,a\ sin\,b$.
4. Montrer que
   $cos(a+b) = cos\,a\ cos\,b - sin\,a\ sin\,b$.

En remarquant que $cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = sin(x)$. Montrer que
$sin(a-b) = sin\,a\ cos\,b - cos\,a\ sin\,b$ et
$sin(a+b) = sin\,a\ cos\,b + cos\,a\ sin\,b$.

Application ①:

1. Sachant que $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$, calculer $\cos\frac{5\pi}{12}$, $\sin\frac{5\pi}{12}$, $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.
2. Soit x un réel. Montrer que:
   - $sin\,x = sin(x+\frac{\pi}{3}) - sin(\frac{\pi}{3}-x)$.
   - $cos\,x = cos(x+\frac{\pi}{3}) + cos(\frac{\pi}{3}-x)$.

Exercice ①:

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < \frac{\pi}{2}$, $0 < b < \frac{\pi}{2}$ et $sin(a) = cos(b) = \frac{1}{3}$. Déterminer $a+b$.

Activité ②:

Soient a et b deux réels tels que $a \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ et $b \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer que si : $a-b \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$, alors
   $tan(a-b) = \frac{tan\,a - tan\,b}{1+tan\,a\ tan\,b}$.
2. Montrer que si : $a+b \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$, alors
   $tan(a+b) = \frac{tan\,a + tan\,b}{1-tan\,a\ tan\,b}$.

Application ②:

Soit x un réel tel que $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ et $x \neq \frac{\pi}{4}+k\pi$ et $x \neq \frac{\pi}{4}+k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Simplifier l'expression $tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\times tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$.

Application ③:

1. Sachant que $\frac{\pi}{4} = 2\times\frac{\pi}{8}$, calculer $\cos\frac{\pi}{8}$, $\sin\frac{\pi}{8}$ et $\tan\frac{\pi}{8}$.
2. Soit x un réel. Montrer que :
   $1 + cos\,x + 2\,sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 2$.
3. Soit x un réel tel que $x \neq k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
   Montrer que $\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)} = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

Activité ③:

Soient a et b deux réels.

Simplifier les expressions suivantes :

a. $sin(a+b) + sin(a-b)$.
b. $sin(a+b) - sin(a-b)$.
c. $cos(a+b) + cos(a-b)$.
d. $cos(a+b) - cos(a-b)$.

Application ④:

1. Calculer $cos\left(\frac{\pi}{12}\right)cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $cos\left(\frac{\pi}{12}\right)sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.
2. Soit x un réel. Montrer que $sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{1}{4}$.

Application ⑤:

1. Montrer que $sin\left(\frac{\pi}{12}\right) + sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2}$.
2. Soit x un réel. Montrer que
   $\cos 6x - \cos 2x = -4sin^2 2x\ cos2x$.

Application ⑥:

Ecrire sous la forme $r\,cos(x-\alpha)$ les expressions suivantes :

$A(x) = cos\,x + sin\,x$; $B(x) = \sqrt{3}\,cos\,x - sin\,x$;
$C(x) = \sqrt{3}\,cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) - sin(2x-\frac{\pi}{3})$.

Exercice ②:

On pose $A = \frac{cos\frac{\pi}{12}+sin\frac{\pi}{12}}{cos\frac{\pi}{12}-sin\frac{\pi}{12}}$.

1. Montrer que $cos\frac{\pi}{12} + sin\frac{\pi}{12} = \sqrt{2}\,sin\frac{\pi}{3}$.
2. Montrer que $cos\frac{\pi}{12} - sin\frac{\pi}{12} = \sqrt{2}\,sin\frac{\pi}{6}$.
3. En déduire la valeur du nombre A.
4. Déterminer la valeur du nombre $tan\frac{\pi}{12}$.

Application ⑦:

1. Résoudre dans I les équations suivantes :
   a. $2\cos x - \sqrt{3} = 0$; $I = [-\pi, 2\pi]$.
   b. $\sqrt{2}sin\,x + 1 = 0$; $I = [0,2\pi]$.
   c. $tanx = \sqrt{3}$; $I = [-\pi,\pi]$.
   d. $\sqrt{3}\cos x - \sin x = \sqrt{2}$; $I = [-\pi,\pi]$.
2. Résoudre dans$\left[-\pi,\frac{\pi}{2}\right]$ l'équation
   $\sqrt{3}\cos x - \sin x > \sqrt{2}$.

Exercice ③:

Soit x un réel. On pose :

$A(x) = 2\sqrt{3}\,sin^2 x - sin2x - \sqrt{3}sinx + cosx$.

1. Calculer $A\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et $A\left(\frac{\pi}{3}\right)$.
2. Montrer que :
   $(\forall x \in \mathbb{R})$: $A(x) = 2\,cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)(1-2\,sin\,x)$.
3. a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $A(x) = 0$.
   b. En déduire les solutions de l'équation $A(x) = 0$ sur $]0,2\pi]$ puis représenter les solutions sur un cercle trigonométrique.
4. Résoudre dans $]0,2\pi]$ l'équation $A(x) > 0$.