Some tricks for Numerical Analysis

Wan

November 7, 2023

1 Inner Products

1, Take inner product on both side of the equation.

对等式两边作内积运算通常是指在等式两边同时与一个相同的向量或矩阵做内积，以保持等式的平衡。在数学和物理中，这是一种常见的操作，可以用来简化问题或是证明某些性质。

内积运算定义了向量空间中两个向量的乘积，它是一种将两个向量映射到实数（或复数）的操作。对于实数向量空间，内积通常定义为：

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n$$

其中，$\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 是向量，u_i 和 v_i 是相应的分量。

在矩阵代数中，内积也可以指的是一个矩阵与向量之间的乘积，这实际上就是矩阵作用在向量上的结果。

当说到对等式两边作内积运算，这意味着如果你有一个等式：

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}$$

你可以选择一个向量 $\mathbf{v}$，然后与等式的两边分别做内积：

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{B}$$

或者，如果 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 是矩阵，那么内积会变成：

$$\mathbf{v}^T \mathbf{A} = \mathbf{v}^T \mathbf{B}$$

对等式两边做内积运算是一个有用的技巧，尤其在解决涉及正交性或证明两个向量正交时，这种情况下内积为零。在物理学中，它经常被用来从矢量方程中抽取标量方程，或在考虑到能量和功时从力和位移的关系中提取有用信息。

证: (1) 若 $(\alpha_i,\beta)=0$，$(i=1,2,\ldots,m)$. 设

$\gamma=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$ 是 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ 的任一线性组合, 由内积的线性性,

$$
\begin{aligned}
(\beta,\gamma) &= (\beta,k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m) \\
&= k_1(\beta,\alpha_1)+k_2(\beta,\alpha_2)+\cdots+k_m(\beta,\alpha_m) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

结论①证毕.

故β与γ正交.

(2) 设 $\underbrace{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0}$, 用$\alpha_1$与其两边作内积运算，得

suppose: 有一组数 $k_1, k_2 \ldots k_m$ 使得 $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m$ 的线性组合为0.

$$k_1(\alpha_1,\alpha_1)+k_2(\alpha_1,\alpha_2)+\cdots+k_m(\alpha_1,\alpha_m)=(\alpha_1,0)=0$$

由于$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$两两正交，则当 $j\neq 1$ 时, $(\alpha_1,\alpha_j)=0$, 于是得到 $k_1(\alpha_1,\alpha_1)=0$. 即$k_1|\alpha_1|^2=0$.

由于α_1是非零向量, 故$|\alpha_1|\neq 0$, 因此$k_1=0$.

用α_i替代α_1重复以上论证, 可得 $k_i=0$, $i=2,\ldots,m$, 故$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$线性无关. 证毕.

结论②证明.

从第2项开始，这些内积都为0，乘以一个scalar还是0.