Fall-2023 5304 LecN Notes

Wan

November 7, 2023

1 Inner Products

1.1 Definition of Inner Products

Notes: The notation is important and useful.

- Inner product of 2 vectors $\boldsymbol{x}$ and $\boldsymbol{y}$ in $\mathbb{R}^n$:

$\boxed{\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_2 + \cdots + \boldsymbol{x}_n\boldsymbol{y}_n \text{ in } \mathbb{R}^n}$

Notation: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ or $\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x}$

- For complex vectors

$\boxed{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}_1\bar{\boldsymbol{y}}_1 + \boldsymbol{x}_2\bar{\boldsymbol{y}}_2 + \cdots + \boldsymbol{x}_n\bar{\boldsymbol{y}}_n \text{ in } \mathbb{C}^n}$

Note: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^H\boldsymbol{x}$

1.2 Properties of inner products

4 operation Properties

内积具有下列性质：

(1) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})$； 交换律

(2) $(k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$； scalar可以提出来

(3) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$； 结合率

(4) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})\geqslant 0$，当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$ 时，等号成立. 非负性

1 useful property for proving

- Given $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ then

$$\boxed{(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}^H\boldsymbol{y}) \quad \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n, \forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^m}$$

2 Eigenvalues and Eigencevectors

Properties of eigenvalues

2. 特征值的性质及运算

若 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则

(1) $k\lambda$ 是 $k\boldsymbol{A}$ 的特征值.

(2) λ^m 是 $\boldsymbol{A}^m$ 的特征值.

(3) $f(\boldsymbol{A})=\sum_{i=0}^{m} a_i\boldsymbol{A}^i$ 的特征值为 $f(\lambda)=\sum_{i=0}^{m} a_i\lambda^i$.

(4) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\lambda\neq 0$，且 $\frac{1}{\lambda}$ 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值.

(5) 若 $\lambda\neq 0$，则 $\boldsymbol{A}^*$ 有特征值 $\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$.

(6) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^T$ 有相同的特征值.

(7) $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 有相同的特征值.

(8) 0 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的充分必要条件是 $|\boldsymbol{A}|=0$，亦即 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值全不为零.

(9) 零矩阵有 n 重特征值 0.

(10) 单位矩阵有 n 重特征值 1.

(11) 数量矩阵 $k\boldsymbol{E}$ 有 n 重特征值 k.

(12) 幂零矩阵 ($\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{0}$) 有 n 重特征值 0.

(13) 幂等矩阵 ($\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$) 的特征值只可能是 0 或 1.

(14) 对合矩阵 ($\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$) 的特征值只可能是 1 或 -1.

(15) k－幂矩阵 ($\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{E}$) 的特征值只可能是 1 的 k 次方根.

(16) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 的 n 个特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则

① $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$，即特征值之和等于矩阵的迹；

② $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|\boldsymbol{A}|$，即特征值之积等于矩阵的行列式.