|  |
| --- |
| ***Calcul intégral*** |
| 1. *Intégrale d’une fonction continue sur un segment :*   *********Activité ① :***  Soit la fonction numérique d’une variable réelle définie par .   1. Déterminer deux primitives de la fonction sur . 2. Calculer . Que remarquez-vous ?   Le nombre ne dépend pas du choix d’une primitive de la fonction .  Le nombre s’appelle intégrale de la fonction de à elle est notée .  ***Définition :***  Soit une fonction continue sur un segment et une primitive de sur .  Le nombre et appelé *intégrale* de de à et on écrit :  .  ***🔿Exemple :***  Calculons l’intégrale suivante  .  La fonction est continue sur .  Donc :    .  *** Application ① :***  Calculer les intégrales suivantes :   |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | |  |  |  |  | |  | |  | |   ***🔿Remarque :***  Dans l’écriture , on peut remplacer la variable par n’importe quelle autre lettre.  ***🔿 Exercice ① :***  Calculer les intégrales suivantes :   |  |  |  | | --- | --- | --- | |  |  |  | |  |  |  | |  |  |  |   ***Conséquences :***  Soit une fonction continue sur un intervalle Pour tous on a :   * . * . * (Relation de Chasles).   *🔿Exemple :*    *** Application ② :***  Calculer les intégrales suivantes :   |  |  |  | | --- | --- | --- | |  |  |  |   * Propriété :*  Soient et deux fonctions continues sur l’intervalle et .   * *.* * *.*   *** Application ③:***  On considère les intégrales et *.*   1. Vérifier que pour tout . 2. Vérifier que pour tout . 3. Calculer et puis en déduire et .   ***🔿 Exercice ② :***  On pose :  Calculer puis en déduire les valeurs de .   1. *Intégrale et ordre – la valeur moyenne :* 2. *Intégrale et ordre :*   * Propriété :*  Soient deux fonctions continues sur l’intervalle .   * Si , alors . * Si , alors .   *** Application ④ :***   1. Montrer que : . 2. Montrer que : . 3. *Valeur moyenne d’une fonction continue sur un segment :*   *Définition :*  Soit une fonction continue sur un segment .  l existe au moins un réel tel que : .  Le nombre est appelé *valeur moyenne* de la fonction sur l’intervalle  ***🔿Exemple :***  La valeur moyenne de la fonction sur l’intervalle [ est  C’est-à-dire : .  *** Application ⑤ :***  Calculer la valeur moyenne de la fonction sur l’intervalle .   1. *Techniques de calcul d’intégrales :* 2. *Utilisation des primitives* :   *** Application ⑥:***   1. Calculer les intégrales suivantes :   ; ;et *.*   1. ***a-*** Vérifier que : .   ***b-*** En déduire la valeur de l’intégrale .  ***🔿 Exercice ③ : Bac 2002***   1. Calculer l’integrale . 2. Montrer que pour tout réel puis calculer . 3. *Décomposition des fractions rationnelles en une somme de fractions rationnelles :*   *** Application ⑦ :***  Soit la fonction définie sur par : .   1. Déterminer les nombres réels pour que l’on ait pour tout   .   1. En déduire la valeur de l’intégrale : . 2. *Linéarisation des fonctions trigonométriques :*   *** Application ⑧ :***  Linéariser le polynôme trigonométrique  puis calculer  ***🔿 Exercice ④ : Bac 2003***  Vérifier, pour tout réel , que : .  Calculer l’integrale   1. *Intégration par parties :*   Soit deux fonctions dérivables sur un intervalle telles que continues sur a, b].  On a : .  Alors :  D’où .  * Propriété :*  Soient deux fonctions dérivables sur un intervalle telles que ses dérivées sont continues sur .  Pour tout on a : .  ***🔿Exemple :***  Calculons l’intégrale  .  Posons , alors .  Il s’ensuit  .  ***🔿Remarque :***  Le choix des fonctionset n'est pas arbitraire. Leur bonne sélection joue un rôle clé dans cette technique.  Dans l’exemple précédent si notre choix est , alors .  On obtient donc ce qui rend le calcul de l’intégrale voulue est très compliqué.  *** Application ⑨:***  En utilisant la formule d’intégration par parties, Calculer les intégrales suivantes :   ; ; et .  ***🔿 Exercice ⑤ : Bac 2001***   1. Vérifier, pour tout , que : . 2. En utilisant la formule d’intégration par parties, Calculer l’integrale   ***🔿 Exercice ⑥ :***  En utilisant la formule d’intégration par parties, Calculer les integrales suivantes :   |  |  |  | | --- | --- | --- | |  |  |  | |  |  |  | |  |  |  |  1. *Calcul d’aires et de volumes :* 2. *Calcul des aires :*   ***Activité ②:***  On considéra la fonction définie par : et la courbe représentative de dans le plan rapporté à un repère orthonormé unité (1cm)   1. Tracer et colorier le domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe et les droites d'équations et , puis donner une valeur de son aire en unités d’aires. 2. Calculer . Qu'est-ce qu'on peut déduire ?   * Propriété :*  Soit une fonction continue sur un segment (). et sa courbe représentative dans un repère orthogonal.  L’aire du domaine délimité par , l’axe des abscisses et les droites d’équations est égale à    *** Application ①⓪ :***  Le plan est apporté à un repère orthonormé avec  et  Soit la fonction définie par :  Calculer l’aire du domaine délimité par la courbe de et les droites d’équations : .  ***🔿Exercice ⑦ : Bac 2015***  Soit la fonction définie sur par: et la courbe de la fonction dans un repère orthonormé tel que .   1. Montrer que . (Remarquer que ) 2. Calculer, en , l’aire du domaine plan délimité par , l’axe des abscisses et les droites d’équations : et   * Propriété :*  Soient et deux fonctions continues sur un segment , les courbes représentatives de et dans un repère orthogonal.  Soit le domaine délimité par les courbes et les droites d’équations  L’aire du domaine en unités d’aire est donnée par : .    *** Application ①① :***  Le plan est rapporté à un repère orthogonal avec  et  On considère les fonctions définie par :  *et*  Calculer l’aire du domaine délimité par les courbes des fonctions et l’axe des abscisses et les droites d’équations .  ***🔿 Exercice ⑧ :*** ***Session Rattrapage 2017***  Soit la fonction numérique définie sur par: .  Et la courbe de la fonction dans un repère orthonormé tel que   1. Montrer que est une fonction primitive de la fonction sur ,puis en déduire que: . 2. En utilisant une intégration par parties, Montrer que:. 3. 3) Calculer en ,l’aire du Domaine plan délimité par, la droite d’équation et les droites d’équations : et . 4. *Calcul des volumes :*   * Propriété :*  L’espace est rapporté à un repère orthonormé . Soit tel que .  Soit un solide limité par deux plans et  et soit est l’aire de l’intersection du solide avec le plan .  le volume de ce solide est (en unités de volume) : .  ***🔿Exemple :*** volume d’un cylindre de rayon et de hauteur .  L’intersection du plan avec le cylindre est un disque d’aire .  Puisque est continue sur alors le volume de cylindre est :  .  * Propriété :*  Soit une fonction continue sur un segment , et sa courbe représentative . Le volume du solide engendré par la rotation de la courbe autour de l’axe des abscisses un tour complet est donné par la formule :(en unités de volume).    *🔿Exemple :*  Le volume du solide engendré par la rotation de la courbe de la fonction sur [0,1]  Autour de l’axe des abscisses un tour complet est donné par :  :  *** Application ①② :***  Soit la fonction numérique définie sur par : .  Calculer Le volume du solide engendré par la rotation de la courbe de la fonction utour de l’axe des abscisses un tour complet.  Répondre à la même question pour la fonction sur l’intervalle . |  |