线性方程组有解的判定定理以及解的求法

一、非齐次线性方程组四种表达形式

1，传统表达形式（m个方程n个未知数）

$$\mathbf{1.}\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \qquad \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{\boxed{mn}}x_n=b_m \end{cases}$$

看这个标来判断方程和未知数的个数

2，传统表达形式的缩写

$$\mathbf{2.}\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i \qquad (i=1,2,\cdots,m)$$

3，矩阵表达形式（第二章中学习的）

$$AX=b$$

4，线性组合表达形式

$$a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n=b$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \cdots & \boldsymbol{a}_{1n} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & \cdots & \boldsymbol{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{a}_{m1} & \boldsymbol{a}_{m2} & \cdots & \boldsymbol{a}_{mn} \end{pmatrix} \quad \boxed{\overline{\mathbf{A}}}=\boxed{\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)} \quad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n) \qquad =(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,b)$$

把这个看作一个分块形式（按列分块）

这个是增广矩阵

形式（3）与形式（4）之间的联系：

$AX=b$有解<=>b可由向量组A：α_1，α_2，…，α_n 线性表出

二、非齐次线性方程组有解的判定定理

🌟1，定理1：非齐次线性方程组有解的充分必要条件是系数矩阵的秩与增广矩阵的秩相等

定理1 线性方程 $Ax=b$ 有解 $\Leftrightarrow \boxed{R(A)=R(\bar{A})}$

证 $Ax=b$ 有解

A的系数矩阵的列向量组

$\Leftrightarrow b$ 可由 $\boxed{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n}$ 线性表示

$\Leftrightarrow \{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}\cong\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,b\}$

$\Leftrightarrow R\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}=R\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,b\}$ 等价的两个向量组具有相同的秩

$\Leftrightarrow R(A)=R(\bar{A})$

🌟**2，推论（定理1的逆否）：线性方程组无解的充分必要条件是系数矩阵的秩与增光矩阵的秩不相等**

推论 线性方程 $Ax=b$ 无解 $\Leftrightarrow \boxed{R(A)\neq R(\bar{A})}$

$\boxed{(R(A)<R(\bar{A}))}$

例1：

例1 讨论线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+\lambda x_3=1, \\ x_1+\lambda x_2+x_3=1, \\ \lambda x_1+x_2+x_3=1. \end{cases}$$

当λ取何值时有解，取何值时无解？

解 对方程组的增广矩阵做初等行变换，则

求秩的话和行阶梯形矩阵有关系，求逆才和单位矩阵有关系

$$\bar{A}=(A\ \ b)=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & \lambda & 1\\ 1 & \lambda & 1 & 1\\ \lambda & 1 & 1 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-\lambda r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & \lambda & 1\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 1-\lambda\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2}\boxed{\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & \lambda & 1\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 2-\lambda-\lambda^2 & 1-\lambda\end{array}\right)}.$$

此时化成了行阶梯形矩阵

当$\lambda=1$ 或 $\lambda\neq1$，-2时，$R(A)=R(\bar{A})$，方程组有解；

当$\lambda=-2$时，$R(A)=2, R(\bar{A})=3$，方程组无解.

三、线性方程组解的求法

1，结论1（m是方程个数，n是未知数个数）：

$$当R(A)=R(\bar{A})=n时，方程AX=b有唯一解。$$

2，结论2（m是方程个数，n是未知数个数）：

$$当R(A)=R(\bar{A})<n时，方程AX=b有无穷多解。$$

3，结合结论（1）、（2）可以得到线性方程组求解定理（对于非齐次线性方程组来说）：

定理2　对于方程 $A_{m\times n}X=b$ 有

(1)若 $R(A_{m\times n})=R(\overline{A})=n$，则方程组 $\boxed{\text{有唯一解;}}$

(2)若 $R(A_{m\times n})=R(\overline{A})<n$，则方程组 $\boxed{\text{有无穷多个解.}}$

4，当（3）中的b为零向量时，可以得到对于齐次线性方程组求解的推论：

推论1　齐次线性方程组

表达方式1

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$

表达2　表达3

或 $\boxed{AX=0}$ 或 $\boxed{\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n=0}$

(1)永远有零解. 显然 $\boxed{R(A)=R(\overline{A})=R(A\,|\,0)}$

在齐次线性方程组中，系数矩阵的秩与其增广矩阵的秩是永远相等的，因为加上0列不会影响秩。所以在齐次线性方程组解的讨论的时候，我们只需要单独讨论系数矩阵即可。

$\boxed{(2)}$如果 $\boxed{R(A)=n}$，则 $AX=0$ 只有唯一零解.

(3)如果 $\boxed{R(A)=r<n}$，则 $AX=0$ 除零解外，还有无穷多个非零解 .

这是齐次线性方程组有唯一解的情况，又因为齐次线性方程组必有0解，所以只有唯一零解。

方程个数少于未知数的个数

特别，当 $m<n$ 时，$AX=0$ 必有无穷多个非零解，

因为 $\boxed{R(A)\le m<n\,.}$

5，关于齐次线性方程组求解，有一推论2：

推论2:一个特殊情形

推论2 含有n个未知量n个方程的齐次线性方程组

$AX=0$有非零解的充分必要条件是其系数行列式：

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=0$$

证明 $AX=0$有非零解

<=>有一组不全为零的数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$

使 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=0$ 成立.

<=> $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性相关.

<=> $\boxed{|A|=0}$（第三章定理3.2.3的推论3）.

“注意特殊情况的观察，能够导致一般性的数学结果，也可启发出一般性的证明方法。”

例1：

例1 问题2 讨论非齐次线性方程组是否有解？

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=1 \\ 4x_1+2x_2+3x_3=2 \\ 2x_1+x_2+2x_3=3 \end{cases}$$

解 先对增广矩阵Ā施行初等行变换,

将其化为行阶梯形

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&1&1\\4&2&3&2\\2&1&2&3\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&1&1\\0&0&1&0\\0&0&1&2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{2}r_3]{r_3-r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&1&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right)$$

因为 $\mathrm{R}(\mathrm{A})=2\neq\mathrm{R}(\overline{\mathrm{A}})=3$

所以此方程组无解.

这里补充一下如何判别阶阶梯形矩阵以及我化行阶梯形的心得：

1，若有零行，则零行全在矩阵A的下方。

2，Each leading entry of a row (每行第1个非零元素) is in a column to the right of the leading entry in the row above it.

3，All entries in a column below a leading entry is a zero.

4，若还满足该条(4)，各非零行的第1个非零元素均为1，且所在列的其他元素都为0，则称A为简化阶梯形矩阵。

化解技巧：“自底向上”考虑，先把底部尽量化作0，然后把每行的非零元素看作pivot再“自顶向下”看。

例2：

例2 问题3-1 求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 3 \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -4 \end{cases}$$

解 对增广矩阵$\bar{A}$施行初等行变换，

将其化为$\boxed{\text{行阶梯形}}$.

$$\bar{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & 3 \\ -2 & 2 & 3 & -4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{10}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

因为判断出有解，所以我们继续作初等行变化
将该矩阵从阶梯形矩阵化为最简阶梯形矩阵

因 $R(A)=R(\bar{A})=3=n$，

所以方程组有唯一解：

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{10}{7} \\ x_2 = -\dfrac{1}{7} \\ x_3 = -\dfrac{2}{7} \end{cases}$$

例3：

例3　问题3-2 求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$$

解 先对增广矩阵$\bar{A}$施行初等行变换，

将其化为行阶梯形

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{行}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

R(A) = R(A bar) = 2，所以我们接下来进一步化成行最简阶梯形矩阵

$$\xrightarrow{\text{行}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

因 $\boxed{R(A)=R(\overline{A})=2<4=n}$， 线性方程组最终剩余方程个数是2个，而未知数的个数是4个

在四个未知量中令 x_2, x_4 为自由未知量，

即令 $x_2=k_2, x_4=k_4$ 为两个任意常数，

则方程组有如下无穷多解

$$\begin{cases} x_1 = 2 + k_2 \\ x_2 = k_2 \\ x_3 = 1 + k_4 \\ x_4 = k_4 \end{cases}$$

（其中 k_2, k_4 为任意常数）

四、线性方程组解的求法再总结—已解决的问题和待研究的问题

总结：

1，非齐次：

(1) $AX=b$ 只有唯一解 <=> $\boxed{R(A)=R(\overline{A})=n}$

必要性证明:（反证法） 若 $R(A)=R(\overline{A})\neq n$

$\Rightarrow R(A)=R(\overline{A})<n \Rightarrow AX=b$ 有无穷多个解.

(与 $AX=b$ 只有唯一解矛盾)

(2) $AX=b$ 有无穷多个解 <=> $\boxed{R(A)=R(\overline{A})<n}$

(3) $AX=b$ 无解 <=> $\boxed{R(A)\neq R(\overline{A})}$

2，齐次：

(1) $AX = 0$只有零解<=>$\boxed{R(A) = n}$

(2) $AX = 0$有无穷多个非零解<=>$\boxed{R(A) < n}$

有待研究的问题：

1，非齐次线性方程组有无穷多解的情况；2，齐次线性方程组有无穷多个非零解的情况。

- 若非齐次线性方程组有无穷多解，无穷多解应该如何求？解的结构/形式是怎么样的？
- 若齐次线性方程组有无穷多非零解，无穷多个非零解应该如何求？解的结构/形式是怎么样的？

五、线性方程组解的求法—典型例题

例1：

例1 求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 7 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 7 \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 21 \end{cases}$$

写成通解形式.

解 对方程组的增广矩阵作行的初等变换

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 5 & 3 & 7 \\ 3 & -6 & 4 & 2 & 7 \\ 4 & -8 & 17 & 11 & 21 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 5 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -7/2 & -5/2 & -7/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & -2/7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5/7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

于是方程组的同解方程组为：

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - \dfrac{2}{7}x_4 = 1 \\ x_3 + \dfrac{5}{7}x_4 = 1 \end{cases}$$

在这一步找自由变量

其解为：

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 2x_2 + \dfrac{2}{7}x_4 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = 1 - \dfrac{5}{7}x_4 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

把这个形式写成向量的表达式

写成向量形式为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 2/7 \\ 0 \\ -5/7 \\ 1 \end{pmatrix} x_4$$

方程组的通解为 $\gamma = \gamma_0 + k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$,

其中 $\gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2/7 \\ 0 \\ -5/7 \\ 1 \end{pmatrix},$

k_1, k_2为常数

🌟例2（含两个解法，线性方程组含参的情况）：

例2 讨论 λ 取何值时, 下面线性方程组有解, 并求其解.

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

解法1 由 $m=n=3,$

因此可以通过考察$|A|$来确定方程组的解.

(只适用于$m=n$的情形)

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}$$

观察到：该行列式每一行的和都是lambta+2，每一列的和也都是lambta+2

$$= \begin{vmatrix} \lambda+2 & \lambda+2 & \lambda+2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

将行列式化简成上三角行列式，上三角行列式的值就是主对角线乘积

$$= \boxed{(\lambda-1)^2(\lambda+2)}$$

(1) 当 $\boxed{|A| \neq 0}$ 时，即 $\boxed{\lambda \neq 1 \text{ 且 } \lambda \neq -2}$ 时，

根据克莱姆法则，方程组有唯一解.

$$x_1 = \frac{-\lambda-1}{\lambda+2}, \qquad x_2 = \frac{1}{\lambda+2}, \qquad x_3 = \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}$$

x_1 = D_1/D

(2) 当 $\boxed{\lambda=1}$ 时，原方程组三个方程相同，

即 $x_1 + x_2 + x_3 = 1.$

观察：$\boxed{R(A) = R(\overline{A}) = 1.}$

原方程有无穷多个解.

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_2 - x_3 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_3 .$$

写成通解的形式

(x_2, x_3为任意常数)

(3) 当$\lambda = -2$时

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc:c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

显然 $R(A) = 2, R(\overline{A}) = 3,$

所以方程组无解.

解法2

直接写出原方程组的增广矩阵，

对其作行的初等变换，

从而判定参数λ取不同值时解的情况.

(适用于各种情形).

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc:c}\lambda & 1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1 & \lambda\\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2-r_1]{r_3-r_2}\left(\begin{array}{ccc:c}\lambda & 1 & 1 & 1\\ 1-\lambda & \lambda-1 & 0 & \lambda-1\\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 & \lambda^2-\lambda\end{array}\right)\begin{array}{l}\leftarrow\left(\frac{1}{1-\lambda}\right)\\ \leftarrow\left(\frac{1}{1-\lambda}\right)\end{array}$$

$$\boxed{(\lambda\neq1)}$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 2+\lambda & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 & -\lambda\end{array}\right)\begin{array}{l}\leftarrow\left(\frac{1}{2+\lambda}\right)\ \boxed{(\lambda\neq-2)}\\ \leftarrow\boxed{(-1)}\end{array}$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & 0 & \dfrac{-1-\lambda}{2+\lambda}\\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{1}{2+\lambda}\\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{(1+\lambda)^2}{2+\lambda}\end{array}\right)$$

得到行最简形

所以，当$\boxed{\lambda\neq1}$且$\boxed{\lambda\neq-2}$时有唯一解

$$x_1=\frac{-\lambda-1}{2+\lambda},\qquad x_2=\frac{1}{2+\lambda},\qquad x_3=\frac{(\lambda+1)^2}{2+\lambda}$$

当$\boxed{\lambda=1}$时

$$\overline{A}\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\qquad R(A)=R(\overline{A})=1<3,$$

即原方程的同解方程为

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$

解为

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = 1 - x_2 - x_3 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \end{cases}}$$

即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_3.$$

(x_2, x_3为任意常数)

当 $\boxed{\lambda = -2}$ 时

$$\overline{A} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$R(A) = 2$，$R(\overline{A}) = 3$，所以方程组无解.