# Chapitre 10

# Dérivation

## Capacités attendues

- Approcher une fonction au voisinage d'un point ;
- Reconnaitre que le nombre dérivée de la fonction en $x_0$ est le coefficient directeur de la tangente à cette courbe au point d'abscisse $x_0$ ;
- Reconnaitre les dérivées des fonctions de référence ;
- Maitriser les techniques de calcul de la dérivée de fonctions ;
- Déterminer une équation de la tangente à une courbe en un point et construire cette tangente ;
- Déterminer la monotonie d'une fonction à partir de l'étude du signe de sa dérivée ;
- Déterminer le signe d'une fonction à partir de son tableau de variation ou de sa courbe représentative ;
- Résoudre des problèmes concernant des valeurs minimales et des valeurs maximales.
- Appliquer la dérivation dans le calcul de certaines limites.

# I Nombre dérivé

## 1 Définition

**Définition** Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$. Le taux de variation $T_f(x_0,h)$ de $f$ entre $x_0 \in I$ et $x_0+h \in I$ est :

$$T_f(x_0,h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Si la limite, lorsque $h$ tend vers 0, du taux de variation $T_f(x_0,h)$ existe, la fonction $f$ est dite dérivable en $x_0$. Cette limite est alors appelée le nombre dérivé $f'(x_0)$ de $f$ en $x_0$ :

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

**Exemple** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $h \neq 0$, le taux de variation de $f$ est :
$T_f(x,h) = \dfrac{(x+h)^2-x^2}{h} = \dfrac{2xh+h^2}{h} = 2x+h.$
La limite lorsque $h$ tend vers 0 de $T_f(x,h)$ est $f'(x) = 2x$.

**Application**

Étudier la dérivabilité de la fonction $f$ en $a$ dans les cas suivants :

1. $f(x) = 3x^2+2x-1\ ;\quad a=\sqrt{2}$
2. $f(x) = |x^2-2x|\ ;\quad a=0$
3. $f(x) = \sqrt{|x+3|}\ ;\quad a=-3$
4. $f(x) = x\sqrt{x}\ ;\quad a=0$

**Remarque : Les notations en physique**

On notera fréquemment $\dfrac{df}{dx}(x_0)$ à la place de $f'(x_0)$.

## 2 Interprétation géométrique

Soit $f$ une fonction définie sur $I$ et dérivable en $x_0 \in I$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé. On note $M_0$ le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse $x_0$ et $M_h$ le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse $x_0+h$. Le coefficient directeur de la sécante $S_h = (M_0M_h)$ à la courbe $\mathcal{C}$ est le taux de variation $T_f(x_0,h)$. Lorsque $h$ tend vers 0, la position limite de $M_h$ est celle du point $M_0$ et la position limite de la sécante $S_h$ est la tangente $T_{x_0}$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $x_0$. Le coefficient directeur de cette tangente est $f'(x_0)$, la limite des coefficients directeurs des sécantes.

**Propriété** Soit $f$ une fonction définie sur $I$ et dérivable en $x_0 \in I$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. La *tangente* à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $x_0$ est la droite $T_{x_0}$ d'équation

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

En particulier, le coefficient directeur de cette tangente est le nombre $f'(x_0)$.

**Application**

Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{P} : y = f(x)$ (où $f : x \mapsto x^2$) au point $A(1,1)$.

**Propriété** Si $f$ non dérivable en $x_0$ mais $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$, $\mathcal{C}_f$ admet une (demi-)tangente verticale en $x_0$.

## 3 Approximation affine d'une fonction

Soit $f$ une fonction dérivable en $a$. Alors : $(\exists! l \in \mathbb{R})\ \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h+a) - f(a)}{h} = l$

On pose : $u(h) = \dfrac{f(h+a) - f(a)}{h} - l$

Donc : $f(h+a) = f(a) + lh + hu(h)$ et $\lim\limits_{h\to 0} u(h) = 0$

Par suite, on peut négligé $hu(h)$ lorsque $h$ tend vers 0. Et on a l'approximation affine du nombre $f(h+a)$ au voisinage de 0 : $f(h+a) \simeq f(a) + lh$.

Or $h = x - a$ , alors : $f(x) \simeq f(a) + f'(a)(x - a)$

**Définition** Soit $f$ une fonction dérivable en $a$.
Si $x$ est une approximation de $a$ alors le nombre $f(a) + (x-a)f'(a)$ est une approximation de $f(x)$.
La fonction affine : $x \mapsto f(a) + (x-a)f'(a)$ s'appelle : **la fonction affine tangentielle de la fonction $f$ en $a$**

**Application**

On considère les fonctions $f$ et $g$ définies par : $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sqrt{x}$.

1. Étudier la dérivabilité de $f$ et $g$ en $a = 1$.
2. En déduire une approximation affine de $f(1+h)$ et et celle de $g(1+h)$ au voisinage de 0.
3. Donner une valeur approchée de $1,00578^2$ et celle de $\sqrt{1,00791}$

**Application**

Donner une valeur approchée de $f(3,05)$ sachant que $f(3) = 1$ et $f'(3) = 6$.

# II Dérivabilité à droite ; dérivabilité à gauche

## 1 Définition

**Définition**

- Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $[a; a+\alpha[$ tel que $\alpha > 0$
  On dit que la fonction $f$ est dérivable à droite en $a$ s'il existe un réel $l_1$ tel que
  $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = l_1$
  le nombre $l_1$ s'appelle le nombre dérivé de $f$ à droite en $a$ il est noté $f'_d(a)$ et on a : $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'_d(a)$.
- Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $]a-\alpha; a]$ tel que $\alpha > 0$
  On dit que la fonction $f$ est dérivable à gauche en $a$ s'il existe un réel $l_2$ tel que
  $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = l_2$
  le nombre $l_2$ s'appelle le nombre dérivé de $f$ à gauche en $a$ il est noté $f'_g(a)$ et on a : $\lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'_g(a)$.

**Propriété**

Soient $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ et $a \in I$ .
$f$ est dérivable en $a$ si et seulement si elle est dérivable à droite en $a$, dérivable à gauche en $a$ et $f'_d(a) = f'_g(a)$

## 2 Interprétation géométrique

**Propriété**

- Si la fonction $f$ est dérivable à droite en $a$ alors $\mathcal{C}_f$ admet une **demi-tangente** $(T_1)$ au point $A(a, f(a))$ définie par : $y = f'_d(a)(x-a) + f(a)$ et $x \geqslant a$.
- Si la fonction $f$ est dérivable à gauche en $a$ alors $\mathcal{C}_f$ admet une **demi-tangente** $(T_2)$ au point $A(a, f(a))$ définie par : $y = f'_g(a)(x-a) + f(a)$ et $x \leqslant a$.

**Application**

Étudier la dérivabilité de la fonction $f$ à droite et à gauche en $a$ puis interpréter géométriquement les résultats. $f(x) = x|x-2|$ et $a = 2$

**Propriété**

- Si $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x-a} = \pm\infty$ alors $f$ n'es pas dérivable à droite en $a$ et $\mathcal{C}_f$ admet une demi-tangente verticale au point $A(a, f(a))$
- Si $\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x) - f(a)}{x-a} = \pm\infty$ alors $f$ n'es pas dérivable à gauche en $a$ et $\mathcal{C}_f$ admet une demi-tangente verticale au point $A(a, f(a))$

# III Fonction dérivée

## 1 Dérivabilité sur un intervalle

**Définition** Quand $f$ admet un nombre dérivé en tout point $x \in I$, on dit que $f$ est dérivable sur $I$. On définit alors la fonction dérivée, notée $f' : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{array}$.

## 2 Dérivées des fonctions usuelles

### 1 Activité :

Soient $a$ un réel et $n$ un entier naturel.

On considère les fonctions : $f_1 : x \mapsto a$; $f_2 : x \mapsto ax$; $f_3 : x \mapsto x^n$; $f_4 : x \mapsto \cos x$; $f_5 : x \mapsto \sin x$; $f_6 : x \mapsto \tan x$.

1. Montrer que les fonctions $f_1$ ; $f_2$ ; $f_3$ ; $f_4$ ; $f_5$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et que leurs fonctions dérivées sont définies par :
   $f'_1 : x \mapsto 0$; $f'_2 : x \mapsto a$; $f'_3 : x \mapsto nx^{n-1}$ ; $f'_4 : x \mapsto -\sin x$; $f'_5 : x \mapsto \cos x$.
2. Montrer que la fonction $f_6$ est dérivable sur tout intervalle inclue dans $D_{f_6} = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$.
   que leur fonction dérivée est définie par : $f'_6 : x \mapsto 1 + \tan^2 x$

**Propriétés** Soient $m$ , $p$ et $k$ des nombres réels et $n$ un entier naturel. Pour tout réel $x$ on a :

| $f(x)$ | $f'(x)$ | Domaine de validité | Condition |
|---|---|---|---|
| $k$ | $0$ | $\mathbb{R}$ | $k \in \mathbb{R}$ |
| $x$ | $1$ | $\mathbb{R}$ | |
| $mx+p$ | $m$ | $\mathbb{R}$ | $m, p \in \mathbb{R}$ |
| $\frac{1}{x}$ | $-\frac{1}{x^2}$ | $\mathbb{R}-\{0\}$ | |
| $x^n$ | $nx^{n-1}$ | $\mathbb{R} : (n \geqslant 0)$; $\mathbb{R}-\{0\} : (n<0)$ | $n \in \mathbb{Z}-\{0\}$ |
| $\sqrt{x}$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $]0,+\infty[$ | |
| $\cos(x)$ | $-\sin(x)$ | $\mathbb{R}$ | |
| $\sin(x)$ | $\cos(x)$ | $\mathbb{R}$ | |
| $\tan(x)$ | $1+\tan^2(x)$ | $\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi/k \in \mathbb{Z}\right\}$ | |

**Démonstration**

Soit $f$ la fonction affine définie par : $f\ : x \longmapsto mx+p$.

On a : $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)+f(a)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{m(a+h)+p-ma-p}{h} = \lim\limits_{h\to 0} m = m.$

Donc pour tout $a$ de $\mathbb{R}$ cette limite existe et finie.

D'où $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est $f'\ : x \longmapsto m$.

**Démonstration**

On considère la fonction $f\ : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$.

Quel que soit $a \neq 0$, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-1}{a(a+h)} = -\dfrac{1}{a^2}$. Donc pour tout $a \neq 0$ cette limite existe et finie.

D'où $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ et sa fonction dérivée est $f'\ : x \longmapsto -\dfrac{1}{x^2}$.

**Démonstration**

On considère la fonction $f\ : x \longmapsto \sqrt{x}$.

Quel que soit $a>0$, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)+f(a)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$.

D'après les opérations sur les limites on a : $\lim\limits_{h\to 0} \sqrt{a+h}+\sqrt{a} = 2\sqrt{a}$ donc $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)+f(a)}{h} = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$.

Donc pour tout $a>0$ cette limite existe et finie.

D'où $f$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et sa fonction dérivée est $f'\ : x \longmapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

**Démonstration**

On considère la fonction $f\ : x \longmapsto \cos(x)$.

Quel que soit $a \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(a+h)-\cos(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\left(\frac{2a+h}{2}\right)\times\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h} =$ $\displaystyle -\lim_{h\to 0}\sin\left(\frac{2a+h}{2}\right)\times\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = -\sin(a)$. Donc pour tout $a \in \mathbb{R}$ cette limite existe et finie.

D'où $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est $f'\ : x \longmapsto -\sin(x)$.

**Démonstration**

On considère la fonction $f\ : x \longmapsto \sin(x)$.

Quel que soit $a \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(\frac{2a+h}{2}\right)\times\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h} =$ $\displaystyle \lim_{h\to 0}\cos\left(\frac{2a+h}{2}\right)\times\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = \cos(a)$. Donc pour tout $a \in \mathbb{R}$ cette limite existe et finie.

D'où $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est $f'\ : x \longmapsto \cos(x)$.

**Démonstration**

On considère la fonction $f\ : x \longmapsto \sin(x)$.

Quel que soit $a \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi /\ k \in \mathbb{Z}\right\}$, $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\tan(a+h)-\tan(a)}{h} =$ $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\tan(h)\left(1+\tan(a+h).\tan(a)\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(1+\tan(a+h).\tan(a)\right)\times\frac{\tan(h)}{h} = 1+\tan^2(a)$. Donc pour tout $a \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi /\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ cette limite existe et finie.

D'où $f$ est dérivable sur $a \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi /\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ et sa fonction dérivée est $f'\ : x \longmapsto 1+\tan^2(x)$.

**Remarque**

1. La fonction racine carrée (comme la fonction valeur absolue), bien que définie en zéro, n'est pas dérivable en zéro. Cet exemple prouve que l'ensemble de dérivabilité n'est pas nécessairement égal à l'ensemble de définition.

2. Bien que la fonction racine carrée ne soit pas dérivable en zéro, sa courbe admet malgré tout une tangente au point d'abscisse 0.

## 3 Opérations sur les dérivées

Soient $u$ et $v$ deux fonctions dérivables sur un intervalle $I$ et $k$ un réel. Alors,

| Fonction $f$ | Fonction dérivée $f'$ | Domaine de validité |
|---|---|---|
| $u+v$ | $u'+v'$ | $I$ |
| $uv$ | $u'v+v'u$ | $I$ |
| $ku$ | $ku'$ | $I$ |
| $\dfrac{u}{v}$ | $\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$ | tout $x \in I$ tel que $v(x) \neq 0$ |
| $\dfrac{1}{v}$ | $\dfrac{-v'}{v^2}$ | tout $x \in I$ tel que $v(x) \neq 0$ |

**Démonstration**

Soient $u$ et $v$ deux fonctions dérivables sur $\mathcal{D}$.

$$\frac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h} = \frac{u(a+h)+v(a+h)-u(a)-v(a)}{h} = \frac{u(a+h)-u(a)}{h} + \frac{v(a+h)-v(a)}{h}.$$

Posons $t_1(h) = \dfrac{u(a+h)-u(a)}{h}$ et $t_2(h) = \dfrac{v(a+h)-v(a)}{h}$. Comme $u$ et $v$ sont dérivables sur $\mathcal{D}$ alors en tout point $a$ de $\mathcal{D}$, $\lim\limits_{h\to 0} t_1(h) = u'(a)$ et $\lim\limits_{h\to 0} t_2(h) = v'(a)$. Il en résulte par opérations sur les limites que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h} = u'(a)+v'(a)$. Ceci est vrai pour tout $a$ de $\mathcal{D}$.

Alors $u+v$ est une fonction dérivable sur $\mathcal{D}$ et : $(u+v)' = u'+v'$.

**Démonstration**

Soient $u$ et $v$ deux fonctions dérivables sur $\mathcal{D}$.

On a : $\dfrac{(uv)(a+h)-(uv)(a)}{h} = \dfrac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a)}{h} = \dfrac{u(a+h)-u(a)}{h}v(a+h)+\dfrac{v(a+h)-v(a)}{h}u(a)$.

Donc, avec les notations de la démonstration précédente,

$$\frac{(uv)(a+h)-(uv)(a)}{h} = t_1(h)v(a+h)+t_2(h)u(a).$$

Il reste à étudier la limite de cette expression lorsque $h$ tend vers zéro :

Comme $t_2(h) = \dfrac{v(a+h)-v(a)}{h}$ alors $v(a+h) = ht_2(h)+v(a)$.

Mais $v$ est dérivable sur $\mathcal{D}$ alors en tout point $a$ de $\mathcal{D}$, $\lim\limits_{h\to 0} v(a+h) = v(a)$

Il en résulte, puisque $u$ est aussi dérivable sur $\mathcal{D}$, qu'en tout point $a$ de $\mathcal{D}$, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(uv)(a+h)-(uv)(a)}{h} = u'(a)v(a)+u(a)v'(a)$.

Ceci est vrai pour tout $a$ de $\mathcal{D}$ d'où $uv$ est une fonction dérivable sur $\mathcal{D}$ et : $(uv)' = u'v+uv'$

**Démonstration**

Soient $a$ un point de $\mathcal{D}$ et $v$ dérivable sur $\mathcal{D}$ tel que $v(a) \neq 0$.
Donc $\lim\limits_{h \to 0} v(a+h) = v(a)$.
Ainsi, les nombres $v(a+h)$ et $v(a)$ sont de plus en plus voisins lorsque $h$ est de plus en plus voisin de zéro. Puisque $v(a) \neq 0$, les nombres $v(a+h)$ sont aussi non nuls pour des valeurs de $h$ très voisines de zéro. Ainsi le taux de variation de $\frac{1}{v}$ entre $a+h$ et $a$ est bien défini pour ces valeurs de $h$ et :

$$t(h) = \frac{1}{h}\left[\frac{1}{v(a+h)} - \frac{1}{v(a)}\right] = -\frac{1}{v(a+h)v(a)}\left[\frac{v(a+h)-v(a)}{h}\right].$$

Comme $v$ est dérivable sur $\mathcal{D}$, pour tout point $a$ de $\mathcal{D}$, $\lim\limits_{h \to 0} \frac{v(a+h)-v(a)}{h} = v'(a)$.

Il en résulte que $\lim\limits_{h \to 0} t(h) = -\frac{1}{v(a)v(a)} v'(a) = -\frac{v'(a)}{(v(a))^2}$.
Et puisque ceci est vrai pour tout point $a$ de $\mathcal{D}$.
Alors $\frac{1}{v}$ est une fonction dérivable sur $\mathcal{D}$ et : $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$

**Démonstration**

Soient $u$ et $v$ deux fonctions dérivables sur $\mathcal{D}$.
Il suffit d'écrire $\frac{u}{v} = u \times \frac{1}{v}$ et d'appliquer les théorèmes de dérivation de l'inverse d'une fonction et d'un produit.

## 4 Composée

**Théorèmes** Soit $u$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$ et $v$ une fonction dérivable sur $u(I)$. Alors la fonction $v \circ u$ définie sur $I$ par $v \circ u(x) = v(u(x))$ est dérivable sur $I$ et, pour $x \in I$ : $(v \circ u)'(x) = v'(u(x)) \times u'(x)$.

**Propriété** $u$ une fonction dérivable sur $I$ et $n \in \mathbb{Z}^*$. Alors, lorsque $u^n$ définie :

$$(u^n)'(x) = nu'(x)u^{n-1}(x)$$

**Propriété** Soit $u$ une fonction dérivable sur $I$. Alors, pour $x$ tel que $u(x) > 0$ : $\left(\sqrt{u}\right)'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.

**Application**

Donner le domaine de définition, de dérivabilité, et le calcul de la dérivée de la fonction $f$ dans les cas suivantes :

1. $f(x) = \cos(3x+\pi)$
2. $f(x) = (2x^2 - x + 1)^6$
3. $f(x) = \sqrt{x^2+x}$
4. $f(x) = \frac{2}{2x+3}$
5. $f(x) = \frac{3}{x}\sqrt{2x+1}$
6. $f(x) = \cos(2x) + \sin(x^2)$

# IV Applications de la dérivation

## 1 Calculs de limites

**Méthode**

Les limites de taux de variation que l'on a calculé permettent, en les réutilisant, de lever certaines formes indéterminées : lorsqu'on reconnaît le taux de variation d'une fonction $f$ dérivable en $x_0$, la limite en 0 de cet taux est $f'(x_0)$.

**Application**

Déterminer les limites suivantes en admettant la dérivabilité des fonctions sin et cos :

**1** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$ **2** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(x)-1}{x}$

## 2 Variations

On peut obtenir le sens de variation d'une fonction $f$, dérivable sur un intervalle $I$ :

- soit à partir d'une somme de fonctions de même sens de variation ;
- soit à partir de composées de fonctions ;
- soit en utilisant le théorème fondamental suivant (admis) :

**Théorème** Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$.

**1** $f$ est constante sur $I$ si et seulement si $f' = 0$ sur $I$.

**2** $f$ est croissante (resp. décroissante) sur $I$ si et seulement si $f' \geqslant 0$ (resp. $f' \leqslant 0$) sur $I$.

**3** $f$ est strictement croissante (resp.strictement décroissante) sur $I$ si et seulement si $f' > 0$ (resp. $f' < 0$) sur $I$ sauf en des points isolés où elle s'annule.

**Application**

Montrer que pour $x \in \mathbb{R}^+$, $\sin(x) \leqslant x$, en considérant connue la dérivée de sin.

## 3 Extremum local

Le résultat suivant donne une *condition nécessaire* pour que $f$ ait un extremum local en $x_0$ :

**Théorème** Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$.
Si $f$ admet un extremum local en $x_0 \in I$ tel que $x_0$ ne soit pas une des extrémité de $I$ alors $f'(x_0) = 0$.

Le résultat suivant donne une *condition suffisante* pour que $f$ ait un extremum local en $x_0$ :

**Théorème** Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$ et $x_0$ un point intérieur à $I$.
Si $f'$ s'annule en $x_0$ **en changeant de signe** alors $f$ a un extremum local en $x_0$.

**Application**

**1** $f : x \mapsto x^3$ admet-elle un extremum en 0 ?

**2** $f : x \mapsto \dfrac{ax^2 + x - 1}{2x - 3}$. Comment choisir $a$ pour que $f$ admette un maximum en $x = 1$ ?

**3** Étudier la monotonie et les extremums, s'ils existent, de la fonction $f$ dans les cas suivants :

**a.** $f(x) = x^2 + 2x - 1$

**b.** $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}$

**c.** $f(x) = (2x - 3)\sqrt{x}$

**d.** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x - 1}$

**e.** $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$

**f.** $f(x) = \sqrt{x^3 - 3x + 2}$

# V Dérivées successives

**Définition** Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$. Si $f'$ est aussi dérivable sur $I$, on dit que $f$ est deux fois dérivable sur $I$ et on note :

$$(f')' = f'' = f^{(2)}.$$

Si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)}$ est dérivable sur $I$, alors $f$ infiniment dérivable sur $I$ et on a : $(f^{(n)})' = f^{(n+1)}$.

**Application**

Trouver l'expression de la dérivée $n^{\text{ième}}$ des fonctions suivantes, en fonction de $n$ (on admettra que ces fonctions sont infiniment dérivables) :

**1** $f : x \mapsto x^n$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

**2** $f : x \mapsto \cos(x)$

## VI Équation différentielle : $''y'' + \omega^2 y = 0$

**Définition** Soit $w$ un nombre réel. l'égalité $y'' + w^2 y = 0$ s'appelle une équation différentielle dont l'inconnue est la fonction $y$ et $y''$ est la dérivée seconde de $y$.

**Remarque**

L'écriture : $y'' + w^2 y = 0$ veut dire : $(\forall x \in \mathbb{R}),\ y''(x) + w^2 y(x) = 0$

**Propriété** Soit $w$ un nombre réel non nul. Les solutions de l'équation différentielle : $y'' + w^2 y = 0$ sont les fonctions définies dans $\mathbb{R}$ par : $f(x) = a\cos(wx) + b\sin(wx)$ tel que : $(a, b) \in \mathbb{R}$.
La fonction $f$ s'appelle **la solution générale** de l'équation différentielle .

**Propriété** Soient $x_0$ , $y_0$ et $z_0$ des nombres réels .
l'équation différentielle : $y'' + w^2 y = 0$ admet une et unique solution $f$ vérifiant les deux conditions : $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = z_0$.

**Application**

On considère l'équation différentielle $(E)$ : $y'' + y = 0$.

**1** Déterminer la solution générale de l'équation $(E)$.

**2** Déterminer la solution particulière $F$ vérifiant : $F(\frac{\pi}{4}) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ et $F'(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$