|  |  |
| --- | --- |
| ***Nombres complexes*** |  |
| 1. *L’ensemble des nombres complexes* 2. *L’ensemble - L’écriture algébrique*   *Théorème :*  Il existe un ensemble noté appelé l’ensemble des nombres complexes, il contient l’ensemble et il vérifie ce qui suit :   * L’ensemble contient un élément irréel qui vérifie . * Tout élément de s’écrit de façon unique sous la forme où sont deux nombres réels.   ***🔿 Vocabulaires :***   * L’écriture s’appelle ***l’écriture algébrique*** du nombre complexe . * Le nombre est appelé ***partie réelle*** du nombre qu’on note par . * Le nombre est appelé ***partie imaginaire*** du nombre qu’on note . * Tout nombre qui s’écrit sous la forme est dit nombre ***imaginaire pur***, et l’ensemble des nombres imaginaires purs est noté .   ***🔿Exemples :***   * , alors. * , alors. * alors . * , alors  (on a est un nombre imaginaire pur) * alors.   *** Application ① :*** **  Ecrire sous la forme algébrique les nombres suivants :  *et .*  *Propriété : Egalité de deux nombres complexes*  Soient et deux nombres complexes on a :   * . * .   *** Application ② :*** **  Déterminer la valeur des nombres réels dans les cas suivants :       1. *Opérations dans*   Les opérations de la somme et le produit de se prolongent en et elles ont les mêmes propriétés.  *Propriété :*  Soient et . On a :   * . * .   *** Application ③:***  Ecrire sous la forme algébrique les nombres suivants :   |  |  |  | | --- | --- | --- | |  |  |  | |  |  |  |   ***🔿 Remarque :***  Pour tout nombre complexe , on a : et .  *** Exercice ①:***   1. Soit tel que est réel.   Déterminer le réel x dans chacun des cas :   1. . 2. . 3. . 4. Résoudre dans les équations suivantes   *** Exercice ②:***  Soit un point du plan complexe d’affixe , le point d’affixe .   1. Ecrire sous la forme algébrique. 2. Déterminer l’ensemble des points du plan tels que est un nombre réel. 3. Déterminer l’ensemble des points du plan tels que est un nombre imaginaire pur. 4. *Représentation géométrique d’un nombre complexe* 5. *Définitions*   Le plan est rapporté au repère orthonormé direct .  * Définition*   * Tout nombre complexe tels que et deux réels associé à un unique point , appelé ***l’image*** de , des coordonnées et on écrit . * Tout point , le nombre complexe s’appelle ***l’affixe du point***  et on écrit . * Le vecteur s’appelle ***l’image vectoriel*** du nombre et le nombre s’appelle ***l’affixe*** du vecteur et on écrit .     *** Application ④ :***  Construire dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé les points *; ;et .*  *Propriété :*  Soient et deux points du plan complexe. On a :   * . * L’affixe du point le milieu du segment est*.*   ***🔿 Démonstration :***  On sait que , alors  .  *** Application ⑤ :***  On considère dans le plan complexe les points :   1. Déterminer l’affixe des vecteurs , et . 2. Déterminer l’affixe du point sachant que est un parallélogramme. 3. Déterminer l’affixe du point le centre du parallélogramme . 4. *Colinéarité de deux points*   *Propriété :*  Soient ,et trois points du plan complexe.  Les points , et sont alignés si et seulement si .  ***🔿 Démonstration :***  Les points , et sont alignés si et seulement il existe un réel tel que .  Et on a : .  *** Application ⑥:***  On considère dans le plan complexe les points , et . Montrer que les points , et sont alignés.   1. *Points cocycliques*   *Propriété :*  Soient , , et quatre points non alignés et deux à deux distincts du plan complexe.  Les points , , et sont ***cocycliques*** (appartiennent au même cercle) si et seulement si : .  *** Application ⑦:***  On considère dans le plan complexe les points , , et . Montrer que les points ,, et sont cocycliques.   1. *Conjugué d’un nombre complexe*   * Définition :*  Soit , où et sont deux réels.  Le nombre est appelé le ***conjugué*** du nombre complexe , et on le note par .  ***🔿Exemples :***   * , alors . * , alors . * , alors . * , alors .   ***🔿 Interprétation géométrique :***  Soit un nombre complexe.  Dans le plan complexe, le point est symétrique au point par rapport à l’axe réel.  *Propriété :*  Soient et deux nombres complexes et un nombre relatif.   * ; * ; * ; * .   ***🔿Exemples :***   * . * *.*   *** Application ⑧ :***  Soit un nombre complexe différent de . Simplifier l’expression .  *** Exercice ③:***  On pose où et sont deux réels.   1. a) Déterminer la forme algébrique du nombre complexe . b) Résoudre dans l’équation *.* c) Déterminer les nombres complexes pour que soit un nombre imaginaire pur. 2. Résoudre l’équation .   *Propriété :*  Pour tout nombre complexe , On a :   * et . * . * .   *** Application ⑨ :***  On pose : et . Sans calculer et  , Montrer que est réel et que est imaginaire pur.   1. *Module d’un nombre complexe*   * Définition*  Soit , où et deux nombres réels, un nombre complexe.  ***Le module*** du nombre complexe , est le nombre réel positif noté et qui est défini par : .  ***🔿Exemples :***   |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | |  | |  | | |  |  | |  |   *Propriété :*  Soient et nombres complexes et un nombre relatif.   * . * . * . * . * .   *** Application ①⓪ :***  On pose : et .   1. Calculer et . 2. En déduire le module des nombres suivants :, et .   ***🔿 Interprétation géométrique :***  Soit un point du plan complexe tels que .  On sait que  .  Et on a  .  Alors  .  *Propriété :*  Soient et deux points du plan complexe. On a : .  *** Application ①① :***  Dans le plan complexe, on considère les points , et . Montrer que le triangle est isocèle.  *** Exercice ④:***  Déterminer dans le plan complexe l’ensemble des points dans les cas suivants :   1. ; 2. *;* 3. *;* 4. *;* 5. *.* 6. *La forme trigonométrique d’un nombre complexe* 7. *Argument d’un nombre complexe :*   On muni le plan par un repère orthonormé direct .  Soit un point du plan complexe différent de .  On appelle ***argument*** du nombre complexe , la mesure de l’angle orienté qu’on note par le symbole .  Et on a  ( c-à-d ).  *Propriété :*  Soit un nombre complexe.   * . * . * . * .   ***🔿Exemples :***   |  |  | | --- | --- | |  |  |   *Propriété :*  Soit un nombre complexe non nul.   * .   .   1. *La forme trigonométrique d’un nombre complexe non nul :*   Soit un nombre complexe non nul et son argument.  On sait que et alors et .  C.à.d.  Cette écriture s’appelle ***la forme trigonométrique*** du nombre complexe et on le note par .  ***🔿Exemples :***  Déterminons la forme trigonométrique des deux nombres complexes *et .*  *** Application ①②:***  Ecrire sous la forme trigonométrique les nombres complexes suivants :   |  |  |  | | --- | --- | --- | |  |  |  | |  |  |  |   *Propriété :*  Soient et deux éléments de tels que et et :   * . * . * . * . * .   *** Application ①③ :***  On considère , et trois nombres complexes non nuls tels que  et . Déterminer l’argument du nombre dans les cas suivants :   1. . 2. .   *** Exercice ⑤:***  On pose *et .*   1. Ecrire et sous la forme trigonométrique puis en déduire la forme trigonométrique du nombre *.* 2. Ecrire sous la forme algébrique. 3. En déduire la valeur de *et .* 4. Montrer que *.* 5. *Angle entre deux vecteurs - Argument d’un nombre complexe*   *Propriété :*  Soient *,, et* des points du plan complexe. On a :   * . * . * .   *** Application ①④ :***  On considère dans le plan complexe les points ,, et .   1. Calculer , que peut-on déduire ? 2. Calculer . Que peut-on dire de la position des deux droites  et ?   *** Exercice ⑥:***  Dans le plan complexe on considère les points , et d’affixes respectivement , et et soit le point symétrique de par rapport à l’axe réel.   1. Calculer puis déduire que les points *,* et sont alignés. 2. Vérifier que . 3. Montrer que le triangle est équilatéral.   *** Exercice ⑦:***  On considère les points A, B, C et D d’affixes respectives .  Montrer que ABCD est un carré.   1. *Représentation complexe des transformations usuelles* 2. *La translation*   Soit une translation de vecteur et soit l'image du point par la translation . On a :        Cette écriture s’appelle ***la représentation complexe*** ***de la translation*** .  *** Application ①⑤ :***  On considère la translation de vecteur .   1. Déterminer la représentation complexe de la translation . 2. Déterminer l’affixe du point l'image de par la translation 3. Déterminer l’affixe de tels que et . 4. *L’homothétie*   Soient un point du plan complexe et un élément de . Soit l’homothétie de centre et de rapport .Soit l'image de par l’homothétie . On a :          *.*  Cette écriture s’appelle ***la représentation complexe de l’homothétie*** .  *** Application ①⑥ :***  On considère l’homothétie de centre et de rapport .   1. Déterminer la représentation complexe de l’homothétie . 2. Déterminer l’affixe du point l'image de par l’homothétie . 3. Déterminer l’affixe de où et .   *** Exercice ⑧:***  Connaitre la nature des transformations usuelles suivantes dont la représentation complexe est comme suit :   1. . 2. . 3. . 4. . 5. *Notation exponentielle – Applications trigonométriques* 6. *Notation exponentielle d’un nombre complexe*   *** Activité :***   1. On considère le nombre complexe . Montrer que   On écrit sous la forme . Cette écriture s’appelle ***une forme exponentielle*** du nombre complexe .   1. Donner une forme exponentielle des nombres complexes suivants : ,, et.   * Définition*  Tout nombre complexe de module et d’argument s’écrit sous la forme . Cette écriture s’appelle ***la forme exponentielle*** du nombre .  ***🔿Exemples :***   * *.* * *.*   *** Application ①⑦ :***   1. Ecrire sous la forme algébrique les nombres complexes : et . 2. Ecrire sous la forme exponentielle le nombre complexe .   *Propriété :*  Soient ,, et des nombres réels. On a :   * . * . * . * . * . * . * .   *** Application ①⑧ :***  On pose : , et . Ecrire sous la forme exponentielle les nombres suivants : et   1. *Formule de Moivre – Formules d’Euler – Applications*   *a. Formule de Moivre*  On a :*.*  *Ainsi :.*  Cette égalité s’appelle ***la formule de Moivre***.  *Propriété (**formule de Moivre) :*  *.*  *** Application ① ⑨:***   1. Ecrire par deux méthodes différentes sous la forme algébrique. 2. En déduire la valeur de et en fonction de et .   *b. Formules d’Euler*  *on sait que :*  La somme des deux égalités donne : .  En soustrayant l’équation de l’équation on obtient : .  Ces deux formules résultantes s’appellent ***les formules d’Euler***.  *Propriété (**formules d’Euler):*  et .  *** Application ②⓪ :***   1. En utilisant les formules d’Euler, montrer que :. On dit dans ce cas-là qu’on a linéarisé le polynôme trigonométrique . 2. Linéariser les expressions suivantes  et . 3. *Equations de second degré dans*   *Propriété :*  On considère dans l’équation où , et sont des réels et .   * Le nombre s’appelle le discriminant de l’équation. * Si , alors l’équation admet deux solutions réelles et . * Si , alors l’équation admet une solution réelle double . * Si , alors l’équation admet deux solutions complexes conjuguées distinctes : et .   *** Application ②① :***   1. Résoudre dans les équations :  |  |  |  | | --- | --- | --- | |  |  |  |  1. On pose  *.* 2. Déterminer les réels  *et* tels que : *.* 3. Résoudre dans *: .* 4. *La représentation complexe de la rotation*   Soit une rotation de centre et de mesure d’angle , et soit l'image de par la rotation . On a :          *.*  Cette écriture s’appelle ***la représentation complexe de la rotation*** .  *Propriété :*  Soit une rotation de centre et de mesure d’angle , et soit l'image de par la rotation . On a : *.*  *** Application ②②:***   1. On considère la rotation de centre et de mesure d’angle . 2. Déterminer la représentation complexe de la rotation . 3. Déterminer l’affixe du point l'image par la rotation . 4. Déterminer l’affixe du point avec et . 5. Déterminer l’image du point par la rotation de centre et de mesure d’angle .   *** Exercice ⑨:***  On considère la transformation représentée par : .   1. Montrer qu’il existe un point unique du plan complexe invariant par la transformation . Notons ce point par et son affixe par . 2. Vérifier, pour tout et du plan , que :   .   1. En déduire la nature de la transformation .   *** Exercice de synthèse :***  ***Session Normale 2020***   1. On considère dans l’ensemble des nombres complexes l’équation      1. Vérifier que . 2. En déduire les solutions de l’équation . 3. 2) On considère les nombres complexes ;   et .   1. Vérifier que puis déduire que: . 2. Écrire les deux nombres complexes et sous forme trigonométrique. 3. En déduire que . 4. Dans le plan complexe est rapport à un repère orthonormé direct .On considére les points ; et d’affixes respectives ; et tel que .   Soit l’affixe du point du plan et l’affixe du point image de par la rotation de centre et d’angle .   1. Vérifier que . 2. Déterminer l’image du point par la rotation . 3. Déterminer la nature du triangle . 4. Montrer que et en déduire que les points ; et sont alignés. |  |