VIII Exercices d'application

01 On considère la relation f définie par :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & f(x) = \dfrac{x}{2x-1} \end{array}$$

1 f est-elle une application ? Sinon, quelle est la condition pour qu'elle soit application ?

2 Déterminer, dans ce cas, les antécédents des nombres suivants : -1 ; 3 et 0.

02 On considère les applications f et g définies par :

$$f: \begin{array}{ccc}]0;\pi[& \to & \mathbb{R} \\ x & \to & f(x) = \dfrac{\sin(x)}{1+\cos(x)} \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{ccc}]0;\pi[& \to & \mathbb{R} \\ x & \to & g(x) = \dfrac{1-\cos(x)}{\sin(x)} \end{array}$$

Montrer que $f = g$.

03 On considère l'application f définie par : $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & f(x) = 2x - |x| + 3 \end{array}$

Déterminer $f_{|]-\infty;0]}$ la restriction de l'application f à l'intervalle $]-\infty;0]$.

04 On considère l'application f définie par : $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^- & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & f(x) = -x^3 + x - 2 \end{array}$

Déterminer l'application h, le prolongement de f à $\mathbb{R}$.

05 On considère l'application f définie par : $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} - \{-1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & f(x) = \dfrac{3x-1}{x+1} \end{array}$

Déterminer $f(]-\infty;-1[)$

06 On considère l'application f définie par : $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & f(x) = x^2 + 2x \end{array}$

Déterminer $f(]-1;0[)$ et $f([-1;0[\cup[1;2])$

07 On considère l'application f définie par : $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^+ & \rightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \rightarrow & f(x) = x + \sqrt{x} \end{array}$

Montrer que f est une application injective de $\mathbb{R}^+$ à $\mathbb{R}^+$.

08 On considère l'application f définie par : $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^+ & \rightarrow &]-\infty;3] \\ & x & \rightarrow & f(x) = 3 - x^2 \end{array}$

Montrer que f est une application surjective de $\mathbb{R}^+$ à $]-\infty;3]$.

09 On considère l'application f définie par : $\begin{array}{rccl} f: &]-\infty;0[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \rightarrow & f(x) = x - \dfrac{1}{x} \end{array}$

Montrer que f est une application bijective de $]-\infty;0[$ à $\mathbb{R}$ et déterminer son application réciproque f^{-1}.

10 On considère les applications f et g définies par :

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \rightarrow & f(x) = x^2 + 2 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R}^+ & \rightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \rightarrow & g(x) = 3 + \sqrt{x} \end{array}$$

Déterminer $g \circ f$ et $g \circ g$

IX Exercices d'approfondissement

11 On considère l'application f définie par : $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \to & f(x) = x - \sqrt{x} \end{array}$

1 Montrer que f n'est pas injective

2 **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}^+$ l'équation : $f(x) = -1$

b. Que peut-on conclure ?

3 Soit g la restriction de f à $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$.

Montrer que g est bijective de $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$ à un intervalle J qu'il faut déterminer et déterminer son application réciproque g^{-1}

12 On pose $I =]0;+\infty[$ et on considère l'application f définie par :

$$\begin{array}{rccl} f: & I \times I & \to & I \times I \\ & (x;y) & \to & f(x;y) = \left(xy;\dfrac{x}{y}\right) \end{array}$$

1 Montrer que f est injective et surjective.

2 En déduire que f est une bijection et déterminer sa bijection réciproque f^{-1}.

13 On considère les applications f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $(\forall x \in \mathbb{R}); f(3x) = 2f(x)$.

1 Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); f(x) = 2^n f\left(\dfrac{x}{3^n}\right)$.

2 Calculer $f(2007)$ sachant que $f(223) = 2006$.

14 Déterminer toutes les applications f définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2); f(xy) = f(x)f(y) - x - y$$