Suites numériques

I. Rappels

Activité ①:

On considère la suite numérique (u_n) définie par $\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{25}{10-u_n}; n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

1. Calculer u_1, u_2.
2. Vérifier que $5 - u_{n+1} = \frac{5(5-u_n)}{5+(5-u_n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$et montrer par récurrence que $5 - u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. On considère (v_n) la suite numérique définie par $v_n = \frac{5}{5-u_n}$.

a. Montrer que (v_n) est une suite arithmétique en déterminant sa raison.
b. Déterminer v_n en fonction de n .
c. Vérifier que $u_n = \frac{5v_n-5}{v_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
d. En déduire l'expression de u_n en fonction n.
e. Calculer la somme S_n en fonction de n où : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$.

Activité ②:

On considère la suite numérique (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n+3}{u_n+4}; n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. Calculer u_1, u_2.
2. Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}^*): 0 < u_n < 1$.
3. Montrer que (u_n) est croissante.
4. On considère (v_n) la suite numérique définie par $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+3}$.

a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique en déterminant sa raison.
b. Déterminer v_n en fonction de n et en déduire l'expression de u_n en fonction n
c. Calculer la somme S_n en fonction de n où : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{n+5}$.

	Suite géométrique	**Suite arithmétique**
Définition	$u_{n+1} = qu_n$	$u_{n+1} = u_n + r$
Terme général	$u_n = u_p \times q^{(n-p)}$ $(p \leq n)$	$u_n = u_p + (n-p)r$ $(p \leq n)$
Somme des termes consécutifs	$S_n = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = u_p \times \frac{(1-q^{(n-p+1)})}{1-q}$	$S_n = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = \left(\frac{n-p+1}{2}\right)(u_p + u_n)$
a، b et c trois terme consécutifs	$b^2 = ac$	$2b = a + c$

$(u_n)_{n\in I}$ *majorée par M*	$(\forall n \in I)\ u_n \leq M$
$(u)_{n\in I}$ *minorée par m*	$(\forall n \in I)\ u_n \geq m$
$(u_n)_{n\in I}$ *bornée par M et m*	$(\forall n \in I)\ m \leq u_n \leq M$
$(u_n)_{n\in I}$ *est croissante*	$(\forall n \in I)\ u_{n+1} \geq u_n$
$(u_n)_{n\in I}$ est décroissante	$(\forall n \in I)\ u_{n+1} \leq u_n$
$(u_n)_{n\in I}$ est constante	$(\forall n \in I)\ u_{n+1} = u_n$

II. Limite d'une suite

1. Définition

Définition :

Soient (u_n) une suite numérique et l un nombre réel.
On dit que l est ***la limite*** de (u_n), et on écrit $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ ou plus simplement $\lim u_n = l$,

Remarques

Pr. LATRACH ABDELKBIR

si tout intervalle ouvert centré en l contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain indice.

Exemple :

On considère la suite définie par $u_n = 2 + \frac{1}{n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

u_1	u_5	u_8	u_{10}	u_{100}	u_{1000}
3	2.04	≈2,016	2,001	2,00001	2,0000001

On remarque que de plus en plus l'indice n prend des valeurs très grandes, les termes de la suite s'approchent de plus en plus à 2.

On peut dire que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$.

2. Limite de suites de références

Propriétés :

Soit p un élément de ℕ tel que p ≥ 3 ,on a :

- $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$
- $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$
- $\lim_{n\to+\infty} n^p = +\infty$
- $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} = 0$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

Exemples :

- On a $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Puisque $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n}} = +\infty$.

- On a $\lim_{n\to+\infty} -2n^4 + 3n^2 + 1 = \lim_{n\to+\infty} n^4 \left(-2 + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^4}\right)$.

Puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n^2} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^4} = 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} -2 + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^4} = -2$.

Or $\lim_{n\to+\infty} n^4 = +\infty$, donc $\lim_{n\to+\infty} -2n^4 + 3n^2 + 1 = -\infty$.

Application ① :

Calculer la limite de la suite (u_n) dans les cas suivants :

a. $u_n = \frac{n^2+n+1}{3n^3+n-6}$.

b. $u_n = \frac{(n+2)\sqrt{n}}{n+4}$.

c. $u_n = \frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}+3}$

d. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

e. $u_n = 2n - \sqrt{n}$.

Définition :(Convergence d'une suite)

Soit (u_n)une suite numérique.

- On dit que (u_n)est ***convergente*** si elle admet une limite finie (C-à-d s'il existe un réel l tel que $\lim_{n\mapsto+\infty} u_n = l$).
- On dit que (u_n)est ***divergente*** s'elle n'est pas convergente (C-à-d si $\lim_{n\mapsto+\infty} u_n = \pm\infty$ ou s'elle n'a pas de limite).

Exemples :

- La suite (u_n) telle que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $u_n = \frac{n}{\sqrt{n+1}}$ est divergente car $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- La suite (v_n) telle que $(\forall n \in \mathbb{N})$: $V_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ est convergente car $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.
- La suite (w_n)telle que $(\forall n \in \mathbb{N})$: $w_n = (-1)^n$ est divergente car n'a pas de limite.

3. Limite de la suite géométrique (q^n) où $q \in \mathbb{R}^*$

Propriété :

Soit a un réel, on a :

- Si $a > 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty$.
- Si $-1 < a < 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} a^n = 0$.
- Si $a \leq -1$ alors la suite (q^n) n'a pas de limite.

- Si $a = 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 1$.

Exemples :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} (5)^n = +\infty$ parce que $5 > 1$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (-0{,}5)^n = 0$ parce que $-1 < -0{,}5 < 1$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{7}{8}\right)^n = 0$ parce que $-1 < \frac{7}{8} < 1$.
- La suite $(-3)^n$n'a pas de limite.

Application ② :

Calculer la limite de la suite (u_n)dans les cas suivants :

a. $u_n = \left(\frac{3}{8}\right)^n + \left(\frac{5}{4}\right)^n$.

b. $u_n = \frac{5^n}{(-4)^n}$.

c. $u_n = 2^n - 3^n$.

d. $u_n = \frac{4^n-3^n}{4^n+3^n}$.

Exercice ①: Rattrapage 2011

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ *et* $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} = \frac{6u_n}{1+15u_n}$.

1. a. Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{u_n-\frac{1}{3}}{15u_n+1}$.

   b. Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_n > \frac{1}{3}$.

2. On considère la suite numérique (v_n)définie par $(\forall n \in \mathbb{N})$: $v_n = 1 - \frac{1}{3u_n}$.

   a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{6}$.

   b. Exprimer v_n en fonction de n.

3. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_n = \frac{1}{3-2\left(\frac{1}{6}\right)^n}$ puis déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4. Limite de la suite (n^α) où $\alpha \in \mathbb{Q}^*$

Propriété:

Soit $\alpha \in \mathbb{Q}^*$, on a :

- Si $\alpha > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty$.
- Si $\alpha < 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = 0$.

Exemples :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{5}{3}} = +\infty$ parce que $\frac{5}{3} > 0$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{-\frac{4}{3}} = 0$ parce que $-\frac{4}{3} < 0$.

Application ③:

Calculer la limite de la suite (u_n)dans les cas suivants :

❶ $U_n = n^{\frac{5}{2}} - n^{\frac{4}{3}}$ ❷ $U_n = \sqrt{n} - \sqrt[4]{n}$

5. Limite et ordre

Propriété :

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques.

Si $\begin{cases} u_n > v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \ \ et \ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l' \end{cases}$, alors $l \geq l'$.

Exemple :

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques définies par $u_n = 2 + \frac{1}{n}$ *et* $v_n = 2 - \frac{1}{n}$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n > v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 2$.

III. Critères de convergence

Propriété :

Pr. LATRACH ABDELKBIR

- Toute suite croissante, majorée est convergente.
- Toute suite décroissante, minorée est convergente.

Application ④:

On considère la suite (u_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}) \begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n} \end{cases}$

1. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que $u_n < 1$.
2. Etudier la monotonie de la suite (u_n) puis en déduire qu'elle est convergente.

Propriété :

Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites numériques et l un nombre réel.
Si $\begin{cases} v_n \leq u_n \leq w_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l \end{cases}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

Application ⑤ :

On considère la suite (u_n) définie par : $u_n = \frac{\cos(n)}{n^2+1} + 2$.

1. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$: $\frac{-1}{n^2+1} + 2 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2+1} + 2$.
2. En déduire la limite de (u_n).

Propriété :

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

- Si $\begin{cases} \alpha u_n \leq v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \end{cases}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
- Si $\begin{cases} v_n \leq \alpha u_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty \end{cases}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

Application ⑥ :

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques définies par $u_n = \sin(n) + 3n$ et $v_n = \cos(n^2+3) - 5n + 1$.

1. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$,que $u_n \geq -1 + 3n$ et que $v_n \leq 2 - 5n$.
2. En déduire la limite de (u_n) et (v_n).

Propriété :

Soient (u_n) , (v_n) deux suites numériques et l un nombre réel et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.
Si $\begin{cases} |u_n - l| \leq \alpha v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0 \end{cases}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

Application ⑦ :

On considère la suite (u_n) définie par : $u_n = \frac{(-1)^n}{n} + 1$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Exercice ②:

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = \frac{1}{3}$ *et* $(\forall n \in \mathbb{N})$ $u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n+1}$.

1. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 < u_n < 1$.
2. **a.** Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que $u_{n+1} - u_n = -\frac{u_n(u_n-1)}{u_n+1}$.
b. Etudier la monotonie de (u_n).
c. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que $u_n \geq \frac{1}{3}$ et que la suite (u_n) est convergente.
3. 3) **a.** Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 - u_{n+1} \leq \frac{3}{4}(1 - u_n)$.
b. En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 - u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \times \frac{2}{3}$.
c. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
4. 4) pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \frac{u_n-4}{u_n-2}$
a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.
b. Exprimer v_n et u_n en fonction de n .
c. Déterminer au nouveau $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Pr. LATRACH ABDELKBIR

IV. Limite de suites particulières

1. La suite $v_n = f(u_n)$

Propriété :

Soit f une fonction numérique continue en l et (u_n) une suite convergente et sa limite est l. La suite (v_n) tel que $v_n = f(u_n)$ est une suite convergente et sa limite est $f(l)$.

Exemple :

Déterminons la limite de la suite (v_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}): v_n = cos\left(\frac{\pi n+2}{3n-1}\right)$.

Application ⑧:

Calculer les limites des suites (u_n) et (v_n) suivantes $u_n = \sin\left(\frac{1-n^2\pi}{n+6n^2}\right)$ et $v_n = \sqrt{\frac{16n^2-3n+1}{2n^2+1}}$

2. La suite $u_{n+1} = f(u_n)$

Propriété:

Soit f une fonction numérique et I un intervalle de D_f et soit $(u_n)_n$ une suite telle que : $\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n); n \in IN \end{cases}$. Si les conditions suivantes sont vérifiées :

- f est continue sur I.
- $f(I) \subset I$.
- la suite $(u_n)_n$ converge vers l.

Alors $f(l) = l$.

Application ⑨:

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 2$.

1. Montrer que f est décroissante sur $[0; 1]$ et croissante sur $[1; +\infty[$.
2. Montrer, pour tout $x \in [1; +\infty[$, que : $f(x) \leq x$.
3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   a. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $1 \leq u_n \leq 2$.
   b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
   c. En déduire que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.