Fonctions exponentielle

I. Fonction exponentielle népérienne

Activité

1. Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \ln x$ admet une fonction réciproque définie sur l'intervalle J à déterminer. La fonction réciproque de $x \mapsto \ln x$ est appelée **fonction exponentielle népérienne** et se note par **exp**.
2. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}), \exp(x) > 0$.
3. a. Calculer $\ln(e^2), \ln(e), \ln(1)$ et $\ln(\frac{1}{e^2})$.
   b. En déduire $\exp(2), \exp(1), \exp(0)$ et $\exp(-2)$.
4. a. Tracer $(C_{\ln})$ et $(C_{\exp})$ sur le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   b. En déduire $\lim_{x\to+\infty} \exp(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} \exp(x)$.

1. Définition et propriétés

Définition

On appelle **fonction exponentielle népérienne**, notée **exp**, la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien **ln** et on a :

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in]0; +\infty[); \quad \exp(x) = y \Leftrightarrow x = \ln(y).$$

$$\begin{tikzcd}
]-\infty, +\infty[\arrow[rr, bend left, "\exp"] & &]0, +\infty[\arrow[ll, bend left, "\ln"]
\end{tikzcd}$$

Notation e^x

Soit r un rationnel. On a : $\ln(\exp(r)) = r$ et on sait que $\ln(e^r) = r\ln(e) = r$. Donc $(\forall r \in \mathbb{Q})$: $\ln(\exp(r)) = \ln(e^r)$. On prolonge cette relation de l'ensemble $\mathbb{Q}$ sur l'ensemble $\mathbb{R}$, on aura :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : \exp(x) = e^x$$

Propriétés

- La fonction exp est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $(\forall x \in \mathbb{R}) : e^x > 0$.
- $(\forall x \in]0; +\infty[)(\forall y \in \mathbb{R}) : e^y = x \Leftrightarrow \ln(x) = y$.
- $(\forall x \in \mathbb{R}) : \ln(e^x) = x$ et $(\forall x \in]0; +\infty[) : e^{\ln(x)} = x$.
- $(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R}) : e^a > e^b \Leftrightarrow a > b$.
- $(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R}) : e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$.

Application

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{3e^x}{2e^x+4}$.

1. Déterminer D_f puis montrer que f est continue sur D_f.
2. Calculer $f(0)$ et $f(\ln(2))$.

Application

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a. $e^{1-x} = e^{x-x^2}$

b. $e^{x^2-x} = 1$

c. $(e^x)^2 - 3e^x + 2 = 0$

d. $(e^x)^2 - 3e^x + 2 < 0$

e. $(e^x + 2)(e^{-x+1} - 4) \geq 0$

f. $\frac{e^x+1}{e^{-x}-e} \leq 0$

Propriétés

Soient a et b deux réels et $r \in \mathbb{Q}$, on a :

- $e^{x+y} = e^x e^y$
- $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$
- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- $(e^x)^r = e^{rx}$

Application

1. Simplifier les expressions suivantes :
   $A = \frac{e^{5x}e^{-x}}{(e^x)^4}$; $B = (e^{x-2})^2 \times e^{3x-4}$; $C = e^{2x}((e^x + e^{-x})^2 + (e^x - e^{-x})^2)$
2. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})$: $\frac{e^x-1}{e^x+1} = \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$

Exercice

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

   a. $e^x + 6e^{-x} - 5 = 0$

   b. $(e^x)^{15} \times e^{x^2+5} = \frac{e^{6x}}{e^4}$

   c. $\frac{e^{2x+1}}{e^{x-3}} > e^{-x+2}$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases} 5e^{2x+1} + 3e^{-y} = 3 \\ 7e^{2x+1} - 4e^{-y} = 2 \end{cases}$.

2. Limites usuelles

Propriétés

- $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
- $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$
- $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$
- $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
- $\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

Exemple

Calculons $\lim_{x\to+\infty} e^x - x$. On a $\lim_{x\to+\infty} e^x - x = \lim_{x\to+\infty} x(\frac{e^x}{x} - 1) = +\infty$ car $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

Application

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to+\infty} e^x - \sqrt{x}$
2. $\lim_{x\to+\infty} (2x-1)e^{-x}$
3. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}e^{-x}$
4. $\lim_{x\to+\infty} e^x \frac{x+4}{x}$
5. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x}$
6. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{e^{3x}-1}$
7. $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-1}{e^x+1}$
8. $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3+x+1}$
9. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2+2x}-1}{x}$

3. Dérivée de la fonction exponentielle népérienne

On pose $(\forall x \in]0,+\infty[) f(x) = \ln(x)$, donc $(\forall x \in \mathbb{R}) f^{-1}(x) = e^x$. Et on sait que $(\forall x \in \mathbb{R}) : (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$, d'où $(\forall x \in \mathbb{R}) : (e^x)' = \frac{1}{1/e^x} = e^x$.

Propriété

La fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}) : (e^x)' = e^x$.

Application

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \frac{e^x-1}{e^x+1}$, et soit (C_f) sa représentation graphique sur le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x+1}$ et déduire $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
2. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) = x - 1 + \frac{2}{e^x+1}$ et déduire $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
3. Étudier les branches infinies de (C_f) au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.
4. Montrer de f est impaire.
5. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée.
6. Donner le tableau des variations de f.
7. Tracer (C_f).

Propriété

Si u est une fonction dérivable sur I, alors la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et on a : $(\forall x \in I) : (e^{u(x)})' = u'(x)e^{u(x)}$.

Application

Déterminer f' dans les cas suivants :

1. $f(x) = e^{x^2+3x}$
2. $f(x) = e^{x-2\ln(x+1)}$
3. $f(x) = (e^{2x} - e^{-x})^2$
4. $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

Corollaire

Soit u une fonction dérivable sur I. Les primitives de la fonction $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ sur I sont les fonctions $x \mapsto e^{u(x)} + c$ tel que $c \in \mathbb{R}$.

Application

Déterminer l'ensemble des primitives de f dans les cas suivants :

1. $f(x) = 2e^{2x} - e^{-x}$
2. $f(x) = e^{5x+4}$
3. $f(x) = (x^2+1)e^{x^3+3x}$
4. $f(x) = \frac{2x+1}{e^{x^2+x+1}}$.

II. Fonction exponentielle de base a $(a \neq 1; a > 0)$

Définition

Soit a un réel strictement positif et différent de 1. La fonction réciproque de $x \mapsto \log_a(x)$ est appelée **fonction exponentielle de base a** qui est définie sur $\mathbb{R}$ et notée par $exp_a(x)$ ou a^x.

$$\begin{tikzcd}]0,+\infty[\arrow[r, bend left, "\ln_a"] &]-\infty,+\infty[\arrow[l, bend left, "exp_a"] \end{tikzcd}$$

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a(y) \Leftrightarrow x = \frac{\ln(y)}{\ln(a)} \Leftrightarrow x\ln(a) = \ln(y) \Leftrightarrow e^{x\ln(a)} = y$. D'où : $a^x = e^{x\ln(a)}$.

Exemples

- $2^x = e^{x\ln(2)}$
- $4^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\ln(4)} = e^{2\sqrt{2}\ln(2)}$
- $(\sqrt{3})^x = e^{x\ln(\sqrt{3})} = e^{\frac{x}{2}\ln(3)}$

Remarque

$(\forall x \in \mathbb{R}) : 1^x = 1$.

Propriétés

Soient x et y deux réels et $r \in \mathbb{Q}$, on a :

- $a^{x+y} = a^x a^y$
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
- $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$
- $a^{rx} = (a^x)^r$

Application

Montrer que : $\frac{9^{\ln(3)} \times 8^{\ln(4)}}{25^{\ln(5)}} = \sqrt{e}$.

Exercice

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

   a. $(\frac{1}{2})^x \leq \frac{1}{4}$ b. $3^x > 9^x$ c. $10^{2x} + 2 \times 10^x - 3 > 0$

2. Calculer la dérivée des fonctions f et g telles que $f(x) = 2^{x^2+2x+2}$ et $g(x) = x^x$.
3. Calculer les limites suivantes :

   a. $\lim_{x\to+\infty}(\frac{1}{3})^x$ c. $\lim_{x\to 0} \frac{4^x-2^x}{x}$

   b. $\lim_{x\to+\infty} \frac{4^x-2^x}{3^x}$ d. $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x$

Exercice

I. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{2x} - 2x$.

1. Déterminer $g'(x)$ for tout x de $\mathbb{R}$ puis donner le tableau des variations de g.
2. En déduire que pour tout x de $\mathbb{R}$, $g(x) > 0$.

II. Soit la fonction f qui définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = \ln(e^{2x} - 2x)$ et soit (C_f) sa représentation graphique sur le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1.a. Montrer que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

b. Vérifier que : $\frac{f(x)}{x} = (\frac{e^{2x}}{x} - 2)\frac{\ln(e^{2x}-2x)}{e^{2x}-2x}$.

c. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

2.a. Vérifier que $(\forall x \geq 0) : 1 - \frac{2x}{e^{2x}} > 0$ et que $2x + \ln(1 - \frac{2x}{e^{2x}}) = f(x)$.

b. En déduire que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

3. c. Montrer que la droite d'équation $(D) : y = 2x$ est une asymptote oblique de (C_f) au voisinage de $+\infty$.

   d. Montrer que $(\forall x \geq 0) : f(x) - 2x \leq 0$ puis déduire la position relative de (C_f) et (D) sur $[0, +\infty[$.

4. a. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) : f'(x) = \frac{2(e^{2x}-1)}{g(x)}$.

   b. Donner le tableau des variations de f.

5. Tracer (C_f) et (D) sur le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.