01 Soient A et B deux points dans le plan tel que $AB = 10cm$.

1 Déterminer l'ensemble des nombres réels m tel que le système des points $(A; m^2 - 8)$ et $(B; -2m + 6)$ a un barycentre.

2 Construire le barycentre G des points pondérés $(A; -7)$ et $(B; 4)\}$.

3 On considère le point H dans le plan tel que : $\overrightarrow{BH} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$.
Montrer que H est un barycentre d'un système des points pondérés à déterminer.

02 **Première partie :**
Soit ABC un triangle et soit α un nombre réel.
On considère deux points D et E tels que : $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CE} = \alpha\overrightarrow{CA}$.

1 Faire une figure dans le cas où $\alpha = \frac{1}{3}$ et $\alpha = -1$.

2 Montrer que $D = Bar\{(A; 1-\alpha), (B; \alpha)\}$.

3 Montrer que $E = Bar\{(C; 1-\alpha), (A; \alpha)\}$

Deuxième partie :

1 Construire le point G le barycentre des points pondérés $(A; 1)$, $(B; 4)$ et $(C; -1)$.

2 Déterminer puis construire l'ensemble des points M dans le plan tel que :

$$\|\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = 8$$

03 Soit $ABCD$ un rectangle de centre O.

1 Construire le barycentre I du système des points $(A; 1)$ et $(B; 3)$ et le barycentre K du système des points $(C; 1)$ et $(D; 3)$.

2 En déduire l'ensemble (Γ) des points M tel que :

$$\|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD}\|$$

3 Montrer que O est le milieu de $[IK]$.

4 Construire le barycentre G du système des points $(A; 1)$, $(B; 1)$ et $(C; 2)$, puis montrer que $G \in [BD]$. En déduire l'ensemble des points M tel que : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires.

5 Construire le barycentre J du système des points $(B; 2)$ et $(C; 1)$ et le barycentre L du système des points $(A; 1)$ et $(D; 2)$.

6 Montrer que le quadrilatère $IJKL$ est un parallélogramme de centre O

04 Soit ABC un triangle isocèle de sommet A tels que : $AB = 6cm$, $BC = 4cm$ et I le milieu de $[BC]$.

On considère les points J et K définis par : $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.

1 Construire les points J et K.

2 Montrer que $J = Bar\{(A;a),(C;c)\}$ en déterminant les coefficients a et c.

3 Construire le barycentre G des points pondérés $(A;4)$, $(B;3)$ et $(C;-1)$

4 Le plan est muni au repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$.

a. Déterminer les cordonnées des point I, J, K et G.

b. Montrer que les points I, J et K sont alignés.

c. Déterminer puis construire l'ensemble (E_1) des points M dans le plan tel que :

$$\|4\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = 3\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$$

d. Soit (E_2) l'ensemble des points M dans le plan tel que :

$$\|4\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|4\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|$$

.

i. Vérifier que $B \in (E_2)$.

ii. Montrer que $M \in (E_2) \Rightarrow GM = \frac{\sqrt{10}}{6}$ puis construire (E_2).

05

1 On considère M, E et N trois points non alignés. Soit H le barycentre du système $\{(M;3),(E;1),(N;1)\}$, Q celui de $\{(M;3),(N;1)\}$ et R celui de $\{(M;3),(E;1)\}$.

a. Démontrer que les droites (EQ) et (NR) passent par H.

b. Soit P le milieu du segment $[EN]$.

i. Prouver que M, P et H sont alignés.

ii. Exprimer $\overrightarrow{PH}$ en fonction de $\overrightarrow{PM}$.

2 On donne un triangle rectangle direct ABC et isocèle en A tel que $AB = AC = a$, $a > 0$.

a. Déterminer le point G barycentre du système $\{(A;4),(B;-1),(C;-1)\}$.
Construire G.

b. Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan tels que :
$4\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 - \overrightarrow{MC}^2 = 2a^2$.
Construire (E).