Arithmétique dans $\mathbb{N}$
Tronc commun science

Pr. LATRACH Abdelkbir
Année scolaire : 2020 – 2021

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}$.
Étudier la parité de nombres suivants :
$4n+300$; $14n+111$; 731×432;
$2^{n+1}+15$; $4n^2+8n+13$; $n(n+1)$;
n^2+5n+3 ; $n(n+1)(n^2+5n+3)$.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose : $a = 2n+4$ et $b = 6n+11$.

① Étudier la parité de a et b.

② Simplifier le nombre $(6n+11)(-1)^{2n+4} - (2n+4)(-1)^{6n+11}$.

③ Monter que $a^2 + (b+1)^2$ est un multiple de 20.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}$.
On pose : $a = 2^{n+3} - 5 \times 2^n$ et $b = 7^{n+1} \times 2^{n+3}$.
Montrer que a est multiple de 3 et que 56 divise b.

Exercice 4

① Déterminer le chiffre a tel que le nombre $5a74$ soit divisible par 3 .

② Déterminer le chiffre b tel que le nombre $815b$ soit divisible à la fois par 2 et 9 .

③ Déterminer le chiffre c tel que le nombre $921c$ soit divisible par 3 et non pas par 9.

Exercice 5

Parmi la liste de nombres ci-dessous, indiquer ceux qui sont premiers : 25422 ; 101 ; 70107 ; 137 ; 15631.

Exercice 6

Soit n un entier naturel impair.

① Étudier la parité de n^2-1 et n^2+1.

② Montrer que 8 divise n^2-1.

③ En déduire que 16 divise n^4-1.

Exercice 7

① Vérifier que pour tout entier naturel n :
$n^2+4n+9 = (n+3)(n+1)+6$.

② Déterminer tous les valeurs de l'entier naturel n pour que le nombre $n+3$ divise n^2+4n+9.

Exercice 8

Soient n et m deux entiers naturels.

① Montrer que $m+n$ et $m-n$ ont la même parité.

② Déterminer tous les nombres entiers m et n qui vérifient :
$m^2 - n^2 = 12$.

Exercice 9

① Déterminer les diviseurs du nombre 22.

② En déduire tous les entiers naturels x et y qui vérifient :
$(x+2)(y+1) = 22$.

Exercice 10

① Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres :
495 ; 156 ; 1404 ; 4056.

② Simplifier l'écriture des nombres suivants :
$\frac{1404}{4056}$; $\sqrt{1404 \times 4056}$; $\frac{495}{1404} + \frac{156}{4056}$.

③ Déterminer :
$pgcd(495,156)$; $pgcd(495,1404)$; $pgcd(1404,4056)$
$ppcm(495,156)$; $ppcm(495,1404)$; $ppcm(1404,4056)$.

Exercice 11

Soient a et b deux entiers naturels tels que : $a = 4680$ et $b = 5940$.

① Décomposer a et b en produit de facteurs premiers.

② En déduire la décomposition en produit de facteurs premiers de $a^2 \times b^3$.

③ Déterminer $pgcd(a,b)$ et $ppcm(a,b)$ puis vérifier que :
$pgcd(a,b) \times ppcm(a,b) = ab$.

④ Déterminer le plus petit entier naturels m tel que ma soit un carré parfait.

⑤ Déterminer le plus petit entier naturels n tel que nb soit un cube d'un entier naturel.

⑥ Simplifier : $\frac{a}{b}$ et $\sqrt{ab}$.

Exercice 12

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $x = 7^{n+2} - 7^n$ et $y = 3 \times 7^{n+1} + 5 \times 7^n$.

① Montrer que x est divisible par 3 et que y est un multiple de 13.

② Décomposer, en fonction de n, les nombres x et y en produit de facteurs premiers.

③ Déterminer $\text{pgcd}(x,y)$ et $\text{ppcm}(x,y)$ en fonction de n.

Exercice 13

Soit $n \in \mathbb{N}$.

① Développer $(n+1)^2 - n^2$.

② En déduire que tout nombre impair peut s'écrire comme la différence des carrés de deux entiers consécutifs.

③ Application : Montrer que 2017 est la différence de deux carrés d'entiers consécutifs.

④ Soit $a = n^2+n+7$.
a) Montrer que a est impair.
b) En déduire que a est la différence de deux carrés d'entiers consécutifs.