1 Let A, B be two $m \times p$ matrices. The *Procrustes* problem consists of finding a unitary matrix Q ($Q \in \mathbb{R}^{p\times p}$, $Q^T Q = I$), that minimizes $\|A - BQ\|_F$.

(a) For $X = A - BQ$, expand $\|X\|_F^2$ as $\mathrm{tr}(X^T X)$ to show that the problem is equivalent to Maximizing the trace of $A^T BQ$.

(b) Use the SVD of $A^T B$ to find the optimal solution. [Hint: exploit the identity $tr(AB) = tr(BA)$ which is valid when both products exist].

(a)

$$X = A - BQ$$

$$\|X\|_F^2 = \|A - BQ\|_F^2$$

$\|A\|_F^2 = Tr(A^H A) = Tr(AA^H).$

$$= Tr[(A-BQ)^T(A-BQ)]$$

Tr的性质.

$Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$

$$= Tr[A^TA - A^TBQ - Q^TB^TA + Q^TB^TBQ]$$

$$= Tr(A^TA) - Tr(A^TBQ) - Tr(Q^TB^TA) + Tr(Q^TB^TBQ)$$

$(A^TBQ)^T = Q^TB^TA$

$Tr(A) = Tr(A^T)$

$$= Tr(A^TA) - 2Tr(A^TBQ) + Tr(Q^TB^TBQ)$$

$Tr(AB) = Tr(BA)$

$Tr(Q^T B^T B Q)$

$= Tr(B^T B Q Q^T)$

$= Tr(B^T B)$ Q unitary

$$= Tr(A^T A) - 2Tr(A^T B Q) + Tr(B^T B)$$

Our goal is to find Q, only the 2nd term is related to Q.

Thus, find Q to find $\min \|A - BQ\|_F^2$ is equal to find $\max Tr(A^T B Q)$.

$\boxtimes$

(b)

Get the svd of $\underset{}{\overset{p\times p}{\underline{A^TB}}}$: $A^TB = \overset{p\times p}{U}\,\overset{p\times p}{\Sigma}\,\overset{p\times p}{V^T}$

$$Tr(A^TBQ) = Tr(U\Sigma V^TQ)$$

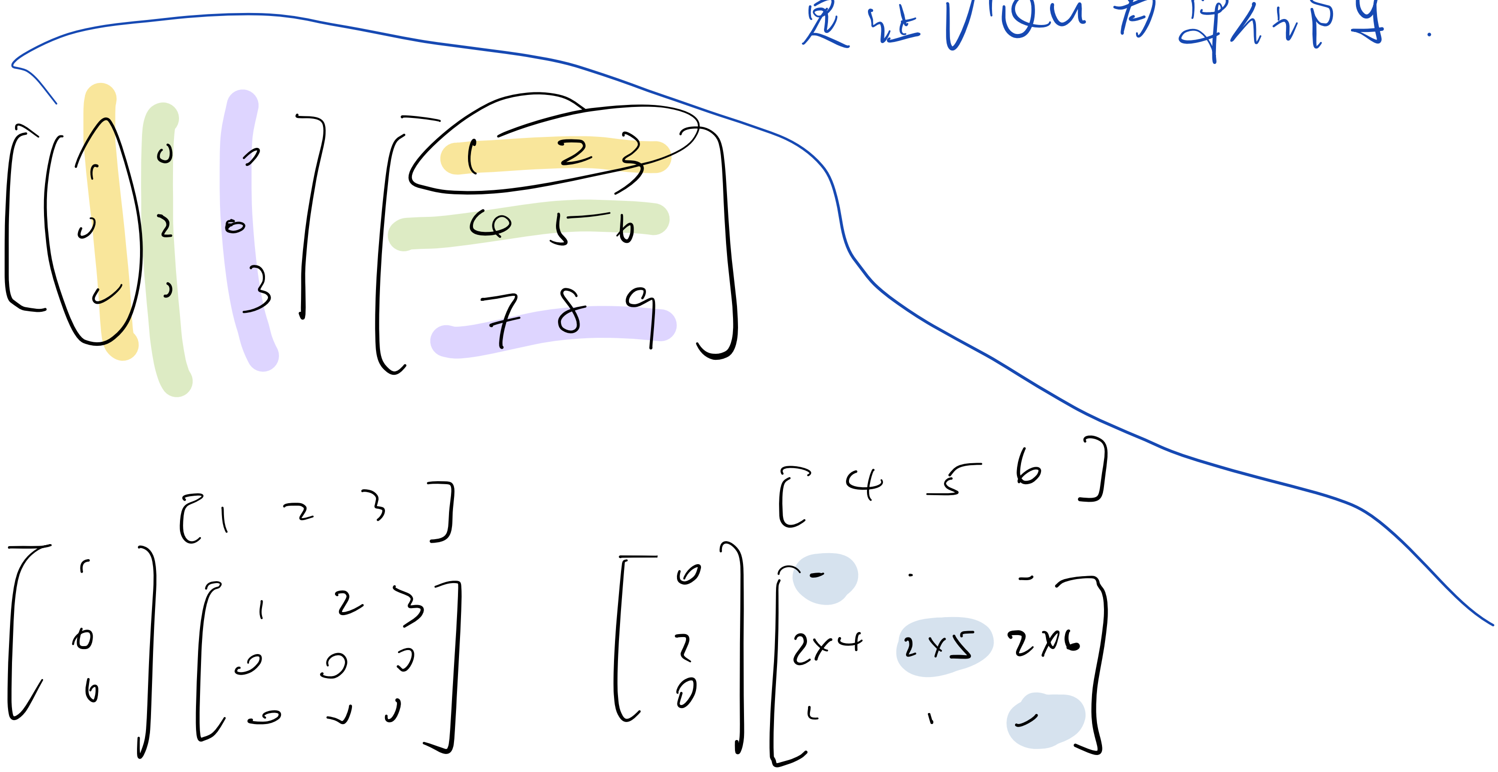
$Tr(AB) = Tr(BA)$

$$= Tr(\Sigma \underbrace{V^TQU}_{})$$

$p\times p$ 矩阵, unitary.

Optimum takes place when $V^TQU = I$ $\blacksquare$

V^TQU 为 unitary 阵，其每一行和每一列的范数都为 1。因此，任何行/列中的单个元素最大不能超过 1。这就意味着最大化迹的唯一方法是让 V^TQU 为单位阵.



[补].

Procrustes Problem

Procrustes问题，也称为Procrustes分析，是一种用于统计形状分析的数学方法。它的主要目的是确定两个或多个形状之间的最佳对应关系，以便可以通过对其进行旋转、缩放和平移来最小化它们之间的差异。这种方法在许多领域都很有用，如生物学中的形态测量学、计算机视觉和图像分析。

具体来说，Procrustes分析试图找到一种方法，通过对数据点集进行变换（例如，使一个数据点集的形状尽可能接近另一个数据点集的形状），以最小化两个数据点集之间的距离或差异。这通常涉及到优化问题，需要使用数学和统计方法来求解。通过Procrustes分析，研究人员可以更准确地比较和分析不同形状的数据，从而获得更深入的洞察力和理解。

Procrustes problem：寻找最优的旋转（或正交变换）来对齐两个矩阵.

左乘、右乘对角阵

对A右乘对角阵 相当于对A的每一列用对角元素进行缩放，左乘同理.

unitary 矩阵性质

定义 【定义】若矩阵A满足$A^H A = AA^H = I$,则称A为酉矩阵.

基本性质：设A,B是同阶酉矩阵，则

①$|\det A| = 1$, 即A的行列式的模长为1;

②$A^{-1} = A^H$, 且AB也是酉矩阵;

③对任意向量x, 有$\|Ax\|_2 = \|x\|_2$,即2-范数的酉不变性;

④A是酉矩阵当且仅当A的列(行)向量组是两两正交的单位向量.

向量组orthonormal.