Equations différentielles

I. Equations différentielles du premier ordre

1. L'équation différentielle $y' = ay \quad (a \in \mathbb{R}^*)$

Activité

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2e^{-4x}$. On pose $y = f(x)$ et $y' = f'(x)$ et $y'' = f''(x)$. Montrer que : $y'' + 3y' - 4y = 0$. Toutes les équations où l'inconnue est une fonction, et qui se présente sous la forme d'une relation entre cette fonction et ses dérivées est appelée **équation différentielle**.

Propriété

Soit a un nombre réel non nul. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay$ est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ke^{ax}$ où k est un nombre réel quelconque.

Exemple

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E): $y' + 2y = 0$ est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ke^{-2x}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Application

1. Résoudre les équations différentielles suivantes :
   - $y' = 3y$
   - $y' + 5y = 0$
2. a. Résoudre l'équation différentielle : (E) $3y' - 2y = 0$.
   b. Déterminer la solution de (E) qui vérifie : $y(3) = -1$.

2. L'équation différentielle $y' = ay + b \quad (a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R})$

Propriété

Soient a et b deux nombres réels tels que $a \neq 0$. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ est l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$.

Exemple

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E): $y' = 3y + 2$ est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ke^{3x} - \frac{2}{3}$ avec $k \in \mathbb{R}$. Déterminons la solution g de l'équation (E) qui vérifie la condition $g(-1) = \frac{1}{3}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}, g(x) = ke^{3x} - \frac{2}{3}$. La condition $g(-1) = \frac{1}{3}$ donne $ke^{-3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. Donc $k = e^3$ il s'ensuit donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) : g(x) = e^{3x+3} - \frac{2}{3}$.

Application

1. Résoudre l'équation différentielle : (E): $y' + 2y - 4 = 0$.
2. Déterminer la solution de (E) dont la courbe passe par le point $A(-\ln(2), 6)$.

II. Equation différentielles du second ordre : $y'' + ay' + by = 0$

Définition

Soient a et b deux nombres réels. L'équation $r^2 + ar + b = 0$, où r est l'inconnue, s'appelle l'**équation caractéristique** de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$.

Propriété

On considère (E) l'équation différentielle (E): $y'' + ay' + by = 0$ et soit Δ le discriminant de son équation caractéristique (E'): $r^2 + ar + b = 0$.

- Si $\Delta > 0$, alors les solutions de (E) sont les fonctions $x \mapsto \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$ tel que $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ où r_1 et r_2 sont les solutions de (E').
- Si $\Delta = 0$, alors les solutions de (E) sont les fonctions $x \mapsto (\alpha + \beta x)e^{r_0 x}$ tel que $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ où r_0 est la solution de (E').
- Si $\Delta < 0$, alors les solutions de (E) sont les fonctions $x \mapsto (a\cos(qx) + \beta\sin(qx))e^{px}$ tel que $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ où $r_1 = p + iq$ et $r_2 = \overline{r_1}$ sont les solutions de (E').

Application

1. Résoudre les équations différentielles suivantes :
   - (E_1): $y'' - 3y' + 2y = 0$.
   - (E_2): $y'' + 4y' + 4y = 0$.
   - (E_3): $y'' - 4y' + 13y = 0$.
2. a. Résoudre l'équation différentielle : (E'): $y'' - 5y' + 6y = 0$.

   b. Déterminer la solution g de l'équation (E') vérifiant les conditions initiales : $g(0) = 1$ et $g'(0) = 2$.
3. a. Résoudre l'équation différentielle : (E"): $y'' + 4y = 0$.

   b. Déterminer la solution g de l'équation (E") vérifiant les conditions initiales : $g(\frac{\pi}{2}) = 1$ et $g'(\frac{\pi}{2}) = 2$.