

Lineares Ausgleichsproblem

Als Edwin Hubble (1889-1953) aufgrund seiner astronomischen Beobachtungen am Mount Wilson Observatory 1929 zum ersten mal empirisch belegte, daß sich das Universum ausdehnt, revolutionierte er damit die Kosmologie. Er vermutete eine lineare Beziehung zwischen der Fluchtgeschwindigkeit v von Galaxien und ihrer Entfernung d von der Erde, die heute als Hubble-Gesetz bezeichnet wird, und stützte sich auf die folgenden Originaldaten¹ astronomischer Objekte.

Objekt	d [Mpc]	v [$\frac{\text{km}}{\text{s}}$]	Objekt	d [Mpc]	v [$\frac{\text{km}}{\text{s}}$]	Objekt	d [Mpc]	v [$\frac{\text{km}}{\text{s}}$]
S.Mag.	0.032	+170	NGC5194	0.5	+270	NGC5055	1.1	+450
L.Mag.	0.034	+290	NGC4449	0.63	+200	NGC7331	1.1	+500
NGC6822	0.214	-130	NGC4214	0.8	+300	NGC4258	1.4	+500
NGC598	0.263	-70	NGC3031	0.9	-30	NGC4151	1.7	+960
NGC221	0.275	-185	NGC3627	0.9	+650	NGC4382	2.0	+500
NGC224	0.275	-220	NGC4826	0.9	+150	NGC4472	2.0	+850
NGC5457	0.45	+200	NGC5236	0.9	+500	NGC4486	2.0	+800
NGC4736	0.5	+290	NGC1068	1.0	+920	NGC4649	2.0	+1090

11.1 Hubble-Konstante

(aufgabe11.1.c, aufgabe11.1.pdf, 4 Punkte)

Schreiben Sie ein Programm, um das lineare Ausgleichsproblem $v(d) = H_0 d + v_0$ mit diesen Originaldaten zu lösen und bestimmen Sie auf diese Weise die Hubble-Konstante H_0 (Einheit: km/s/Mpc). Stellen Sie die Messpunkte zusammen mit der Ausgleichsgeraden graphisch dar. Welcher Wert ergibt sich hieraus für das Alter des Universums $T = \frac{1}{H_0}$ (Einheit: Milliarden Jahre)?

11.2 Einfluss einzelner Meßwerte

(aufgabe11.2.pdf, 1 Punkte)

Um den Einfluß einzelner Meßwerte abzuschätzen, führen Sie die gleiche Berechnung noch einmal ohne die vier am weitesten entfernten Objekte durch, deren Geschwindigkeit stark durch die Eigenbewegung des Virgo-Sternhaufens bestimmt wird. Wie groß ist die relative Änderung der Hubble-Konstanten und des Alters des Universums? Mit wie vielen signifikanten Stellen sollten Sie die beiden Werte daher angeben?

11.3 Bestimmtheitsmaß und Linearitätshypothese

(aufgabe11.3.pdf, 2 Punkte)

Ein befreundeter experimenteller Kollege hat Ihnen die auf der Vorlesungshomepage bereitgestellten Rohdaten zugeschickt, und möchte, dass Sie seine revolutionäre Hypothese eines linearen Zusammenhangs durch einen "guten Fit" bestätigen. Wenden Sie Ihre lineare Regression nun also auf diese Daten an (Format ist $\{x, f(x)\}$) und berechnen Sie das Bestimmtheitsmaß R^2 . Liegt es eher nahe bei 0 (schlechter Fit) oder nahe bei 1 (perfekter Fit)? Plotten Sie die Rohdaten sowie die Ausgleichsgerade und überprüfen Sie die Linearitätshypothese. Welche funktionale Abhängigkeit vermuten Sie? Warum ist R^2 hier nicht besonders aussagekräftig?

¹ 1 pc = 3.0875×10^{13} km; Quelle: Edwin Hubble, Proc. Natl. Acad. Sci. 15, 168 (1929)