Chapitre 3

Dérivabilité, étude des fonctions et les fonctions primitives

Le mot « dérivé » vient du latin « derivare » qui signifiait « détourner un cours d’eau ».

Le mot a été introduit par le mathématicien franco-italien *Joseph Louis Lagrange* (1736 ; 1813) pour signifier que cette nouvelle fonction dérive (au sens de "provenir") d'une autre fonction

I. Dérivabilité d'une fonction numérique (rappel)

1) Dérivabilité en un point

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de centre a.

On dit que f est dérivable en a s'il existe un nombre réel l *tel que* $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$

Le nombre l s'appelle le nombre dérivée de f en a et on le note $f'(a)$

Remarque : si on pose $h=x-a$ on a $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=l=f'(a)$

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de centre a tel que $I=a-r;a+r \quad et \ r>0$

f et dérivable en x_0 s'il existe un nombre réel l et une fonction numérique φ définie sur $J=]-r;r[$ tel que

$\forall x\in J$ on a $f(a+h)=f(a)+l\times h+\varphi(h)\times h$ et $\lim_{h\to 0}\varphi(h)=0$

Démonstration : Supposons que f est dérivable en a

On a $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$ donc $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-f'(a)=0$

On considère la fonction φ définie sur $]-r;r[$ par $\begin{cases}\varphi(h)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-f'(a) \ si \ h\neq 0\\ \varphi(0)=0\end{cases}$

On a $f(a+h)=f(a)+f'(a)\times h+\varphi(h)\times h$ et $\lim_{h\to 0}\varphi(h)=0 \quad (f'(a)=l)$

2) La dérivabilité et la continuité

Propriété

Si f est dérivable en a alors f est continue en a

Démonstration : On utilise la propriété précédente on a $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{h\to 0}f(a+h)=\lim_{h\to 0}(f(a)+l\times h+\varphi(h)\times h)=f(a)$

donc f est continue en a .

Remarque

- On peut trouver une fonction continue en a et non dérivable en a
- Si une fonction numérique est non dérivable en a ,alors elle n'est pas dérivable en a

Exemple :

- la fonction $f(x)=|x-3|$ est continue en 3 et non dérivable en 3
- La fonction g définie par $\begin{cases} g(x)=x\sin\frac{1}{x} si \ x\neq 0 \\ g(0)=0 \end{cases}$ est continue en 0 et non dérivable en 0

II. La fonction dérivée

1) Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle

Définition Soit *f* une fonction définie sur un intervalle I.

On dit que *f* est <u>dérivable</u> sur I si elle est dérivable en tout réel *x* de I.

Dans ce cas, la fonction qui à tout réel *x* de I associe le nombre dérivé de *f* en *x* est appelée <u>fonction dérivée</u> de *f* et se note *f* '.

2) Dérivée de la composée de deux fonctions

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur f(I)

On montre que gof est dérivable sur I

Soit $a\in I$

On a $\lim\limits_{x\to a}\frac{gof(x)-gof(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a}$

$=\lim\limits_{x\to a}\frac{gof(x)-gof(a)}{f(x)-f(a)}\times\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

On a f est dérivable en a alors $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$

On pose $f(a)=A \ et \ f(x)=X$

On a $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$ (car f est dérivable en a et par suite f est continue en a)

Donc $x\to a \ \ c\grave{a}d \ f(x)\to f(a) \ c\grave{a}d \ X\to A$

Donc $\lim\limits_{x\to a}\frac{gof(x)-gof(a)}{f(x)-f(a)}=\lim\limits_{X\to A}\frac{g(X)-g(A)}{X-A}=g'(A)$ donc

$\lim\limits_{x\to a}\frac{gof(x)-gof(a)}{x-a}=g'(A)\times f'(a)=g'(f(a))\times f'(a)$

Donc gof est dérivable en a est on a $(gof)'(a)=g'(f(a))\times f'(a)$

et par suite *gof* est dérivable sur I est on $(gof)'(x)=g'(f(x))\times f'(x) \quad \forall x\in I$

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur J tel que $f(I)\subset J$

- Si a un élément de I tel que *f* est dérivable en a et g dérivable en f(a)

Donc *gof* est dérivable en a et on a $(gof)'(a)=g'(f(a))\times f'(a)$

- Si f est dérivable sur l'intervalle I et g dérivable sur f(I) alors la fonction *gof* est dérivable sur I et on a :

  $(gof)'(x)=g'(f(x))\times f'(x) \quad \forall x\in I$

Exemple :

On considère la fonction h définie par $h(x)=\cos\left(x^3+x-1\right)$

On a $h(x)=gof(x)$ tels que $f(x)=x^3+x-1$ et $g(x)=\cos x$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $g'(x)=-\sin x$ et $g(\mathbb{R})\subset\mathbb{R}$ alors h est dérivable sur $\mathbb{R}$

et $h'(x)=(gof)'(x)=f'(x)\times g'(f(x))=g'(x^3+x-1)\times(3x^2+1)=-\sin(x^3+x-1)\times(3x^2+1)$

Conséquence :

1) Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I .Alors les fonctions $x\mapsto\sin(u(x))$, $x\mapsto\cos(u(x))$ et $x\mapsto\tan(u(x))$ sont dérivable sur I et on a $\forall x\in I$:

- $\left(\cos(u(x))\right)'=-u'(x)\times\sin(u(x))$
- $\left(\sin(u(x))\right)'=u'(x)\times\cos(u(x))$
- $\left(\tan(u(x))\right)'=-u'(x)\left(1+\tan^2(u(x))\right)$

2) *Soit u* est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I.

   Alors la fonction *f* définie sur I par $f(x)=\sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I et on a : $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.

3) *Soient n* est un entier relatif non nul et *u* est une fonction dérivable sur un intervalle I ne s'annulant pas sur I dans le cas où *n* est négatif.

   Alors la fonction f définie sur I par $f(x)=\left(u(x)\right)^n$ est dérivable sur I et on a : $f'(x)=nu'(x)\left(u(x)\right)^{n-1}$.

Exemple :

1) $f(x)=\sqrt{3x^2+4x-1}$

On pose $f(x)=\sqrt{u(x)}$ avec $u(x)=3x^2+4x-1$

$\to u'(x)=6x+4$

Donc : $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}=\dfrac{6x+4}{2\sqrt{3x^2+4x-1}}$

$=\dfrac{3x+2}{\sqrt{3x^2+4x-1}}$

2) $f(x)=(2x^2+3x-3)^4$ On pose

$f(x)=(u(x))^4$

avec $u(x)=2x^2+3x-3 \to u'(x)=4x+3$

Donc :

$f'(x)=4u'(x)(u(x))^3$

$=4(4x+3)(2x^2+3x-3)^3$

III. La dérivée et variations d'une fonction

1) La monotonie d'une fonction et le signe de sa dérivée

Propriété

Soit une fonction *f* définie et dérivable sur un intervalle I.

- Si $f'(x)\le 0$, alors *f* est décroissante sur I.
- Si $f'(x)\ge 0$, alors *f* est croissante sur I.

Exemples : Soit la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x)=x^3+\dfrac{9}{2}x^2-12x+5$.

1) Etudier les variations de *f* et dresser le tableau de variation.

2) Dans repère, représenter graphiquement la fonction *f*.

1) Pour tout *x* réel, on a : $f'(x)=3x^2+9x-12$.

Commençons par résoudre l'équation $f'(x)=0$:

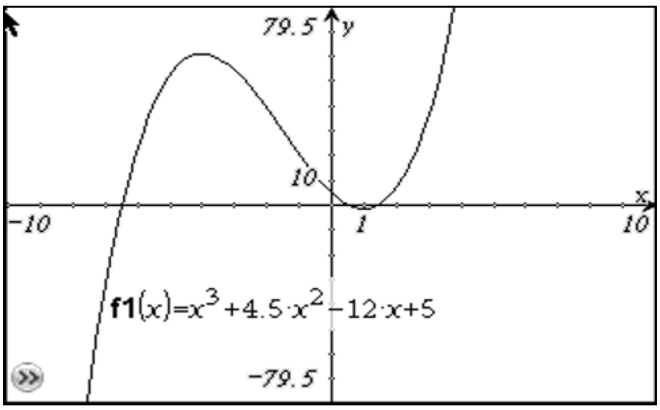
Le discriminant du trinôme $3x^2+9x-12$ est égal à $\Delta = 9^2 - 4 \times 3 \times (-12) = 225$

L'équation possède deux solutions :

$x_1=\dfrac{-9-\sqrt{225}}{2\times 3}=-4$ et $x_2=\dfrac{-9+\sqrt{225}}{2\times 3}=1$

On en déduit le tableau de variations de *f* :

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
f		↗	61	↘	$-\frac{3}{2}$	↗	



2) Extremum d'une fonction

Propriété Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle ouvert I.
- Si la dérivée f ' de f s'annule et change de signe en un réel a de I alors f admet un extremum en x = a.
- Si f admet un extremum en x = a alors f '(a) = 0

Exemple :

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=5x^2-3x+4$ admet-elle un extremum sur $\mathbb{R}$?

Pour tout x réel, on a : $f'(x)=10x-3$

Et : $f'(x)=0$ pour $x=\dfrac{3}{10}$.

On dresse alors le tableau de variations :

En effet : $f\left(\dfrac{3}{10}\right)=\dfrac{71}{20}$

La fonction f admet donc un minimum égal à $\dfrac{71}{20}$ en

$x=\dfrac{3}{10}$

x	$-\infty$		$\frac{3}{10}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
f		↘	$\frac{71}{20}$	↗	

IV. La fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone

1) Théorème de la fonction réciproque

Théorème :

Toute fonction f définie sur un intervalle I, continue et strictement monotone sur cet intervalle réalise une bijection de l'intervalle I vers l'intervalle f(I) = J.

Démonstration :

- On a f est continue sur I donc f(I)=J est un intervalle donc d'après TVI $(\forall y\in J)(\exists! x\in I)f(x)=y$ donc f est surjective
- On montre que f est injective

On a f est strictement monotone soit x et x' deux élément de I tels que $x\neq x'$

$$x\neq x'\Rightarrow x<x' \ ou\ x>x'\Rightarrow\begin{cases}f(x)>f(x')\\ f(x)<f(x')\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)\neq f(x')$$

Donc $(\forall(x,x')\in I^2):x\neq x'\Rightarrow f(x)\neq f(x')$ et par suite f est injective

Comme f est injective et surjective alors f est bijective de I vers J=f(I)

Remarque :

Soit f une bijection d'un intervalle I vers un intervalle J , on a :

- La fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} :

$$f^{-1}: J \to I$$
$$y \mapsto x = f^{-1}(y)$$

$(\forall x \in I; \forall y \in J) : (f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y)$

$(\forall x \in I) : (f^{-1} o f)(x) = x ; (\forall x \in J) : (f o f^{-1})(x) = x$

Exemples :

Soit f la fonction définie sur $I = \left[-\frac{1}{4}; +\infty\right[$

$f(x) = 2x^2 + x - 1$

1) Démontrer que f est une bijection (admet une fonction réciproque) de I vers un intervalle J à déterminer .
2) Déterminer $f^{-1}(x)$ $(\forall x \in I)$

1) On a la fonction f est continue sur I car c'est la restriction d'une fonction polynôme

La fonction f est dérivable sur I car c'est une fonction polynôme et $(\forall x \in I)$ $f'(x) = 4x + 1 > 0$ donc la fonction f est strictement croissante sur I et par suite f est une bijection de I vers J tel que

$J = f(I) = \left[f\left(\frac{1}{4}\right); \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[$

$$Donc \quad J = \left[-\frac{9}{8}; +\infty\right[$$

2) On detemine $f^{-1}(x)$

$\left(\forall x \in \left[-\frac{9}{8}; +\infty\right[\right)\left(\forall x \in \left[-\frac{1}{4}; +\infty\right[\right)$ $on\ a$:

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$$
$$\Leftrightarrow 2y^2 + y - 1 = x$$
$$\Leftrightarrow 2y^2 + y = x + 1$$
$$\Leftrightarrow y^2 + \frac{1}{2}y = \frac{x+1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{8x+9}{16}$$
$$\Leftrightarrow y + \frac{1}{4} = \sqrt{\frac{8x+9}{16}} \quad ou \quad y + \frac{1}{4} = -\sqrt{\frac{8x+9}{16}}$$

Comme $y \geq -\frac{1}{4}$ donc $y + \frac{1}{4} \geq 0$ et par suite $y + \frac{1}{4}$ $= \sqrt{\frac{8x+9}{16}}$ donc $y = \frac{\sqrt{8x+9}}{4} - \frac{1}{4}$

$$Alors\ f^{-1}(x) = \frac{\sqrt{8x+9} - 1}{4}$$

Application

Soit g la fonction définie sur $]-\infty,0]$ par $g(x) = 2x^2 - 3$.

1) Déterminer g ($]-\infty,0]$)

2) Montrer que l'équation g (x) = y admet une unique solution dans $]-\infty,0]$

3) En déduire la fonction g^{-1}

2) la fonction réciproque

Propriété si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I alors :

1) f^{-1} est continue sur $f(I)$ et f et f^{-1} ont même sens de variations.
2) Les courbes des fonctions f et f^{-1} dans un reppere orthonormé sont symetrique par rapport à la premier bisectrice (la droite d'equation $y = x$)

Demonstartion :

1) Soit y_1 *et* y_2 deux elements defferents de $f(I)$ il existe deux elements $x_1 et\ x_2$ de I(car f est une bijection de I vers f(I)) tels que $f(x_1) = y_1$ *et* $f(y_2) = x_2$ et par suite $f^{-1}(y_1) = x_1$ *et* $f^1(y_2) = x_2$.

Alors $\dfrac{f^1(y_1) - f^1(y_2)}{y_1 - y_2} = \dfrac{x_1 - x_2}{f(x_1) - f(x_2)}$ donc les taux de variation de f et f^{-1}ont meme signe

Et par suite f *et* f^{-1} ont même sens de variations.

On admet que f^{-1} est continue

2) Soit $(\mathcal{C})$ la courbe de f *et* $(\mathcal{C}')$ la courbe de f^{-1} dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$

Soit $M(x,y)$ un point du plan et $M'(y,x)$ symétrique de M par rapport à la droite d'equation $y = x$

On a $M \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow y = f(x) \quad \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \quad \Leftrightarrow M' \in (\mathcal{C}')$

Et par suite $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$

Remarque : on peut construire la Coubre de la fonction f^{-1} sans connaitre l'expression de $f^{-1}(x)$ en fonction de x.

3) La dérivée de la fonction réciproque

Notons que si f est bijective, alors elle admet une fonction réciproque f^{-1} .Ces deux fonctions vérifient la relation suivante : $f^{-1}(f(x)) = x$ *et* $f(f^{-1}(x)) = x$

Ainsi, en dérivant des deux côtés, on obtient$\left(f^{-1}(f(x))\right)' = 1$ *et* $\left(f(f^{-1}(x))\right)' = 1$

et en utilisant la relation de la dérivation des fonctions composées : *u(v(x))' = u'(v(x)).v' (x)*

on déduit que $\left(f(f^{-1}(x))\right)' = (f^{-1})'(x)\, f'(f^{-1}(x)) = 1$

$$\text{d'où } (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Propriété

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I dans IR

1) Si x_0 un element de I tel que f est derivable en x_0 et $f(x_0) \neq 0$ alors la foction f^{-1} est derivable en $f(x_0)$

et on a $(f^{-1})'(f(x_0)) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

2) Si f est une fonction derivable sur un intervalle I tel que sa derivée ne s'annule sur I alors la fonction f^{-1} est derivable sur $f(I)$et on a : $\forall x \in f(I) \qquad (f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Exemples :

1) Soit f la fonction definie sur $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$f(x) = xsinx$

On a f est derivable sur I (car c'est le produit de deux fonctions derivables sur I) et pour tout x de I :

$f'(x) = sinx + xcosx.$

Comme $sinx \geq 0$ et $cosx \geq 0$ $\forall x \in I$ alors $f'(x) \geq 0$ donc f est strictement croissante sur I et par suite f est une bijection de I vers $f(I) = I$.

On f^{-1} est derivable sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$

(car $\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$ $f'(x) > 0$)

Et on a $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{12}$ donc $f^{-1}\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{6}$

Donc $(f^{-1})'\left(\frac{\pi}{12}\right) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)}$

$et\ par\ suite (f^{-1})'\left(\frac{\pi}{12}\right) = \dfrac{12}{6 + \pi\sqrt{3}}$

Application :

1) Soit la fonction f definie par $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$.demontrer que f est une bijection de IR vers un intervalle J à determiner et calculer $(f^{-1})'(1)$

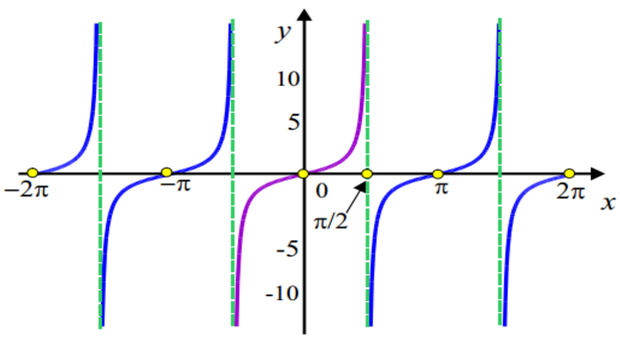
2) soit g la fonction definie sur $[1; +\infty[$par $g(x) = \frac{1}{x}\sqrt{x^2 - 1}$

Demontrer que g est une bijection de $[1; +\infty[$ vers un intervalle J à determiner

V. fonctions réciproques usuelles

1) fonction arc tangente

a) Rappelons le graphe de tan x.



$y = \tan x$

Comme vous pouvez le constater, l'ensemble image de tan est IR et cette fonction tan x est bijective sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ (car continue et croissante). La restriction de la fonction tan à $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ admet une fonction réciproque qu'on appelle arctangente et qu'on note arctan, ainsi :

$$\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\underset{arctan}{\overset{tan}{\rightleftarrows}} IR$$

$$Ce\ qu'on\ peut\ traduire\ par \begin{cases} y = arctanx \\ x \in IR \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = tany \\ y \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$$

Définition

$La\ fonction\ x \longmapsto tanx\ est\ une\ bijection\ de\ \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\ dans\ IR. Sa\ fonction\ reciproque$ s'appelle la fonction arctangente que l'on note arctan

Résultats :

1) $(\forall x \in IR)\left(\forall y \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right) \quad arctanx = y \Leftrightarrow tany = x$

2) $(\forall x \in IR) \quad \tan(arctanx) = x$

3) $\left(\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right) \quad \arctan(tanx) = x$

4) $(\forall x_1 \in IR)(\forall x_2 \in IR) \quad arctanx_1 = arctanx_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

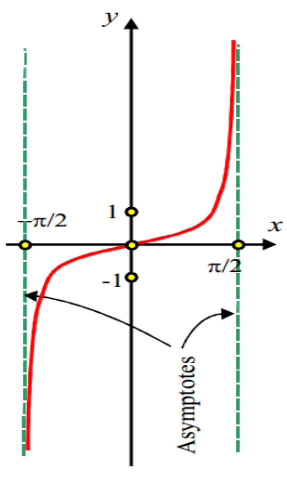
5) $(\forall x_1 \in IR)(\forall x_2 \in IR) \quad arctanx_1 < arctanx_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$

6) $La\ fonction\ arctangente\ est\ conti\ ue\ sur\ IR.$

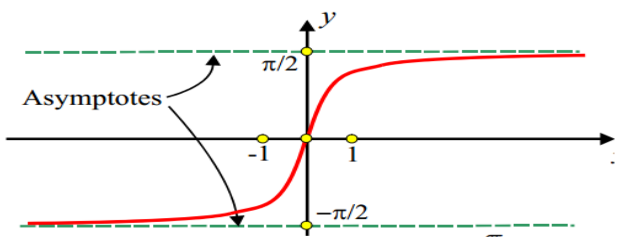
7) $\lim_{x\to+\infty} arctanx = \frac{\pi}{2}\ et\ \lim_{x\to-\infty} arctanx = -\frac{\pi}{2}$

b) La représentation graphique de la fonction arctan

La courbe de arctan s'obtient par symétrie par rapport à la première bissectrice de la courbe de tan .



$y = \tan x$



$\arctan x$ et les asymptotes $y = \pm\frac{\pi}{2}$

Remarque : la fonction arctan est impaire car $(\forall x \in IR)\ \arctan(-x) = -\arctan(x)$

Application :

1) $Calculer\ \ arctan\left(tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$

$arctan\left(tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)\ \ n'est\ pas\ egal\ à\ \frac{5\pi}{4}\ car$

$\frac{5\pi}{4} \notin \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\ Sachant\ que\ tan\ x\ est\ périodique$

$de\ \ période\ \pi, on\ a, tan\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) donc$

$\arctan\left(tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = \arctan\left(tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4}$

2) Soit a et b deux elements de $]-1;1[$

On demontre que :

$$\arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)=\arctan(a)+\arctan(b)$$

Soit a et b deux elements de $\left]-1\,;1\right[$ et x et y deux

$$elements\ de\ \left]-\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{4}\right[\ tel\ que\ a=tanx\ et$$

$$b=tany$$

$$\text{On a }\frac{a+b}{1-ab}=\frac{tanx+tany}{1-tanx.tany}=\tan(x+y)$$

$$\text{Comme}x\in\left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[\ et\ y\in\left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[$$

$$alors\ x+y\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$$

$$Et\ on\ a\ \forall\beta\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\arctan(\tan(\beta))=\beta$$

Et par suite

$$\arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)=\arctan(tan(x+y))=x+y$$

$$Donc\ \ arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)=\arctan(a)+\arctan(b)$$

3) Application : demontrer que :

$$2\arctan\left(\frac{1}{2}\right)=\arctan\left(\frac{4}{3}\right)\quad ;$$

$$\arctan\left(\frac{1}{2}\right)+\arctan\left(\frac{1}{5}\right)+\arctan\left(\frac{1}{8}\right)=\frac{\pi}{4}$$

$On\ a\ \frac{1}{2}\in]-1;1[\ \ donc\ d'apres\ la\ question$

Precedente on a

$$2\arctan\left(\frac{1}{2}\right)=\arctan\left(\frac{1}{2}\right)+\arctan\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$=\arctan\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}\right)=arctan\left(\frac{4}{3}\right)$$

$On\ a\ \frac{1}{2}\in\left]-1;1\right[\,et\ \frac{1}{5}\in\left]-1;1\right[\,donc\ d'apres\ la$

question precedante

$$\arctan\left(\frac{1}{2}\right)+\arctan\left(\frac{1}{5}\right)=\arctan\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{10}}\right)$$

$$=arctan\left(\frac{7}{9}\right)$$

$et\ comme\ \frac{7}{9}\in\left]-1;1\right[$ et $\frac{1}{8}\in\left]-1;1\right[$ alors

$$\arctan\left(\frac{7}{9}\right)+\arctan\left(\frac{1}{8}\right)=\arctan\left(\frac{\frac{7}{9}+\frac{1}{8}}{1-\frac{7}{72}}\right)$$

$$=arctan(1)=\frac{\pi}{4}$$

4) Resoudre dans IR l'equation

$$\arctan(2x)+\arctan(x)=\frac{\pi}{4}$$

Remarquons tout d'abord qu'une solution de l'équation est nécessairement positive, car arctan x a le même signe que x. Transformons l'équation par implications successives.

$$\arctan(2x)+\arctan(x)=\frac{\pi}{4}$$

En prenant la tangente des deux membres, cela implique

$$\tan(\arctan(2x)+\arctan(x))\ =1$$

d'où, en utilisant la formule donnant la tangente d'une somme

$$\frac{2x+x}{1-2x.x}=1$$

Finalement, on obtient l'équation $2x^2+3x-1=0$

$qui\ possède\ une\ solution\ unique\ positive$

$$x_0=\frac{-3+\sqrt{17}}{4}\quad donc\ S=\left\{\frac{-3+\sqrt{17}}{4}\right\}$$

5) a) demontrer que $\lim_{x\to 0}\frac{arctanx}{x}=1$

$On\ calcule\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{arctanx}{x}\ on\ pose\ y = arctanx$

On arctan est continue sur IR donc

$x \to 0$ *equivaut* à $y \to 0$ et par suite

$$\lim_{x\to0}\frac{arctanx}{x} = \lim_{x\to0}\frac{y}{tany} = 1$$

$b)\ calculer\ \lim_{x\to+\infty} x\, arctan\left(\frac{1}{x}\right)\ \ on\ pose\ y = \frac{1}{x}\ donc$

$\lim_{x\to+\infty} x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y\to0^+}\frac{1}{y}\arctan y = \lim_{y\to0^+}\frac{\arctan y}{y} = 1$

.

c) La dérivée de la fonction arctangente

La dérivée de la fonction arctan x s'obtient par application de la formule de la dérivée de la fonction réciproque :

$$arctan'x = \frac{1}{tan'(arctanx)} = \frac{1}{1+tan^2(arctanx)}$$

D'où $arctan'x = \dfrac{1}{1+x^2}$

Propriété

1) $La\ fonction\ arctan\ est\ derivable\ sur\ IR\ et\ on\ a\ \ \forall x \in IR\ arctan'x = \dfrac{1}{1+x^2}$

2) si u est une fonction derivable sur un intervalle I alors la fonction $arctan \circ u\ est\ derivable$

$sur\ I\ et\ on\ a\ \ (arctanou)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$

Exemples :

1) Calculer la dérivée de $f(x) = arctan\,(sin\,x)$

La fonction f est la composée de arctan et sin x, par application de la dérivation de la composée

on a $\left(arctan\,(sin\,x)\right)' = \dfrac{1}{1+sin^2x}.sin'x$

$$= \frac{cosx}{1+sin^2x}.$$

2) Demontrer que $(\forall x \in IR)$

$$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$(\forall x \in IR)\ \sin(\arctan(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Soit x un réel et donc il existe un unique α de

$$\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\ tel\ que\ tan(\alpha) = x$$

Et on a $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+tan^2(\alpha)}} = |cos\alpha|$

$$= cos\alpha\ \left(\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right)$$

$$= \cos(arctan(x))$$

$\sin(arctan(x))$

$= \cos(arctan(x)).\tan(arctan(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}.x$

$= \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

3) $demontrer\ que\ \ \forall x \in IR^{*+}\ arctanx + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$

$= \dfrac{\pi}{2}\ et\ \forall x$

$\in IR^{*-}\ arctanx + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$

$= -\dfrac{\pi}{2}$

1^{ere} méthode

$$Soit\ x\ de\ IR^{*+}\quad il\ existe\ un\ unique\ \ \alpha\ de$$

$$\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\ tel\ que\ \tan(\alpha)=x$$

$$c\ \text{à}\ d\ arctanx=\alpha$$

On a $\frac{1}{x}=\frac{1}{\tan(\alpha)}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

Et on a $0<\alpha<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow-\frac{\pi}{2}<-\alpha<0$

$$\Leftrightarrow 0<\frac{\pi}{2}-\alpha<\frac{\pi}{2}$$

Et par suite $\frac{1}{x}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\Leftrightarrow \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

$$=\frac{\pi}{2}-\arctan(x)$$

$$\arctan\left(\frac{1}{x}\right)+arctan(x)=\frac{\pi}{2}$$

2^{ieme} methode

On pose $\forall x\in IR^{*+}\ f(x)=arctanx+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

On la fonction f est dérivable sur IR^{*+} (car c'est la somme de deux fonctions dérivables sur IR^{*+})

Et on a $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}$

$$=\frac{1}{1+x^2}+\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}=0\quad\forall x\in IR^{*+}$$

Donc f est une fonction constant sur IR^{*+} c à d

$(\exists\beta\in IR\ )(\forall x\in IR^{*+}\ )f(x)=\beta$

$$Pour\ x=1\ on\ a\ f(1)=\beta\ c\ \text{à}\ d\quad\beta=\frac{\pi}{2}$$

Et par suite $\forall x\in IR^{*+}\ arctanx+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$

3) $Deduire\ \ que\ \forall x\in IR^{*-}$

$$arctanx+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{\pi}{2}$$

On a si $x\in IR^{*-}\ on\ a-x\in IR^{*+}$

On sait que la fonction arctan est une fonction impaire donc

$$\arctan(-x)+\arctan\left(\frac{1}{-x}\right)=\frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow -arctanx-\arctan\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow arctanx+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{\pi}{2}$$

2) La fonction racine nieme

Soit f la fonction definie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=x^n$ et $n\in IN\ avec\ n\geq 2$

La fonction f est continue et derivable sur IR^+ car c'est la restrection d'une fonction polynome et on a

$f'(x)=nx^{n-1}>0\ \ \forall x\in IR^+$ et par suite la fonction f est strictement croissante sur IR^+

et comme $f(IR^+)=f([0;+\infty[)=[f(0);\lim_{x\to+\infty}f(x)[=[0;+\infty[$

on deduit de ce qui precede que f est une bijection de $[0;+\infty[$ vers $[0;+\infty[$

Définition

Soit n un element de IN^*.

La fonction $x\longmapsto x^n$ est une bijection (ademt une fonction reciproque) de $[0;+\infty[$ vers $[0;+\infty[$ et sa fonction

reciproroque s'appelle la fonction racine nieme que l'on note $\sqrt[n]{\ }$.

Pour tout x de IR^+ ; $\sqrt[n]{x}$ se lit racine nieme de x ou bien racine d'ordre n de x

Resultats

- $(\forall x \in IR^+)(\forall y \in IR^+)\ \ \sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow x = y^n$
- $(\forall x \in IR^+)(\forall y \in IR^+)\ \ \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$
- $(\forall x \in IR^+)\ (\sqrt[n]{x})^n = \sqrt[n]{x^n} = x$
- $(\forall x \in IR^+)(\forall y \in IR^+)\ \ \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x < y$
- La fonction $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ est continue sur IR^+
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$

Exemples :

1) On resoudre dans IR l'equation $(E_1): x^3 = 8$

On designe par S_1 à l'ensemble des solutions de (E_1)

On a $x \in S_1 \Leftrightarrow x^3 = 8$

$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{8}$

$\Leftrightarrow x = 2$

Et par suite $S_1 = \{2\}$

2) On resoudre dans IR l'equation $(E_2): x^5 = -243$

On designe par S_2 à l'ensemble des solutions de (E_2)

On a $x \in S_2 \Leftrightarrow x^5 = -243$

$\Leftrightarrow (-x)^5 = 243$

$\Leftrightarrow -x = \sqrt[5]{243} = 3$

$\Leftrightarrow x = -3$

Et par suite $S_2 = \{-3\}$

3) On resoudre dans IR l'equation $(E_3): x^4 = 7$

On designe par S_3 à l'ensemble des solutions de (E_3)

On a $x \in S_3 \Leftrightarrow x^4 = 7$

$\Leftrightarrow (|x|)^4 = 7$

$\Leftrightarrow |x| = \sqrt[4]{7}$

$\Leftrightarrow x = \sqrt[4]{7}\ \ ou\ \ x = -\sqrt[4]{7}$

Et par suite $S_3 = \{-\sqrt[4]{7}; \sqrt[4]{7}\}$

4) On compare les deux nombres $a = \sqrt[4]{5}\ et\ b = \sqrt[6]{4}$

On a $a^{12} = (a^4)^3 = 5^3 = 125$

Et $b^{12} = (b^6)^2 = 4^2 = 16$

Comme $a^{12} > b^{12}\ \ et\ a > 0\ et\ b > 0$ alors $a > b$

Remarque : l'ensemble des solutions de l'équation $x^n = a$ avec $a \in IR^*$ et $n \in IN^* - \{1\}$ est

La parité de n / Le signe de a	n pair	n impair
$a > 0$	$S = \{-\sqrt[n]{a}; \sqrt[n]{a}\}$	$S = \{\sqrt[n]{a}\}$
$a < 0$	$S = \emptyset$	$S = \{-\sqrt[n]{-a}\}$

Application :

1) Soit n un élément de IN résoudre l'équation $(E): x^{n+1} = n - 5$ (discuter selon les valeurs de n)

2) Comparer $\sqrt[7]{6}\ et\ \sqrt[6]{7}$

3) Résoudre dans IR l'équation $\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2} = \sqrt[3]{4x}$.

Propriété

Soit u une fonction positive sur un intervalle I et $x_0 \in I$

1) Si la fonction u est continue sur I alors la fonction $\sqrt[n]{u}$ est continue sur I
2) Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$
3) Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty$

Exemples :

1) On etudie la continuité de la fonction

$f : x \longmapsto \sqrt[3]{arctanx}$ en tout intervalle de son ensemble de définition

On a $\forall x \in IR^+ \; arctanx \geq 0 \; et \quad \forall x \in IR^{*-} arctanx < 0$

Donc $D_f = IR^+$ comme la fonction arctan est continue sur IR alors elle est continue sur IR^+ et par suite la fonction f est continue sur IR^+.

2) On calcul $L_1 = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$

On ne peut pas calculer cette limite directement car on vas trouver une forme indéterminée $\frac{0}{0}$

On utilise l'identité remarquable $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ on obtient

$$L_1 = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1} = \frac{1}{3}$$

3) On calcul $L_2 = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^3 + 1} - \sqrt[4]{x^4 + 1}$

On a $\sqrt[3]{x^3 + 1} - \sqrt[4]{x^4 + 1}$

$$= \left(\sqrt[3]{x^3 + 1} - x\right) - \left(\sqrt[4]{x^4 + 1} - x\right)$$

$$= \frac{\left(\sqrt[3]{x^3 + 1}\right)^3 - (x)^3}{\left(\sqrt[3]{x^3 + 1}\right)^2 + x\sqrt[3]{x^3 + 1} + x^2} - \frac{\left(\sqrt[4]{x^4 + 1}\right)^4 - (x)^4}{\left(\sqrt[4]{x^4 + 1} + x\right)\left(\sqrt[4]{(x^4 + 1)^2} + x^2\right)}$$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt[3]{x^3 + 1}\right)^2 + x\sqrt[3]{x^3 + 1} + x^2} - \frac{1}{\left(\sqrt[4]{x^4 + 1} + x\right)\left(\sqrt{x^4 + 1} + x^2\right)}$$

Et par suite $L_2 = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^3 + 1} - \sqrt[4]{x^4 + 1} = 0$

Propriété Les operations sur racine nieme

Soient a et b deux elements de IR^+ et n et p deux elements de $IN^* - \{1\}$ on a les proprietés suivantes :

1) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$; 2) $\sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$ $et\ a \neq 0$; 3) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $et\ \ b \neq 0$

4) $\sqrt[np]{a^p} = \sqrt[n]{a}$; 5) $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}$; 6)$\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}$

Exemples

1) Simplifier $A = \sqrt[3]{9\sqrt{3} - 11\sqrt{2}}$

On a $A^3 = 9\sqrt{3} - 11\sqrt{2} = 3\sqrt{3} - 9\sqrt{2} + 6\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$

$$= \left(\sqrt{3}\right)^3 - 3\left(\sqrt{3}\right)^2\sqrt{2} + 3\left(\sqrt{2}\right)^2\sqrt{3} - \left(\sqrt{2}\right)^3$$

$$= \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^3$$

Et par suite $A = \sqrt{3} - \sqrt{2}$.

2) On simplifier le nombre $B = \frac{\sqrt[4]{32} \times \sqrt[6]{27} \times \sqrt[4]{108}}{\sqrt{\sqrt[4]{144}}}$

On a $a \geq 0\ et\ \sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$

On a $B = \frac{\sqrt[4]{2^5} \times \sqrt[6]{3^3} \times \sqrt[4]{2^2 \times 3^3}}{\sqrt[8]{2^4 \times 3^2}}$

$$= \frac{\sqrt[4]{2^4 \times 2} \times \sqrt[6]{3^3} \times \sqrt[4]{2^2} \times \sqrt[4]{3^3}}{\sqrt[8]{2^4} \times \sqrt[8]{3^2}}$$

$$= \frac{2\sqrt[4]{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{2} \times \sqrt[4]{3^3}}{\sqrt{2} \times \sqrt[4]{3}}$$

$$= 2\sqrt[4]{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{2} \times \sqrt[4]{3^2}$$

$$= 6\sqrt[4]{2}$$

Application :

1) simplifier $A = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{256}} \times \sqrt[4]{64}}{\sqrt[5]{24300000} \times \sqrt[3]{1024}}$

2) Demontrer que $(\forall a \in IR_+^*)(\forall n \in IN^*)(\forall p \in \mathbb{Z})\ \sqrt[n]{a^p} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^p$

3) $(\forall a \in IR_+)(\forall n \in IN^*)(\forall p \in \mathbb{Z})\ \sqrt[n]{a} \times \sqrt[p]{a} = \sqrt[np]{a^{n+p}}$

3) les puissances rationnelles d'un nombre reel strictement positif

Définition soit un reel strictmeent positif et r un nombre rationnel

Le nombre a^r est le nombre $\sqrt[q]{a^p}$ tel que $r = \frac{p}{q}$ et $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in IN^*$ et s'appelle ola puissance rationnelle de nombre a de base r.

Remarque : soit a de IR_+^* on a $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}}$ et $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}\ en\ genral\ \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}\ (n \in IN^*)$

Exemples :

On a $7^{\frac{5}{8}} = \sqrt[8]{7^5}$ $et\ 3^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{3^4} = 3\sqrt[3]{3}$ $et\ 4^{-\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{4^{-5}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4^5}} = \frac{1}{8\sqrt[3]{2}}$

4) Limite de la suite $(n^{\alpha})_{n\in IN^*}$ tel que $\alpha \in \mathbb{Q}^*$

Propriété : Soit α de $\mathbb{Q}^*$

1) Si $\alpha > 0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} n^{\alpha} = +\infty$; 2) Si $\alpha < 0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} n^{\alpha} = 0$

Demonstation : Soit α de $\mathbb{Q}^*$

$On\ pose\ \alpha = \frac{p}{q}\ avec\ p \in \mathbb{Z}^*\ et\ q \in IN^*$

1) Si $\alpha > 0$ alors $p > 0$ et par suite $n^{\alpha} = n^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{n^p}$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} n^p = +\infty$ et d'apres la propriété 9 on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[q]{n^p} = +\infty$ c à d $\lim\limits_{x\to+\infty} n^{\alpha} = +\infty$

2) Si $\alpha < 0$ alors $p < 0$ et par suite $n^{\alpha} = n^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\frac{1}{n^{-p}}}$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{n^{-p}} = 0$ et d'apres la propriété 9 on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[q]{n^p} = 0$ c à d $\lim\limits_{x\to+\infty} n^{\alpha} = 0$

5) Les opérations sur les puissances rationnelles

Propriété Soit r et r' deus elements de $\mathbb{Q}$ et a et b deux elements de IR_+^* on a :

1) $a^r a^{r'} = a^{r+r'}$; 2) $(ab)^r = a^r b^r$; 3) $(a^r)^{r'} = a^{rr'}$

4) $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$; 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$; 6) $\frac{a^r}{a^{r'}} = a^{r-r'}$

Exemple :

on simplifie $A = \frac{\sqrt[4]{32} \times \sqrt[6]{27} \times \sqrt[4]{108}}{\sqrt[4]{6}}$

On a $A = \frac{\sqrt[4]{32} \times \sqrt[6]{27} \times \sqrt[4]{108}}{\sqrt[4]{6}}$

$= \frac{(2^5)^{\frac{1}{4}} \times (3^3)^{\frac{1}{6}} \times (2^2 \times 3^3)^{\frac{1}{4}}}{(2 \times 3)^{\frac{1}{4}}}$

$= \frac{2^{\frac{5}{4}} \times 3^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{3}{4}}}{2^{\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{1}{4}}} = 2^{\frac{5}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{1}{4}}$

Et par suite $A = 2^{\frac{3}{2}} \times 3 = 3\sqrt{2^3} = 6\sqrt{2}$

6) La derivé de la fonction racine n^ieme

On pose $\begin{cases} f(x) = x^n \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} \\ x \geq 0 \end{cases}$ $avec\ n \in IN^*$ $on\ a\ (\forall x \in IR^+) f'(x) = nx^{n-1}$

Don f^{-1} est derivable sur IR_+^*car $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Alors $(\forall x \in IR^+)$ $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = (f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = \dfrac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}$

Et comme $\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1} = x^{\frac{n-1}{n}} = x^{1-\frac{1}{n}}\ alors\ \left(\sqrt[n]{x}\right)' = \dfrac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$

Propriété

Soit n de IN^*

1) La fonction $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ est derivable sur IR_+^* et on a $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \dfrac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$
2) Si f est une fonction positive et strictement sur un intervalle I alors la fonction $x \longmapsto \sqrt[n]{f(x)}$ est dérivable sur I et on a $(\forall x \in I)$ $\left(\sqrt[n]{f(x)}\right)' = \frac{1}{n}\left(f(x)\right)^{\frac{1}{n}-1} \times f'(x)$
3) Soit r de $\mathbb{Q}$
   a) La fonction $x \longmapsto x^r$ est dérivable sur IR_+^* et on a $(x^r)' = rx^{r-1}$
   b) Si f est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I alors la fonction $x \longmapsto \left(f(x)\right)^r$ est dérivable sur I et on a$(\forall x \in I)$ $\left(\left(f(x)\right)^r\right)' = r\left(f(x)\right)^{r-1} \times f'(x)$

Exemples :

1) La fonction $x \longmapsto \sqrt[5]{x}$ est derivable sur IR_+^* et on a$(\forall x \in IR_+^*)$ $\left(\sqrt[5]{x}\right)' = \dfrac{1}{5}(x)^{\frac{1}{5}-1}$

$$= \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$$

2) $soit$ g $la\ fonction\ x \longmapsto \sqrt[3]{(x^2-4)^2}\ on\ D_g = IR$

La fonction $f : x \longmapsto (x^2-4)^2$ est derivable sur IR car c'est une fonction polynome et strictement positive sur $IR - \{-2; 2\}$ et on a

$\forall x \in]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$ $g(x) = (x^2-4)^{\frac{2}{3}}$ donc la fonction g est dérivable sur les intervalles $]-\infty; -2[$ et $]2; +\infty[$ et

par suite : $(\forall x \in D_1)$

$$(g)'(x) = \frac{2}{3}(x^2-4)' \times (x^2-4)^{-\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{4}{3}x(x^2-4)^{-\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-4}} \quad avec\ D_1$$

$$=]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$$

Et pour tout x de D_2

$=]-2; 2[\ on\ a\ (\forall x \in D_2)$ $(g)'(x)$

$$= \frac{2}{3}(4-x^2)' \times (4-x^2)^{-\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{-4}{3}x(4-x^2)^{-\frac{1}{3}} = \frac{-4x}{3\sqrt[3]{4-x^2}}$$

Application :

Etudier la derivabilité de chaque fonctions des fonctions suivantes et determiner la fonction derivée

$f_1 : x \longmapsto \sqrt[5]{(x^3-1)^6}$; $f_2 : x \longmapsto x^2\sqrt[4]{x^2-x}$; $f_3 : x \longmapsto x^{\frac{5}{7}} + \sqrt[6]{x}$

Conclusion :

$f(x)$	$f'(x)$	L'ensemble de définition de f'
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$	IR_+^*
x^r ; ($r \in \mathbb{Q}$)	rx^{r-1}	IR_+^*
$(u(x))^r$; ($r \in \mathbb{Q}$)	$r(u(x))^{r-1} \times u'(x)$	L'esnsemble des elements x tel que u'(x)existe et u(x) > 0
$arctanx$	$\frac{1}{x^2+1}$	IR
$\arctan(u(x))$	$\frac{u'(x)}{(u(x))^2+1}$	L'ensemble de définition de u

V. les fonctions primitives

1) Définition et propriétés

Exemple :

On considère les fonctions suivantes :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto 2x+3$ $\quad$ $x \longmapsto x^2+3x-1$

On constate que $F'(x) = 2x+3 = f(x)$.

On dit dans ce cas que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Définition : f est une fonction continue sur un intervalle I.

On appelle primitive de f sur I, une fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$

Remarque :

Dans ces conditions, on a l'équivalence :

"F a pour dérivée f" et "f a pour primitive F".

Exemple :

$F(x) = \frac{x^2}{2}$ est une primitive de $f(x) = x$ car $F'(x) = f(x)$ pour tout réel x.

Application : Dans chaque cas, déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle I.

a) $f(x)=x^3-2x$ sur I= $\mathbb{R}$

b) $f(x)=3x^2-\frac{3}{x^3}$ sur $I=]0;+\infty[$

c) $f(x)=(2x-5)(x^2-5x+4)^2$ sur I= $\mathbb{R}$

d) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ sur I= $\mathbb{R}$

e) $f(x)=\cos(2x)-3\sin(3x-1)$ sur I= $\mathbb{R}$

a) $F(x)=\frac{1}{4}x^4-x^2$

b) $f(x)=3x^2-\frac{3}{x^3}=3x^2-3x^{-3}$ donc $F(x)=x^3-3\times\frac{1}{-2}x^{-2}=x^3+\frac{3}{2x^2}$

c) $f(x)=(2x-5)(x^2-5x+4)^2$ du type $u'u^n$ avec $u(x)=x^2-5x+4$

donc $F(x)=\frac{1}{3}(x^2-5x+4)^3$

d) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ du type $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(x)=x^2+1$

donc $F(x)=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{x^2+1}=\sqrt{x^2+1}$

e) $f(x)=\frac{1}{2}\times 2\cos(2x)-3\sin(3x-1)$ donc $F(x)=\frac{1}{2}\sin(2x)+\cos(3x-1)$

Propriété

f est une fonction continue sur un intervalle I.

Si F est une primitive de f sur I alors pour tout réel C, la fonction $x\mapsto F(x)+C$ est une primitive de f sur I.

<u>Démonstration :</u>

F est une primitive de f.

On pose $G(x)=F(x)+C$.

$G'(x)=F'(x)+0=F'(x)=f(x)$.

Donc G est une primitive de f.

<u>Exemple :</u>

En reprenant l'exemple précédent, toute fonction de la forme $F_C(x)=\frac{x^2}{2}+C$, avec

$C\in\mathbb{R}$, est une primitive de $f(x)=x$

2) Primitive prenant une valeur particulière en un point

<u>Résultat :</u> Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit x_0 un élément de I et y_0 un réel. Si f admet des primitives sur I alors il en existe une seule, F, telle que : $F(x_0)=y_0$.

Preuve :

La fonction f admet des primitives, soit G une primitive de f.

On considère la fonction F définie par $F(x) = G(x) - G(x_0) + y_0$

F est aussi une primitive de f car $F'(x) = G'(x) = f(x)$.

De plus on a $F(x_0) = G(x_0) - G(x_0) + y_0 = y_0$ **Donc *F* existe**.

Soit H une autre primitive de f vérifiant $H(x_0) = y_0$.

On sait qu'il existe un réel k tel que $H(x) = F(x) + k$ pour tout $x \in I$.

Donc en particulier on a $H(x_0) = F(x_0) + k$ d'où $y_0 = y_0 + k$ donc $k = 0$ donc $H = F$.

La fonction ***F*** est donc bien unique.

Exemple :

Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$f(x) = 2x + 3$

Déterminer la primitive F de f telle que $F(3) = -5$

On vérifie facilement que les primitives de f sont

$F(x) = x^2 + 3x + k$, $k \in \mathbb{R}$

Si on veut $F(3) = -5$ alors $3^2 + 3 \times 3 + k = -5$

d'où $k = -23$

La primitive cherchée est donc $F(x) = x^2 + 3x - 23$

Propriété : Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

3) Linéarité des primitives

Propriété

f et g sont deux fonctions continues sur $[a ; b]$.

Si F est une primitive de f et G est une primitive de g sur $[a ; b]$ alors :

- $F + G$ est une primitive de $f + g$,

- kF est une primitive de kf avec k réel.

Démonstration :

- $(F+G)' = F' + G' = f + g$

- $(kF)' = kF' = kf$

4) Primitives des fonctions usuelles

Fonction	Les primitives F de f (c un réel)	L'intervalle I de définition f et F
$f(x)=a$, $a\in\mathbb{R}$	$F(x)=ax+c$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^n$ $n\geq 0$ entier	$F(x)=\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^n$ $n<-1$ entier	$F(x)=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x)=2\sqrt{x}+c$	$]0;+\infty[$
$f(x)=\cos(ax+b)$ $(a\neq 0)$	$F(x)=\frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$	IR
$f(x)=\sin(ax+b);(a\neq 0)$	$F(x)=-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+c$	$\mathbb{R}$
$f(x)=1+\tan^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$	$F(x)=\tan x+c$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ $;k\in\mathbb{Z}$
$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$	$F(x)=\arctan x+c$	$\mathbb{R}$
$u'u^n$ $n\neq -1$ entier	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$	Si $n<0, u(x)\neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}+c$	$u(x)>0$
$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	$\frac{u}{v}$	I est l'intervalle tel que u et v soient derivables et v ne s'annule sur I

Application :

vérifier dans chaque cas que la fonction f possède des fonctions primitives sur l'intervalle I et déterminer sa primitives F telle que $F(x_0)=y_0$

1) $f:x\longmapsto(2x-1)(x^2-x+3)$;
$I=IR$ $x_0=1\ et\ y_0=2$

2) $f:x\longmapsto\dfrac{6x-1}{(3x^2-x)^2}$;
$I=]1;+\infty[$ $x_0=2\ et\ y_0=0$

3) $f:x\longmapsto\dfrac{tan^2x}{cos^2x}$; $I=\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$
$x_0=-\frac{\pi}{4}\ et\ y_0=-1$

Solution :

1) La fonction f est continue sur IR en tant que fonction polynome et alors elle admet des fonctions primitives sur IR

De plus,f est de la forme u'u, où u est la fonction definie sur IR par $u(x)=x^2-x+3$

On deduit que les fonctions primitives de f dont les fonctions definies sur IR par :

$$F_c(x)=\frac{1}{2}(x^2-x+3)^2+c$$

Où c est un reel

L'egalité $F(1)=2$ implique que la fonction primitive cherchée est la fonction definie sur IR par :

$$F(x)=\frac{1}{2}(x^2-x+3)^2-\frac{5}{2}$$

2) La fonction f est continue sur $I=]1;+\infty[$ en tant que fonction rationnelle definie sur $I=]1;+\infty[$ et alors elle admet des fonctions primitives sur $I=]1;+\infty[$.

De plus f est de la forme $\frac{u'}{u^2}$, ou u est la fonction definie sur I $=]1;+\infty[$ par

$u(x) = 3x^2 - x$

On en deduit que les fonctions primitives

de f sont les fonctions definies sur $I =]1;+\infty[$ par:

$$F_c(x) = -\frac{1}{3x^2 - x} + c$$

Où c est un reel .

L'egalité $F(2) = 0$ implique que la fonction

primitive cherchée est la fonction definie sur

$I =]1;+\infty[$ par :

$$F(x) = -\frac{1}{3x^2 - x} + \frac{1}{10}$$

3) La fonction f est continue sur $I = \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

$en\ tant\ que\ quotient\ de\ fonctions\ continues\ sur$

$$I = \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\ et$$

Dont la dominateut ne s'annule pas.

elle admet donc des fonctions primitives sur

$$I = \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$$

De plus , f est de la forme $u'u^2$, o'u est

la fonctionn definie sur $I = \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ $u(x) = tanx$

On en deduitque les fonctions primitives

de f sont definies sur $I = \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\ par:$

$F_c(x) = \frac{1}{3}\tan^3 x + c$ Où c est un reel

L'egalité$F\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$ implique que la fonction

primitive cherchée est la fonction definie sur

$I = \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\ par\ F(x) = \frac{1}{3}\tan^3 x - \frac{2}{3}.$

Application : déterminer les fonctions primitives de f sur I dans chacun des cas suivants

1) $f: x \longmapsto \dfrac{1}{x^2 - 2x + 2}$; $I = IR$

2) $f: x \longmapsto cos^3x$; $I = IR$

3) $f: x \longmapsto \dfrac{2(x-1)}{(x^2 - 2x - 3)^2}$; $I =]3;+\infty[$

4) $f: x \longmapsto \dfrac{1}{\cos^4 x}$; $I = I = \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

5) $f: x \longmapsto tan^2x + \tan^4 x$; $I = \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

6) $f: x \longmapsto \dfrac{x+5}{(x-1)^4}$; $I =]1;+\infty[$

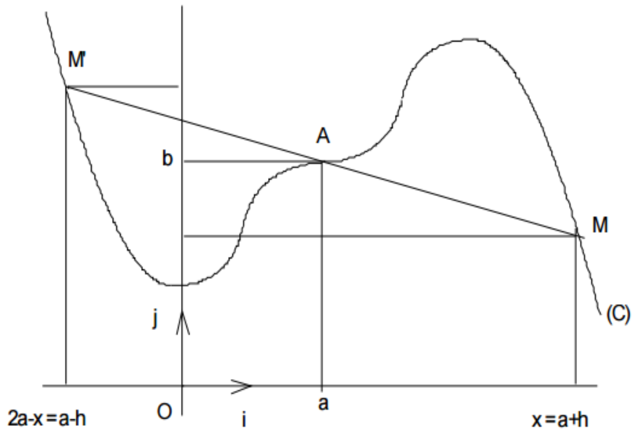
VI. Etude des fonctions numériques

1) Elements de symétrie de courbe d'une fonction numérique

Soit f une fonction définie sur l'ensemble Df et qui est représentée graphiquement dans un repère orthonormé $(O,\vec{i};\vec{j})$ par une courbe (C).

Axe de symétrie

La droite (D) d'équation x = a est axe de symétrie de (C) si et seulement si, pour tout M∈(C), son symétrique M' par rapport à (D) appartient aussi à (C). On traduit cela par l'une des deux propriétés équivalentes ci-dessous:



- Pour tout $x \in D_f$, on a: $2a - x \in D_f$. et

$f(2a - x) = f(x)$.

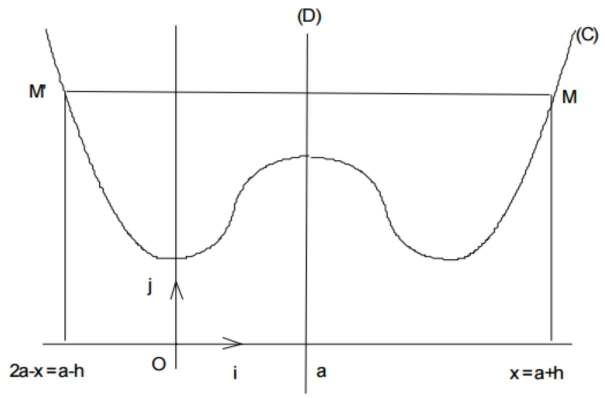
- Pour tout $h \in IR$. tel que $a + h \in D_f$., on a:

$$a - h \in D_f \text{ et } f(a + h) = f(a - h).$$

Dans le cas particulier où a = 0, on retrouve la propriété du graphique d'une fonction paire: Axe de symétrie: axe des ordonnées.

Centre de symétrie

Le point A de coordonnées (a;b) est centre de symétrie de (C) si et seulement si, pour tout M∈(C), son symétrique M' par rapport à A appartient aussi à (C). On traduit cela par l'une des deux propriétés équivalentes cidessous:



- Pour tout $x \in D_f$, on a: $2a - x \in D_f$ et

$f(2a - x) + f(x) = 2b$

- Pour tout $h \in$ IR tel que $a + h \in D_f$, on a: $a - h \in D_f$ et

$$f(a + h) + f(a - h) = 2b$$

Dans le cas particulier où a = b = 0, on retrouve la propriété du graphique d'une fonction impaire: Centre de symétrie: origine O du repère.

2) La fonction periodique

Définition Soit D un intervalle ou une réunion d'intervalles de ℝ et f une fonction définie sur D et T ∈ℝ un nombre réel donné. On dit que f est périodique de période T lorsque les 2 conditions suivantes sont vérifiées :

1°) Pour tout $x \in \mathbb{R}$: [$x \in D$ ssi $x+T \in D$]

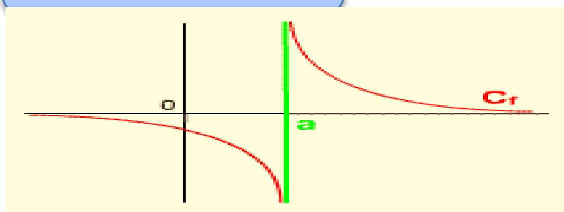
2°) et pour tout $x \in D$: [$f(x+T) = f(x)$]

Remarque : Pour construire la courbe d'une fonction périodique f de période T $\in\mathbb{R}$, on construit (une portion de) la courbe sur un intervalle de longueur T, puis on duplique indéfiniment cette portion à droite et à gauche.

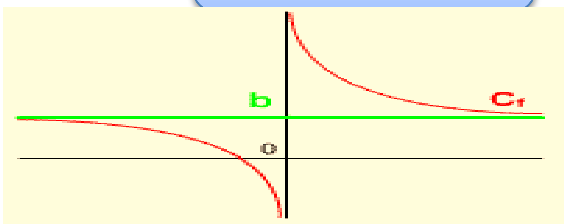
On dit qu'on a réduit le domaine d'étude à un intervalle de longueur T de D_f

3) Les branches infinies

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ → La courbe de f admet une asymptote verticale d'équation $x = a$

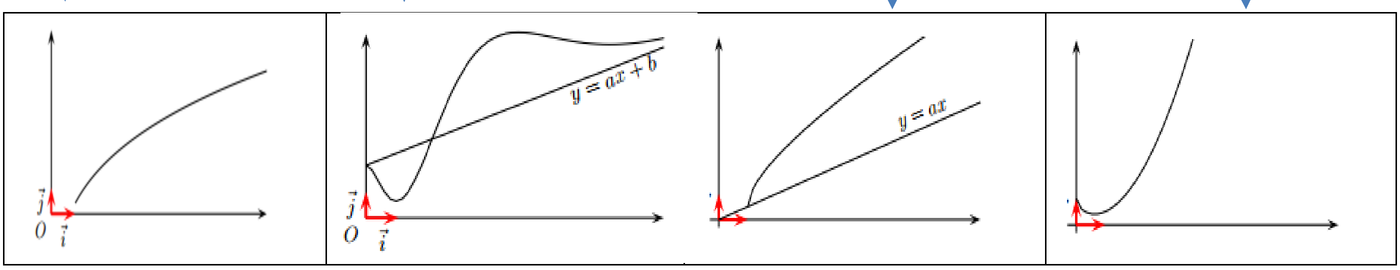


$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = b$ → La courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = b$



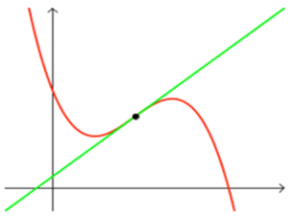
$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \pm\infty$

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ → la courbe de f admet une branche parabolique de direction l'axe (Ox)
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \neq 0$
  - $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - ax = b$ → La courbe de f admet la droite $(\Delta): y = ax + b$ comme asymptote oblique
  - $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - ax = \pm\infty$ → la courbe de f admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$ → la courbe de f admet une branche parabolique de direction l'axe (Oy)



3) Concavité de courbe d’une fonction

Propriété Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I.



La fonction f est convexe sur I si sa dérivée f ' est croissante sur I,

soit $f''(x) \geq 0$ pour tout x de I.

La fonction f est concave sur I si sa dérivée f ' est décroissante sur I,

soit $f''(x) \leq 0$ pour tout x de I.

Un point d'inflexion est un point où la courbe traverse sa tangente en ce point.

Remarque importante : Au point d'inflexion, la fonction change de convexité.

Exercice 1 Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \cos(arctan(2x+1))$

1. Étudier le sens de variation de f, ses limites en $\pm\infty$.

2. Résoudre l'équation $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

3. Montrer que la restriction de f à $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ admet une fonction reciproque g dont on precisera l'ensemble definition

4. Calculer $g'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Solution

Pour étudier le sens de variation de f, on peut dériver la fonction (f est dérivable sur R) et remarquer que la dérivée vaut

$$f'(x) = -\frac{2}{1+(2x+1)^2}\sin(\arctan(2x+1))$$

Puisque arctan $(2x+1)$ est toujours un élément de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ [, et que sin$u$ est du signe de u si

$$u \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

$f'(x)$ est du signe opposé à $arctan(2x+1)$Mais,

$$\arctan(2x+1) \geq 0 \Leftrightarrow 2x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$$

Ainsi, f est croissante sur $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$ et décroissante sur$\left]-\frac{1}{2}; +\infty, \right[$ D'autre part, $\lim_{x\to+\infty} 2x+1 = +\infty$ Par composition des limites, $\lim_{x\to+\infty} arctan(2x+1) = \frac{\pi}{2}$

Par composition à n nouveau,

$\lim_{x\to+\infty} cos(arctan(2x+1)) = 0$. La limite et le raisonnement sont identiques en $-\infty$.

2. On a $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos(\arctan(2x+1)) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow \cos(\arctan(2x+1)) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathrm{Z},\ \arctan(2x+1) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

Or, arctan prend ses valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$et\ \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ sont dans cet intervalle

uniquement pour $k = 0$. Ainsi, on doit résoudre

$$\arctan(2x+1) = \frac{\pi}{4} = \arctan(1)$$

$$\text{et } \arctan(2x+1) = -\frac{\pi}{4} = \arctan(-1)$$

Par injectivité de la fonction arctan, ceci revient à

$2x+1 = 1$ ou $2x+1 = -1$. Finalement, les seules solutions sont $x = 0$ et $x = -1$

1. En reprenant le travail effectué à la première $question, on\ a\ que\ f'(x) < 0\ si\ x > -\frac{1}{2}.$ $Ainsi,\ \ f\ est$

continue et strictement décroissante sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2};+\infty,\right[$. *on a* f$\left(-\frac{1}{2}\right) = \cos(0) = 1$

et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. f réalise donc une bijection de $\left]-\frac{1}{2};+\infty,\right[$. sur l'intervalle]0,1]. Elle admet une fonction réciproque g définie sur]0,1], et à valeurs *dans* $\left]-\frac{1}{2};+\infty,\right[$.

4. Puisque f' ne s'annule pas sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty,\right[$.g est de derivable et sa derivé est continue sur]0,1[. En plus, en tout réel de la forme $f(a)$, avec a $> \frac{1}{2}$,

$$\text{on a } g'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

$$\text{Or } f(0) = \cos(arctanc(1)) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Donc } g'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

Exercice 2

Résoudre les équations suivantes :

1) $arctan(2x) + arctan(x) = \frac{\pi}{4}$; 2) $x + \sqrt[3]{x} = 2$; 3) $\sqrt[3]{x+a} + \sqrt[3]{a-x} = \sqrt[3]{b}$ *avec* $a; b \in IR_+^*$

Correction

1)$\arctan(2x) + \arctan(x) = \frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow \tan(\arctan(2x) + \arctan(x)) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Il n'y a pas équivalence car tan(A) = tan(B) n'entraine pas que $A = B$ sauf si on peut montrer à l'avance que A et B sont tous les deux dans un intervalle

du type $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Or } tan(a+b) = \frac{tan(a) + tan(b)}{1 - tan(a)tan(b)} \text{ et}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \text{ Donc } arctan(2x) + arctan(x) = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{tan(arctan(2x) + tan(arctan(x))}{1 - tan(arctan(2x))tan(arctan(x))} = 1$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, tan(arctan(x)) = x et donc tan(arctan(2x)) = 2x.

$$arctan(2x) + arctan(x) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{2x + x}{1 - 2x \times x} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{3x}{1 - 2x^2} = 1$$

$$\Rightarrow 3x = 1 - 2x^2$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 3x - 1 = 0$$

Le discriminant est Δ = 9 + 8 = 17, et les racines sont

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{4} \text{ et } x_2 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4}$$

Il est clair que $arctan(2x_1) + arctan(x_1) < 0$ car $x_1 = \frac{-3-\sqrt{17}}{4} < 0$Donc x_1 n'est pas une solution de l'équation et par suite x_2 est la seule solution de l'équation.

2) soit l'équation $x+\sqrt[3]{x}=2$

L'ensemble de definition de l'equation est $D=[0;+\infty[$

Soit x un element de IR^{+} on pose $t=\sqrt[3]{x}$ avec $t\geq 0$

On a $x+\sqrt[3]{x}=2 \Leftrightarrow t^3+t-2=0$

$$\Leftrightarrow t^3-1+t-1=0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(t^2+t+1)+t-1=0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(t^2+t+2)=0$$

$$\Leftrightarrow t-1=0 \ car \ \ t^2+t+2\neq 0$$

$$\Leftrightarrow t=1$$

Et par suite $S=\{1\}$

3) soit l'équation (E): $\sqrt[3]{x+a}+\sqrt[3]{a-x}=\sqrt[3]{b}$

$avec\ a;b\in IR_{+}^{*}$

Sot D l'ensemble de definition de (E)

$$x\in D \Leftrightarrow x+a\geq 0\ et\ a-x\geq 0$$

$$\Leftrightarrow x\geq -a\ et\ x\leq a$$

$$\Leftrightarrow x\in[-a;a]$$

Donc $D=[-a;a]$

(E) $\Leftrightarrow 2a+3\sqrt[3]{a^2-x^2}.\left(\sqrt[3]{a+x}+\sqrt[3]{a-x}\right)=b$

$$\Leftrightarrow 2a+3\sqrt[3]{a^2-x^2}.\sqrt[3]{b}=b$$

1re cas :si $b-2a<0$ alors $S=\emptyset$

2ème cas : si $b=2a$ alors (E) $\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{a^2-x^2}.\sqrt[3]{b}=0$

$$\Leftrightarrow b(a^2-x^2)=0$$

Comme $b\neq 0$ alors $x=a$ ou $x=-a$

Et par suite $s=\{-a;a\}$

2ème cas : si $b-2a>0$ alors on a

(E) $\Leftrightarrow 27(a^2-x^2)b=(b-2a)^3$

$$\Leftrightarrow a^2-x^2=\frac{(b-2a)^3}{27b}$$

$$\Leftrightarrow x^2=-\frac{(b-2a)^3}{27b}+a^2=A$$

Alors :

Si $A<0$ alors $S=\emptyset$

Si $A=0$ alors $S=\{0\}$

Si $A>0$ alors $S=\{-\sqrt{A};\sqrt{A}\}$

Exercice 3 Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}{x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{x+6}-2}{1-\sqrt[3]{3-x}}$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+1}-(x+1)$; 5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}\left(\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)$; 6) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^{\frac{1}{3}}-1+(x-1)^{\frac{3}{2}}}{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}$

Correction

1) 1[re] méthode

$$\sqrt[3]{x+1}-1=\frac{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^3-1}{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+\sqrt[3]{x+1}+1}$$

$$=\frac{x}{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+\sqrt[3]{x+1}+1}$$

Et

$$\sqrt{x+1}-1=\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-1}{\sqrt{x+1}+1}$$

$$=\frac{x}{\sqrt{x+1}+1}$$ Et par suite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+\sqrt[3]{x+1}+1\right)x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}+1}{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+\sqrt[3]{x+1}+1}=\frac{2}{3}$$

2[ème] méthode

On a $\sqrt{x+1}=\sqrt[6]{(x+1)^3}=\left(\sqrt[6]{x+1}\right)^3$

Et $\sqrt[3]{x+1}=\sqrt[6]{(x+1)^2}=\left(\sqrt[6]{x+1}\right)^2$

Et on pose $t=\sqrt[6]{x+1}$ tel qu'on a $x\to 0 \Leftrightarrow t\to 1$

Et par suite $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{t\to 1}\frac{t^2-1}{t^3-1}$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{t+1}{t^2+t+1}=\frac{2}{3}$$

2) On a

$$\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}{x}=\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)-\left(\sqrt[3]{x+1}-1\right)}{x}$$

$$=\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}-\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-1}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}-\frac{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^3-(1)^3}{x\left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}-\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+\sqrt[3]{x+1}+1}$$

et par suite $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}-\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+\sqrt[3]{x+1}+1}\right)=\frac{1}{6}$$

3) on a $\sqrt[3]{x+6}-2=\frac{x-2}{\left(\sqrt[3]{x+6}\right)^2+2\sqrt[3]{x+6}+4}$

$$\text{Et } 1-\sqrt[3]{3-x}=\frac{(1)^3-\left(\sqrt[3]{3-x}\right)^3}{1+\sqrt[3]{3-x}+\left(\sqrt[3]{3-x}\right)^2}$$

$$=\frac{x-2}{1+\sqrt[3]{3-x}+\left(\sqrt[3]{3-x}\right)^2}$$

Et par suite $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x+6}-2}{1-\sqrt[3]{3-x}}$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left(1+\sqrt[3]{3-x}+\left(\sqrt[3]{3-x}\right)^2\right)}{\left(\left(\sqrt[3]{x+6}\right)^2+2\sqrt[3]{x+6}+4\right)(x-2)}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{1+\sqrt[3]{3-x}+\left(\sqrt[3]{3-x}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{x+6}\right)^2+2\sqrt[3]{x+6}+4}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$$

4) *on a* $\sqrt[3]{x^3+1}-(x+1)=\left(\sqrt[3]{x^3+1}-x\right)-1$

$$\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^3-(x)^3}{\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^2+x\sqrt[3]{x^3+1}+x^2}-1$$

Et par suite

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+1}-(x+1)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^3-(x)^3}{\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^2+x\sqrt[3]{x^3+1}+x^2}-1=-1$$

5) $\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt[3]{x^3+x^2}$

$$= \frac{\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^3 - \left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)^3}{\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^2 + \sqrt[3]{x^3+1}.\sqrt[3]{x^3+x^2} + \left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)^2}$$

$$= \frac{1-x^2}{\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^2 + \sqrt[3]{x^3+1}.\sqrt[3]{x^3+x^2} + \left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)^2}$$

Et par suite

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}\left(\sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt[3]{x^3+x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 1} \frac{-(x+1)}{\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^2 + \sqrt[3]{x^3+1}.\sqrt[3]{x^3+x^2} + \left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)^2}$$

$$= -\frac{2}{3\sqrt[3]{4}} = -\frac{\sqrt[3]{2}}{3}$$

6) soit $x > 1$ on a

$$\frac{x^{\frac{1}{3}} - 1 + (x-1)^{\frac{3}{2}}}{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt[3]{x} - 1 + \left(\sqrt{x-1}\right)^3}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{\left(\sqrt{x-1}\right)^3}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{x-1}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + \sqrt[3]{x} + 1} \times \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2-1} + \frac{(x-1)\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2-1}}{\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + \sqrt[3]{x} + 1\right)(x+1)} + \frac{(x-1)}{\sqrt{x+1}} \quad et\ par\ suite$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^{\frac{1}{3}} - 1 + (x-1)^{\frac{3}{2}}}{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x^2-1}}{\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + \sqrt[3]{x} + 1\right)(x+1)} + \frac{(x-1)}{\sqrt{x+1}} = 0$$

Exercice 4

soit f la fonction definie sur IR par $\begin{cases} f(x) = x.\arctan\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right) & si\ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) Demontrer que f est continue en 0

2) $demontrer\ que\ f(x) = \frac{\pi}{2}x - \frac{x}{2}arctanx \quad (\forall x \in IR^{*+})\ puis\ deduire\ une\ une$ $expression\ simplifiable\ \ à\ f(x) \quad (\forall x \in IR^{*+})$

3) $on\ considere\ l'equation\ \ \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x}}{x}\right) = \frac{5\pi}{12} \quad (E) \quad (x \in IR)$

a) demontrer que l'equation(E)equivaut $f\left(\sqrt{x}\right) = \frac{5\pi}{12}\sqrt{x} \quad et \quad x \in IR^{*+}$

b) $determiner\ l'ensemble\ des\ solutions\ de\ (\ E)$

1) $on\ a\ \lim_{x\to 0^+} \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} = +\infty$

Et par suite $\lim_{x\to 0^+} \arctan\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right) = +\frac{\pi}{2}$

$et\ on\ a\ \lim_{x\to 0^-} \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} = -\infty$

Et par suite $\lim_{x\to 0^+} \arctan\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$

Et par suite

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x.\arctan\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right) = 0 = f(0)$$

Et par suite f est continue en 0.

Correction

2) $soit\ x\ de\ IR^{*+}, il\ existe\ un\ unque\ \alpha\ de\ \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

Tel que $\tan(\alpha) = x$ c à d $\arctan(x) = \alpha$

$$on\ a\ \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} = \frac{1+\sqrt{1+tan^2(\alpha)}}{\tan(\alpha)}$$

$$= \frac{1+\frac{1}{\cos(\alpha)}}{\tan(\alpha)} = \frac{1+\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

$$= \frac{2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right).\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{1}{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$= \tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$ona\ \alpha \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow = -\frac{\pi}{2} < -\frac{\alpha}{2} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$$

et par suite

$(\forall x \in IR^{*+})\ f(x) = x.arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\right)$

$= x\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right) = x\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}x = x\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\arctan(x)$

Donc $f(x) = \frac{\pi}{2}x - \frac{x}{2}arctanx \quad (\forall x \in IR^{*+})$

Conclusion

On a $x < 0 \Leftrightarrow -x > 0$ et par suite

$f(-x) = -\frac{\pi}{2}x - \frac{x}{2}\arctan(-x)$

Et comme f est une fonction paire alors $f(-x) = f(x)$

Et par suite $f(x) = -\frac{\pi}{2}x + \frac{x}{2}arctanx \quad (\forall x \in IR^{*-})$

3)$a)$ $on\ a\ x \in IR$ $\arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x}}{x}\right) = \frac{5\pi}{12}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x}}{x}\right) = \frac{5\pi}{12} \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}\arctan\left(\sqrt{x}(\frac{\sqrt{x+1}+1}{(\sqrt{x})^2}\right) = \sqrt{x}\frac{5\pi}{12} \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}\arctan\left(\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x}}\right) = \sqrt{x}\frac{5\pi}{12} \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(\sqrt{x}) = \frac{5\pi}{12}\sqrt{x} \\ x > 0 \end{cases}$$

$b)$ $on\ a$ $\begin{cases} f(\sqrt{x}) = \frac{5\pi}{12}\sqrt{x} \\ x > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2}\sqrt{x} - \frac{\sqrt{x}}{2}\arctan(\sqrt{x}) = \frac{5\pi}{12}\sqrt{x} \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \pi - \arctan(\sqrt{x}) = \frac{5\pi}{6} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \arctan(\sqrt{x}) = \frac{\pi}{6} \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

et par suite $S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$

Exercice 5

$-$ Soit la fonction f définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \sqrt[3]{tan^2 x}$

$1 -$ a) Montrer que f est continue sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ est derivable sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

b) calculer $f'(x)$ pour tout x element de $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ et montrer que f n'est pas dérivable à droite en 0.

$2-$ a) Montrer que f réalise une bijection de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle J que l'on précisera

b) Tracer les courbes représentatives de f et de f^{-1}dans un même repère orthonormé$(O,\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

on calculera $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$;$f\left(\frac{\pi}{3}\right)$

c) Sans calculer $f^{-1}(2)$; prover que $f^{-1}(2)>\frac{\pi}{3}$. en deduire que $f^{-1}(2)>1$

3- a) Montrer que f^{-1} est derivable sur $]0;+\infty[$et calculer $(f^{-1})'(x)$

b) Démontrer que f^{-1} est derivable est derivable à droite en 0

$II)\ H(x)=\dfrac{f^{-1}(x)-\frac{\pi}{4}}{x-1}\quad et\ H(1)=a$

1- déterminer le domaine de définition D_H de H .

2- Déterminer a pour que H soit continue sur D_H .

III) on pose $\varphi(x)=f^{-1}(x^2)+f^{-1}\left(\frac{1}{x^2}\right)$

$1-$ a) Montrer φ est derivable sur$]0;+\infty[\ et\ calculer\ \varphi'(x).\ deduire\ que : \forall x\in\ ]0;+\infty[\ \varphi(x)=\frac{\pi}{2}$

$b)$ Deduire que $\forall n\in IN^*\quad f^{-1}(n)+f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{\pi}{2}$

2) demontrer que $\forall n\in IN^*\ \ \forall k\in\{0,1,2,\dots,n\}\quad f^{-1}(n)\leq f^{-1}(n+k)\leq f^{-1}(2n)$

3) Soit la suite $(U_n)_{n\in IN^*}$ definie $par\ U_n=\dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f^{-1}\left(\frac{1}{n+k}\right)$

Montrer que $\forall n\in IN^*\ f^{-1}\left(\frac{1}{2n}\right)\leq U_n\leq f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$. en deduire $\lim_{n\to+\infty} U_n$

V) on pose $h(x)=f^{-1}(x+1)$

1- Etudier et représenter graphiquement h

2) Montrer que $\forall x\in\ ]-1;+\infty[\ 0\leq h(x)\leq\frac{5}{3}$

3- Montrer que l'équation $h(x)=x$ admet une seule solution α dans $]-1;+\infty[$(on admet que

$h'(x)<1\ \forall x>-1)$. prover que $1\leq\alpha\leq\frac{5}{3}$

4) On pose $\begin{cases} v_0=\frac{4}{3} \\ v_{n+1}=h(v_n)\ \ \forall n\in IN \end{cases}$

$a)$ Montrer que $\forall n\in IN\quad 1\leq\ v_n\leq\frac{5}{3}$

$b)$ Montrer que $\forall x \in \left]1;\frac{5}{3}\right[$ $on\ a\ |h'(x)| \leq \frac{4}{5}$

$c)$ Montrer que $\forall n \in IN\ |v_{n+1} - \alpha| \leq \frac{4}{5}|v_n - \alpha|. prover\ que\ \lim_{n\to+\infty} v_n = \alpha.$

Correction

$$f(x) = \sqrt[3]{tan^2 x}; \forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow f(x) = (tanx)^{\frac{2}{3}}$$

$$car\ tanx \geq 0\ \forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$$

$1)a)$ $la\ fonction\ (u: x \longmapsto tanx)$

$$est\ continue\quad et\ positive\ sur\ \left[0;\frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow$$

$$f = u^{\frac{2}{3}}\ est\ continue\ sur\ \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$$

$la\ fonction\ (u: x \longmapsto tanx) est\ derivable\ et$

$strictement\ et\ positive\ sur\ \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

$\Rightarrow f = u^{\frac{2}{3}}\ est\ derivable\ sur\ \left[0;\frac{\pi}{2}\right[.$

$b)\ \forall x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[; on\ a$

$$f'(x) = \frac{2}{3}u'(x).\left(u(x)\right)^{\frac{2}{3}-1}$$

$$= \frac{2}{3}.\frac{(1+tan^2 x)}{(tanx)^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \frac{2}{3}.\frac{(1+tan^2 x)}{\sqrt[3]{tanx}} > 0$$

$$\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to0^+} \frac{(tanx)^{\frac{2}{3}}}{x}$$

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{tanx}{x} \times \frac{1}{\sqrt[3]{tanx}}$$

$$= 1 \times \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Donc la fonction f n'est pas dérivable à droite en 0.

$2) - f\ est\ continue\ et\ strictement\ croissante\ sur$

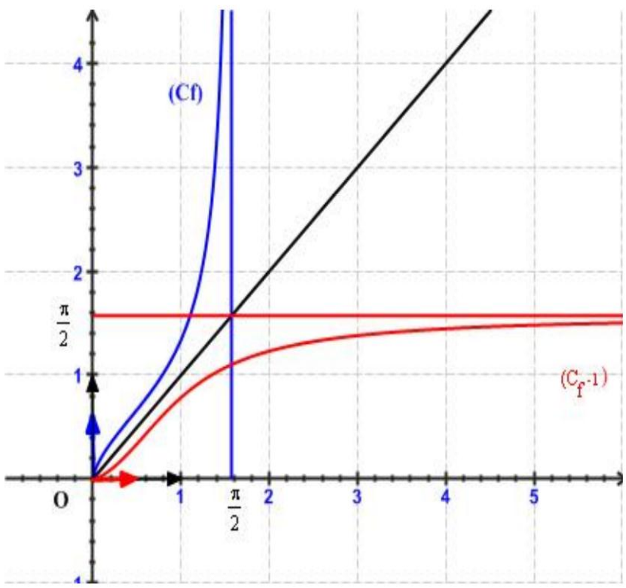
$\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ $donc\ f\ realise\ une\ bijection\ de\ \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

$$sur\ f\left(\left[0;\frac{\pi}{2}\right[\right) = \left[f(0); \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x)\right[$$

$= [0;+\infty[$

b) $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1\ et\ f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{tan^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}$

$= \sqrt[3]{3} \approx 1,4$



c) $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{3} \approx 1,4 < 2 \Rightarrow f^{-1}(2) > \frac{\pi}{3}$

$(f^{-1} est\ strictement\ croissante\ sur [0;+\infty[)$

or $\frac{\pi}{3} > 1 \Rightarrow\ f^{-1}(2) > 1$

$$3)a-f \text{ est derivable et } f'\neq 0, sur \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$$

$\Rightarrow f^{-1}$ *est derivable sur* $[0;+\infty[$ *et on a*

$$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \quad ;\forall x\in[0;+\infty[$$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(x)=\frac{1}{\frac{2}{3}.\frac{(1+tan^2t)}{\sqrt[3]{tant}}} \, avec\, f^{-1}(x)=t$$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(x)=\frac{3}{2}.\frac{\sqrt[3]{tant}}{(1+tan^2t)} \; avec\, f^{-1}(x)=t$$

$$or\, f^{-1}(x)=t$$

$$\Rightarrow f(t)=x\Rightarrow \sqrt[3]{tan^2t}=x\Rightarrow \left(\sqrt[3]{tant}\right)^2=x$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{tant}=\sqrt{x}$$

De plus on a $tan^2t=x^3 \Rightarrow 1+tan^2x=1+x^3$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(x)=\frac{3}{2}.\frac{\sqrt{x}}{(1+x^3)} \quad ;\forall x\in[0;+\infty[$$

$$b)\ \lim_{x\to 0^+}\frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(0)}{x} \underbrace{=}_{on\ pose\ f^{-1}(x)=y} \lim_{y\to 0^+}\frac{y}{f(y)}$$

$$=\lim_{y\to 0^+}\frac{1}{\frac{f(y)}{y}}=0$$

$$\Rightarrow f^{-1} \text{ est derivable à droite en } 0$$

et on a $(f^{-1})'_d(0)=0$

$$II)\ H(x)=\frac{f^{-1}(x)-\frac{\pi}{4}}{x-1} \quad et\ H(1)=a$$

1) $d_H=[0;+\infty[$

2)*la fonction* $x\mapsto \dfrac{f^{-1}(x)-\frac{\pi}{4}}{x-1}$ *est continue sur*

$[0;+\infty[\setminus\{1\}$;puisque f^{-1} est continue sur

$[0;+\infty[$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(1)}{x-1}=(f^{-1})'(1)$$

$$=\frac{3}{2}.\frac{\sqrt{1}}{(1+1^3)}=\frac{3}{4}$$

Pour que f^{-1} soit continue sur $[0;+\infty[$ il faut que

$$a=\frac{3}{4}$$

III) on pose $\varphi(x)=f^{-1}(x^2)+f^{-1}\left(\frac{1}{x^2}\right)$

1)$a-$ *derivabilité de* φ *sur* $]0;+\infty[$

on a

$$\begin{cases} \text{la fonction } v: x\mapsto x^2 \text{ est derivable sur }]0;+\infty[\\ la\ fonction\ \ f^{-1} \text{est derivable sur } [0;+\infty[\\ v(]0;+\infty[)=]0;+\infty[\subset[0;+\infty[\end{cases}$$

$$\Rightarrow f^{-1}\circ v \text{ est derivable sur }]0;+\infty[$$

$$on\ a \begin{cases} \text{la fonction } w: x\mapsto \frac{1}{x^2} \text{ est derivable sur }]0;+\infty[\\ la\ fonction\ \ f^{-1} \text{est derivable sur } [0;+\infty[\\ w(]0;+\infty[)=]0;+\infty[\subset[0;+\infty[\end{cases}$$

$$\Rightarrow f^{-1}\circ w \text{ est derivable sur }]0;+\infty[$$

Ainsi $\varphi=f^{-1}\circ v+f^{-1}\circ w$ est derivable sur $]0;+\infty[$

Et on a

$$\varphi'(x)=v'(x)\times(f^{-1})'(v(x))\ +w'(x)\times(f^{-1})'(w(x))$$

$$=2x\left[\frac{3}{2}.\frac{\sqrt{x^2}}{(1+(x^2)^3)}\right]-\frac{2}{x^3}\left[\frac{3}{2}.\frac{\sqrt{\frac{1}{x^2}}}{\left(1+\left(\frac{1}{x^2}\right)^3\right)}\right]$$

$$=2x\left[\frac{3}{2}.\frac{\sqrt{x^2}}{(1+(x^2)^3)}\right]-2x\left[\frac{3}{2}.\frac{\sqrt{x^2}}{(1+(x^2)^3)}\right]=0$$

$$\forall x\in]0;+\infty[\ \ \varphi'(x)=0$$

$$\Rightarrow \forall x\in]0;+\infty[\ \ \varphi(x)=constante$$

$$\Rightarrow \forall x\in]0;+\infty[\ \ \varphi(x)=\varphi(1)=2f^{-1}(1)=2\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

$b)soit\ n\in IN^*\ \varphi(\sqrt{n})=f^{-1}(n)+f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{\pi}{2}$

2) $\forall n\in IN^*\ \ \forall k\in\{0,1,2,\dots,n\}\ \ on\ a: 0\le k\le n$

$$\Rightarrow n\le k+n\le 2n$$

Et puisque f^{-1} est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

$$\Rightarrow f^{-1}(n) \leq f^{-1}(n+k) \leq f^{-1}(2n)$$

3) $U_n = \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f^{-1}\left(\dfrac{1}{n+k}\right)$

On a $0 < n \leq k+n \leq 2n \Rightarrow \dfrac{1}{2n} \leq \dfrac{1}{k+n} \leq \dfrac{1}{n}$

Et puisque f^{-1} est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

$$\Rightarrow f^{-1}\left(\frac{1}{2n}\right) \leq f^{-1}\left(\frac{1}{k+n}\right) \leq f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$$

$\forall n \in IN^* \ \ \forall k \in \{0,1,2,\dots,n\} \ \Rightarrow$

$$\sum_{k=0}^{n} f^{-1}\left(\frac{1}{2n}\right) \leq \sum_{k=0}^{n} f^{-1}\left(\frac{1}{n+k}\right) \leq \sum_{k=0}^{n} f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow$$

$(n+1)f^{-1}\left(\dfrac{1}{2n}\right)$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} f^{-1}\left(\frac{1}{n+k}\right) \leq (n+1)f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow f^{-1}\left(\frac{1}{2n}\right) \leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f^{-1}\left(\frac{1}{n+k}\right) \leq f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$$

$\Rightarrow \ f^{-1}\left(\dfrac{1}{2n}\right) \leq U_n \leq f^{-1}\left(\dfrac{1}{n}\right) \quad \forall n \in IN^*$

$$\text{Comme } \lim_{x\to+\infty} f^{-1}\left(\frac{1}{2n}\right) = f^{-1}(0) = 0$$

$$et \lim_{x\to+\infty} f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) = f^{-1}(0) = 0$$

$et\ f^{-1}\left(\frac{1}{2n}\right) \leq U_n \leq f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$

$$\Rightarrow (U_n)_{n\in IN^*}\ est\ convergente\ et\ \lim_{n\to+\infty} U_n = 0$$

$VI)\ h(x) = f^{-1}(x+1)$

1- $h(x)$ existe si et seulement si $(x+1) \in D_{f^{-1}}$

$\Leftrightarrow x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1 \Rightarrow D_h = [-1;+\infty[$

$$h = f^{-1}o\psi\ avec\ \psi(x) = x+1$$

$f^{-1} et\ \psi$ sont continues et strictement croissantes

$\Rightarrow h = f^{-1}o\psi$ est continue et strictement croissante

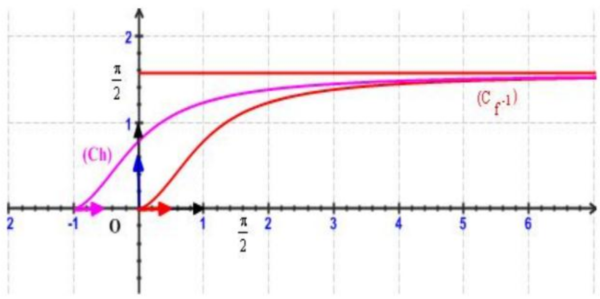
sur $[-1;+\infty[$

(N.B $h'(x) = (f^{-1}o\psi)'(x) = \psi'(x) \times (f^{-1})'(\psi(x))$)

$$= \frac{3\sqrt{x+1}}{2(1+(x+1)^3)} \ \forall x \geq -1$$

x	-1		$+\infty$
$h'(x)$	0	$+$	
h	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

$(C_h) = t_{-\vec{i}}(C_{f^{-1}})$



2) $\forall x \in]-1;+\infty[\ 0 \leq h(x) < \dfrac{\pi}{2} \leq \dfrac{5}{3}$

3) $on\ admet\ que\ h'(x) < 1\ \forall x > -1$

Montrons que l'equations $h(x) = x$ admet une seule solution sur α dans $[-1;+\infty[$

$h(x) = x \Leftrightarrow h(x) - x = 0$

on pose $g(x) = h(x) - x$

g est derivable sur $[-1\,;+\infty[$ et on a :

$$g'(x) = h'(x) - 1$$

donc $g'(x) = h'(x) - 1 < 0\ \forall x > -1\ et$

$$(g'_d(-1) = h'_d(-1) - 1 = -1)$$

x	-1 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	-1 $\qquad\qquad$ -
g	1 $\searrow$ $-\infty$

g est continue et strictement décroissante sur$[-1;+\infty[$

donc g réalise une bijection de $[-1;+\infty[$ sur $]-\infty;1]$.

$0 \in]-\infty;1]$ donc il existe un réel unique

$$\alpha \in [-1;+\infty[$$

Tel que $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow h(\alpha) = \alpha$.

Montrons que $1 \leq \alpha \leq \frac{5}{3}$

$g(1) = h(1) - 1 = f^{-1}(2) - 1 > 0$ ($d'apres\ I.2.c$)

$g\left(\frac{5}{3}\right) = h\left(\frac{5}{3}\right) - \frac{5}{3} \leq 0$

$car\ \forall x \in]-1;+\infty[\ 0 \leq h(x) \leq \frac{5}{3}$

On a $g\left(\frac{5}{3}\right) \leq g(\alpha) \leq g(1) et\ g^{-1} est\ strictement$

$decroissante\ sur\ ]-\infty;1] \ \Rightarrow 1 \leq \alpha \leq \frac{5}{3}$

4. $\begin{cases} v_0 = \frac{4}{3} \\ v_{n+1} = h(v_n) \ \ \forall n \in IN \end{cases}$

a) $Montrons\ par\ recurrence\ que: \forall n \in IN; 1 \leq v_n \leq \frac{5}{3}$

$-$Pour n $= 0 \ \ 1 \leq v_0 = \frac{4}{3} \leq \frac{5}{3}$

$-Pour\ n \geq 0; supposons\ que\ 1 \leq v_n \leq \frac{5}{3}\ et$

$montrons\ que\ \ 1 \leq v_{n+1} \leq \frac{5}{3}$

en effet : $1 \leq v_n \leq \frac{5}{3}$ $et\ h\ est\ strictement\ croissante$

$$[-1;+\infty[\Rightarrow 1 < h(1) \leq h(v_n) \leq h\left(\frac{5}{3}\right) \leq \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow 1 \leq v_{n+1} \leq \frac{5}{3}$$

$Ainsi\ \forall n \in IN \ \ 1 \leq v_n \leq \frac{5}{3}$

b) Montrons que $\forall x \in \left]1;\frac{5}{3}\right[\ on\ a\ |h'(x)| \leq \frac{4}{5}$

$$|h'(x)| = \frac{3\sqrt{x+1}}{2(1+(x+1)^3)}$$

$on\ a\ 1 < x < \frac{5}{3} \Rightarrow 2 < x+1 < \frac{8}{3}$

$$\Rightarrow \sqrt{2} < \sqrt{x+1} < \sqrt{\frac{8}{3}}$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{2} < 3\sqrt{x+1} < \sqrt{24}$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{2} < 3\sqrt{x+1} < 2\sqrt{6}$$

$on\ a\ 2 < x+1 < \frac{8}{3} \Rightarrow 8 < (x+1)^3 < \frac{512}{27}$

$$\Rightarrow 9 < 1+(x+1)^3 < \frac{539}{27}$$

$$\Rightarrow 18 < 2(1+(x+1)^3) < \frac{1078}{27}$$

$$\Rightarrow \frac{27}{1078} < \frac{1}{2(1+(x+1)^3)} < \frac{1}{18}$$

$$\Rightarrow \frac{3\sqrt{x+1}}{2(1+(x+1)^3)} < \frac{2\sqrt{6}}{18} \Rightarrow |h'(x)| < \frac{\sqrt{6}}{9} < \frac{4}{5}$$

c) $\forall n \in IN\ |v_{n+1} - \alpha| \leq \frac{4}{5}|v_n - \alpha|$?

$h\ est\ continue\ sur\ \left[1;\frac{5}{3}\right]; h\ est\ derivable\ sur$

$\left]1;\frac{5}{3}\right[\ et \forall x \in \left]1;\frac{5}{3}\right[\ on\ a\ |h'(x)| \leq \frac{4}{5}$

$\forall n \in IN, v_n \in \left[1;\frac{5}{3}\right]; \alpha \in \left[1;\frac{5}{3}\right]$

$$\Rightarrow |h(v_n) - h(\alpha)| \leq \frac{4}{5}|v_n - \alpha|\ \forall n \in IN$$

$ontrons\ que\ \lim_{n\to+\infty} v_n = \alpha.$

On montre par recurrence que

$$\forall n \in IN\ |v_n - \alpha| \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n |v_0 - \alpha|$$

$$on\ a\ \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n = 0\ car\ \frac{4}{5} \in]-1;1[$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} v_n = \alpha.$$

Exercice 6

Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $f(x) = 2\arctan\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) + \arctan(x)$

1. Calculer $f(0)$.

2. Pour tout x réel, calculer la valeur $f'(x)$ de la dérivée de f au point x.

3. Que dire de f.

Correction

$$1.\, f(0) = 2\,arctan\left(\sqrt{1+0^2} - 0\right) + arctan(0)$$

$$= 2\,arctan(1)$$

$$= \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$f'(x) = \left(2\,arctan\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) + arctan(x)\right)'$$

$$= 2 \times \frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} - 1}{1 + \left(\sqrt{1+x^2} - x\right)^2} + \frac{1}{1+x^2}$$

$$= 2 \times \frac{\frac{x - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}}{1 + \left(1 + x^2 - 2x\sqrt{1+x^2} + x^2\right)} + \frac{1}{1+x^2}$$

$$= 2 \times \frac{x - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}\left(2 + 2x^2 - 2x\sqrt{1+x^2}\right)} + \frac{1}{1+x^2}$$

$$= \frac{x - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}\left(1 + x^2 - x\sqrt{1+x^2}\right)} + \frac{1}{1+x^2}$$

$$= \frac{x - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2} \times \sqrt{1+x^2}\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)} + \frac{1}{1+x^2}$$

$$= -\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} = 0$$

3. Sur l'intervalle $\mathbb{R}$: $(x) = K$

$$or\ f(0) = \frac{\pi}{2}\ donc\ f(x) = \frac{\pi}{2}$$