Suites numériques

I. Généralités sur les suites numériques :

Activité ①:

1. Compléter avec deux chiffres qui correspondent à la séquence de chacune des listes suivantes :

a. $0, 3, 6, 9, \ldots$
b. $1, 2, 4, 8, \ldots$
c. $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots$

Chacune des listes ci-dessus est appelée une ***suite numérique*** et les nombres qui la constituent sont appelés ***termes*** de cette suite.

2. Quelle est la relation que l'on adopte dans chaque liste pour passer d'un terme au terme suivant ?

1. Définition et Notation :

Soit p un entier naturel. On pose $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq p\}$.

Définition :

Tout fonction numérique u définie sur I est appelée suite numérique.
- L'image par u d'un entier n de I est notée u_n .
- $u_n$est appelé le terme général de la suite u.

Remarques :

- Une suite numérique u se note $(u_n)_{n\in I}$ ou $(u_n)_{n\geq p}$.
- Si $I = \mathbb{N}$, u se note (u_n) ou $(u_n)_n$ ou $(u_n)_{n\geq 0}$ ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Si $I = \mathbb{N}^*$, u se note $(u_n)_{n\geq 1}$ ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$
- Le réel u_p est le premier terme de la suite $(u_n)_{n\geq p}$.

Exemples :

- La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ telle que définie les multiples de 4. On a $u_0 = 0$, $u_1 = 4$ et $u_3 = 12$.
- 1, 10, 100 et 1000 sont des termes de la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ telle que $(\forall n \in \mathbb{N})\ v_n = 10^n$.
- La suite de terme général $w_n = \sqrt{n-3}$ est définie $n \geq 3$. On la note donc par $(w_n)_{n\geq 3}$ et son premier terme est $w_3 = \sqrt{3-3} = 0$.

Application ①:

On considère la suite (u_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*): u_n = 2 + \frac{3}{n}$.

1. Calculer les trois premiers termes de (u_n).
2. Calculer $u_n + 1$, u_{n+1}, u_{2n} et u_{2n+1} pour tout n de $\mathbb{N}^*$.
3. Trouver l'indice n tel que $u_n = \frac{43}{21}$.

Remarques :

On distingue deux types de suites numériques :
- ***Suite définie explicitement par son terme général.*** C'est une suite où le terme général est une fonction connue de l'entier n .
- ***Suite récurrente***. C'est une suite définie par son premier terme et par une relation qui permet de calculer un terme à partir d'un ou de plusieurs termes précédents.

Exemples :

On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies respectivement par :

$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n - 1;\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$, $\begin{cases} v_0 = 2\,, v_1 = -1 \\ v_{n+2} = \frac{2v_{n+1}}{v_n};\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$ et $(\forall n \in \mathbb{N}): w_n = 2^n - \frac{4}{n}$.

Les suites (u_n) et (v_n) sont des suites récurrentes tandis que (w_n) est une Suite définie explicitement par son terme général.

Application ②:

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies respectivement par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n};\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$ et

$\begin{cases} v_0 = 2\,, v_1 = -1 \\ v_{n+2} = 2v_{n+1} + v_n;\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

Pr. LATRACH ABDELKBIR

1. Calculer u_1, u_2, v_3 et v_4.
2. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = \frac{2}{2n+1}$.

2. Suites majorée - suites minorées - suites bornées :

Activité ②:

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{n+4}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $u_n \leq 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On dit que la suite (u_n) est majorée par 4.

2. Montrer que $u_n \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On dit que la suite (u_n) est minorée par 1.

3. En déduire que $1 \leq u_n \leq 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On dit que la suite (u_n) est bornée.

Définition :

Soit $(u_n)_{n\in I}$une suite numérique .

- On dit que $(u_n)_{n\in I}$ est ***majorée*** si et seulement s'il existe un réel M tel que $(\forall n \in I): u_n \leq M$.
- On dit que $(u_n)_{n\in I}$ est ***minorée*** si et seulement s'il existe un réel m tel que $(\forall n \in I): U_n \geq m.$
- On dit que $(u_n)_{n\in I}$est ***bornée*** si est à la fois majorée et minorée.

Exemple : extrait de rat 2013

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrons par récurrence que la suite (u_n) est minorée par 1.

Application ③ :

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} U_0 = 4 \\ U_{n+1} = \dfrac{4U_n - 3}{U_n} & \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}): U_n \geq 3$.

Exercice ① :

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{2U_n + 1}{U_n + 2} & \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}): 0 \leq U_n \leq 1$.

Propriété:

$(u_n)_{n\in I}$ est une suite numérique.
$(u_n)_{n\in I}$ est bornée si et seulement si $(\exists M \in \mathbb{R}_*^+)$; $(\forall n \in I)$: $|U_n| \leq M$.

Exemple :

On considère la suite (u_n) définie par $U_n = 2\cos(n^2 + 2) + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a $(\forall n \in \mathbb{N}): |U_n| \leq 3$,alors (u_n) est bornée.

3. Monotonie d'une suite :

Définition :

Soit $(u_n)_{n\in I}$une suite numérique .

- On dit que $(u_n)_{n\in I}$ est ***croissante*** si et seulement si $(\forall p; q \in I): p < q \Rightarrow u_p \leq u_q$.
- On dit que $(u_n)_{n\in I}$ est ***décroissante*** si et seulement si $(\forall p; q \in I): p < q \Rightarrow u_p \geq u_q$.
- On dit que $(u_n)_{n\in I}$ est ***constante*** si et seulement si $(\forall p; q \in I): p < q \Rightarrow u_p = u_q$.

Propriété:

$(u_n)_{n\in I}$ est une suite numérique.

- $(u_n)_{n\in I}$ est croissante si et seulement si $(\forall n \in I): u_{n+1} \geq u_n$.
- $(u_n)_{n\in I}$ est décroissante si et seulement si $(\forall n \in I): u_{n+1} \leq u_n$.

Pr. LATRACH ABDELKBIR

- $(u_n)_{n\in I}$ est constante si et seulement si $(\forall n \in I): u_{n+1} = u_n$.

Exemples :

- Soit (x_n) la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}): x_n = 2n - 3$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $x_{n+1} - x_n = 2(n+1) - 3 - (2n-3)$
$= 2n + 2 - 3 - 2n + 3 = 2 > 0$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}): x_{n+1} - x_n > 0$.

D'où (x_n) est croissante (plus précisément est strictement croissante).

- Soit (y_n) la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}): y_n = 5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $y_{n+1} - y_n = 5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$
$= 5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \left(\frac{2}{3} - 1\right) = 5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \left(\frac{-1}{2}\right) < 0.$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N}): y_{n+1} - y_n < 0$.

D'où (y_n)est strictement décroissante .

Application ④ :

Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans les cas suivants :

1. $u_n = \frac{3}{n+1}$ **2.** $u_n = n^2 + 2n$ **3.** $u_n = \sqrt{n+1}$ **4.** $u_n = (-1)^n$

Remarques :

$(u_n)_{n\geq p}$ est une suite numérique.
- Si $(u_n)_{n\geq p}$ est croissante, alors $(\forall n \geq p): u_n \geq u_p$.
- Si $(u_n)_{n\geq p}$ est décroissante, alors $(\forall n \geq p): u_n \leq u_p$.

Application ⑤ :

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = 4 - \frac{3}{u_n} \end{cases}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}): u_n > 3$.
3. a. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}): U_{n+1} - U_n = \frac{(1-U_n)(U_n-3)}{U_n}$.
b. Etudier la monotonie de la suite (u_n).
c. En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}): u_n \leq 6$.

Exercice ② :

Soit (v_n) la suite définie par : $\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}\left(v_n + \frac{4}{v_n}\right) \end{cases}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

1. Calculer v_1 et v_2 .
2. Montrer que la suite (v_n) est minorée par 2.
3. Etudier la monotonie de la suite (v_n).
4. En déduire que la suite(v_n) est majorée par 3.

II. Suite arithmétique :

1. Définitions :

Activité ③:

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 3n + 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
1. Vérifier que $u_1 = u_0 + 3$, $u_2 = u_1 + 3$ et $u_3 = u_2 + 3$.
2. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}): u_{n+1} = u_n + 3$.

On remarque que pour calculer un terme de cette suite on ajoute 3 au terme précédent.
On dit que la suite (u_n) est ***arithmétique*** de ***raison*** $r = 3$.

Définition :

Soit $(u_n)_{n\in I}$une suite numérique .
On dit que $(u_n)_{n\in I}$ est ***arithmétique*** s'il existe un nombre réel r tel que $(\forall n \in I): u_{n+1} = u_n + r$.

Pr. LATRACH ABDELKBIR

Le nombre r est appelé ***la raison*** de la suite $(u_n)_{n\in I}$.

Technique :

Pour savoir si une suite (u_n) est arithmétique on calcule la différence $u_{n+1} - u_n$, si le résultat est une constante r indépendante de n, alors la suite est arithmétique de raison r.

Exemples :

- Montrons que la suite (u_n) définie par $(\forall n \in \mathbb{N}): u_n = -\frac{3}{2}n + 5$ est arithmétique.
- Montrons que la suite (v_n) définie par $(\forall n \in \mathbb{N}): v_n = n^2 + 5$ n'est pas arithmétique.

Application ⑥ :

Soit (u_n)la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{u_n} \end{cases}$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$; $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$

Montrer que (v_n) est une suite arithmétique , préciser sa raison et son premier terme .

2. Terme général d'une suite arithmétique :

Propriété:

$(u_n)_{n\in I}$ est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_p.
Le terme général de $(u_n)_{n\in I}$ est : $u_n = u_p + (n-p) \times r$ pour tout $n \geq p$.

Remarque :

En particulier, si $p = 0$, on a : $u_n = u_0 + n \times r$.
Si $p = 1$, on a : $u_n = u_1 + (n-1) \times r$.

Exemple ①:

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $r = \frac{1}{2}$ et $u_6 = 3$.Calculons u_{30}.

On a : $u_{30} = u_6 + (30 - 6) \times \frac{1}{2} = 15$.

Exemple ②:

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r tel que $u_0 = 5$ et $u_{100} = -45$
Déterminons r et u_n en fonction de n
On a $u_{100} = u_0 + 100r$.
Donc : $100r = u_{100} - u_0 = -45 - 5 = -50$.
D'où : $r = \frac{-50}{100} = \frac{-1}{2}$ et par suite $u_n = u_0 + nr = -5 - \frac{1}{2}n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Application ⑦ :

Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_1 = 5$ et $r = 2$.

1. Calculer u_5 ; u_{10} et u_{100} .
2. Déterminer le terme général de la suite (u_n).
3. Est-ce que 203 est un terme de la suite (u_n).

3. Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique :

Propriété:

$(u_n)_{n\in I}$ est une suite arithmétique . On a :
$(\forall n; p \in \mathbb{N})$: $p \leq n$: $S_n = u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = (n - p + 1)\left(\frac{u_n + u_p}{2}\right)$.

- u_p : le premier terme de la somme.
- $(n - p + 1)$: le nombre des termes.

Application ⑧ :

Soit (v_n) une suite arithmétique telle que $v_3 = 2$ et $v_7 = 14$.

1. Détermine la raison r de cette suite et son premier terme v_0.
2. Exprimer v_n en fonction de n.
3. Calculer la somme : $S = v_4 + v_5 + v_6 + \ldots + v_{25}$.

Exercice ③ :

Soit (u_n)la suite définie par :$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{5u_n-1}{u_n+3} \end{cases}$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$; $v_n = \frac{1}{u_n-1}$.

1. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}): u_n > 1$.
2. Etudier la monotonie de la suite (u_n).
3. Montrer que (v_n)est une suite arithmétique, préciser sa raison et son premier terme .
4. Exprimer v_n puis u_n en fonction n.
5. Calculer la somme : $S = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n$.

III. Suite géométrique :

1. Définitions :

Activité ④:

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 3 \times 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Vérifier que $u_1 = 2u_0$, $u_2 = 2u_1$ et $u_3 = 2u_2$.
4. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}): u_{n+1} = u_n + 3$.

On remarque que pour calculer un terme de cette suite on multiple terme précédent par 2.
On dit que la suite (u_n) est ***géométrique*** de ***raison*** $q = 2$.

Définition :

Soit $(u_n)_{n\in I}$une suite numérique .
On dit que $(u_n)_{n\in I}$ est ***géométrique*** s'il existe un nombre réel q tel que $(\forall n \in I): u_{n+1} = qu_n$.
Le nombre q est appelé ***la raison*** de la suite $(u_n)_{n\in I}$.

Exemples :

- Montrons que la suite (u_n) définie par $(\forall n \in \mathbb{N}): u_n = -7 \times 5^n$ est géométrique.
- Montrons que la suite (v_n) définie par $(\forall n \in \mathbb{N}): v_n = n^2 + 5$ n'est pas géométrique.

Application ⑨ :

Soit (u_n)la suite définie par :$\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1 \end{cases}$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$; $v_n = u_n + 3$
Montrer que (v_n)est une suite géométrique, préciser sa raison et son premier terme .

2. Terme général d'une suite arithmétique :

Propriété:

$(u_n)_{n\in I}$ est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_p.
Le terme général de $(u_n)_{n\in I}$ est : $u_n = u_p \times q^{n-p}$ pour tout $n \geq p$.

Remarque :

En particulier, si $p = 0$, on a : $u_n = u_0 \times q^n$.
Si $p = 1$, on a : $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.

Exemple :

Soit (u_n)une suite géométrique telle que $u_2 = \frac{3}{16}$ et $u_5 = \frac{3}{1024}$.
Déterminons u_n en fonction de n.
Soit $q$la raison de cette suite .
On a : $u_5 = u_2 \times q^{5-2}$. Donc $q^3 = \frac{u_5}{u_2} = \frac{1}{64} = \left(\frac{1}{4}\right)^3$.
Alors $q = \frac{1}{4}$.
Il en résulte d: $u_n = u_2 \times q^{n-2} = \frac{3}{16} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}$.
Par suite : $u_n = 3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

Application ⑩⓪ :

Soit (v_n) une suite de raison $q = 2$ et de premier terme $v_1 = 5$.

1. Calculer u_4.
2. Exprimer v_n en fonction de n.

Pr. LATRACH ABDELKBIR

3. Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique :

Propriété:

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q, on a : $\forall n; p \in \mathbb{N}$; $p \leq n$: $S_n = u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n$.

- Si $q \neq 1$, alors $S_n = u_p \times \left(\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}\right)$.
- Si $q = 1$, alors $S_n = (n-p+1) \times u_p$.
- u_p : le premier terme de la somme.
- $(n-p+1)$: le nombre des termes.

Remarque :

Pour tout $q \in \mathbb{R}^* \backslash \{1\}$, on a : $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Application ①① :

Soit (u_n) une suite géométrique telle que $q = 3$ et $U_4 = 12$.
Calculer la somme $S = U_4 + U_5 + U_6 + \ldots + U_{2006}$.

Exercice ④ :

Soit (u_n)la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n+3}{u_n+4} \end{cases}$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$; $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+3}$.

1. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}): 0 < u_n < 1$.
2. En déduire la monotonie de la suite (u_n).
3. Montrer que (v_n)est une suite géométrique , préciser sa raison et son premier terme .
4. Exprimer v_n puis u_n en fonction n.
5. Calculer la somme : $S = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n$.