Chapter 2

Les ensembles

Contenus

- Définition d'un ensemble par compréhension et par extension, partie d'un ensemble ;
- Ensemble des parties d'un ensemble ; la notation $\mathcal{P}(E)$;
- Inclusion ; égalité ; complémentaire ;
- Intersection, réunion et différence de deux ensembles, lois de Morgan ;
- Propriétés de l'intersection et de la réunion ;
- Produit cartésien de deux ensembles.

Capacités attendues

- Déterminer un ensemble par compréhension ou par extension ;
- Maitriser la relation entre les règles de la logique et les opérations sur les ensembles.

I Notion d'ensemble

1 Définition et exemples

Exemples

$\mathbb{N}$ ensemble des entiers naturels, $\{0;1;2;3;4;.......\}$.
$\mathbb{Z}$ ensemble des entiers relatifs,$\{.......;-3;-2;-1;0;1;2;3;.......\}$.
$\mathbb{D}$ ensemble des décimaux, c'est-à-dire des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $\dfrac{a}{10^n}$ où a et n sont des entiers relatifs. Les décimaux comportent les entiers et les nombres qui peuvent s'écrire sous une forme décimale avec un nombre fini de chiffres non nuls après la virgule .
L'ensemble des diviseurs de 12 est : $D_{12} = \{-12;-6;-4;-3;-2;-1;1;2;3;4;6;12\}$.
L'ensemble des lettres constituant le mot maths est : $\{t;h;m;a;s\}$.

Définition

Nous appellerons ensemble une collection d'objets. Chacun de ces objet est appelé élément de l'ensemble.
Si un élément a fait partie d'un ensemble E, on dira que a appartient à E, ou E contient a, et on notera : $a \in E$ Si a n'appartient pas à E, on notera : $a \notin E$

2 Construire des ensembles

a Définition en extension

On peut définir un ensemble fini en énumérant les éléments qui le constituent.
Par exemple : $\{1;2;3;4;5\}$ est un ensemble constitué des 5 éléments 1, 2, 3, 4 et 5.
On utilisera des accolades pour délimiter les éléments de l'ensemble. L'ordre des éléments, et le fait qu'ils soient redoublés n'a aucune importance dans la définition de l'ensemble.

b Définition en compréhension

On s'appuie sur un ensemble déjà existant, dont on sélectionne les éléments vérifiant une certaine propriété.
Par exemple :

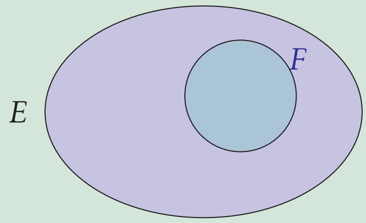
- $\{n \in \mathbb{N} \;/\; \exists\, k \in \mathbb{N} \quad n = 2k+1\}$ est l'ensemble des entiers impairs.
- $[a\ ,\ b] = \{x \in \mathbb{R} /\ a \leqslant x \leqslant b\}$
- $\mathbb{Q} = \left\{\dfrac{p}{q} \;/\; p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{N}^*\right\}$

c un ensemble particulier

On considère en mathématiques, qu'il y a un unique ensemble, appelé ensemble vide, qui ne contient aucun élément, et qui est noté $\varnothing$ Si on considère un élément x quelconque, on a forcément $x \notin \varnothing$

II Inclusion d'ensembles

Définition On dit qu'un ensemble F est inclus dans un ensemble E si tout élément de F appartient à E.



On note : $F \subset E$ et on lit :

- F est inclus dans l'ensemble E.
- F est contenu dans l'ensemble E.
- F est une partie de l'ensemble E.
- F est un sous ensemble de l'ensemble E.

Et on note aussi $F \not\subset E$ et on lit : F n'est pas inclus dans l'ensemble E.
$F \not\subset E$ est la négation de $F \subset E$.
$F \not\subset E$ signifie qu'il existe au moins un élément de F qui n'appartient pas à E.

Remarques

- D'après la définition précédente, tout ensemble E est inclus dans lui même : $E \subset E$.
- Lorsque le sous-ensemble F est strictement inclus dans l'ensemble E on dit que F est un sous-ensemble propre de E . On doit alors le préciser par la conjonction des deux propriétés : $F \subset E$ et $F \neq E$.
- L'ensemble vide est contenu dans tout ensemble E : $\varnothing \subset E$
- Ne pas confondre l'appartenance – qui est une relation entre un élément et un ensemble – et l'inclusion – qui est une relation entre deux ensembles.
  Par exemple, on aura a $x \in \{x; y; z; t\}$ mais $\{x\} \subset \{x; y; z; t\}$.
- soient E et F deux sous-ensembles de A, on a : $F \subset E \Leftrightarrow (\forall x \in A, \quad x \in F \Rightarrow x \in E)$

Exemples

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$; $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$; $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$; $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
- $\{n \in \mathbb{N} \ / \ \exists p \in \mathbb{N} \quad n = 2p\} \subset \mathbb{N}$.
- $\{2; 3; 4\} \subset \{2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.

Méthode

- Pour démontrer qu'un ensemble F est inclus dans un ensemble E on prend un élément x quelconque de F , on utilise les hypothèses qui définissent l'ensemble F et on démontre que x vérifie les propriétés qui définissent l'ensemble E La démonstration prend donc la structure suivante :
  Soit x un élément de l'ensemble F
  ....
  (raisonnement)
  ....
  donc x est un élément de l'ensemble E
  Conclusion : $F \subset E$
- Pour démontrer que $F \not\subset E$, Il suffit de trouver un élément de F qui n'est pas dans l'ensemble E (un contre-exemple suffit).

1 Égalité de deux ensembles

Définition Deux ensembles sont égaux s'ils ont exactement les mêmes éléments. Cela se traduit par deux inclusions simultanées :

$$E = F \Leftrightarrow (F \subset E \quad et \quad E \subset F)$$

Méthode

Pour démontrer l'égalité de deux ensembles E et F il faudra faire deux démonstrations d'inclusion, d'une part pour démontrer $F \subset E$ d'autre part pour démontrer $E \subset F$.

Exemple On considère les deux ensembles suivants :

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \ / \ \left|1 - \frac{x}{2}\right| < 1 \right\} \qquad et \qquad B =]0\ ;\ 4[$$

$$x \in A \Leftrightarrow \left|1 - \frac{x}{2}\right| < 1 \ \Leftrightarrow -1 < 1 - \frac{x}{2} < 1 \ \Leftrightarrow -2 < -\frac{x}{2} < 0 \ \Leftrightarrow 0 < \frac{x}{2} < 2 \ \Leftrightarrow 0 < x < 4 \ \Leftrightarrow x \in B$$

2 Transitivité de l'inclusion

Propriété A, B, et C étant trois ensembles, si le premier ensemble A est contenu dans le second B et si le deuxième ensemble B est contenu dans le troisième C, alors le premier ensemble A est contenu dans le troisième C ; on dit que l'inclusion est transitive .
On a : $A \subset B \quad et \quad B \subset C \quad \Rightarrow \quad A \subset C$

III Opérations sur les ensembles

1 Ensemble des parties d'un ensemble

Définition Soit E un ensemble.
L'ensemble des parties de E est l'ensemble, généralement noté $\mathcal{P}(E)$, dont les éléments sont les sous-ensembles de E et on a : $A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow A \subset E$.

Remarque

$\mathcal{P}(E)$ n'est jamais vide car l'ensemble vide $\varnothing$ et E sont toujours des parties de E :

$$\varnothing \in \mathcal{P}(E) \quad \text{et} \quad E \in \mathcal{P}(E) .$$

Exemples

- Soit $E = \{a; b; c\}$ un ensemble de trois éléments. Les sous-ensembles de E sont :
  - $\rightarrow$ $\varnothing$ et E .
  - $\rightarrow$ les trois singletons $\{a\}$; $\{b\}$ et $\{c\}$.
  - $\rightarrow$ les trois paires $\{a; b\}$; $\{a; c\}$ et $\{b; c\}$.

  L'ensemble des parties de E est donc :

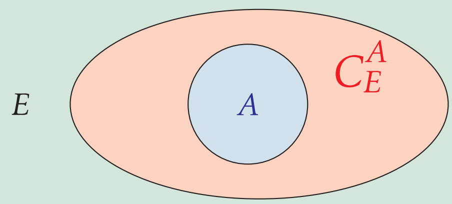
  $$\mathcal{P}(E) = \{\varnothing; \{a\} ; \{b\} ; \{c\} ; \{a; b\} ; \{a; c\} ; \{b; c\} ; E\}$$

- $\mathbb{Z} \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$.
- $]-\pi \; ; \; \pi] \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

2 Complémentaire d'un ensemble

Définition Si A est une partie de l'ensemble E, on appelle complémentaire de A dans E l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A.
On note le plus souvent le complémentaire de A par C_E^A ,et aussi parfois par $\overline{A}$.

$$C_E^A = \{x \in E \; / \; x \notin A\}$$



Exemples

1. $C_{\mathbb{N}}^{\{0\}} = \mathbb{N}^{\star}$.

2. $C_E^{\varnothing} = E$.

3. $\overline{\overline{A}} = A$

4. Si $A = \{a; b\}$ et $E = \{a; b; c; d; e\}$ alors : $C_E^A = \{c; d; e\}$

Propriété Soit E un ensemble et soient A et B deux parties de E. On a : $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$

Démonstration : On a : $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in E, \quad x \in A \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow (\forall x \in E, \quad x \notin B \Rightarrow x \notin A) \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$.

3 Intersection d'ensembles

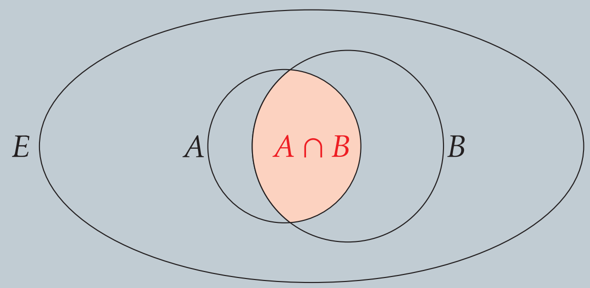
Définition Soit E un ensemble et soient A et $B \in \mathcal{P}(E)$.
On appelle intersection de A et de B et on note $A \cap B$ l'ensemble $\{x \in E \ / \ x \in A \ et \ x \in B\}$

Exemples

- Soient D_{12} et D_{16} respectivement l'ensemble des diviseurs de 12 et celui de 16 .
  On a $D_{12} = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$ et $D_{16} = \{1; 2; 4; 8; 16\}$.
  Donc $D_{12} \cap D_{16} = \{1; 2; 4\}$
- Soit $A = \{2n \ , \ n \in \mathbb{N}\}$ et soit $B = \{3n \ , \ n \in \mathbb{N}\}$
  On a $A \cap B = \{6n \ , \ n \in \mathbb{N}\}$

Remarques

- Schématiquement, cela donne :



- $A \cap B$ est constitué des éléments communs à l'ensemble A et à l'ensemble B.
- En pratique on a : $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \ et \ x \in B$

Propriétés

Soit E un ensemble.
Soient A, B et$C \in \mathcal{P}(E)$. On a :

- $A \cap B \in \mathcal{P}(E)$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- $A \cap E = E \cap A = A$
- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cap \varnothing = \varnothing$
- $A \cap B \subset A \quad et \quad A \cap B \subset B$
- $A \cap A = A$
- $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$
- $A \cap \overline{A} = \varnothing$

Définition

Soit E un ensemble et soient A et $B \in \mathcal{P}(E)$.
On dit que A et B sont disjoints si et seulement si $A \cap B = \varnothing$.

4 Réunion d'ensembles

Définition

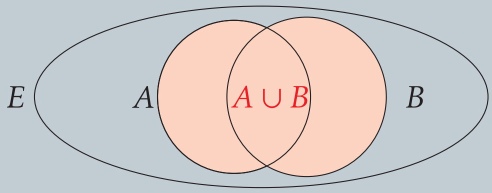
Soit E un ensemble et soient A et $B \in \mathcal{P}(E)$.
On appelle réunion (ou plus simplement union) de A et de B et on note $A \cup B$ l'ensemble défini par : $\{x \in E \ / \ x \in A \ ou \ x \in B\}$

Exemple

- Soit $A = \{a; b; c; d\}$ et soit $B = \{x; b; y; d; z\}$.
  On a $A \cup B = \{a; b; c; d; x; y; z\}$
- Soit $I = [2\ ,\ 8[$ et soit $J = [-1\ ,\ 3]$.
  On a $I \cup J = [-1\ ,\ 8[$

Remarques

- Schématiquement, on a :



- $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \ \vee \ x \in B$
- $A \cup B = \varnothing \Rightarrow A = \varnothing \ \wedge \ B = \varnothing$

Propriétés Soit E un ensemble.
Soient A, B et$C \in \mathcal{P}(E)$. On a :

- $A \cup B \in \mathcal{P}(E)$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- $A \cup \varnothing = \varnothing \cap A = A$
- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cup E = E$
- $A \subset A \cup B \quad et \quad B \subset A \cup B$
- $A \cup A = A$
- $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A$
- $A \cup \overline{A} = E$

5 Distributivité et lois de De Morgan

Propriété Soit E un ensemble et soient A , B et $C \in \mathcal{P}(E)$. On a :

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup B)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap B)$
- $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Démonstration :

- $$\begin{aligned} x \in A \cup (B \cap C) &\Leftrightarrow x \in A \ ou \ x \in B \cap C \\ &\Leftrightarrow x \in A \ ou \ (x \in B \ et \ x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \ ou \ x \in B) \ et \ (x \in A \ ou \ x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \cup B) \ et \ (x \in A \cup C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

D'où $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup B)$

- $$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \ et \ x \in B \cup C \\ &\Leftrightarrow x \in A \ et \ (x \in B \ ou \ x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \ et \ x \in B) \ ou \ (x \in A \ et \ x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \cap B) \ ou \ (x \in A \cap C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

D'où $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap B)$

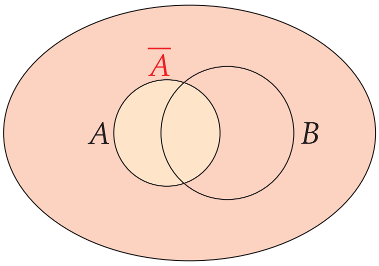
- $$\begin{aligned} x \in \overline{(A \cap B)} &\Leftrightarrow x \notin A \cap B \\ &\Leftrightarrow x \notin A \ ou \ x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in \overline{A} \ ou \ x \in \overline{B} \\ &\Leftrightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B} \end{aligned}$$

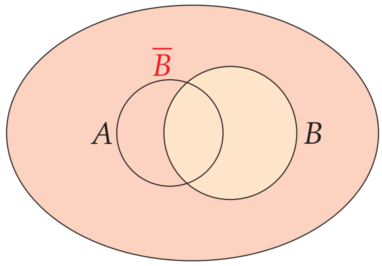
D'où $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$

- $$\begin{aligned} x \in \overline{(A \cup B)} &\Leftrightarrow x \notin A \cup B \\ &\Leftrightarrow x \notin A \ et \ x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in \overline{A} \ et \ x \in \overline{B} \\ &\Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B} \end{aligned}$$

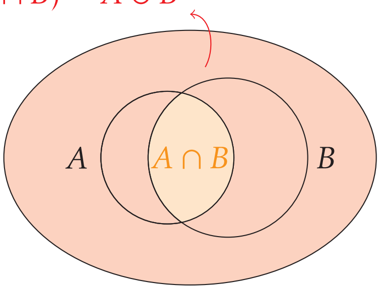
D'où $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Voici les diagrammes de Venn pour les lois de Morgan :

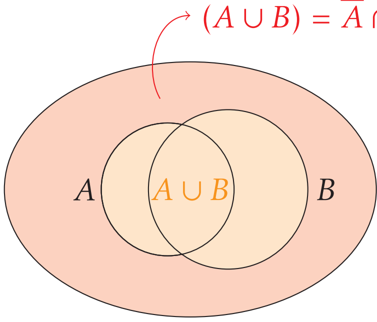




$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$



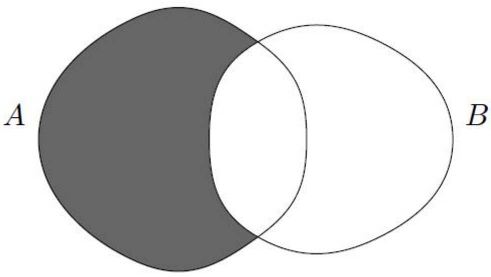
$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$



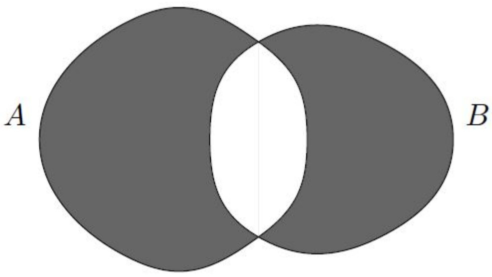
6 Différence et différence symétrique de deux ensembles

Définition Soit E un ensemble, $A \in \mathcal{P}(E)$ et $B \in \mathcal{P}(E)$. On note :

1. L'ensemble A privé de B noté $A \backslash B$ est défini par $\{x \in E / x \in A \text{ } et \text{ } x \notin B\}$ et on l'appelle différence de A et$B$.
2. $A \triangle B$ l'ensemble $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ et on l'appelle différence symétrique de A et B.



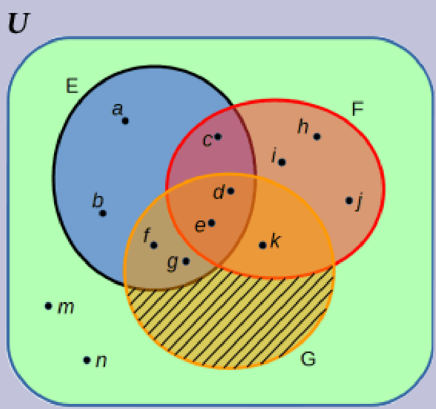
$A \setminus B$



$A \Delta B$

Exemples On considere les deux ensembles $A = \{1;2;5;6;9;10\}$ et $B = \{2;3;5;7;8;9\}$.

- $A \backslash B = \{1;6;10\}$.
- $A \Delta B = \{1;3;6;7;8;10\}$.
  Dans le référentiel U représenté ci dessous, on a : $E \Delta F = \{a, b, f, g, h, i, j, k\}$



Remarques

- La différence symétrique correspond au 'ou' exclusif : $A \triangle B$ est l'ensemble des points qui appartiennent à A ou à B, mais PAS à A et B en même temps.
- Lorsque l'on a $B \subset A$, la différence de A et B est aussi le complémentaire de B dans A.
- $A \backslash B = A \cap \overline{B}$.
- $A \subset B$ si et seulement si $A \backslash B = \varnothing$
- La différence symétrique $A \triangle B$ est aussi égale à $(A \backslash B) \cup (B \backslash A)$

7 Produit cartésien

a Produit cartésien de deux ensembles

Définition Soient E et F deux ensembles.
On appelle produit cartésien (ou simplement produit) de E par F et on note $E \times F$ l'ensemble des couples ordonnés $(x; y)$ où $x \in E$ et $y \in F$.

$$A \times B = \{(x; y) \,/ x \in A \text{ } et \text{ } y \in B\}$$

avec la convention : $A \times B = \varnothing \quad si \ A = \varnothing \ ou \ B = \varnothing$

Attention : l'ordre des éléments dans le couple est important : $(2; 3) \neq (3; 2)$

Exemple Soit $A = \{1;3\}$ et $B = \{2;3;6\}$.
Alors, $A \times B = \{(1;2);(1;3);(1;6);(3;2);(3;3);(3;6)\}$

On note : $A^2 = A \times A$ (appelé carré cartésien de A).

Remarques

- $u \in E \times F \iff \exists\, x \in E \; et \; \exists\, y \in F / \; u = (x;y)$
- On définit l'égalité sur $E \times F$ par : $(x;y) = (x';y') \iff x = x' \;\; et \;\; y = y'$
- $E \times F = \varnothing \iff E = \varnothing \; ou \; F = \varnothing$

b Produit cartésien de trois ensembles

Définitions Le produit cartésien de trois ensembles est défini par :

$$A \times B \times C = \{(a;b;c)\,/ a \in A\;;\; b \in B \; et \; c \in C\}$$

Le produit $A \times A \times A$ est appelé cube cartésien de A et il est noté A^3 (lire « A au cube »).

Les définitions précédentes se généralisent en définissant le produit cartésien d'une famille d'ensembles $(A_1;A_2;......;A_n)$ que l'on note habituellement $\prod_{i=1}^{n} A_i$

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = \{(a_1;a_2;......;a_n)\,/ a_1 \in A_1 \;;\; a_2 \in A_2 \;;........et \; a_n \in A_n\}$$

Chapitre 3

Applications

Contenus

- Égalité de deux applications ;
- Image et image réciproque d'une partie par une application ;
- Application injective, application surjective ; application bijective ; application réciproque d'une bijection ;
- Composée de deux applications ;
- Restriction et prolongement d'une application.

Capacités attendues

- Déterminer l'image et l'image réciproque d'un ensemble par une application ;
- Déterminer la bijection et la bijection réciproque d'une application et son utilisation dans la résolution de problèmes ;
- Déterminer la composée de deux applications et la décomposition d'une application en deux applications en vue d'explorer ses propriétés.

I Définitions

Définitions Définir une application f , c'est associer à tout élément x d'un ensemble E un unique élément, noté $f(x)$, d'un ensemble F et on écrit :

$$\begin{array}{rccl} f: & E & \to & F \\ & x & \to & y = f(x) \end{array}$$

- ⊛ E est appelé l'ensemble de définition (ou l'ensemble de départ) de f.
- ⊛ F est l'ensemble d'arrivée de f.
- ⊛ pour tout $x \in E$, $f(x)$ est l'image de x par l'application f.
- ⊛ pour tout $y \in F$, les solutions de l'équation $y = f(x)$ d'inconnue x forment l'ensemble des antécédents de y par f. Cet ensemble peut-être vide, ou contenir un, plusieurs, voire une infinité d'éléments.

D'une autre façon :
f est une application de E dans $F \Leftrightarrow ((\forall x \in E)(\exists! y \in F), f(x) = y)$.

Remarques

Si certains x de E n'ont pas d'image y dans F, on parle alors parfois de fonction et non pas d'application : dans ce cas le domaine de définition de la fonction est le sous ensemble de E formé des x qui ont réellement une image.
Voici deux applications importantes :
• L'application définie sur E et qui prend une même valeur a pour tout élément de E est dite application constante de valeur a.
• L'application de E dans E qui fait correspondre à tout élément x de E cet élément lui même, est appelée **application Identique** de E (ou Identité de E) et se note Id_E.

Exemples

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \to & f(x) = x^2 \end{array}$$

f est une application

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{N} \\ & x & \to & g(x) = x + 2 \end{array}$$

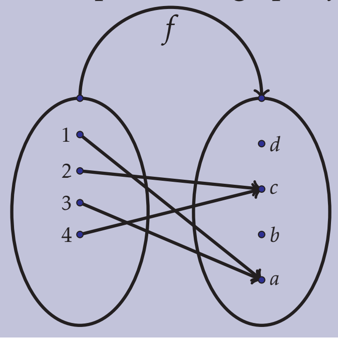
g n'est pas une application car -5 n'a pas d'image par f

$$\begin{array}{rccl} h: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \to & h(x) = \dfrac{2}{x-1} \end{array}$$

h n'est pas une application car 1 n'a pas d'image par f

On a schématisé ci-contre une application f définie sur l'ensemble $E = \{1; 2; 3; 4\}$ et à valeurs dans $F = \{a; b; c; d\}$.

- L'image de 3 par f est d.
- L'ensemble des antécédents de c par f est $\{2; 4\}$.
- L'ensemble des antécédents de b par f est vide : $\varnothing$.



II Égalité de deux applications

Définition Soient $f : E \to F$ et $g : E' \to F'$ deux applications. On a :

$$f = g \Leftrightarrow (E = E' \wedge F = F' \wedge (\forall x \in E, f(x) = g(x)))$$

Exemple Soient $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to \sqrt{4x^2 - 4x + 1} + \sqrt{4x^2 - 12x + 9} \end{array}$ et $g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to 2\left(|x - \frac{1}{2}| + |x - \frac{3}{2}|\right) \end{array}$

On montre facilement que : $(\forall x \in \mathbb{R}) : g(x) = f(x)$. Puisque f et g ont le même ensemble de départ et même ensemble d'arrivée et $(\forall x \in \mathbb{R}) : g(x) = f(x)$, alors $f = g$.

III Image directe et image réciproque d'une partie d'un ensemble

Définition 1 Soit $A \subset E$. On appelle image directe de la partie A, le sous-ensemble de F noté $f(A)$, et défini par : $f(A) = \{y \in F / \exists x \in A, y = f(x)\}$ ce qu'on écrit plus rapidement

$$f(A) = \{f(x), x \in A\}$$

Ainsi, on a : $(\forall y \in F); y \in f(A) \Leftrightarrow ((\exists x \in A); y = f(x))$.

Définition 2 Soit $B \subset F$. On appelle image réciproque de la partie B, le sous-ensemble de E noté $f^{-1}(B)$, et défini par : $f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}$
Ainsi, pour tout x de E, on a : $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$

Exemples Considérons l'application : $f : \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & f(x) = x^2 \end{array}$

- $f^{-1}(\{1\}) = \{-1; 1\}$ car $(\forall x \in \mathbb{R}), f(x) = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow (x = 1 \vee x = -1)$.
- $f^{-1}(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}$ car $(\forall x \in \mathbb{R}), f(x) \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.
- $f^{-1}(\mathbb{R}^\star_-) = \varnothing$ car l'inéquation $f(x) < 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
- De même, on a $f^{-1}(\mathbb{R}^-) = \{0\}$, $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et $f^{-1}([0, 2]) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

IV Prolongement et restriction d'une application

Définition 1 Soit $f : E \to F$ une application, et A une partie de E.
On appelle restriction de f à la partie A, l'application notée $f_{|A}$ définie par :

$$\begin{array}{rccl} f_{|A}: & A & \to & F \\ & x & \to & f(x) \end{array}$$

(L'ensemble de départ de $f_{|A}$ est A).

Exemple 1 Soit $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \to & |x| \end{array}$

On a $\begin{array}{rccl} f_{|\mathbb{R}^-}: & \mathbb{R}^- & \to & \mathbb{R} \\ & x & \to & -x \end{array}$ et $\begin{array}{rccl} f_{|\mathbb{R}^+}: & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \to & x \end{array}$

sont respectivement une restriction de f à $\mathbb{R}^-$ et une restriction de f à $\mathbb{R}^+$.

Définition 2 Soit $f : E \to F$ une application, et X un ensemble tel que $E \subset X$. On dit que l'application $g : X \to F$ est un prolongement de f si $g_{|E}$ est l'application f.

Exemple 2 Soit $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \to & \sqrt{x} \end{array}$

L'application : $\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \to & \sqrt{|x|} \end{array}$ est un prolongement de f.

L'application : $\begin{array}{rcclll} h: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} & & \\ & x & \to & \sqrt{x}\ ; & \text{si} & x \geq 0 \\ & x & \to & -1\ ; & \text{si} & x < 0 \end{array}$ est aussi un prolongement de f.

V Injection - Surjection - Bijection

Définition 1 Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est injective (ou une injection) si tout élément de F a au plus un antécédent (par f), ce qui s'énonce de la manière suivante : $\left(\forall (x, x') \in E^2\right), f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$
ou de manière équivalente, par contraposée : $\left(\forall (x, x') \in E^2\right), x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$

Définition 2 Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est surjective (ou une surjection) si tout élément de F a au moins un antécédent (par f), ce qui s'énonce de la manière suivante : $(\forall y \in F)(\exists x \in E), y = f(x)$

Définition 3 Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est bijective (ou une bijection) si tout élément de F a un et un seul antécédent (par f), ce qui s'énonce de la manière suivante :

$$(\forall y \in F)(\exists! x \in E), y = f(x)$$

Remarques

- La propriété de surjectivité traduit l'existence d'un antécédent par f de tout élément y de F.
- La propriété d'injectivité traduit l'unicité d'un éventuel antécédent de y.
- La propriété de bijectivité traduit donc l'existence et l'unicité d'un tel antécédent.
- On commence souvent l'étude par la surjectivité, la résolution de $y = f(x)$ dans la recherche d'antécédent permettant parfois de prouver l'unicité du même coup.

Propriété $f : E \to F$ est surjective si et seulement si $f(E) = F$.

Exemple 1 f est une application définie par : $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \dfrac{x(1-x)^2}{(1+x^2)^2} \end{array}$

1 On vérifie facilement que : $(\forall x \in \mathbb{R}^\star) : f\left(\dfrac{1}{x}\right) = f(x)$ $\quad(1)$

2 On a : $2 \in \mathbb{R}^\star$ et $\dfrac{1}{2} \in \mathbb{R}^\star$, donc d'après (1), on a : $f(2) = f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et $2 \neq \dfrac{1}{2}$
D'où f n'est pas injective.

3 On peut montrer facilement que : $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) \leqslant \dfrac{1}{4}$
On a : $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) \leqslant \dfrac{1}{4}$ alors, $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) \neq 1$. Donc 1 n'a pas d'antécédent par f et par conséquent : f n'est pas surjective.

Exemple 2 Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ définie par : $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, montrons que f est injective, par contre f n'est pas surjective.
En effet, soient $(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2$ On a :
$f(x_1) = f(x_2) \to \dfrac{1}{1+x_1} = \dfrac{1}{1+x_2} \to 1 + x_1 = 1 + x_2 \to x_1 = x_2$
Donc f est injective.
On a : $(\forall x \in \mathbb{N}); f(x) < 1$, alors par exemple 2 n'a pas d'antécédent dans $\mathbb{N}$.
Conclusion, f n'est pas surjective , alors que f n'est pas bijective.

VI Application réciproque d'une bijection

Définition Dans le cas où $f : E \longrightarrow F$ est une application bijective, pour tout $y \in F$, on note $f^{-1}(y)$ l'unique antécédent de y par f.
L'application réciproque ou inverse de f est l'application définie par :

$$\begin{array}{cccc} f^{-1}: & F & \longrightarrow & E \\ & y & \longrightarrow & f^{-1}(y) \end{array}$$

Et on a : $(\forall (x,y) \in ExF), (y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y))$.

Remarque

Attention à ne pas confondre image réciproque d'une partie par l'application f (celle-ci existe toujours) et application réciproque f^{-1} (qui n'existe que si f est bijective). Dans l'exemple du paragraphe III , f n'admet pas d'application réciproque sur $\mathbb{R}$, mais $\mathbb{R}$ a une image réciproque par f (il s'agit de $\mathbb{R}$).

VII Composée de deux applications

Définition Si $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ sont deux applications, alors on définit la composée de f suivie de g par : $\begin{array}{cccc} g \circ f: & E & \longrightarrow & G \\ & x & \longrightarrow & g[f(x)] \end{array}$

Remarque

la composition n'est pas commutative : $g \circ f \neq f \circ g$ en général.
Par définition, $f^{-1} \circ f = Id_E$ et $f \circ f^{-1} = Id_F$.

Exemple Soient $\begin{array}{cccc} f: &]0,+\infty[& \longrightarrow &]0,+\infty[\\ & x & \longrightarrow & \dfrac{1}{x} \end{array}$ et $\begin{array}{cccc} g: &]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & \dfrac{x-1}{x+1} \end{array}$

Alors, $gof :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ vérifie :

$$(\forall x \in]0,+\infty[) : gof(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x} + 1} = \frac{1-x}{x+1} = -g(x)$$

Propriété Si $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ sont des applications bijectives, alors gof est bijective et $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$