

Fall-2023 5304 LecN Notes

Wan

November 4, 2023

1 Inner Products

Definition of Inner Products

Notes: The notation is important and useful.

► Inner product of 2 vectors x and y in \mathbb{R}^n :

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \text{ in } \mathbb{R}^n$$

Notation: (x, y) or $y^T x$

► For complex vectors

$$(x, y) = x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 + \cdots + x_n\bar{y}_n \text{ in } \mathbb{C}^n$$

Note: $(x, y) = y^H x$

Properties of inner products, 4 operation Properties

内积具有下列性质:

(1) $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$; 交换律

(2) $(k\alpha, \beta) = k(\alpha, \beta)$; scalar可以提出来

(3) $(\alpha + \beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma)$; 结合率

(4) $(\alpha, \alpha) \geq 0$, 当且仅当 $\alpha = 0$ 时, 等号成立. 非负性

2 Eigenvalues and Eigencevectors

Properties of eigenvalues

2. 特征值的性质及运算

若 λ 是 \mathbf{A} 的特征值, 则

(1) $k\lambda$ 是 $k\mathbf{A}$ 的特征值.

(2) λ^m 是 \mathbf{A}^m 的特征值.

(3) $f(\mathbf{A}) = \sum_{i=0}^m a_i \mathbf{A}^i$ 的特征值为 $f(\lambda) = \sum_{i=0}^m a_i \lambda^i$.

(4) 若 \mathbf{A} 可逆, 则 $\lambda \neq 0$, 且 $\frac{1}{\lambda}$ 是 \mathbf{A}^{-1} 的特征值.

(5) 若 $\lambda \neq 0$, 则 \mathbf{A}^* 有特征值 $\frac{|\mathbf{A}|}{\lambda}$.

(6) \mathbf{A} 与 \mathbf{A}^T 有相同的特征值.

(7) \mathbf{AB} 与 \mathbf{BA} 有相同的特征值.

(8) 0 是 \mathbf{A} 的特征值的充分必要条件是 $|\mathbf{A}| = 0$, 亦即 \mathbf{A} 可逆的充分必要条件是 \mathbf{A} 的所有特征值全不为零.

(9) 零矩阵有 n 重特征值 0.

(10) 单位矩阵有 n 重特征值 1.

(11) 数量矩阵 $k\mathbf{E}$ 有 n 重特征值 k .

(12) 幂零矩阵 ($\mathbf{A}^m = \mathbf{0}$) 有 n 重特征值 0.

(13) 幂等矩阵 ($\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$) 的特征值只可能是 0 或 1.

(14) 对合矩阵 ($\mathbf{A}^2 = \mathbf{E}$) 的特征值只可能是 1 或 -1.

(15) k -幂矩阵 ($\mathbf{A}^k = \mathbf{E}$) 的特征值只可能是 1 的 k 次方根.

(16) 设 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ 的 n 个特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 则

① $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$, 即特征值之和等于矩阵的迹;

② $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = |\mathbf{A}|$, 即特征值之积等于矩阵的行列式.