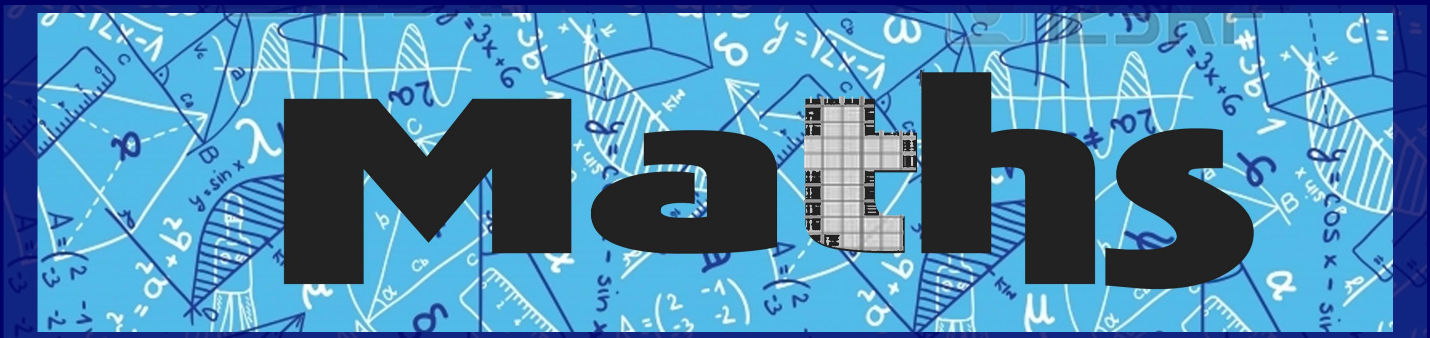
MATHEMATIQUES

1^{re}année du baccalauréat SM



Chapitre 11

Étude et représentation graphique d'une fonction numérique

Capacités attendues

- Résoudre graphiquement des équations et des inéquations ;
- Utiliser la périodicité et les éléments de symétrie d'une courbe pour réduire le domaine d'étude d'une fonction ;
- Utiliser le signe de la dérivée seconde pour étudier la concavité d'une courbe et déterminer ses points d'inflexion ;
- Étudier et représenter des fonctions polynômes, des fonctions rationnelles et des fonctions irrationnelles.
- Étudier et représenter des fonctions trigonométriques simples.

I Branches infinies ; droites asymptotes ; direction asymptotique ;

1 Étude des branches infinies

On peut rechercher s'il existe des **asymptotes**, c'est-à-dire des droites ou des courbes simples dont "la courbe représentative se rapproche indéfiniment quand le point de la courbe tend vers l'infini".

Voici les principaux cas où il est facile de donner un contenu précis à cette idée :

1. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, on a une asymptote verticale d'équation $x = a$. Quand x tend vers a, le point de la courbe représentative $(x, f(x))$ s'éloigne à l'infini, mais sa distance à la droite $x = a$ tend vers 0.

2. Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$, on a une asymptote horizontale d'équation $y = b$. Quand x tend vers l'infini, le point de la courbe $(x, f(x))$ s'éloigne à l'infini, mais la distance de ce point à la droite $y = b$ tend vers 0.

3. Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, on cherche la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$.
   - S'il n'y a pas de limite, il n'y a pas d'asymptote de ce type.
   - S'il y a une limite a,tel que $a \in \mathbb{R}$, on cherche alors la limite de $f(x) - ax$.
     - → S'il n'y a pas de limite, il n'y a pas d'asymptote de ce type.
     - → S'il y a une limite finie b, la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique de la courbe représentative de f.
     - → S'il y a une limite infinie, on est dans le cas où on a une direction asymptotique : on dit que la courbe représentative de f admet une branche parabolique d'équation $y = ax$ en $\pm\infty$
   - S'il y a une limite a, tel que $a = \pm\infty$, la courbe représentative de f admet une branche parabolique de direction l'axe (Oy).

Remarque

S'il existe une fonction g dont on connaît bien sa courbe $(\mathcal{C}_g)$ telle que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - g(x) = 0$, on dira alors que la courbe représentative de g est courbe asymptote à la courbe représentative de f. Quand x tend vers l'infini, le point $(x, f(x))$ s'éloigne à l'infini, mais la distance entre ce point et le point $(x, g(x))$ tend vers 0.
Dans ce cas, il est très important d'étudier le signe de $f(x) - g(x)$ pour savoir si la courbe est au-dessus ou en-dessous de son asymptote.

Exemple

Étude de la courbe représentative de la fonction f donnée par $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x}$.
On a $D_f =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$.

$\boxed{1}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{1+x} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{1+x} = 1$;
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x}{1+x} = -1$.
Donc, la droite d'équation $y = x-1$ est asymptote oblique à la courbe représentative de la fonction f au voisinage de $+\infty$.

$\boxed{2}$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{1+x} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{1+x} = 1$;
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x}{1+x} = -1$.
Donc, la droite d'équation $y = x-1$ est asymptote oblique à la courbe représentative de la fonction f au voisinage de $-\infty$.

$\boxed{3}$ $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x^2}{1+x} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x^2}{1+x} = -\infty$.
Donc, la droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction f au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

Application

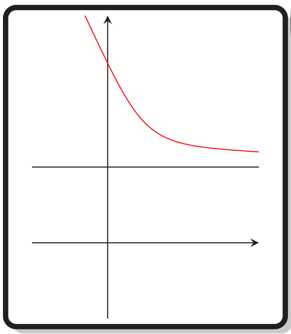
Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer leurs branches infinies :

- $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + x} - x$;
- $g : x \mapsto \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{2x^2 + 4}$;
- $h : x \mapsto \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x - 2}$

Les branches infinies

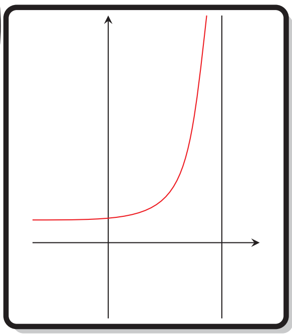
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = l$

$(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = l$



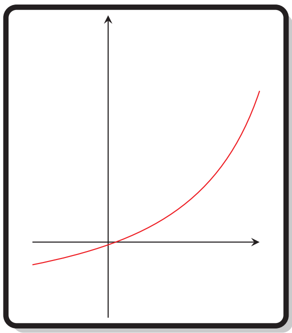
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$

$(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote verticale d'équation $x = x_0$



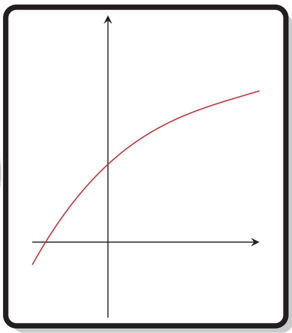
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$



$(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées.

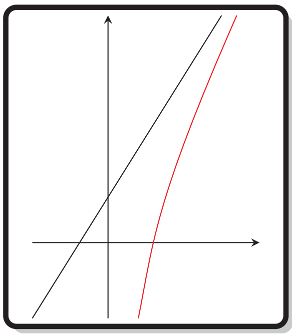
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$



$(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses.

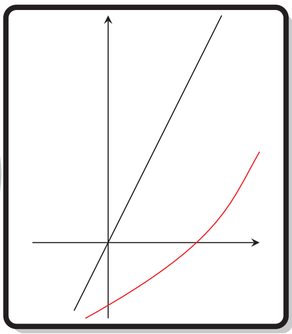
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - ax] = b$



$(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - ax] = \pm\infty$



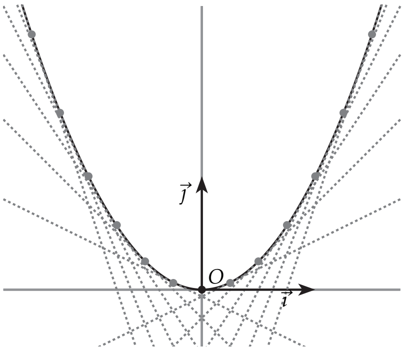
$(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction celle de la droite d'équation $y = ax$

II Point d'inflexion ; concavité d'une courbe ;

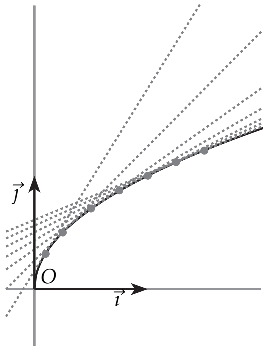
1 Convexité et concavité

Définition Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, de courbe $\mathcal{C}_f$.

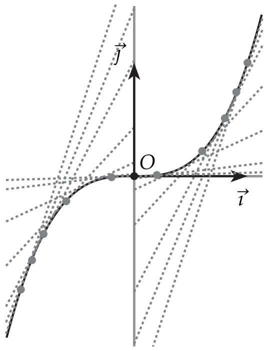
- f est *convexe* sur I, si sa courbe est située au dessus de chacune de ses tangentes.
- f est *concave* sur I, si sa courbe est située en dessous de chacune de ses tangentes.
- le point A de la courbe $\mathcal{C}_f$ est un *point d'inflexion* si la tangente en A traverse la courbe.



La fonction carrée est convexe sur $\mathbb{R}$.



La fonction racine carrée est concave sur $]0;+\infty[$.



O est point d'inflexion de la courbe de la fonction cube.

Application

Donner l'équation de la tangente T_a à la parabole $\mathcal{P}$ de la fonction $f : x \mapsto x^2$ au point d'abscisse a. Étudier la position relative de T et $\mathcal{P}$.

2 Convexité et variations de la dérivée

Propriété Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, de courbe $\mathcal{C}_f$.

- f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I.
- f est concave sur I si et seulement si f' est décroissante sur I.
- le point d'abscisse a de $\mathcal{C}_f$ est un point d'inflexion si et seulement si f' admet un maximum ou un minimum en a.

Démonstration

Soit $a \in I$ et $h : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)-f'(a)(x-a)-f(a)$. On a $h'(x) = f'(x)-f'(a)$. Si f' est croissante, on a : $h'(x) \geqslant 0$ si $x \geqslant a$ et $h'(x) \leqslant 0$ si $x \leqslant a$ donc h atteint en a son minimum $h(a) = 0$: ainsi, $h(x) \geqslant 0$ et $\mathcal{C}$ est au dessus de toute tangente : f convexe.
La réciproque est admise.

Application

Déduire du tableau de variations de $x \mapsto 3x^2$ la convexité de la fonction cube.

Propriété Les propriétés suivantes sont aussi valables pour les fonctions concaves :

- La somme de deux fonctions convexes est convexe.
- Le produit d'une fonction convexe et d'un réel positif est une fonction convexe.
- L'opposé d'une fonction convexe est concave.

Application

En déduire que $x \mapsto ax^2 + bx + c$ est convexe si $a > 0$ et *concave* si $a < 0$.

3 Convexité et dérivée seconde

Définition Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Si sa dérivée f' est dérivable, on dit que f est deux fois dérivable et note f'' sa *dérivée seconde* (la dérivée de sa dérivée f').

Théorème Soit f une fonction définie, dérivable et de dérivée dérivable sur un intervalle I. On a :

- f est convexe sur I si et seulement si $f''(x) \geqslant 0$ sur I.
- f est concave sur I si et seulement si $f''(x) \leqslant 0$ sur I.
- le point d'abscisse a de $\mathcal{C}_f$ est un point d'inflexion si et seulement si $f''(a) = 0$ et change de signe.

Application

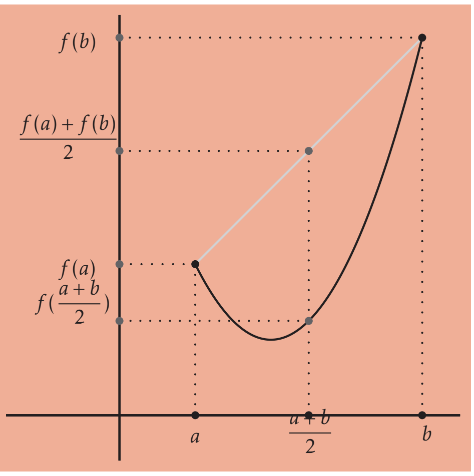
Vérifier que $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur $]0;+\infty[$.

III Inégalité de convexité

Théorème

Soit f une fonction convexe sur un intervalle $[a;b]$. Alors :

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} \geqslant f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$



Démonstration

Comme f est convexe sur $[a;b]$, la courbe de f est en particulier au dessus de la tangente au point d'abscisse $\frac{a+b}{2}$: pour $x \in [a;b]$,

$$f(x) \geqslant f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

En ajoutant les inégalités obtenues pour $x=a$ et $x=b$, il vient :

$$f(a)+f(b) \geqslant 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

qu'il suffit de diviser par 2 pour obtenir l'égalité recherchée.

Application

Démontrer que pour tout réel x, on a : $\frac{x^2+1}{2} \geqslant \left(\frac{x+1}{2}\right)^2$

IV Éléments de symétrie de la courbe d'une fonction.

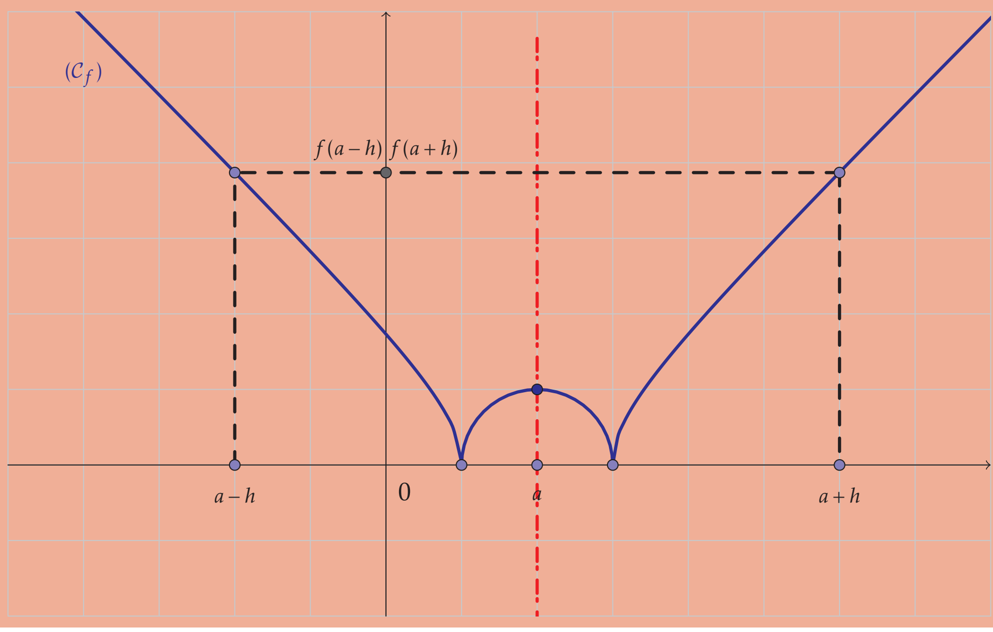
1 Axe de symétrie d'une courbe

Théorème La courbe $(\mathcal{C}_f)$ est symétrique par rapport à l'axe d'équation $x = a$ si et seulement si :

- D_f est symétrique par rapport à a.
- Pour tout réel h tel que $a + h \in D_f$: $f(a+h) = f(a-h)$.

Remarque

La deuxième condition de ce théorème peut également s'écrire :
$(\forall x \in D_f),\ f(2a - x) = f(x)$ (En posant $x = a - h$)



Application

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 16}{2x^2 + 8x + 12}$
et $(\mathcal{C}_f)$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé du plan.

1. Déterminer l'ensemble de définition, D_f de la fonction f .
2. Montrer que la droite $x = -2$ est un axe de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.

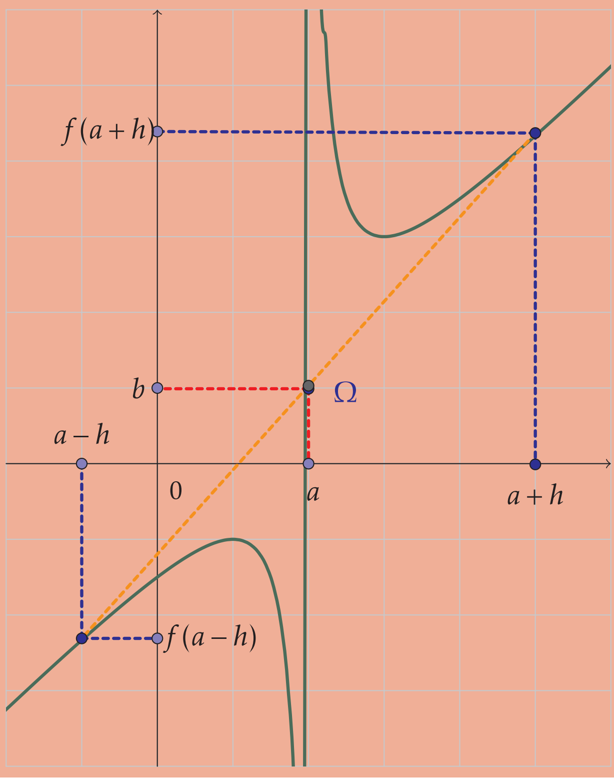
2 Centre de symétrie d'une courbe

Théorème La courbe $(\mathcal{C}_f)$ est symétrique par rapport au point $\Omega(a,b)$ si et seulement si :

- D_f est symétrique par rapport à a.
- Pour tout réel h tel que $h \in D_f$: $\dfrac{f(a+h)+f(a-h)}{2} = b$

Remarque

La deuxième condition de ce théorème peut également s'écrire :
$(\forall x \in D_f),\ 2b - f(2a-x) = f(x)$ (En posant $x = a-h$).



Application

On considère la fonction f définie par : $\dfrac{2x^3-11x^2+19x-11}{(x-1)(x-3)}$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa représentation graphique.

1. Déterminer l'ensemble de définition, D_f de la fonction f et démontrer que pour tout $x \in D_f$: $f(x) = 2x-3+\dfrac{1}{2(x-1)}+\dfrac{1}{2(x-3)}$.

2. Démontrer que le point $A(2;1)$ est centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.

Pour dresser un tableau de signe de $f'(x)$, on utilise une forme **factorisée** $f'(x)$. On étudie sur des lignes séparées le signe de chacun des facteurs du numérateur et du dénominateur. On n'oublie pas les doubles barres pour matérialiser les valeurs interdites.

La règle des signes n'a de sens que pour les produits ou les quotients. On ne fait pas de tableau de signes pour les sommes !! (on ne peut déduire, par exemple, le signe de x^3+x^2+x-1 du signe de x^3 et de celui de x^2+x-1. Il faut trouver un moyen de factoriser cette expression).

Seul le signe de la dérivée f' renseigne sur les variations de f. Étudier le signe de f n'apporte aucune indication sur ses variations.

• On commence par *factoriser* au maximum la dérivée. Surtout, on ne développe pas dénominateur de la dérivée d'un quotient (qui est un carré, donc positif).

• Si un facteur est un carré (exemple $(x-8)^2$), une racine carrée (exemple $\sqrt{3x-1}$) ou une exponentielle (exemple e^{1-x}), son signe est toujours positif.

• Si un facteur est une fonction affine du type $ax+b$, son signe est donné par :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$-signe(a)$	0	$signe(a)$	

• Si un facteur est un trinôme du type ax^2+bx+c, son signe est donné par :

$\Delta > 0$,
Racines :
$x_1 < x_2$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		$signe(a)$	0	$-signe(a)$	0	$signe(a)$	

$\Delta = 0$,

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
ax^2+bx+c		$signe(a)$	0	$signe(a)$	

$\Delta < 0$,

x	$-\infty$		$+\infty$
ax^2+bx+c		$signe(a)$	

• Si un facteur est une fonction $g(x)$ dont on a étudié le signe auparavant, on utilise les résultats précédents pour conclure !

01 Soit la fonction f définie $[-4;4]$ par $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.
3. Donner l'équation de la droite (T), tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0.
4. Tracer dans repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ la courbe $(\mathcal{C}_f)$ ainsi que ses tangentes.

02 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=2-\frac{2(1-x)}{x^2+1}$$

On note $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative.

1. a. Calculer $f'(x)$; vérifier que $f'(x)=\dfrac{-2(x^2-2x-1)}{(x^2+1)^2}$.

   b. Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f.
   On ne demande pas les valeurs exactes des extremums mais une valeur arrondie aux centièmes.
2. Déterminer l'équation de la tangente T à $(\mathcal{C}_f)$ au point A d'abscisse 1.
3. On veut montrer qu'il existe un point B de $(\mathcal{C}_f)$ tel que la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ en B soit parallèle à la droite Δ d'équation $y=-x$.

   a. Montrer que le problème revient à résoudre l'équation $x^4+4x+3=0$.

   b. Vérifier que $x^4+4x+3=(x+1)^2(x^2-2x+3)$.

   c. Conclure.
4. Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ ainsi que ses tangentes.
5. Résoudre $f(x)=0$ et interpréter graphiquement.
6. Déterminer les coordonnées du point d'intersection entre $(\mathcal{C}_f)$ et la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y=2$, puis la position relative entre $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{D})$. Tracer $(\mathcal{D})$.
7. Démontrer que la fonction f est minorée par -1 sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que $f(x)>-1$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

03 Soit $g :]-\infty, 0[\to \mathbb{R},\ x \mapsto x + 1 + \dfrac{1}{x}$. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de g dans un repère orthonormé d'unité 1cm.

1. Calculer $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$, interpréter le résultat.
2. Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}$ en $-\infty$.
3. Déterminer la position relative de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$.
4. Montrer que pour tout $x < 0$, $g'(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$ et dresser le tableau de variation de g.
5. Représenter $\mathcal{D}$ et l'allure de $\mathcal{C}$.

04 **Partie A**

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ et on note C_f sa courbe représentative.
C_f passe par le point A de coordonnées $(1; 1)$.
C_f admet la droite (d) d'équation $y = -x + 2$ pour tangente au point A.

1. En utilisant les données du texte et en justifiant la réponse, déterminer $f(1)$ et $f'(1)$.
2. f est de la forme $f(x) = \dfrac{x^2 + ax + b}{x}$; exprimer $f'(x)$ en fonction des coefficients a et b.
3. En déduire la valeur des coefficients a et b.

Partie B

On suppose pour la suite que $a = -2$ et $b = 2$ et on a alors $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x}$ définie sur $]0; +\infty[$.

1. Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variations.
   Donner la valeur exacte du minimum puis sa valeur arrondie aux centièmes.
2. Déterminer l'équation réduite de la tangente (d_1) à la courbe au point d'abscisse 2.
3. Dans un repère orthonormé, tracer C_f, (d) et (d_1).

05 Soient f et g les fonctions définies respectivement sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par :

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 2x + 3 \qquad\qquad g(x) = \frac{2x^2 - x - 3}{x - 1}$$

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leurs courbes représentatives dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1ère Partie : Étude de la fonction f

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
2. Calculer f' la fonction dérivée de f, puis dresser le tableau de variations de f.

2ème Partie : Étude de la fonction g

1. Déterminer les limites de g aux bornes de son domaine de définition et interpréter graphiquement.
2. a. Déterminer les réels a, b et c tels que

$$g(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$$

   b. En déduire que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = ax + b$ est asymptote à $\mathcal{C}_g$; déterminer la position relative de $(\mathcal{D})$ et $\mathcal{C}_g$.
3. Calculer g' la fonction dérivée de g, puis dresser le tableau de variations de g.

3ème Partie :

1. a. Vérifier que $f(x) = g(x) \Longleftrightarrow x(x+1)(x-2)(2x-3) = 0$

   b. En déduire les coordonnées de tous les points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
2. a. Déterminer l'équation de la droite (T), tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $-\frac{1}{2}$.

   b. En quels points $\mathcal{C}_g$ admet-elle une tangente parallèle à (T) ?
3. Construire les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

06 On considère les fonctions f et g définies respectivement sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ et sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2+3x-5}{x-1} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x + 5$$

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, les courbes représentatives de f et de g dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Partie A - Étude de la fonction f

1. Étudier les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
2. Écrire $f(x)$ sous la forme $ax+b+\dfrac{c}{x-1}$; en déduire que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique (d).
   Préciser la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de (d).
3. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet un centre de symétrie I dont on précisera les coordonnées.
4. Calculer f' la dérivée de f, puis dresser le tableau de variations de f.

Partie B - Étude de la fonction g

1. Étudier les limites de g aux bornes de son domaine de définition.
2. Calculer g' la dérivée de g, puis dresser le tableau de variations de g.

Partie C - Tangentes aux courbes

1. Écrire l'équation de la tangente T_A à $\mathcal{C}_f$ au point A de la courbe d'abscisse $\dfrac{1}{2}$.
2. Montrer que $\mathcal{C}_g$ admet des tangentes parallèles à T_A en un ou plusieurs points dont on précisera les coordonnées.

07 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(2x) - 2\cos(x)$

1. Montrer que f est périodique et déterminer sa parité éventuelle.
2. Démontrer que $f'(x) = 2\sin(x)(1-2\cos(x))$
3. Étudier le sens de variation de f sur $[0;\pi]$.
4. Construire la courbe représentative de f sur $[-\pi;3\pi]$ en expliquant votre construction.

08 Soit f, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin(x)(\cos(x) + 1)$.

1. Justifier que l'on peut réduire l'intervalle d'étude à $[0;\pi]$.
2. Montrer que $f'(x) = (\cos(x) + 1)(2\cos(x) - 1)$, puis dressez le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0;\pi]$ (on justifiera les signes trouvés dans le tableau).
3. Montrer que $(\mathcal{C}_f)$, la courbe représentative de la f, est concave sur $[0;\pi]$
4. Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0.
5. Construire (T) et $(\mathcal{C}_f)$ sur l'intervalle $[-\pi;3\pi]$ en justifiant la construction.

09 **Partie A :**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3(x-1)^3}{3x^2+1}$ et soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal d'unité $1cm$.

1. Montrez qu'il existe un unique triplet de réels $(a;b;c)$, que l'on déterminera, tel que pour tout réel x : $f(x) = ax + b + \dfrac{cx}{3x^2+1}$.
2. Déterminez les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
3. Montrez que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = \dfrac{9(x-1)^2(x+1)^2}{(3x^2+1)^2}$, où f' est la fonction dérivée de la fonction f.
4. Dressez le tableau de variation de la fonction f.
5. Donnez l'équation réduite de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0.
6. Tracez la tangente (T) ainsi que la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

Partie B : On pourra dans cette partie utiliser certains résultats de la partie A.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{3(\sin(x)-1)^3}{3\sin^2(x)+1}$.

1. Montrez que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $g'(x)$, où g' est la fonction dérivée de la fonction g.
2. Montrer que pour tout x réel, on a $g'(x) = \dfrac{9\cos^5(x)}{(3\sin^2(x)+1)^2}$.
3. Dressez le tableau des variations de la fonction g sur $[-\pi;\pi]$.
4. Tracez sur un nouveau graphique, la courbe représentative de la fonction g sur $[-\pi;2\pi]$.