Übungsblatt 2

Dozent: Priv.Doz. Dr. Daniel Sebastiani

Ausgabe: Montag, 26.10.2009 **Abgabe:** Sonntag, 1.11.2009

Abgabe ausschließlich per Mail an den zuständigen Übungsgruppenbetreuer

Wichtig: Benennen Sie die Dateien wie in der jeweiligen Aufgabe angegeben!

2.1 Fehlerfortpflanzung (`aufgabe2_1.pdf`, 2 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden beiden Algorithmen zur Berechnung von

$$y = \varphi(a,b) = a^2 - b^2, \quad a, b \in \mathbb{R} :$$

$$\text{Algorithmus 1} : \varphi = \varphi^{(2)} \circ \varphi^{(1)} \circ \varphi^{(0)}$$

$$\eta_1 = a \cdot a \qquad \varphi^{(0)}(a,b) = \begin{pmatrix} a^2 \\ b \end{pmatrix}$$

$$\eta_2 = b \cdot b \qquad \varphi^{(1)}(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v^2 \end{pmatrix}$$

$$y = \eta_1 - \eta_2 \qquad \varphi^{(2)}(r,s) = r - s$$

$$\text{Algorithmus 2} : \varphi = \varphi^{(2)} \circ \varphi^{(1)} \circ \varphi^{(0)}$$

$$\eta_1 = a + b \qquad \varphi^{(0)}(a,b) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a+b \end{pmatrix}$$

$$\eta_2 = a - b \qquad \varphi^{(1)}(u,v,w) = \begin{pmatrix} w \\ u-v \end{pmatrix}$$

$$y = \eta_1 \cdot \eta_2 \qquad \varphi^{(2)}(r,s) = r \cdot s$$

Bestimmen Sie die Konditionszahlen

$$\kappa_{ij} = \left| \frac{x_j}{\varphi_i^{(k)}} \frac{\partial \varphi_i^{(k)}}{\partial x_j} \right|, \quad k = 0, 1, 2 \tag{1}$$

der Elementarabbildungen $\varphi^{(k)}$ für die Eingabedaten

$$a = 0.38296539272$$
$$b = 0.3829653927189.$$

2.2 Rundungsfehler (`aufgabe2_2.c`, `aufgabe2_3.pdf`, 2 Punkte)

Die Implementierung einer Reihensumme verlangt aufgrund möglicher Rundungsfehler einige Planung. Betrachten Sie die beiden Reihen:

$$S_{(up)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \tag{2}$$

$$S_{(down)} = \sum_{n=N}^{1} \frac{1}{n} \tag{3}$$

Für endliche N führt eine analytische Summation bei beiden Reihen zum gleichen (endlichen) Ergebnis. Bei einer numerischen Summation kann allerdings auch $S_{(up)} \neq S_{(down)}$ gefunden werden.

- Schreiben Sie ein Programm zur Berechnung von $S_{(up)}$ und $S_{(down)}$ als Funktionen von N (N von 10^1, 10^2, bis 10^8) und geben Sie die Summen in eine Textdatei aus.
- Welche Summationsreihenfolge liefert ein genaueres Ergebnis? Warum?
- Fertigen Sie einen log-log Plot von $|S_{(up)} - S_{(down)}|/(S_{(up)} + S_{(down)})$ gegen N an.

2.3 Kombinatorik (`aufgabe2_4.c`, `aufgabe2_5.pdf`, `aufgabe2_6.c`, 3 Punkte)

Die Anzahl an Teilmengen des Umfangs r einer Menge mit n Elementen ist durch den Binomialkoeffizienten gegeben:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \tag{4}$$

- Schreiben Sie ein Programm zur Berechnung der Fakultät einer gegebenen Zahl N. Identifizieren Sie für die Datentypen `int`, `float` und `double` den größtmöglichen Wert von N, bevor ein Speicherüberlauf auftritt.
- Neben der Fakultät ist auch deren Logarithmus eine wichtige Größe. Für große N kann dieser mit Hilfe der Näherung von Stirling berechnet werden:

  $$\ln N! \approx N \ln N - N$$

  Ändern Sie Ihr Programm ab, damit neben der exakten Fakultät auch die Stirlingsche Approximation berechnet wird. Plotten Sie den prozentualen Fehler des Logarithmus gegen N (Für $N = 10, 20, \ldots, 100$). (aufgabe2_4.c, aufgabe2_5.pdf)
- Implementieren Sie nun einen Algorithmus zur Berechnung des Binomialkoeffizienten (4) und vergleichen Sie ihn mit der vereinfachten Darstellung: (aufgabe2_6.c)

  $$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!} \tag{5}$$