# UNIVERZITET CRNE GORE ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET

# ZBIRKA ZADATAKA IZ OSNOVA ANALOGNIH TELEKOMUNIKACIJA



Podgorica 2018.

# PRIREDILI:

Marijana Kračunov

Gojko Ratković

Slavko Kovačević

# Sadržaj

KOLOKVIJUM	2
Harmonijska analiza periodičnih signala	
Harmonijska analiza aperiodičnih signala	
Prenos signala kroz linearne sisteme	29
Amplitudske modulacije	35
ZAVRŠNI	56
Ugaone modulacije	57
Šum u telekomunikacionim sistemima	70
Prenos amplitudski modulisanih signala	70
Prenos ugaono modulisanih signala	81

# **KOLOKVIJUM**

#### Harmonijska analiza periodičnih signala

1. Pronaći amplitudski i fazni spektar periodičnog signala f(t), koji je u intervalu jedne periode T definisan na sledeći način:

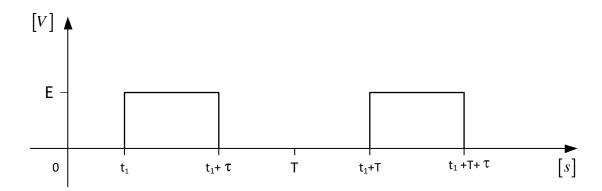
$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < t_1 \\ E, & t_1 < t < t_1 + \tau \\ 0, & t_1 + \tau < t < T \end{cases}$$
 (1.1)

Grafički predstaviti amplitudski i fazni spektar ovog signala za slučaj da je,

- a)  $\tau = T/(3,5)$ ,
- b) Perioda T dva puta veća, a trajanje impulsa τ isto kao pod a),
- c) Trajanje impulsa τ dva puta manje,a perioda T isto kao pod a).

#### Rješenje:

F-ju f(t) grafički možemo predstaviti:



Periodiči signal f(t), periode  $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ , može se predstaviti Furijeovim redom:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n| e^{j(n\omega_0 t + \theta_n)}$$

$$Kompleksan$$

$$oblik$$
(2.1)

Ovakav red predstavlja f-ju f(t) kao sumu beskonačno mnogo prostoperiodičnih komponenti amplitude  $|F_n|$ , faze  $\theta_n$ , učestanosti  $n\omega_0$  (pozitivne i negativne).

$$f\left(t\right) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\left|F_n\right| cos\left(n\omega_0 t + \theta_n\right) \\ -blik$$
 Trigonometrijski oblik

Sada, f(t) je predstavljen kao suma kosinusoida amplitude  $2|F_n|$ , faze  $\theta_n$ , učestanosti  $n\omega_0$  (samo pozitivne).  $F_0$  je komponenta na ucestanosti  $n\omega_0=0$ .

$$F_{n} = \left| F_{n} \right| e^{j\theta_{n}} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_{0}t} dt \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$
 (1.4)

Ove prostoperiodične kompenente se nazivaju i harmonicima signala f(t).

Amplitudski spekta signala f(t) predstavljaju amplitude a fazni spektar faze harmonika, predstavljene u f-ji od učestanosti.

Pošto je f(t) realno slijedi da je njen amplitudski spektar parna f-ja učestanosti , važi $|F_n| = |F_{-n}|$ , I fazni spektar neparna f-ja tj.  $-\theta_n = \theta_{-n}$ , za svako n.

F<sub>n</sub> nazivamo kompleksnim spektrom

$$\begin{split} F_{n} &= \frac{1}{T} \int_{t_{1}}^{t_{1}+\tau} E e^{-jn\omega_{0}t} \ dt = \frac{1}{T} \frac{E}{-jn\omega_{0}} e^{-jn\omega_{0}t} / t_{1}^{t_{1}+\tau} = \frac{E}{-jn\omega_{0}} \left( e^{-jn\omega_{0}t_{1}} - e^{-jn\omega_{0}(t_{1}+\tau)} \right) = \\ &= \frac{E e^{-jn\omega_{0}t}}{jn\omega_{0}T} \left( 1 - e^{-jn\omega_{0}\tau} \right) = \frac{E e^{-jn\omega_{0}\left(t_{1}+\frac{\tau}{2}\right)}}{jn\omega_{0}T} \left( e^{jn\omega_{0}\frac{\tau}{2}} - e^{-jn\omega_{0}\frac{\tau}{2}} \right) \\ &= \frac{2E sin\left( n\omega_{0} \frac{\tau}{2} \right)}{n\omega_{0}T} e^{-jn\omega_{0}\left(t_{1}+\frac{\tau}{2}\right)} = \\ &= \frac{E \tau}{T} \frac{sin\left( n\omega_{0} \frac{\tau}{2} \right)}{n\omega_{0}} e^{-jn\omega_{0}\left(t_{1}+\frac{\tau}{2}\right)} \end{split}$$

$$(1.5)$$

Amplitudski spektar,

$$\alpha(\omega) = \frac{E\tau}{T} \left| \frac{\sin\left(\omega \frac{\tau}{2}\right)}{\omega \frac{\tau}{2}} \right| \tag{1.7}$$

predstavlja anvelopu amplitudskog spektra i dobija se zamjenom diskretnih vrijednosti n $\omega_0$  u kontinualnu promjenljivu  $\omega$ . Maksimalna vrijednost anvelope je na učestanosti  $\omega=0$  i iznosi  $F_0 = \lim_{n \to 0} \alpha(\omega) = \frac{E\tau}{T}$ .

Anvelopa spektra ima nula na učestanostima gdje je  $\sin\left(\omega \frac{\tau}{2}\right)=0$  tj :

$$\frac{\omega \tau}{2} = k\pi \Rightarrow \omega = \frac{2k\pi}{\tau} , \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$
 (1.8)

Rastojanja nula anvelope od koordinatnog početka obrnuto su proporcionalna trajanju impulsa  $\tau$ .

Fazni spektar,  $\theta_n$ =-jn $\omega_0 \left( t_1 + \frac{\tau}{2} \right) + \Delta \theta_n$ 

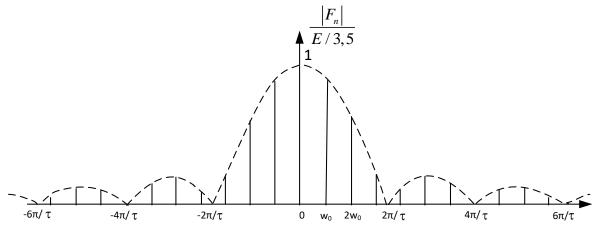
$$\text{gdje je } \Delta\theta_{n}\!=\!\!\left\{ \begin{aligned} &0,\,\frac{sin\!\left(n\omega_{0}\frac{\tau}{2}\right)}{n\omega_{0}\frac{\tau}{2}}\!\!>\!\!0\\ &\pm\pi,\,\frac{sin\!\left(n\omega_{0}\frac{\tau}{2}\right)}{n\omega_{0}\frac{\tau}{2}}\!\!<\!\!0 \end{aligned} \right.$$

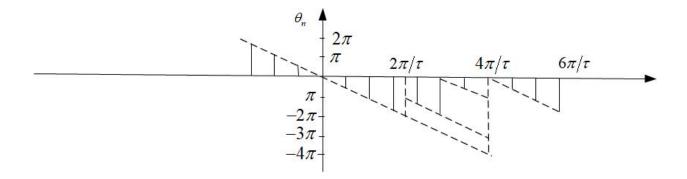
a anvelopa faznog spektra  $\beta\!\left(\omega\right)\!\!=\!-\omega\!\left(t_1\!+\!\frac{\tau}{2}\right)\!\!+\!\!\Delta\theta_n$  .

Zaključujemo da trenutak uspostavljanja impulsa  $t_1$  utiče samo na fazni spektar!

a) 
$$\tau = T/(3,5) = > |F_n| = \frac{E}{3,5} \left| \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{3,5}\right)}{\frac{n\pi}{3,5}} \right|$$
,  $F_0 = \frac{E}{3,5}$ , nule:  $\omega = 3,5\omega_0 k$ 

uzimamo da je  $t_1 = \frac{\tau}{2}$ ,



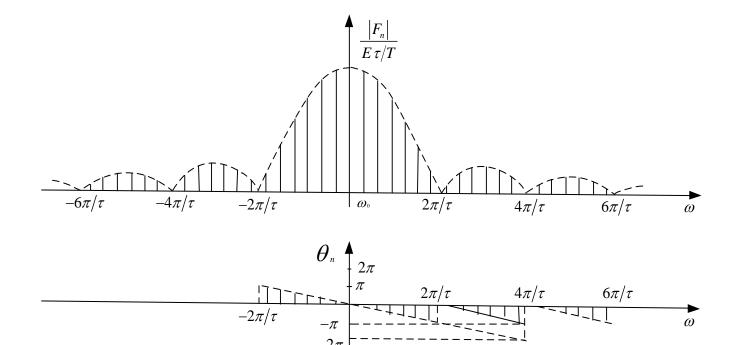


b)  $\tau = T/7$  (perioda je dva puta veća). Slijedi:

$$\left|F_{n}\right| = \frac{E}{7} \left| \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{7}\right)}{\frac{n\pi}{7}} \right|, \qquad n=0,\pm 1,\pm 2,\dots$$
 (1.9)

Maksimalna amplituda  $F_0$  je manja jer je povećano trajanje periode a trajanje impulsa je ostalo nepromijenjeno. Primijetimo da je manja osnovna učestanost  $\omega_0$ , rastojanje izmedju harmonika je smanjeno tj. povećan je broj harmonika ispod jedne arkade anvelope. Nule su se nalaze na istim učestanostima kao i pod a). Neka je  $t_1$ =0 . Fazni spektar je :

$$\theta_{n} = -n\omega_{0} \frac{\tau}{2} + \Delta\theta_{n} \tag{1.10}$$



#### c) $\tau = T/7$ (trajanje impulsa je dva puta kraće)

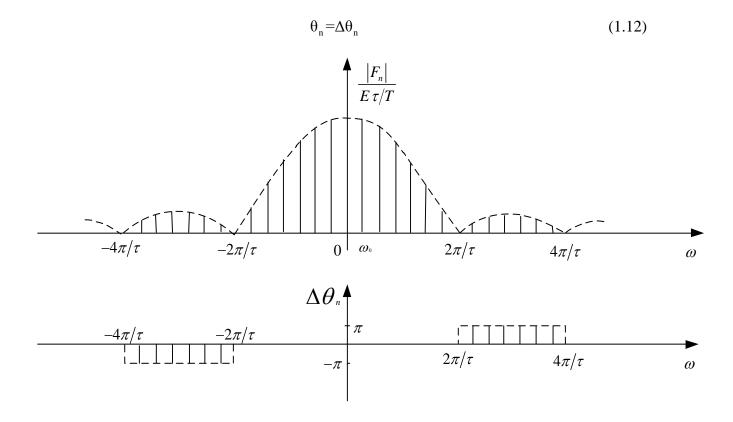
Amplituski spektar:

$$\left|F_{n}\right| = \frac{E}{7} \left| \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{7}\right)}{\frac{n\pi}{7}} \right|, \qquad n=0,\pm 1,\pm 2,\dots$$
 (1.11)

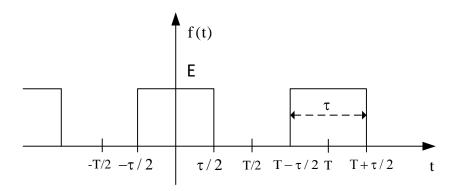
Nule su  $\omega = 7\omega_0 k$ , na dva puta većim učestanostima.

Kako je  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$  slijedi da je rastojanje između harmonika isto kao pod a).

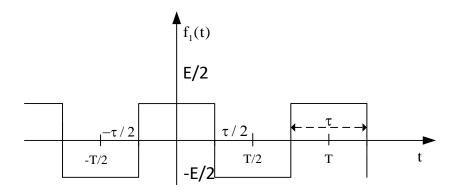
Neka je  $t_1 = \tau/2$ . Fazni spektar:



2. Pronaći amplitudski i fazni spektar periodičnog signala f(t) prikazanog na sl. 1, a zatim odrediti amplitudski i fazni spektar signala  $f_1(t)$  prikazanog na sl. 2.



Slika 1



Slika 2

#### Rješenje:

Amplitudski i fazni spektar povorke pravougaonih impulsa, u najopštijem slučaju, na osnovu rezultata prethodnog zadatka dati su izrazima (2.1) i (2.2):

$$\left| F_{n} \right| = \frac{E\tau}{T} \left| \frac{\sin(n\omega_{0}\tau/2)}{n\omega_{0}\tau/2} \right| \quad n=0, \pm 1, \pm 2,...$$
 (2.1)

$$\theta_{n} = -n\omega_{0}(t_{1} + \tau/2) + \Delta\theta_{n}$$
  $n=0,\pm 1,\pm 2,...$  (2.2)

Gdje je E - amplituda impulse,  $\tau$  - trajanje impulsa, T - perioda ponavljanja impulsa,  $\omega_0=2\pi/T$  - osnovna učestanost signala f(t),  $t_1$  - trenutak uspostavljanja impulsa i

$$-\Delta\theta_{-n} = \Delta\theta_{n} = \begin{cases} 0, \sin(n\omega_{0}\tau/2) > 0 \\ \pi, \sin(n\omega_{0}\tau/2) < 0 \end{cases}$$
 n=1, 2, 3... (2.3)

Kako je u ovom slučaju,  $\tau = T/2$  i  $t_1 = -\tau/2$ , to izrazi (2.1) i (2.2) glase:

$$\left| F_{n} \right| = \frac{E}{2} \left| \frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi/2} \right|, \quad n=0,\pm 1,\pm 2...$$
 (2.4)

i

$$\theta_{n} = -n\omega_{0}(t_{1} + \tau/2) + \Delta\theta_{n}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2...$$
 (2.5)

Nule anvelope amplitudskog spektra nalaze se na učestanostima,

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} \qquad k = 2\omega_0 k \tag{2.6}$$

Dakle, na mjestu onih harmonika čiji je red n paran broj,

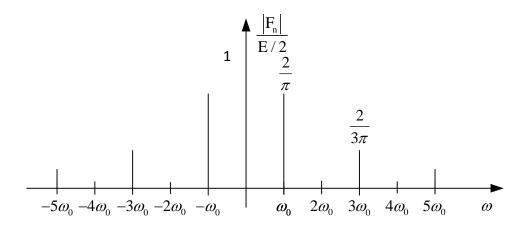
Amplitudski  $\left|F_{n}\right|$  i fazni  $\theta_{n}$  spektar signala f(t) prikazani su na sl. 3a) i 3b).

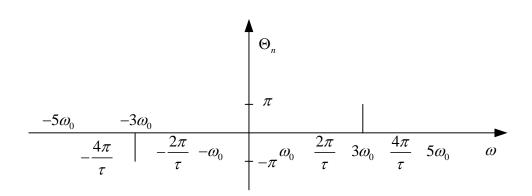
Signal f(t) može da se predstavi Furijeovim redom kao:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|F_n| \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$
(2.7)

Kako je

$$F_{0} = E / 2 i |F_{n}| = \begin{cases} \left| \frac{E}{np} \right|, & n = \pm 1, \pm 3, ... \\ 0, & n = \pm 2, \pm 4, ... \end{cases}$$
 (2.8)





Sl. 3 – Spektar periodične povorke pravougaonih impulsa sa sl. 1

a) Amplitudski spektar, b) Fazni spektar

To je,

$$f(t) = \frac{E}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2E}{(2n+1)\pi} \cos[(2n+1)\omega_0 t]$$
 (2.9)

Spektar signala  $f_1(t)$  lako se određuje pošto se uspostavi relacija između signala f(t) i  $f_1(t)$ ,

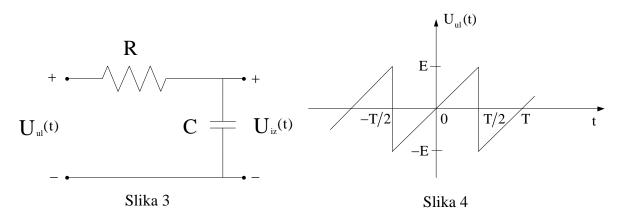
$$f_1(t) = f(t) - E/2,$$
 (2.10)

to je neposredno iz (2.9),

$$f_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2E}{(2n+1)\pi} \cos[(2n+1)\omega_0 t]$$
 (2.11)

Dakle, signal  $f_1(t)$  ne sadrži jednosmjernu komponentu tako da njegov spektar, sem za  $\omega = 0$  jednak spektru signala f(t).

- 3. Na ulaz kola prikazanog na sl.3 dovodi se signal prikazan na sl.4.
- a) Pronaći amplitudski spektar i spektar snage ulaznog signala,
- b) Ako je  $1/(RC)=\omega_0$ , gdje je  $\omega_0$  osnovna kružna učestanost ulaznog signala, odrediti amplitudski spektar i spektar snage izlaznog signala,
- c) Kako treba odrediti elemente kola R i C, pa da snaga trećeg harmonika izlaznog signala ne prelazi 1% srednje snage ulaznog signala?



#### Rješenje:

Funkciju sa Slike 4 možemo zapisati kao

$$U_{ul}(t) = \frac{E}{T/2}t, \qquad -\frac{T}{2} \le t \le \frac{T}{2}$$
 (3.1)

Kompleksni spektar  $U_{ul}(t)$ :

$$U_{uln} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} U_{ul}(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{2E}{T} t e^{-jn\omega_0 t} dt$$
 (3.2)

$$= \frac{2E}{T^{2}} \left[ \frac{te^{-jn\omega_{0}t}}{jn\omega_{o}} \Big|_{-T/2}^{T/2} + \frac{1}{jn\omega_{o}} \int_{-T/2}^{-T/2} e^{-jn\omega_{0}t} dt \right]$$
(3.4)

$$e^{\pm jn\omega_0 \frac{T}{2}} = e^{\pm jn\pi} = (-1)^n$$
 (3.5)

$$U_{uln} = \frac{2E}{T^{2}} \left[ j \left( \frac{T}{2n \frac{2\pi}{T}} e^{-jn\omega_{0} \frac{T}{2}} + \frac{T/2}{n \frac{2\pi}{T}} e^{jn\omega_{0} \frac{T}{2}} \right) - \frac{1}{\left(jn\omega_{0}\right)^{2}} \left( e^{-jn\omega_{0} \frac{T}{2}} + e^{jn\omega_{0} \frac{T}{2}} \right) \right]$$
(3.6)

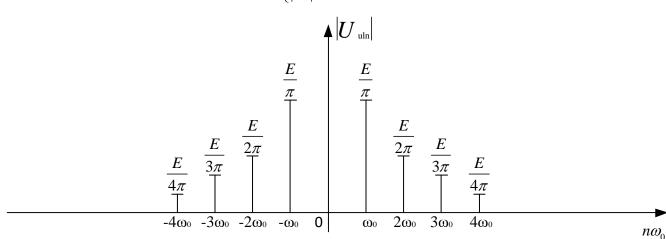
$$U_{uln} = (-1)^{n} \frac{E}{n\pi} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$
 (3.7)

Jednosmjernu komponenta se može naći prethodnog izraza pa ćemo je naći preko definicije Furijeove transformacije zamjenom n=0.

$$U_{ul0} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{2E}{T} t dt = 0$$
 (3.8)

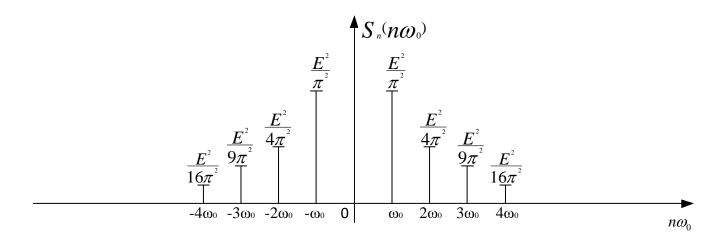
a) Amplitudski spektar ulaznog signala:

$$\left|\mathbf{U}_{\mathrm{uln}}\right| = \begin{cases} 0; & n=0\\ \frac{E}{|n\pi|}; & n \neq 0 \end{cases} \tag{3.9}$$



Spektar snage ulaznog signala:

$$S_{n}(n\omega_{0}) \triangleq |U_{uln}|^{2} = \begin{cases} 0; & n=0\\ \frac{E^{2}}{n^{2}\pi^{2}}; & n \neq 0 \end{cases}$$
 (3.10)



b) Kako važi 
$$|U_{izn}| = |U_{uln}||H(j\omega)|$$
 dalje:  

$$H(j\omega) = \frac{1/j\omega C}{1/j\omega C + R} = \frac{1}{1+j\omega RC} \text{ prenosna f-ja}$$
(3.11)

$$\left| \mathbf{H} \left( \mathbf{j} \omega \right) \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \mathbf{n} \omega_0 \mathbf{R} \mathbf{C} \right)^2}}$$
 (3.12)

$$\left| U_{izn} \right| = \begin{cases} 0; & n=0\\ \frac{E}{|n\pi|} \frac{1}{\sqrt{1 + (n\omega_0 RC)^2}}; & n \neq 0 \end{cases}$$
 (3.13)

$$= \begin{cases} 0; & n=0\\ \frac{E}{|n\pi|} \frac{1}{\sqrt{1+n^2}}; & n \neq 0 \end{cases}$$
 (3.14)

$$S_{izn}(n\omega_0) = \begin{cases} 0; & n=0\\ \frac{E^2}{|n\pi|^2} \frac{1}{1+n^2}; & n \neq 0 \end{cases}$$
 (3.15)

(Grafici se crtaju na sličan način kao pod a) samo su drugačije vrijednosti inteziteta harmonika)

c) R,C=?

$$P_{iz}(3\omega_0) \le 0.01P_{ul}$$
 (3.16)

$$P_{iz}(3\omega_0) = 2|U_{ul3}|^2 = \frac{2E^2}{3^2\pi^2} \frac{1}{1 + (3\omega_0 RC)^2}$$
(3.17)

$$P_{ul} = \frac{1}{T} \int_{0}^{T} U_{ul}(t)^{2} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left(\frac{2E}{T}\right)^{2} t^{2} dt = \frac{4E^{2}}{T^{3}} \frac{t^{3}}{3} \Big|_{-T/2}^{T/2} = \frac{E^{2}}{3}$$
(3.18)

Iz (3.16) slijedi:

$$\frac{2E^{2}}{9\pi^{2}} \frac{1}{1+9(\omega_{0}RC)^{2}} \le 0.01 \frac{E^{2}}{3}$$
 (3.19)

$$RC \ge \frac{1}{3\omega_0} \sqrt{\frac{2}{0.3\pi^2} - 1} \tag{3.20}$$

### Harmonijska analiza aperiodičnih signala

1. Pronaći spektralnu gustinu amplitude i faza signala opisanog funkcijom f(t) koja glasi:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -\infty < t < -\tau/2, \\ E, & -\tau/2 \le t \le \tau/2, \\ 0, & \tau/2 < t < \infty \end{cases}$$
 (1.1)

Na osnovu dobijenog rezultata pronaći spektralnu gustinu amplituda ovog signala kada,

- a)  $\tau \rightarrow 0$  i  $E \tau = 1$ ,
- b)  $\tau \rightarrow \infty$

#### Rješenje:

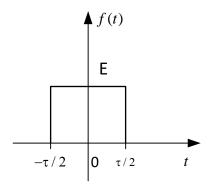
Furieova transformacija aperiodičnog signala f(t),  $[f(t)]=F(j\omega)$  opisuje signal u domenu učestanosti  $\omega$  i naziva se kompleksnim spektrom signala f(t). Spektar  $F(j\omega)$  je dat sledećim izrazom:

$$F(j\omega) = |F(j\omega)| e^{j\theta(\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$
 (1.2)

Apsolutna vrijednost kompleksnog spektra  $|F(j\omega)|$  naziva se spektralnom gustinom amplituda, a argument  $\theta(\omega)$  spektralnom gustinom faza.

Za dati signal f(t), koji je prikazan na sl.1, izraz (1.2) postaje,

$$F(j\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} Ee^{-j\omega t} dt = 2E \int_{0}^{\infty} \cos \omega t dt = E\tau \frac{\sin(\omega \tau/2)}{\omega \tau/2}$$
 (1.3)



Sl. 1 Pravougaoni impuls u koordinatnom početku

Spektralne gustine amplituda i faza ovog signala su:

$$|F(j\omega)| = E\tau \left| \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} \right|$$
 (1.4)

$$|F(j\omega)| = E\tau \left| \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} \right|$$

$$\theta(\omega) = \begin{cases} 0, & \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} > 0 \\ \pm \pi, & \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} < 0 \end{cases}$$
(1.4)

i prikazane su na Sl.2a) i 2b) respektivno.

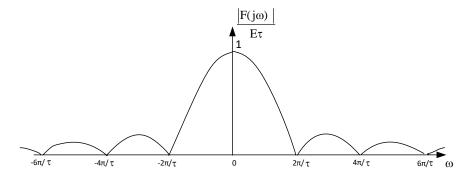
a) Kako je u ovom slučaju

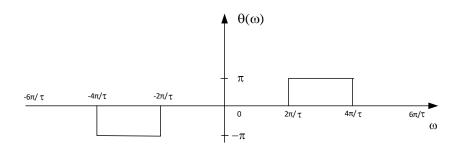
$$E\tau = 1 \tag{1.6}$$

to se, kada τ→0, pravougaoni impuls svodi na Dirakov impuls u koordinatnom početku,

$$\delta(t) = \lim_{\tau \to 0} f(t) \tag{1.7}$$

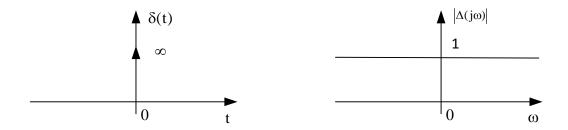
Koji je simbolički prikazan na Sl. 3.





Sl. 2 – Spektri jednog pravougaonog impulsa

a)Spektralna gustina amplituda, b) Spektralna gustina faza



Sl 3. Dirakov impuls u koordinatnom početku

Sl 4. Spektralna gustina amplituda

Dirakovog impulsa

Furijeova transformacija Dirakovog impulsa može se odrediti na osnovu (1.7) kao,

$$\Delta(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t}dt = 1$$
 (1.8)

Dakle, spektralna gustina amplituda Dirakovog impulsa je konstantna za sve učestanosti  $-\infty < \omega < \infty$ , a prikazana je na Sl 4. Inverzna Furijeova transformacija spektra  $F(j\omega)$  jednaka je signalu f(t);

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$
 (1.9)

tako da je, s obzirom na (1.8),

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega t d\omega$$
 (2.10)

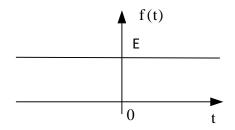
b) U ovom slučaju, pošto  $\tau \to \infty$  jedan pravougaoni impuls se transformiše u signal konstante vrijednosti E, kako je to prikazano na sl. 5. Furijeova transformacija ovog signala je,

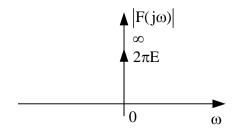
$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} Ee^{-j\omega t} dt = E \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega t dt$$
 (2.11)

Upoređivanjem (1.10) i (1.11) dobija se

$$F(j\omega) = 2\pi E\delta(\omega) \tag{2.12}$$

Dakle, spektralna gustina amplituda konstantnog signala je Dirakov impuls u koordinatnom početku, površine  $2\pi E$ , a prikazana je na sl. 6.





Sl. 5 – Konstantan signal vrijednosti E

Sl 6. – Spektralna gustina amplituda konstantnog signala

- 2. Ako je f(t)⇔F(jω), naći Furijeove trasformacije signala:
  - a)  $f(t-t_0)$ ;
  - b) f(at);
  - c) df(t)/dt;
  - d)  $f(t)e^{j\omega_0t}$ ;

#### Rješenje:

Spektar signala f(t) je po definiciji

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$
 (2.1)

a) Spektar signala f(t-t<sub>0</sub>),

$$F_1(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0) e^{-j\omega t} dt$$
 (2.2)

Zamjenom promjenljive t-t<sub>0</sub>=µ u gornjem integralu dobija se,

$$F_{1}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mu)e^{-j\mu\omega}e^{-j\omega t_{0}}d\mu = e^{-j\omega t_{0}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\mu)e^{-j\mu\omega}d\mu$$
 (2.3)

Poređenjem izraza (2.1) i (2.3) slijedi,

$$F_1(j\omega) = F(j\omega)e^{-j\omega t_0}$$
 (2.4)

Amplituski spektar signala f(t-t<sub>0</sub>) je,

$$|F_{i}(j\omega)| = |F(j\omega)| \tag{2.5}$$

dakle, isti kao amplituski spektar f(t).

Ako je fazni spektar signala f(t), $\theta(\omega)$ , tada je fazni spektar signala  $f(t-t_0)$  na osnovu izraza(2.4),

$$\theta_1(\omega) = \theta(\omega) - \omega t_0$$
 (2.6)

Dakle, transliranje signala u vremenu izaziva promjenu samo u faznom spektru signala.

b) Spektar signala f(at),

$$F_{1}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(a t)e^{-j\omega t} dt$$
 (2.7)

Uvođenjem smjene at=μ u gornji izraz, dobija se,

$$F_{1}(j\omega) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mu) e^{-j\omega\mu/a} d\mu = \frac{1}{a} F(j\frac{\omega}{a})$$
 (2.8)

Dakle, Furijeova transformaija  $F_1(j\omega)$  funkcije f(at) dobija se množenjem Furijeove trasformacije faktorom 1/a i zamjenom argumenta  $\omega$  argumentom  $\omega/a$ .

c) Spektar signala df(t)/dt,

$$F_{1}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-j\omega t} dt$$
 (2.9)

Uvođenjem smjene,

$$\begin{split} u &= e^{-j\omega t} & dV = f'(t)dt \\ du &= -j\omega e^{-j\omega t}dt & V = f(t) \end{split}$$

dobija se,

$$F_{1}(j\omega) = e^{-j\omega t} f(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} + j\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$
 (2.10)

Prvi dio gornjeg izrada je jednak nuli pa ostaje,

$$F_{1}(j\omega) = j\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$
 (2.11)

Upoređujući izraze (2.1) i (2.11), dobijamo,

$$F_{i}(j\omega) = j\omega F(j\omega)$$
 (2.12)

d) Spektar signala  $f(t)e^{j\omega_0 t}$ ,

$$F_{1}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega_{0}t}e^{-j\omega t}dt$$
 (2.13)

$$F_{1}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-jt(\omega-\omega_{0})}dt$$
 (2.14)

Ako uporedimo izraze (2.1) i (2.14), dobijamo,

$$F_{1}(j\omega) = F[j(\omega - \omega_{0})]$$
(2.15)

Ovakav proces nazivamo modulacija.

#### 3. Pronaći spektar signala datog izrazom:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{-at}, & t \ge 0; a > 0 \end{cases}$$
 (3.1)

Na osnovu dobijenog rezultata pronaći spektar singala opisanog Hevisajdovom funkcijom.

$$x_{H}(t) = \begin{cases} 1, & t \ge 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$
 (3.2)

#### Rješenje:

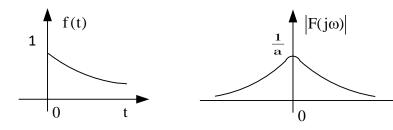
Signal f(t), prikazan je na Sl. 1. Spektar signala f(t) je,

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}dt = \frac{1}{a+j\omega}$$
(3.3)

Spektralna gustina amplituda signala f(t) je,

$$\left| \mathbf{F}(\mathbf{j}\omega) \right| = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{a}^2 + \omega^2}} \tag{3.4}$$

i prikazana je na Sl. 2.



Sl. 1 – Napon koji za t>0 opada

Sl. 2. – Spektar signala sa Sl. 1

eksponencijalno sa vremenom

Hevisajdova (jedinična, odskočna) funkcija može se predstaviti preko signala f(t) na sledeći način:

$$X_{H}(t) = \lim_{a \to 0} [f(t)]$$
(3.5)

ω

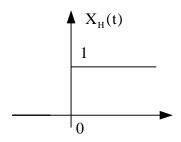
i prikazana je na Sl. 3.

Spektar ove funkcije je

$$X_{H}(t) = \lim_{\alpha \to 0} \left[ F(j\omega) \right] = \frac{1}{j\omega}$$
(3.6)

Na osnovu (3.6) vidi se da spektar  $X_H(j\omega)$  nije definisan za  $\omega = 0$ . Vrijednost  $X_H(j\omega)$  za  $\omega = 0$  može se pronaći na sledeći način,

Hevisajdova funkcija sa sl. 3 može se predstaviti sumom parne i neparne funkcije,  $f_p(t)$  i  $f_n(t)$ , koje su prikazane na Sl. 4a) i 4b), respektivno.



Sl. 3 – Hevisajdova funkcija



Sl. 4 – Hevisajdova funkcija se može predstaviti zbirom a)parne

b)neparne funkcije.

Parna funkcija  $f_p(t)$ , kao konstanta, definiše jednosmjernu komponentu u spektru Hevisajdove funkcije tj. komponentu na učestanosti  $\omega = 0$ . Na osnovu izraza  $\sin\left(\omega\frac{\tau}{2}\right) = 0$ , za  $\omega \neq 0$  slijedi da je:

$$F_{p}(j\omega) = \pi\delta(\omega) \tag{3.7}$$

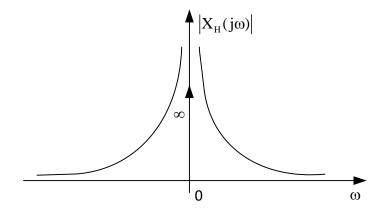
S druge strane, kako je  $f_n(t)$  neparna funkcija vremena to je njena Furijeova transformacija za  $\omega = 0$ ,

$$F_{n}(0) = 0 (3.8)$$

Sada je, na osnovu prethodnih izraza,

$$X_{H}(j\omega) = \begin{cases} \pi\delta(\omega), & \omega = 0\\ \frac{1}{j\omega}, & \omega \neq 0 \end{cases}$$
(3.9)

Dakle, spektar Hevisajdove funkcije sadrži Dirakov impuls u koordinatnom početku i opada po hiperboličnom zakonu za  $\omega \neq 0$ . Spektralna gustina amplituda  $\left|X_H(j\omega)\right|$  prikazana je na sl. 5.



Sl. 5. Spektralna gustina amplituda Hevisajdove funkcije.

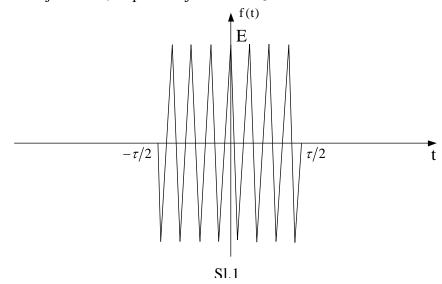
4. Pronaći spektar signala f(t) definisanog na sledeći način:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -\infty < t < -\tau/2 \\ E\cos\omega_0 t, & -\tau/2 < t < \tau/2 \\ 0, & \tau/2 < t < \infty \end{cases}$$

Naći spektralnu gustinu amplituda ovog signala kada je:  $a)\omega_0>>2\pi/\tau; b)$   $\tau\to\infty.$ 

#### Rješenje:

Signal f(t), prikazan je na Sl.1, za proizvoljan odnos  $\omega_0$  i  $2\pi/\tau$ .



Dati signal može se napisati u obliku,

$$f(t) = f_{\tau}(t)\cos\omega_0 t \tag{4.1}$$

Gdje je  $f_{\tau}(t)$  pravougaoni impuls trajanja  $\tau$  i amplitude E. Furijeova transformacija signala f(t) je,

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\tau}(t)\cos\omega_{0}te^{-j\omega t}dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f_{\tau}(t)\left[e^{-j(\omega-\omega_{0})t} + e^{-j(\omega+\omega_{0})t}\right]dt$$
(4.2)

Ako sa  $F_{\tau}(j\omega)$  označimo Furijeovu transformaciju signala  $f_{\tau}(t)$ , tada izraz (4.2) glasi:

$$F(j\omega) = \frac{1}{2} F_{\tau} [j(\omega - \omega_0)] + \frac{1}{2} F_{\tau} [j(\omega + \omega_0)]$$
(4.3)

Kako je Furijeova transformacija implulsa  $f_{\tau}(t)$ ,

$$F_{\tau}(j\omega) = E\tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} \tag{4.4}$$

to je,

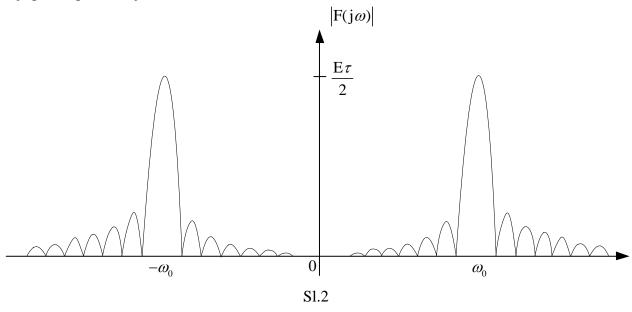
$$F(j\omega) = \frac{E\tau}{2} \left\{ \frac{\sin\left[(\omega - \omega_0)\tau/2\right]}{(\omega - \omega_0)\tau/2} + \frac{\sin\left[(\omega + \omega_0)\tau/2\right]}{(\omega + \omega_0)\tau/2} \right\}$$
(4.5)

Na osnovu izraza (4.5) mogu se pronaći spektri signala f(t), za slučajeve a) i b). a)Iz osobina spektra jednog impulsa i uslova  $\omega_0 >> 2\pi/\tau$ , proizilazi da se može prilibližno pisati,

$$F(j\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2} \operatorname{Er} \frac{\sin\left[(\omega + \omega_0)\tau/2\right]}{(\omega + \omega_0)\tau/2}, \omega < 0\\ \frac{1}{2} \operatorname{Er} \frac{\sin\left[(\omega - \omega_0)\tau/2\right]}{(\omega - \omega_0)\tau/2}, \omega > 0 \end{cases}$$

$$(4.6)$$

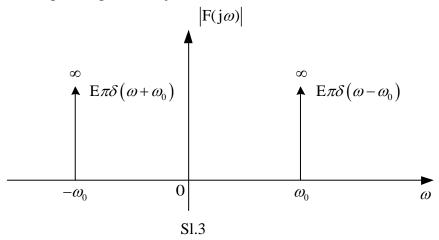
Ovaj spektar prikazan je na Sl.2.



c) Kada  $\tau \rightarrow \infty$  signal f(t) je jedna kosinusoida u opsegu  $-\infty < t < \infty$ . Korišćenjem izraza (4.5) i izraza za Furijeovu transformaciju konstante dobija se,

$$F(j\omega) = E\pi\delta(\omega - \omega_0) + E\pi\delta(\omega + \omega_0)$$
(4.7)

dakle, spektar je predstavljen sa dva Dirakova impulsa na učestanostima  $\omega_0$  i  $-\omega_0$ , površine  $E\pi$ . Spektralna gustina amplituda prikazana je na Sl.3.



**Dokaz teoreme o konvoluciji u frekvencijskom domenu:** Ako je  $F_1(j\omega)$  spektar signala  $f_1(t)$ , a  $F_2(j\omega)$  spektar signala  $f_2(t)$ , dokazati da je spektar signala  $f(t) = f_1(t)f_2(t)$  dat izrazom

$$\mathcal{F}[f_1(t) \cdot f_2(t)] = F(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(j\nu) F_2[j(\omega - \nu)] d\nu$$
 (1)

#### Rješenje:

Spektar  $F(j\omega)$  signala f(t) je:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t)e^{-j\omega t}dt$$
 (2)

U ovom izrazu funkcija  $f_1(t)$  se može predstaviti inverznom Furijeovom transformacijom spektra  $F_1(j\omega)$ ,

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(j\omega) e^{j\omega t} d\omega, \qquad (3)$$

$$F(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} F_1(j\nu) e^{j\nu t} d\nu \right] f_2(t) e^{-j\omega t} dt$$
 (4)

Kada se u izrazu (3) promijeni redosled integracije dobija se:

$$F(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(j\nu) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) e^{-j(\omega-\nu)t} dt \right] d\nu$$
 (5)

Izraz u uglastoj zagradi je po definiciji

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) e^{-j(\omega - v)t} dt = F_2[j(\omega - v)]$$
 (6)

tako se zamjenom (6) u (5) dobija

$$F(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(j\nu) F_2[j(\omega - \nu)] d\nu$$
 (7)

ono što je trebalo dokazati.

5. Ako spektar signala f(t) zauzima opseg učestanosti od  $-f_m$  do  $f_m$ , odrediti opseg učestanosti koji zauzima spektar signala  $f^2(t)$ .

#### Rješenje:

Spektar signala f<sup>2</sup>(t) može se odrediti primjenom teoreme o konvoluciji, koja glasi:

$$F(j\omega) = \mathcal{F}[f^{2}(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)F[j(\omega - \nu)]d\nu$$
 (5.1)

Kako spektar f(jv) zauzima opseg učestanosti  $|v| \le \omega_m$ , to je,

$$F(j\nu) = \begin{cases} F(j\nu), & \left|\nu\right| \le \omega_{m} \\ 0, & \left|\nu\right| > \omega_{m} \end{cases} \quad i \quad F[j(\omega - \nu)] = \begin{cases} F[j(\omega - \nu)], & \left|\omega - \nu\right| \le \omega_{m} \\ 0, & \left|\omega - \nu\right| > \omega_{m} \end{cases}$$

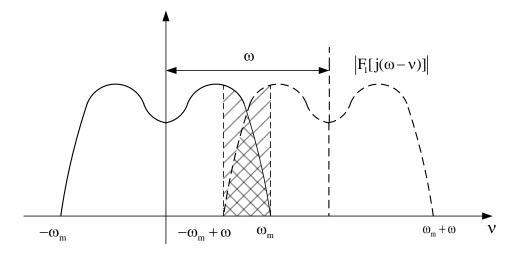
Za pretpostavljeni oblik spektra  $F(j\nu)$ , kao na Sl.1 (puna linija), na istoj slici je nacrtan i spektar  $F[j(\omega-\nu)]$  (isprekidana linija), za  $\omega>0$ .

Sa slike se lako može ustanoviti u kom opsegu treba da se nalazi  $\omega$  pa da dođe do preklapanja djelova spektra  $F(j\omega)$  i  $F[j(\omega-\nu)]$ , odnosno da podintegralna funkcija u (5.1) ne bude uvijek jedanaka nuli. To će biti zadovoljeno ako je

$$\omega - \omega_{\rm m} \le \omega_{\rm m}$$
, za  $\omega > 0$  i  $\omega + \omega_{\rm m} \ge -\omega_{\rm m}$ , za  $\omega < 0$  (5.2)

Na osnovu (5.1) je,

$$F(j\omega) = \begin{cases} F(j\omega), & -2\omega_{m} \le \omega \le 2\omega_{m} \\ 0, & |\omega| > 2\omega_{m} \end{cases}$$
 (5.3)



Sl. 1 – Ilustracija relacije (1) za  $\omega > 0$ 

6. Signali g(t) i f(t) su ograničenog opsega,

$$G(j\omega) = \begin{cases} G(j\omega), \left|\omega\right| \leq \omega_{g} \\ 0, \left|\omega\right| > \omega_{g} \end{cases} \quad i \quad F(j\omega) = \begin{cases} F(j\omega), \left|\omega\right| \leq \omega_{f} \\ 0, \left|\omega\right| > \omega_{f} \end{cases}$$

Odrediti maksimalnu učestanost signala y(t)=g(t)f(t).

#### Rješenje:

Spektar signala y(t) se može naći primjenom teoreme o konvoluciji u domenu učestanosti:

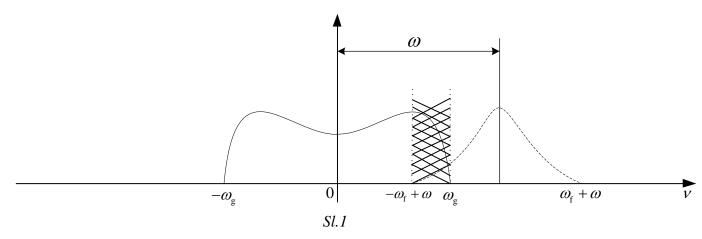
$$Y(j\omega) = \mathcal{F}[g(t)f(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(j\nu)F[j(\omega-\nu)]d\nu$$
 (6.1)

Gdje su  $G(j\omega)$  i  $F(j\omega)$  Furijeove transformacije signala g(t) i f(t), respektivno. Zbog ograničenosti opsega učestanosti signala g(t) i f(t), iz postavke zadatka, možemo pisati,

$$G(jv) = \begin{cases} G(jv), |v| \le \omega_g \\ 0, |v| > \omega_g \end{cases}$$
(6.2)

$$F[j(\omega-v)] = \begin{cases} F[j(\omega-v)], |\omega-v| \le \omega_f \\ 0, |\omega-v| > \omega_f \end{cases}$$
(6.3)

Riješićemo konvoluciju grafički za pretpostavljene oblike spektra  $F(j\omega)$ (isprekidana linija) i  $G(j\omega)$  (puna linija) predstavljene na Sl.1. ( Na slici je korišćen slučaj kada je  $\omega>0$  isto će važiti i za  $\omega<0$  jer svakako spektar realne funkcije mora biti parna funkcija učestanosti. Spektar  $F(j\omega)$  je rotiran u odnosu na ordinatu i transliran za  $\omega!$ )



Posmatrajući sliku zaključujemo opseg u kom mora da bude  $\omega$  a da rezultat konvolucije bude različit od nule,

$$\begin{array}{l} \omega\text{-}\omega_{\rm f} \leq \omega_{\rm g}, \omega > 0 \\ \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \omega\text{+}\omega_{\rm f} \geq -\omega_{\rm g}, \omega < 0 \end{array} \tag{6.4}$$

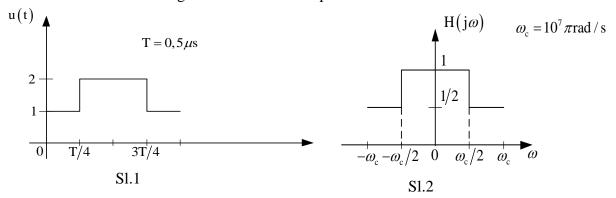
Na osnovu (6.4) opseg učestanosti signala y(t) je,

$$Y(j\omega) = \begin{cases} Y(j\omega), |\omega| \le \omega_f + \omega_g \\ 0, |\omega| > \omega_f + \omega_g \end{cases}$$
(6.5)

Slijedi da je maksimalna učestanost signala y(t) je  $\,\omega_{\rm f}^{} + \!\omega_{\rm g}^{}\,$ .

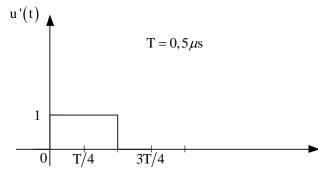
## Prenos signala kroz linearne sisteme

- 1. Na slici 1 je prikazan periodičan signal u(t) na intervalu jedne periode.
  - a) Odrediti i nacrtati amplitudski spektar signala u(t).
  - b) Signal u(t) se dovodi na ulaz sklopa čija je funkcija prenosa prikazana na slici 2. Odrediti vremenski oblika signala na izlazu iz sklopa.



#### Rješenje:

a) Umjesto signala iz postavke analizirajmo sledeći signal



Signal u(t) možemo predstaviti preko u'(t) na sledeci način:

$$u(t) = u'\left(t - \frac{T}{4}\right) + 1V \tag{1.1}$$

$$U_{n}' = \frac{1}{T} \int_{0}^{T} u'(t) e^{-jn\omega_{0}t} dt = \frac{1}{T} \left( \int_{0}^{T/2} e^{-jn\omega_{0}t} dt \right) = -\frac{1}{Tjn\omega_{0}} \left( e^{-jn\omega_{0}t} \Big|_{0}^{T/2} \right)$$

$$= -\frac{1}{Tjn\omega_{0}} \left( e^{-jn\omega_{0}\frac{T}{2}} - 1 \right) = e^{-jn\omega_{0}\frac{T}{4}} \left( e^{jn\omega_{0}\frac{T}{4}} - e^{-jn\omega_{0}\frac{T}{4}} \right) \frac{1}{Tjn\omega_{0}} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\frac{n\omega_{0}T}{4}\right)}{\frac{n\omega_{0}T}{4}} e^{-jn\omega_{0}\frac{T}{4}}$$

$$U_0' = U_n'(n \to 0) = \frac{1}{2} \tag{1.3}$$

Anvelopa signala je:

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{2} \left| \frac{\sin\left(\omega \frac{T}{4}\right)}{\omega \frac{T}{4}} \right|, \quad \alpha(\omega) = 0 \iff \omega \frac{T}{4} = k\pi \implies \omega = 2\omega_0 k, \ k = \pm 1, \pm 2, \dots$$
 (1.4)

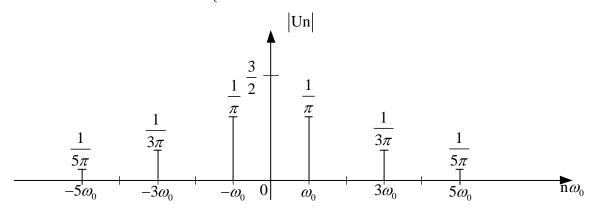
Ako sada uzmemo u obzir (1.1) dobijamo amplituski spektar originalnog signala:

$$U_{n} = \begin{cases} \frac{3}{2}, & n=0\\ \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\frac{n\omega_{0}T}{4}\right)}{\frac{n\omega_{0}T}{4}} e^{-jn\omega_{0}\frac{T}{4}}, & n \neq 0 \end{cases}$$

$$(1.5)$$

Daljim sređivanjem dobijamo:

$$U_{n} = \begin{cases} \frac{3}{2}, & n=0\\ \frac{1}{|n\pi|}, & n=2k+1, k=\pm 1, \pm 2,...\\ 0, & n=2k, k=\pm 1, \pm 2,... \end{cases}$$
 (1.6)



b) Učestanosti prva dva harmonik su:

$$f_0 = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.5 \cdot 10^{-6}} = 2 \cdot 10^6 \text{Hz}$$
 (1.7)

$$3f_0 = 6MHz \tag{1.8}$$

Ako uzmemo u obzir granične učestanosti filtra,

$$f_{c} = \frac{\omega_{c}}{2\pi} = 5MHz \tag{1.9}$$

$$\frac{f_c}{2} = \frac{\omega_c}{4\pi} = 2,5 \text{MHz} \tag{1.10}$$

Vidimo da će kroz filtar proči jednosmjerna komponenta signala kao i prvi harminik jer su ostali harmonici na većim učestanostima od f<sub>c</sub>.

Kako signal u(t) možemo zapisati:

$$u(t) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin\left(\frac{n\omega_0 T}{4}\right)}{\frac{n\omega_0 T}{4}} \cos\left(n\omega_0 t + \theta_n\right) \right|$$
(1.11)

Na izlazu iz filtra imamo:

$$u_{f}(t) = \frac{3}{2} + \left| \frac{\sin\left(\frac{\omega_{0}T}{4}\right)}{\frac{\omega_{0}T}{4}} \cos\left(\omega_{0}t + \theta\right) \right|$$
(1.12)

- 2. Pronaći odziv idealnog filtra propusniga opsega učestanosti na pobudu u vidu
  - a) Dirakovog impulsa
  - b) Hevisajdove funkcije,

pod uslovom da između graničnih učestanosti  $\omega_1$  i  $\omega_2$  i srednje učestanosti  $\omega_0$  propusnog opsega važi relacija,

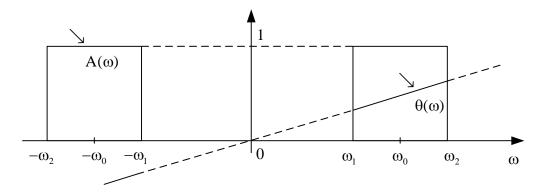
$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega_0 > \omega_2 - \omega_1 \tag{1}$$

Rješenje:

Funkcija prenosa idealnog filtra propusnika opsega je:

$$H(j\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_0}, & \omega_1 \le |\omega| \le \omega_2 \\ 0, & \text{za ostale vrijednosti } \omega \end{cases}$$
 (2)

Amplitudska karakteristika  $A(\omega)$  i karakteristika faznog kašnjenja  $\theta(\omega)$  prikazane su na Sl. 1. Kada se na ulaz ovog filtra dovede signal x(t), na izlazu će se dobiti signal,



Sl. 1 – Amplitudska karakteristika  $A(\omega)$  i karakteristika faznog kašnjenja  $\theta(\omega)$  idealnog filtra propusnika opsega učestanosti.

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega)X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_2}^{-\omega_1} X(j\omega)e^{j\omega(t-t_0)}d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} X(j\omega)e^{j\omega(t-t_0)}d\omega$$
(3)

Gdje je  $X(j\omega) = \mathcal{F}[x(t)]$ .

a) Kada je ulazni signal Dirakov impuls

$$x(t) = \delta(t) \tag{4}$$

tada je,

$$X(j\omega) = \Delta(\omega) = 1 \tag{5}$$

pa se na izlazu dobija signal,

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega)X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_{1}}^{\omega_{2}} \cos\omega(t - t_{0})d\omega = 2B \frac{\sin\pi B(t - t_{0})}{\pi B(t - t_{0})} \cos\omega_{0}(t - t_{0})$$
(6)

gdje je

$$B=f_2-f_1 \tag{7}$$

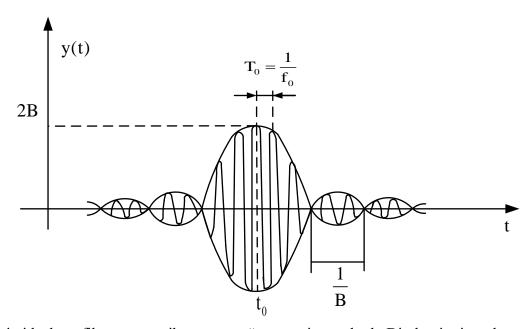
Na Sl. 2 je prikazan signal y(t).

b) Kada je pobuda u vidu Hevisajdove funkcije,

$$x(t) = x_{H}(t) \tag{8}$$

tada je,

$$X(j\omega) = X_{H}(j\omega) = \begin{cases} \pi\delta(\omega), & \omega = 0\\ \frac{1}{j\omega}, & \omega \neq 0 \end{cases}$$
(9)



Sl. 2 – Odziv idealnog filtra propusnika opsega učestanosti na pobudu Dirakovim impulsom

Tako da je signal na izlazu filtra,

$$y(t) = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{\sin[\omega(t - t_0)]}{\omega} d\omega$$
 (10)

Kako je

$$\omega_2 - \omega_1 \ll \omega_0 \tag{11}$$

Može se smatrati da se faktor  $\frac{1}{\omega}$  malo mijenja u propusnom opsegu filtra. Ako se usvoji da je njegova vrijednost  $\frac{1}{\omega_0}$  tada se (10) može približno pisati kao:

$$y(t) = \frac{1}{\pi \omega_0} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{\sin[\omega(t - t_0)]}{\omega} d\omega = \frac{2B}{\omega_0} \frac{\sin \pi B(t - t_0)}{\pi B(t - t_0)} \cos\left[\omega_0(t - t_0) - \frac{\pi}{2}\right]$$
(12)

Poređenjem (6) i (12) zaključuje se da se odzivi razlikuju samo u faktoru  $\frac{1}{\omega_0}$  u amplitude i za

$$-\frac{\pi}{2}$$
u fazi.

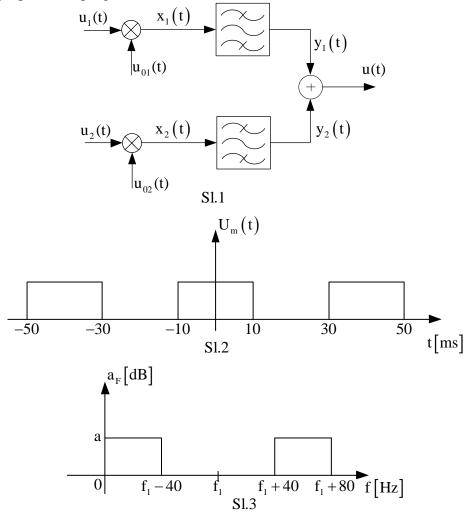
Dakle, kada je propusni opseg filtra mali u odnosu na centralnu učestanost  $\omega_0$  odzivi filtara propusnika opsega učestanosti na pobudu Dirakovim impulsom i Hevisajdovom funkcijom su istog vremenskog oblika.

# Amplitudske modulacije

1. Na slici 1 je prikazana blok šema urađeaja koji omogućava istovremeni prenos dva telegrafska signala  $u_1(t)$  i  $u_2(t)$ . Neka oba signala imaju isti vremenski oblik kao periodični signal  $u_m(t)$  prikazan na slici 2. Učestanosti  $f_1$  i  $f_2$  nosilaca  $u_{01}(t)=U_0\cos\omega_1 t$  i  $u_{02}(t)=U_0\cos\omega_2 t$  tako su izabrane da je  $f_2=f_1+120$ Hz.

Za dobar prenos telegrafskog sinala jednim kanalom dovoljno je prenijeti komponente iz opsega širine 80Hz oko učestanosti nosioca. Da bi se to postiglo, filtar propusnika opsega u prvom kanalu ima karakteristiku slabljenja kao na slici 3. Karakteristika slabljenja filtra u drugom kanalu ima isti oblik, samo je pomjerena za 120Hz naviše.

Zbog konačnog slabljenja filtra u nepropusnom opsegu signala u(t) sadrži i neželjene produkte modulacije, od kojih neki iz jednog kanala padaju propusni opseg drugog kanala. Ako se zahtijeva da logaritamski odnos ukupne srednje snage signala i srednje snage parazitnih komponenti u jednom kanalu iznosi 40dB, izračunati koliko mora da iznosi slabljenje filta (a[dB]) u nepropusnom opsegu?



Furijeov red periodičnog signala u<sub>m</sub>(t) ima oblik,

$$u_{m}(t) = \frac{U}{2} \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n \pi/2)}{n \pi/2} \cos n\omega_{0} t \right]$$
 (1.1)

Učestanost f<sub>0</sub> osnovnog harmonika može se odrediti iz podataka sa slike 2. Tako se dobija,

$$f_0 = \frac{1}{40 \text{ms}} = 25 \text{Hz} \tag{1.2}$$

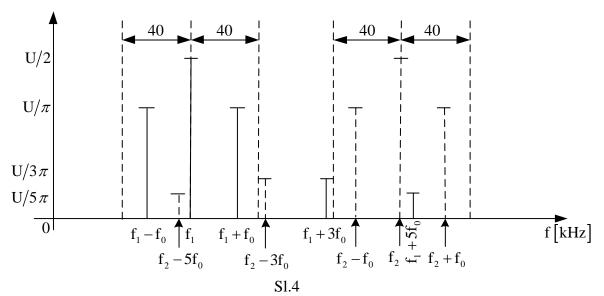
Signal na izlazu modulatora u prvom kanalu je,

$$x_{1} = u_{m}(t)\cos\omega_{1}t = \frac{U}{2}\cos\omega_{1}t + \frac{U}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi/2} \left[\cos(\omega_{1} + n\omega_{0})t + \cos(\omega_{1} - n\omega_{0})t\right]$$
(1.3)

a u drugom kanalu,

$$x_{2} = u_{m}(t)\cos\omega_{2}t = \frac{U}{2}\cos\omega_{2}t + \frac{U}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi/2} \left[\cos(\omega_{2} + n\omega_{0})t + \cos(\omega_{2} - n\omega_{0})t\right]$$
(1.4)

Na slici 4 nacrtani su djelovi linijskih spektara signala  $x_1(t)$  i  $x_2(t)$  koji se nalaze u opsegu učestanosti  $f_2$ -40Hz $\leq$ f $\leq$   $f_2$ +40Hz. Komponente signala  $x_1(t)$  ucrtane su punom, a komponente signala  $x_2(t)$  isprekidanom linijom.



Prema slici 4 i izrazu (1.4) korisni signal u višem kanalu može se napisati kao,

$$y_{2k}(t) = U \left[ \frac{1}{\pi} \cos(\omega_2 - \omega_0) t + \frac{1}{2} \cos(\omega_2 + \omega_0) t \right]$$
 (1.5)

Snaga ovog signala je,

$$P_{k} = \frac{U^{2}}{2R} \left( \frac{1}{\pi^{2}} + \frac{1}{2^{2}} + \frac{1}{\pi^{2}} \right) = 2,234 \frac{U^{2}}{R\pi^{2}}$$
 (1.6)

Prema slici 4 i izrazu (1.3) i karakteristici slabljenja filtra u nižem kanalu, parazitni signal u opsegu višeg kanala koji potiče od signala  $x_1(t)$  ima oblik,

$$y_{2p}(t) = \left| H \left[ j(\omega_1 + 5\omega_0) \right] \right| \frac{U}{5\pi} \cos(\omega_1 + 5\omega_0) t$$
 (1.7)

Gdje modul kompleksne funkcije prenosa filtra ima vrijednost

$$H[j(\omega_1 + 5\omega_0)] = 10^{-a/20}$$
 (1.8)

Srednja snaga ovog parazitnog signala iznosi,

$$P_{p} = \frac{10^{-a/20}}{50} \frac{U^{2}}{R\pi^{2}} \tag{1.9}$$

Prema tekstu zadatka, logaritamski odnos snage P<sub>k</sub> i P<sub>p</sub> treba da bude,

$$10\log\frac{P_{k}}{P_{n}} = 40dB \tag{1.10}$$

Tako se dobija

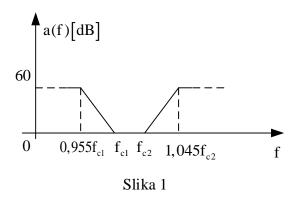
$$a + 10\log(111,7) = 40dB$$
 (1.11)

Odnosno, potrebno slabljenje filtra u nepropusnom opsegu je,

$$a = 19,5dB$$
 (1.12)

Do istog odnosa se dolazi i kada se ispituje odnos srednjih snaga korisnog i parazitnog signala u nižem kanalu, koji zauzima opseg učestanosti  $f_1$ -40Hz $\leq$ f $\leq$   $f_1$ +40Hz, što je i logično, s obzirom na simetričnost cijelog uređaja.

- 2. Na ulaz predajnika AM-1BO signala dovodi se govorni signal čiji spektar zauzima opseg učestanosti od 300 Hz do 3400 Hz. Spektar modulisanog signala na izlazu predajnika treba da zauzima opseg od 480,3 kHz do 483,4 kHz. Pri tome se zahtijeva da amplituda svake komponente u spektru potisnutog bočnog opsega bude za 60dB manja od odgovarajuće komponente iz korisnog bočnog opsega. Za dobijanje AM-1BO signala stoje na raspolaganju produktni modulatori i filtri propusnici opsega učestanosti, čije karakteristike slabljenja imaju oblik kao na slici 1.
  - a) Pokazati da se pomoću produktnog modulatora i jednog filtra ne mogu ispuniti postavljeni zahtjevi.
  - b) Pokazati da se postavljeni zahtjevi mogu ostvariti dvostrukom modulacijom pomoću dva produktna modulatora koji se napajaju nosiocima različitih učestanosti i na čijim izlazima se nalaze odgovarajući filtri.
  - c) Nacrtati blok šemu predajnika i označiti vrijednosti učestanosti nosioca, kao i granične učestanosti filtra.

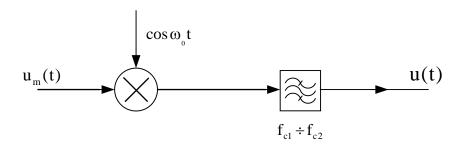


a) Blok šema predajnika AM-1BO signala koji sadrži jedan produktni modulator i filtar propusnik opsega učestanosti prikazana je na Sl. 2. Sledeća Sl. 3 ilustruje postupak dobijanja željenog spektra AM-1BO signala i to, kada se izdvaja gornji bočni opseg (Sl. 3.b)). Na toj slici učestanosti f<sub>1</sub> i f<sub>2</sub> predstavljaju granične učestanosti spektra govornog signala, a f<sub>0</sub> učestanost nosioca. Karakteristika slabljenja filtra nacrtana je isprekidanom linijom. Prema Sl. 3 predajnik će emitovati signal iz višeg bočnog opsega sa dovoljno potisnutim nižim ako rastojanje između njih, 2 f<sub>1</sub> nije manje od intervala 0,045f<sub>c1</sub> potrebnog da slabljenje filtra poraste za 60 dB, tj.

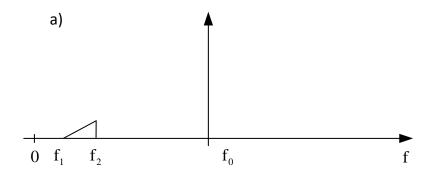
$$0.045f_{c1} \le 2f_1 \tag{2.1}$$

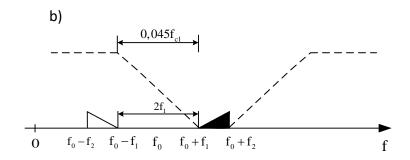
Za  $f_1 = 300$ Hz,  $f_{c1} = 480,3$  kHz i  $f_{c2} = 483,4$  kHz uslov (2.1) nije ispunjen jer je,

$$0.045f_{c1}=21.6kHz i 2f_{1}=0.6kHz$$
 (2.2)



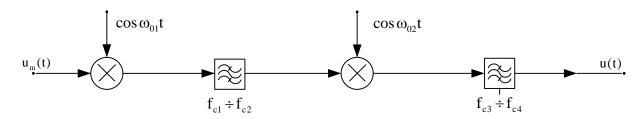
Sl. 2 – Predajnik AM-1BO signala sa jednim produktnim modulatorom i filtrom propusnikom opsega učestanost.





# Sl. 3 – Ilustracija postupka dobijanja AM-1BO signala izdvajanjem gornjeg bočnog opsega

a) Blok šema predajnika sa dva produktna modulatora i dva filtra propusnika opsega učestanosti prikazana je na sl 4. Na Sl. 5 ilustrovan je postupak dobijanja željenog spektra AM-1BO signala sa dva uzastopna izdvajanja gornjeg bočnog opsega.



Sl. 4 – Predajnik AM-1BO signala sa dva produktna modulatora i dva filtra propusnika opega učestanosti.

Prema Sl. 5 oba filtra dovoljno će potisnuti neželjene bočne opsege ako učestanosti nosilaca  $f_{01}$  i  $f_{02}$  budu ispunjavale uslove,

$$0.045(f_{01}+f_{1}) \le 2f_{1} \quad i \quad 0.045(f_{02}+f_{01}+f_{1}) \le 2(f_{01}+f_{1})$$
(2.3)

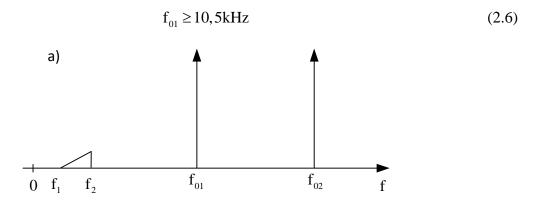
Imajući u vidu i treći uslov o najnižoj učestanosti signala u spektru AM-1BO signala,

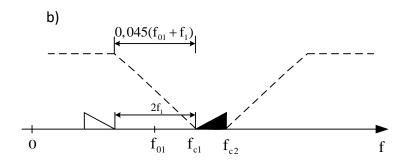
$$f_{02} + f_{01} + f_1 = 480,3 \text{kHz}$$
 (2.4)

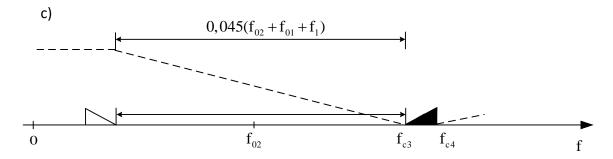
dobija se,

$$f_{01} + f_1 \ge \frac{0.045 \cdot 480.3}{2} \text{ kHz} = 10.8 \text{ kHz}$$
 (2.5)

odnosno,







Sl. 5 – Ilustracija postupka dobijanja AM-1BO signala u predajniku sa Sl. 4.

Iz uslova (2.3) dobija se,

$$f_{01} \le \frac{2f_1}{0.045} - f_1 = 13kHz. \tag{2.7}$$

Na osnovu (2.6) i (2.7) može se usvojiti,

$$f_{01} = 12kHz$$
 (2.8)

Granične učestanosti prvog filtra treba da budu,

$$f_{c1} = f_{01} + f_1 = 12,3kHz \quad i \quad f_{c1} = f_{c1} + (f_2 - f_1) = 15,4kHz$$
 (2.9)

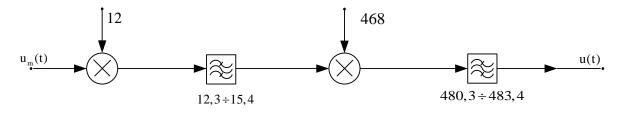
Prema tekstu zadatka granične učestanosti drugog filtra su,

$$f_{c3} = 480,3kHz \text{ i } f_{c4} = 483,4kHz$$
 (2.10)

a iz jednačina (2.4) i (2.5) može se odrediti vrijednost učestanosti nosioca u drugom modulatoru:

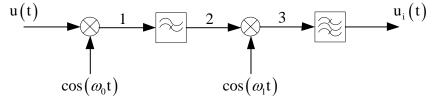
$$f_{02} = 468 \text{kHz}$$
 (2.11)

b) Na Sl. 6 prikazana je blok šema predajnika sa naznačenim učestanostima nosilaca i graničnim učestanostima filtara izraženim u kHz.

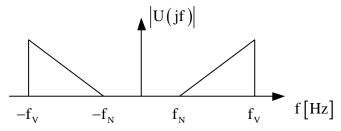


Sl. 6 – Predajnik AM-1BO signala sa Sl. 4 sa tačno naznačemim vrijednostima učestanosti.

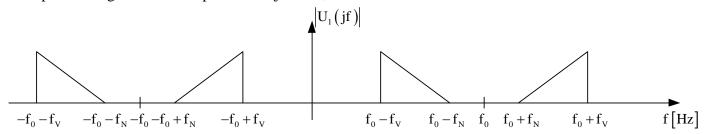
- 3. Na slici je prikazana blok šema uređaja za dobijanje AM-1BO signala. Svi sklopovi u šemi su idealni. Spektar signala u(t) ograničen je i nalazi se u opsegu od  $f_N$ =0,3 kHz do  $f_V$ =3,4 kHz.
- a) Nacrtati spektar signala na izlazu iz svih sklopova u šemi,
- b) Izračunati minimalnu vrijednost učestanosti f<sub>0</sub>,
- c) Koliko iznosi granična učestanost filtra propusnika visokih učestanosti kada f<sub>0</sub> ima vrijednost određenu pod b),
- d) Spektar signala na izlazu se nalazi u opsegu učestanosti od 12,3 kHz do 15,4 kHz. Izračunati vrijednost učestanosti f<sub>1</sub>, ako je signal na izlazu iz gornjeg bočnog opsega, odnosno signal iz donjeg bočnog opsega, a f<sub>0</sub> ima vrijednost određenu pod b).



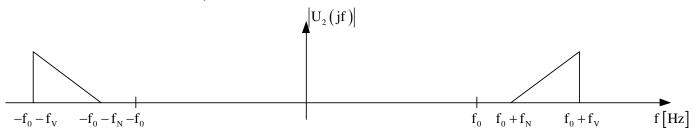
a) Za signal u(t) pretpostavićemo amplitudski spektar,



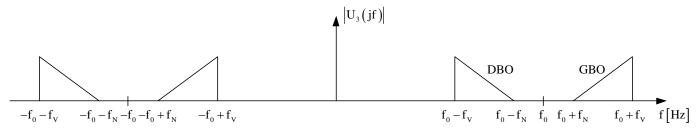
Nakon produktnog modulatora spektar dobija oblik,



Da bi na izlazu uređaja dobili AM-1BO dovoljno je kroz filtar propusnika visokih učestanosti propustiti samo GBO (gornji bočni opseg). Pošto su sklopovi idealni ne dolazi do izobličenja, pa na izlazu iz fitra u tački 2 imamo,

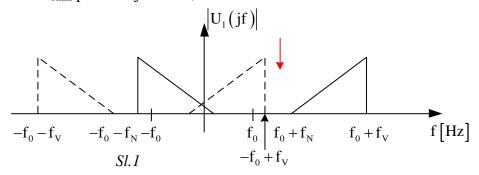


Nakon izvršene translacije produktnim modulatorom, u tački 3 imamo,



Nakon filtra propusnika opsega učestanosti biće propušten GBO ili DBO (donji bočni opseg).

b) Da bi našli f<sub>0min</sub> posmatrajmo sl. 1,



U toku translacije za učestanost  $f_0$  ne smije da dodje preklapanja spektra tj GBO i DBO. Da se to ne bi desilo mora biti zadovoljeno

$$f_0 + f_N \ge -f_0 + f_V \tag{3.1}$$

$$f_0 \ge \frac{f_V - f_N}{2} \tag{3.2}$$

Slijedi da je f<sub>0min</sub>

$$f_{0min} = 1.55kHz \tag{3.3}$$

- c) Ako je  $f_0 = f_{0min}$  onda se gornji bočni opseg signala u tački 1 nalazi u opsegu  $f_0 + f_N \div f_0 + f_V$ . Pošto je filter idealan njegova granična učestanost treba biti  $f_0 + f_N = 1.58$ kHz.
- d) Pošto u zadatku nije rečeno da li se prenosi gornji ili donji bočni opseg naći ćemo f<sub>1</sub> u oba slučaja. Ako propuštamo GBO tada važi (posmatraj spektar U<sub>3</sub>(jf)),

$$f_1 + f_0 + f_N = 12,3 \text{ kHz}$$
 (3.4)

slijedi da je f<sub>1</sub>

$$f_1 = 10,45 \text{kHz}$$
 (3.5)

U slučaju prenosa DBO,

$$f_1 - f_0 - f_V = 12,3 \text{ kHz}$$
 (3.6)

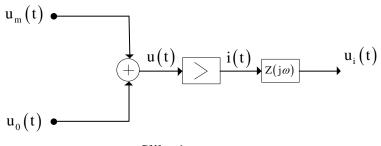
$$f_1 = 17,25 \text{kHz}$$
 (3.7)

4. Signali  $u_m(t)=U_m cos\omega mt$  i  $u_0(t)=U_0 cos\omega_0 t$  predstavljaju modulišući signal i nosilac. Njihove amplitude imaju vrijednosti  $U_m=2V$  i  $U_0=5V$ , a učestanosti  $f_m=1kHz$  i  $f_0=1MHz$ . Oba signala se dovode na ulaz nelinearnog pojačavača, kako je to prikazano na slici 1. Između struje na izlazu pojačavača i(t) i napona na njegovom ulazu, postoji relacija:

$$i(t) = a_1 u(t) + a_2 u_2(t),$$

u kojoj je  $a_1 = 2mA/V$  i  $a_2 = 0.1mA/V^2$ .

- a) Izračunati učestanosti svih prostoperiodičnih komponenti struje i(t),
- b) Pronaći stepen modulacije i nacrtati približno vremenski oblik onog dijela struje i(t), koji predstavlja amplitudski modulisan signal.



Slika 1

#### Rješenje:

Prema blok šemi na slici 1, napon na ulazu pojačavača,

$$u(t) = U_m \sin \omega_m t + U_0 \sin \omega_0 t \tag{4.1}$$

prouzrokovaće struju na izlazu pojačavača,

$$i(t) = a_1 \left[ U_m \sin \omega_m t + U_0 \sin \omega_0 t \right] + a_2 \left[ U_m \sin \omega_0 t + U_0 \sin \omega_0 t \right]^2$$

$$(4.2)$$

Posle sređivanja izraza (4.2) dobija se,

$$\begin{split} &i(t) = \frac{a_{2}}{2} \left( U_{m}^{2} + U_{0}^{2} \right) + a_{1} U_{m} sin\omega_{m} t - \frac{a_{2}}{2} U_{m}^{2} cos2\omega_{m} t + a_{2} U_{0} U_{m} cos(\omega_{0} - \omega_{0}) t + \\ &+ a_{1} U_{0} sin\omega_{0} t - a_{2} U_{m} U_{0} cos(\omega_{0} + \omega_{m}) t - \frac{a_{2}}{2} U_{0}^{2} cos2\omega_{0} t \end{split} \tag{4.3}$$

a) Na osnovu podataka iz teskta zadatka izračunate su amplitude i učestanosti komponenata u izrazu(1.3). Rezulatati su prikazani u Tabeli 1.

f	0	$f_{m}$	2f <sub>m</sub>	$f_0$ - $f_m$	$f_0$	$f_0+f_m$	$2f_0$
f[kHz]	0	1	2	999	1000	1001	2000
I[mA]	1,45	4	0,2	1	10	1	1,25

Tabela 1

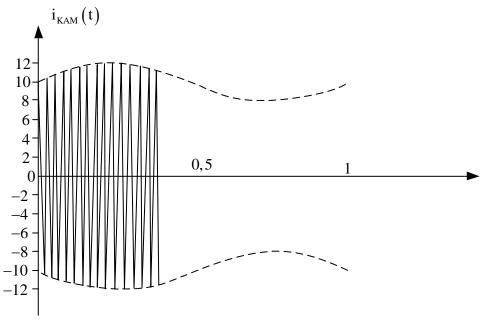
b) Komponente na učestanostima  $f_0$ - $f_m$ ,  $f_0$  i  $f_0$ + $f_m$  u izrazu (4.3) obrazuju konvencionalni amplitudski modulisani signal oblika,

$$\begin{split} &i_{\text{KAM}}\left(t\right) = &a_1 U_0 \text{sin}\omega_0 t + a_2 U_0 U_m \Big[\cos\left(\omega_0 - \omega_m\right) t - \cos\left(\omega_0 + \omega_m\right) t\Big] = \\ &= &a_1 U_0 \left(1 + 2\frac{a_2}{a_1} U_m \text{sin}\omega_m t\right) \text{sin}\omega_0 t \end{split} \tag{4.4}$$

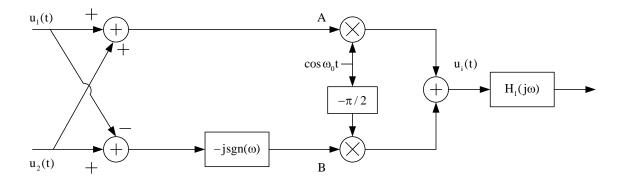
Stepen modulacije u ovom slučaju iznosi,

$$m = 2\frac{a_2}{a_1}U_m = 0,2 \tag{4.5}$$

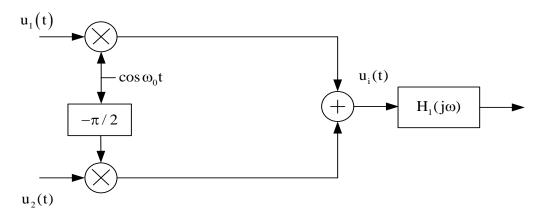
Vremenski oblik struje i<sub>KAM</sub>(t) prikazan je na slici 2 punom linijom, a anvelopa isprekidanom.



- 5. Na slici 7 prikazana je blok šema predajnika za prenos dva nezavisna signala  $u_1(t)$  i  $u_2(t)$  modulisan nosiocem. Spektar signala  $u_1(t)$  nalazi se u opsegu učestanosti od 0 do  $f_{m1}$ , a spektar signala  $u_2(t)$  zauzima opseg učestanosti od 0 do  $f_{m2}$ , pri čemu je  $f_{m2} = 3 \, f_{m1}$ .
  - a) Odrediti izraz za signal u<sub>i</sub>(t),kao i postupak modulacije. Koliki je potrebni propusni opseg sistema za prenos u ovom slučaju?
  - b) Ponoviti analizu iz tačke a) za predajnik sa slike 8.
  - c) Nacrtati blok šeme prijemnika za odgovarajuće predajnike.



Slika 7



Slika 8

a) Signal u tački A je opisan izrazom,

$$u_{A}(t) = u_{1}(t) + u_{2}(t)$$
 (5.1)

dok je signal u tački B,

$$u_{B}(t) = u_{2}(t) - u_{1}(t)$$
 (5.2)

Sklop između tačaka B i C, funkcije prenosa,

$$H(j\omega) = -j \operatorname{sgn}(\omega) \tag{5.3}$$

Vrši Hilbertovu transformaciju ulaznog signala. Signal na izlazu ovog sklopa je,

$$\mathbf{u}_{\mathrm{C}}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{u}_{\mathrm{B}}(\tau)}{t - \tau} d\tau = \hat{\mathbf{u}}_{\mathrm{B}}(t)$$
 (5.4)

Gdje  $\hat{u}_B(t)$  označava Hilbertovu transformaciju signala  $u_B(t)$ . Signal u tački C je opisan izrazom,

$$u_{c}(t) = \hat{u}_{2}(t) - \hat{u}_{1}(t)$$
 (5.5)

Signal u tački D je,

$$u_{D}(t) = u_{C}(t)\cos(\omega_{0}t - \pi/2) = \hat{u}_{2}(t)\sin(\omega_{0}t) - \hat{u}_{1}(t)\sin(\omega_{0}t)$$
 (5.6)

a u tački E je,

$$u_{E}(t) = u_{A}(t)\cos\omega_{0}t = u_{1}(t)\cos\omega_{0}t - u_{2}(t)\cos\omega_{0}t.$$
 (5.7)

Traženi signal u tački F je,

$$u_{F}(t) = u_{D}(t) + u_{F}(t) = u_{1}(t)\cos\omega_{0}t - \hat{u}_{1}(t)\sin\omega_{0}t + u_{2}(t)\cos\omega_{0}t + \hat{u}_{2}(t)\sin\omega_{0}t.$$
 (5.8)

Prva dva člana u izrazu (5.8) predstavljaju AM-1BO signal sa višim bočnim opsegom,

 $\boldsymbol{u}_{l,AM-lBO(t)}^{V},$ dok su preostala dva člana AM-1BO signal sa nižim bočnim opsegom,

 $u_{1,AM-1BO(t)}^{N}$ . Signal u tački F je dakle

$$u_{F}(t) = u_{1,AM-1BO(t)}^{V} + u_{1,AM-1BO(t)}^{N}$$
(5.9)

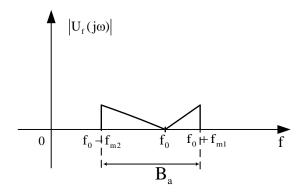
Postupak modulacije je AM-1BO, a spektar signala je prikazan na slici 9. Potrebni opseg sistema za prenos u ovom slučaju iznosi,

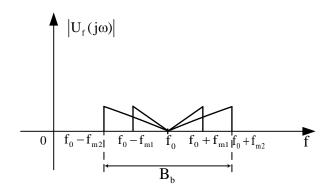
$$B_a = f_{m1} + f_{m2} = 4f_{m1} (5.10)$$

b) Za predajnik na Sl. 8, signal u tački F dat je izrazom,

$$u_{E}(t) = u_{1}(t)\cos\omega_{0}t + u_{2}(t)\sin\omega_{0}t$$
 (5.11)

Signal u<sub>G</sub>(t) predstavlja dva AM-2BO signala u kvadraturi. Spektar ovog signala je prikazan na slici 10.





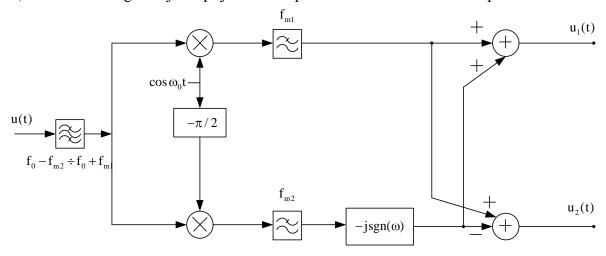
Sl. 9 – Spektar signala na izlazu iz predajnika prikazanog na Sl. 7

Sl. 10 – Spektar signala na izlazu iz predajnika prikazanog na Sl. 8

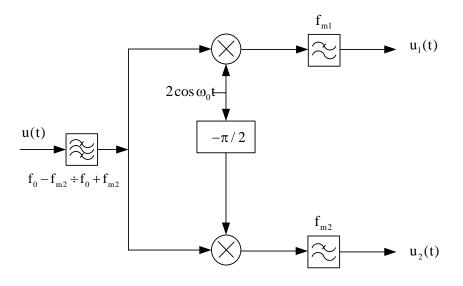
Opseg učestanosti koji zauzima ovaj signal iznosi,

$$B_b = 2f_{m2} = 6f_{m1} (5.12)$$

c) Blok šeme odgovarajućih prijemnika su prikazani na Sl. 11 i Sl. 12 respektivno.

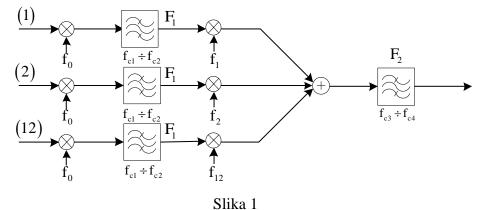


Sl. 11 – Blok šema prijemnika za predajnik sa slike 7



Sl. 12 – Blok šema prijemnika za predajnik sa slike 8

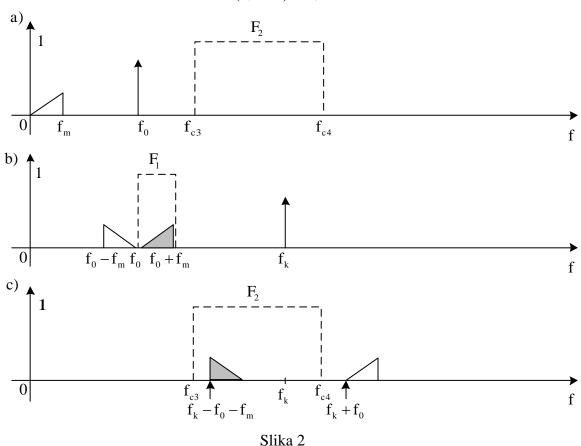
- 6. Od signala iz 12 telefonskih kanala obrazuje se multipleksni signal na principu frekvencijske raspodjele kanala. Blok šema uređaja u kome se obrazuje multipleksni signal prikazana je na slici 1. Svi produktni modulatori i filtri su idealni. Potrebno je da na izlazu uređaja kanali budu smješteni u opsegu učestanosti od f<sub>c3</sub>=60kHz do f<sub>c4</sub>=108kHz, pri čemu je spektar signala u svakom od njih u obrnutom položaju i zauzima opseg učestanosti širine 4kHz.
- a) Pod uslovom da se filtrima  $F_1$ , čiji je propusni opseg  $f_{c2}$   $f_{c1}$  = 4kHz izdvaja viši bočni opseg, pronaći:
  - 1. Minimalnu vrijednost učestanosti  $f_0$ , tako da se poslije druge modulacije jednim zajedničkim filtrom  $F_2$  mogu potisnuti neželjeni bočni opsezi iz svih kanala.
  - 2. Učestanosti nosilaca  $f_1$ ,  $f_2$ ,...,  $f_{12}$  kada je  $f_0$  tako izabrana da predstavlja najniži mogući harmonik učestanosti 4kHz.
  - 3. Granične učestanosti filtra  $F_1$  ( $f_{c2}$  i  $f_{c1}$ ).
- b) Ponoviti postupak iz tačke a) za slučaj da se filtrom F<sub>1</sub> izdvaja niži bočni opseg.



Na slici 2 je ilustrovan postupak formiranja spektra multipleksnog signala. Spektar govornog signala iz k-tog kanala i dva bočna opsega na izlazu iz prvog i drugog modulatora prikazani su punim linijama, dok su amplituske karakteristike filtara  $F_1$  i  $F_2$  nacrtane isprekidanim linijama. Oni bočni opsezi koji se koriste za formiranje multipleksnog signala su osenčeni.

a) Sa slike se vidi da za k=1 nastupa slučaj kada učestanosti nosilaca u produktnim modulatorima moraju da budu izabrane tako da se najniža učestanost donjeg bočnog opsega, posle druge modulacije, poklapa sa donjom graničnom učestanošću F<sub>2</sub>, tj.,

$$f_1 - (f_0 + f_m) = f_{c3} = 60 \text{kHz}$$
 (6.1)



Istovremeno, neželjeni, gornji bočni opseg ne smije da se nađe u opsegu multipleksnog signala, da ne bi došlo do preklapanja spektara signala. Kako je najkritičniji slučaj za k=1, to treba da je ispunjen uslov,

$$f_0 + f_1 \ge f_{04} = 108 \text{kHz} \tag{6.2}$$

1. Eliminacijom učestanosti  $f_1$  iz prethodnih relacija, dobija se

$$f_0 \ge 22kHz \tag{6.3}$$

2. Najniži harmonik učestanosti 4kHz koji zadovoljava uslov (6.3) je

$$f_0 = 24kHz \tag{6.4}$$

Iz jednačine (6.1) dobija se,

$$f_1 = f_0 + f_m + f_{c3} = 88kHz$$
 (6.5)

Prema tekstu zadatka i slici 2, učestanost drugog nosioca u k-tom kanalu izračunava se kao,

$$f_k = f_1 + (k-1)f_m, k=2,3,...,12,$$
 (6.6)

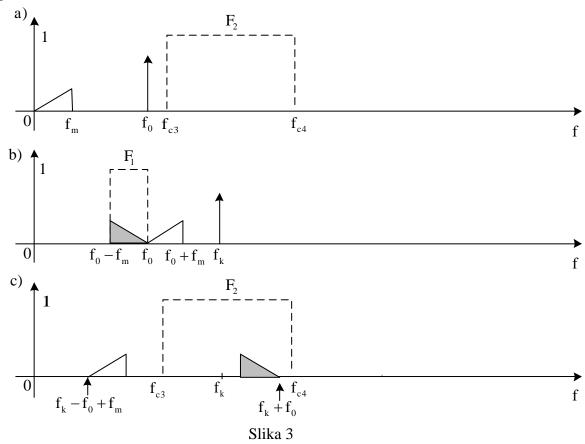
odakle se dobijaju vrijednosti,

$$f_2 = 92kHz, f_3 = 96kHz, ..., f_{12} = 132kHz$$
 (6.7)

3. Prema slici 2 granične učestanosti filtra F<sub>1</sub> su,

$$f_{c1} = f_0 = 24 \text{kHz}$$
  
 $f_{c2} = f_0 + f_m = 28 \text{kHz}$ 
(6.8)

a) Slika 3 ilustruje postupak formiranja multipleksnog signala kada se filtrom  $F_1$ , posle prvog produktnog modulatora izdvaja DBO. Pri tome je koriščen isti način označavanja spektara signala i karakteristika filtara kao na slici 2.



Prema slici 3 za k=12 učestanosti nosilaca u produktnim modulatorima moraju da budu tako izabrane da se najviša učestanost u GBO, posle druge modulacije, poklapa sa gornjom hraničnom učestanošću f<sub>c4</sub> filtra F<sub>2</sub>, odnosno,

$$f_{12} + f_0 = f_{c4} = 108kHz \tag{6.9}$$

Istovremeno, da ne bi došlo do preklapanja spektara multipleksnog signala i neželjenog bočnog opsega, najviša učestanost donjeg bočnog opsega za k=12 ne smije biti visa od donje granične učestanosti f<sub>c3</sub> filtra F<sub>2</sub>, tj. treba da je,

$$f_{12} - f_0 + f_m \le f_{c3} = 60 \text{kHz}$$
 (6.10)

1. Eliminacijom  $f_{12}$  iz relacija (6.9) i (6.10) dobija se,

$$f_0 \ge 26kHz \tag{6.11}$$

2. Najniži harmonic učestanosti 4kHz koji zadovoljava uslov (6.11) je,

$$f_0 = 28kHz \tag{6.12}$$

Iz jednačine (6.9) se dobija,

$$f_{12} = f_{c4} - f_0 = 80 \text{kHz} \tag{6.13}$$

Na osnovu teksta zadatka i slike 3 učestanost drugog nosioca u k-tom kanalu izračunava se prema obrascu,

$$f_k = f_{12} - (12 - k) f_m, k=11,...,1$$
 (6.14)

odakle se dobijaju vrijednosti,

$$f_{11} = 76kHz,$$
  
 $f_{10} = 72kHz,$   
...
$$f_{1} = 36kHz$$
(6.15)

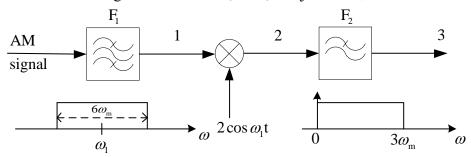
3. Prema slici 3 granične učestanosti filtra F<sub>1</sub> u ovom slučaju iznose,

$$f_{c1} = f_0 - f_m = 24 \text{kHz}$$

$$i \qquad (6.16)$$

$$f_{c2} = f_0 = 28 \text{kHz}$$

7. Amplitudski modulisan signal  $(\cos \omega_m t + a\cos 2\omega_m t)\cos \omega_c t$  doveden je na ulaz prijemnika prikazanog na slici 10. Naći signale u tačkama 1, 2 i 3, ako je  $\omega_1 = \omega_c - 3\omega_m$ .

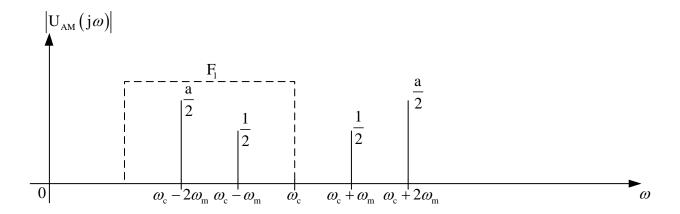


# Rješenje:

Signal

$$u_{AM}(t) = (\cos\omega_{m}t + \cos2\omega_{m}t)\cos\omega_{c}t$$
 (7.1)

prolazi kroz filtar propusnika učestanosti čija je frekvencijski opseg  $6\omega_m$ .Prvo ćemo predstaviti amplituski spektar ovakvog signala:



Ako je  $\omega_1 = \omega_c - 3\omega_m$ , tada je  $\omega_{n=} \omega_1 - 3\omega_m = \omega_c - 6\omega_m$  i  $\omega_v = \omega_1 + 3\omega_m = \omega_c$ , gdje su  $\omega_n$  i  $\omega_v$  granične učestanosti filtra  $F_1$ .

Očigledno je da će samo DBO ovog signala proći kroz filtar pa nam je signalu tački 1,

$$u_1(t) = \frac{1}{2}\cos(\omega_c - \omega_m)t + \frac{a}{2}\cos(\omega_c - 2\omega_m)t$$
 (7.2)

Nakon produktnog modulatora,

$$u_{2}(t) = \cos(\omega_{c} - \omega_{m}) t \cos(\omega_{t} + \cos(\omega_{c} - 2\omega_{m}) t \cos(\omega_{t}) t$$
(7.3)

Ako uzmemo u obzir  $\omega_1 = \omega_c - 3\omega_m i$  sredimo prethodni izraz dobijamo,

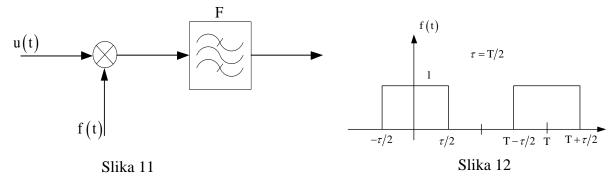
$$u_{2}(t) = \frac{1}{2}\cos(2\omega_{m})t + \frac{1}{2}\cos(2\omega_{c}-4\omega_{m})t + \frac{a}{2}\cos(\omega_{m})t + \frac{a}{2}\cos(2\omega_{c}-5\omega_{m})t$$
 (7.4)

Pošto je gornja granica filtra propusnika niskih učestanosti,  $F_2$ ,  $3\omega_m$  proći će samo harmonici na učestanostima  $\omega_m$  i  $2\omega_m$  signala  $u_2(t)$ , pa na kraju imamo:

$$u_3(t) = \frac{1}{2}\cos 2\omega_m t + \frac{a}{2}\cos \omega_m t \tag{7.5}$$

8. Spektar U(jω) signala u(t) je ograničen i nalazi se u opsegu učestanosti |f|≤fm. Ovaj signal se množi periodičnom povorkom impulsa s(t) i propušta kroz idealan filtar F, propusnik opsega učestanosti, kako je to prikazano na slici 11. Za signal f(t) prikazan na slici 12 i propusni opseg filtra F od 14 f<sub>m</sub> do 16 f<sub>m</sub> pronaći spektar signala na izlazu iz filtra i reći kako je modulisan ovaj signal, ako je:

- a)  $T=1/(4f_m);$
- b)  $T=1/(7f_m);$
- c)  $T=1/(5f_m)$ .



## Rješenje:

Analogno© prvom zadatku funkciju sa slike 2 možemo zapisati,

$$f(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|F_n|\cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$
(8.1)

gdje je,

$$F_{n} = \left| F_{n} \right| e^{j\theta_{n}} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jnw_{0}t} dt \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$
 (8.2)

Tada smo došli do rješenje u opštem slučaju, u slučaju kada trenutak uspostavljanja impulsa t<sub>1</sub> nije određen

$$F_{n} = \frac{E\tau}{T} \frac{\sin\left(n\omega_{0}\frac{\tau}{2}\right)}{n\omega_{0}\frac{\tau}{2}} e^{-jn\omega_{0}\left(t_{1} + \frac{\tau}{2}\right)}$$
(8.3)

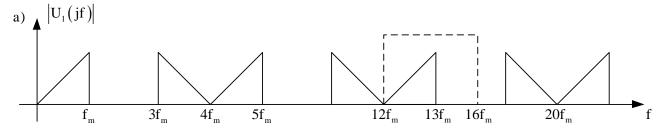
U ovom slučaju τ=-T/2 i E=1 pa konačno dobijamo,

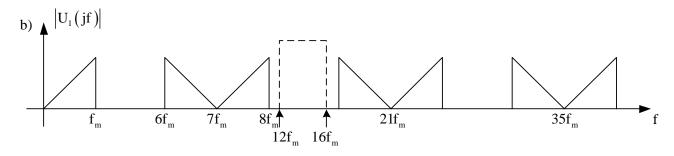
$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n\frac{\pi}{2}} \cos(n\omega_0 t) \right|$$
 (8.4)

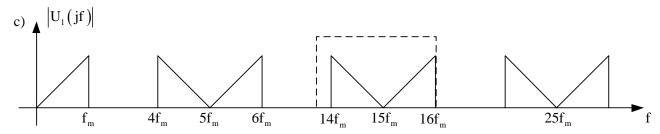
Signal u(t) se u produktnom modulatoru množi sa povorkom impulsa f(t) pa u tački 1 imamo,

$$u_{1}(t) = k_{p} u(t) f(t) = k_{p} \frac{1}{2} u(t) + k_{p} u(t) \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n\frac{\pi}{2}} \right| \cos(n\omega_{0}t)$$
(8.5)

Signal  $u_1(t)$  se sadrži od originalnog signala u(t)(pomnožen sa 1/2 i konstantnom produktnog modulatora) i beskonačnog broja signala, u(t) modulisanih nosiocima  $\cos\left(n\omega_0 t\right)$   $n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$  Uzeti u obzir da za parno n,  $\sin(n\pi/2)=0$ .







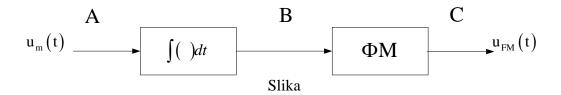
Slika 3

- a)  $T=1/(4f_m)$ . Kako je  $T=1/f_0$ . Amplituski spektar,  $|U_1(j\omega)|$ , je na slici 3 prikazan punom dok je prenosna funkcija filtra F isprekidanom linijom. Na izlazu iz filtra imamo AM-1BO (GBO)
- b)  $T=1/(7f_m)$ . Na izlazu iz filtra nema signala
- c) T=1/(5f<sub>m</sub>). Na izlazu iz filta imamo AM-2BO

# ZAVRŠNI

# Ugaone modulacije

1. U jednom od postupaka za dobijanje FM signala koristi se integrator i fazni modulator kao što je prikazano na slici.



Na ulaz u integrator dovodi se test signal  $u_m(t) = U_m cos(\omega_m t)$  pri čemu učestanost ovog signala može da ima bilo koju vrijednost između 0.3KHz do 3.4KHz. Karakteristika integratora je takva da pri učestanosti  $f_m$ =1KHz i amplitudi  $U_m$ =1V signal na njegovom izlazu ima amplitudu  $U_B$ =0.06V. Amplituda prostoperiodičnog napona  $U_B$  na ulazu u  $\Phi M$  i devijacija faze na njegovom izlazu  $\Delta \Phi_0$  direktno su srazmjerne sve do vrijednosti  $U_B$ =0.3V, kada je  $\Delta \Phi_0$ =50rad. Za vrijednosti  $U_B$ >0.3V devijacija faze više nije direktno srazmjerna amplitudi  $U_B$ . Izračunati:

- a) Najveću vrijednost amplitude test signala U<sub>m</sub> pri kojoj je frekvencijski modulator još uvijek linearan,
- b) Devijaciju učestanosti FM signala u tački C,
- c) Opseg učestanosti u kome se nalaze značajne komponente spektra FM signala.

#### Rješenje:

Signal u tački B, koji je proporcionalan integralu modulišućeg signala u<sub>m</sub>(t) je,

$$u_{\rm B}(t) = k_{\rm i} \int_{-\infty}^{\infty} u_{\rm m}(\tau) d\tau = \frac{k_{\rm i} U_{\rm m}}{\omega_{\rm m}} \sin \omega_{\rm m} t, \qquad (1.1)$$

gdje je k<sub>i</sub> konstanta integratora.

Vrijednost konstante integratora može se odrediti na osnovu podatka, da za učestanog modulišućeg signala  $f_m = 1kHz$  i amplitudu  $U_m = 1V$ , amplituda signala  $u_B(t)$  iznosi  $U_B = 0.06V$ . Odnosno,

$$k_{i} = \omega_{m} \frac{U_{B}}{U_{m}} = 120\pi \,\text{rad/s}.$$
 (1.2)

a) Linearnost frekvencijskog modulatora određena je linearnošću faznog modulatora. Kako je fazni modulator linearan sve dok je

$$U_{\rm B} = \frac{k_{\rm i} U_{\rm m}}{\omega_{\rm m}} \le 0.3 \,\text{V},\tag{1.3}$$

najveća dozvoljena vrijednost amplitude test signala je,

$$(U_{\rm m})_{\rm max} = \frac{0.3(\omega_{\rm m})_{\rm min}}{k_{\rm i}} = 1.5V$$
 (1.4)

pri čemu je  $(\omega_m)_{min} = 2\pi (300 \text{Hz}).$ 

b) Frekvencijski modulisan signal na izlazu iz faznog modulatora ima oblik,

$$\mathbf{u}_{\mathrm{FM}}(t) = \mathbf{U}_{\mathrm{o}} \cos \left[ \omega_{0} t + \mathbf{k}_{\phi} \mathbf{u}_{\mathrm{B}}(t) \right], \tag{1.5}$$

Gdje su  $U_{\circ}$  i  $f_{\circ}$  amplituda i učestanost nosioca, a  $k_{\phi}$  je konstanta proporcionalnosti faznog modulatora. S obzirom na granice linearnosti faznog modulatora, vrijednost konstante  $k_{\phi}$  iznosi:

$$k_{\phi} = \frac{\Delta\Phi_0}{U_B} = \frac{50}{0.3} = 166.7 \text{ rad / V}.$$
 (1.6)

Trenutna devijacija učestanosti frekvencijski modulisanog signala  $\mathbf{u}_{\text{FM}}(t)$  u tački C je

$$\delta f_{i} = \frac{k_{\phi}}{2\pi} \frac{du_{B}(t)}{dt} = \frac{k_{\phi}k_{i}}{2\pi} U_{m} \cos \omega_{m}t, \qquad (1.7)$$

Odakle slijedi da je maksimalna devijacija učestanosti jednaka,

$$\Delta f_o = \frac{k_\phi k_i}{2\pi} (U_m)_{max} = 15 \text{kHz}. \tag{1.8}$$

c) Opseg učestanosti u kojem se nalaze sve značajne komponente spektra frekvencijski modulisanog signala  $u_{\text{FM}}(t)$ , određuje se prema Karsonovom obrascu,

$$B = 2(\Delta f_o + f_m). \tag{1.9}$$

Pri tome se mora uzeti najviša učestanost test signala  $(f_m)_{max} = 3.4 \text{kHz}$ , tako da je traženi opseg učestanosti,

$$B = 2(15+3.4)kHz = 36.8kHz. (1.10)$$

- 2. U opsegu B prenosi se N radio signala  $u_i(t)=U_0\cos(\omega_{0i}t+\Delta\omega_0)m_i(\tau)d\tau)$ , gdje je i=1,...,N. Najviša učestanost u spektru signala  $m_i(t)$  je  $f_m$ , pri čemu je  $|m_i(t)| \le 1$ , a  $\Delta f_0 = 5f_m < B$ .
- a) Odrediti maksimalan broj radio signala koji mogu da se prenesu u datom opsegu B,
- b) Za koliko treba smanjiti devijaciju učestanosti  $\Delta f_0$  da bi u datom opsegu moglo da se prenese 2N signala?

#### Rješenje:

a) N=?

Prema Karsonovom obrascu potrebna širina opsega frekvencijski modulisanog signala je,

$$B_{ps} = 2f_{m}(m+1) = 2f_{m}\left(\frac{\Delta f_{0}}{f_{m}} + 1\right) = 2(\Delta f_{0} + f_{m})$$
(2.1)

pošto je  $\Delta f_0 = 5f_m$  dalje imamo,

$$B_{ps} = 12f_{m} \tag{2.2}$$

Maksimalan broj radio signala opsega B<sub>ps</sub> koji mogu da se prenesu u opsegu B se dobija

$$N = \frac{B}{B_{ps}} = \frac{B}{12f_{pp}}$$
 (2.3)

b) Sada je

$$N' = 2N = \frac{B}{B_{ps}'}$$
 (2.4)

$$B_{ps}' = 2f_{m}(m'+1) = 2f_{m}\left(\frac{\Delta f_{0}'}{f_{m}} + 1\right) = 2(\Delta f_{0}' + f_{m})$$
 (2.5)

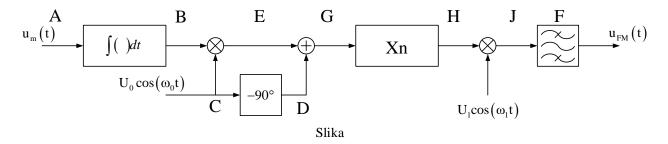
$$2N = \frac{B}{2(\Delta f_0' + f_m)}$$
 (2.6)

Ako uvrstimo N dobijeno pod a)

$$\frac{B}{2(\Delta f_0' + f_m)} = \frac{B}{6f_m}$$
 (2.7)

$$\Delta f_0' = 2 f_m \tag{2.8}$$

- 3. Na slici je prikazana blok šema predajnika FM signala. Kao modulator u ovom predajniku se koristi Armstrongov modulator koga sačinjavaju sklopovi između A i G na šemi. Ovaj modulator ispravno funkcioniše sve dok signal na izlazu iz kola za sabiranje ima indeks modulacije  $m_G \le 0.5$ . Ako učestanost modulišućeg signala  $u_m(t) = U_m \cos(\omega_m t)$  može da ima bilo koju vrijednost između 50Hz i 15KHz i učestanost nosioca u Armstrongovom modulatoru iznosi  $f_0 = 200$ KHz, izračunati:
  - a) Maksimalnu devijaciju učestanosti FM signala u tački G na izlazu iz kola za sabiranje,
  - b) Koliko puta mora da se umnoži učestanost signala iz tačke G pa da signal na izlazu iz prijemnika  $U_{FM}(t)$  ima maksimalnu devijaciju učestanosti od 75KHz,
  - c) Učestanost pomoćnog nosioca f<sub>1</sub>tako da učestanost signala na izlazu iz predajnika bude 90MHz.



Za dati modulišući signal  $u_{_m}(t) = U_{_m} \cos(\omega_{_m} t)$ , signal na izlazu iz integratora u tački B je,

$$u_{\rm B}(t) = k_{\rm i} \int_{-\infty}^{t} u_{\rm m}(\tau) d\tau = \frac{U_{\rm B}}{\omega_{\rm m}} \sin \omega_{\rm m} t \tag{3.1}$$

Gdje je  $k_i$  konstanta integratora i  $U_B = k_i U_m$ .

Signali u tačkama E i D su:

$$u_{E}(t) = k_{m} u_{B}(t) U_{0} \cos \omega_{0} t = k_{m} \frac{U_{B}}{\omega_{m}} U_{0} \sin \omega_{m} t \cdot \cos \omega_{0} t$$
(3.2)

i

$$u_{D}(t) = U_{0} \cos(\omega_{0} t - 90^{\circ}) = U_{0} \sin \omega_{0} t$$
 (3.3)

Tako da signal na izlazu iz Armstrongovog modulatora u tački G ima oblik,

$$u_G(t) = u_D(t) + u_E(t) = U_0 \sin \omega_0 t + k_m \frac{U_B}{\omega_m} U_0 \sin \omega_m t \cdot \cos \omega_0 t$$
 (3.4)

Kada se malo sredi izraz (2.4) dobija se:

$$u_G(t) = \sqrt{U_0^2 + (k_m \frac{U_B}{\omega_m} U_0 \sin \omega_m t)^2} \sin(\omega_0 t + \arctan(k_m \frac{U_B}{\omega_m} \sin \omega_m t))$$
 (3.5)

tj

$$u_G(t) = U_0 \sqrt{1 + (m \sin \omega_m t)^2} \sin(\omega_0 t + \arctan(m \sin \omega_m t))$$
 (3.6)

Gdje je  $m = k_m \frac{U_B}{\omega_m} = \frac{\Delta \omega_0}{\omega_m}$  indeks modulacije. Kako je kod Armstrongovog modulatora uvijek

ispunjen uslov da je indeks modulacije m<1, izraz (2.6) se približno može pisati kao:

$$\mathbf{u}_{G}(t) = \mathbf{U}_{0}\sin(\omega_{0}t + m\sin\omega_{m}t) \tag{3.7}$$

koristeći aproksimaciju da je  $\varphi \approx tg\varphi$ , gdje je u našem slučaju  $\varphi = k_m \frac{U_B}{\omega_m} \sin \omega_m t$ .

a) Prema datim podacima, prikazani modulator ispravno funkcioniše sve dok signal na izlazu iz kola za sabiranje ima indeks modulacije:

$$m_{G} = \frac{\Delta f_{0G}}{f_{m}} \le 0.5$$
 (3.8)

Ovaj uslov je kritičan za najnižu učestanost iz spektra modulišućeg signala, pa je maksimalna devijacija učestanosti signala u tački G jedanaka:

$$\Delta f_{0G} \le 0.5 f_{m} \implies \Delta f_{0G \max} = 0.5 (f_{m})_{\min}$$
 (3.9)

Uvrštavajući podatke dobija se  $\Delta f_{0G max} = 25 Hz$ .

b) Između tačaka G i H u blok šemi predajnika na slici nalazi se umnožavač učestanosti. Signal na izlazu iz ovog n-tostrukog umnožavača učestanosti je:

$$u_{H}(t) = U_{0} \sin(n\omega_{0}t + nm\sin\omega_{m}t)$$
(3.10)

Povećanje indeksa modulacije n puta znači da je povećana i maksimalna devijacija učestanosti signala  $u_H(t)$  u odnosu na signal na ulazu u umnožavač.

Kako se dalja obrada signala  $u_H(t)$  sastoji samo u transliranju njegovog spektra, pri čemu devijacija učestanosti ovog signala ostaje nepromijenjena, jasno je, da će i signal  $u_{FM}(t)$ 

na izlazu iz predajnika imati istu devijaciju učestanosti. Ona treba da iznosi:

$$\Delta f_{0FM} = nmf_{m} = n\frac{\Delta f_{0G}}{f_{m}}f_{m} = n\Delta f_{0G} = 75kHz$$
 (3.11)

Odakle se dobija da je faktor umnožavanja učestanosti jednak:

$$n = \frac{\Delta f_{0FM}}{\Delta f_{0G}} = 3000 \tag{3.12}$$

c) Signal na izlazu iz produktnog modulatora u tački J je:

$$\mathbf{u}_{\mathbf{J}}(t) = \mathbf{k}_{\mathbf{m}} \mathbf{u}_{\mathbf{H}}(t) \mathbf{U}_{\mathbf{J}} \cos \omega_{\mathbf{J}} t \tag{3.13}$$

Iz ove relacije slijedi,

$$u_{_{\rm J}}(t) = U_{_{\rm J}} \sin \left[ (n\omega_{_{\rm 0}} - \omega_{_{\rm 1}})t + nm\sin\omega_{_{\rm m}}t \right] + U_{_{\rm J}} \sin \left[ (n\omega_{_{\rm 0}} + \omega_{_{\rm 1}})t + nm\sin\omega_{_{\rm m}}t \right] \tag{3.14}$$

Gdje je  $U_J = \frac{k_m U_0 U_1}{2}$ . Signal  $u_J(t)$  sastoji se dakle od dva frekvencijski modulisana signala čije su učestanosti nosilaca  $nf_0 - f_1$  i  $nf_0 + f_1$ . Za nađenu vrijednost faktora umnožavanja n i učestanost nosioca  $f_0 = 200 \, \text{kHz}$ , lako se dobija da je  $nf_0 = 600 \, \text{Mhz}$ .

To znači da samo prva komponenta ( frekvencijski modulisan signal ) u izrazu za signal  $u_G(t)$  može da ima učestanost nosioca 90MHz. U tom slučaju učestanost pomoćnog nosioca iznosi:

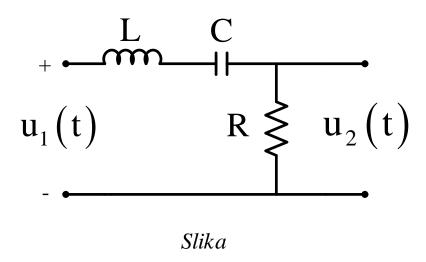
$$f_1 = nf_0 - 90MHz = 510MHz$$
.

Filtar F propusnik opsega učestanosti treba da izdvoji samo frekvencijski modulisan signal čija je učestanost nosioca 90MHz, tako da je signal na izlazu iz predajnika:

$$u_{FM}(t) = U \sin[(n\omega_0 - \omega_1)t + nm\sin\omega_m t]$$
(3.15)

4. Test signal  $u_m(t) = U_m \cos(\omega_m t)$  frekvencijski moduliše nosilac  $u_0(t) = U_0 \cos(\omega_0 t)$ . Pri tome je učestanost nosioca tako izabrana da je  $f_0 \gg f_m$ . Maksimalna devijacija učestanosti koju proizvodi modulišući signal je  $\Delta f_0 = 5 f_m$ . Frekvencijski modulisan signal dovodi se u kolo čija je električna šema prikazana na slici.

Odrediti vrijednosti induktivnosti L i kapacitivnosti C elemenata kola tako da na krajevima otpornika R amplituda ni jedne od značajnih komponenti ne bude oslabljena za više od 1dB u odnosu na amplitudu koju je ista komponenta imala na ulazu u kolo.



## Rješenje:

Za dati oblik modulišućeg signala, frekvencijski modulisan signal

$$u_{FM}(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + m \sin \omega_m t)$$
(4.1)

Zauzima opseg učestanosti,

$$B = 2f_{m}(m+1) (4.2)$$

U ovim izrazima m označava indeks modulacije koji ima vrijednost,

$$m = \frac{\Delta f_0}{f_m} = 5. \tag{4.3}$$

Kao što je poznato, kolo sa slike neće unositi nikakvo slabljenje samo na rezonantnoj učestanosti, odnosno,

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{4.4}$$

Kako je funkcija prenosa kola sa slike jedanaka,

$$H(j\omega) = \frac{R}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})}$$
(4.5)

Zamjenom izraza (4.4) u (4.5) dobija se,

$$H(j\omega) = \frac{R}{R + j\frac{L}{R} \frac{(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0)}{\omega}}$$
(4.6)

S obzirom na to da se značajne komponente frekvencijski modulisanog signala nalaze u opsegu učestanosti (izrazi (4.2) i (4.3)),

$$f_0 - 6f_m \le f \le f_0 + 6f_m \tag{4.7}$$

i kako je  $f_0 \gg f_m$ , u izraz (4.6) može se uvesti aproksimacija,

$$\frac{\omega + \omega_0}{\omega} \approx 2 \tag{4.8}$$

Prema tome, izraz (4.6) postaje,

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{2L}{R}(\omega - \omega_0)}$$
(4.9)

Komponente na granicama opsega učestanosti koji zauzima frekvencijski modulisan signal su najviše oslabljene. Da to slabljenje ne bi bilo veće od 1dB u odnosu na amplitudu koju iste komponente imaju na ulazu u kolo, potrebno je da bude ispunjen uslov,

$$20\log\left\{\frac{1}{\left|\mathbf{H}\left[\mathbf{j}(\omega_{0}+6\omega_{\mathrm{m}})\right]\right|}\right\} \leq 1d\mathbf{B}.\tag{4.10}$$

Sređivanjem ovog izraza se dobija

$$1 + (\frac{2L}{R}6\omega_{\rm m})^2 \approx 1,25.$$
 (4.11)

Na osnovu ovog i izraza (4.4), nalazi se,

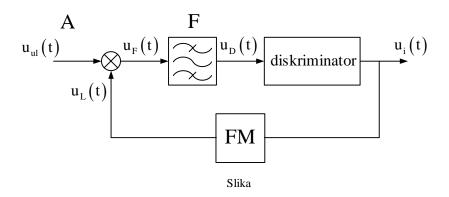
$$L = \frac{R}{24\omega_{\rm m}} \qquad i \qquad C = \frac{24\omega_{\rm m}}{R\omega_0^2}$$
 (4.12)

5. Na slici je prikazana blok šema demodulatora za FM signale. Demodulator se sastoji od produktnog modulatora, filtra propusnika opsega učestanosti od  $f_1$ - $B_1/2$  do  $f_1$ + $B_1/2$ , diskriminatora čija je konstanta  $k_1$  i frekvencijskog modulatora čija je konstanta  $k_2$ . Učestanost nosioca na izlazu iz ovog FM modulatora je  $f_0$ - $f_1$ , pri čemu je  $f_0 \gg f_1$ .

$$U_{ul}(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + \frac{\Delta f_0}{f_m} \sin \omega_m t), \text{ prona\'ei:}$$

Ako na ulaz u demodulator dolazi signal  $U_{ul}(t)$ :

- a) Signal na izlazu iz demodulatora u<sub>i</sub>(t) i pokazati da je direktno srazmjeran modulišućem signalu,
- b) Izraz za FM signal na izlazu iz filtra F,
- c) Veličinu  $k_1k_2$  tako da je potrebna širina propusnog opsega filtra F jednaka 1/5 širine opsega učestanosti koji zauzima spektar signala  $U_{ul}(t)$  kad je  $\Delta f_0/f_m=9$ .



#### Rješenje:

a) Signal na izlazu iz frekvencijskog modulatora u kolu povratne sprege je,

$$\mathbf{u}_{L}(t) = \mathbf{U}_{L} \cos \left[ (\omega_{0} - \omega_{1})t + 2\pi \mathbf{k}_{2} \int_{-\infty}^{t} \mathbf{u}_{i}(\tau) d\tau \right]. \tag{5.1}$$

Poslije množenja u produktnom modulatoru dobija se signal,

$$\begin{aligned} u_{F}(t) &= k_{m} u_{u}(t) u_{L}(t) = U_{F} \cos \left[ (2\omega_{0} - \omega_{1})t + \frac{\Delta f_{0}}{f_{m}} \sin \omega_{m} t + 2\pi k_{2} \int_{-\infty}^{t} u_{i}(\tau) d\tau \right] + \\ U_{F} \cos \left[ \omega_{1} t + \frac{\Delta f_{0}}{f_{m}} \sin \omega_{m} t - 2\pi k_{2} \int_{-\infty}^{t} u_{i}(\tau) d\tau \right], \end{aligned} \tag{5.2}$$

Gdje je  $U_F = k_m \frac{U_0 U_L}{2}$  i  $k_m$  konstanta produktnog modulatora.

S obzirom da je  $f_0 \gg f_1$ , kroz filtar F proći će samo druga komponenta signala  $u_F(t)$  iz izraza (5.2). Drugim riječima, signal na ulazu u discriminator je:

$$U_{D}(t) = U_{F} \cos \left[ \omega_{I} t + \frac{\Delta f_{0}}{f_{m}} \sin \omega_{m} t - 2\pi k_{2} \int_{-\infty}^{t} u_{i}(\tau) d\tau \right]. \tag{5.3}$$

Kako je signal na izlazu iz diskriminatora proporcionalan trenutnoj devijaciji učestanosti signala na njegovom ulazu, slijedi:

$$u_{i}(t) = k_{1} \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt},$$
 (5.4)

Gdje je,

$$\phi(t) = \frac{\Delta f_0}{f_m} \sin \omega_m t - 2\pi k_2 \int_{-\infty}^{t} u_i(\tau) d\tau$$
 (5.5)

trenutna devijacija faze na ulazu u diskriminator.

Na osnovu (5.4) i (5.5) dobija se,

$$u_{i}(t) = \frac{k_{1}}{1 + k_{1}k_{2}} \Delta f_{0} \cos \omega_{m} t.$$
 (5.6)

Poređenjem izraza (5.6) i izraza za FM signal u<sub>u</sub>(t) zaključuje se da je signal na ulazu demodulatora direktno srazmjeran modulišućem signalu.

b) Signal na izlazu iz filtra F, odnosu na ulazu u discriminator, predstavljen je izrazom (5.3). Zamjenom (5.6) u (5.3) dobija se,

$$u_{D}(t) = U_{F} \cos \left[ \omega_{l} t + \frac{1}{1 + k_{1} k_{2}} \frac{\Delta f_{0}}{f_{m}} \sin \omega_{m} t \right]. \tag{5.7}$$

c) Potrebna širina propusnog opsega F može se izraziti pomoću Karsonovog obrasca,

$$B_1 = 2f_m(m_1 + 1) (5.8)$$

gdje je prema izrazu (5.7) indeks modulacije m<sub>1</sub> jednak,

$$m_1 = \frac{1}{1 + k_1 k_2} \frac{\Delta f_0}{f_m}$$
 (5.9)

Širina opsega učestanosti koji zauzimaju značajne komponente FM signala u<sub>1</sub>(t) iznosi,

$$B = 2f_{m}(\frac{\Delta f_{0}}{f_{m}} + 1) \tag{5.10}$$

Kako je potrebno da bude  $B_1 = \frac{B}{5}$ , na osnovu (5.8), (5.9) i (5.10) slijedi,

$$\frac{1}{1+k_1k_2}\frac{\Delta f_0}{f_m} + 1 = \frac{1}{5}(\frac{\Delta f_0}{f_m} + 1),\tag{5.11}$$

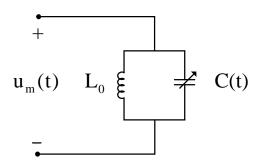
odnosno,

$$k_1 k_2 = 8$$
 (5.12)

Pri čemu je  $\frac{\Delta f_0}{f_m} = 9$ .

Za vježbu:

1. FM predajnik sa direktnom modulacijom u sebi sadrži oscilatorno kolo sastavljeno od induktivnosti  $L=10\mu H$  i kapacitivnosti čija vrijednost zavisi od amplitude modulišućeg signala. Kada je modulišući signal 0, efektivna vrijednost kapacitivnosti iznosi 1000 pF. Signal poruke  $4.5 cos(2\pi 10^3 t)(V)$  izaziva maksimalnu promjenu kapacitivnosti od 6pF. Ako se pretpostavi da se FM signalu na izlazu iz modulatora dodatno umnožava učestanost pet puta, odrediti širinu spektra takvog FM signala.



Sl. 1 – Oscilator

Rezonantna učestanost oscilatora iznosi,

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} \tag{1}$$

Kada je modulišući signal nula, u oscilatoru nema šta da povećava ili smanjuje kapacitivnost kondezatora, pa je ona konstantna i iznosi  $C_0 = 1000 pF$ .

Imamo da je:

$$C = c(t) = C_0 + \delta c(t)$$
 (2)

Trenutna učestanost generisanih oscilacija će biti:

$$\omega_i^2 = \omega^2 = \frac{1}{L_0 c(t)} \tag{3}$$

Uvrštavajući izraz (2) u (3) dobija se:

$$\omega^{2}(t) = \frac{1}{L_{0}[C_{0} + \delta c(t)]} = \frac{1}{L_{0}C_{0}} \frac{1}{1 + \frac{\delta c(t)}{C_{0}}} = \omega_{0}^{2} \frac{1}{1 + \frac{\delta c(t)}{C_{0}}}$$
(4)

pa je:

$$\omega(t) = \omega_0 \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\delta c(t)}{C_0}}}$$
 (5)

Kako je po tekstu zadatka maksimalna promjena kapacitivnosti  $\Delta C_0 = 6 p F$ , što je mnogo manje od standardne kapacitivnosti kondezatora, onda slijedi da je  $\delta c(t) \ll C_0$  pa se izraz (5) može zapisati:

$$\omega(t) \approx \omega_0 (1 - \frac{\delta c(t)}{2C_0})$$
 (6)

Odnosno,

$$\omega(t) \approx \omega_0 + \delta \omega_i \tag{7}$$

Trenutna devijacija učestanosti je,

$$\frac{\delta \omega_{i}}{\omega_{0}} \approx -\frac{\delta c(t)}{2C_{0}} \tag{8}$$

Znak minus znači da povećanju kapacitivnosti  $\delta c(t)$  odgovara smanjenje učestanosti. Pretpostavimo da su promjene kapacitivnosti direktno srazmjerne modulišućem signal  $u_m(t)$ ,

$$\delta c(t) = k_c U_m (t) = k_c U_m m(t) = \Delta C_0 m(t), \tag{9}$$
 Gdje je  $\Delta C_0 = \left| \delta c(t) \right|_{max} = k_c U_m \left| m(t) \right|_{max} = k_c U_m \text{ jer je } \left| m(t) \right|_{max} = 1.$ 

Trenutna devijacija učestanosti će sada biti,

$$\delta\omega_{i} \approx -\frac{1}{2}\omega_{0}\frac{\Delta C_{0}}{C_{0}}m(t) \approx -\Delta\omega_{0}m(t)$$
(10)

Odakle nalazimo izraz za  $\Delta\omega_0$ ,

$$\Delta\omega_0 = \frac{1}{2}\omega_0 \frac{\Delta C_0}{C_0} \tag{11}$$

Uvrštavajući poznate podatke u (1) i uvrštavajući dobijeni rezultat u (11), nalazimo da je  $\Delta\omega_0 = 3\cdot 10^4$ . Poznavajući izraze  $\Delta\omega_0 = 2\pi\Delta f_0$  i  $\omega_0 = 2\pi f_0$  dolazimo do vrijednosti odgovarajućih učestanosti. Nakon što je frekvencijski modulisan signal izašao iz modulatora, njegova učestanost je dodatno umnožena pet puta, pa će, prema Carsonovom obrascu, spektar frekvencijski modulisanog signala zauzimati opseg učestanosti:

$$5f_0 - 5\Delta f_0 - f_m \le f \le 5f_0 + 5\Delta f_0 + f_m \tag{12}$$

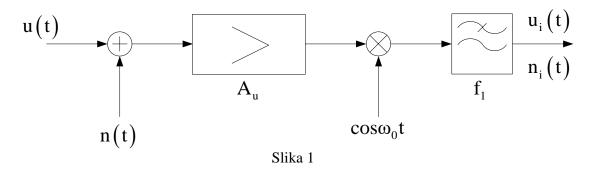
jer je učestanost izlaznog signala  $\omega_i = \omega_i(t) = \omega_0 - \Delta \omega_0 m(t)$ . Sada će širina spektra frekvencijski modulisanog signala iznositi:

$$B = 5f_0 + 5\Delta f_0 + f_m - 5f_0 + 5\Delta f_0 + f_m = 10\Delta f_0 + 2f_m \approx 49,77kHz.$$
 (13)

# Šum u telekomunikacionim sistemima

#### Prenos amplitudski modulisanih signala

- 1. Na slici 1 je prikazana blok šema prijemnika sa sinhronom demodulacijom za prijem signala tipa AM-1BO. Na ulaz prijemnika dolazi test signal oblika  $u_m(t) = U_m cos(\omega_0 + \omega_m)t$  čija je srednja snaga P, a  $0 \le f_m \le f_1$ . Na ulaz prijemnika postoji i šum čija je spektralna gustina srednje snage konstantna i iznosi p<sub>N</sub>. Pronaći:
  - a) Koliki je odnos signal/šm na izlazu iz prijemnika,
  - b) Koliki će biti odnos signal/šum na izlazu iz prijemnika ako se ispred demodulatora postavi idealni filtar propusnik opsega učestanosti od f<sub>0</sub> do f<sub>0</sub>+f<sub>1</sub>.
  - c) Za koliko dB se razlikuju ova dva odnosa signal/šum?



## Rješenje:

Da bi se odredio odnos signal/šum na izlazu prijemnika potrebno je odrediti srednju snagu  $P_{si}$  na izlazu prijemnika i srednju snagu  $P_{Ni}$  šuma na izlazu prijemnika.

a) Sinhroni demodulator sa sl. 1 obavlja translaciju spektra ulaznog signala. Kada na ulaz ovog demodulatora dolazi signal dat izrazom  $u_m(t) = U_m cos(\omega_0 + \omega_m)t$ , čija je srednja snaga P, signal na izlazu demodulatora je:

$$u_{i}(t)=kUcos\omega_{m}t$$
 (1.1)

gdje je k konstanta. Srednja snaga ovog signala  $P_{si}$  srazmjerna je snazi signala na ulazu demodulatora:

$$P_{Si} = D_p P \tag{1.2}$$

gdje je D<sub>p</sub> konstanta prijemnika.

Na ulazu prijemnika postoji i šum. Spektralne komponente ovog šuma imaju slučajne faze i infinitezimalne snage

$$dP_{Nu} = p_N df, f \ge 0 \tag{1.3}$$

U prijemniku se spektar šuma translira i ograničava izlaznim filtrom, tako da su snage spektralnih komponenata šuma na izlazu prijemnika date sledećim izrazom:

$$dP_{Ni} = \begin{cases} D_{p} p_{N} df, & -f_{1} \leq f \leq f_{1} \\ 0, & \text{za ostalo } f \end{cases}$$
 (1.4)

Kako su faze ovih komponenata slučajne, to se dvije komponente šuma na učestanostima f i –f sabiraju po snazi pa se može pisati:

$$dP_{Ni} = \begin{cases} 2D_p p_N df, & 0 \le f \le f_1 \\ 0, & \text{za ostalo } f \end{cases}$$
 (1.5)

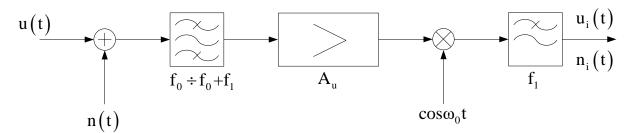
Snaga šuma na izlazu prijemnika je:

$$P_{Ni} = \int_{-\infty}^{\infty} dP_{Ni} = 2D_{p} \int_{0}^{f_{1}} p_{N} df = 2D_{p} p_{N} f_{1}$$
(1.6)

tako da je odnos signal/šum na izlazu prijemnika:

$$A_{Na} \simeq \frac{P_{Si}}{P_{Ni}} = \frac{P}{2p_{N}f_{1}}$$
 (1.7)

b) Kada se ispred demodulatora postavi idealan filtar propusnik opsega učestanosti od  $f_0$  do  $f_0+f_1$ , blok šema prijemnika je kao na slici



Blok šema prijemnika sa sinhronom demodulacijom i filtrom propusnikom opsega učestanosti

Kako ovaj filtar nema uticaja na korisni signal dat izrazom  $u_m(t) = U_m cos(\omega_0 + \omega_m)t$ , to je snaga signala na izlazu prijemnika ista kao u slučaju pod a) i data je izrazom (1.2).

Međutim, na ulaz demodulatora sada dolaze samo komponente šuma iz opsega od  $f_0$  do  $f_0+f_1$  tako da su snage ovih komponenata na izlazu prijemnika jednake:

$$dP_{Ni} = \begin{cases} D_{p} p_{N} df, & 0 \le f \le f_{1} \\ 0, & \text{za ostalo } f \end{cases}$$
 (1.8)

Snaga šuma na izlazu prijemnika je sada:

$$P_{Ni} = \int_{0}^{f_{1}} D_{p} p_{N} df = D_{p} p_{N} f_{1}$$
(1.9)

a odnog signal/šum:

$$A_{Nb} = \frac{P_{Si}}{P_{Ni}} = \frac{P}{p_N f_1}$$
 (1.10)

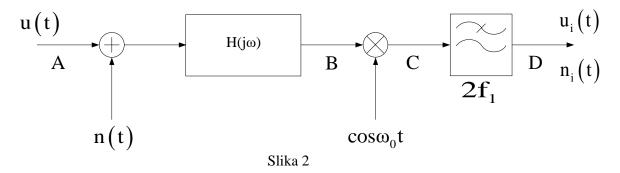
c) Odnos signal/šum u slučaju pod b) je dva puta veći nego u slučaju pod a)

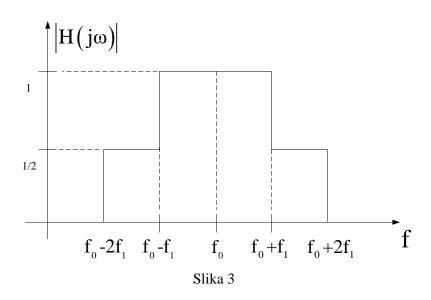
$$A_{Nb} = 2A_{Na} \tag{1.11}$$

odnosno

$$10\log(A_{Nb}/A_{Na}) = 3dB \tag{1.12}$$

2. KAM signal čija je srednja snaga P dolazi na ulaz prijemnika čija je blok šema prikazana na slici 2. Modulacija je izvršena sinusoidalnim signalom učestanosti  $f_m=1.5f_1$ , pri čemu stepen modulacije iznosi  $m_0=0.1$ . Funkcija prenosa  $H(j\omega)$  filtra na ulazu u prijemnik prikazana je na slici 3, gdje je  $f_0$  učestanost nosioca. Na ulazu u filtar postoji šum čija je spektralna gustina srednje snage konstantna i iznosi  $p_N$ . Pronaći odnos signal/šum na izlazu iz prijemnika.





# Rješenje:

KAM signal koji dolazi na ulaz prijemnika je:

$$\mathbf{u}_{KAM}(t) = \mathbf{U}_0 \left( 1 + \mathbf{m}_0 \cos \omega_m t \right) \cos \omega_0 t \tag{2.1}$$

Razvijanjem izraza (2.1) dobija se:

$$u_{KAM}(t) = U_0 \cos \omega_0 t + \frac{m_0}{2} U_0 \cos (\omega_0 - \omega_m) t + \frac{m_0}{2} U_0 \cos (\omega_0 + \omega_m) t$$
(2.2)

Srednja snaga P ovog signala je poznata. Ona je jednaka zbiru snaga svih komponenata

$$P = P_0 + 2\frac{m_0^2}{4}P_0 \tag{2.3}$$

gdje je sa P<sub>0</sub> označena snaga nosioca.

Snaga signala na izlazu prijemnika zavisi samo od snage sadržane u bočnim komponentama na ulazu prijemnika. Snaga jedne bočne komponente je:

$$\frac{m_0^2}{4}P_0 = \frac{m_0^2}{4} \frac{P}{1 + m_0^2/2}$$
 (2.4)

Kako funkcija prenosa filtra na učestanostima bočnih komponenata ima vrijednost 1/2, to je snaga jedne bočne komponente P<sub>1</sub> na ulazu u sinhroni demodulator 4 puta manja nego na ulazu filtra

$$P_1 = \frac{m_0^2}{16} \frac{P}{1 + m_0^2 / 2} \tag{2.5}$$

Jedna bočna komponenta daje na izlazu sinhronog demodulatora komponentu iste učestanosti  $f_m$ . Kako su obje izlazne komponente u fazi, one se sabiraju po amplitudi tako da ukupna srednja snaga signala na izlazu iz prijemnika iznosi:

$$P_{Si} = 4D_p P_1 \tag{2.6}$$

Spektralne komponente šuma na ulazu prijemnika imaju infinitezimalno male snage

$$dP_{N_{II}} = p_{N} df$$
 , f>0 (2.7)

Prolaskom kroz filtar, snage ovih komponenata su izmijenjene tako da na ulazu u demodulator u elementarnom opsegu učestanosti iznose:

$$dP_{Ni} = \left| H(j\omega) \right|^{2} p_{N} df = \begin{cases} p_{N} df &, f_{0} - f_{1} \leq f \leq f_{0} + f_{1} \\ \frac{1}{4} p_{N} df, f_{0} - 2f_{1} \leq f \leq f_{0} - f_{1} & i f_{0} + f_{1} \leq f \leq f_{0} + 2f_{1} \\ 0 &, \text{ za ostalo } f \end{cases}$$
(2.8)

Svaka komponenta šuma sa ulaza modulatora daje na izlazu demodulatora komponentu čija je učestanost promijenjena za  $f_0$ , a čija je snaga, sa koeficijentom  $D_p$ , proporcionalna snazi ulazne komponente. Pošto su faze spektralnih komponenata šuma slučajne, to se dvije komponente istih

učestanosti sabiraju po snazi, tako da je snaga šuma u elementarnom opsegu učestanosti na izlazu prijemnika jednaka:

$$dP_{Ni} = \begin{cases} 2D_{p}p_{N}df & , 0 \le f \le f_{1} \\ 2D_{p}\frac{p_{N}}{4}df & , f_{1} \le f \le 2f_{1} \end{cases}$$
(2.9)

Ukupna snaga šuma na izlazu prijemnika je sada:

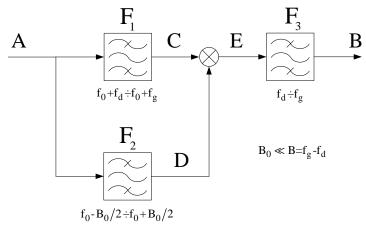
$$P_{Ni} = \int_{0}^{2f_{1}} dP_{Ni} = D_{p} \frac{5}{2} p_{N} f_{1}$$
 (2.10)

Odnos signal/šum ima vrijednost:

$$\frac{P_{Si}}{P_{Ni}} = \frac{m_0^2}{10(1+m_0^2/2)} \frac{P}{p_N f_1} \approx 10^{-3} \frac{P}{p_N f_1}$$
 (2.11)

- 3. Na slici 4 je prikazana blok šema prijemnika za signale tipa AM-1BO. Demodulacija je sinhrona, s tim što se za napajanje produktnog modulatora koristi nosilac redukovane snage koji se šalje iz predajnika. On se u tački A izdvaja filtrom  $F_2$ . Propusni opseg filtra  $F_1$  je od  $f_0+f_d$  do  $f_0+f_g$ , gdje je  $B=f_g-f_d$  širina spektra modulišućeg signala. Filtar F3 propušta učestanosti od  $f_d$  do  $f_g$ . Na ulaz prijemnika dolazi jedna komponenta iz višeg bočnog opsega  $U_1cos(\omega_0+\omega_1)t$ , čija je snaga  $P_1$  u tački A, a  $\omega_d \le \omega_1 \le \omega_g$ . Na ulaz dolazi i nosilac  $U_0cos(\omega_0t)$  čija je snaga  $P_0$  u tački A. Sem toga, u tački A postoji i šum čija je spektralna gustina srednje snage konstanta i iznosi  $p_N$ .
  - a) Pronaći izraz za odnos signal/šum na izlazu iz prijemnika u tački B,
  - b) Ako je poznata ukupna srednja snaga P signala na ulazu prijemnika P=P<sub>0</sub>+P<sub>1</sub>, pronaći koliko treba da iznosi P<sub>0</sub> i P<sub>1</sub>, pa da odnos signal/šum bude maksimalan, kao i koliki je taj odnos.

<u>Napomena:</u> Prilikom izvođenja izraza za odnos signal/šum zanemariti one komponente šuma na izlazu koje potiču od proizvoda dvije ulazne komponente šuma. Svi filtri i produknti modulatori su idealni.



Slika 4

# Rješenje:

a) Na ulazu datog prijemnika postoji signal  $u_A(t)$  koji je jednak zbiru korisnog signala i šuma n(t):

$$u_{A}(t) = U_{0}\cos\omega_{0}t + U_{1}\cos(\omega_{0} + \omega_{1})t + n(t)$$
(3.1)

S obzirom na položaj propusnog opsega filtra  $F_1$ , na njegovom izlazu će se dobiti signal:

$$u_{c}(t)=U_{1}\cos(\omega_{0}+\omega_{1})t+n_{c}(t)$$
(3.2)

gdje je sa  $n_C(t)$  označen šm čije se spektralne komponente nalaze samo u opsegu  $f_0+f_d \le f_0+f_g$ . Signal na izlazu iz filtra  $F_2$ , s obzirom na njegov propusni opseg, je:

$$\mathbf{u}_{\mathrm{D}}(t) = \mathbf{U}_{0} \cos \omega_{0} t + \mathbf{n}_{\mathrm{D}}(t) \tag{3.3}$$

gdje je sa  $n_D(t)$  označen šum čije se spektralne komponente nalaze u opsegu  $f_0$ - $B_0/2 \le f \le f_0 + B_0/2$ . Signal na izlazu iz produktnog modulatora je:

$$\mathbf{u}_{\mathrm{E}}(t) = \mathbf{u}_{C}(t)\mathbf{u}_{\mathrm{D}}(t) \tag{3.4}$$

Kada se u ovaj izraz uvrste (3.3) i (3.2) dobija se

$$u_{E}(t) = \frac{U_{0}U_{1}}{2}\cos\omega_{1}t + n_{C}(t)U_{0}\cos\omega_{0}t + n_{D}(t)U_{1}\cos(\omega_{0} + \omega_{1})t + \frac{U_{0}U_{1}}{2}\cos(2\omega_{0} + \omega_{1})t + n_{C}(t)n_{D}(t)$$
(3.5)

Prvi član sa desne strane u poslednjem izrazu opisuje koristan signal, dobijen postupkom demodulacije. Njegova snaga  $P_{si}$  je srazmjerna proizvodu snage nosioca  $P_0$  i snage komponente iz višeg bočnog opsega  $P_1$  na ulazu prijemnika:

$$P_{Si} = D_{D} P_{0} P_{1} \tag{3.6}$$

Četvrti član ne prolazi kroz filtar F<sub>3</sub>, a peti član, prema tekstu zadatka, može se zanemariti.

Prema tome, drugi i treći član opisuju šum na ulazu filtra F<sub>3</sub>. Da bi se pronašao šum na izlazu ovog filtra treba pronaći snage onih spektralnih komponenata šuma na ulazu filtra koje se nalaze u njegovom propusnom opsegu.

S obzirom na opseg u kome se nalaze komponente šuma  $n_C(t)$ , šum

$$n_{c}(t) = U_{0} \cos \omega_{0} t \tag{3.7}$$

sadrži komponente koje se nalaze u opsegu  $f_d \le f \le f_g$ . Snage ovih komponenata su, u skladu sa izrazom (3.6):

$$dP_{N_i} = D_p P_0 p_N df$$
,  $f_d \le f \le f_g$  (3.8)

Na isti način se može zaključiti da šum

$$n_{D}(t) = U_{0}\cos(\omega_{0} + \omega_{1})t \tag{3.9}$$

ima spektralne komponente koje se nalaze u propusnom opsegu filtra F<sub>2</sub>, čije su snage u ovom opsegu opisane izrazom:

$$dP_{N2} = \begin{cases} D_{p}P_{1}p_{N}df, f_{1} - \frac{B_{0}}{2} \le f \le f_{1} + \frac{B_{0}}{2} \\ 0, \text{ za ostalo f iz } f_{d} \le f \le f_{g} \end{cases}$$
(3.10)

Ukupna snaga šuma na izlazu iz prijemnika je:

$$P_{Ni} = \int_{f_d}^{f_g} dP_{N1} + \int_{f_d}^{f_g} dP_{N2} = D_p \left( P_0 B + P_1 B_0 \right) p_N$$
 (3.11)

Traženi odnos signal/šum na izlazu prijemnika je:

$$A_{N} = \frac{P_{Si}}{P_{Ni}} = \frac{P_{0}P_{1}}{P_{0}p_{N}B + P_{1}p_{N}B_{0}} = \frac{1}{p_{N}(B/P_{1} + B_{0}/P_{0})}$$
(3.12)

b) Odnos signal/šum biće maksimalan kada izraz u imeniocu relacije (3.12)

$$\frac{1}{A_{N}} = p_{N} \left( B/P_{1} + B_{0}/P_{0} \right) \tag{3.13}$$

bude minimalan.

Kako je ukupna srednja snaga korisnog signala:

$$P=P_0+P_1$$
 (3.14)

poznata, to se optimalna raspodjela ove snage nalazi iz uslova

$$d\left(\frac{1}{A_{N}}\right) = -p_{N}\left(\frac{B}{P_{1}^{2}}dP_{1} + \frac{B_{0}}{P_{0}^{2}}dP_{0}\right) = 0 \text{ i } dP_{0} + dP_{1} = 0$$
(3.15)

Odavde je,

$$P_{1}/P_{0} = \sqrt{B}/\sqrt{B_{0}} \tag{3.16}$$

odnosno

$$P_1 = P \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B} + \sqrt{B_0}} \quad i \quad P_0 = P \frac{\sqrt{B_0}}{\sqrt{B} + \sqrt{B_0}}$$
 (3.17)

Maksimalan odnos signal/šum je:

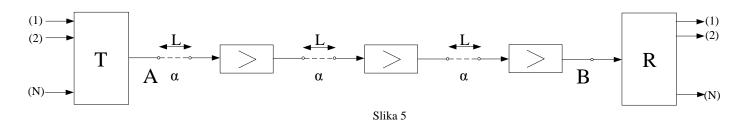
$$\left(A_{N}\right)_{\text{max}} = \frac{P}{p_{N}\left(\sqrt{B} + \sqrt{B_{0}}\right)^{2}}$$
(3.18)

4. Između mjesta A i B prenosi se po koaksijalnom kablu 600 telefonskih signala u multipleksu sa frekvencijskom raspodjelom, koji zauzima opseg učestanosti od 60KHz do 2540KHz. Na jednakim rastojanjima L=9km postavljena su tri pojačavača kao na slici. Faktor šuma svakog pojačavača je  $\bar{F}$ , a snaga signala u svim kanalima u tački A je ista. Podužno slabljenje kabla zavisi od učestanosti:

$$\alpha = 0.27 \cdot 10^{-3} \sqrt{f} \left[ \frac{Np}{km} \right] \tag{4.1}$$

Pronaći za koliko se dB razlikuju odnosi signal/šum u prvom i poslednjem kanalu, ako je:

- a) Pojačanje svakog pojačavača jednako slabljenju kabla između dva pojačavača na najvišoj prenošenoj učestanosti i ne zavisi od učestanosti,
- b) Pojačanje pojačavača je zavisno od učestanosti, tako da je na svakoj učestanosti jednako slabljenju kabla između dva pojačavača.



# Rješenje:

Od tačke A do tačke B, signal će biti oslabljen usljed prisustva kabla čije je podužno slabljenje  $\alpha$ . Slabljenje signala prouzrokuju tri dionice veze, jednake dužine L.Ako se slabljenje jedne dionice označi sa  $A_L$ , tada je ukupno slabljenje signala od A do B  $(A_L)^3$ . Istovremeno, signal će biti pojačan prolazom kroz tri pojačavača, čija su pojačanja jednaka i iznose  $A_P$ . Dakle, ukupno pojačanje signala od A do B je  $(A_P)^3$ . Prema tome, snaga signala u jednom kanalu na kraju veze je:

$$P_{SB} = P_{SA} \left( \frac{A_P}{A_L} \right)^3 \tag{4.2}$$

gdje je P<sub>SA</sub> snaga signala u jednom kanalu na početku veze, u tački A.

Na ulazu svakog pojačavača postoji šum čija je SGSS konstantna i iznosi  $p_N$ =FkT, gdje je F faktor šuma pojačavača, K Bolcmanova konstanta, a T apsolutna temperatura ambijenta. Srednja snaga šuma u jednom kanalu,  $P_N$ , koja potiče od sopstvenog šuma jednog pojačavača je:

$$P_{N} = p_{N}B_{k} = FkTB_{k} \tag{4.3}$$

gdje je B<sub>k</sub> opseg učestanosti koji zauzima jedan kanal.

S obzirom na zavisnost podužnog slabljenja  $\alpha$  od učestanosti, izraz (4.1), može se smatrati da je slabljenje kabla  $A_L$  odnosno pojačanje pojačavača  $A_P$  konstantno u opsegu učestanosti jednog kanala. Na izlazu prvog pojačavača postoji šum čija je snaga u jednom kanalu:

$$P_{N1} = P_N A_p \tag{4.4}$$

Ovaj šum, oslabljen za slabljenje jedne dionice kabla A<sub>L</sub>, dolazi na ulaz drugog pojačavača, gdje se sabira sa šumom ovog pojačavača. Tako je snaga šuma na izlazu drugog pojačavača jednaka:

$$P_{N2} = \left(P_N \frac{A_P}{A_L} + P_N\right) A_P \tag{4.5}$$

Šum sa izlaza drugog pojačavača oslabljen A<sub>L</sub> puta dolazi na ulaz trećeg pojačavača, sabira se sa šumom ovog pojačavača i oba pojačana za A<sub>P</sub> daju šum, koji u jednom kanalu u tački B ima snagu:

$$P_{NB} = \left(\frac{P_{N2}}{A_{L}} + P_{N}\right) A_{P} = P_{N} A_{P} \left[1 + \frac{A_{P}}{A_{L}} + \left(\frac{A_{P}}{A_{L}}\right)^{2}\right]$$
(4.6)

Prema tome, odnos signal/šum u jednom kanalu, u tački B biće:

$$A_{N} = \frac{P_{SB}}{P_{NB}} = \frac{P_{SA}}{FkTB_{k}} \frac{\left(\frac{A_{P}}{A_{L}}\right)^{3}}{A_{P} \left[1 + \frac{A_{P}}{A_{L}} + \left(\frac{A_{P}}{A_{L}}\right)^{2}\right]}$$
(4.7)

a) U ovom slučaju pojačanje pojačavača je jednako slabljenju kabla između dva pojačavača na najvišoj prenošenoj učestanosti, tj:

$$A_{p} = A_{I,v} \tag{4.8}$$

gdje je:

$$A_{I,v} = e^{2a_{I,v}} i a_{I,v} = \alpha_v L$$
 (4.9)

Sa  $\alpha_{\nu}$  je označeno podužno slabljenje kabla na najvišoj učestanosti multipleksnog signala koje s obzriom na (4.1) iznosi:

$$\alpha = 0.27 \cdot 10^{-3} \sqrt{254} \cdot 10^2 \approx 0.43 \text{ N/km}$$
 (4.10)

tako da je:

$$A_{Lv} \approx e^{7.75} \approx 2321.57$$
 (4.11)

Odnos signal/šum za najviši kanal je na osnovu (4.7) i (4.8):

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{B_{v}} = \left[\frac{P_{SB}}{P_{NB}}\right]_{v} = \frac{P_{SA}}{FkTB_{k}} \frac{\left(\frac{A_{P}}{A_{L}}\right)^{3}}{A_{P}\left[1 + \frac{A_{P}}{A_{L}} + \left(\frac{A_{P}}{A_{L}}\right)^{2}\right]} = \frac{P_{SA}}{3FkTB_{k}A_{Lv}}$$
(4.12)

Podužno slabljenje kabla na najnižoj učestanosti multipleksnog signala je:

$$\alpha_{\rm n} = 0.27 \cdot 10^{-3} \cdot \sqrt{60 \cdot 10^3} = 0.066 \,\text{N/km}$$
 (4.13)

$$a_{1n} = \alpha_n \cdot L = 0.594N$$
 (4.14)

$$A_{Ln} = e^{2a_{Ln}} = 3.29 (4.15)$$

Kako je za date vrijednosti:

$$\frac{A_{Lv}}{A_{Ln}} = e^{2L(\alpha_v - \alpha_n)} = e^{6.655} = 702.8 \gg 1$$
(4.16)

to je:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{B_{n}} = \left[\frac{P_{SB}}{P_{NB}}\right]_{n} = \frac{P_{SA}}{FkTB_{k}} \frac{\left(\frac{A_{Lv}}{A_{Ln}}\right)^{3}}{A_{Lv}\left(\frac{A_{Lv}}{A_{Ln}}\right)^{2}} = \frac{P_{SA}}{FkTB_{k}} \frac{1}{A_{Ln}}$$
(4.17)

Sada je tražena razlika:

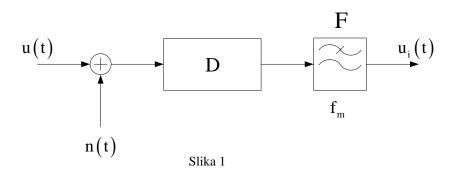
$$10\log\left[\frac{P_{SB}}{P_{NB}}\right]_{n} - 10\log\left[\frac{P_{SB}}{P_{NB}}\right]_{v} = 33.25dB \tag{4.18}$$

b) Sada je na svim učestanostima  $A_P\!\!=\!\!A\!\!=\!\!e^{2\alpha L}$  tako da je tražena razlika:

$$10\log\left[\frac{P_{SB}}{P_{NB}}\right]_{n} - 10\log\left[\frac{P_{SB}}{P_{NB}}\right]_{v} = 10\log\left(\frac{P_{SA}}{3FkTB_{k}A_{Ln}}\right) - 10\log\left(\frac{P_{SA}}{3FkTB_{k}A_{Lv}}\right) = 28.5dB$$
 (4.19)

#### Prenos ugaono modulisanih signala

1. Na ulaz u prijemnik čija je blok šema prikazana na slici 1 dolazi ugaono modulisan signal  $u(t) = U_0 \sin(\omega_0 t + m \cdot \sin 2\pi f_m t)$ . Srednja snaga signala na ulazu u prijemnik je  $P_0$ . Prijemnik se sastoji od demodulatora D i idealnog propusnika niskih učestanosti čija je granična učestanost  $f_m$ .



Pored signala u(t), na ulazu postoji i aditivni Gausov šum n(t) čija je spektralna gustina srednje snage konstantna i iznosi p<sub>N</sub>. Pronaći odnos signal/šum na izlazu iz prijemnika, ako je sklop D:

- a) Fazni demodulator,
- b) Frekvencijski demodulator.

U kom slučaju i za koliko dB je bolji odnos signal/šum?

# Rješenje:

Odnos signal/šum na izlazu iz prijemnika za fazno modulisane signale je,

$$A_{\Phi M} = (\Delta \Phi_0)^2 \frac{P_0}{2p_N f_{...}}, \tag{1.1}$$

dok je odnos signal/šum na izlazu iz prijemnika za frekvencijski modulisane signale dat sledećim izrazom:

$$A_{FM} = \frac{\left(\Delta f_0\right)^2}{\int_0^{f_m} f^2 df} \frac{P_0}{2p_N} = \frac{3}{2} \frac{\left(\Delta f_0\right)^2}{f_m^3} \frac{P_0}{p_N}$$
(1.2)

U ovim izrazima  $\Delta \phi_0$  je maksimalna devijacija faze, a  $\Delta f_0$  je maksimalna devijacija učestanosti ulaznog signala.

a) Trenutna devijacija faze signala na ulazu u prijemnik je,

$$\delta\Phi_{i} = m\sin 2\pi f_{m}t \tag{1.3}$$

odakle slijedi da je maksimalna devijacija faze ravna:

$$\Delta \Phi_0 = m \tag{1.4}$$

Prema tome, odnos signal/šum na izlazu prijemnika za fazno modulisane signale predstavljen je izrazom:

$$A_{\Phi M} = \frac{m^2 P_0}{2p_N f_m} \tag{1.5}$$

b) Trenutna devijacija učestanosti signala u(t) je:

$$\delta f_i = \frac{1}{2\pi} \frac{df_i}{dt} = mf_m \cos 2\pi f_m t \tag{1.6}$$

Kako je maksimalna devijacija učestanosti jednaka:

$$\Delta f_0 = mf_m \tag{1.7}$$

odnos signal/šum na izlazu iz prijemnika za frekvencijski modulisane signale je:

$$A_{\rm FM} = \frac{3}{2} \frac{m^2 P_0}{p_{\rm N} f_{\rm m}} \tag{1.8}$$

Ako se izrazi (1.8) i (1.5) podijele, dobija se

$$A_{FM}/A_{\Phi M} = 3 \tag{1.9}$$

Odnos signal/šum je dakle bolji za 4.7dB na izlazu iz prijemnika za frekvencijski modulisane signale.

2. Signali iz N=600 telefonskih kanala obrazuju multipleks. Multipleksni signal, koji zauzima opseg učestanosti od 60kHz do 2540 kHz, prenosi se radio vezom sa frekvencijskom modulacijom.

Emisiona snaga predajnika je P<sub>e</sub>=5W, a slabljenje spojnog puta do prijemnika je a=90dB. Takođe je poznato da maksimalna devijacija učestanosti koju izaziva test signal u jednom kanalu iznosi 280 kHz.

Izračunati odnos signal/šum u najvišem telefonskom kanalu na izlazu iz prijemnika, čiji je faktor šuma F=10. Za koliko dB se razlikuju odnos signal/šum u najnižem i najvišem telefonskom kanalu?

# Rješenje:

Najviši telefonski kanal zauzima opseg učestanosti od 2536kHz do 2540kHz. Kako se u telefoniji spektar signala govora u osnovnom opsegu učestanosti ograničava na opseg učestanosti od 300Hz do 3400Hz, granice spektra signala govora u najvišem telefonskom kanalu su:

$$f_1 = 2536.3 \text{kHz} \text{ i } f_2 = 2539.4 \text{kHz}$$
 (2.1)

Slično, granice spektra signala govora u najnižem telefonskom kanalu su:

$$f_{11} = 60.3 \text{kHz} \text{ i } f_{12} = 63.4 \text{kHz}$$
 (2.2)

Odnos signal/šum na izlazu prijemnika u najvišem telefonskom kanalu dat je izrazom:

$$A_{Ni} = \frac{\left(\Delta f_{0}\right)^{2}}{\int_{f_{1}}^{f_{2}} f^{2} df} \frac{P_{0}}{2FkT} \approx \frac{\left(\Delta f_{0}\right)^{2}}{f^{2} \left(f_{2} - f_{1}\right)} \frac{P_{0}}{2FkT}$$
(2.3)

pri čemu je uvedena aproksimacija

$$\int_{f_1}^{f_2} f^2 df \approx f^2 (f_2 - f_1)$$
 (2.4)

jer je podintegralna funkcija približno konstantna u opsegu učestanosti od f<sub>1</sub> do f<sub>2</sub>. Kako slabljenje spojnog puta iznosti a=90dB, srednja snaga signala na ulazu u prijemnik je:

$$P_0 = P_e \cdot 10^{-a/10} \tag{2.5}$$

Zamjenjujući brojne vrijednosti u izraz (2.3), pri čemu je kT=4·10<sup>-21</sup>W/Hz, dobija se da je odnos signal/šum na izlazu iz prijemnika u najvišem telefonskom kanalu jednak:

$$a_{Ni} = 10\log \left[ \frac{\left(\Delta f_0\right)^2}{f^2 \left(f_2 - f_1\right)} \frac{P_e \cdot 10^{-a/10}}{2FkT} \right] = 53.89dB$$
 (2.6)

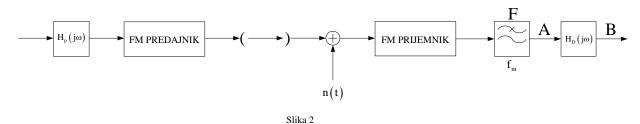
Na sličan način, upotrebom vrijednosti iz izraza (2.2) dobijamo odnos signal/šum na izlazu iz prijemnika u najnižem telefonskom kanalu:

$$a_{Ni} = 85.946 dB$$
 (2.7)

Razlika odnosa signal/šum u najnižem i najvišem telefonskom kanalu je:

$$(a_{N_i})_{x} - (a_{N_i})_{y} = 32.056 dB$$
 (2.8)

3. Na slici 2 je prikazana blok šema sistema za prenos muzičkog signala primjenom frekvencijske modulacije.



Spektar muzičkog signala zauzima opseg učestanosti od 0 do 15kHz. Radi poboljšanja odnosa signal/šum na izlazu iz prijemnika u ovom sistemu su upotrijebljena dva linearna sklopa, preemfazis i deemfazis, čije su funkcije prenosa  $H_p(j\omega)$  i  $H_d(j\omega)$ . Funkcija prenosa preemfazisa je:

$$H_{p}(j\omega)=j\frac{\omega}{k}$$
, (3.1)

gdje je k= $2\pi \cdot 2100$ rad/s.

Da ovi sklopovi ne bu unijeli izobličenje u prenošeni signal, funkcija prenosa deemfazisa je tako izabrana da je ispunjen uslov

$$H_{n}(j\omega) H_{d}(j\omega)=1. \tag{3.2}$$

Ako je spektralna gustina srednje snage slučajnog šuma n(t) na uzalu u prijemnik konstantna i iznosi  $p_N$ , izračunati:

- a) Odnos signal/šum na izlazu iz prijemnika i uporediti ga sa odnosom signal/šum kada preemfazis i deemfazis nisu upotrijebljeni,
- b) Koliko iznosi poboljšanje odnosa signal/šum na izlazu prijemnika ostvareno upotrebom preemfazisa i deemfazisa?

#### Rješenje:

a) Poznato je da je srednja snaga signala na izlazu iz prijemnika za FM signale direktno srazmjerna kvadratu devijacije učestanosti. Odnosno,

$$P_{si} = D_F \left(\Delta f_0\right)^2 \tag{3.3}$$

gdje je D<sub>F</sub> konstanta. Upotrebom preemfazisa i deemfazisa srednja snaga signala na izlazu iz prijemnika neće se promijeniti. Naime, zahvaljujući komplementarnom dejstvu ovih sklopova, njihove funkcije prenosa povezane su izrazom (3.2), snaga signala na izlazu iz prijemnika ostaje ista bez obzira da li se ovi sklopovi koriste ili ne.

Međutim, spektralna gustina srednje snage slučajnog šuma n(t) sa ulaza u prijemnik biće na izlazu iz prijemnika promijenjena radi prisustva deemfazisa. Spektralna gustina srednje snage šuma na izlazu iz filtra F u tački A je:

$$p_{N_{A}}(f) = D_{F} \frac{2p_{N}}{P_{0}} f^{2}$$
(3.4)

a na izlazu iz prijemnika u tački B iznosi:

$$p_{N_{R}}(f) = p_{N_{A}} \left| H_{D}(j\omega) \right|^{2}$$
(3.5)

Srednja snaga šuma na izlazu iz prijemnika kada nije upotrijebljen deemfazis je:

$$p_{Ni}(f) = \int_{0}^{f_{m}} p_{N_{A}}(f) df = D_{f} \frac{2p_{N}}{3P_{0}} f_{m}^{3}$$
(3.6)

Kada prijemnik sadrži deemfazis dobija se:

$$p_{N_{i_B}} = \int_{0}^{f_m} p_{N_A}(f) df = D_F \frac{2p_N}{3P_0} f_m^3$$
(3.7)

Konačno, odnos signal/šum na izlazu iz prijemnika kada preemfazis i deemfazis nisu upotrijebljeni iznosi:

$$A_{Ni} = \frac{P_{si}}{P_{Ni}} = 3 \frac{\left(\Delta f_0\right)^2}{f_m^2} \frac{P_0}{2p_N f_m}$$
 (3.8)

Upotrebom preemfazisa i deemfazisa odnos signal/šum na izlazu iz prijemnika postaje:

$$A_{Ni_{B}} = \frac{P_{si}}{P_{Ni_{B}}} = \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{2} \frac{\left(\Delta f_{0}\right)^{2}}{f_{m}} \frac{P_{0}}{2p_{N}}$$
(3.9)

b) Poboljšanje odnosa signal/šum ostvareno primjernom preemfazisa i deemfazisa je:

$$\frac{A_{Ni_B}}{A_{Ni}} = \frac{1}{3} \left(\frac{2\pi f_m}{k}\right)^2 \approx 17 \text{ ili } 10 \log \left(\frac{A_{Ni_B}}{A_{Ni}}\right) = 12.3 \text{dB}$$
 (3.10)

4. Video signal, čija je maksimalna učestanost u spektru f<sub>m</sub>=5MHz, potrebno je prenijeti od geostacionarnog satelita do zemaljske satelitske stanice. Primijenjena je frekvencijska modulacija, pri čemu učestanost nosioca iznosi f<sub>0</sub>=4GHz. Satelit se nalazi na udaljenosti d=35765km od Zemljine površine. Slabljenje spojnog puta između satelita i zemaljske prijemne stanice može se izračunati na osnovu iraza:

$$A = \frac{P_{\rm T}}{P_{\rm R}} = 1.775 \cdot 10^{-15} \frac{\left(df_0\right)^2}{G_{\rm T}G_{\rm R}}$$
(4.1)

gdje su  $P_T$  i  $P_R$  srednje snage signala na izlazu iz predajnika i na ulazu u prijemnik.  $G_R$  i  $G_T$  su dobici antena prijemnika i predajnika, koji izraženi u dB iznose  $10\log G_R=50$ dB i  $10\log G_T=15$ dB. Ako je faktor šuma prijemnika F=4 i ako je minimalna dozvoljena vrijednost odnosa signal/šum na izlazu prijemnika, pri kojoj ne dolazi do prekida veze 30dB, izračunati:

- a) Indeks modulacije FM signala,
- b) Vrijednost slabljenja spojnot puta u dB, kao i minimalnu vrijednost srednje snage signala na izlazu predajnika,
- c) Širinu opsega učestanosti koju zauzima FM signal.

# Rješenje:

a) Kada je u pitanju sistem prenosa sa frekvencijskom modulacijom, srednja snaga signala na izlazu iz prijemnika proporcionalna je kvadratu devijacije učestanosti:

$$P_{Si} = D_F \left(\Delta f_0\right)^2 \tag{4.2}$$

gdje je D<sub>F</sub> konstanta.

Međutim, spektralna gustina snage šuma koja je na ulazu u prijemnik konstantna, na izlazu iz frekvencijskog demodulatora je srazmjerna kvadratu učestanosti:

$$p_{Ni}(f) = D_F \frac{2FkT}{P_p} \cdot f^2$$
 (4.3)

I važi da je:

$$p_{Ni}(f) = \frac{dP_{Ni}}{df}$$
 (4.4)

Pošto na izlazu iz frekvencijskog demodulatora datog prijemnika postoji filtar čije su granične učestanosti 0 i  $f_m$ , srednja snaga slučajnog šuma na izlazu iz prijemnika biće:

$$P_{Ni} = D_F \frac{2FkT}{P_R} \int_0^{f_m} f^2 df = D_F \frac{2FkT}{3P_R} f_m^3$$
 (4.5)

Odnos signal/šum na izlazu iz prijemnika je:

$$A_{Ni} = \frac{P_{Si}}{P_{Ni}} = \frac{D_{F} (\Delta f_{0})^{2}}{D_{F} \frac{2FkT}{3P_{p}} f_{m}^{3}} = 3 \left(\frac{\Delta f_{0}}{f_{m}}\right)^{2} \frac{P_{R}}{2FkTf_{m}} = 3m^{2} \frac{P_{R}}{2FkTf_{m}}$$
(4.6)

Pošto je minimalna vrijednost odnosa signal/šum  $(a_{Ni})_{min}=10log(A_{Ni})=30dB$  da ne bi došlo do prekida veze srednja snaga signala na ulazu u prijemnik mora da zadovoljava uslov  $P_R \ge 10p_N B$ , tj.  $P_{Rmin}=10p_N B$ , a prema Karsonovom obrascu signal na ulazu u prijemnik zauzima opseg učestanosti:

$$f_{0} - \Delta f_{0} - f_{m} \le f \le f_{0} + \Delta f_{0} + f_{m}$$
(4.7)

pa je odavde širina propusnog opsega B jednaka:

$$B = f_0 + \Delta f_0 + f_m - (f_0 - \Delta f_0 - f_m) = 2f_m (\frac{\Delta f_0}{f_m} + 1) = 2f_m (m+1)$$
(4.8)

Indeks modulacije dobićemo iz:

$$\left(a_{Ni}\right)_{min} = 10\log\left(A_{Ni}\right) = 30dB \Rightarrow 10\log\left(3m^2 \frac{P_{Rmin}}{2FkTf_m}\right) = 30dB \tag{4.9}$$

Sada je indeks modulacije FM signala:

$$m \approx 3 \tag{4.10}$$

b) Minimalna vrijednost signala na izlazu iz predajnika može se odrediti preko date formule slabljenja spojnog puta, tj:

$$P_{\text{Tmin}} = A \cdot P_{\text{Rmin}} = 1.775 \cdot 10^{-15} \cdot \frac{\left(d \times f_0\right)^2}{G_{\text{T}} G_{\text{R}}} \cdot 10 p_{\text{N}} B$$
(4.11)

Potrebno je još izračunati vrijednosti G<sub>T</sub> i G<sub>R</sub>:

$$G_{T} = 10^{\frac{15}{10}} = 10^{1.5} \text{ i } G_{R} = 10^{\frac{50}{10}} = 10^{5}$$
 (4.12)

Uvrštanjem u (4.11) dobijamo:

$$P_{Tmin} = 147.04W$$
 (4.13)

c) Širina opsega učestanosti koju zauzima FM signal je:

$$B=2f_{m}(m+1)=10(3+1)GHz=40GHz$$
 (4.14)

5. VHF predajnik emituje KAM signal sa indeksom modulacije  $m_0$ =45%. Modulišući signal je muzički opsega od 0 do 15kHz. Na izlazu iz prijemnika koji se nalazi na rastojanju d=3km od predajnika izmjeren je odnos signal/šum od 40dB.

Ako predajnik istu snagu emituje postupkom frekvencijske modulacije uz maksimalnu devijaciju učestanosti od 60kHz, pronaći rastojanje na kojem treba da se nalazi FM prijemnik da bi se na njegovom izlazu takođe dobio odnos signal/šum od 40dB.

Pretpostaviti da su spektralne gustine snaga šuma iste u oba slučaja, a da primljena snaga opada sa kvadratom rastojanja od predajnika.

Rješenje:

Srednja snaga signala na ulazu u prijemnik je po postavci:

$$P_{R} \sim \frac{1}{d^2} P_{T} \tag{5.1}$$

gdje je P<sub>T</sub> srednja snaga signala na izlazu iz predajnika.

Snaga KAM signala je:

$$P_{KAM} = P_0 + 2P_0 \frac{m_0^2}{4} = P_0 \left( 1 + \frac{m_0^2}{2} \right)$$
 (5.2)

Dok je snaga jednog bočnog opsega:

$$P_{1B0} = \frac{m_0^2}{4} P_0 = \frac{m_0^2}{4} \frac{P_{KAM}}{\left(1 + \frac{m_0^2}{2}\right)}$$
 (5.3)

Ukupna snaga KAM signala na ulazu u prijemnik je:

$$P_{KAM} = \frac{P_{T}}{d^2} \tag{5.4}$$

Odnos signal/šum biće:

$$A_{Ni} = \frac{4P_{1B0}}{2p_{N}f_{m}} = 2\frac{m_{0}^{2}P_{KAM}}{4p_{N}f_{m}\left(1 + \frac{m_{0}^{2}}{2}\right)} = \frac{m_{0}^{2}P_{T}}{2d^{2}p_{N}f_{m}\left(1 + \frac{m_{0}^{2}}{2}\right)}$$
(5.5)

Odnos signal/šum postupkom frekvencijske modulacije je:

$$A_{Ni} = \frac{(\Delta f_0)^2 P_0}{2p_N \int_0^{f_m} f^2 df} = 3 \frac{(\Delta f_0)^2 \frac{P_T}{d^2}}{2p_N f_m^3}$$
 (5.6)

gdje je P<sub>0</sub> snaga nemodulisanog nosioca na ulazu u prijemnik:

$$P_0 = \frac{P_T}{d^2}$$
 (5.7)

Izjednačavanjem izraza (5.5) i (5.6) dobijamo:

(5.8)

Odakle je:

$$d^{2}=3\left(\Delta f_{0}\right)^{2}\frac{d^{2}\left(1+\frac{m_{0}^{2}}{2}\right)}{m_{0}^{2}f_{m}^{2}}$$
(5.9)

Sada je tražena vrijednost:

$$d' = \frac{d\Delta f_0}{m_0 f_m} \sqrt{3 \left(1 + \frac{m_0^2}{2}\right)} = 48.45 \text{km}$$
 (5.10)