Exercice 1

1. Déterminer les réels a, b, c tels que pour tout u différent de $\frac{1}{2}$, $\frac{u^2-1}{2u-1}=au+b+\frac{c}{2u-1}$.

2. Calculer $\int_{-1}^{0}\frac{x^2-1}{2x-1}dx$.

3. Calculer $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0}\frac{\cos^3 x}{1-2\sin x}dx$.

Exercice 2

1) Calculez les intégrales:

a) $\int_{-3}^{0}(x^3+2x^2-1)dx$; b) $\int_{1}^{2}\frac{x-1}{x^2-2x+2}dx$

c) $\int_{1}^{e}\frac{\ln t}{t}\,dt$; d) $\int_{1}^{2}2e^{3x}dx$; e) $\int_{0}^{3}\frac{5}{\sqrt{2x+3}}dx$

f) $\int_{1}^{2}(x+1)\ln x\,dx$; g) $\int_{1}^{e}\frac{\ln x}{x^2}\,dx$; h) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x+1}\,dx$

i) $\int_{-2}^{0}(2x^3-x+1)dx$; j) $\int_{1}^{2}\frac{2}{(3u-1)^2}du$; k) $\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{\ln x}{x}\,dx$; l) $\int_{0}^{2}3e^{2x}dx$; m) $\int_{0}^{4}\frac{1}{\sqrt{2x+1}}dx$; n) $\int_{1}^{2}x^2\ln x\,dx$;

o) $\int_{1}^{e}\frac{\ln 2t}{t^2}\,dt$; p) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos x\,e^{\sin x}\,dx$; q) $\int_{-1}^{1}t\sqrt{1-t^2}dt$;

r) $\int_{1}^{2}\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(1+2x)^2}dx$;s) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1+\tan^2\left(\frac{u}{2}\right)du$.

t) $\int_{0}^{1}xe^{2x}dx$; u) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\sin x\cos^3 x dx$, v) $\int_{1}^{2}\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

2) Calculer les intégrales suivantes (on précisera éventuellement l'intervalle de validité) :

1°) $\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}}\frac{xdx}{\sqrt[3]{x^2+1}}$; 2°) $\int_{0}^{-2}t.\exp(-t^2)dt$

3°) $\int_{1}^{e}(x-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})dx$; 4°) $\int_{-1}^{x}\frac{dt}{1-t}$

5°) $\int_{0}^{\pi/6}\sin 3u\,du$; 6°) $\int_{e^2}^{e}\frac{\ln t}{t}dt$

7°) $\int_{0}^{1}\frac{x^{n-1}}{1+x^n}dx$ $(n\in N^*)$; 8°) $\int_{1}^{e}\frac{\ln(t)}{t^2}dt$

9°) $\int_{a}^{a^n}\frac{dx}{x\ln x}$; 10°) $\int_{1}^{e^2}(x^3+1)\ln(x)dx$ 11°) $\int_{0}^{1}(x^2+x+1)e^{-x}dx$;

12°) $\int_{0}^{\pi}x^2\sin(x)dx$

Exercice 3

Pour tout réel positif a, on définit $I(a)=\int_{1}^{a}\frac{\ln x}{x^2}dx$.

1. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I(a)=\frac{\ln(a)-1}{a^2}+1$.

2. En déduire la limite de $I(a)$ quand a tend vers $+\infty$.

3. On définit maintenant $J(a)=\int_{1}^{a}\frac{\ln(x)}{x^2+1}dx$. En utilisant (avec justification) que pour tout x supérieur à 1, $x^2\le x^2+1\le 2x^2$, montrer que $\frac{1}{2}I(a)\le J(a)\le I(a)$.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $[1\,;+\infty[$ par :

$f(x)=\sqrt{x}\,e^{-x}$.

Pour tout $\alpha>1$, on considère l'intégrale :

$I(\alpha)=\int_{\alpha}^{2\alpha}f(x)dx$.

1. Interpréter géométriquement le nombre $I(\alpha)$.

2. Démontrer que, pour tout $x \in [1;+\infty[$, on a :

$e^{-x} \leq f(x) \leq xe^{-x}$.

3.En déduire pour tout $\alpha > 1$ un encadrement de $I(\alpha)$

4. Quelle est la limite de $I(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$?

5. Déterminer la dérivée par rapport à α de *I*. Quel est son signe ? Dresser le tableau de variation de *I*.

Exercice 5

1. Restitution organisée de connaissances

Démontrer la formule d'intégration par parties en utilisant la formule de dérivation d'un produit de deux fonctions dérivables, à dérivées continues sur un intervalle [*a* ; *b*].

2. Soient les deux intégrales définies par

$$I = \int_0^{\pi} e^x \sin x dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\pi} e^x \cos x dx .$$

a. Démontrer que $I = -J$ et que $I = J + e^{\pi} + 1$.

b. En déduire les valeurs exactes de *I* et de *J*.

Exercice 6

1°) Montrer que les intégrales

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{\sin t + \cos t} dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\pi} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} dt$$

existent.

2°) Calculer I + J et I – J. En déduire I et J.

Exercice 7

1. Application du changement de variable. Montrer:

-- si f est impaire et continue sur [–a, a], alors

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0 \quad (a > 0) ;$$

-- si f est paire et continue sur [-a, a], alors

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_0^{a} f(t)dt \ (a > 0) ;$$

-- si f est périodique de période T est continue sur **R**, alors $\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^{T} f(t)dt$.

Calculer : $\int_{-3}^{3} x\sqrt{x^4+1}\, dt$; $\int_0^{2\pi} \sin^3 t\, dt$

Exercice 8

Pour n entier naturel, on pose : $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2}\, dx$

1°) Quelle est la signification géométrique de I_0 ? En déduire la valeur de I_0.

2°) Calculer I_1.

3°) Montrer que pour tout n ≥ 2, on a :

$I_n = \dfrac{n-1}{n+2} I_{n-2}$. En déduire la valeur de I_n en fonction de n (on distinguera suivant la parité de n).

4°) Montrer que (I_n) est une suite positive et décroissante et que cette suite converge vers 0.

5°) Montrer que n(n + 1)(n + 2) $I_n I_{n-1}$ est indépendant de n et calculer sa valeur ; en déduire un équivalent simple de I_n lorsque I_n tend vers $+\infty$.

Exercice 9

Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n\, dx$, avec n appartenant à **N**.

1°) Montrer que la suite (I_n) est décroissante. En déduire qu'elle est convergente.

2°) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout n ≥ 2, on a : $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$.

3°) Après avoir calculé I_0 et I_1, en déduire I_{2p} et I_{2p+1}, $p \in \mathbf{N}$.

4°) Montrer que pour tout $p \in \mathbf{N}$, on a :

$$\frac{I_{2p+2}}{I_{2p}} \leq \frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} \leq 1.$$

5°) En déduire la limite quand p tend vers $+\infty$ de

$$\left(\frac{2.4.6.\ldots.2p}{1.3.5.\ldots.(2p-1)}\right)^2 \cdot \frac{1}{2p+1} \quad \text{(formule de Wallis).}$$

Exercice 10

On note, pour tout nombre réel a positif et pour tout entier naturel n :

$$u_n(a) = \int_0^1 \exp(\,a(1-x)\,)\, x^n\, dx$$

1°) Calculer $u_0(a)$.

2°) Convergence de la suite $(\,u_n(a)\,)_{n\in\mathbf{N}}$. Soit $a > 0$ donné.

a) Montrer que pour tout n dans **N** :

$$0 < u_n(a) < \frac{\exp(a)}{n+1}.$$

b) Montrer que la suite $(\,u_n(a)\,)$ est décroissante.

c) Déterminer la limite de $u_n(a)$ quand n tend vers $+\infty$.

3°) Forme explicite de $u_n(a)$.

a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout n dans **N** : $a.u_{n+1}(a) = -1 + (n+1).u_n(a)$.

b) Montrer par récurrence sur n que pour tout n dans **N**

$$u_n(a) = \frac{n!}{a^{n+1}}\left[\exp(a) - \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}\right].$$

Exercice 11

On étudie dans cet exercice la suite (S_n) définie pour $n \geq 1$ par :

$$S_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2}$$

$$\text{c'est à dire} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

A cet effet, on introduit pour tout réel t tel que $0 \leq t \leq \pi/2$:

$$I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(t)\, dt \quad ; \quad J_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2k}(t)\, dt$$

1°) convergence de la suite (J_k/I_k).

a) Etablir l'inégalité suivante pour tout nombre réel t tel que $0 \leq t \leq \pi/2$: $t \leq \frac{\pi}{2}\sin(t)$.

b) Etablir l'inégalité suivante pour tout nombre entier k tel que $k \geq 0$: $0 \leq J_k \leq \frac{\pi^2}{4}(I_k - I_{k+1})$.

c) Exprimer I_{k+1} en fonction de I_k en intégrant par parties I_{k+1} (on pourra poser $u'(t) = \cos(t)$ et $v(t) = \cos^{2k+1}(t)$ dans l'intégration par parties).

d) Déduire des résultats précédents que J_k/I_k tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$.

2°) Convergence et limite de la suite (S_n).

a) Exprimer I_k en fonction de J_k et J_{k-1}, en intégrant deux fois par parties l'intégrale I_k ($k \geq 1$).

b) En déduire la relation suivante pour $k \geq 1$:

$$\frac{J_{k-1}}{I_{k-1}} - \frac{J_k}{I_k} = \frac{1}{2k^2}$$

c) Calculer J_0 et I_0, puis déterminer la limite S de la suite (S_n).

d) Etablir l'inégalité suivante pour tout nombre entier $k \geq 2$:

$$\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}.$$

En déduire un encadrement de $S_{n+p} - S_n$ pour $n \geq 1$ et $p \geq 1$, puis de $S - S_n$, et montrer que

$$0 \leq S_n - S + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^2}.$$ *Autrement dit,* $S_n + \frac{1}{n}$ *constitue une valeur approchée de S à* $\frac{1}{n^2}$ *près.*

e) Ecrire un programme en PASCAL calculant et affichant une valeur approchée du nombre S à 10^{-6} près.

Exercice 12

Pour n entier naturel non nul on définit la suite (S_n) par : $S_n = 1 + . \frac{1}{2^{1/3}} + \frac{1}{3^{1/3}} + \ldots + \frac{1}{n^{1/3}}$

1°) Justifier pour k entier naturel non nul l'encadrement : $\frac{1}{(k+1)^{1/3}} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^{1/3}} \leq \frac{1}{k^{1/3}}$

2°) En déduire l'encadrement :

$$\int_1^{n+1} \frac{dx}{x^{1/3}} \leq S_n \leq \int_1^{n} \frac{dx}{x^{1/3}} + 1.$$

3°) que peut-on dire de la suite (S_n) ?

4°) A l'aide d'encadrements analogues, montrer que la suite (T_n) définie par :

$T_n = 1 + \frac{1}{2^{4/3}} + \frac{1}{3^{4/3}} + \ldots + \frac{1}{n^{4/3}}$ est convergente.

Exercice 13

Calculer les limites quand n tend vers $+\infty$ des sommes suivantes : $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^4}{n^5}$; $n\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+n^2}$

(rappel : $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{4}$) ; $\frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$.

Exercice 14

Soit n un entier ≥ 2 et $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right)$. Démontrer :

1°) $\forall$ k $\in$ [[1, n-1]]

$$\frac{1}{n}\ln\frac{k}{n} \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} \ln(x)dx \leq \frac{1}{n}\ln\frac{k+1}{n}.$$

2°) $u_n \leq \int_{1/n}^{1} \ln(x)dx \leq u_n - \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}$.

3°) $\frac{1}{n}-1 \leq u_n \leq \frac{1}{n}-1-\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}$.

4°) $\lim_{n\to+\infty} (u_n) = -1$.

5°) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{e}$.

Exercice 15

Pour n $\in$ **N** on note $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt[n]{2^k}$

1°) Montrer que pour tout k appartenant à [[0, n-1]] :

$$\frac{1}{n}\sqrt[n]{2^k} \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} 2^t\, dt \leq \frac{1}{n}\sqrt[n]{2^{k+1}}.$$

2°) En déduire un encadrement de u_n et la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

3°) Retrouver cette limite en calculant u_n en fonction de n.

Exercice 16

Soit f la fonction définie pour tout x strictement positif

par : $f(x)=\frac{x^2}{2}-\ln x-\frac{1}{2}$

1°) Etudier les variations de f. montrer que c'est une fonction convexe. Donner sa représentation graphique.

2°) Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle]0, +∞[. En déduire que l'intégrale

$\int_0^1 f(x)dx$ est convergente et calculer sa valeur.

3°) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On pose :

$$S_n=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right)$$

a) Etablir, pour tout entier j vérifiant $1 \le j \le n$, les

inégalités : $\frac{1}{n}f\left(\frac{j+1}{n}\right)\le \int_{\frac{j}{n}}^{\frac{j+1}{n}} f(x)dx \le \frac{1}{n}f\left(\frac{j}{n}\right)$

b) en déduire l'encadrement :

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx \le S_n \le \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)+\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx$$

c) Montrer les inégalités :

$$0\le \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)\le \int_0^{\frac{1}{n}} f(x)dx$$

d) Montrer que la suite (S_n) est convergente et déterminer sa limite.

4°) On rappelle que pour tout entier naturel non nul n,

on a l'égalité : $\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exprimer, pour tout entier naturel non nul n, la somme $\sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right)$ en fonction de n. En déduire la

limite : $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n^n}{n!}\right)$.

Exercice 17

Soit I la suite de terme général $I_n=\int_0^1 x^n e^{-x}dx$

1°) a) Calculer I_0 et I_1.

b) Montrer que pour tout entier naturel n, $I_n \le \frac{1}{n+1}$.

Etudier la convergence de la suite I.

2°) Calcul d'une valeur approchée de I_{15}.

a) Montrer que $\forall\, n \in \mathbf{N}$ $I_{n+1} = (n + 1)I_n - 1/e$, et :

$$I_n=\frac{n!}{e}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{(n+k)!}+\frac{n!}{(n+p)!}I_{n+p}$$

b) En déduire que pour tout n dans **N** :

$$0\le I_n-\frac{n!}{e}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{(n+k)!}\le\frac{n!}{(n+p+1)!}\le\frac{1}{(n+1)^{p+1}}$$

c) Comment peut-on choisir p pour que

$$0\le I_{15}-\frac{15!}{e}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{(15+k)!}<10^{-6}\ ?$$

En déduire là l'aide de la calculatrice une valeur approchée de I_{15} à 10^{-6} près.

c*) Ecrire en turbo-pascal un programme qui affiche une valeur de $\frac{15!}{e}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{(15+k)!}$. p est fourni par l'utilisateur. On veillera à minimiser les calculs.

Exercice 18

Pour tout n dans **N**, on pose :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx \text{ et } J_n = \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}dx$$

1°) Quelle est la dérivée de la fonction f : IR → IR

définie par $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$? Calculer I_0.

2°) Calculer I_1.

3°) Montrer que pour tout n dans **N**, $0 \le In \le \frac{1}{n+1}$

En déduire la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Montrer que J_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

4°) Etablir à l'aide d'une intégration par parties :

$$I_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} + \frac{1}{n+1}J_n .$$

Quelle est la limite de nI_n quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 19

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1 on pose :

$$I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x^2)dx \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx .$$

1°) Etude de la suite (J_n)

a) Calculer J_1.

b) Montrer que pour tout n supérieur ou égal à 1

$0 \le J_n \le 1/(n+1)$.

c) Etudier la convergence de la suite $(J_n)_{n\ge1}$.

2°) Etude de la suite $(I_n)_{n\ge1}$.

a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout n supérieur ou égal à 1 :

$$I_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{2}{n+1}J_{n+2} .$$

b) Etudier la convergence de la suite $(I_n)_{n\ge1}$.

c) Déterminer un équivalent de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 20

On pose pour tout entier naturel non nul n :

$I_n = \int_1^e (\ln(x))^n dx$, et $I_0 = e - 1$.

1°) a) Etablir, pour tout entier naturel n :

$I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.

b) Montrer, pour tout entier naturel n : $I_n \ge 0$.

c) Déduire des questions a) et b) que, pour tout entier naturel n : $0 \le I_n \le \frac{e}{n+1}$.

d) Quelle est la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$?

e) Montrer : $I_n \sim_{+\infty} \frac{e}{n}$.

2°) Soit a un réel différent de I_0 ; on note $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite réelle définie par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbf{N}\ u_{n+1} = e - (n+1)u_n \end{cases}$$

Montrer : $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$. (On pourra considérer la suite $(D_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $D_n = |u_n - I_n|$.)

Exercice 21

On définit la fonction $f : [2,+\infty[\to$ IR, $x \to \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

1°) Démontrer que pour tout réel x supérieur ou égal à 2 : $\frac{1}{x} \le f(x) \le \frac{1}{\sqrt{x-1}}$.

2°) Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on définit l'intégrale : $I_n = \int_2^n f(x)dx$.

a) Démontrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = +\infty$.

b) On définit la fonction F : [2, +∞ [→ **R** ,

$x \to \ln(x + \sqrt{x^2-1})$. Calculer la dérivée de F, et en déduire une expression de I_n en fonction de n.

c) Déterminer la limite de I_n - ln(n) quand n tend vers +∞.

3°) On définit, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k^2-1}}$.

a) Montrer que : $I_{n+1} \le S_n \le I_n + 1/\sqrt{3}$.

b) Trouver un équivalent simple de S_n quand n tend vers +∞.

Exercice 22

Pour tout entier naturel n on pose : $I_n = \int_0^1 x^n.e^{-x}dx$.

1°) a) Montrer que, pour tout entier naturel n :

$0 \le I_n \le 1/(n+1)$.

b) En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge et donner sa limite.

2°) A l'aide d'une intégration par parties, établir, pour tout entier naturel n : $I_n = \frac{1}{e(n+1)} + \frac{I_{n+1}}{n+1}$.

3°) a) En déduire pour tout entier naturel n :

$$0 \le I_n - \frac{1}{e(n+1)} \le \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

b) Trouver un équivalent simple de I_n quand n tend vers +∞.

Exercice 23

On considère, pour tout n ∈ **N***, la fonction polynomiale P_n: [0 ; +∞[→ **R** définie, pour tout x appartenant à [0 ;+∞[, par :

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k} = -x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{-x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{x^{2n}}{2n}$$

I. Etude des fonctions polynomiales P_n

1°) Montrer, pour tout n ∈**N*** et tout x ∈ [0 ; +∞[:

$$P'_n(x) = \frac{x^{2n}-1}{x+1},$$

où P_n désigne la dérivée de P_n.

2°) Etudier, pour n ∈ **N***, les variations de P_n sur [0 ; +∞[et dresser le tableau de variations de P_n.

3°) Montrer, pour tout n ∈ **N*** : $P_n(l) < 0$.

4°) a) Vérifier, pour tout n ∈ **N*** et tout x ∈ [0 ; +∞[:

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + x^{2n+1}\left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{x}{2n+2}\right)$$

b) En déduire, pour tout n ∈ **N*** : $P_n(2) \ge 0$.

5°) Montrer que, pour tout n ∈ **N***, l'équation $P_n(x) = 0$, d'inconnue x ∈ [1 ; +∞[, admet une solution et une seule, notée x_n, et que $1 < x_n \le 2$.

6°) Ecrire un programme en langage Pascal qui calcule et affiche une valeur approchée décimale de x_2 à 10^{-3} près.

II. Limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$. **1°)** Etablir, pour tout n ∈ **N*** et tout x ∈ [0 ; +∞[: $P_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}dt$

2°) En déduire, pour tout n ∈ **N*** :

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}dt = \int_0^1 \frac{1-t^{2n}}{t+1}dt$$

3°) Démontrer, pour tout n ∈**N*** et tout t ∈ [1 ; +∞[:

$t^{2n} - 1 \geq n(t^2 - 1)$.

4°) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}dt \geq \frac{n}{2}(x_n-1)^2$$, puis :

$$0 < x_n - 1 \leq \frac{\sqrt{2\ln 2}}{\sqrt{n}}$$

5°) Conclure quant à la convergence et à la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 24

Soit n un entier naturel non nul. On pose :

$$I_n = \int_1^e x^2(\ln x)^n dx$$

1. Calculer I_1.

2. a) Etudier le sens de variation de la suite $(I_n)_{n\geq 1}$.

b) Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 1}$ est convergente.

c) Montrer que, pour tout $x \in [1,e]$: $\ln(x) \leq x/e$.

d) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

3. a) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$I_{n+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3}I_n .$$

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$.

Exercice 25

Pour n appartenant à **N,** on pose : $I_n = \int_0^1 x^n \sin(\pi x)dx$

1°) a) Montrer que pour tout n dans I**N**

$0 \leq I_n \leq 1/(n+1)$.

b) En déduire que la suite (I_n) converge vers 0.

2°) Calculer I_0 et I_1.

3°) Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2} pour tout n supérieur ou égal à 2.

4°) Démontrer par récurrence : $\forall\ p \geq 1$

$$I_{2p} = (-1)^p \frac{2(2p)!}{\pi^{2p+1}} + \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k \frac{(2p)!}{\pi^{2k+1}(2p-2k)!}$$

Exercice 26

Question de cours : soit *I* un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient *u* et *v* deux fonctions continues, dérivables sur *I* telles que les fonctions dérivées *u'* et *v'* soient continues sur *I*.

Rappeler et démontrer la formule d'intégration par parties sur un intervalle [*a* ; *b*] de *I*.

Partie A

Soit *f* une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;1]$. On note f' la fonction dérivée de *f*. On suppose que f' est continue sur l'intervalle $[0\,;1]$.

1. Utiliser la question de cours pour montrer que

$$\int_0^1 f(x)dx = f(1) - \int_0^1 xf'(x)dx .$$

2. En déduire que

$$\int_0^1 [f(x)-f(1)]dx = -\int_0^1 xf'(x)dx$$

Partie B

On désigne par ln la fonction logarithme néperien.

Soit *f* la fonction définie sur l'intervalle $]-2\,;2[$ par $f(x) = \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

1. Déterminer les limites de *f* aux bornes de son ensemble de définition.

2. a. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle

$]-2\,;2[$, on a $f\,'(x)=\dfrac{4}{4-x^2}$.

b. En déduire les variations de f sur l'intervalle

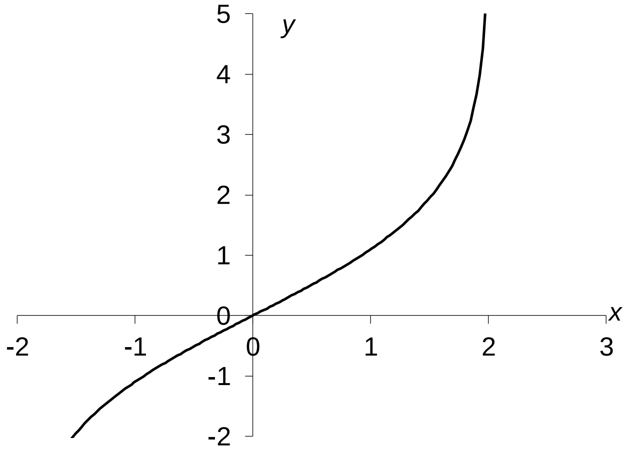
$]-2\,;2[$

Partie C

Le courbe C est tracée ci-dessous. Hachurer la partie P du plan constituée des points $M(x\,;y)$ tels que :

$0\le x\le 1$ et $f(x)\le y\le \ln 3$.

En utilisant la partie A, calculer en cm^2 l'aire de P.



Exercice 27

1. Calculer $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\tan^2 x\,dx$ à l'aide d'une intégration par parties.

2. Soit la fonction définie sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ par :

$f(x)=\sqrt{x}\tan x$ dont la courbe (C_f) est représentée ci-contre dans le plan P muni du repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

On considère le solide engendré par la rotation autour de l'axe $(O\,;\vec{i})$ de la surface délimitée dans le plan P par l'axe $(O\,;\vec{i})$, la droite d'équation $x=\dfrac{\pi}{4}$ et la courbe (C_f).

Sachant que l'unité graphique est de 2 cm, calculer le volume V du solide en cm^3.

Exercice 28

On considère la fonction numérique f définie par

$f(x)=\dfrac{1}{1+x}$.

1. Déterminer une fonction polynôme P, de degré inférieur ou égal à 3 qui a même valeur et même nombre dérivé que f en 0 et 1.

2. Soit k la fonction définie par

$k(x)=\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{4}x^3-\dfrac{3}{4}x^2+x-1$. Factoriser k et en déduire la position relative de C_f et C_P, les courbes représentatives de f et P.

3. A l'aide d'un encadrement de $1+x$ pour x dans $[0\,;1]$ montrer que $\dfrac{1}{240}<\displaystyle\int_0^1 k(x)dx<\dfrac{1}{120}$.

4. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ et $\displaystyle\int_0^1 P(x)dx$.

5. Déduire des résultats précédents la valeur de l'entier n tel que $\dfrac{n}{240}<\ln 2<\dfrac{n+1}{240}$.

6. On considère la suite géométrique u_n de premier terme 1 et de raison $-x$.

a. Calculer la somme des n premiers termes :

$s_n(x)=1-x+x^2-\ldots+(-x)^n$; en déduire

$f(x)=s_n(x)+\dfrac{(-x)^{n+1}}{1+x}$.

b. Montrer que

$$\int_0^a f(x)dx = a - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{3}a^3 + \ldots + \frac{1}{n+1}(-x)^{n+1} + \int_0^a \frac{(-x)^{n+1}}{1+x}dx$$

c. Montrer que sur $[0\ ;\ a]$ on a

$-\frac{a^{n+1}}{1+a} \leq \frac{(-x)^{n+1}}{1+x} \leq \frac{a^{n+1}}{1+a}$ puis que

$-\frac{a^{n+2}}{1+a} \leq \int_0^a \frac{(-x)^{n+1}}{1+x}dx \leq \frac{a^{n+2}}{1+a}$. Préciser la limite de

$\int_0^a \frac{(-x)^{n+1}}{1+x}dx$ lorsque n tend vers $+\infty$.

d. On admet que ce résultat reste valable lorsque a vaut

1. En déduire un algorithme de calcul de ln2.

Rappel : somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme u_0, de raison q :

$u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Exercice 29

Pour tout k entier on note f_k l'application de $[0\ ;\ 1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_k(x) = x^k\sqrt{1-x}$. On appelle C_k sa courbe représentative.

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f_k.

2. Donner, en distinguant suivant la valeur de k, le tableau de variations de f_k.

3. Etudier les positions respectives de C_k et C_{k+1}. Tracer les courbes C_0, C_1, C_2.

4. On pose $I_k = \int_0^1 f_k(x)dx$. Calculer $\int_0^1 f_0(x)dx$.

a. Quel est le sens de variation de I_k ? Montrer que I_k converge vers une limite l que l'on ne cherchera pas.

b)Montrer, en intégrant par parties que pour tout entier $k > 0$, on a $I_k = \frac{2k}{2k+3}I_{k-1}$. En déduire une expression de I_k.

c. Montrer que pour tout k entier, on a

$\int_0^1 f_k(x)dx \leq \frac{a}{1+k}$ où a est une constante que l'on déterminera. En déduire la limite de I_k.

Exercice 30

On définit la suite d'intégrales :

$$I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{1+e^x},\ I_1 = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx,\ldots, I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x}dx$$

(n désigne un entier naturel).

1. Calculer I_1 et $I_0 + I_1$. En déduire I_0. Pour tout entier n, calculer $I_n + I_{n+1}$.

2. Montrer sans calcul que la suite (I_n) est croissante.

3. Prouver que pour tout x de $[0\ ;\ 1]$

$\frac{e^{nx}}{e+1} \leq \frac{e^{nx}}{e^x+1} \leq \frac{e^{nx}}{2}$. En déduire un encadrement de I_n.

4. A partir de cet encadrement, déterminer la limite de I_n et celle de $\frac{I_n}{e^n}$.

Exercice 31

On considère la suite numérique (J_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par $J_n = \int_1^n e^{-t}\sqrt{t+1}dt$.

1. Démontrer que la suite (J_n) est croissante.

2. *Dans cette question, le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle*

n'aboutît pas.

On définit la suite (I_n), pour tout entier naturel n non nul, par $I_n = \int_1^n (t+1)e^{-t}dt$.

a. Justifier que, pour tout $t \geq 1$, on a $\sqrt{t+1} \leq t+1$.

b. En déduire que $J_n \leq I_n$.

c. Calculer I_n en fonction de n. En déduire que la suite (J_n) est majorée par un nombre réel (indépendant de *n*).

d. Que peut-on en conclure pour la suite (J_n) ?

Exercice 32

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln(x+3)}{x+3}.$$

1. Montrer que f est dérivable sur $[0;+\infty[$. Etudier le signe de sa fonction dérivée f', sa limite éventuelle en $+\infty$ et dresser le tableau de ses variations.

2. On définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par son terme général

$$u_n = \int_n^{n+1} f(x)dx.$$

a. Justifier que, si $n \leq x \leq n+1$, alors $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$.

b. Montrer, sans chercher à calculer u_n, que pour tout entier naturel n, $f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$.

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

3. Soit F la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par

$$F(x) = \left[\ln(x+3)\right]^2.$$

a. Justifier la dérivabilité de F sur $[0;+\infty[$ et déterminer pour tout réel positif x le nombre $F'(x)$.

b. On pose, pour tout entier naturel n, $I_n = \int_0^n f(x)dx$.

Calculer I_n.

4. On pose, pour tout entier naturel n,

$S_n = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1}$.

Calculer S_n. La suite (S_n) est-elle convergente ?

Exercice 33

L'objectif est de calculer les intégrales suivantes :

$$\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} \;;\mathrm{J} = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx \;;\mathrm{K} = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}dx.$$

<u>1. Calcul de I</u>

Soit la fonction f définie sur [0; 1] par

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+2}).$$

a. Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+2}$.

b. En déduire la dérivée f' de f.

c. Calculer la valeur de I.

<u>2. Calcul de J et de K</u>

a. Sans calculer explicitement J et K, vérifier que :

J + 2I = K.

b. À l'aide d'une intégration par parties portant sur l'intégrale K, montrer que : $\mathrm{K} = \sqrt{3} - \mathrm{J}$.

c. En déduire les valeurs de J et de K.

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \sin^4 x$; $x \in \mathbb{R}$.

1. Exprimer $\sin^2 x$ en fonction de $\cos 2x$, puis $\sin^4 x$ en fonction de $\cos 2x$ et de $\cos 4x$.

2. Quelle est la forme générale des primitives de f sur $\mathbb{R}$?

3. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{8}} f(x)dx$.

Exercice 34

On désigne par n un nombre entier relatif différent de -1 et par x un nombre réel supérieur ou égal à 1.

1. Calculer l'intégrale $I_n(x)=\int_1^x t^n \ln t dt$ (on pourra effectuer une intégration par parties).

2. En déduire le calcul de $J_n(x)=\int_1^x t^n(\ln t)^2\, dt$.

3. Calculer $I_n(e)-J_n(e)$.

4. déterminer la limite de $\frac{I_n(e)-J_n(e)}{e^{n+1}}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 35

On pose $I_0=\int_1^e x dx$ et $I_n=\int_1^e x(\ln x)^n dx$ pour tout n entier non nul.

1. Calculer I_0 et I_1 (on pourra utiliser une intégration par parties).

2. Montrer que pour tout n entier $2I_{n+1}+(n+1)I_n=e^2$. Calculer I_2.

3. Montrer que pour tout n entier, $I_{n+1}\leq I_n$. En déduire en utilisant la relation du 2° l'encadrement suivant : $\frac{e^2}{n+3}\leq I_n\leq\frac{e^2}{n+2}$.

4. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$

Exercice 36

Soit p et n des entiers naturels. On pose

$$I_{p,n}=\int_0^1 x^p(1-x)^n dx.$$

1. Calculer $I_{n,0}$ et $I_{n,1}$.

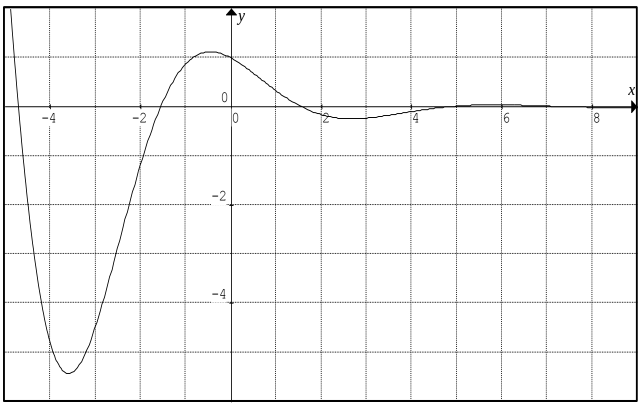
2. Calculer $I_{0,n}$ et en déduire $I_{1,n}$.

3. Etablir une relation de récurrence entre $I_{p,n}$ et $I_{p+1,n+1}$. En déduire la valeur de $I_{p,n}$ en fonction de p et n.

Exercice 37

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ d'unité 1 cm.

Soit f la fonction définie par $f(x)=e^{-\frac{x}{2}}.\cos x$ représentée ci-dessous. Soit C cette courbe représentative.



1. Montrer que pour tout réel x, on a $f'(x)=-e^{-\frac{x}{2}}.(\frac{1}{2}\cos x+\sin x)$.

2. a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)$=0.

b. Montrer que sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, on a $f(x)\geq 0$.

c. Montrer que pour tout réel x,

$4f''(x)+4f'(x)=-5f(x)$.

3. Soit l'intégrale $I=\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)dx$.

On considère la fonction F telle que, pour tout réel x,

$F(x)=-\frac{1}{5}[4f'(x)+4f(x)]$.

a. Sachant que f vérifie (1), montrer que F est une primitive de f.

b. Etablir que

$$I=-\frac{4}{5}\left[f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]-\frac{4}{5}\left[f'\left(\frac{\pi}{2}\right)-f'\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

puis que $I=\frac{4}{5}\left(e^{\frac{\pi}{4}}+e^{-\frac{\pi}{4}}\right)$

c. Interpréter graphiquement ce résultat.

Exercice 38

Soit F une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 0$ et dont la dérivée est donnée par

$F'(x)=\frac{1}{x^2+1}$, pour tout x de $\mathbb{R}$. On suppose que cette fonction existe et on ne cherchera pas à donner une expression de $F(x)$. (C) est la courbe représentative de F dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1. Soit G, définie sur IR , par $G(x) = F(x) + F(-x)$.

a. Montrer que G est dérivable sur IR et calculer $G'(x)$.

b. Calculer $G(0)$ et en déduire que F est une fonction impaire.

2. Soit H définie sur $]0\,;+\infty[$ par $H(x) = F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right)$.

a. Montrer que H est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et calculer $H'(x)$.

b. Montrer que, pour tout x élément de$]0\,;+\infty[$,

$H(x) = 2F(1)$.

c. En déduire que $\lim_{x\to+\infty} F(x)=2F(1)$.

d. Qu'en déduit-on pour la courbe (C) ?

3. a. Démontrer que, pour tout x élément de $[0\,;1]$,

$\frac{1}{2}\le F'(x)\le 1$. En déduire que $\frac{1}{2}\le F(1)-F(0)\le 1$

puis une valeur approchée de $F(1)$. Quelle est la précision de cette approximation ?

b. Soit T la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ par

$T(x) = F(\tan x) - x$. Démontrer que T est une fonction constante sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$. En déduire la valeur exacte de $F(1)$.

4. Dresser le tableau de variation de F sur $\mathbb{R}$. Tracer la courbe (C), ses asymptotes et ses tangentes aux points d'abscisses -1, 0 et 1. Unités graphiques : 2 cm sur (Ox) et 4 cm sur (Oy). On prendra $F(1) = 0{,}78$.

Exercice 39

<u>Partie A</u>

On considère l'équation différentielle (E) : $y'+y=e^{-x}$.

1. Démontrer que la fonction u définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $u(x)=xe^{-x}$ est une solution de (E).

2. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y'+y=0$.

3. Démontrer qu'une fonction y, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, est solution de (E) si et seulement si $y - u$ est solution de (E_0).

4. En déduire toutes les solutions de (E).

5. Déterminer la fonction f_2, solution de (E), qui prend la valeur 2 en 0.

<u>Partie B</u>

k étant un nombre réel donné, on note f_k la fonction définie sur l'ensemble IR par : $f_k(x) = (x+k)e^{-x}$

.

On note C_k la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

1. Déterminer les limites de f_k en $-\infty$ et $+\infty$.

2. Calculer $f_k'(x)$ pour tout réel x.

3. En déduire le tableau de variations de f_k.

<u>Partie C</u>

1. On considère la suite d'intégrales (I_n) définie par

$I_0 = \int_{-2}^{0} e^{-x}dx$ et pour tout entier naturel $n \neq 1$ par :

$$I_n = \int_{-2}^{0} x^n e^{-x} dx\ .$$

a. Calculer la valeur exacte de l'intégrale I_0.

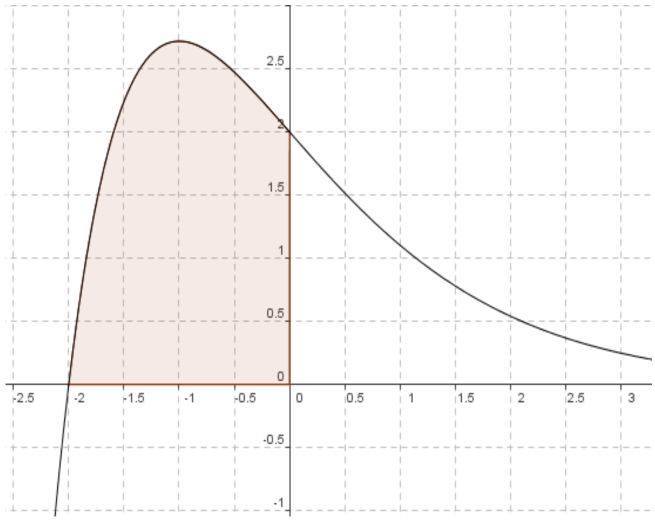
b. En utilisant une intégration par parties, démontrer l'égalité : $I_{n+1} = (-2)^{n+1}e^2 + (n+1)I_n$.

c. En déduire les valeurs exactes des intégrales I_1 et I_2.

2. Le graphique ci-dessous représente une courbe C_k qui est la représentation graphique d'une fonction f_k définie à la partie B.

a. À l'aide des renseignements donnés par le graphique, déterminer la valeur du nombre réel k correspondant.

b. Soit S l'aire de la partie hachurée (en unité d'aire) ; exprimer S en fonction de I_1 et I_0 et en déduire sa valeur exacte.



Exercice 40

1. Exprimer les limites suivantes sous forme d'intégrales.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} n\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n^2+i^2}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+i^2}}$

2. Montrer que

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^6+2^6+\ldots+n^6}{n^7} = \int_o^1 x^6\,dx,$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^r+2^r+\ldots+n^r}{n^{r+1}} = \int_0^1 x^r\,dx,$

pour tout nombre réel positif r