Übungsblatt 7

Dozent: PD Dr. Daniel Sebastiani

Ausgabe: Montag, 7.12.2009 **Abgabe:** Sonntag, 13.12.2009

7.1 Gauss-Integration: Gewichte und Nullstellen (`aufgabe7_1.pdf`, 4 Punkte)

1. Bestimmen Sie die Gewichte $\omega_i^{(n)}$ für $n = 3$ *analytisch* durch Lösen des linearen Gleichungssystems
$$\sum_{i=1}^{n} p_{j-1}\left(x_i^{(n)}\right)\omega_i^{(n)} = \delta_{j,1}\langle p_0|p_0\rangle, \qquad j = 1,\ldots,n$$
mit den eindeutigen orthogonalen normierten Polynomen $p_j(x)$ zu $\omega(x) = 1$ und den Nullstellen $x_i^{(n)}$ von $p_n(x)$ (s. Aufgabe 6.2). Zeigen Sie analytisch, dass die Polynome x^4 und x^5 über [-1,1] mit diesen Gewichten exakt integriert werden.
2. Zeigen Sie, dass zwei aufeinanderfolgende Polynome $p_n(x)$ und $p_{n+1}(x)$ (für beliebige Gewichtsfunktionen $\omega(x)$) keine gemeinsame Nullstelle $x_i^{(n)} = x_j^{(n+1)}$ haben können.

7.2 Gauss-Integration: Fehlerfunktion (`aufgabe7_2.pdf`, `aufgabe7_2.c`, 3 Punkte)

Für $n = 10$ ist dieses Gleichungssystem nicht mehr ganz so einfach von Hand zu lösen; die numerische Invertierung wird erst in 2010 Thema sein. Unter der Adresse

`www.convertit.com/Go/Convertit/Reference/AMS55.ASP?Res=150&Page=916`

finden Sie jedoch bereits jetzt numerische Werte für die Nullstellen des Polynoms $p_{10}(x)$ (mit $\omega(x) = 1$) sowie die daraus berechneten Gewichte $\omega_i^{(10)}$. Alternativ können Sie auch die Funktion `GaussianQuadratureWeights[10, -1, 1, 20]` in *Mathematica* benutzen (diese benötigt den vorausgehenden Befehl `<< NumericalDifferentialEquationAnalysis``). Programmieren Sie die Gauß-Integration mit n=10 Punkten.

Hiermit sollen folgende Integrale numerisch berechnet werden:

$$P_m = \int_0^1 x^m \, dx \qquad (1)$$
$$E(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} \, dt \qquad (2)$$

Erstellen Sie für Integrale P_m mit $m = 0, 2, 4, \ldots, 22$ eine Tabelle mit exakten und numerisch berechneten Werten. Berechnen Sie den relativen Fehler und plotten Sie den Logarithmus des relativen Fehlers gegenüber m.

Berechnen Sie das Integral $E(x)$ für $x = jh$ mit $j = 1, \ldots, 500$ und $h = 0.01$ und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der Fehlerfunktion `erf(x)`, wie sie in der C-Standardbibliothek implementiert ist. Plotten Sie auch hier den relativen Fehler.