

工科数分第三部分
期中试题

一.

- 1.
- 2.
- 练习:
- 3.
- 4.
- 5.
- 练习:

二.

- 1.
- 练习
- 2.
- 练习 (有极坐标使用特征):
- 4.
- 练习:
- 5.吃透
- 练习:
- 6.直接格林公式
- 8.9.

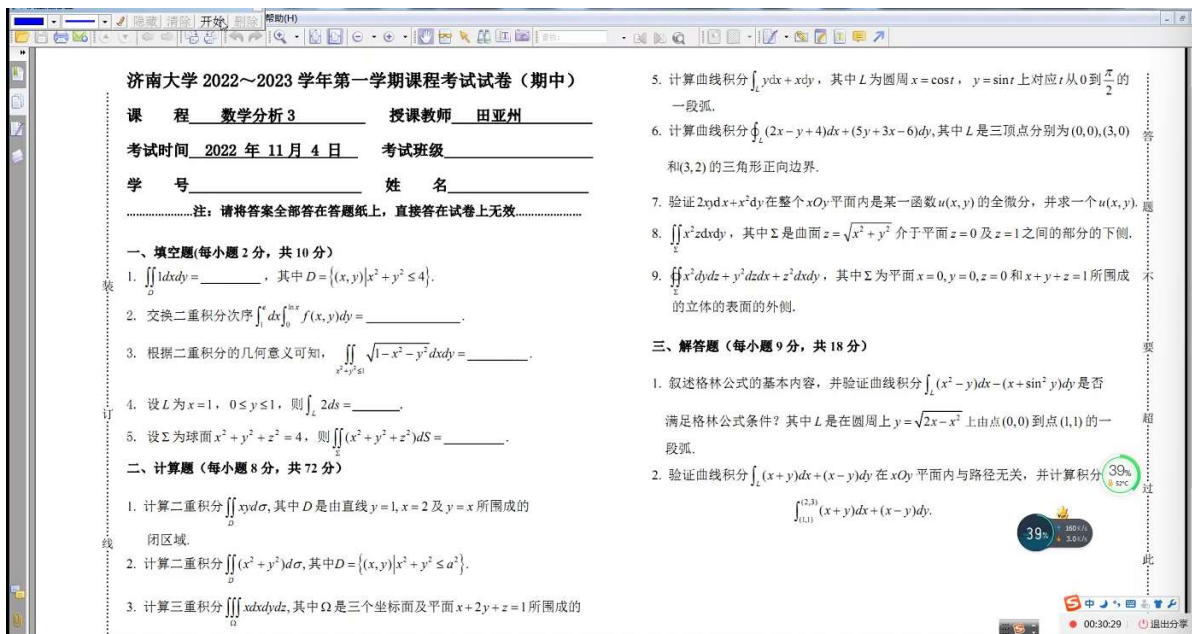
三

1

课本:

- 多元函数积分学
 - 直角坐标系下二重积分的计算
 - 极坐标下
 - 三重积分
- 第一性曲线积分
- 第一性曲面积分
- 第二性曲线积分

工科数分第三部分
期中试题



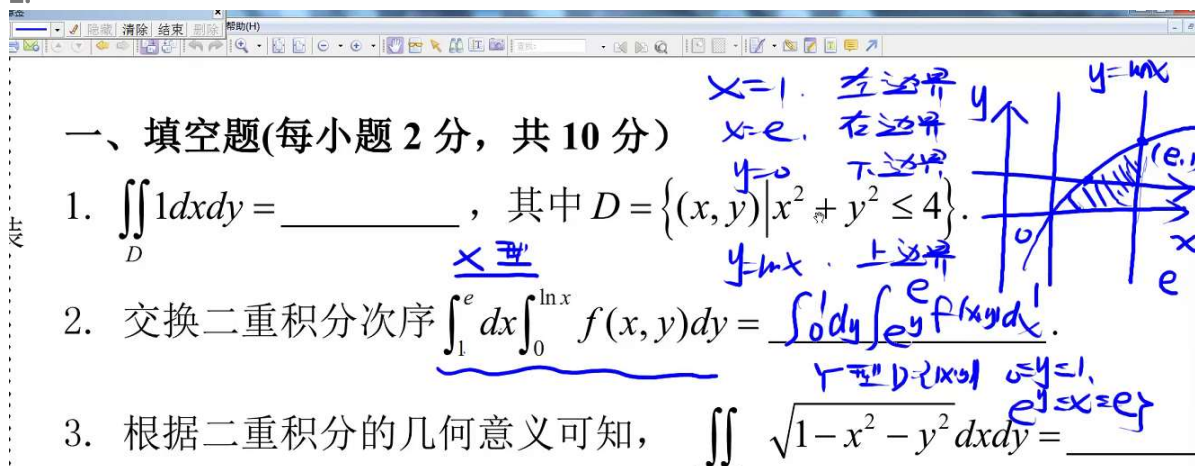
解答只看蓝字即可

一.

1.

4π

2.

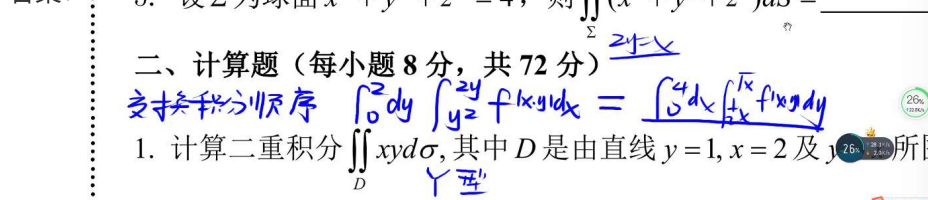


练习:

一、计算题 (每小题 8 分, 共 72 分)

交换积分顺序 $\int_0^2 dy \int_{y^2}^{2y} f(x,y) dx =$

答案:



3.

化为 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 整个是 $\frac{4\pi}{3}$, 答案是 $\frac{2\pi}{3}$

4.

2

5. 设 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, 则 $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS =$ _____.

5. 二、计算题 (每小题 8 分, 共 72 分)

$$4 \quad 4 \iint_{\Sigma} 1 dS$$

利用公式 $4\pi r^2$

练习:

练习 $\oint_C (x^2 + y^2)^n ds$, 其中 C 为圆周 $x = acost, y = asint$ ($0 \leq t \leq 2\pi$)

注意多重积分所求不一定完全在边界, 也有在内部

$$x = acost, y = asint$$

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$\begin{aligned} &= \oint_C a^{2n} ds = a^{2n} \oint_C 1 ds \\ &= a^{2n} \cdot 2\pi a \\ &= 2\pi a^{2n+1} \end{aligned}$$

二.

1.

5. 设 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, 则 $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS =$ _____.

二、计算题 (每小题 8 分, 共 72 分)

1. 计算二重积分 $\iint_D xy d\sigma$, 其中 D 是由直线 $y=1$, $x=2$ 及 $y=x$ 所围成闭区域.

$$\iint_D xy d\sigma = \int_1^2 dx \int_1^x xy dy = \int_1^2 \left[\frac{1}{2} xy^2 \right]_1^x dx$$

$$\text{重积分 } \iint_D (x^2 + y^2) d\sigma, \text{ 其中 } D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq a^2\}.$$

$$\begin{aligned} &= \int_1^2 \left(\frac{1}{2} x^3 - \frac{1}{2} x \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{8} x^4 - \frac{1}{4} x^2 \right]_1^2 = 1 - \left(-\frac{1}{4} \right) = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

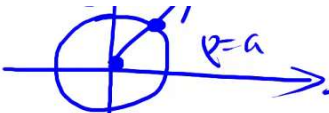
后和分 $\iiint_V x dy dz dx$ 甘由 V 且二个坐标面及平面 $x=1$

练习

练习: $\iint_D (3x+2y) d\sigma$, 其中 D 是由两坐标轴及直线 $x+y=2$ 围成的闭区域

答案: $\frac{20}{3}$

2.

闭区域.  $D = \{(r, \theta) | 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq a\}$
 计算二重积分 $\iint_D (x^2 + y^2) d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq a^2\}$
 ③ $\iint_D (x^2 + y^2) d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^2 \cdot r dr = 2\pi \cdot \frac{1}{4} a^4$
 ④ 区域 极坐标 = $\frac{\pi}{2} a^4$

练习 (有极坐标使用特征):

$\iint_D e^{x^2+y^2} d\sigma$. D 是由圆 $x^2+y^2=4$ 所围成的闭区域

$\iint_D e^{x^2+y^2} d\sigma$, D 是由 $x^2+y^2=4$ 围成闭区域

$D = \{(r, \theta) | 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 2\}$

$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 e^{r^2} \cdot r dr$

$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} e^{r^2} \right]_0^2 d\theta$

$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (e^4 - 1) d\theta$

$= \pi (e^4 - 1)$

$\iint_D e^{x^2+y^2} d\sigma$

$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 e^{r^2} \cdot r dr$

$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\theta \int_0^2 e^{r^2} dr^2$

$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (e^{r^2}) \Big|_0^2 d\theta$

$= \frac{1}{2} \cdot 2\pi (e^4 - 1)$

$= \pi (e^4 - 1)$

纸质过程@SLH

答案: $\pi * (e^4 - 1)$;

4.

3. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} x dx dy dz$, 其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的

闭区域.

被积函数

4. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz$, 其中 Ω 是由曲面 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 及平面

$z=2$ 所围成的闭区域.

投影区域正好是一个O。

答案:

3. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} x dx dy dz$, 其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的

闭区域.

4. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz$, 其中 Ω 是由曲面 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 及平面

$z=2$ 所围成的闭区域.

$z=2$ 所围成的闭区域

投影区域 $D = \{ (R, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq R \leq 2 \}$

$$\Omega = \{ (r, \theta, z) \mid 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq z \leq 2, \}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^2 p^2 dp \int_{\frac{1}{2}p^2}^{\frac{1}{2}p^2 + 2} dz =$$

第 1 页, 共 1 页

练习：

$$\iiint_{\Omega} z \, dv, \quad \Omega \text{ 是由曲面 } z = \sqrt{2-x^2-y^2} \text{ 及 } z = x^2+y^2 \text{ 围成的闭区域}$$

答案：

$\iiint_{\Omega} z \, dv$, Ω 是由曲面 $z = \sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z = x^2+y^2$ 围成的闭区域
 上半球面 抛物体面

$\Omega = \{(p, \theta, z) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq p \leq 1, p^2 \leq z \leq \sqrt{2-p^2}\}$

$z = x^2 + y^2$
 $z = \sqrt{2-x^2-y^2}$
 $z^2 = 2 - (x^2 + y^2)$
 $z^2 = 2 - z$
 $z^2 + z - 2 = 0$
 $(z+2)(z-1) = 0$
 $z = 1$

$x^2 + y^2 = 1$

$\left[\frac{1}{2} z^2 \right]_{p^2}^{\sqrt{2-p^2}} = \frac{1}{2} [(2-p^4) - p^4]$

5.吃透

Solve: 换元

$$\int_L ydx + xdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [sint(-sint) + cost(cost)]dt,$$

$$\int_L ydx + xdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t(-\sin t) + \cos t \cos t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t - \sin^2 t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt = \left[\frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

5. 计算曲线积分 $\int_L ydx + xdy$, 其中 L 为圆周 $x = \cos t$, $y = \sin t$ 上对应 t 从 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 的一段弧. 答: $\frac{\pi}{2}$

6. 计算曲线积分 $\oint_L (2x - y + 4)dx + (5y + 3x - 6)dy$, 其中 L 是三顶点分别为 $(0,0), (3,0)$ 和 $(3,2)$ 的三角形正向边界. 答: 0

Solv2: 路径无关

$$\int_L ydx + xdy = \int_{AO} ydx + xdy + \int_{OB} ydx + xdy$$

$$\int_L ydx + xdy = \int_{AO} ydx + xdy + \int_{OB} ydx + xdy$$

5. 计算曲线积分 $\int_L ydx + xdy$, 其中 L 为圆周 $x = \cos t$, $y = \sin t$ 上对应 t 从 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 的一段弧. 答: $\frac{\pi}{2}$

练习:

$$u(x,y) = \int \frac{\partial u}{\partial x} dx + \int \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

$$du(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

5. 计算曲线积分 $\int_L ydx + xdy$, 其中 L 为圆周 $x = \cos t$, $y = \sin t$ 上对应 t 从 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 的一段弧. 答: $\frac{\pi}{2}$

$$\int_L ydx + xdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t(-\sin t) + \cos t \cos t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t - \sin^2 t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt = \left[\frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

6. 计算曲线积分 $\oint_L (2x - y + 4)dx + (5y + 3x - 6)dy$, 其中 L 是三顶点分别为 $(0,0), (3,0)$ 和 $(3,2)$ 的三角形正向边界. 答: 0

6. 直接格林公式

一段弧.

$$\oint_L (2x - y + 4)dx + (5y + 3x - 6)dy = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} (5y + 3x - 6) - \frac{\partial}{\partial y} (2x - y + 4) \right) dxdy = \iint_D (5 - 2) dxdy = 3 \iint_D dxdy = 3 \times \text{Area} = 3 \times \frac{1}{2} \times 3 \times 2 = 9$$

6. 计算曲线积分 $\oint_L (2x - y + 4)dx + (5y + 3x - 6)dy$, 其中 L 是三顶点分别为 $(0,0), (3,0)$ 和 $(3,2)$ 的三角形正向边界. 答: 9

7. 验证 $2xydx + x^2dy$ 在整个 xOy 平面内是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分并求一个 $u(x,y)$. 题: $4x$

woc O! 直接格林公式

8.9.

第二性曲面积分 (有向问题: 一换二带三定号)

8.

Solv1:

和(3,2)的三角形正向边界.

$$= \iint_D x^2 \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$$

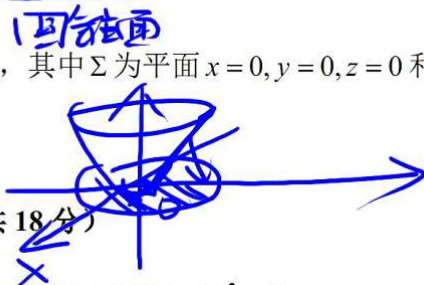
$$D = \{(x,y) | x^2+y^2 \leq 1\}$$

上 "+" 下 "-"

1. 验证 $2xydx + x^2dy$ 在整个 xOy 平面内是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分, 并求一个 $u(x,y)$.

2. $\iint_{\Sigma} x^2 z dx dy$ 其中 Σ 是曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 介于平面 $z = 0$ 及 $z = 1$ 之间的部分的下侧.

3. $\oiint_{\Sigma} x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$, 其中 Σ 为平面 $x = 0, y = 0, z = 0$ 和 $x + y + z = 1$ 所围成的立体的表面的外侧.



三、解答题 (每小题 9 分, 共 18 分)

Solv2:

补面高斯:

$$\text{补 } z = 1, x^2 + y^2 \leq 1,$$

6. 计算曲线积分 $\oint_L (2x - y + 4)dx + (5y + 3x - 6)dy$, 其中 L 是三顶点分别为 $(0,0), (3,0)$

和 $(3,2)$ 的三角形正向边界.

7. 验证 $2xydx + x^2dy$ 在整个 xOy 平面内是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分, 并求一个 $u(x,y)$.

8. $\iint_{\Sigma} x^2 z dx dy$, 其中 Σ 是曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 介于平面 $z = 0$ 及 $z = 1$ 之间的部分的下侧.

9. $\oiint_{\Sigma} x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$, 其中 Σ 为平面 $x = 0, y = 0, z = 0$ 和 $x + y + z = 1$ 所围成的立体的表面的外侧.

三、解答题 (每小题 9 分, 共 18 分)

9 显然高斯

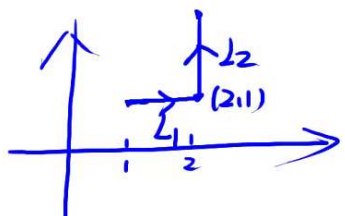
但是不能将 $x + y + z = 1$ 直接带入 $\iiint_{\Omega} (2x + 2y + 2z)$,

三

1

满足格林公式条件? 其中 L 是在圆周上 $y = \sqrt{2x - x^2}$ 上由点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$ 的一段弧.

2. 验证曲线积分 $\int_L (x+y)dx + (x-y)dy$ 在 xOy 平面内与路径无关, 并计算积分.



$$\begin{aligned} \int_{(1,1)}^{(2,3)} (x+y)dx + (x-y)dy &= \int_1^2 (x+1)dx + \int_1^3 (2-y)dy \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 + x \right]_1^2 + \left[2y - \frac{1}{2}y^2 \right]_1^3 \\ &= 4 - \frac{3}{2} + (3 - \frac{1}{2}) = 4 - \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 4 \end{aligned}$$

“你们应该都会了”QAQ

课本：

多元函数积分学

第九章 (几何)

- 二重积分 (曲顶柱体体积) 几何
- 三重积分 (空间立体的质量)
- 第一型曲线 (曲线型构件质量)
- 第一型曲面 (曲面型构件质量)

物理 物理或几何

分割 \rightarrow 近似 \rightarrow 求和 \rightarrow 取极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i = \iint_D f(x, y) d\sigma$$

性质

几何意义

- 1° $f(x, y) \geq 0$, 体积
- 2° $f(x, y) < 0$, 体积的负值
- 3° $f(x, y)$ 不恒为 1 时, 代数量

面积元素

第 1 行, 第 1 列 00:15:04 退出分享

线性性 区域可加性 保序性 取1的时候表示面积

直角坐标系下二重积分的计算

X型

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \quad (先y后x) \quad D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

Y型

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \quad (先x后y) \quad D = \{(x, y) | c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

极坐标下

极坐标下计算 (I 型)

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y) dx \quad (\text{先 } x \text{ 后 } y)$$

穿入点 \leftarrow \leftarrow 穿出点

$D = \{(x,y) \mid c=y=d, \varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y)\}$

$D = \{(p,\theta) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta, \varphi_1(\theta) \leq p \leq \varphi_2(\theta)\}$

穿入点 \leftarrow \leftarrow 穿出点

$\iint_D f(x,y) dx dy = \iint_D f(p \cos \theta, p \sin \theta) p dp d\theta$

$= \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(p \cos \theta, p \sin \theta) p dp$

$p \rightarrow$ 极径 $\theta \rightarrow$ 极角

可能用于被积函数 $X^2 * Y^2$ 和 $X^2 + Y^2$ 且定义域合适

三重积分

投影法 $\iiint_{\Omega} f(x,y,z) dv = \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z) dz \quad (\text{先 } z \text{ 后 } 2)$

截面法 $\iiint_{\Omega} f(x,y,z) dv = \int_a^b dx \int_{D_x} f(x,y,z) dy dz \quad (\text{先 } z \text{ 后 } 1)$

柱坐标: $\begin{cases} x = p \cos \theta \\ y = p \sin \theta \\ z = z \end{cases} \Rightarrow (p, \theta, z) \quad \text{柱坐标}$

投影及线

投影部分为圆域或其一部分

投影法:

$\iiint_{\Omega} x dx dy dz$ Ω 由三个坐标面及 $x+2y+z=1$ 围成求该体积

四面体

$\Omega = \{(x,y,z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \frac{1}{2}(1-x), 0 \leq z \leq 1-x-2y\}$

① 投影法

② 截面法

$\iiint_{\Omega} x dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^{\frac{1}{2}(1-x)} dy \int_0^{1-x-2y} x dz$

$= \int_0^1 dx \int_0^{\frac{1}{2}(1-x)} x(1-x-2y) dy$

截面法:

$\iiint_{\Omega} x dx dy dz$ 二重积分与三重积分的联系
 $\Omega = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x, 0 \leq z \leq 1-x-y\}$
 四面体
 $2y+z=1-x$

 ① 投影法 (先-后-上)
 ② 截面法 (先-后-上)
 $\iiint_{\Omega} x dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz$
 $= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y) dy$
 截面法: 被积函数只含有1个变量, 截面面积易求
 $\iiint_{\Omega} x dx dy dz = \int_0^1 x dx \int_0^{1-x} (1-x-y) dy = \int_0^1 x \cdot \frac{1}{2}(1-x)^2 dx$

第一性曲线积分

第一型曲线积分 $\int_L f(x, y) ds$ $\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \alpha \leq t \leq \beta \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t), \psi(t)) \sqrt{\phi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt$
 $L \rightarrow$ 积分弧段 无面
 $f(x, y) \rightarrow$ 被积函数
 $ds \rightarrow$ 弧长元素
 换元法
 ② $L: y = g(x), a \leq x \leq b \Rightarrow \begin{cases} x = x \\ y = g(x) \end{cases} a \leq x \leq b$
 $\int_L f(x, y) ds = \int_a^b f(x, g(x)) \sqrt{1 + g'(x)^2} dx$
 ③ $L: p = p(\theta) \Rightarrow \begin{cases} x = p(\theta) \cos \theta \\ y = p(\theta) \sin \theta \end{cases} \alpha \leq \theta \leq \beta$
 练习 $\int_L \sqrt{y} ds$, 其中 L 是抛物线 $y = x^2$ 上点 $(0,0)$ 到 $(1,1)$ 之间的一段弧
 $\int_L \sqrt{y} ds = \int_0^1 \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{1 + 4x^2} dx = \int_0^1 x \sqrt{1 + 4x^2} dx = \frac{1}{12} \sqrt{1 + 4x^2} (4x^2 + 3) \Big|_0^1 = \frac{5\sqrt{5} - 3}{12}$

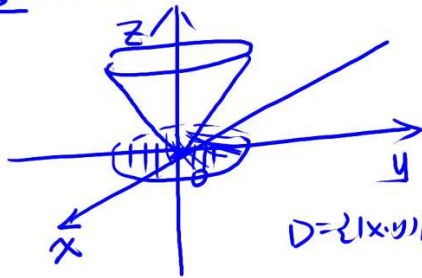
也可以选 $y[0, 1]$,

第一性曲面积分

第一型曲面积分 $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) ds$ $\Sigma = \{(x, y, z) \mid z = z(x, y)\}$
 $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) ds = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} d\sigma$
 投影

显然换元

$\iint_{\Sigma} (x^2+y^2+z^2) dS$, Σ 为锥面 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ (圆锥面) 介于 $z=0$ 与 $z=1$ 之间部分 (0,0,0)



$$\iint_{\Sigma} (x^2+y^2+z^2) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} d\sigma$$

$$= 2 \iint_D (x^2+y^2) \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}} d\sigma$$

$$2(x^2+y^2)$$

$$D = \{(x,y) | x^2+y^2 \leq 1\}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= 2 \iint_D (x^2+y^2) \cdot \sqrt{2} d\sigma$$

$x = \rho \cos \theta$
 $y = \rho \sin \theta$

$$= 2\sqrt{2} \iint_D (x^2+y^2) d\sigma$$

$$= 2\sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^2 \cdot \rho d\rho =$$

第二性曲线积分

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_L P(x,y)dx + \int_L Q(x,y)dy,$$

Solv1:

第二性曲线积分 (有向积分) $\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_L P(x,y)dx + \int_L Q(x,y)dy$

$$L: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad t: \alpha \rightarrow \beta$$

起点 终点

$$\alpha \leq t \leq \beta$$

$$\int_L P(x,y)dx \stackrel{\text{换法}}{=} \int_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt$$

$$\int_L Q(x,y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} Q(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t) dt$$

$$\therefore \int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} [P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t)] dt$$

Solv2:

法二 格林公式

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma$$

Solv3:

法三 路径无关 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \Rightarrow$ 曲线积分与路径无关

(4) 设 L 为直线段 $y=1, |x| \leq 1$, 则 $\int_L 3ds = \underline{\hspace{2cm}}$.

(5) 设 $x^2 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, (-\pi \leq x \leq \pi)$, 则 $a_0 = \underline{\hspace{2cm}}$.

老师说考傅里叶转换

(1) 极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{1+xy}{x^2+y^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 设二元函数 $z = x \arctan y$, 则 $dz = \underline{\hspace{2cm}}$.

(3) 设 $z = e^u \sin v$, 而 $u = x + y, v = xy$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(4) 设 L 为直线段 $y=1, |x| \leq 1$, 则 $\int_L 3ds = \underline{\hspace{2cm}}$.

(5) 设 $x^2 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, (-\pi \leq x \leq \pi)$, 则 $a_0 = \underline{\frac{2}{3}\pi^2}$.

三、计算题 (每小题 5 分, 共 30 分)

(1) 设 $z = x^2 e^{xy} - \ln(x^2 + y^2)$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

傅里叶级数公式

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

$n=0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi} \times \frac{1}{3} \pi^3 \end{aligned}$$

收敛域,

2015-2016 级数 (二) 内选卷...

(3) 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n^2}$ 的收敛性.

(4) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n \cdot n} x^n$ 的收敛域.

(5) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ 在区间 $(-1, 1)$ 内的和函数.

(6) 将函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 展开成 $x-2$ 的幂级数, 并指出其收敛区间.

四、计算下列积分 (每小题 10 分, 共 30 分)

(1) $\iiint_{\Omega} (x+y) dx dy dz$, 其中 Ω 为平面 $x=0, y=0, z=0, x+y+2z=1$ 所围成的四面体.

(2) $\int_L (xy^3 - y^2 \cos x) dx + (1 - 2y \sin x + 3x^2 y^2) dy$, 其中 L 为在抛物线 $2x = \pi y^2$ 上由点 $(0, 0)$ 到 $(\frac{\pi}{2}, 1)$ 的

一段弧

和函数:

① 标准形式 ✓
② 非标准形式 (是实元)
③ 缺项

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{3^n \cdot n} \\ \rho &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \cdot n}{3^{n+1} \cdot (n+1)} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$R = 3$$

$(-3, 3)$

$$\begin{aligned} x &= -3, \frac{1}{n} \frac{4^n}{n} \\ x &= 1, \frac{1}{n} \frac{4^n}{n} \end{aligned}$$

数学分析3, 2022-2023期... 2015-2016高数(二)试卷...

(3) 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n^2}$ 的收敛性. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}, x \in (-1, 1)$

(4) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n \cdot n} x^n$ 的收敛域. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$

☆ (5) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$ 在区间 $(-1, 1)$ 内的和函数. $\int_0^x S(t) dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} n t^{n-1} dt = \sum_{n=1}^{\infty} t^n = \frac{t}{1-t}$

(6) 将函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 展开成 $x-2$ 的幂级数, 并指出其收敛区间. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n \cdot n} x^n$

四、计算下列积分 (每小题 10 分, 共 30 分)

(1) $\iiint_{\Omega} (x+y) dx dy dz$, 其中 Ω 为平面 $x=0, y=0, z=0, x+y+2z=1$ 所围成的四面体.

(2) $\int_L (xy^3 - y^2 \cos x) dx + (1 - 2y \sin x + 3x^2 y^2) dy$, 其中 L 为在抛物线 $2x = \pi y^2$ 上由点 $(0, 0)$ 到 $(\frac{\pi}{2}, 1)$ 的一段弧.

(3) $\iint_{\Sigma} x^2 z dx dy$, 其中 Σ 是曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 介于平面 $z=0$ 及 $z=1$ 之间的部分的下侧.

(3) 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n^2}$ 的收敛性. $\frac{1}{x} = \frac{1}{x-2+2} = \frac{1}{1 + (\frac{x-2}{2})}$

(4) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n \cdot n} x^n$ 的收敛域. $= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\frac{x-2}{2})^n$

(5) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$ 在区间 $(-1, 1)$ 内的和函数. $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$

(6) 将函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 展开成 $x-2$ 的幂级数, 并指出其收敛区间. $x \in (-1, 1)$

四、计算下列积分 (每小题 10 分, 共 30 分)

展成幂级数

$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x - 3}$ 展开成 $x-2$ 的幂级数.

$= \frac{1}{(x-3)(x+1)}$

$= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+1} \right)$

和函数.

数, 并指出其收敛区间.

30 分)

收敛域取交集