Übungsblatt 3

Dozent: PD Dr. Daniel Sebastiani

Ausgabe: Montag, 02.11.2009 **Abgabe:** Sonntag, 08.11.2009

Polynominterpolation

Wir wollen uns in dieser Übung mit der Genauigkeit der Polynominterpolation in Abhängigkeit von der Verteilung der Stützpunkte beschäftigen. Dazu nehmen wir als Beispiel die sogenannte Runge-Funktion:

$$f(x) = \frac{5}{1+25x^2}, \quad x \in [a,b], a=-1, b=1. \tag{1}$$

Wir betrachten einmal eine gleichmäßige Verteilung der Stützpunkte,

$$x_i^{(n)} = a + ih, \quad h = (b-a)/n, \quad i = 0, \cdots, n \tag{2}$$

und einmal die Verteilung der Punkte, die durch die Nullstellen eines Tschebyscheff-Polynoms bestimmt sind:

$$x_i^{(n)} = -\cos\left(\frac{2i+1}{n+1}\frac{\pi}{2}\right), \qquad i = 0, \cdots, n. \tag{3}$$

3.1 Aufgabe 1 (`aufgabe3_1.c`, 6 Punkte)

Schreiben Sie ein C-Programm, das mit dem Verfahren der dividierten Differenzen die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ der Newtonform des Interpolationspolynoms $p^{(n)}(x)$ liefert. Verwenden Sie dazu folgenden Algorithmus:

> **for** $i = 0, 1, \ldots, n$ **do**
> $t_i = f_i$;
>   **for** $j = i-1, i-2, \ldots, 0 \quad (i \geq 1)$ **do**
> $t_j = (t_{j+1} - t_j)/(x_i - x_j)$
> $a_i = t_0$,

wobei f_i die Stützwerte und x_i die Stützabszissen bezeichnen. Die Auswertung des Interpolationspolynoms an einer beliebigen Abszisse $x \in [a,b]$ kann mit folgendem Horner-artigen Schema erfolgen:

> $p = a_n$;
> **for** $i = n-1, n-2, \ldots, 0$ **do**
> $p = p \cdot (x - x_i) + a_i$

Berechnen Sie für die $n = 5, 12, 22$ den Wert p des Interpolationspolynoms an der Stelle $x = \pi/4$ und bestimmen Sie jeweils $|f(x) - p^{(n)}(x)|$. Verwenden Sie dafür beide Stützpunktverteilungen (vgl. Gl. 2 und 3).

3.2 Aufgabe 2 (`aufgabe3_2.c`, `aufgabe3_2.pdf`, 4 Punkte)

Berechnen Sie die Interpolationspolynome $p^{(n)}(x)$, $n = 5, 12, 22$ für Stützstellen der Form (2) und (3) und werten Sie die Polynome an Abszissen $x_i^{(k)}$, $i = 0, \ldots, k$ der Form (2) mit k = 500 aus. Stellen Sie jeweils die Funktion $f(x)$ und das Interpolationspolynom $p^{(n)}(x)$ graphisch dar.