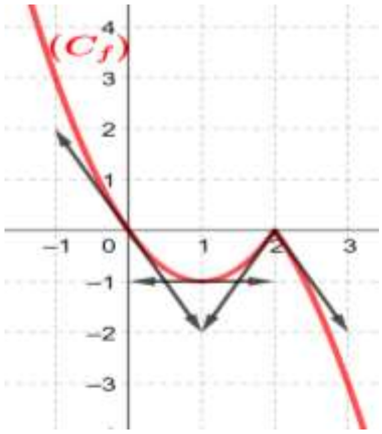
Dérivation- Etude de fonctions
Pr. Latrach Abdelkbir

Exercice ① :

On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$.



1. Donner $f'(1)$ et $f'(0)$.
2. La fonction f est-elle dérivable en 2 ?
3. Déterminer $f'_g(2)$ et $f'_d(2)$.
4. Dresser le tableau de variations de f en précisant le signe de $f'(x)$.
5. Dresser le tableau de signe de f.
6. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leq 3$.

Exercice ② :

On considère la fonction f définie par $f(x) = x\sqrt{3-2x}$ et soit (C_f) sa courbe representative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Donner $\mathfrak{D}_f$ le domaine de définition de f.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
3. Etudier la dérivabilité de f en $\frac{3}{2}$ à gauche. Interpréter graphiquement le résultat.
4. a. Montrer, pour tout $x \in \mathfrak{D}_f \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$, que :
   $f'(x) = \frac{3(1-x)}{\sqrt{3-2x}}$.
   b. Étudier les variations de f.
   c. Dresser le tableau de variations de f.
5. Soit g la restriction de f sur $]-\infty; 1]$.

a. Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b. Etudier la dérivabilité de g^{-1} sur J.

c. Calculer $(g^{-1})'(0)$.

Exercice ③ :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{1}{x^2+1}$ et soit (C_f) sa courbe representative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. a. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
   b. Montrer que (C_f) admet une asymptote oblique (Δ) à déterminer au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.
2. a. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   b. Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   c. Écrire une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse -1.
3. Donner les coordonnées des points d'intersection de (C_f) avec les axes du repère.
4. Montrer que (C_f) admet deux points d'inflexion à déterminer.
5. Construire (Δ), (T) et (C_f). (on prend $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1cm$, $\frac{\sqrt{3}}{3} \simeq 0{,}6$, $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \simeq 1{,}8$ et $f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \simeq 0{,}7$).
6. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > 0$.
7. Montrer, pour tout $x \geq 0$, que $\frac{1}{x+2} + \sqrt{x+1} \geq \frac{3}{2}$.
8. a. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} definie sur un intervalle J à déterminer.

b. Montrer que f^{-1} est dérivable en 0 puis calculer $(f^{-1})'(0)$.

c. Tracer $(C_{f^{-1}})$ dans le même repère.

Exercice ④ :

I. On considère g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.
2. a. Montrer, pour tout réel x, que $g'(x) = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.
   b. Donner le tableau des variations de g .
   c. En déduire, pour tout réel x, que $g(x) > 0$.

II. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - 1 + \sqrt{x^2+1}$, et soit (C_f) sa courbe representative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$. Interpréter géométriquement le résultat.
3. Montrer que la droite $(D): y = 2x - 1$ est une asymptote oblique de (C_f) au voisinage de $+\infty$.
4. a. Montrer, pour tout réel x, que $f'(x) = g(x)$.
   b. Dresser le tableau des variations de f.
5. Calculer $f(1)$ puis tracer (C_f).
6. a. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} definie sur un intervalle J à déterminer.

b. Montrer que f^{-1} est dérivable en $\sqrt{2}$ puis calculer $(f^{-1})'(\sqrt{2})$.

c. Tracer $(C_{f^{-1}})$ dans le même repère.

Exercice ⑤ :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - \sqrt{x^2+2x}$, et soit (C_f) sa courbe representative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Donner D_f le domaine de définition de f.
2. a. Montrer que la droite d'équation $x = -1$ est un axe de symétrie de (C_f).
   b. En déduire D_E le domaine d'étude de f.

3. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

4. Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

5. Montrer que la droite d'équation $y=-x$ est une asymptote oblique de (C_f) au voisinage de $+\infty$.

6. a. Etudier les variations de f sur D_E.

b. Dresser le tableau de variations de f sur D_f.

7. a. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $[0;+\infty[$.

b. Vérifier que $0<\alpha<1$.

8. Construire (C_f).

9. Soit g la restriction de f sur $[0;+\infty[$.

a. Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b. Calculer $g(1)$.

c. Montrer que g^{-1} est dérivable en $1-\sqrt{3}$ puis calculer $(g^{-1})'(1-\sqrt{3})$.

d. Tracer $(C_{g^{-1}})$ dans le même repère.

Exercice ⑥ :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-3x^2+1$ et soit (C_f) sa courbe representative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. a. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

b. Étudier les branches infinies de (C_f) .

2. Montrer que le point $\Omega(1;-1)$ est un centre de symétrie de (C_f).

3. a. Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$.

c. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

4. Montrer que le point Ω est un point d'inflexion pour la courbe (C_f).

5. a. Écrire une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point Ω.

b. Calculer $g(3)$ puis racer (C_f) .

6. Soit g la restriction de f sur $[2;+\infty[$.

a. Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b. Montrer que g^{-1}est dérivable en 1 puis calculer $(g^{-1})'(1)$.

c. Tracer $(C_{g^{-1}})$ dans le même repère.

Exercice ⑦ :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x-\sqrt{2x-1}$ et soit (C_f) sa courbe representative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Donner D_f le domaine de définition de f.

2. a. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b. Déterminer la nature de la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$.

3. Etudier la dérivabilité de f à droite en $\frac{1}{2}$. Interpréter graphiquement le résultat.

4. a. Montrer que f est dérivable sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$.

b. Montrer que le signe de $f'(x)$ sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ est le signe de $x-1$.

c. Dresser le tableau de variations de f sur D_f.

d. Écrire une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 5.

5. Construire (C_f).

6. Soit g la restriction de f sur $[1;+\infty[$.

a. Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b. Montrer que g^{-1} est dérivable en 2 puis calculer $(g^{-1})'(2)$.

c. Tracer $(C_{g^{-1}})$ dans le même repère.

7. a. Vérifier, pour tout $x\in[1;+\infty[$, que $g(x)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2$.

b. Calculer $g^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$.

Exercice ⑧ :

Soient f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=sin\,(2x)$ et (C_f) sa courbe d'un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ tel que $\|\vec{\imath}\|=\frac{\pi}{4}$ et $\|\vec{\jmath}\|=1$.

1. Montrer que f est périodique de période π.

2. Etudier la parité de f.

3. Vérifier que la droite (Δ): $x=\frac{\pi}{4}$ est un axe de symétrie de (C_f).

4. Expliquer pourquoi il suffit d'étudier la fonction f sur l'intervalle $I=\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$?

5. a. Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in I$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur I.

6. Construire (C_f) sur $\left[\frac{-3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right]$.

Exercice ⑨ :

Soit f la fonction définie par $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+3}{x+1}; & x\le 0\\ -\frac{\sqrt{x+1}}{x}; & x>0\end{cases}$.

1. a. Déterminer D_f puis calculer les limites de f aux bornes de D_f .

b. Etudier les branches infinies de (C_f).

2. f est-elle continue en 0 ?

3. Etudier la dérivabilité de f en 0, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

4. a. Calculer $f'(x)$ sur les intervalles $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

5. Construire (C_f).

Pr. Latrach Abdelkbir