|  |
| --- |
| ***Continuité d’une fonction numérique*** |
| 1. *ntinuité d'une fonction numérique :* 2. *Continuité d'une fonction en un point*   *Définition :*  Soit une fonction définie sur un intervalle ouvert et a un point de .  On dit que est *continue* en si seulement si .   |  |  | | --- | --- | | ***Une image contenant texte, ligne, diagramme, Tracé  Le contenu généré par l’IA peut être incorrect.*** | ***Une image contenant texte, diagramme, ligne, Tracé  Le contenu généré par l’IA peut être incorrect.*** | | * est continue en | * est discontinue en |   *🔿*  *Exemples :*   * La fonction définie par est continue en .   En effet :    .  ***Application ① :***  Etudier la continuité des fonctions suivantes au point .   1. et . 2. et .   ***Exercice ①:***  Etudier la continuité des fonctions suivantes au point .   1. et . 2. *Continuité à droite – continuité à gauche :*   *Définition :*   * Soit une fonction définie sur un intervalle   On dit que est *continue à droite* de si seulement si .   * Soit une fonction définie sur un intervalle   On dit que est *continue à gauche* de si seulement si .  *Exemple :*  La fonction définie par  est continue à droite en 1 est non continue en 1 à gauche.  En effet :  (Du fait que si )  .  Ainsi est continue à droite en 1.  Et:  (Du fait que si )  .  Ainsi est discontinue à gauche en 1.  *Propriété :*  est continue en si seulement si est continue à gauche et à droite de .  Autrement : est continue en .  ***Application ② :***  On considère la fonction définie par .   1. Etudier la continuité de à droite et à gauche en 0. 2. est-elle continue en 0.   ***Exercice ②:***   1. Soit la fonction définie par :   Etudier la continuité de à droite et à gauche en 2.   1. Soit la fonction définie par .   Déterminer la valeur de pour que soit continue en .   1. Continuité d’une fonction sur un intervalle*:*   *Définition :*   * On dit que est continue sur l’intervalle ouvert si est continue en tout point de . * On dit que est continue sur l’intervalle si est continue en tout point de et continue à droite de et à gauche de .   *Remarque :*  On définit de même manière la continuité sur les intervalles , , et .  *Propriété :*   * Toute fonction polynômiale est continue sur . * Toute fonction rationnelle est continue sur un intervalle inclus dans son domaine de définition. * Les fonctions et sont continues sur . * La fonction (x) est continue sur . * La fonctionest continue . * La fonctionest continue .   *Exemples :*   * La fonction est continue sur parce qu’elle est une fonction polynômiale. * La fonction est continue sur parce qu’elle est une fonction rationnelle et .   ***Application ③ :***  On considère la fonction définie par .  Montrer que la fonction est continue sur .   1. *Image d’un intervalle par une fonction continue :* 2. *Image d’un segment- Image d’un intervalle*   *Propriété :*   * L’image d’un segment par une fonction continue est un segment. * L’image d’un intervalle par une fonction continue est un intervalle.   *Remarque :*  Si est continue sur un segment et et sont respectivement le maximum et le minimum de sur , alors .  Une image contenant ligne, Tracé, diagramme  Le contenu généré par l’IA peut être incorrect.  ***Application ④ :***  On donne ci-contre la courbe d’une fonction définie sur .  Déterminer l’image des intervalles suivants , , et par .   1. *Image d’un intervalle par une fonction continue et strictement monotone*   Soit une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle .  Dans ce tableau suivant et sont deux nombres réels ou ou .   |  |  |  | | --- | --- | --- | | Image de l’intervalle par la fonction | | | | L’intervalle | strictement croissante sur | strictement décroissante sur | |  |  |  | |  |  |  | |  |  |  | |  |  |  |   *Exemple :*  On considère la fonction définie par .  La fonction est strictement décroissante sur et strictement croissante sur .On a :   |  |  | | --- | --- | | . | . | | . | . |   ***Application ⑤ :***  Soit une fonction définie par  .   1. Déterminer . 2. Etudier la monotone de . 3. Déterminer  ; et .   ***Exercice ③:***  On considère une fonction définie par  .   1. Dresser le tableau de variation de la fonction . 2. Déterminer les images des intervalles suivants ; ; ; par . 3. *Opérations sur les fonctions continuités*   *Propriété :*  Soient deux fonctions continues sur un intervalle et . On a :   * Les fonction ; et sont continues sur . * Pour tout la fonction est continue sur . * Si , alors sont continues sur . * Si  , alors est continue sur .   *Exemples :*   * La fonction est continue sur ∞en tant que somme de deux fonctions continues sur qui sont . * On considère . On a : * La fonction est continue sur puisqu’elle est une fonction polynomiale et on a . Ainsi est continue sur . * La fonction est continue sur et on a .   Il en résulte que la fonction est continue sur .  ***Application ⑥ :***  Montrer que est continue sur dans les cas suivants :   1. et *.* 2. et . 3. *.*   *Propriété :*  Soient et deux fonctions.  Si est continue sur un intervalle et g continue sur un intervalle tel que alors la fonction est continue sur l’intervalle .  *Exemple :*  On considère la fonction .  On a avec et .  Puisque est continue sur et est continue sur et , alors est continue sur .  ***Application ⑦ :***  On considère la fonction .  Montrer que est continue sur .   1. *Théorème des valeurs intermédiaires*   *Théorème :*  Soit une fonction continue sur un intervalle .  Pour tout réel compris entre et il existe au moins un réel de l’intervalle tel que .  ***En d’autres termes :*** l’équation d’inconnue admet au moins une solution dans pour tout compris entre .  Une image contenant diagramme, ligne, texte, Tracé  Le contenu généré par l’IA peut être incorrect.  *Exemple :*  Montrons que l’équation admet au moins une solution sur .  On considère la fonction définie par .  L’équation est équivalente à l’équation .  La fonction est continue sur comme somme de deux fonctions continues et on a et .  Puisque , alors d’après le théorème des valeurs intermédiaires l’équation admet au moins une solution sur .  *Corollaire :*  Si la fonction est continue sur tel que , alors l’équation admet au moins une solution dans l’intervalle  Si de plus est strictement monotone, alors cette solution est unique.  *Exemple :*  Montrons que l’équation admet une unique solution telle que .  On considère la fonction définie par .  L’équation est équivalente à l’équation .  La fonction est continue et strictement croissante sur et on a .  Donc d’après T.V.I l’équation admet une solution unique tel que .  *Donnons un encadrement de d’amplitude .*  On a , alors ou ou .  Or , alors .  Et puisque , alors et l’amplitude de cet encadrement est . On répète donc le procédé précédent.  On a , alors ( est le centre de )ou ou .  Puisque et , alors et l’amplitude de cet encadrement est *.*  Ce procédé est appelé *la dichotomie*.  ***Application ⑧:***   1. Montrer que l’équation  admet au moins une solution sur l’intervalle . 2. Montrer que l’équation admet une solution unique dans l’intervalle .   ***Exercice ④:***  Soit la fonction définie sur par .   1. Montrer que l’équation admet une unique solution sur puis vérifier que . 2. Donner un encadrement de d’amplitude . 3. Donner le signe de sur . 4. *Fonction Réciproque d’une fonction continue et strictement monotone :*   ***Activité ②:***  Soit la fonction définie sur par :   1. Montrer que est continue et strictement croissante sur . 2. Déterminer l’intervalle l’image de par *f* . 3. Soit ,montrer que . 4. On considère la fonction définie sur par . 5. Remplir le tableau suivant :  |  |  | | --- | --- | |  |  | |  |  | |  |  |  1. Que remarquez-vous ? 2. Montrer que et .   La fonction est appelée la fonction réciproque de et on la note par .  *Propriété :*  Si *f* est continue et strictement monotone sur un intervalle , alors admet une fonction réciproque, notée , définie de vers telle que :  *Conséquences :*   * . * .   *Exemple :*  La fonction est continue et strictement croissante sur , donc admet une fonction réciproque continue et strictement croissante sur .  Déterminons l’expression de :  Soient et , on a :        .  Donc .  Il en résulte : .  ***Application ⑨:***  On considère la fonction définie sur par  .   1. Montrer que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle à déterminer. 2. Déterminer l'expression de pour tout de .   ***Exercice ⑤:***  On considère la fonction définie sur par  .   1. Montrer que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle à déterminer. 2. Déterminer l'expression de pour tout de J.   *Propriété :*  Si est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors :   * La fonction réciproque est continue sur et a même sens de variations que la fonction . * Les courbes représentatives de f et de f dans un repère orthonormé, sont symétriques par rapport à la droite d'équation .   Une image contenant texte, Tracé, ligne, diagramme  Le contenu généré par l’IA peut être incorrect.Une image contenant ligne, Tracé, diagramme, Parallèle  Le contenu généré par l’IA peut être incorrect.  ***Application ⑨:***  On donne ci-contre la courbe représentative d’une fonction définie sur .   1. Montrer que admet une fonction réciproque définie sur un intervalle à déterminer. 2. Dresser le tableau de variations de . 3. Construire la courbe représentative de . 4. *Fonction Racine*   Soit un entier naturelle tel que : et Soit une fonction définie sur par .   * est une fonction polynôme donc est continue sur par suite sur . * est strictement croissante sur , du fait que .   Alors admet une fonction réciproque , appelée *fonction racine n-ième***,** définie sur .   * l’image du nombre de par est note **et on a :**     *🔿Remarques :*  pour tout on a :   * . * . * est appelée la racine cubique de .   *🔿Conséquences :*   * . * . * . * . * La fonction est continue est strictement croissante sur . * .   *🔿Exemples :*   |  |  |  | | --- | --- | --- | |  | * parce que |  | | * . | | |   ***Application ①⓪:***  Résoudre dans les équations suivantes :   |  |  |  | | --- | --- | --- | |  |  |  | |  |  |  |   *Propriété :*  Soient et deux réels positifs, et et sont deux entiers naturels non nuls.   * . * Si , alors * . * . * .   *Exemple :*  Simplifions le nombre :.  ***Application ①①:***   1. Simplifier ; et . 2. Mettre en ordre croissant les nombres; et   ***Exercice ⑥:***  Simplifier les nombres suivants : et .  *Propriété :*  Soit une fonction positive sur l’intervalle et .   * Si est continue sur I alors est continue sur . * Si alors . * Si alors .   ( Les deux propriétés précédentes restent vraies au voisinage de et )  ***Application ①②:***   1. On considère la fonction définie sur par . 2. Etudier la continuité de sur . 3. Calculer et . 4. Calculer les limites suivantes :  |  |  |  | | --- | --- | --- | |  |  |  |   ***Exercice ⑦:***  Calculer les limites suivantes :   |  |  |  | | --- | --- | --- | |  |  |  | |  |  |  |  1. *Puissances rationnelles d’un nombre réel strictement positif :*   *Définition :*  Soient et un nombre rationnel tel que : .  Le nombre , appelé ***puissance rationnelle de base a et d'exposant r***, est le nombre .  Autrement : .  *Exemples :*   |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | |  |  |  |  |   *Propriété :*  Soient a et b deux réels strictement positifs et deux rationnels.   * . * . * . * . * . * .   ***Application ①③:***  Ecrire sous forme d’une puissance rationnelle les nombres *et* |