Primitives

Remarques

I. Primitive d'une fonction sur un intervalle

Activité :

Soient f et F deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^3 - 3x + 2$ et $F(x) = \frac{5}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x$

1. Vérifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $F'(x) = f(x)$ pour tout réel x.

On dit que la fonction F est une primitive de f sur sur $\mathbb{R}$

2. Montrer que $G(x) = \frac{5}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x - 4$ est aussi une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Si F est une primitive de f sur I, alors $F + c$ est aussi une fonction primitive de f sur I avec $c \in \mathbb{R}$.

3. Déterminer une primitive H de la fonction f tel que $H(1) = 0$

Définition :

Soient f *et* F deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
On dit que F est une ***primitive*** de la fonction f sur I, si F est dérivable sur I et pour tout $x \in I : F'(x) = f(x)$.

Exemples :

- La fonction $x \mapsto 5x + 4$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto 5$.
- La fonction $x \mapsto x^2 + 2x + 3$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto 2x + 2$.
- La fonction $x \mapsto 2\sqrt{x} + 7$ est une primitive sur $]0; +\infty[$ de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Propriété :

Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur I.

Application ① :

Montrer que la fonction $x \mapsto x\sqrt{x+1} + cos(x)$ sur admet une primitive sur $I = [-1, +\infty[$.

Propriété :

Soit F une fonction primitive d'une fonction f sur I.

- L'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions $x \mapsto F(x) + c$ tel que $c \in \mathbb{R}$.
- Pour tout $x_0 \in I$ *et* $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive G de f sur I vérifiant $G(x_0) = y_0$.

Application ② :

1. Déterminer, l'ensemble des primitives des fonctions f et g sur l'intervalle I à déterminer sachant que $f(x) = x^4 - 3x^3 + 5$ et $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$.
2. Déterminer la primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$, qui vérifie la condition indiquée : $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 8x - 7$ et $F(1) = 0$.

II. Tableau des primitives usuelles :

Fonction	Primitives
$x \mapsto 0$	$x \mapsto c$
$x \mapsto a \quad (a \in \mathbb{R})$	$x \mapsto ax + c$
$x \mapsto x^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$
$x \mapsto x^r \quad (r \in \mathbb{Q}^* \setminus \{-1\})$	$x \mapsto \frac{1}{r+1}x^{r+1} + c$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + c$
$x \mapsto \frac{1}{x^2}$	$x \mapsto -\frac{1}{x} + c$
$x \mapsto cosx$	$x \mapsto sinx + c$
$x \mapsto sinx$	$x \mapsto -cosx + c$

Pr. LATRACH ABDELKBIR

$x \mapsto 1+(\tan x)^2$	$x \mapsto \tan x + c$
$x \mapsto \cos(ax+b)\,,(a \neq 0)$	$x \mapsto \frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$
$x \mapsto \sin(ax+b)\,,(a \neq 0)$	$x \mapsto -\frac{1}{a}\cos(ax+b)+c$
$U' \times U^r \ \ (r \in \mathbb{Q}^* \setminus \{-1\})$	$\frac{1}{r+1}U^{r+1}+c$
$U'V+UV'$	$U \times V + c$
$\frac{U'V-UV'}{V^2}$	$\frac{U}{V}+c$
$\frac{U'}{U^2}$	$-\frac{1}{U}+c$
$\frac{U'}{\sqrt{U}}$	$2\sqrt{U}+c$

Application ③ :

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

- $f_1(x) = 2x^5 - 3x^2 - 1$
- $f_2(x) = \frac{1}{x^4} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} - \sqrt[4]{x^3}$
- $f_3(x) = \sqrt{x}\left(x^2 + 2\sqrt{x}\right)$
- $f_4(x) = \sqrt{x+2}$
- $f_5(x) = (2x+1)\sqrt{2x+1}$
- $f_6(x) = sin(5-2x)$
- $f_7(x) = cos(3x-1)$
- $f_8(x) = (3x^2-1)(x^3-x)^2$
- $f_9(x) = cosx.(sinx)^4$
- $f_{10}(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$

Pr. LATRACH ABDELKBIR