|  |
| --- |
| ***Dérivation – Etude de fonctions*** |
|  |
| 1. *Nombre dérivé- Fonction dérivée (Rappels)*   ***Activité ①:***   1. On considère la fonction définie sur par .   Étudier la dérivabilité de en puis interpréter le résultat graphiquement.   1. On considère la fonction définie sur par. 2. Etudier la dérivabilité de à droite et à gauche en 1 puis interpréter les résultats graphiquement. 3. est-elle dérivable en 1 ?   *Définitions et propriétés :*  Soit une fonction définie sur un intervalle ouvert et a un point de .   * On dit que est *dérivable* en s'il existe un réel tel que . * Le nombre , noté  *ou ,* est appelé le *nombre dérivé* de la fonction en . * Dans ce cas la courbe de admet une tangente au voisinage de d’équation   *.*   * La fonction s'appelle *l'approximation affine* de voisinage de .On écrit alors au voisinage de . * On dit que est *dérivable à droite* de , s'il existe un réel , tel que . * Le nombre , noté  *,* est appelé le *nombre dérivé* de la fonction *à droite* en . * Dans ce cas la courbe de admet une demi-tangente au voisinage de d’équation .(On définit de même manière la dérivabilité à gauche en )   *🔿Exemple :*  La fonction définie sur par est dérivable en . En effet :  On a        .  Donc est dérivable en et la courbe admet au voisinage de une tangente d’équation : .   * Donnons une valeur approchée de :   La fonction affine tangente à au voisinage de est .  Ainsi :  *.*  Or  *.*  Par suite *.*  *🔿Remarques :*   * Si , alors admet une tangente horizontale au point * Si est continue en et ou , alors admet une demi-tangente verticale au point   *🔿Exemple :*  La fonction définie sur par n’est pas dérivable en a gauche. En effet :  On a      .  Parce que et du fait que et pour tout .  Donc n’est pas dérivable en 1 à gauche.  Puisque est continue en à gauche et , alors admet une demi-tangente verticale au point dirigée vers le haut.  *** Application ① :***  Etudier la dérivabilité de la fonction en puis interpréter graphiquement les résultats dans les cas suivants :   |  |  |  | | --- | --- | --- | | 1. et | 1. et | 1. et à droite. |   *** Exercice ①:***  On considère la fonction définie par .   1. Etudier la continuité de en . 2. Etudier la dérivabilité de en . Interpréter graphiquement le résultat.   *Propriété :*  est dérivable en si et seulement s’elle est dérivable à droite et à gauche en a et .  *🔿 Graphiquement :*  Si , alors admet deux demi-tangentes non parallèles au point . Ce point est appelé **point anguleux.**    *** Application ②:***  On considère la fonction définie par   1. Montrer queest continueen *.* 2. Étudier la dérivabilité deen *.*   *🔿Remarque :*  Si est dérivable en , alors elle est continue en a. la réciproque n’est pas toujours vraie.  *🔿Exemple :*  La fonction est continue en 0 mais n’est pas dérivable en ce point.   1. *Opérations sur les fonctions dérivables-Monotonie d’une fonction*   *Propriété :*   * Les fonctions polynomiales et les fonctions et sont dérivables sur . * Toute fonction rationnelle est dérivable sur tout intervalle inclus dans son domaine de définition.   ***Tableau des fonctions dérivées usuelles :***   |  |  |  | | --- | --- | --- | | **La fonction** | **La fonction dérivée** | **Domaine de dérivabilité de** | |  |  |  | |  |  |  | |  |  |  | |  |  |  | |  |  |  | |  |  |  | |  |  |  | |  |  |  |   *Propriété :*  Soient et deux fonctions dérivables sur un intervalle et un réel, on a :   * La fonction est dérivable sur et . * La fonction est dérivable sur et . * La fonction est dérivable sur et . * La fonction est dérivable sur et . * Si , alors la fonction est dérivable sur et . * Si , alors la fonction est dérivable sur et . * Si , alors la fonction est dérivable sur et .   *** Application ③:***   1. Calculer la dérivée des fonctions suivantes :      1. a. Etudier la monotonie de la fonction ci-dessus.   b. Dresser le tableau de variations de .  c. En déduire que*.*  *** Exercice ②:***   1. On considère la fonction définie sur par . 2. Etudier la dérivabilité de à droite en . Interpréter graphiquement le résultat. 3. Montrer que est dérivable sur puis calculer sa dérivée. 4. Dresser le tableau de variations de . 5. Calculer puis déduire le signe de sur . 6. Soit la fonction définie sur par . 7. Montrer que . 8. Etudier les variations de . 9. Dresser le tableau de variations de . 10. En déduire que . 11. *Dérivée**de**la**fonction**composée****:***   ***Activité ②:***  Soient et deux fonctions définies sur IR par :  ;   1. Calculer et pour tout . 2. Calculer . 3. Soit . Déterminer puis calculer . 4. Comparer .   *Propriété :*   * Si est dérivable en un réel et dérivable en , alors la fonction composée est dérivable en et : . * Si est dérivable sur un intervalle et dérivable sur un intervalle tel que , alors la fonction composée est dérivable sur et de plus, pout tout   .  *🔿Exemple :*  Déterminons la dérivée de la fonction sur .  Pour tout de , on a tel que et .  Comme est dérivable sur IR et est dérivable sur et que , alors la fonction est dérivable sur .  Et on : , pour tout de .*** Application ④:***  Calculer la dérivée des fonctions et   1. *Dérivée**de**la**fonction**Réciproque****:***   *Propriété :*  Soit une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle de IR, et .  Si est dérivable en et , alors la fonction est dérivable en et  .  *** Application ⑤:***  Soit la fonction définie sur par .   1. 1.Montrer que admet une fonction réciproque définie sur . 2. a. Calculer . 3. Montrer que est dérivable en puis déterminer .   *Propriété :*  Soit une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle de .  Si est dérivable sur tel que , alors la fonction est dérivable sur . De plus on a pour tout : .  *🔿 Conséquences :*   * Soit un entier naturel supérieur ou égal à .   La fonction est dérivable sur et pour tout .   * Si une fonction dérivable sur un intervalle de et , alors la fonction est dérivable sur et sa fonction dérivée est donnée par : .   *** Application ⑥:***   1. Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :  |  |  | | --- | --- | |  |  | |  |  |  1. A l’aide du nombre dérivé, calculer les limites suivantes :  |  |  | | --- | --- | |  |  |   *** Exercice ③:***  Soit la fonction numérique définie sur par .   1. Etudier les variations de la fonction . 2. Soit la restriction de sur [1 ;+. 3. Montrer que admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J à déterminer. 4. Montrer que l’équation admet une unique solution et que . 5. Montrer que : . 6. *Branches infinies (Rappel)*   ***Schéma récapitulatif de l'étude des branches infinies***  admet une asymptote verticale d'équation  admet une asymptote horizontale d'équation au voisinage de  admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de  admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de  admet une branche parabolique de direction la droite d'équation au voisinage de  admet une asymptote oblique d'équation au voisinage de  est asymptote oblique à au voisinage de  *🔿Exemple ① :*  On considère la fonction définie sur par : .  On a et  Donc la droite d’équation est une asymptote horizontale à la courbe au voisinage de et .  Et on a : et .  Donc la droite d’équation est une asymptote verticale de la courbe .  *🔿Exemple ② :*  On considère la fonction définie sur par : .  On a : .  On calcul alors :  On a .  Par suite :.  D’où la courbe admet une branche parabolique de direction de la droite d’équation au voisinage de .  *** Application ⑦:***  On considère la fonction définie par  .   1. Donner l’ensemble de définition de . 2. Calculer et . Interpréter les résultats. 3. a. Vérifier, pour tout de , que .   b. Montrer que la droite d’équation est une asymptote oblique de au voisinage de et .  c. Etudier les positions relatives entre la courbe et la droite .   1. *Concavité d'une courbe - Points d'inflexion :*   *Propriété :*  Soient une fonction deux fois dérivable sur un intervalle et sa courbe représentative et .   * Si est positive sur l'intervalle , alors est convexe * Si est négative sur l'intervalle , alors est concave. * Si  s'annule en en changeant de signe, alors le point est un point d'inflexion de .   *** Application ⑧ :***  On considère la fonction définie par  .  Etudier la concavité de en précisant les points d'inflexion s'ils existent.   1. *Eléments de symétrie d’une courbe :* 2. *Axe de symétrie :*   *Propriété :*  Soit une fonction définie sur un ensemble et sa courbe représentative dans un repère orthonormé.  La droite d'équation est un ***axe de symétrie*** de la courbe si et seulement si :  *.*  *** Application ⑨ :***  Montrer que la droite est un axe de symétrie de la courbe de la fonction définie par .   1. *Centre de symétrie :*   *Propriété :*  Soit une fonction définie sur un ensemble et sa courbe représentative dans un repère orthonormé.  Le point tel que est un ***centre de symétrie*** de la courbe si et seulement si : .  *** Application ①⓪ :***  On considère la fonction définie par  .   1. Montrer que le point est un centre de symétrie de la courbe de la fonction définie par  *.* 2. En déduire qu’il suffit d’étudier sur *.*   *** Exercice ④:***  On considère la fonction définie par  .   1. Donner les coordonnées des points d’intersection de avec les axes du repère. 2. Etudier les variations de  *.* 3. Soit la restriction de sur .   Montrer que admet une fonction réciproque définie sur un intervalle à déterminer.   1. Construire , et dans un repère orthonormé .   *** Exercice de synthèse :***   1. On considère la fonction définie sur par. 2. Calculer et . 3. a. Montrer, pour tout réel , que .   b. Donner le tableau des variations de .  c. En déduire, pour tout réel , que .   1. Soit la fonction qui définie sur par , et soit sa courbe representative dans le plan muni d’un repère orthonormé . 2. Calculer . 3. Montrer que. Interpréter géométriquement le résultat. 4. Montrer que la droite est une asymptote oblique de au voisinage de . 5. a. Montrer, pour tout réel , que   b. Dresser le tableau des variations de .   1. Calculer puis tracer . 2. a. Montrer que admet une fonction réciproque definie sur un intervalle à déterminer.   b.Montrer que est derivable en puis calculer .  c. Tracer dans le même repère. |  |