Notions de logique mathématique

Remarques

Pr. Latrach ABDELKBIR

I. Proposition –Fonction propositionnelle

Activité ①:

Mettre une croix (x) dans la case qui convient :

Textes mathématiques	Vrai	Faux	On ne peut pas décider sa vérité	N'a pas de sens
• 15×2				
• $12 \times 3 + 4 = 20$				
• $-6 \notin \mathbb{N}$				
• 2 est une racine du polynôme $P(x) = x^2 - x - 2$.				
• Chaque nombre impair et un nombre premier.				
• $(x \in \mathbb{Z})$: $x + 5 \geq 0$.				
• Soient x, y de $\mathbb{Z}$, on a $2x - y = 1$				

Définitions :

- ***Une proposition*** (ou assertion) est une phrase ou une expression qui a un sens et qui est soit vraie, soit fausse, mais pas les deux en même temps.
  On note souvent une proposition par les lettres P, Q ou R ...
- On appelle ***fonction propositionnelle*** tout énoncé qui contient une variable (ou plusieurs variables) d'un ensemble, elle devienne proposition chaque fois qu'on remplace la variable par un élément de cet ensemble.

Exemples :

- " Le nombre 2022 est pair " est une proposition vraie.
- " Tout carrée est un parallélogramme " est une proposition vraie.
- " Tout nombre pair es divisible par 4 " est une proposition fausse.
- " $x + y = z$ " n'est pas une proposition.
- " P(x) : $x \in \mathbb{R}, x^2 - x < 0$ " est une fonction propositionnelle.

$P(0)$ est une proposition fausse mais $P\left(\frac{1}{2}\right)$ est une proposition vraie

- " $P(n,m)$: $n + m = 10$ avec n, m $de\mathbb{N}$ " est une fonction propositionnelle

$P(4;6)$ est une proposition vraie mais $P(2;7)$ est une proposition est fausse.

Application ① :

Déterminer la vérité de chacun des propositions suivantes :

- P: " $\left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{7}{3}$ " .
- Q: "$\sqrt{3+\sqrt{5}} \times \sqrt{3-\sqrt{5}} \in \mathbb{N}$".
- R :"L'équation $x^2 - 3x + 5 = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$".

II. Les quantificateurs :

Activité ②:

1. Mettre une croix (x) dans la case qui convient :

Proposition	Vrai	Faux
• Le carré de tout nombre réel est positif.		
• Il existe un nombre réel inférieur strictement à 1.		
• Tout nombre réel est décimal.		
• L'équation $x^2 = 0$ admet une unique solution reélle.		

Les propositions précédentes apparaissent sous forme de phrases, mais on peut les écrire à l'aide des symboles.
Si on symbolise "pour tout " ou " quel que soit " avec le symbole $\forall$ et " Il existe au

moins" avec le symbole ∃, alors la première proposition du tableau devient $(\forall x \in \mathbb{R}): x^2 \geq 0$ et la deuxième devient $(\exists x \in \mathbb{R}): x < 1$.
Les symboles ∀ et ∃ sont appelés les quantificateurs.

2. Compléter le tableau suivant en utilisant les symboles ∀ et ∃.

Proposition	***Proposition à l'aide des quantificateurs***
• Tous les entiers naturels sont positifs	•
•	• $(\exists x \in \mathbb{R}): x^2 = -1$
• L'équation $\mathbf{3x - 2 = 0}$ admet une solution réelle.	•
• Tout nombre réel est décimal.	•
•	• $(\forall x \in \mathbb{R}): x^2 - x + 1 > 0$
• Pour tout réel x, il existe au moins un entier naturel $\boldsymbol{n}$ tel que $\boldsymbol{x < n + 1}$	•
• $(\forall m \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N}) : m = 2n$	•

Définitions :

Soit $P(x)$ une fonction propositionnelle tel que x est un élément d'un ensemble E.

- Si $P(x)$ est vraie pour tout élément de E on écrit : $(\forall x \in E): P(x)$.

Le symbole "∀" s'appelle ***quantificateur universel*** et il se lit : ***pour tout*** ou ***quel que soit***.

- S'il existe au moins un élément de E pour lequel $P(x)$ est vraie on écrit : $(\exists x \in E): P(x)$.

Le symbole "∃" s'appelle ***quantificateur existentiel*** et il se lit : ***il existe au moins***.

- S'il existe un unique élément de E pour lequel $P(x)$ est vraie on écrit : $(\exists! x \in E): P(x)$.

Le symbole "∃!" s'appelle ***quantificateur existentiel de l'unicité*** et il se lit : ***il existe un unique***.

Exemples :

- P: "$(\forall x \in \mathbb{R}): 2x + 1 = 0$" est une proposition fausse parce que *si* $x = 0$, *alors* $2 \times 0 + 1 = 0$ est faux.
- Q: "$(\exists n \in \mathbb{N}): 2n - 4 = 0$" est une proposition vraie car l'entier *n= 2* vérifie $2n - 4 = 0$.
- R: "$(\exists! x \in \mathbb{R}): x^2 - 2x + 1 = 0$" est une proposition vraie parce que 1 est la seule solution de l'équation $x^2 - 2x + 1 = 0$.

Application ② :

Réécrire les propositions suivantes en utilisant les quantificateurs logiques.

- P_1 : "La valeur absolue de tout nombre réel non nul est strictement positive".
- P_2 : "Il existe au moins un nombre réel x tel que $2x^2 - 3x = 0$".
- P_3 : "L'équation $x - 2\sqrt{x} + 1 = 0$ admet une unique solution réelle".
- P_4 : "Le polynôme $P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ admet au moins une racine".
- P_5 : "Pour tout nombre réel x, il existe un unique entier N tel que $N \leq x < N + 1$".
- P_6 : "Il existe un entier multiple de tous les autres".

Remarques :

- ✓ On peut inverser deux quantificateurs universels ou deux quantificateurs existentiels.
- ✓ On ne peut a priori pas inverser un quantificateur existentiel avec un quantificateur universel.

Exemples :

- Les propositions "$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}): x + y = 2$" et "$(\forall y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}): x + y = 2$" ont la même valeur de vérité.

Pr. Latrach ABDELKBIR

- Les propositions "$(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}): x + y = 2$" et "$(\forall y \in \mathbb{R})\ (\exists x \in \mathbb{R}) : x + y = 2$" n'ont pas la même valeur de vérité. La première est fausse mais la deuxième est vraie.

Exercice ①:

Déterminer la valeur de vérité de chacun des propositions suivantes :

- P_1 : "$(\exists x \in \mathbb{R}): x^2 + x - 1 = 0$".
- P_2 : "$(\forall x \in \mathbb{R}): x^2 + 3x + 7 < 0$".
- P_3 : "$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}): x \leq y$".
- P_4 : "$(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}): x \leq y$".
- P_5 : "$(\forall y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}): x \leq y$".
- P_6 : "$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})$": $x \leq y$".

III. OPERATIONS SUR LES PROPOSITIONS :

1. La négation d'une proposition :

Définition :

La négation d'une proposition P, noté $\bar{P}$ ou $\urcorner P$, est la proposition qui vraie si P est fausse et qui est fausse si P est vraie.

P	$\bar{P}$	
V	**F**	**Ce tableau est appelé le tableau de vérité de la négation.**
F	**V**	

Exemples :

- La négation de la proposition $3 > 2$ est $3 \leq 2$.
- La négation de la proposition $(-2)^2 = -4$ est $(-2)^2 \neq -4$.
- La négation de la proposition $-3 \in \mathbb{N}$ est $-3 \notin \mathbb{N}$.

Propriété :

- La négation de la proposition " $(\forall x \in E): P(x)$ " est " $(\exists x \in E) : \bar{P}(x)$" .
- La négation de la proposition " $(\exists x \in E): P(x)$ " est " $(\forall x \in E) : \bar{P}(x)$" .
- La négation de la proposition " $(\forall x \in E)(\exists y \in E) : P(x, y)$ " est : " $(\exists x \in E)(\forall y \in E) : \bar{P}(x, y)$" .
- La négation de la proposition : " $(\exists x \in E)(\forall y \in E) : P(x, y)$ " est : " $(\forall x \in E)(\exists y \in E) : \bar{P}(x, y)$" .

Remarques :

- ✓ Les propositions P et $\bar{\bar{P}}$ ont même valeur de vérité.
- ✓ On a le tableau suivant :

Le symbole	$>$	$<$	$\geq$	$\leq$	$=$	$\in$
Sa négation	$\leq$	$\geq$	$<$	$>$	$\neq$	$\notin$

Exemples :

La proposition P	**La négation $\bar{P}$**
$(\forall x \in \mathbb{R}): x \geq 1$	$(\exists x \in \mathbb{R}): x < 1$
$(\exists n \in \mathbb{N}): \sqrt{n} \in \mathbb{N}$	$(\forall n \in \mathbb{N}): \sqrt{n} \notin \mathbb{N}$
$(\forall x \in \mathbb{R}): x^2 + x + 1 \geq 0$	$(\exists x \in \mathbb{R}): x^2 + x + 1 < 0$
$(\forall n \in \mathbb{N})\ (\exists m \in \mathbb{N}) : m \geq n$	$(\exists n \in \mathbb{N})\ (\forall m \in \mathbb{N}) : m < n$

Application ③ :

Compléter le tableau suivant :

La proposition P	**La négation $\bar{P}$**
$(\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 + 2x + 1 \geq 0$	•
$(\forall x \in \mathbb{N}) : x^2 - 2x < 0$	•
$(\forall x \in \mathbb{Q}): \sqrt{x} \notin \mathbb{Q}$	•

Pr. Latrach ABDELKBIR

• $(\exists x \in \mathbb{R}): x \in \mathbb{Q}$	•
• $(\exists x \in \mathbb{N})$: x est pair	•
• $(\exists x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N}): x < y$	•
• $(\forall x \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{Z}) : x - y = 3$	•
• Tout triangle est rectangle	•
• $(\forall x \in \mathbb{Q})(\forall y \in \mathbb{Z}): x \times y \in \mathbb{Z}$	•

2. La disjonction

Définition :

La disjonction de deux propositions P et Q est la proposition qui est vraie si au moins l'une des deux propositions est vraie on la note $\boldsymbol{P}$ ***ou*** $\boldsymbol{Q}$ ou $\boldsymbol{P \vee Q}$.

Tableau de vérité de P *ou* Q :

P	Q	P ou Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemples :

- La proposition : $(-5 \geq 2)$ ou $(5 \geq 2)$ est vraie.
- La proposition : $(3 + 2 = 6)$ ou $(-3 \geq 1)$ est fausse.
- La proposition : $(-5 \in \mathbb{R})$ ou (3 divise 12) est vraie.
- La proposition : $(\exists x \in \mathbb{R}): x^2 = -1$ ou $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ est fausse.

3. La conjonction

Définition :

La conjonction de deux propositions P et Q est la proposition qui est vraie uniquement si les deux propositions P et Q sont vraies en même temps on la note : $\boldsymbol{P}$ ***et*** $\boldsymbol{Q}$ ou $\boldsymbol{P \wedge Q}$.

Tableau de vérité de (P et Q) :

P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemples :

- La proposition : $(-5 \geq 2)$ et $(5 \geq 2)$ est fausse.
- La proposition : $(3 + 2 = 6)$ et $(-3 \geq 1)$ est fausse.
- La proposition : $(-5 \in \mathbb{R})$ et (3 divise 12) est vraie.
- La proposition : $(\exists x \in \mathbb{R}): x^2 = -1$ et $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ est fausse.

Application ④:

Déterminer la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :

- P_1 : (3 est impair) et $(3 = 5)$.
- P_2 : $(4 \times 8 = 20)$ *ou* (10 *est pair*).
- P_3 : $(9 - 3 = 6)$ *et* $(-1 \in \mathbb{Z})$.
- P_4 : $(-4 \in \mathbb{N})$ ou $(\forall x \in \mathbb{R}: x^2 + 1 > 0)$.

Remarque (lois de Morgane)

Soient P et Q deux propositions.

- ✓ La négation de (P et Q) est ($\overline{P}$ ou $\overline{Q}$).
- ✓ La négation de (P ou Q) est ($\overline{P}$ et $\overline{Q}$).

Exemples :

- La négation de « $(0 \geq 2)$ et $(1 + 5 = 3)$» est : « $(0 < 2)$ ou $(1 + 5 \neq 3)$ ».

Pr. Latrach ABDELKBIR

- La négation de « $(5 \in \mathbb{N})$ ou $(\forall x \in \mathbb{R}: x^2 > 0)$» est : « $(5 \notin \mathbb{N})$ et $(\exists x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 0)$ ».

Application ⑤:

Nier les deux propositions suivantes :

- P: "$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}): x \leq y \text{ ou } x \geq y$".
- Q: "$(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}): y^2 = x \text{ et } x > 0$" .

4. L'implication

Définition :

L'implication de deux propositions P et Q est la proposition qui est fausse seulement dans le cas P est vraie et Q est fausse. On la note par $P \Rightarrow Q$ et se lit : P implique Q.

Tableau de vérité de $P \Rightarrow Q$:

P	*Q*	$P \Rightarrow Q$
V	*V*	*V*
V	*F*	*F*
F	*V*	*V*
F	*F*	*V*

Exemples :

- La proposition $2 > 1 \Rightarrow 2 + 3 = -1$ est fausse.
- La proposition $3 \times 2 = 9 \Rightarrow 5 - 1 = 20$ est vraie.
- La proposition $(3^2 = 9) \Rightarrow 4 - 1 = 3$ est vraie.
- La proposition $2 < 0 \Rightarrow 2 + 3 = 5$ est vraie.

Remarques

- ✓ P ⇒ Q signifie si P est vraie, alors Q est vraie.
- ✓ L'implication Q ⇒ P est appelée l'implication réciproque de l'implication P ⇒ Q.
- ✓ Pour montrer que $P \Longrightarrow Q$ est vrai, on suppose que P est vraie, et on montre que Q est vraie.
- ✓ Les propositions $P \Rightarrow Q$ et $(\bar{P} \text{ou } Q)$ ont la même valeur de vérité.

Exemples :

- "$x = 2 \Rightarrow x^2=4$" signifie : "si $x = 2$, alors $x^2 = 4$ " et c'est une proposition vraie.
- " $x^2=4 \Rightarrow x = 2$" est l'implication réciproque de " $x = 2 \Rightarrow x^2=4$" et c'est une proposition fausse.
- Soit x un réel, Montrons que : $|x| \leq 3 \Longrightarrow |2x - 4| \leq 10$

On a :
$$\begin{aligned} |x| \leq 3 &\Longrightarrow -3 \leq x \leq 3 \\ &\Longrightarrow -6 \leq 2x \leq 6 \\ &\Longrightarrow -10 \leq 2x - 4 \leq 2 \\ &\Longrightarrow -10 \leq 2x - 4 \leq 10 \\ &\Longrightarrow |2x - 4| \leq 10. \end{aligned}$$

Donc : $|x| \leq 3 \Longrightarrow |2x - 4| \leq 10$.

Application ⑥:

1. Soit n ∈ ℕ. Montrer que $n \text{ pair} \Longrightarrow n^2 \text{ pair}$.
2. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$: $\left(\frac{1}{1+\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x} \Longrightarrow x = 0\right)$.

Exercice ②:

Soient x et y de $\mathbb{R}$. Montrer que $1 + xy = x + y \Longrightarrow x = 1 \text{ ou } y = 1$.

Exercice ③:

1. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}): 3 \leq x \leq 5 \Rightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{x-1} \leq \frac{1}{2}$.
2. **a.** Montrer que $(\forall a \in \mathbb{R})$ $(\forall b \in \mathbb{R})$: $a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = b = 0$.

   b. En déduire $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$ $(\forall y \in \mathbb{R}^+)$: $x + y + 2 = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} \Rightarrow x = y = 1$.

5. L'équivalence

Définition :

L'équivalence de deux propositions P et Q est la proposition (P ⇒ Q *et* Q ⇒ P) qu'on

Pr. Latrach ABDELKBIR

note par $P \Leftrightarrow Q$ et se lit « P est équivalente à Q » ou bien « P si et seulement si Q ».
- $P \Leftrightarrow Q$ est vraie seulement si P et Q ont même valeur de vérité.

Tableau de vérité de $P \Leftrightarrow Q$:

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Exemple :

Soient a et b deux nombres réels
Si $ab = 0$, alors $a = 0$ ou $b = 0$.
Inversement, si $a = 0$ ou $b = 0$, alors $ab = 0$.
Donc on a l'équivalence suivant $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$.

Application ⑦:

Déterminer la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :
- P_1 : 3 est $impair \Leftrightarrow 3 = 5.$
- P_2 : $4 \times 8 = 20 \Leftrightarrow 10$ *est pair*.
- P_3 : $-1 \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 9 - 3 = 6.$
- P_4 : $-4 \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}): x^2 + 1 > 0.$

IV. Lois logiques

Définition :

Une loi logique est une proposition qui est vraie quel que soit la vérité des propositions que la constitue.

Exemple :

P et Q sont deux propositions. Montrons que $\urcorner(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (\urcorner P \Leftrightarrow Q)$ est une loi logique.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$	$\urcorner(P \Leftrightarrow Q)$	$\urcorner P \Leftrightarrow Q$	$\urcorner(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (\urcorner P \Leftrightarrow Q)$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	V	V
F	V	F	V	V	V
F	F	V	F	F	V

La proposition $\urcorner(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (\urcorner P \Leftrightarrow Q)$ est toujours vraie quelles que soient les valeurs de vérité de P et Q. Donc elle est une loi logique.

Application ⑧:

Montrer que les propositions suivantes sont des lois logiques :
- $P \Leftrightarrow \urcorner(\urcorner P)$
- $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\urcorner Q \Rightarrow \urcorner P)$
- $[P \text{ ou } (Q \text{ et } R)] \Leftrightarrow [(P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)]$
- $\urcorner(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow P \text{ et } \urcorner Q$
- $[P \text{ et } (Q \text{ ou } R)] \Leftrightarrow [(P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)]$
- $[(P \Rightarrow Q) \text{et } (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

V. Raisonnements mathématiques

1. Raisonnement par contre-exemple :

Propriété :

Pour prouver que la proposition "$(\forall x \in E): P(x)$" est fausse, il suffit de prouver que la proposition $(\exists x \in E): \overline{P(x)}$ est vraie.

Exemple :

Montrons que "$(\forall x \in \mathbb{R}): 2x - 1 = 0$" est fausse.
Il suffit de montrer que "$(\exists x \in \mathbb{R}): 2x - 1 \neq 0$" est vraie.
On a pour $x = 0 : 2 \times 0 - 1 \neq 0$
Alors "$(\exists x \in \mathbb{R}): 2x - 1 \neq 0$" est vraie.
Par suite "$(\forall x \in \mathbb{R}): 2x - 1 = 0$" est fausse.

Pr. Latrach ABDELKBIR

✍ **Application ⑨:**

Montrer que les propositions suivantes sont fausses :

- P_1 : " $(\forall x \in \mathbb{R}): x + 1 = 2$".
- P_2 : " $(\forall x \in \mathbb{R}^*): x + \frac{1}{x} \geq 2$".
- P_3 : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+): \sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

2. Raisonnement par la contraposée :

Propriété :

Pour démontrer l'implication $P \Rightarrow Q$, on peut essayer de démontrer la contraposée $7Q \Rightarrow 7P$ qui est parfois plus simple.

Exemple :

Montrons que $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+): x \neq y \Rightarrow x^3 + 4x \neq y^3 + 4y$.

Essayons de montrer $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+): x^3 + 4x = y^3 + 4y \Rightarrow x = y$.

On a $x^3 + 4x = y^3 + 4y \Rightarrow x^3 - y^3 + 4x - 4y = 0$

$\Rightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2) + 4(x - y) = 0$

$\Rightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2 + 4) = 0$

$\Rightarrow x - y = 0$ car $x^2 + xy + y^2 + 4 \neq 0$ du fait que $x \in \mathbb{R}^+$et $y \in \mathbb{R}^+$.

$\Rightarrow x = y$.

✍ **Application ①⓪:**

1. Montrer que : $(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R})$: $a + b > 1 \Longrightarrow a > \frac{1}{2}$ ou $b > \frac{1}{2}$.
2. Montrer que : $(\forall x > 1)(\forall y > 1): x \neq y \Longrightarrow \frac{x}{1+x^2} \neq \frac{y}{1+y^2}$.

3. Raisonnement par les équivalences successives :

Propriété :

Soient P ,R et Q trois propositions.
Le raisonnement par les équivalences successives se basé sur la loi logique suivant :

$$[(P \Leftrightarrow R) et\ (R \Leftrightarrow Q)] \Longrightarrow (P \Leftrightarrow Q)$$

Exemple :

Montrons que $(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R}): a^2 + b^2 = 2ab \Leftrightarrow a = b$

On a : $a^2 + b^2 = 2ab \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 = 0$

$\Leftrightarrow (a - b)^2 = 0$

$\Leftrightarrow a - b = 0$

$\Leftrightarrow a = b$.

✍ **Application ①①:**

1. Montrer que : $(\forall x \neq -1)(\forall y \neq -1): \frac{x}{1+x} = \frac{y}{1+y} \Leftrightarrow x = y$.
2. Montrer, pour tout x de $\mathbb{R}^+$, que $\left(\sqrt{2x+2} = 1 + \sqrt{x}\right) \Leftrightarrow (x = 1)$.
3. Montrer, pour tout x de $[1; +\infty[$, que $\frac{\sqrt{x-1}}{x} \leq \frac{1}{2}$.

✍ **Exercice ④:**

1. Soit x un réel. Montrer que : $\frac{2}{\sqrt{1+x^2}} = 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$.
2. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$: $|x - 1| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{5} < \frac{1}{x+1} < \frac{2}{3}$.
3. Soient $a \in [1; +\infty[$ et $b \in [4; +\infty[$. Montrer que
$$\sqrt{a-1} + 2\sqrt{b-4} = \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow a = 2\ et\ b = 8.$$

4. Raisonnement par disjonction des cas :

Propriété :

Soient P ,R et Q trois propositions.
Pour montrer que $[(P\ ou\ Q) \Longrightarrow \text{R}]$ on montre parfois $[P \Longrightarrow \text{R}$ et $Q \Longrightarrow \text{R}]$.

Exemple :

Montrons que $(\forall x \in \mathbb{R}): \sqrt{1+x^2} + x > 0$.

- Si $x \geq 0$, alors $\sqrt{1+x^2} + x > 0$ du fait que $\sqrt{1+x^2} > 0$.

Pr. Latrach ABDELKBIR

- Supposons que $x < 0$.

On a $1 + x^2 > x^2 \Rightarrow \sqrt{1+x^2} > \sqrt{x^2}$

$\Rightarrow \sqrt{1+x^2} > |x|$

$\Rightarrow \sqrt{1+x^2} > -x$

$\Rightarrow \sqrt{1+x^2} + x > 0$.

Donc dans tous les cas de x, $\sqrt{1+x^2} + x > 0$.

Par suite $(\forall x \in \mathbb{R})$: $\sqrt{1+x^2} + x > 0$.

Application ⑩②:

Soit $n \in IN$. Montrer que $n^2 + n$ est pair.

Exercice ⑤:

Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})$: $|x-1| \leq x^2 - x + 1$.

5. Raisonnement par absurde :

Propriété :

Soient P et Q deux propositions.
Le raisonnement par absurde est basé sur la loi logique $[\bar{P} \Rightarrow (Q \text{ et } \bar{Q})] \Rightarrow P$.

Exemple :

Soit n un entier naturel tel que n^2 est pair. Montrons que n est pair :
Supposons n est impair, alors $(\exists k \in IN)$: $n = 2k+1$.
Donc $n^2 = 4k^2 + 4k + 1$ est impair, ce qui est contredit le fait que n^2 est pair.
D'où d'après le principe du raisonnement par l'absurde, n est pair.

Application ⑩③:

Soient x, y et z de $\mathbb{R}_+^*$ tels que $x + y + z < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ et $xyz > 1$.

Montrer que $x \neq 1, y \neq 1$ et $z \neq 1$.

6. Raisonnement par récurrence

Propriété :

Le principe de récurrence permet de montrer qu'une fonction propositionnelle $P(n)$ vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$.
La démonstration par récurrence se déroule en trois étapes :

- **Initialisation** : On prouve que $P(n)$ est vraie pour $n = n_0$.
- **Hérédité** : On prend $n \geq n_0$ donné on suppose que $P(n)$ est vraie, et on démontre que $P(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion** : On conclut que, pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.

Exemple :

Montrons que 3 divise $4^n - 1$ pour tout $n \in IN$.
Pour $n = 0$, $4^0 - 1 = 0$ et 3 divise 0. Donc la propriété est vraie pour $n = 1$.
Soit $n \in IN$, supposons que 3 divise $4^n - 1$.
Montrons que 3 divise $4^{n+1} - 1$:
$4^{n+1} - 1 = 4 \times 4^n - 1 = 3 \times 4^n + 4^n - 1$.
D'après l'hypothèse de la récurrence, il existe un entier naturel k tel que $4^n - 1 = 3k$.
Donc $4^{n+1} - 1 = 3 \times 4^n + 3k = 3(4^n + k) = 3k'$ et $k' \in IN$.
Ce qui entraine que 3 divise $4^{n+1} - 1$.
D'où d'après le principe de récurrence on conclut que 3 divise $4^n - 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

Application ⑩④:

1. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$: $2/5^n - 3^n$
2. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$: $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
3. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$: $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

Pr. Latrach ABDELKBIR