А. КЖИВИЦКИЙ и О. А. ЛАДЫЖЕНСКАЯ

МЕТОД СЕТОК ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ—СТОКСА

В работе предлагается неявная разностная схема для решения общей нелинейной нестационарной задачи (1) и исследуется ее сходимость. Насколько нам известно, в опубликованных работах имеются лишь разностные схемы для функции тока $\psi(x_1, x_2, t)$, описывающей движение двумерных течений [1—3], причем доказательство сходимости предложенных схем проведено лишь в работе [1].

Мы рассматриваем случай ограниченной области Ω и однородного условия. Случай неограниченных областей и неоднородных граничных условий рассматривается аналогично.

В конце статьи дается еще одна неявная разностная схема для задачи (1). Она сходится при том же соотношении шагов Δt и Δx (т. е. $\Delta t \simeq \simeq \Delta x^2$), что и явная разностная схема для трехмерного уравнения теплопроводности.

Наконец, заметим, что для задачи (1) применим метод Ротэ в его обычной форме. Доказывается это так же, как это сделано здесь для первой разностной схемы.

Пусть Ω — ограниченная область трехмерного эвклидового пространства (она может быть и многосвязной), T — некоторое фиксированное число >0, $Q = \Omega \times [0, T]$, и пусть S означает границу области Ω. Рассмотрим в Q следующую краевую задачу для системы уравнений Навье—Стокса:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu\Delta\mathbf{u} + u^k \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k} &= -\operatorname{grad} p + \mathbf{f}, \\ \operatorname{div}\mathbf{u} &= 0, \\ \mathbf{u}|_S &= 0, \\ \mathbf{u}|_{t=0} &= \mathbf{a}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{f} = \mathbf{f}(x, t)$ и $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x)$ — заданные векторы, определенные в Q и Ω соответственно, u^k означает k-ю компоненту вектора $\mathbf{u}$. Как обычно предполагается, что по повторяющимся индексам надо произвести суммирование от 1 до 3.

Предположим, $\mathbf{f} \in L_2(Q)$, $\mathbf{a} \in \mathring{J}(\Omega)$ [$\mathring{J}(\Omega)$ — замыкание в $L_2(\Omega)$ гладких, соленоидных и финитных в Ω векторов]. Будем называть слабым (в смысле Э. Хопфа) решением задачи (1) вектор $\mathbf{u}(x, t)$, если он соленоидален, т. е. удовлетворяет в слабом смысле уравнению $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$, квадратично суммируем по Q, имеет $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k}$ из $L_2(Q)$, равняется нулю на боковой поверхности S и удовлетворяет следующему тождеству:

$$\int_0^T \int_\Omega \left(\mathbf{u}\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k}\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} - u^k \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k}\Phi + \mathbf{f}\Phi \right) dx\,dt + \int_\Omega \mathbf{a}(x)\Phi(x, 0)\,dx = 0 \tag{2}$$

для любого гладкого, соленоидального вектора Φ, равного нулю вблизи границы S и при $t=T$. Класс этих вспомогательных векторов Φ обозначим через $\mathfrak{M}$.

Разобьем все полупространство $E_3\times[0, \infty)$ на одинаковые параллелепипеды при помощи плоскостей $x_i=\pm kh$, $t=k\Delta t$, где $i=1, 2, 3$, $k=0, 1, 2, \ldots$, а h и Δt некоторые положительные числа.

Обозначим через Ω_h^k замкнутую область на плоскости $t=k\Delta t$, состоящую из всех 3-мерных элементарных кубов $k_i h\leqslant x_i\leqslant(k_i+1)h$, принадлежащих Q, а через S_h^k — ее границу. Этими же символами будем обозначать и совокупность узлов (вершин) решетки, принадлежащих Ω_h^k и S_h^k соответственно. Аналогично, через Q_h, обозначим совокупность всех элементарных параллелепипедов, принадлежащих $\Omega\times[0, T]$, а также совокупность всех узлов решетки, принадлежащих Q_h. Будем использовать обозначения из § 6 гл. 1 книги [4], в частности

$$v_{x_k}(x, t)=\frac{1}{h}[v(x+e_k h, t)-v(x, t)],$$

$$v_{\bar{x}_k}(x, t)=\frac{1}{h}[v(x, t)-v(x-e_k h, t)],$$

$$\overset{\pm 0}{v}=\overset{\pm 0}{v}(x, t)=v(x, t\pm\Delta t),$$

$$\overset{\pm k}{v}=\overset{\pm k}{v}(x, t)=v(x\pm e_k h, t),$$

где e_k — орт, направленный по оси x_k. Кроме того, обозначим

$$\mathbf{u}_h^2=u_h^i u_h^i,\quad \mathbf{u}_{hx}^2=u_{hx_k}^i u_{hx_k}^i,$$
$$\mathbf{u}_{h\bar{t}}^2=u_{h\bar{t}}^i u_{h\bar{t}}^i.$$

Индекс h у $\mathbf{u}_h$ означает, что функцию $\mathbf{u}$ рассматриваем в точках решетки. Будем также писать

$$h^3\sum_{\Omega_h^k}\mathbf{u}_h^2=\|\mathbf{u}_h(k)\|^2,$$

$$h^3\sum_{\Omega_h^k}f_h^i u_h^i=(\mathbf{f}_h, \mathbf{u}_h)_k,$$

$$h^3\sum_{\Omega_h^k}\mathbf{u}_{hx}^2=\|\mathbf{u}_{hx}(k)\|^2,$$

причем суммирование в последней сумме, как и везде в дальнейшем, проведено по всем точкам решетки Ω_h^k, в которых выражение, стоящее под знаком суммы, имеет смысл, т. е. при его построении не используется ни одна точка решетки, не принадлежащая Ω_h^k.

Введем следующую разностную аппроксимацию произвольного соленоидального вектора $\mathbf{w}=\mathbf{w}(x)$. Пусть $k_i h\leqslant x_i\leqslant(k_i+1)h$, $i=1, 2, 3$, одна из клеток сеточного разбиения, σ — ее граница, $\bar{\sigma}_i$ — та часть границы σ, которая лежит в плоскости $x_i=k_i h$. Положим, в точке $x_i=kh$

$$w_h^i=h^{-2}\int_{\bar{\sigma}_i}w^i d\sigma. \tag{3}$$

Так как $\mathbf{w}$ соленоидальный вектор, то $\int\limits_{\sigma} \mathbf{w}\mathbf{n} = 0$, отсюда следует разностная соленоидальность вектора $\mathbf{w}_h$, т. е. удовлетворение уравнению

$$w^i_{hx_i} = 0.$$

Пусть $\mathbf{f} \in L_2(Q)$, $\mathbf{a} \in \overset{\circ}{J}(\Omega)$. Построим кусочно-постоянный вектор $\mathbf{f}_h$, полученный как усреднение $\mathbf{f}$ по клеткам решетки Q_h. С $\mathbf{a}$ поступим так. Выберем последовательность $\mathbf{a}^{(m)}$ гладких, соленоидальных и финитных в Ω векторов, сходящуюся к $\mathbf{a}$ в $L_2(\Omega)$, и $\mathbf{a}^{(m)}$ заменим через $\mathbf{a}_h^{(m)}$ в согласии с формулой (3). При этом предполагаем h настолько малым, чтобы граница S_h сеточной области Ω_h лежала целиком в пограничной полоске, где $\mathbf{a}^{(m)}$ равно нулю. Это обеспечит согласование начального и граничного условий. Уравнения Навье—Стокса (1) заменяем следующей неявной разностной схемой:

$$u^i_{h\bar{t}} - \nu u^i_{hx_k\bar{x}_k} + \frac{1}{2} \overset{-0,+k}{u^k_h} u^i_{hx_k} + \frac{1}{2} \overset{-0}{u^k_h} u^i_{h\bar{x}_k} = -p_{h\bar{x}_i} + f^i_h; \tag{4а}$$

$$u^k_{hx_k} = 0, \tag{4б}$$

а начальные и граничные условия — следующими:

$$u^i_h|_{S_h} = 0, \tag{4в}$$

$$u^i_h|_{t=0} = a^{i(m)}_h. \tag{4г}$$

Из уравнений (4а)—(4в) надо определить неизвестные величины u^i_h, p_h на слое Ω^k_h, зная u^i_h на предыдущем слое.

Уравнения (4а) определены во всех внутренних точках Ω^k_h, а (4б) — во внутренних точках Ω^k_h и точках S^k_h (обозначим их $S^{k\prime}_h$), для которых в $u^{\prime}_{hx_i}$ входят лишь значения $\mathbf{u}_h$ на Ω^k_h. В $S^{k\prime}_h$ выделим подмножество $S^{k\prime\prime}_h$ таких точек, что в каждой из них взятое уравнение (4б) содержит только точки, принадлежащие S^k_h. Отбросим уравнения (4б), отвечающие точкам $S^{k\prime\prime}_h$, так как они следуют из (4в). Останутся уравнения (4б), взятые в точках $(\Omega^k_h - S^k_h) + S^{k\prime}_h - S^{k\prime\prime}_h = \Omega^{k*}_h$. Их число равно точно числу неизвестных p_h в уравнениях (4а). Итак, число уравнений (4а), (4в) и (4б), взятых в точках Ω^{k*}_h, равно числу неизвестных u^i_h, p_h. Но среди уравнений (4б) есть еще одна зависимость

$$\sum_{\Omega^{k*}_h} u^i_{hx_i} = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{3} \sum_{S^k_h} \theta^i u^i_h, \quad \theta^i = \pm 1;\ 0, \quad k = 1, \dots N,$$

а это равно тождественно нулю в силу (4в). Поэтому прибавим к нашей системе уравнения

$$\sum_{\Omega^{k*}_h} p_h = 0, \quad k = 1, \dots N. \tag{5}$$

Для доказательства однозначной разрешимости этой новой системы достаточно проверить, что отвечающая ей однородная система имеет только нулевое решение $u^i_h = p_h = 0$. Это сразу получим из равенства, к доказательству которого сейчас перейдем.

Основное тождество. Для любого $k \leqslant \left[\frac{T}{\Delta t}\right]$ имеет место следующее соотношение:

$$\|\mathbf{u}_h(k)\|^2 + 2\nu\Delta t \sum_{l=1}^{k} \|\mathbf{u}_{hx}(l)\|^2 + (\Delta t)^2 \sum_{l=1}^{k} \|\mathbf{u}_{h\bar{t}}(l)\|^2 =$$

$$= \|\mathbf{u}_h(0)\|^2 + 2\Delta t \sum_{l=1}^{k} (\mathbf{f}_h, \mathbf{u}_h)_l. \qquad (6)$$

Доказательство. Умножим (4а), взятое на l-м слое, на $2\Delta t h^3 u_h^i(x, l\Delta t)$ и просуммируем полученные равенства по всем внутренним точкам решетки Ω_h^l и $i = 1, 2, 3$. Получим

$$\|\mathbf{u}_h(l)\|^2 - \|\mathbf{u}_h(l-1)\|^2 + 2\nu\Delta t \|\mathbf{u}_{hx}(l)\|^2 +$$

$$+ (\Delta t)^2 \|\mathbf{u}_{h\bar{t}}(l)\|^2 = 2\Delta t (\mathbf{f}_h, \mathbf{u}_h)_l. \qquad (7)$$

При этом мы использовали следующие известные соотношения (см. [4, 6]):

$$2\Delta t v_{\bar{t}}(l)\, v(l) = (\Delta t)^2 v_{\bar{t}}^2(l) + v^2(l) - v^2(l-1),$$

$$h^3 \sum_{\Omega_h} u_{x_k} v = -h^3 \sum_{\Omega_h} u v_{\bar{x}_k}, \qquad (8)$$

если $uv|_{S_h} = 0$ и

$$(uv)_{x_k} = u_{x_k} v + \overset{+k}{u} v_{x_k}.$$

Из последнего из них, уравнения $u_{hx_k}^k = 0$ и равенства $\overset{-k}{u}{}_{hx_k}^i = u_{h\bar{x}_k}^i$, следует тождество

$$\left(\overset{-0}{u}{}_h^k\, \overset{-k}{u}{}_h^i u_h^i\right)_{x_k} = \left(\overset{-0}{u}{}_h^k u_h^i\right)_{x_k} u_h^i + \overset{-0}{u}{}_h^k u_h^i u_{h\bar{x}_k}^i = \left(\overset{-0,\,+k}{u}{}_h^k\, u_{hx_k}^i + \overset{-0}{u}{}_h^k u_{h\bar{x}_k}^i\right) u_h^i,$$

а так как $h^3 \sum_{\Omega_h} w_{hx_i} = 0$ для любой функции w_h, исчезающей на границе S_h, то

$$h^3 \sum_{\Omega_h^k} \left(\overset{-0,\,+k}{u}{}_h^k\, u_{hx_k}^i + \overset{-0}{u}{}_h^k u_{h\bar{x}_k}^i\right) u_h^i = 0.$$

Сумма

$$h^3 \sum_{\Omega_h^k} p_{h\bar{x}_i} u_h^i = -h^3 \sum_{\Omega_h^k} p_h u_{hx_i}^i = 0,$$

в силу (8) и уравнений (4б). И, наконец,

$$(\mathbf{u}_{hx_k\bar{x}_k}, \mathbf{u}_h)_l = -\|\mathbf{u}_{hx}(l)\|^2.$$

Суммируя уравнения (7) по l, получаем (6). Из (7) видно, что однородная система (4а)—(4в), (5) на каждом слое $t = k\Delta t$ имеет только нулевое решение и, следовательно, все неоднородные системы однозначно разрешимы. Итак, доказана теорема.

Теорема 1. *Система* (4а)—(4г), (5) *однозначно разрешима на каждом слое относительно* u_h^i, p_h *при любых* $\mathbf{f}_h$, $\mathbf{a}_h$.

Из (6) и (7) известным образом выводится следующее основное неравенство:

$$\|\mathbf{u}_h(k)\|^2 + 2\nu\Delta t \sum_{l=1}^{k} \|\mathbf{u}_{hx}(l)\|^2 + (\Delta t)^2 \sum_{l=1}^{k} \|\mathbf{u}_{h\bar{t}}(l)\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2\|\mathbf{a}_h^{(m)}\|^2 + 5\left(\Delta t \sum_{l=1}^{k} \|\mathbf{f}_h(l)\|\right)^2. \qquad (9)$$

Оно представляет собой разностный аналог основного энергетического неравенства гидродинамики и позволяет доказать сходимость исследуемой нами разностной схемы, т. е. сходимость $\mathbf{u}_h$ при $\Delta t = ch \to 0$, $m \to \infty$ к решению задачи (1).

Для этого умножим (4а) на Φ_h^i, результат просуммируем по i и всем точкам Q_h и преобразуем, считая Φ_h^i равным нулю на S_h и на слое $\Omega_h^{\left[\frac{T}{\Delta t}\right]}$ и удовлетворяющим уравнению $\Phi_{hx_i}^i = 0$. Вследствие этого получим соотношение

$$\Delta t \sum_{l=1}^{\left[\frac{T}{\Delta t}\right]} \left[(\mathbf{u}_h, \Phi_{ht})_{l-1} - \nu(\mathbf{u}_{hx_i}, \Phi_{hx_i})_l - \frac{1}{2}\left(\overset{-0,+i}{u_i^h}\mathbf{u}_{hx_i} + \overset{-0}{u_h^i}\mathbf{u}_{h\bar{x}_i}, \Phi_h\right)_l + (\mathbf{f}_h, \Phi_h)_l\right] +$$

$$+ (\mathbf{a}_h^{(m)}, \Phi_h)_0 = 0. \tag{10}$$

Для выполнения предельного перехода $\Delta t = \mathrm{c}h \to 0$ воспользуемся следующими интерполяциями функций u_h из § 6 гл. I книги [4]. Интерполяция $u_h'(x)$ функции u_h, заданной на решетке Ω_h, определяется как непрерывная функция $x \in \Omega_h$, совпадающая в узлах решетки Ω_h с u_h и в пределах одной клетки линейная по каждому переменному x_k при фиксированных остальных x_j. Интерполяция $\tilde{u}_h(x, t)$ функции u_h, заданной на решетке Q_h, является функцией, постоянной в пределах одной клетки, равной значению u_h в том узле этой клетки, который имеет наименьшие координаты. Наконец, введем еще одну интерполяцию $\tilde{u}_h'(x, t)$ функции u_h на Q_h, имеющую характер первой интерполяции по x и второй по t. Она есть непрерывная полилинейная функция по x при фиксированном t и кусочно-постоянная функция t при фиксированном x.

Функции $\tilde{\mathbf{u}}_h'$, построенные по решениям $\mathbf{u}_h$ систем (4а)—(4г) и доопределенные нулем на все $\bar{Q}_T$, являются элементами $\overset{0}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$, т. е. квадратично суммируемы по Q_T вместе со своими обобщенными производными $\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_h'}{\partial x_k}$ и равны нулю на $S \times [0, T]$. Для них в силу (9), как нетрудно доказать, справедлива оценка

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|\tilde{\mathbf{u}}_h'(x, t)\|^2 + 2\nu \int_{\Delta t}^{T}\int_{\Omega} \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_h'}{\partial x_i}\right)^2 dx dt \leqslant C, \tag{11}$$

в которой постоянную C можно взять независящей от h и m (надо лишь m и h считать согласованными так, чтобы h было меньше ширины пограничной полоски, в которой $\mathbf{a}^{(m)}$ обращается в нуль, и чтобы $\tilde{\mathbf{a}}_h^{(m)}$ стремились в $L_2(\Omega)$ к $\mathbf{a}$ при $h \to 0$ и $m \to \infty$).

Благодаря (11) из $\{\tilde{\mathbf{u}}_h'\}$ можно выделить последовательность, которая сходится слабо в $L_2(Q_T)$ вместе со своими производными $\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_h'}{\partial x_k}$ к некоторой вектор-функции $\mathbf{u}(x, t) \in \overset{0}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$. Эту же функцию $\mathbf{u}$ и ее производные $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k}$ имеют своими пределами $\tilde{\mathbf{u}}_h$ и $\tilde{\mathbf{u}}_{hx_k}$ соответственно (см. § 6 гл. 1 [4]). Функция $\mathbf{u}$ и будет слабым решением задачи (I). Ее соленоидальность нетрудно показать, исходя из уравнения (4б). Для доказательства же того, что она удовлетворяет тождеству (2) при всех $\mathbf{\Phi}$ из $\mathfrak{M}$, запишем соотношение (10) в интегральной форме:

$$\int_0^{\left(\left[\frac{T}{\Delta t}\right]-1\right)\Delta t} dt \int_{\Omega_h} \tilde{\mathbf{u}}_h \tilde{\mathbf{\Phi}}_{ht} dx - \int_{\Delta t}^{\left[\frac{T}{\Delta t}\right]\Delta t} dt \int_{\Omega_h} \left[\nu \tilde{\mathbf{u}}_{hx_i} \tilde{\mathbf{\Phi}}_{hx_i} + \right.$$

$$+\frac{1}{2}\Big(\overset{-\bar{0},\,+i}{u_h^i}\,\tilde{\mathbf{u}}_{hx_i}+\overset{-\bar{0}}{u_h^i}\tilde{\mathbf{u}}_{h\bar{x}_i}\Big)\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_h-\tilde{\mathbf{f}}_h\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_h\Big]\,dx+\int\limits_{\Omega_h}\tilde{\mathbf{a}}_h^{(m)}\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_h\,|_{t=0}\,dx=0. \tag{12}$$

Ввиду наличия в нем нелинейных членов надо установить дополнительно сильную сходимость в $L_2(Q_T)$ какой-либо подпоследовательности $\tilde{\mathbf{u}}_h$ к $\mathbf{u}$. Делается это так же, как в работе [7] Э. Хопфа доказывается сильная сходимость в $L_2(Q_T)$ приближений Галеркина к слабому решению задачи (1) (см. § 6 гл. 6 [5]). После этого в (12) можно выполнить предельный переход по $\Delta t=\mathrm{ch}\to 0$ на любом $\boldsymbol{\Phi}$ из $\mathfrak{M}$ и убедиться, что $\mathbf{u}$ есть слабое решение задачи (1).

Все доказательство мы проводили для случая $n=3$. Но, как видно из построений, все рассуждения переносятся на любое n, в частности $n=2$. Так как в этом последнем случае имеет место теорема единственности для слабого решения, то заключаем, что в случае $n=2$ вся последовательность $\tilde{\mathbf{u}}_h'$ сходится к слабому решению задачи (1). Итак, нами доказана теорема.

Теорема 2. *Из множества решений* $\{\mathbf{u}_h\}$, *построенных по схеме* (4а)—(4г), *можно извлечь последовательность, сходящуюся* при $\Delta t=$ $=ch\to 0$ *к слабому решению (в смысле Э. Хопфа) этой задачи. При этом в случае* $n=2$ *к этому решению сходится вся последовательность.*

Для решения задачи (1) можно использовать еще следующую разностную схему:

$$u_{ht}^i-\nu u_{hx_k\bar{x}_k}^i+\frac{1}{2}\overset{+k}{u_h^k}\overset{+0}{u_{hx_k}^i}+\frac{1}{2}u_h^k\overset{+0}{u_{h\bar{x}_k}^i}=-\overset{+0}{p}_{h\bar{x}_i}+f_h^i, \tag{13}$$

$$u_{hx_k}^k=0, \tag{14}$$

$$u_h^i|_{S_h}=0,\quad u_h^i|_{t=0}=a_h^{i(m)}, \tag{15}$$

причем уравнения (13), (14) и функции $\mathbf{u}_h$ и p_h надо рассматривать в тех же точках решетки, что и в первой разностной схеме. Сходимость схемы (13)—(15) доказываем, как и раньше, на основе неравенства, аналогичного неравенству (9), и его вывод проводим по тому же самому плану: уравнения (13), взятые на слое Ω_h^k, умножаем на $2\Delta th^3\overset{+0}{u_h^i}$ ($\overset{+0}{u_h^i}$ — значение функции на слое Ω_h^{k+1}) и полученные равенства суммируем по i и всем внутренним точкам решетки Ω_h^k. В результате получим равенство

$$\|\mathbf{u}_h(k+1)\|^2-\|\mathbf{u}_h(k)\|^2+2\nu\Delta t\,\|\mathbf{u}_{hx}(k+1)\|^2+$$
$$+(\Delta t)^2\,\|\mathbf{u}_{ht}(k)\|^2=2\Delta t\,(\mathbf{f}_h,\ \overset{+0}{\mathbf{u}}_h)_k+2\nu(\Delta t)^2(\overset{+0}{\mathbf{u}}_{hx},\ \mathbf{u}_{hxt})_k, \tag{16}$$

при выводе которого используем те же самые соотношения, что и при выводе тождества (6), и, кроме того, соотношение

$$(\mathbf{u}_{hx},\ \overset{+0}{\mathbf{u}}_{hx})_k=\|\mathbf{u}_{hx}(k+1)\|^2-\Delta t\,(\overset{+0}{\mathbf{u}}_{hx},\ \mathbf{u}_{hxt})_k$$

и очевидное равенство

$$u_t=\overset{+0}{u_t}.$$

Последний член соотношения (16) оцениваем по неравенству Коши

$$|(\overset{+0}{\mathbf{u}}_{hx},\ \mathbf{u}_{hxt})_k|^2 \leqslant \frac{4}{h^2}\|\mathbf{u}_{hx}(k+1)\|^2\|\mathbf{u}_{ht}(k)\|^2.$$

В силу этого

$$2\nu(\Delta t)^2|(\overset{+0}{\mathbf{u}}_{hx},\ \mathbf{u}_{hxt})_k| \leqslant \frac{4\nu(\Delta t)^2}{h}\|\mathbf{u}_{hx}(k+1)\|\|\mathbf{u}_{ht}(k)\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(\Delta t)^2}{2}\|\mathbf{u}_{ht}(k)\|^2 + \frac{8\nu^2(\Delta t)^2}{h^2}\|\mathbf{u}_{hx}(k+1)\|^2.$$

Если мы потребуем, чтобы $\frac{8\nu(\Delta t)^2}{h^2} \leqslant \Delta t$, т. е. чтобы $\frac{\Delta t}{h^2} \leqslant \frac{1}{8\nu}$, то из (16) получим

$$\|\mathbf{u}_h(k+1)\|^2 - \|\mathbf{u}_h(k)\|^2 + \nu\Delta t\|\mathbf{u}_{hx}(k+1)\|^2 + \frac{(\Delta t)^2}{2}\|\mathbf{u}_{ht}(k)\|^2 \leqslant 2\Delta t(\mathbf{f}_h,\ \overset{+0}{\mathbf{u}}_h)_k$$

и отсюда, обычным путем, выведем требуемое неравенство.

Литература

1. А. А. Киселев. О нестационарном течении вязкой несжимаемой жидкости при наличии внешних сил. ДАН СССР, 1955, т. 100, № 5, 871—874.
2. Л. М. Симуни. Численное решение некоторых задач движения вязкой жидкости. Инженерный журнал, 1964, т. IV, вып. 3, 446—450.
3. Л. А. Чудов и Г. В. Кускова. О применении разностных схем к расчету нестационарных течений вязкой несжимаемой жидкости. Сб. „Численные методы в газовой динамике“, Изд. МГУ, 1963, 190—207.
4. О. А. Ладыженская. Смешанная задача для гиперболического уравнения. Гостехиздат, М., 1953.
5. О. А. Ладыженская. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. Физматгиз, М., 1961.
6. О. А. Ладыженская. Тр. Московск. матем. общ., 1958, № 7, 149—177.
7. E. Hopf. Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen. Math. Nachr., 1950—1951, 4, 213—231.