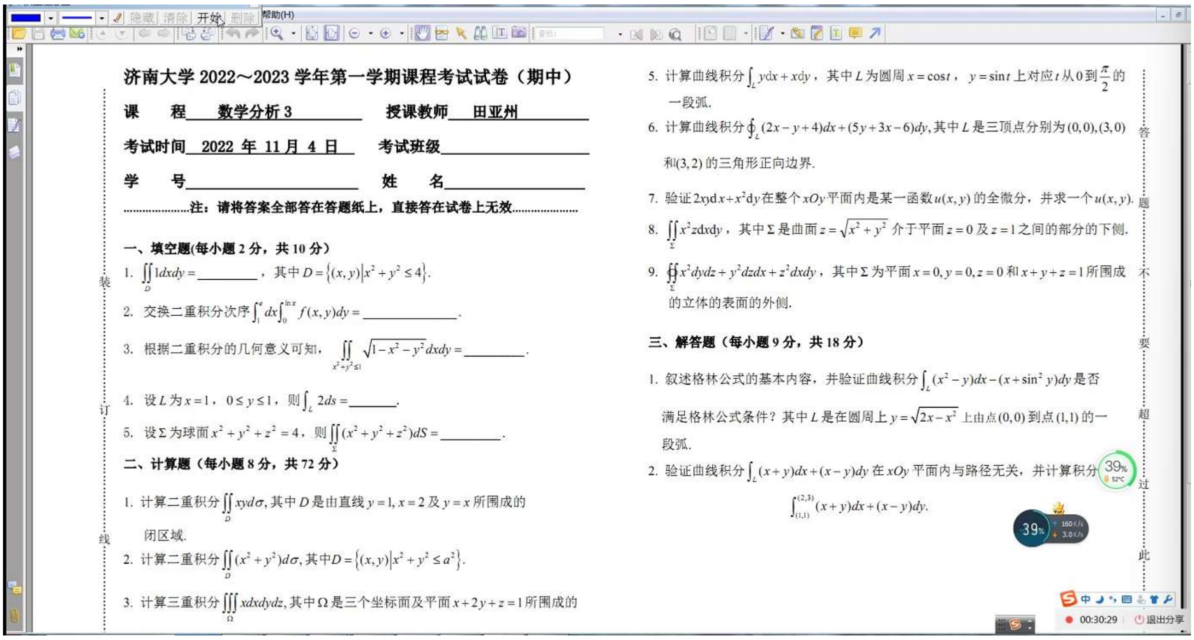
工科数分第三部分

期中试题


济南大学 2022～2023 学年第一学期课程考试试卷（期中）

课 程 数学分析 3 授课教师 田亚州

考试时间 2022 年 11 月 4 日 考试班级

学 号 姓 名

注：请将答案全部答在答题纸上，直接答在试卷上无效

一、填空题(每小题 2 分，共 10 分)

1. $\iint_D 1dxdy=$______，其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 4\}$.
2. 交换二重积分次序 $\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)dy=$______.
3. 根据二重积分的几何意义可知，$\iint_{x^2+y^2\le 1}\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy=$______.
4. 设 L 为 $x=1$，$0\le y\le 1$，则 $\int_L 2ds=$______.
5. 设 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=4$，则 $\iint_\Sigma (x^2+y^2+z^2)dS=$______.

二、计算题（每小题 8 分，共 72 分）

1. 计算二重积分 $\iint_D xy\,d\sigma$，其中 D 是由直线 $y=1, x=2$ 及 $y=x$ 所围成的闭区域.
2. 计算二重积分 $\iint_D (x^2+y^2)d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le a^2\}$.
3. 计算三重积分 $\iiint_\Omega x\,dxdydz$，其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的

5. 计算曲线积分 $\int_L ydx+xdy$，其中 L 为圆周 $x=\cos t$，$y=\sin t$ 上对应 t 从 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 的一段弧.
6. 计算曲线积分 $\oint_L (2x-y+4)dx+(5y+3x-6)dy$，其中 L 是三顶点分别为 $(0,0),(3,0)$ 和 $(3,2)$ 的三角形正向边界.
7. 验证 $2xydx+x^2dy$ 在整个 xOy 平面内是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分，并求一个 $u(x,y)$.
8. $\iint_\Sigma x^2z\,dxdy$，其中 Σ 是曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 介于平面 $z=0$ 及 $z=1$ 之间的部分的下侧.
9. $\oiint_\Sigma x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$，其中 Σ 为平面 $x=0,y=0,z=0$ 和 $x+y+z=1$ 所围成的立体的表面的外侧.

三、解答题（每小题 9 分，共 18 分）

1. 叙述格林公式的基本内容，并验证曲线积分 $\int_L (x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy$ 是否满足格林公式条件？其中 L 是在圆周上 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 上由点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$ 的一段弧.
2. 验证曲线积分 $\int_L (x+y)dx+(x-y)dy$ 在 xOy 平面内与路径无关，并计算积分 $\int_{(1,1)}^{(2,3)}(x+y)dx+(x-y)dy$.

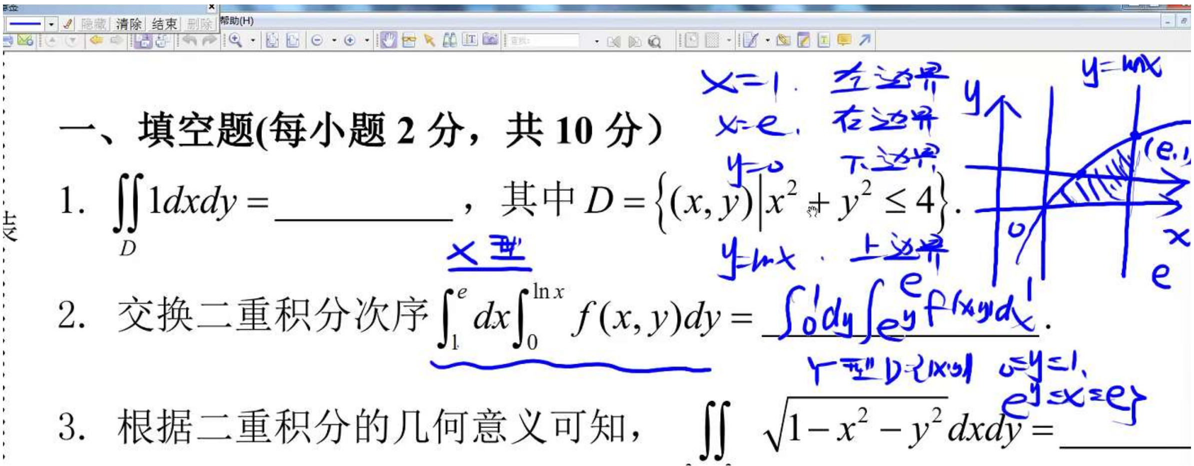
解答***只看蓝字即可***

一.

1.

4π

2.


一、填空题(每小题 2 分，共 10 分)

1. $\iint_D 1dxdy=$______，其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 4\}$.
2. 交换二重积分次序 $\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)dy=$ $\int_0^1 dy\int_{e^y}^{e} f(x,y)dx$.
3. 根据二重积分的几何意义可知，$\iint\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy=$______

x=1. 左边界

x=e. 右边界

y=0 下边界

y=lnx . 上边界

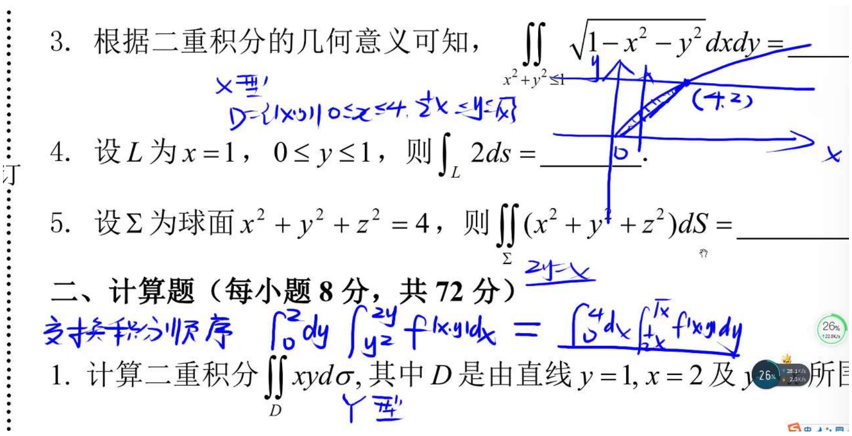
X型

Y型 $D=\{(x,y)|\ 0\le y\le 1,\ e^y\le x\le e\}$

练习：


交换积分次序 $\int_0^2 dy\int_{y^2}^{2y} f(x,y)dx=$______

答案：


3. 根据二重积分的几何意义可知，$\iint_{x^2+y^2\le 1}\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy=$______
4. 设 L 为 $x=1$，$0\le y\le 1$，则 $\int_L 2ds=$______.
5. 设 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=4$，则 $\iint_\Sigma (x^2+y^2+z^2)dS=$______

X型

$D=\{(x,y)|0\le x\le 4,\ \frac{x}{2}\le y\le\sqrt{x}\}$

2y=x

二、计算题（每小题 8 分，共 72 分）

交换积分次序 $\int_0^2 dy\int_{y^2}^{2y} f(x,y)dx=\int_0^4 dx\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$

1. 计算二重积分 $\iint_D xy\,d\sigma$，其中 D 是由直线 $y=1, x=2$ 及 y …所围…

Y型

3.

化为$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$整个是$\frac{4\pi}{3}$，答案是$\frac{2\pi}{3}$

4.

2

5. 设Σ为球面$x^2+y^2+z^2=4$，则$\iint_\Sigma (x^2+y^2+z^2)dS=$_________.

5.

二、计算题（每小题8分，共72分）

4　　$4\iint_\Sigma 1ds$

利用公式$4\pi r^2$

练习：

练习 $\oint_L (x^2+y^2)^n ds$，其中 L 为圆周 $x=a\cos t$，$y=a\sin t$ $(0\le t\le 2\pi)$

> 注意多重积分所求不一定完全在边界，也有在内部

$x=acost,y=asint$

$x^2+y^2=a^2$

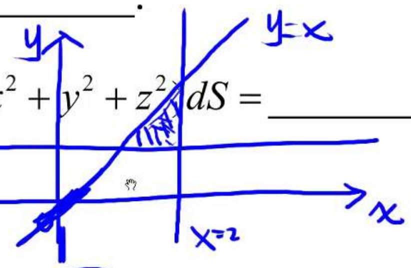
$$=\oint_L a^{2n}ds=a^{2n}\oint_L 1ds$$
$$=a^{2n}\cdot 2\pi a$$
$$=2\pi a^{2n+1}$$

二.

1.

5. 设Σ为球面$x^2+y^2+z^2=4$，则$\iint_\Sigma (x^2+y^2+z^2)dS=$__________.

二、计算题（每小题8分，共72分）



1. 计算二重积分$\iint_D xyd\sigma$（$d\sigma$ = dxdy，面积元素），其中D是由直线$y=1$，$x=2$及$y=x$所围成闭区域.

面积元素

$$=\int_1^2 dx\int_1^x xy\,dy=\int_1^2\left[\frac12 xy^2\right]_1^x dx$$　边界

重积分$\iint_D(x^2+y^2)d\sigma$，其中$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le a^2\}$.

$$=\int_1^2\left(\frac12x^3-\frac12x\right)dx$$
$$=\left[\frac18x^4-\frac14x^2\right]_1^2=1-\left(-\frac18\right)=\frac98$$

重积分$\iiint xdxdydz$，其中Ω是三个坐标面及平面

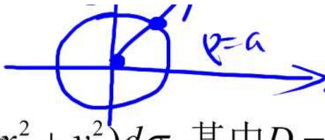
练习

练习：$\iint_D (3x+2y)d\sigma$，其中D是由两坐标轴及直线$x+y=2$围成闭区域

答案：$\frac{20}{3}$

2.

闭区域.



② $D=\{(\rho,\theta)|0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le\rho\le a\}$

③ $\iint(x^2+y^2)d\sigma=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\rho^2\cdot\rho d\rho$

计算二重积分 $\iint\limits_D (x^2+y^2)d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le a^2\}$ $=2\pi\cdot\frac{1}{4}a^4$

圆域 极坐标 $=\frac{\pi}{2}a^4$

练习（有极坐标使用特征）：

$\iint_D e^{x^2+y^2}d\sigma$. D是由圆周$x^2+y^2=4$所围成的闭区域

$\iint_D e^{x^2+y^2}d\sigma$，D是由$x^2+y^2=4$围成闭区域

$D=\{(\rho,\theta)|0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le\rho\le 2\}$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 e^{\rho^2}\cdot\rho d\rho$

$\int_0^2 e^{\rho^2}\rho d\rho$

$=\frac{1}{2}\int_0^2 e^{\rho^2}d\rho^2$

$=[\frac{1}{2}e^{\rho^2}]_0^2$

$=\int_0^{2\pi}[\frac{1}{2}e^{\rho^2}]_0^2 d\theta$

$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(e^4-1)d\theta$

$=\pi(e^4-1)$

$\iint_D e^{x^2+y^2}d\sigma$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 e^{\rho^2}\cdot\rho d\rho$

$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}d\theta\int_0^2 e^{\rho^2}d\rho^2$

$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(e^{\rho^2})|_0^2 d\theta$

$=\frac{1}{2}\cdot 2\pi(e^4-1)$

$=\pi(e^4-1)$

纸质过程@SLH

答案：$\pi*$（e^4-1）；

4.

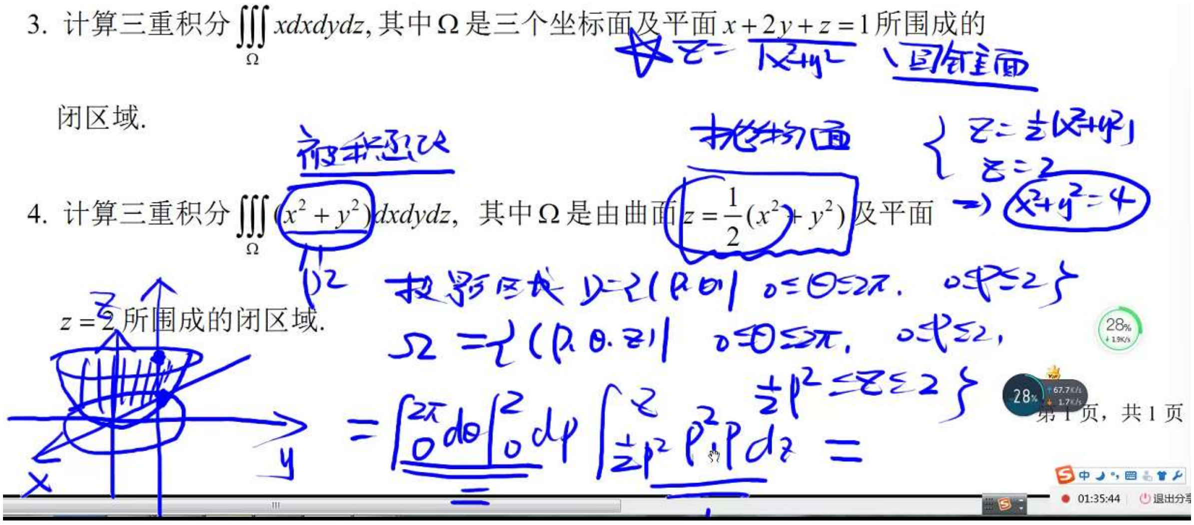
3. 计算三重积分 $\iiint\limits_\Omega xdxdydz$，其中$\Omega$是三个坐标面及平面$x+2y+z=1$所围成的闭区域.

被积函数

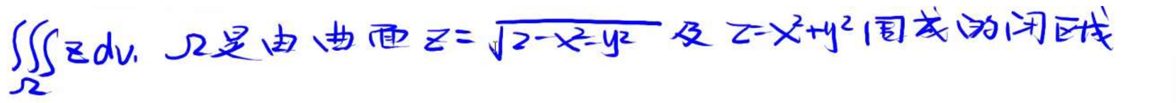
4. 计算三重积分 $\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2)dxdydz$，其中$\Omega$是由曲面$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$及平面$z=2$所围成的闭区域.

投影区域正好是一个O。

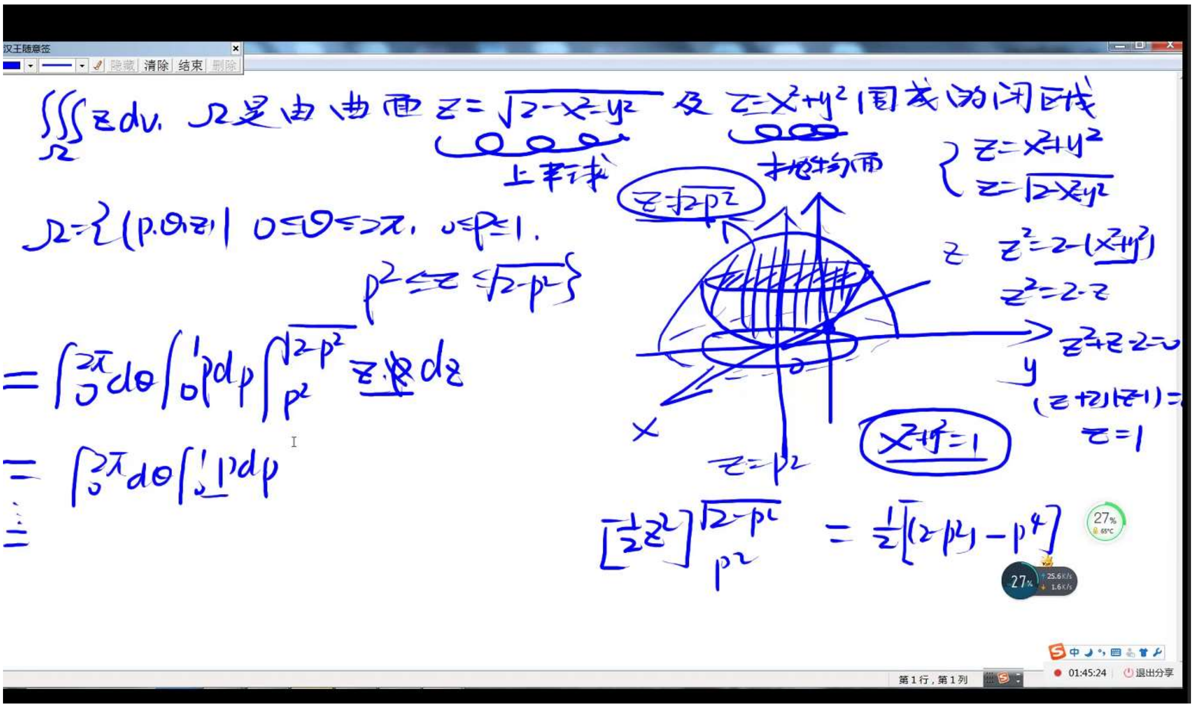
答案:



练习:



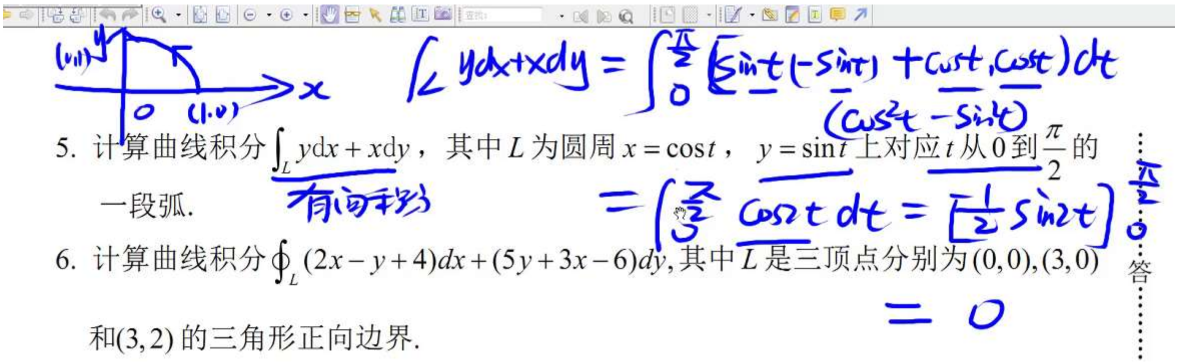
答案:



5.吃透

Solve：换元

$\int_L ydx + xdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}[sint(-sint) + cost(cost)]dt,$



5. 计算曲线积分$\int_L ydx+xdy$，其中L为圆周$x=\cos t$，$y=\sin t$上对应t从0到$\frac{\pi}{2}$的一段弧.

有向积分

$\int_L ydx+xdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sin t(-\sin t)+\cos t\cos t]dt$

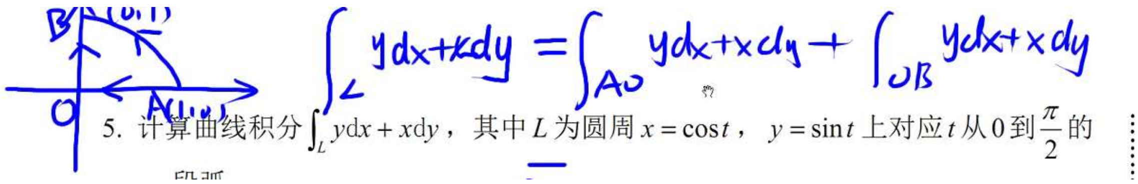
$(\cos^2 t-\sin^2 t)$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2t\,dt=\left[\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=0$

6. 计算曲线积分$\oint_L (2x-y+4)dx+(5y+3x-6)dy$,其中$L$是三顶点分别为$(0,0),(3,0)$和$(3,2)$的三角形正向边界.

Solv2:路径无关

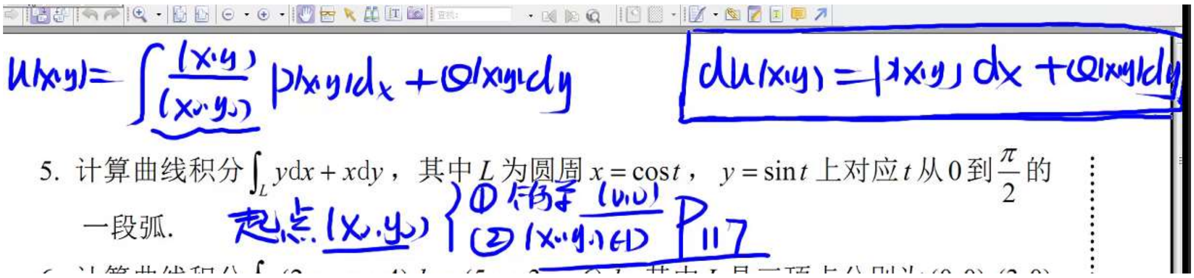
$\int_L ydx+xdy=\int_{AO}ydx+xdy+\int_{OB}ydx+xdy,$



$\int_L ydx+xdy=\int_{AO}ydx+xdy+\int_{OB}ydx+xdy$

5. 计算曲线积分$\int_L ydx+xdy$，其中L为圆周$x=\cos t$，$y=\sin t$上对应t从0到$\frac{\pi}{2}$的

练习：

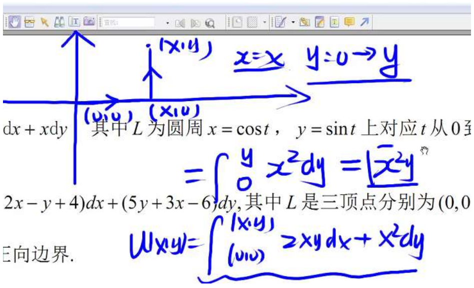


$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$

$\boxed{du(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy}$

5. 计算曲线积分$\int_L ydx+xdy$，其中L为圆周$x=\cos t$，$y=\sin t$上对应t从0到$\frac{\pi}{2}$的一段弧.

起点(x_0,y_0) ① 任何 $(0,0)$ ② $(x_0,y_0)(-1,0)$ P117

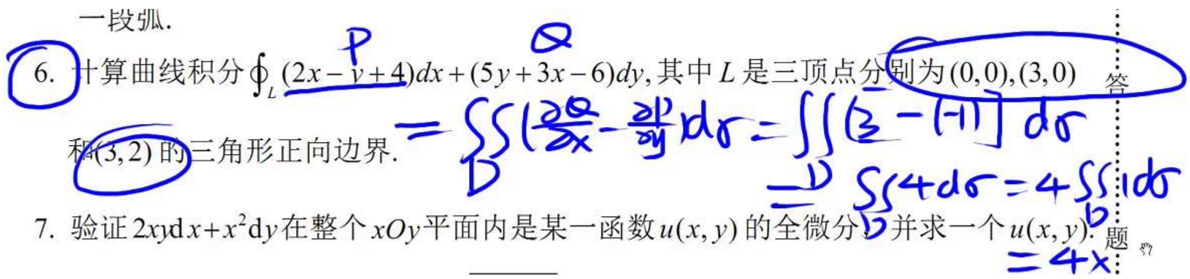


(x,y) $x=x$ $y:0\to y$ $(0,0)$ $(x,0)$

$=\int_0^y x^2dy=[x^2y]$

$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}2xydx+x^2dy$

6.直接格林公式



6. 计算曲线积分$\oint_L (2x-y+4)dx+(5y+3x-6)dy$,其中$L$是三顶点分别为$(0,0),(3,0)$和$(3,2)$的三角形正向边界.

$=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma=\iint_D[3-(-1)]d\sigma$

$=\iint_D 4d\sigma=4\iint_D 1d\sigma$

$=4\times$

7. 验证$2xydx+x^2dy$在整个xOy平面内是某一函数$u(x,y)$的全微分，并求一个$u(x,y)$.

> woc O！直接格林公式

8.9.

第二性曲面积分（有向问题：一换二带三定号

8.

Solv1：

6. 计算曲线积分 $\oint_L (2x-y+4)dx+(5y+3x-6)dy$，其中 L 是三顶点分别为 $(0,0),(3,0)$ 答

和 $(3,2)$ 的三角形正向边界.

$=-\iint_D x^2\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$　$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le1\}$

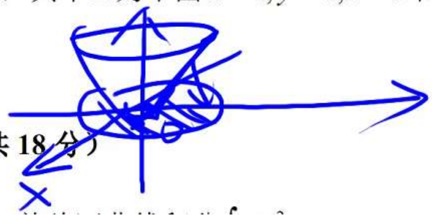
一代　=换　上"+"下"-"

7. 验证 $2xy\,dx+x^2dy$ 在整个 xOy 平面内是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分，并求一个 $u(x,y)$. 题

8. $\iint_\Sigma x^2 z\,dxdy$，其中 Σ 是曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 介于平面 $z=0$ 及 $z=1$ 之间的部分的下侧.

圆锥面

9. $\oiint_\Sigma x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$，其中 Σ 为平面 $x=0,y=0,z=0$ 和 $x+y+z=1$ 所围成的立体的表面的外侧. 不



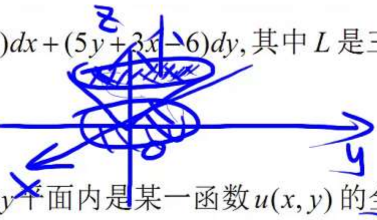
三、解答题（每小题 9 分，共 18 分） 要

Solv2：

补面高斯：

补$z=1,x^2+y^2\le1$,

6. 计算曲线积分 $\oint_L (2x-y+4)dx+(5y+3x-6)dy$，其中 L 是三顶点分别为 $(0,0),(3,0)$ 答



Σ': $z=1$, $x^2+y^2\le1$ 上

和 $(3,2)$ 的三角形正向边界.

7. 验证 $2xy\,dx+x^2dy$ 在整个 xOy 平面内是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分，并求一个 $u(x,y)$. 题

8. $\iint_\Sigma x^2 z\,dxdy$，其中 Σ 是曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 介于平面 $z=0$ 及 $z=1$ 之间的部分的下侧.

补面法

$\iint_\Sigma x^2z\,dxdy=\oiint_{\Sigma+\Sigma'} x^2z\,dxdy-\iint_{\Sigma'}x^2z\,dxdy$

9. $\oiint_\Sigma \underbrace{x^2}_{P}dydz+\underbrace{y^2}_{Q}dzdx+\underbrace{z^2}_{R}dxdy$，其中 Σ 为平面 $x=0,y=0,z=0$ 和 $x+y+z=1$ 所围成的立体的表面的外侧. 不

$=\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv$

$=\iiint_\Omega x^2\,dv-\iint_D x^2\cdot1\,dxdy$

$=$ (柱坐标)

三、解答题（每小题 9 分，共 18 分） 要

9显然高斯

但是不能将$x+y+z=1$直接带入$\iiint_\Omega(2x+2y+2z)$,

三

1

满足格林公式条件？其中 L 是在圆周上 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 上由点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$ 的一段弧. 超

$\frac{\partial Q}{\partial x}=1=\frac{\partial P}{\partial y}=1$　$(6-\frac92-2+\frac32)$

2. 验证曲线积分 $\int_L \underbrace{(x+y)}_{P}dx+\underbrace{(x-y)}_{Q}dy$ 在 xOy 平面内与路径无关，并计算积分 $\int_{(1,1)}^{(2,3)}(x+y)dx+(x-y)dy$. 过

起止

$=\int_1^2(x+1)dx+\int_1^3(2-y)dy$

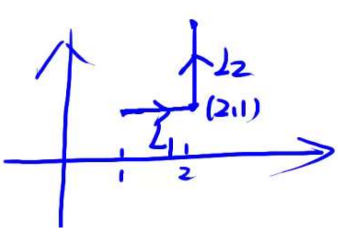
$=(\frac12x^2+x)\Big|_1^2+(2y-\frac{y^2}{2})\Big|_1^3$ 此

L_1: $y=1$. $x:1\to2$

L_2: $x=2$. $y:1\to3$

$=4-\frac32+(\frac32-\frac32)$

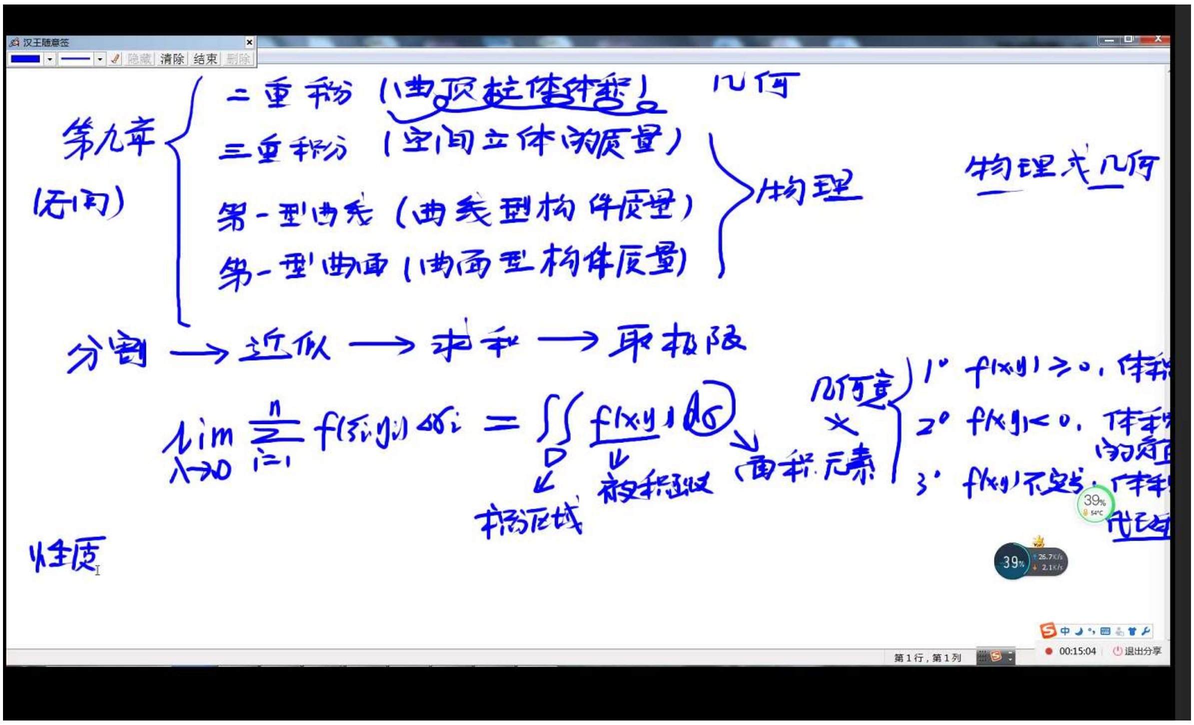
$=4-\frac32=\frac52$



~~“你们应该都会了“~~QAQ

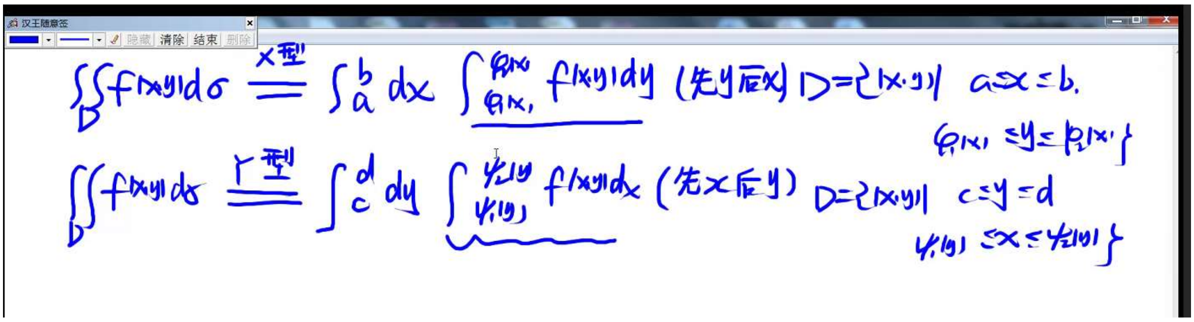
课本：

多元函数积分学

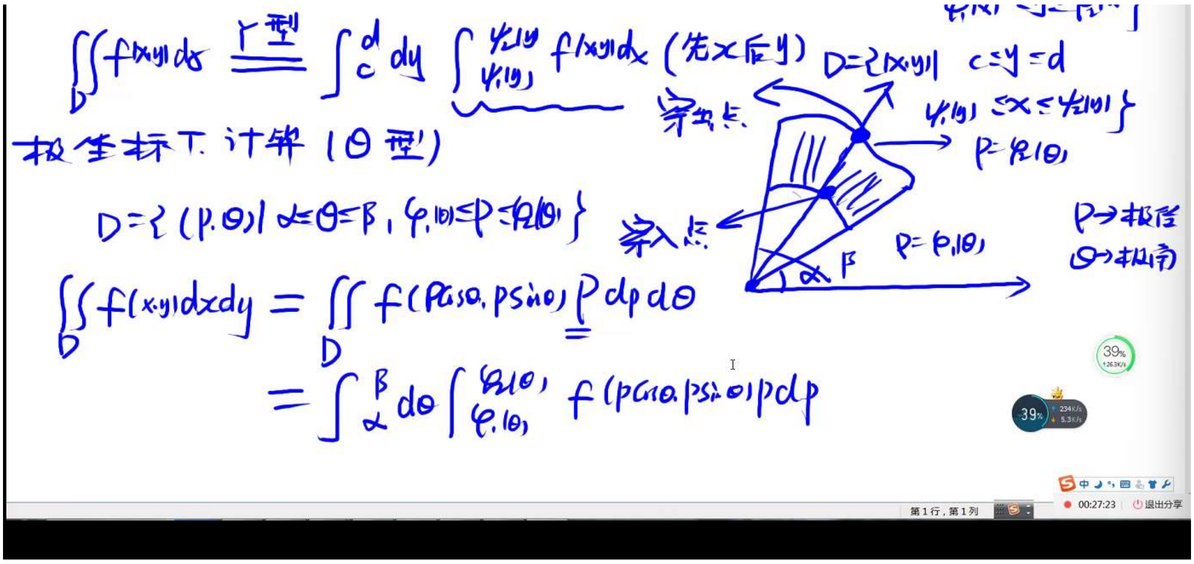


线性性 区域可加性 保序性 取1的时候表示面积

直角坐标系下二重积分的计算

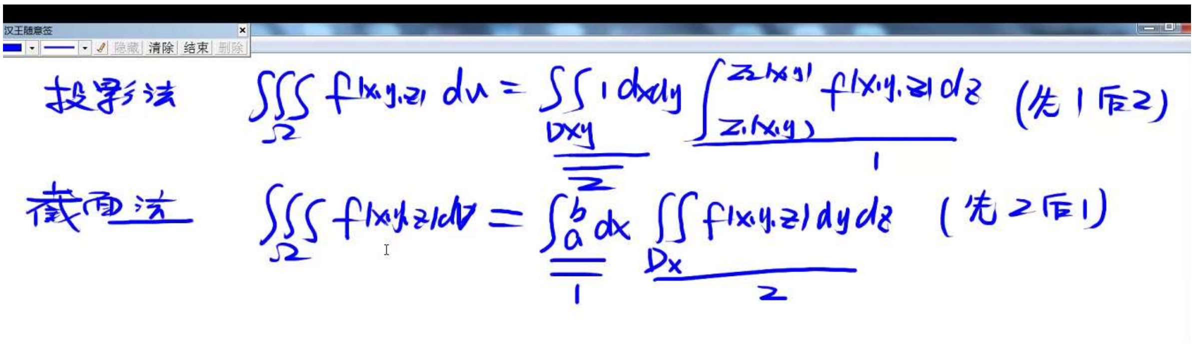


极坐标下

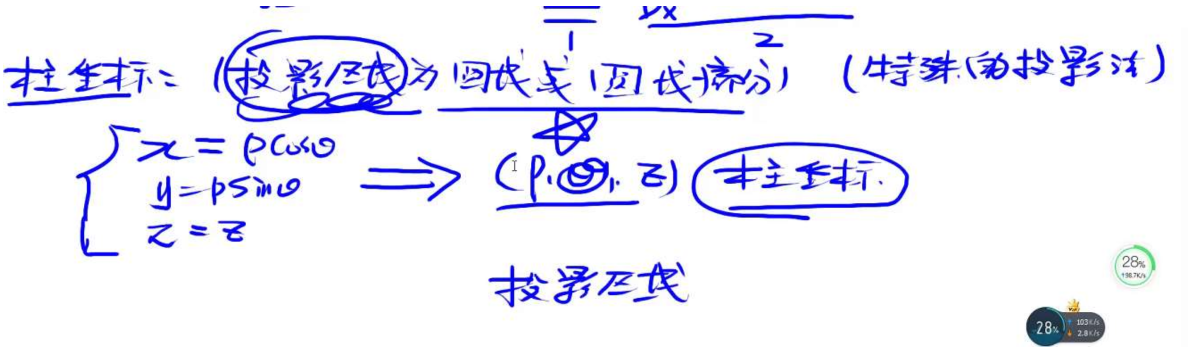


可能用于被积函数X^2*Y^2和X^2+Y^2.且定义域合适

三重积分

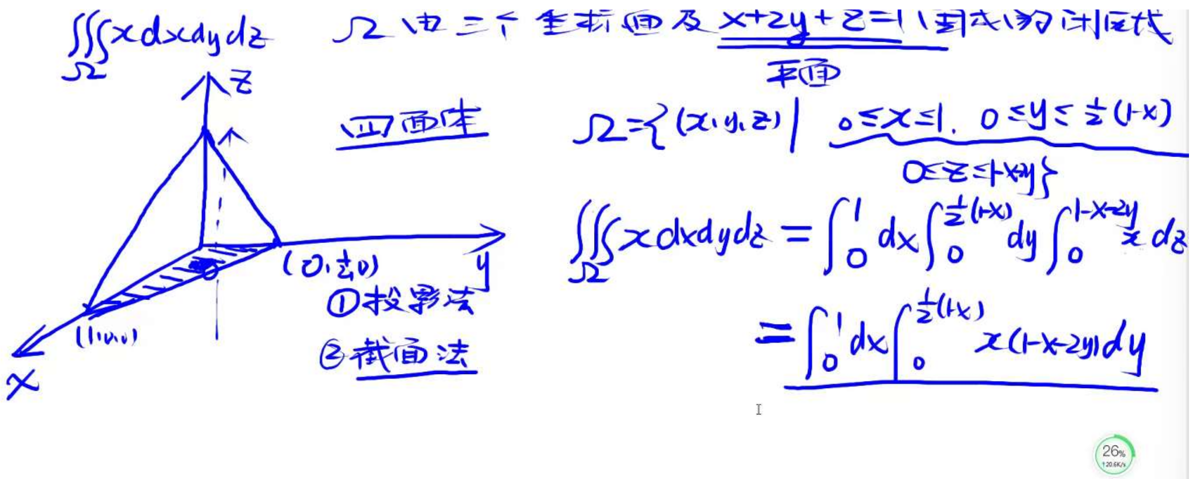


柱坐标：

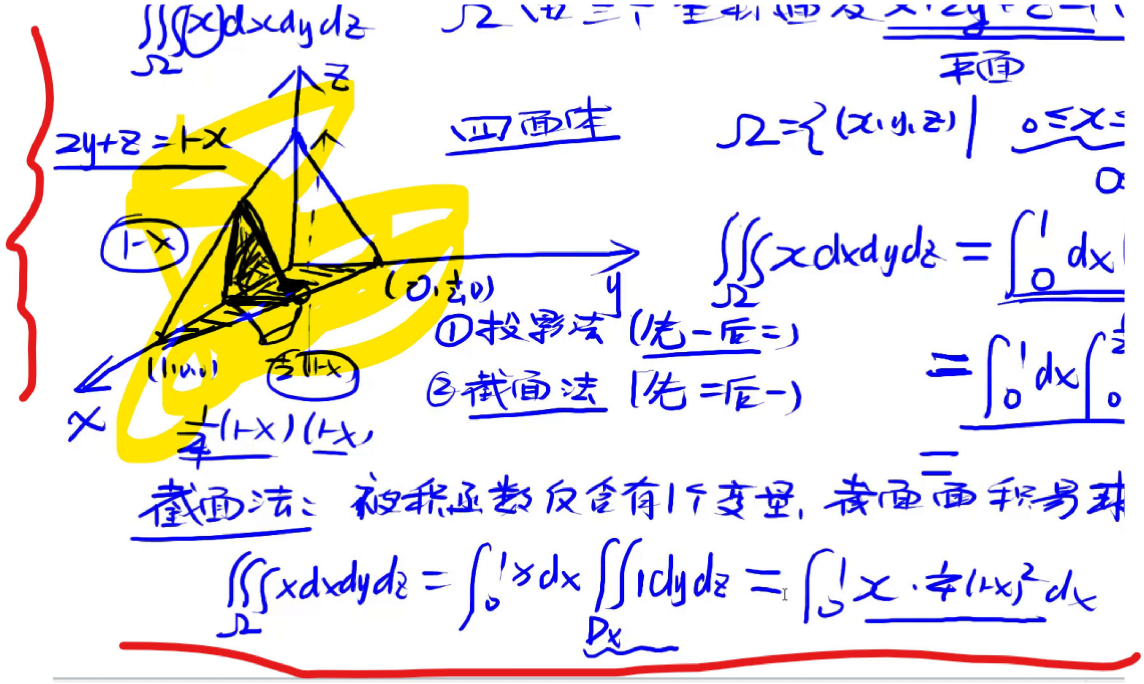


投影部分为圆域或其一部分

投影法：

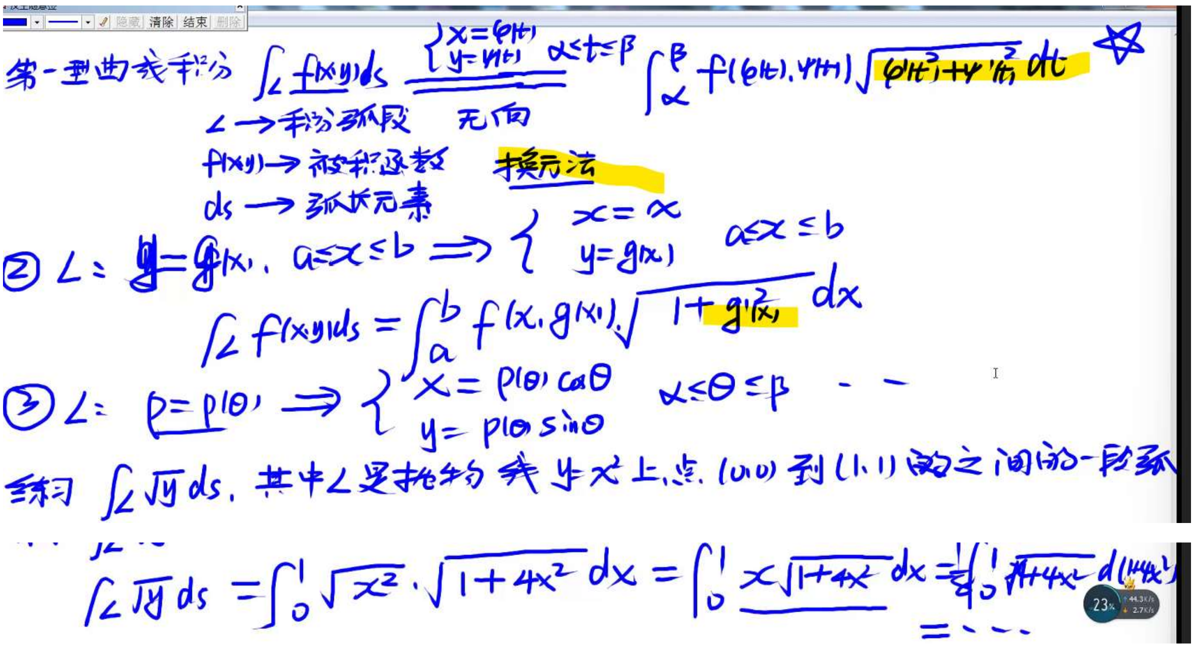


截面法：



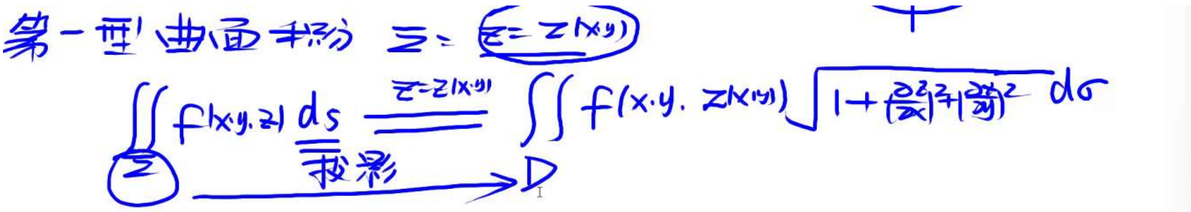
//

第一性曲线积分



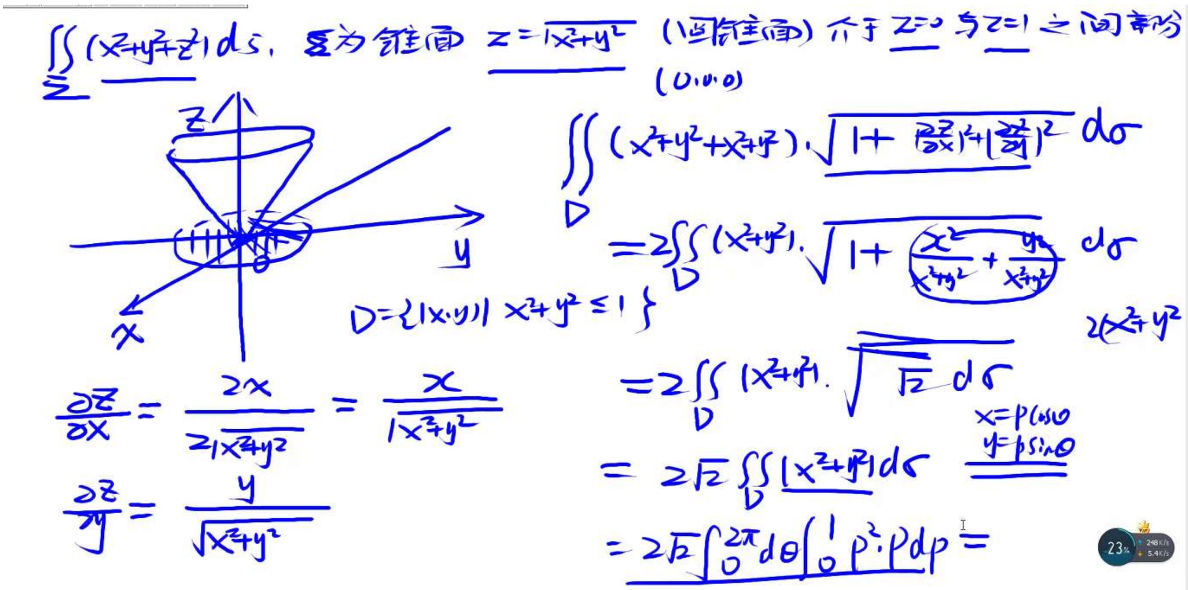
也可以选$y[0,1]$,

第一性曲面积分



> 显然换元

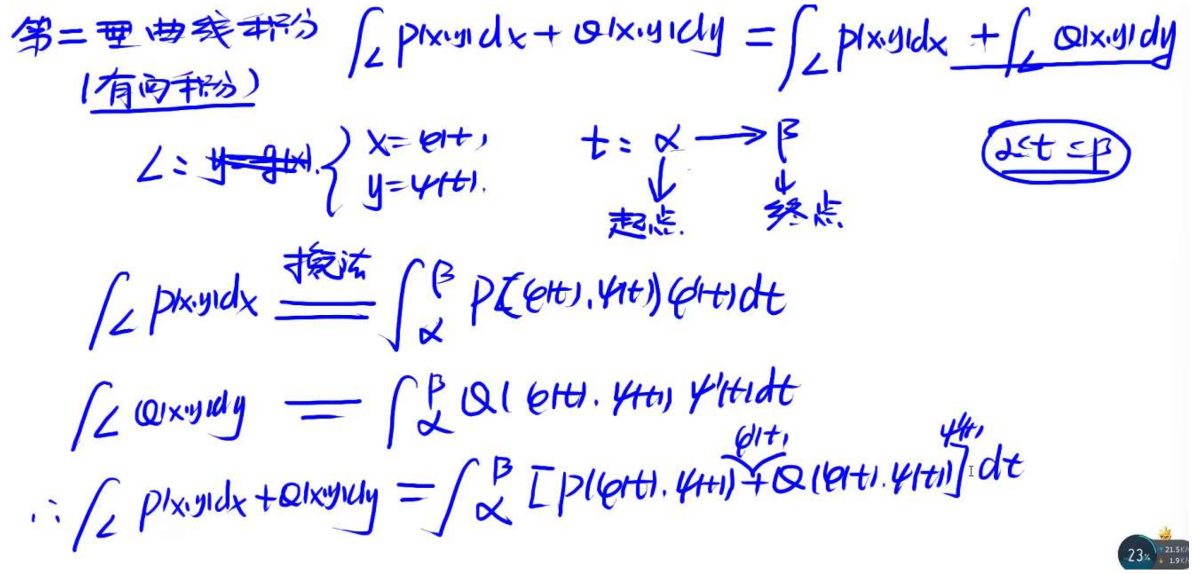
回顾练习



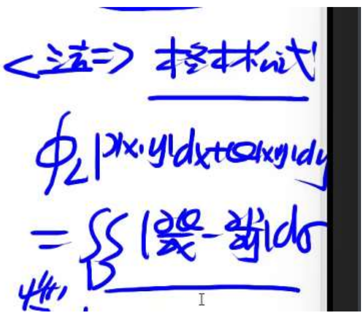
第二性曲线积分

$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_L P(x,y)dx+\int_L Q(x,y)dy,$

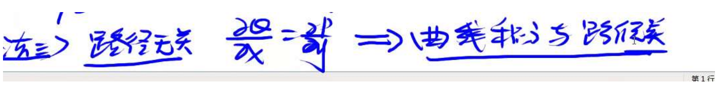
Solv1:



Solv2:



Solv3:



看试卷题二.5

(4) 设 L 为直线段 $y=1$，$|x|\le 1$，则 $\int_L 3\mathrm{d}s=$______.

系数

(5) 设 $x^2=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$，$(-\pi\le x\le\pi)$，则 $a_0=$______.

余弦级数

~~老师说考傅里叶转换~~

(1) 极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\dfrac{1+xy}{x^2+y^2}=$______.

(2) 设二元函数 $z=x\arctan y$，则 $\mathrm{d}z=$______________.

(3) 设 $z=\mathrm{e}^u\sin v$，而 $u=x+y$，$v=xy$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$________.

(4) 设 L 为直线段 $y=1$，$|x|\le 1$，则 $\int_L 3\mathrm{d}s=$______.

系数

(5) 设 $x^2=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$，$(-\pi\le x\le\pi)$，则 $a_0=$ $\frac{2}{3}\pi^2$

余弦级数

三、计算题（每小题 5 分，共 30 分）

(1) 设 $z=x^2\mathrm{e}^{xy}-\ln(x^2+y^2)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

傅里叶系数公式

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$$

$n=0,1,2,\dots$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx$$
$$=\frac{2}{\pi}\cdot\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\pi}$$
$$=\frac{2}{\pi}\times\frac{1}{3}\pi^3$$

收敛域，，

(3) 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\sin\dfrac{1}{n^2}$ 的收敛性.

(4) 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n\cdot n}x^n$ 的收敛域.

① 标准形式 ✓
② 非标准形式(换元)
③ 缺项

(5) 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$ 在区间 $(-1,1)$ 内的和函数.

(6) 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 展开成 $x-2$ 的幂级数，并指出其收敛区间.

四、计算下列积分（每小题 10 分，共 30 分）

(1) $\iiint\limits_{\Omega}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 为平面 $x=0$，$y=0$，$z=0$，$x+y+2z=1$ 所围成的四面体.

(2) $\int_L(xy^3-y^2\cos x)\mathrm{d}x+(1-2y\sin x+3x^2y^2)\mathrm{d}y$，其中 L 为在抛物线 $2x=\pi y^2$ 上由点 $(0,0)$ 到 $(\frac{\pi}{2},1)$ 的一段弧

$$a_n=\frac{1}{3^n\cdot n}$$

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n\cdot n}{3^{n+1}(n+1)}=\frac{1}{3}$$

$R=3$

$(-3,3)$

$x=-3$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ 收敛

$x=3$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散

和函数:

(3) 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{1}{n^2}$ 的收敛性.

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

(4) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n\cdot n}x^n$ 的收敛域.

(5) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ 在区间 $(-1,1)$ 内的和函数.

(6) 将函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 展开成 $x-2$ 的幂级数，并指出其收敛区间.

四、计算下列积分（每小题 10 分，共 30 分）

(1) $\iiint_{\Omega}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 为平面 $x=0$，$y=0$，$z=0$，$x+y+2z=1$ 所围成的四面体.

(2) $\int_L (xy^3-y^2\cos x)\mathrm{d}x+(1-2y\sin x+3x^2y^2)\mathrm{d}y$，其中 L 为在抛物线 $2x=\pi y^2$ 上由点 $(0,0)$ 到 $(\frac{\pi}{2},1)$ 的一段弧.

(3) $\iint_{\Sigma}x^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 介于平面 $z=0$ 及 $z=1$ 之间的部分的下侧.

$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$，$x\in(-1,1)$

求和

$\int_0^x S(t)dt=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty} nt^{n-1}dt$　　$\int x^{n-1}$　　$\frac{1}{n}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nt^{n-1}dt$

$=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}$　　$[t^n]_0^x$

回到 $\left(\int_0^x S(t)dt\right)'=\left(\frac{x}{1-x}\right)'$

$S(x)=\frac{1-x+x}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^2}$

$\frac{1}{x}=\frac{1}{x-2+2}=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{x-2}{2}}$

$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-2}{2}\right)^n$

$\left|\frac{x-2}{2}\right|<1$

间接展开

$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$

$x\in(-1,1)$

展成幂级数

$S(x)=\frac{1}{x^2-2x-3}$ 展开成 $x-2$ 的幂级数

$=\frac{1}{(x-3)(x+1)}$

$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+1}\right)$

收敛域取交集