Continuité d'une fonction numérique

I. Continuité d'une fonction numérique

Activité 0: Soutient des prérequis

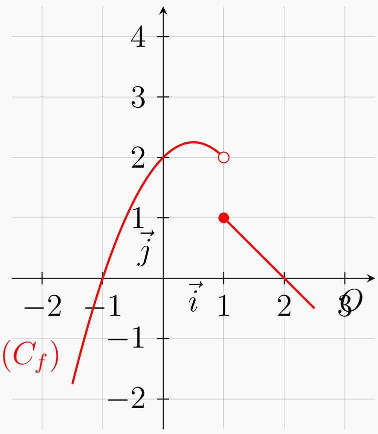
Calculer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2+x+3}{x-1}$	b. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x\|x\|-4x+3}{x^5-7x+2}$	c. $\lim\limits_{x\to-2} \frac{x^2+5x+6}{x+2}$
d. $\lim\limits_{x\to-3} \frac{2x^2+3x-9}{x^2+x-6}$	e. $\lim\limits_{x\to1} \frac{\sqrt{2x+7}-3}{x-1}$	f. $\lim\limits_{x\to-2} \frac{\sqrt{2x^2+1}-3\sqrt{x+3}}{x+2}$
g. $\lim\limits_{x\to2^-} \frac{x^2+5x+6}{2-x}$	h. $\lim\limits_{x\to-3^+} \frac{2x^2+x-2}{-x^2-x+6}$	i. $\lim\limits_{x\to1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1}$

II. Continuité d'une fonction en un point

Activité 1

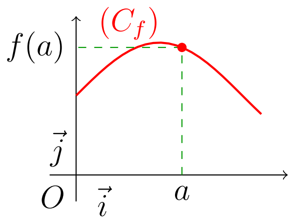
On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f.

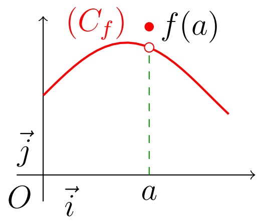


1. Déterminer graphiquement $f(-1)$ et $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$. Que peut-on déduire ?
2. Déterminer graphiquement $f(1)$, $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$. Que peut dire sur (C_f) au point $x_0 = 1$?

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un point de I. On dit que f est **continue en a** si seulement si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.





- f est continue en a • f est discontinue en a

Exemples

- La fonction définie par $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-9}{x-3} & ; x \neq 3 \\ f(3) = 6 \end{cases}$ est continue en 3.

En effet : $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3}(x+3) = 6 = f(3)$.

- La fonction définie par $\begin{cases} f(x) = \frac{\sin(3x)}{x} & ; x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$ est discontinue en 0.

En effet : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} 3 \times \frac{\sin(3x)}{3x} = 3 \neq f(0)$.

Application 1

Étudier la continuité des fonctions suivantes au point a.

1. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-2x+1}{x-1} & ; x \neq 1 \\ f(1) = 1 \end{cases}$ et $a = 1$.
2. $g(x) = \begin{cases} \frac{x\sqrt{x+2}-4}{x-2} & ; x \in [-2; 2[\cup]2; +\infty[\\ g(2) = \frac{5}{2} \end{cases}$ et $a = 2$.

Exercice 1

Étudier la continuité des fonctions suivantes au point a.

1. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+2x^2+3x+2}{x^2+4x+3} & ; x \neq -1 \\ f(-1) = 1 \end{cases}$ et $a = -1$.
2. $g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x-2)}{x^2-2x} & ; x > 2 \\ g(2) = \frac{1}{2} \end{cases}$ et $a = 2$.

2. Continuité à droite - continuité à gauche

Définition

- Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, a+r[$ avec $r > 0$. On dit que f est **continue à droite** de a si seulement si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.
- Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a-r, a]$ avec $r > 0$. On dit que f est **continue à gauche** de a si seulement si $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.

Exemple

La fonction définie par $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-1}{|x-1|} & ; x \neq 1 \\ f(1) = 2 \end{cases}$ est continue à droite en 1 et non continue à gauche.

En effet : $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x^2-1}{|x-1|} = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x^2-1}{x-1}$ (Du fait que $|x-1| = x-1$ si $x > 1$)

$$= \lim_{x \to 1^+} x + 1 = 2 = f(1).$$

Ainsi f est continue à droite en 1.

Et: $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x^2-1}{|x-1|} = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x^2-1}{-(x-1)}$ (Du fait que $|x-1| = -(x-1)$ si $x < 1$)

$$= \lim_{x \to 1^-} -(x+1) = -2 \neq f(1).$$

Ainsi f est discontinue à gauche en 1.

Propriété

f est continue en a si seulement si f est continue à gauche et à droite de a. Autrement : f est continue en $a \iff \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

Application 2

On considère f la fonction définie par $\begin{cases} f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} & ; x > 0 \\ f(x) = \frac{\sin(2x)}{x} & ; x < 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$.

Exercice 2

1. Étudier la continuité de f à droite et à gauche en 0.
2. f est-elle continue en 0.

1. Soit f la fonction définie par: $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} & ; x > 2 \\ \frac{x^2-4x+3}{x-3} & ; x \leq 2 \end{cases}$

Étudier la continuité de f à droite et à gauche en 0.

2. Soit g la fonction définie par $\begin{cases} g(x) = x^3 + ax & ; x > -1 \\ g(x) = -x + 1 & ; x \leq -1 \end{cases}$

Déterminer la valeur de a pour que g soit continue en -1.

3. Continuité d'une fonction sur un intervalle

Définition

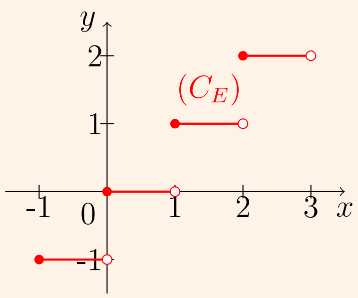
- On dit que f est continue sur l'intervalle ouvert $]a; b[$ si f est continue en tout point de $]a; b[$.
- On dit que f est continue sur l'intervalle $[a, b]$ si f est continue en tout point de $]a; b[$ et continue à droite de a et à gauche de b.

Remarque

On définit de même manière la continuité sur les intervalles $[a, b[,]a, b], [a, +\infty[$ et $]-\infty, b]$.

Exemple : Fonction partie entière

La fonction partie entière est la fonction qui, à tout réel x, associe l'unique entier relatif n tel que $n \leq x < n+1$. On note la partie entière de x par E(x) ou [x].
Exemples
$E(3,2) = 3$ parce que $3 \leq 3,2 < 4$ et $E(-1,2) = -2$ parce que $-2 \leq -1,2 < -1$.
La courbe de la fonction $x \mapsto E(x)$ sur l'intervalle $[-1; 3[$ est :



▶ La fonction $x \mapsto E(x)$ est continue sur l'intervalle $[-1; 0[$ du fait qu'elle est continue en tout point de $]-1; 0[$ et à droite en -1 car $\lim_{x \to -1^+} E(x) = -1 = E(-1)$.
▶ La fonction $x \mapsto E(x)$ n'est pas continue sur l'intervalle $[1; 3[$ du fait qu'elle n'est pas continue en 1 car $\lim_{x \to 1^+} E(x) = 1 = E(1)$ et $\lim_{x \to 1^-} E(x) = 0 \neq E(1)$.

Propriété

- Toute fonction polynômiale est continue sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est continue sur un intervalle inclus dans son domaine de définition.
- Les fonctions $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \cos(x)$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \mapsto \tan(x)$ est continue sur $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue $\mathbb{R}^+$.
- La fonction $x \mapsto |x|$ est continue $\mathbb{R}$.

Exemples

- La fonction $f : x \mapsto x^3 + 2x^2 - x + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ parce qu'elle est une fonction polynômiale.
- La fonction $g : x \mapsto \frac{5x^3+2x-1}{x^2-1}$ est continue sur $]1; +\infty[$ parce qu'elle est une fonction rationnelle et $]1; +\infty[\subset \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Application 3

On considère f la fonction définie par $\begin{cases} f(x) = -x+4 & ; x < 3 \\ f(x) = \frac{6-x}{x} & ; x \geq 3 \end{cases}$.
Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

II. Image d'un intervalle par une fonction continue

1. Image d'un segment- Image d'un intervalle

Propriété

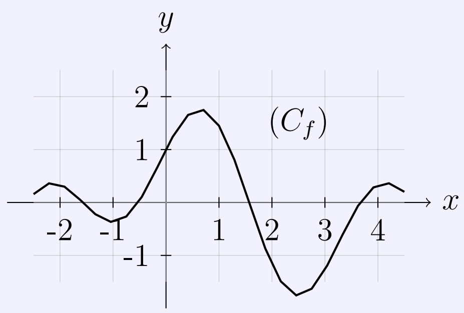
- L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.
- L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Remarque

Si f est continue sur un segment $[a, b]$ et M et m sont respectivement le maximum et le minimum de f sur $[a, b]$, alors $f([a, b]) = [m, M]$.

Application

On donne ci-contre la courbe d'une fonction f définie sur $[-2; 4]$. Déterminer l'image des intervalles suivants $[-2, 3]$, $[0, 1]$, $[1, 3]$ et $]-1, 1]$ par f.



2. Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I. Dans ce tableau suivant a et b sont deux nombres réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.

On considère f la fonction définie par $\begin{cases} f(x) = -x+4 & ; x < 3 \\ f(x) = \frac{6-x}{x} & ; x \geq 3 \end{cases}$.
Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

II. Image d'un intervalle par une fonction continue

1. Image d'un segment- Image d'un intervalle

Propriété

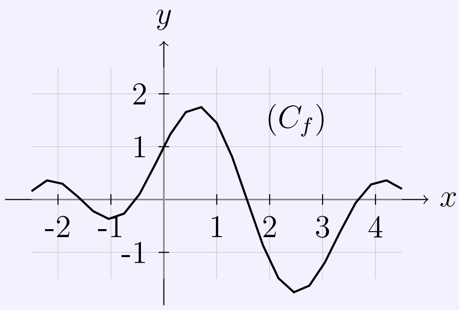
- L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.
- L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Remarque

Si f est continue sur un segment $[a, b]$ et M et m sont respectivement le maximum et le minimum de f sur $[a, b]$, alors $f([a, b]) = [m, M]$.

Application

On donne ci-contre la courbe d'une fonction f définie sur $[-2; 4]$. Déterminer l'image des intervalles suivants $[-2, 3]$, $[0, 1]$, $[1, 3]$ et $]-1, 1]$ par f.



2. Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I. Dans ce tableau suivant a et b sont deux nombres réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.

L'intervalle I	f strictement croissante sur I	f strictement décroissante sur I
$[a, b]$	$[f(a), f(b)]$	$[f(b), f(a)]$
$[a, b[$	$[f(a), \lim_{x\to b^-} f(x)[$	$]\lim_{x\to b^-} f(x), f(a)]$
$]a, b]$	$]\lim_{x\to a^+} f(x), f(b)]$	$[f(b), \lim_{x\to a^+} f(x)[$
$]a, b[$	$]\lim_{x\to a^+} f(x), \lim_{x\to b^-} f(x)[$	$]\lim_{x\to b^-} f(x), \lim_{x\to a^+} f(x)[$

Exemple

On considère f la fonction définie par $f(x) = x^2 - 4x - 1$. La fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty; 2]$ et strictement croissante sur $[2; +\infty[$. On a :

- $f([2; 4]) = [f(2); f(4)] = [-5; -1]$
- $f([-1; 1]) = [f(1); f(-1)] = [-4; 4]$
- $f([2; +\infty[) = [f(2); \lim_{x\to+\infty} f(x)[= [-5; +\infty[$
- $f(]-\infty; 2]) = [\lim_{x\to-\infty} f(x); f(2)] = [+\infty; -5]$

Application

Soit f une fonction définie par $f(x) = \frac{3x+2}{x-4}$.

1. Déterminer D_f.
2. Etudier la monotonie de f.
3. Déterminer $f([0,1])$, $f(]4,+\infty[)$ et $f(]-\infty,4[)$.

Exercice

On considère f une fonction définie par $f(x) = 2x^3 - 3x^2$.

1. Dresser le tableau de variation de la fonction
2. Déterminer les images des intervalles suivants $]-1;0], [1;2], [-1;2], [1;+\infty[$ par f.

III. Opérations sur les fonctions continuités

Propriété

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

- Les fonctions $f+g; f\times g; \lambda f$ et $|f|$ sont continues sur I.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f^n est continue sur I.
- Si $(\forall x \in I) : g(x) \neq 0$, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I.
- Si $(\forall x \in I) : f(x) \geq 0$, alors $\sqrt{f}$ est continue sur I.

Exemples

- La fonction $f : x \mapsto 2x^2 - x + \sqrt{x}$ est continue sur $[0,+\infty[$ en tant que somme de deux fonctions continues sur $[0,+\infty[$ qui sont $x \mapsto 2x^2 - x$ et $x \mapsto \sqrt{x}$.
- On considère $g : x \mapsto \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$. On a :
  - La fonction $x \mapsto x^2+1$ est continue sur $]-\infty;1]$ puisqu'elle est une fonction polynomiale et on a $(\forall x \in]-\infty;1]) : x^2+1 > 0$. Ainsi $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ est continue sur $]-\infty;1]$.
  - La fonction $x \mapsto x+1$ est continue sur $]-\infty;1[$ et on a $(\forall x \in]-\infty;1[) : x+1 \neq 0$. Il en résulte que la fonction g est continue sur $]-\infty;1[$.

Application

Montrer que f est continue sur I dans les cas suivants :

1. $f(x) = x^2 + 1 + \sin(x)$ et $I = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = \cos(x) \times \sqrt{4x^2+5}$ et $I = \mathbb{R}$.
3. $f(x) = \frac{4\sqrt{x}}{x^2+x-2}$ et $I =]2; +\infty[$.

Propriété

Si f est continue sur un intervalle I et g continue sur un intervalle J tel que $f(I) \subset J$ alors la fonction $g \circ f$ est continue sur l'intervalle I.

Exemple

On considère la fonction $h : x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$. On a $h = g \circ f$ avec $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et $g : x \mapsto \frac{x}{x+1}$. Puisque f est continue sur $[0; +\infty[$ et g est continue sur $]-1; +\infty[$ et $f([0; +\infty[) \subset [0; +\infty[$, alors h est continue sur $[0; +\infty[$.

Application

On considère la fonction $h : x \mapsto \sin(x^2 - 4x + 1)$. Montrer que h est continue sur $\mathbb{R}$.

IV. Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe au moins un réel c de l'intervalle $[a, b]$ tel que $f(c) = k$. En d'autres termes : l'équation $f(x) = k$ d'inconnue x admet au moins une solution dans $[a, b]$ pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

Exemple

Montrons que l'équation $(E) : x^2 - \sqrt{x+2} = 2$ admet au moins une solution sur $[-2; 0]$. On considère f la fonction définie par $f(x) = x^2 - \sqrt{x+2}$. L'équation (E) est équivalente à l'équation $f(x) = 2$. La fonction f est continue sur $[-2; 0]$ comme somme de deux fonctions continues et on a $f(-2) = 4$ et $f(0) = -\sqrt{2}$. Puisque $f(0) \leq 2 \leq f(-2)$, alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation (E) admet au moins une solution sur $[-2; 0]$.

Corollaire

Si la fonction f est continue sur $[a, b]$ tel que $f(a) \times f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a, b]$. Si de plus f est strictement monotone, alors cette solution est unique.

Exemple

Montrons que l'équation (E) : $x^3+x^2+1=0$ admet une unique solution α telle que $-1<\alpha<0$. On considère f la fonction définie par $f(x)=x^3+x^2+1$. L'équation (E) est équivalente à $f(x)=0$. La fonction f est continue et strictement croissante sur $[-1;0]$ et on a $f(-1)\times f(0)<0$. Donc d'après T.V.I l'équation (E) admet une solution unique α tel que $-1<\alpha<0$.
Donnons un encadrement de α d'amplitude 0,25. On a $-1<\alpha<0$, alors $\alpha\in\,]-1,-1/2]$ ou $\alpha\in]-1/2,0[$. Or $f(-1/2)=7/8>0$. Et puisque $f(-1)\times f(-1/2)<0$, alors $\alpha\in]-1,-1/2]$. L'amplitude est $0.5>0.25$. On répète le procédé. Le centre de $]-1,-1/2]$ est $-3/4$. On a $\alpha\in]-1,-3/4]$ ou $\alpha\in]-3/4,-1/2]$. Puisque $f(-3/4)\approx 0.15>0$, alors $f(-1)\times f(-3/4)<0$, donc $\alpha\in]-1,-3/4]$. L'amplitude est 0.25. Ce procédé est appelé **la dichotomie**.

Application

1. Montrer que l'équation $x^5-x^3+5x-4=0$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[0,1]$.
2. Montrer que l'équation $\sin(x)+\frac{1}{2}=-x$ admet une solution unique dans l'intervalle $[-\pi/6,0]$.

Exercice

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[1; +\infty[$ puis vérifier que $1 < \alpha < 2$.
2. Donner un encadrement de α d'amplitude 0.25.
3. Donner le signe de f dans l'intervalle $[1; +\infty]$

V. Fonction Réciproque d'une fonction continue et strictement monotone

Activité 2

Soit la fonction définie sur $I = [1; 4]$ par : $f(x) = x^2 - 2x$.

1. Montrer que f est continue et strictement croissante sur I.
2. Déterminer l'intervalle J, l'image de I par f.
3. Soit $x \in J$ et $y \in I$, montrer que $f(y) = x \iff y = 1 + \sqrt{x+1}$.
4. On considère g la fonction définie sur J par $g(x) = 1 + \sqrt{1+x}$.
   (a) Remplir le tableau suivant :

$g(-1) =$	$f(1) =$
$g(0) =$	$f(2) =$
$g(8) =$	$f(4) =$

   (b) Que remarquez-vous ?
   (c) Montrer que $(\forall x \in I)(g \circ f)(x) = x$ et $(\forall x \in J)(f \circ g)(x) = x$.

La fonction g est appelée la fonction réciproque de f et on la note f^{-1}.

Propriété

Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors f admet une fonction réciproque, notée f^{-1}, définie de $J = f(I)$ vers I telle que :

$$\begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in J \end{cases} \iff \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases}$$

Conséquences

- $(\forall x \in I) : (f^{-1} \circ f)(x) = x$.
- $(\forall x \in J) : (f \circ f^{-1})(x) = x$.

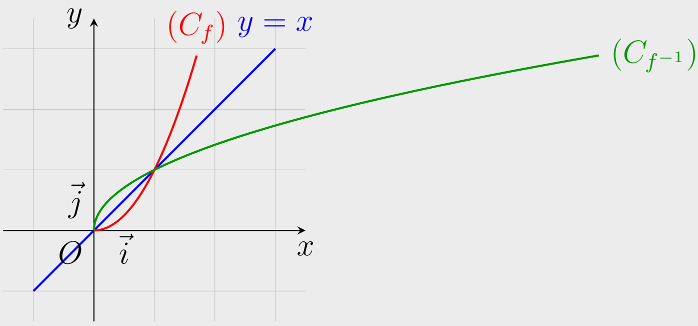
Exemple

La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x} + 2$ est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, donc f admet une fonction réciproque f^{-1} continue et strictement croissante sur $f([0, +\infty[) = [2, +\infty[$. Déterminons l'expression de f^{-1} : Soient $y \in [0, +\infty[$ et $x \in [2, +\infty[$, on a : $f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x \iff \sqrt{y} + 2 = x \iff \sqrt{y} = x - 2 \iff y = (x - 2)^2$. Donc $f^{-1}(x) = (x-2)^2$. Il en résulte: $(\forall x \in [2, +\infty[) f^{-1}(x) = (x-2)^2$

Propriété

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors :

- La fonction réciproque f^{-1} est continue sur $f(I)$ et a même sens de variations que la fonction f.
- Les courbes représentatives de f et de f^{-1} dans un repère orthonormé, sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Application 2

On donne ci-contre la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-1; +\infty[$.

1. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
2. Dresser le tableau de variations de f^{-1}.
3. Construire la courbe représentative de f^{-1}.

VI. Fonction Racine $n^{\text{ième}}$

Soit n un entier naturel tel que : $n \geq 1$ et Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x^n$.

- f est une fonction polynôme donc f est continue sur $\mathbb{R}$ par suite sur $\mathbb{R}^+$.
- f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, du fait que $(\forall x \in \mathbb{R}^+) : f'(x) = nx^{n-1} \geq 0$.

Alors f admet une fonction réciproque f^{-1}, appelée **fonction racine n-ième**, définie sur $f(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$. L'image du nombre x de $\mathbb{R}^+$ par f^{-1} est noté $\sqrt[n]{x}$ et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+) : x^n = y \iff x = \sqrt[n]{y}$

Remarques

Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ on a :

- $\sqrt[1]{x} = x$.
- $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$.
- $\sqrt[3]{x}$ est appelée la racine cubique de x.

Conséquences

- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+) x^n = y \iff x = \sqrt[n]{y}$.
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \sqrt[n]{x^n} = (\sqrt[n]{x})^n = x$.
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+) \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \iff x = y$.
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+) \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \iff x < y$.
- La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est continue est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
- $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$.

Exemples

- $\sqrt[4]{16} = \sqrt{4} = 2$
- $\sqrt[5]{5} > \sqrt[3]{3}$ parce que $5 > 3$
- $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[5]{x} = +\infty$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+) x^5 = 32 \iff x = \sqrt[5]{32} = 2$.

Application 10

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $x^7 = 5$
2. $x^6 = -2$
3. $x^4 = 81$
4. $x^5 = -32$
5. $\sqrt[3]{3x-1} = 2$
6. $\sqrt[5]{2x-3} < 2$

Propriété

Propriété

Soient a et b deux réels positifs, et n et p sont deux entiers naturels non nuls.

- $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$.
- Si $b \neq 0$, alors $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.
- $\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n]{a}^p$.
- $(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$.
- $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}$.

Exemple

Simplifions le nombre : $A = \frac{\sqrt[4]{32} \times \sqrt[6]{27} \times \sqrt[3]{108}}{\sqrt[4]{144}}$.

Application

1. Simplifier $A = \frac{\sqrt[3]{512}}{64}$; $B = \frac{\sqrt[3]{729}}{3}$ et $C = \frac{15}{\sqrt[3]{3}} \times \sqrt[9]{(5\sqrt{9})^3}$.

2. Mettre en ordre croissant les nombres $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{2}$ et $\sqrt{5}$.

Exercice

Simplifier les nombres suivants : $A = \frac{\sqrt[3]{256}\times\sqrt[6]{64}}{24300000\times\sqrt[3]{1024}}$ et $B = \frac{\sqrt[3]{3^x}\times\sqrt[5]{x\sqrt{9}}}{\sqrt[5]{729x}\times\sqrt[3]{3}}$.

Propriété

Soit f une fonction positive sur l'intervalle I et $x_0 \in I$.

- Si f est continue sur I alors $x \mapsto \sqrt[n]{f(x)}$ est continue sur I.
- Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \geq 0$ alors $\lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$.
- Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty$.

(Les deux propriétés précédentes restent vraies au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$)

Application

1. On considère f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt[3]{3x^2+4}$.
   (a) Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
   (b) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

2. Calculer les limites suivantes :
   (a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$
   (b) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3+1} - 2x$
   (c) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3+x+1} - x$

Exercice

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to 2} \sqrt[5]{x^3+24}$
2. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[5]{x^5-3x^2+4}$
3. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3+x^2+2} - 2x$
4. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+8}-2}{x}$
5. $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x}}{x-1}$
6. $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+25}-3}{x^2-3x+2}$

VII. Puissances rationnelles d'un nombre réel strictement positif

Définition

Soient $x \in \mathbb{R}^+$ et r un nombre rationnel tel que $r = \frac{p}{q}$ $(p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^*)$. Le nombre a^r, appelé *puissance rationnelle de base a et d'exposant r*, est le nombre $\sqrt[q]{a^p}$. Autrement : $a^r = \sqrt[q]{a^p}$.

Exemples

$3^2 = \sqrt[3]{2} \quad 3^{\frac{5}{2}} = \sqrt[3]{5} \quad \sqrt{6} = 6^{\frac{1}{3}} \quad 2^{-5/3} = 3^{\sqrt{2}^5} = 3^{\frac{1}{2^5}} = \frac{1}{3^{\sqrt{25}}}$

Propriété

Soient a et b deux réels strictement positifs et r et r' deux rationnels.

- $a^r \times a^{r'} = a^{r+r'}$.
- $(a^r)^{r'} = a^{rr'}$.
- $\frac{1}{a^r} = a^{-r}$.
- $\frac{a^r}{a^{r'}} = a^{r-r'}$.
- $(ab)^r = a^r \times b^r$.
- $(\frac{a}{b})^r = \frac{a^r}{b^r}$.

Application

Ecrire sous forme d'une puissance rationnelle les nombres $A = \frac{\sqrt[3]{4} \times 8^{\frac{1}{2}} \times \sqrt{2}}{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[6]{4}}$ et $B = \frac{(\sqrt[3]{27})^2 \times (81)^{\frac{1}{4}}}{3^3}$.