Calcul trigonométrique

I. Formules de transformations

Activité ①:

Le plan(P)est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ et (C) le cercle trigonométrique qui lui est associé.
Soient a et b deux réels. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls tels que $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$ et $\left(\vec{i};\vec{u}\right) \equiv b[2\pi]$ et $\left(\vec{i};\vec{v}\right) \equiv a[2\pi]$.

1. Déterminer la mesure de l'angle orientée $\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)$ en fonction de a et b.
2. Calculer par deux méthodes le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$.
3. En déduire que $\cos(a-b) = \cos a\ \cos b + \sin a\ \sin b$.
4. Montrer que $\cos(a+b) = \cos a\ \cos b - \sin a\ \sin b$.
5. En remarquant que $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin(x)$. Montrer que $\sin(a-b) = \sin a\ \cos b - \cos a\ \sin b$ et $\sin(a+b) = \sin a\ \cos b + \cos a\ \sin b$.

Propriété :

Soient a et b deux réels, on a :
- $\cos(a-b) = \cos a\ \cos b + \sin a\ \sin b$;
- $\cos(a+b) = \cos a\ \cos b - \sin a\ \sin b$;
- $\sin(a-b) = \sin a\ \cos b - \cos a\ \sin b$;
- $\sin(a+b) = \sin a\ \cos b + \cos a\ \sin b$.

Application ① :

1. Sachant que $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, calculer $\cos\frac{5\pi}{12}$, $\sin\frac{5\pi}{12}$, $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.
2. Soit x un réel. Montrer que:
   - ♠ $\sin x = \sin(x+\frac{\pi}{3}) - \sin(\frac{\pi}{3}-x)$.
   - ♠ $\cos x = \cos(x+\frac{\pi}{3}) + \cos(\frac{\pi}{3}-x)$.

Exercice ① :

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < \frac{\pi}{2}$, $0 < b < \frac{\pi}{2}$ et $\sin(a) = \cos(b) = \frac{1}{3}$.
Déterminer $a+b$.

Activité ②:

Soient a et b deux réels tels que $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer que si : $a - b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, alors $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1+\tan a\ \tan b}$.
2. Montrer que si : $a + b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, alors $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1-\tan a\ \tan b}$.

Propriété :

Soient a et b deux réels tels que $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
- Si $a - b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, alors $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1+\tan a\ \tan b}$.
- Si $a + b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, alors : $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1-\tan a\ \tan b}$.

Application ② :

Soit x un réel tel que $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$ et $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
Simplifier l'expression $\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right) \times \tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$.

Propriété :

Soit a un réel, on a :
- $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$.
- $\sin 2a = 2\sin a \cos a$.
- $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$.

Remarques

Pr. LATRACH ABDELKBIR

- $sin^2 a = \frac{1-cos\,2a}{2}$.

Application ③ :

1. Sachant que $\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8}$, calculer $\cos\frac{\pi}{8}$, $\sin\frac{\pi}{8}$ et $\tan\frac{\pi}{8}$.
2. Soit x un réel. Montrer que $1 + cos\,x + 2\,sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 2$.
3. Soit x un réel tel que $x \neq k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que $\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)} = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

II. Transformation de produits en sommes et de sommes en produits

1. Transformation de produits en sommes

Activité ③:

Soient a et b deux réels.
Simplifier les exressions suivantes :

a. $sin(a+b) + sin(a-b)$
b. $sin(a+b) - sin(a-b)$
c. $cos(a+b) + cos(a-b)$
d. $cos(a+b) - cos(a-b)$

Propriété :

Soient a et b deux réels, on a :

- $sin\,a\,cos\,b = \frac{1}{2}[sin(a+b) + sin(a-b)]$.
- $cos\,a\,sin\,b = \frac{1}{2}[sin(a+b) - sin(a-b)]$.
- $cos\,a\,cos\,b = \frac{1}{2}[cos(a+b) + cos(a-b)]$.
- $sin\,a\,sin\,b = \frac{1}{2}[cos(a+b) - cos(a-b)]$.

Application ④ :

1. Calculer $cos\left(\frac{\pi}{12}\right) cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $cos\left(\frac{\pi}{12}\right) sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.
2. Soit x un réel. Montrer que $sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}$.

2. Transformation de sommes en produits :

Soient a et b deux réels, on Pose $x = a+b$ et $y = a-b$. On a : $a = \frac{x+y}{2}$ et $b = \frac{x-y}{2}$.
On remplace a et b respectivement par $\frac{x+y}{2}$ et $\frac{x-y}{2}$ dans la propriété précédente, on trouve la propriété suivante :

Propriété :

Soient x et y deux réels, on a :

- $sin\,x + sin\,y = 2\,sin\left(\frac{x+y}{2}\right) cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$.
- $sin\,x - sin\,y = 2\,cos\left(\frac{x+y}{2}\right) sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$.
- $cos\,x + cos\,y = 2\,cos\left(\frac{x+y}{2}\right) cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$.
- $cos\,x - cos\,y = -2\,sin\left(\frac{x+y}{2}\right) sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$.

Application ⑤ :

1. Montrer que $sin\left(\frac{\pi}{12}\right) + sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2}$.
2. Soit x un réel. Montrer que $\cos 6x - \cos 2x = -4sin^2 2x\,cos 2x$.

III. Transformation de l'expression $acosx + bsinx$:

Préliminaire :

Soient a et b deux réels tels que $(a;b) \neq (0;0)$.

On a $a\,cos\,x + b\,sin\,x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} cos\,x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} sin\,x\right)$.

Or puisque $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$.

Pr. LATRACH ABDELKBIR

Donc $(\exists \alpha \in \mathbb{R}) : \begin{cases} \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$.

D'où $a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}(\cos x\cos\alpha + \sin x\sin\alpha)$.

Par suite $a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha)$.

Propriété :

Soient a et b deux réels tels que $(a;b) \neq (0;0)$, on a :
$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha)$ avec $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Application ⑥ :

Ecrire sous la forme $r\cos(x-\alpha)$ les expressions suivantes :
$A(x) = \cos x + \sin x$; $B(x) = \sqrt{3}\cos x - \sin x$; $C(x) = \sqrt{3}\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) - \sin(2x-\frac{\pi}{3})$.

Exercice ② :

On pose $A = \frac{\cos\frac{\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}}$.

1. Montrer que $\cos\frac{\pi}{12} + \sin\frac{\pi}{12} = \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{3}$.
2. Montrer que $\cos\frac{\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12} = \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{6}$.
3. En déduire la valeur du nombre A.
4. Déterminer la valeur du nombre $\tan\frac{\pi}{12}$.

IV. Equations et inéquations trigonométriques :

Propriété :

- $\cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ \quad ou \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{cases} /k \in \mathbb{Z}$
- $\sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ \quad ou \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases} /k \in \mathbb{Z}$
- $\tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \ /k \in \mathbb{Z}$

Application ⑦ :

1. Résoudre dans I les équations suivantes :
   a. $2\cos x - \sqrt{3} = 0$; $I = [-\pi, 2\pi]$.
   b. $\sqrt{2}\sin x + 1 = 0$; $I = [0,2\pi]$.
   c. $\tan x = \sqrt{3}$; $I = [-\pi,\pi]$.
   d. $\sqrt{3}\cos x - \sin x = \sqrt{2}$; $I = [-\pi,\pi]$.
2. Résoudre dans $\left[-\pi,\frac{\pi}{2}\right]$ l'équation $\sqrt{3}\cos x - \sin x > \sqrt{2}$.

Exercice ③:

Soit x un réel. On pose : $A(x) = 2\sqrt{3}\sin^2 x - \sin 2x - \sqrt{3}\sin x + \cos x$.

1. Calculer $A\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et $A\left(\frac{\pi}{3}\right)$.
2. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) : A(x) = 2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)(1-2\sin x)$.
3. a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $A(x) = 0$.
   b. En déduire les solutions de l'équation $A(x) = 0$ sur $]0,2\pi]$ puis représenter les solutions sur un cercle trigonométrique.
4. Résoudre dans $]0,2\pi]$ l'équation $A(x) > 0$.