|  |  |
| --- | --- |
| ***Géométrie de l’espace*** |  |
| Dans tout ce qui suit l’espace est rapporté au repère orthonormé .  *********Activité ⓪ :***  On considère dans l’espace les points , et .   1. a. Déterminer les coordonnées des vecteurs et .   b. Etudier l’alignement des points , et .   1. a. Donner une représentation paramétrique de la droite .   b. Est-ce que le point appartient à  ?  c- Donner deux équations cartésiennes de la droite .   1. Donner une équation cartésienne du plan . 2. *Produit scalaire dans l’espace et applications* 3. *Définition :*   ***Définition :***  Soient et deux vecteurs de l’espace, , et trois points de l’espace tels que et .  Il existe au moins un plan contenant les points , et .  Le produit scalaire des vecteurs et , noté , est le produit scalaire dans le plan .  ***🔿Remarque :***  Toutes les propriétés du produit scalaire dans le plan s’étendent dans l’espace.  ***🔿Conséquences :***   * Soient et deux vecteurs du plan et trois points du l’espace tels que   et  . Soit le projeté orthogonal de sur la droite . On a . * Si et sont deux vecteurs non nuls, alors . * et sont orthogonale si et seulement si . * Le produit scalaire est un nombre positif, noté , et appelé le carré scalaire de .   ***Propriété :***  Soient , et Trois vecteurs de l’espace et .   * ; * *;* * *;* * *.*  1. *Expression analytique du produit scalaire dans l’espace :*   ***Propriété :***  Si et deux vecteurs de l’espace, alors :  .  ***🔿Conséquences :***   * Si , . * Si et deux points de l’espace, alors  *.*   *** Application ① :***  Soient  *,*  et trois points de l’espace.  Calculer ,  et puis en déduire la nature du triangle .   1. *Applications du produit scalaire* 2. *Orthogonalité de deux droites dans l’espace*   ***Propriété :***  Soient et deux droites de l’espace dirigées respectivement par et .  et sont perpendiculaire si et seulement si .  *** Application ② :***  Montrer que dans les cas suivants :   1. est dirigée par et . 2. est définie par les équations  et 3. *Équation cartésienne d’un plan défini par un point et un vecteur normal*   ***Propriété :***  Soient un vecteur non nul etun point de l’espace et .  L’ensemble des points de l’espace tels que est un plan d’équation .  ***🔿Exemple :***  Soient un vecteur etun point de l’espace.  Déterminons L’ensemble des points de l’espace tels que .  On a      .  D’où est le plan d’équation .  ***Propriété :***  Soit un vecteur non nul et un point de l’espace.  Il existe un unique plan passant par et de vecteur normal (C-à-d est un vecteur directeur d’une droite orthogonale à ).  .  ***🔿Exemple :***  Déterminons une équation cartésienne du plan passant par et de vecteur normal .  Soit un point de . On a .  On a  .  ***Méthode II :***  Puisque est de vecteur normal , alors .  Or , alors et .  D’où .  *** Application ③:***   1. Déterminer une équation cartésienne du plan passant par et de vecteur normal dans les cas suivants : 2. et . 3. et . 4. Déterminer une équation cartésienne du plan passant par et orthogonal à la droite   . 5. Donner une équation cartésienne du plan médiateur du segment tel que et .   ***🔿 Exercice ① :***  On considère dans l’espace les points , et le vecteur .   1. Vérifier que les points , et ne sont pas alignés. 2. Montrer que le vecteur est orthogonal aux vecteurs et . 3. En déduire une équation cartésienne du plan . 4. Donner une représentation paramétrique de la droite passant par le point est orthogonale au plan . 5. *Orthogonalité de deux plans dans l’espace*   ***Propriété :***  Soient et deux plans de l’espace et et sont respectivement deux vecteurs normaux de et .   * et sont orthogonales si et seulement si . * et sont parallèles si et seulement si et sont parallèles.   *** Application ④:***  Etudier l’orthogonalité des plans et .   * et *.* * et *.*  1. *Distance d’un point de l’espace à un plan*   Soient un plan et un point de l’espace et la projection orthogonale de sur le plan .  La distance du point au plan est la distance et on la note par .  ***Propriété :***  Soient un plan d’équation et un point de l’espace.  La distance du point au plan est : .  ***🔿Exemple :***  Calculons la distance du point du plan d’équation .  On a est un vecteur normal de .  Donc  *,* en déduit que  *.*  *** Application ⑤ :***  On considère le plan d’équation et est point de l’espace.   1. Calculer . 2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par est orthogonal à . 3. Déterminer les coordonnées du point le projeté orthogonal de sur .   ***🔿 Exercice ②:***  On considère les points , et et soit le plan d’équation .   1. ***a.*** Donner une représentation paramétrique de la droite .   ***b.*** Vérifier que la droite est orthogonale à .  ***c.*** Déterminer les coordonnés du point d’intersection de et   1. Montrer que la droite est parallèle à . 2. Donner une équation cartésienne du plan passant par et parallèle à . 3. *Etude analytique d’une sphère* 4. *Equation cartésienne d’une sphère*   La sphère de centre  et de rayon est l’ensemble des points de l’espace tels que  et on la note par  *.*  On a      .  Cette équation est appelée *équation cartésienne* de la sphère .  *** Application ⑥ :***   1. Donner une équation cartésienne du sphère de centre  et de rayon  *.* 2. a. Donner une équation cartésienne du sphère de centre  et passant par le point *.*   b. Est-ce que le point appartient à ?  ***Propriété :***  Soient et deux points de l’espace.  L’ensemble des points de l’espace tels que est la sphère de diamètre  *** Application ⑦ :***  Donner, par deux méthodes,une équation cartésienne de la sphère de diamètre telle que et .   1. *Etude de l’ensemble des points tels que*     ***Propriété :***  Soient , et et des réels tels que et l’ensemble des points de l’espace tels que .   * Si , est une sphère de centre et de rayon . * Si , est le point . * Si , est l’ensemble vide.   ***🔿Exemple :***  Soit l’ensemble des points tels que .  On a    .  D’où est une sphère de centre et de rayon *.*  *** Application ⑧ :***  Déterminer l’ensemble des points dans les cas suivants :   1. . 2. . 3. . 4. *Représentation paramétrique d’une sphère*   Soit une sphère de centre et de rayon .    Ce système est appelé *représentation paramétrique* de .  *** Application ⑨ :***  Déterminer une représentation paramétrique la sphère d'équation .   1. *Position relative et d'une sphère et un plan et d'une sphère et une droite* 2. *Position relative et d'une sphère et un plan*   ***Propriété :***  Soient la sphère de centre et de rayon et un plan dans l’espace et .   * Si , alors ne coupe pas . * Si , alors est tangent à en un point *H* le projeté orthogonale de sur . * Si , alors coupe suivant un cercle de centre *H* le projeté orthogonale de sur et de rayon .   *** Application ① ⓪:***  On considère l’ensemble des points de l’espace tels que .   1. Montrer que est une sphère en déterminant son centre et son rayon . 2. Etudier la position relative de et les plans suivants : 3. . 4. . 5. . 6. *Position relative et d'une sphère et une droite*   L’intersection d’une sphère et d’une droite est soit un deux-points, un point ou l’ensemble vide.  *** Application ① ①:***  Déterminer la position relative de la droite de représentative paramétrique avec les sphères et .  ***🔿 Exercice ③:***  Soit le plan d’équation et soit l’ensemble des points tels que :.   1. Montrer que est une sphère don’t on déterminera le centre Ω et le rayon . 2. Montrer que le plan coupe la sphère selon un cercle dont on déterminera le centre et le rayon . 3. Déterminer une équation cartésienne de chacun des deux plans tangents à et paralléle à . 4. ***a.*** Soit le plan d’équation .   ***a.*** Vérifier que le plan est tangent à la sphère puis déterminer leur point de contact*.*   1. ***a.*** Vérifier que .   ***b.*** Donner une représentation paramétrique de la droite intersection de et .   1. ***a.*** vérifier que le point est un point de la sphère .   ***b.*** Déterminer une équation cartésienne du plan tangente à la sphère au point .   1. *Produit vectoriel* 2. *Définition*   Trois demi-droites non coplanaires de l’espace , et constituent dans cette ordre un *trièdre* noté .  Le *bonhomme d’ampère* est une personne virtuelle placé le long de , les pieds en et qui regarde dans la direction de . Si la cote est à sa gauche, on dit que le trièdre est *direct*.  Soient , et des vecteurs définis par : et et .  Si que le trièdre est direct on dit que le repère est direct.  La base est dit directe si le repère est direct.   |  |  | | --- | --- | |  |  | | est indirect | est direct |   ***Définition :***  Le produit vectoriel de deux vecteurs non nuls et est le vecteur, noté tel que :   * Si et sont colinéaires, alors . * Si et ne sont pas colinéaires alors , tel que : * et à . * La base est de sens direct. * .     ***Propriété :***   * . * . * . * .  1. *Forme analytique du produit vectoriel*   ***Propriété :***  Soient et deux vecteurs de l’espace.  On a : .  ***🔿Exemple :***  Calculons le produit vectoriel des vecteurs et .  On a  .  *** Application ① ②:***  Calculer le produit vectoriel des vecteurs et .   1. *Applications du produit vectoriel* 2. *Equation d’un plan défini par trois points non alignés*   Si , alors les point , et ne sont pas alignés, par suite le vecteur est normal au plan .  *** Application ① ③:***  On considère les points , et .   1. Vérifier que les point , et ne sont pas alignés. 2. Donner une équation du plan . 3. *L’aire d’un triangle*   ***Propriété :***   * Soit est un triangle. L’aire de est . * Soit est un parallélogramme. L’aire de est .   *** Application ① ④:***  On considère les points , et .   1. Vérifier que les point , et ne sont pas alignés. 2. Déterminer l’aire du triangle . 3. *Distance d’un point à une droite*   Soit une droite passant par et dirigée par un vecteur .  La distance d’un point de la droite est la distance tel que le projeté orthogonal de sur . On note cette distance par .  Pour déterminer les coordonnées du points on utilise : et .  ***Propriété :***    *** Application ① ⑤:***   1. Calculer la distance du point à la droite . 2. ***a***. Calculer la distance du point à la droite .   ***b*.** Déterminer les coordonnées de projeté orthogonal de sur .  ***🔿 Exercice ④:***  Soit la sphère de centre et de rayon .   1. Donner l’équation cartésienne de . 2. On considère les droites , et .   Calculer les distances , et puis étudier les positions relatives de et les droites , et .   1. *Intersection de deux plans*   ***Propriété :***  Soient et deux plans de l’espace et et sont respectivement deux vecteurs normaux de et .  Si , alors et sont sécantes suivant une droite dirigée par le vecteur .  *** Application ① ⑥:***  On considère les plans et .   1. Vérifier que et sont sécantes suivant une droite en déterminant un vecteur directeur. 2. Donner une représentation paramétrique de .   ***🔿 Exercice ⑤:***  Dans l’espace rapporté à un repère orthonormé direct ,on considère les points :   ;  ;  ***1) a-***Montrer que : .  ***b-*** En déduire est une équation cartésienne du plan .  ***2)*** Soit la sphère d’équation cartésienne .  Montrer que le centre de la sphère est le point et que son rayon est .  ***3) a-***Vérifier que : est une représentation paramétrique de la droite passant par Ω et orthogonale au plan .  ***b-***Déterminer les coordonnées du point intersection de la droite et du plan .  ***4)*** Vérifier que puis montrer que le plan coupe la sphère selon un cercle de rayon 4 et on déterminera le centre.  ***🔿 Exercice ⑤: Rattrapage 2017***  Dans l’espace rapporté à un repère orthonormé direct ,on considère la sphère dont une équation cartésienne .  Et le plan d’équation .  ***1)a-*** Montrer que le centre de est Ω et que son rayon .  ***b-*** Calculer et en déduire le plan coupe la sphère selon un cercle .  ***c-***Déterminer le centre et le rayon du cercle .  ***2)*** Soit la droite passant par le point et orthogonal au plan .  ***a-***Montrer que est un vecteur directeur de la droite .  ***b-***Montrer que: et en déduire que la droite coupe la sphère en deux points.  ***c-***Déterminer le triple des coordonnées de chacun des points d’intersection de la droite et la sphère . |  |