all

1 Guía 1

(1) Considerar la siguiente función de movimiento de un cuerpo que se desplaza en línea recta:

$$x(t) = 1\,[\tfrac{m}{s^2}]\,t^2 - 3\,[\tfrac{m}{s}]\,t$$

donde x está dado en metros y t en segundos.

(a) Graficar la función $x(t)$.

(b) Determinar analíticamente en todos los casos y gráficamente en los siete primeros casos, los valores de velocidad media del móvil en los siguientes intervalos de tiempo (expresados en segundos):

$$[-1,5], \quad [-1,4], \quad [-1,1], \quad [-1,-0.5],$$
$$[-1,-0.8], \quad [-1,-0.9], [-1,-0.99],$$
$$[-1,-0.999],\ [-1,-0.9999].$$

(c) Sea $\Delta t_n = t_n - t_0$, con $t_0 = -1\,s$, $t_1 = 5\,s$, $t_2 = 4\,s$, $\dots$, $t_9 = -0.9999\,s$. A medida que t_n se hace más pequeño, ¿a qué valor se aproxima la velocidad media del móvil en el intervalo $[-1, -1+\Delta t_n]$? ¿Cómo se interpreta geométricamente este resultado?

(d) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la función $x(t)$ en $t = -1\,s$.

(a) Graficar una función, primer año, no es necesario hacerlo.

(b) La velocidad media de un objeto en un intervalo de tiempo de longitud Δt se define como $\overline{v} = \Delta x/\Delta t$. Es fácil ver que para la lista de intervalos que nos dieron, las velocidades medias son

$$1, \quad 0, \quad -3, \quad -4.5, \quad -4.8, \quad -4.9, \quad -4.99, \quad -4.999$$

(c) Veamos que

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{x(-1+\Delta t) - x(-1)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}(-1)$$

Es decir, el límite que nos interesa es la derivada evaluada en -1. Como $x'(t) = 2t-3$, tenemos $2(-1)-3 = -5$, lo cual coincide con lo que observamos en (b).

(d) La recta tangente a $x(t)$ en un punto $(t_0, x(t_0))$ es la única recta que atraviesa dicho punto y cuya pendiente es la derivada de $x(t)$ en t_0. La pendiente en $t_0 = -1$s, como ya vimos, es $a = -5$.

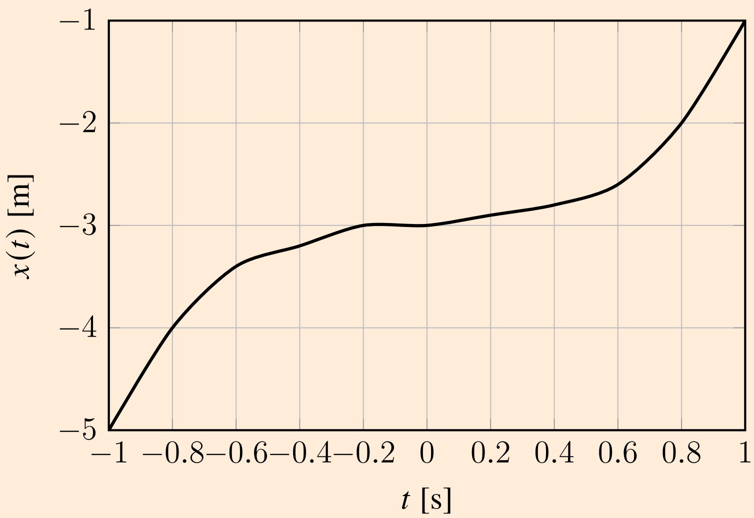
(2) Considere la posición de un móvil que se desplaza en línea recta bajo la ecuación $x(t)$ dibujada abajo, donde $[x] = \mathrm{m}, x(t = 0) = -3\mathrm{m}$.

(a) Determinar la longitud total del camino recorrido en $I_0 = [-1, -0.8], I_1 = [-0.6, 0.6], I_2 = [-1, 1]$.

(b) Determinar la velocidad media en dichos intervalos.

(c) Determinar gráficamente la velocidad instantánea del móvil en los siguientes instantes: $t = 0, t = 0.8$.

(d) Determinar aproximadamente para qué valores de t el móvil se encuentra a 1m de distanca de la posición que tiene en $t = 0$.



(a) En el intervalo de tiempo I_0, el móvil se movió de la posición -5m a -4m, i.e. recorrió un metro. Etc.

(b) Ya sabemos hacer esto: $\overline{v} = \Delta x/\Delta t$. Etc.

(c) La velocidad instantánea en un punto t_0 se calcula gráficamente dibujando la recta tangente a $x(t_0)$ y determinando la pendiente de dicha recta.

(d) Gráficamente, se ve que se da en $t = 0.8, t = -0.8$.

(5) Sea $x(t) = -5t^2 + 17t + 3$ la función de posición de una partícula con $[x] = \text{m}$, $[t] = \text{s}$.

(a) Determinar la posición de la partícula en $t = 1, 2, 3\text{s}$.

(b) Determinar el tiempo en que la partícula retorna al origen.

(c) Obtenga $v(t)$ y determine la velocidad instantánea en $t = 1, 2, 3\text{s}$, cuándo la velocidad es nula, y cuál es la velocidad de la partícula cuando pasa por el origen.

(d) Grafique $x(t), v(t), a(t)$.

(a) Una pavada, evaluar $x(t)$ en esos valores.

(b) La partícula retorna al origen siempre que $x(t) = 0$, con soluciones

$$t = \frac{-17 \pm \sqrt{17^2 - 4 \cdot (-5) \cdot 3}}{-10} \iff t \in \{-0.16815416922, 3.56815416923\}$$

Pero el tiempo no puede ser positivo, con lo cual la única solución que consideramos es $t_0 \approx 3.568$.

(c) $v(t) = x'(t) = -10t + 17$. La velocidad en los tiempos dados se obtiene evaluando la función (trivial). La velocidada es nula si y solo si

$$v(t) = 0 \iff t = \frac{17}{10} \iff t = 1.7$$

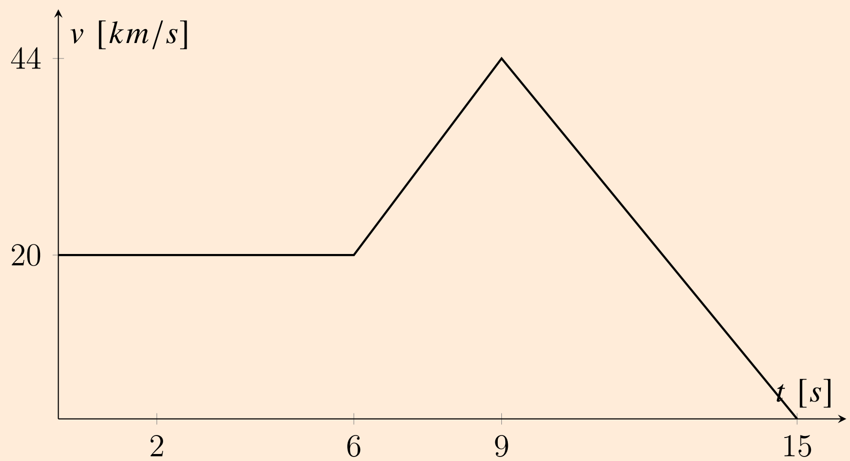
La velocidad al pasar por el origen es $v(t_0) \approx v(3.568) = -18.68$.

(d) $a(t) = v'(t) = -10$ es una función constante. $v(t)$ es lineal y fácil de calcular. De $x(t)$ ya conocemos las raíces, sabemos que tiene "alas" hacia abajo (pues el coeficiente a de la cuadrática es negativo), y que el máximo es el punto medio entre las raíces, i.e.

$$t_{\text{max}} = \frac{-0.16815416922 + 3.56815416923}{2} = \frac{3.4}{2} = 1.7$$

Esto es suficiente para hacer un gráfico aproximado. Podemos agregar que $x(0) = 3$ si queremos ser más bonitos aún.

6. La figura muestra la velocidad de un móvil en función del tiempo:



(a) Determine la aceleración instantánea del móvil para $t = 3\,s$ y $t = 11\,s$.

(b) Calcule la distancia recorrida por el móvil en los intervalos de tiempo $t = [0, 5]\,s$, $t = [0, 9]\,s$ y $t = [0, 15]\,s$.

(c) Conociendo que $x(t = 6\,s) = 0\,m$, encuentre la posición del móvil en $t = 0\,s$.

(d) Dé una expresión de la posición del móvil válida para todo t.

(e) Grafique $x(t)$, $v(t)$ y $a(t)$.

(a) Del gráfico obtenemos que

$$v(t) = \begin{cases} 20 & 0 \leqslant t < 6 \\ \ell_1(t) & 6 \leqslant t < 9 \\ \ell_2(t) & 9 \leqslant t \leqslant 15 \end{cases}$$

donde ℓ_1, ℓ_2 son funciones lineales a determinar. Sabemos que $\ell_1(6) = 20, \ell_1(9) = 44$, lo cual es suficiente para determinar la función. La pendiente es

$$a_1 = \frac{\Delta \ell_1}{\Delta t} = \frac{44 - 20}{9 - 6} = 8$$

Como $\ell_1(6) = 20$, necesitamos $8 \cdot 6 + b_1 = 20 \iff b_1 = -28$.

$\therefore \ell_1(t) = 8t - 28.$

De manera análoga se determina que $\ell_2(t) = -\frac{22}{3}t + 110.$

Sabiendo $v(t)$, determinamos la aceleración como

$$a(t) = v'(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leqslant t < 6 \\ 8 & 6 \leqslant t < 9 \\ -\frac{22}{3} & 9 \leqslant t \leqslant 15 \end{cases}$$

lo cual es suficiente para calcular la aceleración instantánea en los puntos de interés.

(b) La distancia recorrida por un móvil con función de velocidad $v(t)$ en un intervalo de tiempo I es

$$\int_I |v(t)| \ dt$$

Para un intervalo general $I = [a, b]$, usando el hecho de que $v(t) > 0 \Rightarrow |v(t)| = v(t)$,

$$\int_I |v(t)| \ dt = x(b) - x(a) \tag{1}$$

pues $x(t)$ es la primitiva de $v(t)$. Pero

$$\begin{aligned} x(t) &= \int v(t) \ dt \\ &= \begin{cases} 20t + \varphi_1 & 0 \leqslant t < 6 \\ 4t^2 - 28t + \varphi_2 & 6 \leqslant t < 9 \\ -\frac{22}{6}t^2 + 110t + \varphi_3 & 9 \leqslant t \leqslant 15 \end{cases} \end{aligned}$$

para algunas constantes $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in \mathbb{R}$. Dichas constantes dependen del sistema de coordenadas elegido para la función de posición, pero además deben satisfacer las restricciones de continuidad. Sabemos que $x(6) = 0$ por el enunciado (c). Entonces $x(6) = 20t + \varphi_1 = 0 \iff \varphi_1 = -120$. Para satisfacer continuidad, necesitamos

$$20(6) - 120 = 4(6^2) - 28(6) + \varphi_2 \iff \varphi_2 = 24$$

De manera análoga se obtiene $\varphi_3 = -597$. Por lo tanto,

$$x(t) = \begin{cases} 20t - 120 & 0 \leqslant t < 6 \\ 4t^2 - 28t + 24 & 6 \leqslant t < 9 \\ -\frac{22}{6}t^2 + 110t - 597 & 9 \leqslant t \leqslant 15 \end{cases}$$

Usando la ecuación (1), la distancia recorrida en $I_0 = [0, 5]$ será

$$x(5) - x(0) = -20 + 120 = 100$$

(en kilómetros). Para $I_1 = [0, 9]$ será

$$\int_0^6 v(t)\ dt + \int_6^9 v(t)\ dt = [x(6) - x(0)] + [x(9) - x(6)] = \text{etc.}$$

(d) Ya lo hicimos al hallar $x(t)$.

(e) Etc.

(7) Un camión y un auto parten en el instante $t = 0$, el auto estando cierta distancia Δx tras el camión. El camión tiene una aceleración $a_{\text{truck}} = 1.2\text{m/s}^2$, el auto una aceleración $a_{\text{car}} = 1.8\text{m/s}^2$. El auto alcanza al camión cuando éste ha recorrido 45m.

(a) Determinar el tiempo t_* que tarda el auto en alcanzar al camión.

(b) Determinar Δx.

(c) Determinar $v_{\text{car}}(t_*)$, $v_{\text{truck}}(t_*)$.

(d) Graficar posición, velocidad y aceleración de ambos.

(a) Sabiendo las aceleraciones, podemos determinar las velocidades y con ellas las posiciones. En particular,

$$\begin{aligned} v_{\text{car}}(t) &= 1.8t \text{ m/s} + \alpha_1 \text{ m/s}, \qquad & x_{\text{car}}(t) &= 0.9t^2 + \alpha_1 t \text{ m} + \alpha_2 \text{ m} \\ v_{\text{truck}}(t) &= 1.2 \text{ m/s} + \beta_1 \text{ m/s}, \qquad & x_{\text{truck}}(t) &= 0.6t^2 \text{ m} + \beta_1 t \text{ m} + \beta_2 \text{ m} \end{aligned}$$

con $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, 2$. Ambos vehículos parten en el instante $t = 0$, así que en dicho instante sus velocidades son nulas:

$$v_{\text{car}}(t = 0) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0, \qquad v_{\text{truck}}(t = 0) = 0 \Rightarrow \beta_1 = 0$$

Si definimos el origen de nuestro sistema como el punto de partida del auto,

$$x_{\text{car}}(t = 0) = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0, \qquad x_{\text{truck}}(t = 0) = \Delta x \Rightarrow \beta_2 = \Delta x$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} v_{\text{car}}(t) &= 1.8t \text{ m/s}, \qquad & x_{\text{car}}(t) &= 0.9t^2, \\ v_{\text{truck}}(t) &= 1.2 \text{ m/s}, \qquad & x_{\text{truck}}(t) &= 0.6t^2 \text{ m} + \Delta x \text{ m} \end{aligned}$$

El instante t_* es el instante en que el camión ha recorrido 45m:

$$
\begin{aligned}
\int_0^{t_*} v_{\text{truck}}(t)\ dt = 45 \iff & x_{\text{truck}}(t_*) - x_{\text{truck}}(0) = 45 \\
\iff & \quad 0.6t_*^2 + \Delta x - \Delta x = 45 \\
\iff & \quad 0.6t_*^2 = 45 \\
\iff & \quad t_*^2 = 75 \\
\iff & \quad t_* = 5\sqrt{{}_*3}
\end{aligned}
$$

(b) Sabemos que $x_{\text{car}}(t_*) = x_{\text{truck}}(t_*)$, con lo cual obtenemos

$$
0.9(5\sqrt{3})^2 = 0.6(5\sqrt{3})^2 + \Delta x \iff \Delta x = 22.5
$$

(c) Una pavada.

(d) Una pavada.

(8) Un automóvil se desplaza por una carretera que es paralela a la vía de un tren. El automóvil se detiene ante un semáforo que está con luz roja en el mismo instante que pasa un tren con una velocidad constante de $12.0\,\mathrm{m/s}$. El automóvil permanece detenido durante $6.0\,\mathrm{s}$ y luego parte con una aceleración constante de $2.0\,\mathrm{m/s^2}$.

Determine:

1. El tiempo que emplea el automóvil en alcanzar al tren, medido desde el instante en que se detuvo ante el semáforo.
2. La distancia que recorrió el automóvil desde el semáforo hasta que alcanzó al tren.
3. La velocidad del automóvil en el instante que alcanza al tren.

(1) Sea $t = 0$ el tiempo en que el auto se detiene en el semáforo, y $x(0)$ la posición del semáforo. Sabemos que para $t \geqslant 6$,

$$v_{\text{car}}(t) = 2t \text{ m/s} + \alpha_1, \qquad x_{\text{car}}(t) = t^2 \text{ m} + \alpha_1 t + \alpha_2$$

siendo ambas funciones constanatemente nulas para $0 \leqslant t < 6$.

Como la velocidad en el instante $t = 6$ es nula, $v_{\text{car}}(6) = 0 \iff 12 + \alpha_1 = 0 \iff \alpha_1 = -12$. Como la posición en el instante 6 es nula, $6^2 - 12(6) + \alpha_2 = 0 \iff \alpha_2 = 36$.

$$\therefore \qquad v_{\text{car}}(t) = 2t \text{ m/s} - 12 \text{ m/s}, \qquad x_{\text{car}}(t) = t^2 \text{ m} - 12t \text{ m} + 36 \text{ m}$$

para $t \geqslant 6$. De manera análoga, para todo $t \geqslant 0$,

$$x_{\text{train}}(t) = 12t \text{ m}$$

donde la constante de integración debe ser cero para satisfacer que la posición del tren en el instante inicial es nula.

El tiempo $t_* > 6$ en que el auto alcanza al tren satisface

$$\begin{aligned} x_{\text{train}}(t_*) = x_{\text{car}}(t_*) &\iff 12t_* = t_*^2 - 12t_* + 36 \\ &\iff t_*^2 - 24t_* + 36 = 0 \end{aligned}$$

con soluciones

$$t_* = \frac{24 \pm \sqrt{24^2 - 4(36)}}{2} \iff t_* \in \{1.60769515459, 22.3923048454\}$$

La solución $t_* \approx 1.608$ no debe considerarse y por ende $t_* \approx 22.392$.

(2) La distancia recorrida por el automóvil desde el semáforo hasta que alcanzó el tren es dada por

$$\begin{aligned}
\int_{t=0\text{s}}^{t=t_*\text{s}} |v_{\text{car}}(t)| \ dt &= \int_{t=6\text{s}}^{t=t_*\text{s}} |v(t)| \ dt \\
&= \int_{t=6\text{s}}^{t=t_*\text{s}} v(t) \ dt \\
&= x(t_*) - x(6) \\
&= x(t_*)
\end{aligned}$$

donde el valor absoluto desaparece puesto que en $t \geqslant 6$ la función integrada es claramente mayor o igual a cero. Usando la aproximación $t_* \approx 22.392$, se obtiene $x(t_*) \approx 268.697$ m.

(c) Una pavada: evaluar $v_{\text{car}}(t_*)$.

(11) El movimiento en el plano de una partícula es dado por $x(t) = at^2$ e $y(t) = bt^3$ con $a = 3\text{m/s}^2$, $b = 2\text{m/s}^3$.

(a) Hallar la trayectoria de la particula.

(b) Calcular su aceleración en $t = 12\text{s}$.

(c) Calcular el ángulo entre los vectores velocidad y aceleración en dicho instante.

(d) Determinar el instante t_1 en que la aceleración es paralela a la recta $y = x$ y el instante t_2 en que la velocidad lo es.

(e) Determinar la velocidad media entre los dos instantes calculados en (d).

(a) La trayectoria es el conjunto de puntos

$$\begin{aligned} S &= \{(x(t), y(t)) : t \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{(at^2, bt^3) : t \in \mathbb{R}\right\} \end{aligned}$$

Dado un punto $p_0 = (x, y)$ arbitrario de la trayectoria, se satisface que

$$x = at^2, \qquad y = bt^3$$

Tomemos $t \geqslant 0$. De la primera ecuación deducimos $t = \sqrt{\frac{x}{a}}$. De la segunda ecuación deducimos

$$y = bt^3 = b\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Por lo tanto, para todo $t \geqslant 0$, la función

$$\tau(x) = b\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{3}{2}}$$

describe la trayectoria del móvil.

(b) La velocidad y aceleración del móvil es dada por

$$v_x(t) = 2at, \qquad a_x(t) = 2a, \qquad\qquad v_y(t) = 3bt^2, \qquad a_y(t) = 6bt$$

o más rigurosamente

$$v(t) = 6t\hat{i} + 6t^2\hat{j}, \qquad a(t) = 6\hat{i} + 12t\hat{j}$$

La aceleración en $t = 12$ es trivial: evaluar $a(t)$ en dicho valor.

(c) A calcularla nomás:

$$v(12) = 72\hat{i} + 864\hat{j}, \qquad\qquad a(12) = 6\hat{i} + 144\hat{j}$$

donde la unidad de la coordenada x está en m/s^2, y la de y en m/s^3. Recordemos que el producto punto entre dos vectores se define como

$$\vec{w} \cdot \vec{u} = uw\cos\theta$$

con $\cos\theta$ el ángulo entre ellos, pero que además satisface que $\vec{w} \cdot \vec{u} = \vec{w}_x\vec{u}_x + \vec{w}_y\vec{u}_y$. Por ende, el producto cruz de los vectores de aceleración y posición satisface

$$72(6) + 864(144) = |v(12)|\,|a(12)|\cos\theta$$

Las magnitudes de ambos vectores son

$$|v(12)| = 866.995, \qquad |a(12)| = 144.125$$

Sustituyendo con el resultado de las operaciones y dividiendo por el producto de las magnitudes, obtenemos

$$0.99827265479 = \cos\theta \iff \theta = 1.51201125\text{rad}$$

(d) Queremos saber el instante t_1 en que el ángulo φ entre la aceleración y la recta $y = x$ es nulo, i.e. el momento en que el ángulo entre la aceleración y el eje x es $\frac{\pi}{4}$. Hay dos formas de resolver esto. La más simple es ver que el vector tiene dicho ángulo si y solo si la componente x es igual a la componente y, y planteando al ecuación

$$a_x(t_1) = a_y(t_1) \iff 6 = 12t_1 \iff t_1 = 1/2$$

Sólo para tener en cuenta que nos podrían haber pedido un ángulo φ menos obvio respecto al eje x, la forma general (pero más densa) de calcular esto es planteando la ecuación:

$$
\begin{aligned}
& \frac{\vec{a}(t_1) \cdot \hat{i}}{|\vec{a}(t_1)|\,|\hat{i}|} = \cos\varphi \\
\iff \quad & \frac{a_x(t_1)}{|\vec{a}(t_1)|} = \cos(\frac{\pi}{4}) \\
\iff \quad & \frac{6}{\sqrt{6^2 + 12^2 t_1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
\iff \quad & \frac{36}{36 + 144 t_1^2} = \frac{1}{2} \\
\iff \quad & 72 = 36 + 144 t_1^2 \\
\iff \quad & 144 t_1^2 - 36 = 0 \\
\iff \quad & 36\left(4t_1^2 - 1\right) = 0 \\
\iff \quad & 4t_1^2 - 1 = 0 \\
\iff \quad & 4t_1^2 = 1 \\
\iff \quad & t_1^2 = \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Como $t > 0$ esto da una única solución $t_1 = 1/2$. Para la velocidad hacemos solo la forma simple, viendo que

$$v_x(t_2) = v_y(t_2) \iff 6t_2 = 6t_2^2 \iff t_2 = t_2^2 \iff t = 1$$

(pues $t > 0$).

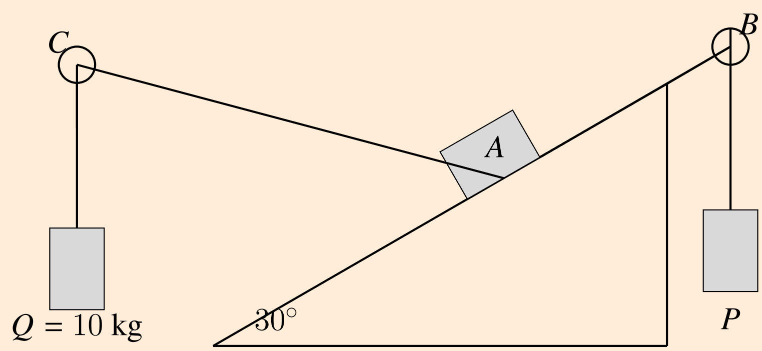
(e) La velocidad media entre los dos instantes es

$$\Delta\vec{x}/\Delta t = \frac{(3 * 1^2 - 3 * (0.5^2)), 2 * 1^3 - 2 * (0.5^2)}{0.5} = \frac{(2.25, 1.75)}{0.5} = (4.5, 3.5)\text{m/s}$$

2 Guía 2

(1) La siguiente figura muestra una masa A de $100\,\mathrm{kg}$, apoyada sobre la superficie de un plano inclinado. No existe rozamiento entre la masa A y la superficie del plano inclinado. La cuerda AB es paralela al plano en que se apoya A, en tanto que la cuerda AC está horizontal. Calcular:

1. el peso del bloque P sabiendo que el sistema está en equilibrio,
2. la reacción del plano sobre el bloque A.



(El gráfico es sólo esquemático: la cuerda AB es horizontal!)

(1) Definamos un nuevo sistema de coordenadas, con un vector unitario paralelo a la superficie y otro perpendicular a la superficie:

$$\hat{p} = (\cos\theta, \sin\theta), \qquad \hat{n} = (-\sin\theta, \cos\theta)$$

(por $\hat{p}$aralela y $\hat{n}$ormal). Recordemos que la proyección escalar de un vector $\vec{v}$ sobre un vector $\vec{w}$ se define como $\vec{v} \cdot \vec{w}$.

El sistema está en equilibrio. Por ende, las fuerzas que mueven la masa A hacia arriba y hacia abajo de la superficie suman cero (se equilibran). Dichas fuerzas son

$$\vec{G} = -m_A g \hat{j}, \qquad \vec{F_Q} = -m_Q g \hat{i}, \qquad \vec{F_P} = m_P g \hat{p}$$

Por ende,

$$G_{\parallel} + F_{Q\,\parallel} + F_{P\,\parallel} = 0 \tag{1}$$

donde el sufijo $\|$ indica "el componenete paralelo a la superficie" de la fuerza y $\vec{G}$ es la fuerza de la gravedad. Ya dijimos que dicho componente será el producto punto entre cada vector y $\hat{p}$.

> **Nota.** Si un vector ya es paralelo a cierto vector unidad, como $\vec{F_P}$ es paralelo a $\hat{p}$, la proyección de dicho vector sobre el unitario es simplemente la magnitud del vector. Es decir, $F_{P\ \|} = \vec{F_P} \cdot \hat{p} = F_P$. (Ver nota al final para una demostración.)

Obtenemos entonces que la ecuación (1) resulta:

$$-m_A g \sin\theta + (-m_Q g)\cos\theta + m_P g = 0 \tag{2}$$

de lo cual se sigue que

$$m_P = m_A \sin\theta + m_Q \cos\theta = 100\text{kg}\frac{1}{2} + 10\text{kg}\frac{\sqrt{3}}{2} = 58.6602540378\text{kg}$$

(2) Como no hay fricción, la reacción del plano sobre el bloque es dada estrictamente por la fuerza normal. Dicha fuerza es paralela al vector unitario $\hat{n}$, i.e. es perpendicular a la superficie. Su magnitud debe contraarrestar la de todas las fuerzas que actúan en dirección perpendicular a la superficie. Dichas fuerzas son la gravedad y la fuerza de la polea estirada por Q, con componentes perpendiculares a la superficie dados por:

$$G_\perp = \vec{G} \cdot \vec{n} = -m_A g \cos\theta = -(100\text{kg} \cdot \sqrt{3}/2 \cdot \cdot 9.8\text{m/s}^2) = -848.704895709\text{N}$$
$$F_{Q\perp} = \vec{F_Q} \cdot \vec{n} = (-m_Q g)(-\sin\theta) = 10\text{kg} \cdot 1/2 \cdot 9.8\text{m/s}^2 = 49\text{N}$$

La suma de ambas componentes nos da $-848.704895709\text{N} + 49\text{N} = -799.704895709$, lo cual quiere decir que $N \approx 800\text{N}$ es la reacción del plano.

(2) Un cuerpo de masa $m = 10\text{kg}$ está apoyado en una superficie horizontal sin rozamiento. Una persona tira del bloque con una soga fija al bloque en dirección horizontal con una fuerza de 20N. Calcular la aceleración del bloque suponiendo despreciable la masa de la soga.

Como el movimiento es horizontal, $\vec{a} = a\hat{i}$ y solo basta determinar a. Por la segunda ley de Newton, $F = ma$, de lo cual se sigue que $20\text{N}/10\text{kg} = a$, es decir $a = 2\text{m/s}^2$.

(4) Un bloque A de masa $m_A = 8\text{kg}$ descansa sobre un plano inclinado con ángulo $\alpha = 37^\circ$, unido con una cuerda y una polea sin rozamiento a un bloque B de masa $m_B = 4\text{kg}$. Determina la aceleración $\vec{a}$ de las masas y la tensión de la cuerda cuando se deja al sistema evolucionar libremente. Realice un diagrama de cuerpo aislado.

Sean

$$\hat{p} = (\cos\alpha, \sin\alpha), \qquad \hat{n} = (-\sin\alpha, \cos\alpha)$$

los vectores unitarios de un sistema de coordenadas con ejes paralelo ($\hat{p}$) y perpendicular ($\hat{n}$) al plano inclinado.

A se mueve paralelo al plano. Luego $\vec{a_A} = a_A\hat{p}$ y solo queda determinar a_A. B se mueve verticalmente. Luego $\vec{a_B} = a_B\hat{j}$ y solo queda determinar a_2. Por la segunda ley de Newton,

$$m_A a_A = G_{A\,\|} + T, \qquad m_B a_B = G_B + T$$

con el sufijo $\|$ indicando el componente de una fuerza paralelo al plano inclinado. Es claro que $a_A = -a_B$. Además, de la segunda ecuación arriba podemos tomar $T = m_B a_B - G_B$. Sustituyendo en la primera expresión,

$$\begin{aligned} m_A a_A &= G_{A\|} + (m_B a_B - G_B) \\ &= G_{A\|} - m_B a_A - G_B \end{aligned}$$

con lo cual obtenemos una ecuación con única incógnita a_A. Resolviendo:

$$
\begin{aligned}
a_A &= \frac{G_{A\,\parallel} - G_B}{m_A + m_B} \\
&= \frac{(\vec{G}_A \cdot \hat{p}) - (-m_B g)}{12\mathrm{kg}} \\
&= \frac{(-m_A g \sin\alpha) + m_B g}{12\mathrm{kg}} \\
&= \frac{-8\mathrm{kg} \cdot 9.8\mathrm{m/s}^2 \cdot 0.602) + 4\mathrm{kg} \cdot 9.8\mathrm{m/s}^2}{12\mathrm{kg}} \\
&= \frac{(-8 \cdot 9.8\mathrm{m/s}^2 \cdot 0.602) - 4\mathrm{kg} \cdot 9.8\mathrm{m/s}^2}{12} \\
&= -0.6664\mathrm{m/s}^2
\end{aligned}
$$

Habiendo determinado la aceleración, podemos determinar T recordando que $m_B a_B = G_B + T$, es decir

$$T = 4\mathrm{kg} \cdot 0.6664\mathrm{m/s}^2 + 4\mathrm{kg} \cdot 9.8\mathrm{m/s}^2 = 41.856\mathrm{N}$$

(5) Dos bloques de masas m_1, m_2 están en contacto sobre una mesa sin rozamiento. Una fuerza $\vec{F}$ se aplica sobre el primero.

(a) Encontrar la aceleración del sistema y la fuerza de contacto entre los bloques. Evaluar para $m_1 = 2$kg, $m_2 = 1$kg, $F = 3$N.

(b) Muestre que si la misma fuerza $\vec{F}$ se aplica en sentido contrario, i.e. sobre m_2 en lugar de m_1, la fuerza de contacto será distinta.

(a) Si consideramos ambos bloques como un único sistema al que se le aplica una fuerza $\vec{F}$,

$$F = (m_1 + m_2)a \iff a = \frac{F}{m_1 + m_2}$$

Para el caso particular que se nos pide,

$$a = \frac{3\text{N}}{3\text{kg}} = 1\frac{m}{s}^2$$

(b) Considere el diagrama de cuerpo aislado de la segunda masa. La única fuerza que recibe es la fuerza de contacto F_c, que resultará siendo $F_c = am_2$. Pero si la fuerza se aplicara en sentido contrario, en el diagrama de cuerpo aislado de la primera masa tendríamos $F_c = am_1$.

(6) Una bola de masa $m = 10\text{kg}$ cuelga atada al techo de un auto. La tensión máxima que la soga soporta sin romperse es 500N. ¿Cuál es la máxima aceleración horizontal que puede alcanzar el auto sin que se corte la cuerda? Determina el ángulo entre la cuerda y la vertical para esa aceleración máxima.

Por la segunda ley de Newton,

$$\begin{aligned} \vec{F} = m\vec{a} &\iff \vec{T} + \vec{G} = m\vec{a} \\ &\iff \vec{T} = m\vec{a} + \vec{G} \\ &\iff \vec{T} = ma\hat{\imath} - mg\hat{\jmath} \\ &\Rightarrow T = \sqrt{m^2a^2 + m^2g^2} \end{aligned}$$

con T la tensión de la soga (magnitud de $\vec{T}$). Asumamos que la tensión de la soga es 500N. Luego

$$\begin{aligned} & 500^2\text{N}^2 = m^2a^2 + m^2g^2 \\ \iff\quad & a^2 = \frac{-m^2g^2 + 500^2\text{N}^2}{m^2} \\ \iff\quad & a = \sqrt{\frac{-(mg)^2 + (500\text{N})^2}{m^2}} \\ \iff\quad & a = \sqrt{\frac{-9604\text{N}^2 + 250000\text{N}^2}{(10\text{kg})^2}} \\ \iff\quad & a = 49.0301947783\text{m/s}^2 \end{aligned}$$

El ángulo entre la cuerda y la vertical se corresponde con el ángulo θ entre la cuerda y el vector de gravedad. Y sabemos que

$$\frac{\vec{T} \cdot \vec{G}}{|\vec{T}||\vec{G}|} = \cos\theta$$

Si asumimos que la aceleración es la máxima, podemos usar que $\vec{T} = ma\hat{\imath} - mg\hat{\jmath}$ para obtener que

$$\vec{T} \cdot \vec{G} = (-mg)(-mg) = 9604\text{N}^2$$

y $\left|\vec{T}\right|\left|\vec{G}\right| = 500\text{N} \cdot 98\text{N} = 9800\text{N}$ para obtener que

$$\cos\theta = \frac{9604\text{N}^2}{9800\text{N}} = 0.98\text{N} \iff \theta = 1.37046148\text{rad}$$

(9) Un bloque de masa m se desliza sobre el suelo mientras una fuerza de magnitud 12N tira del mismo formando un ángulo θ con la horizontal. $\mu_d = 0.4$. $\theta \in [0, \pi/2]$. El bloque siempre permanece sobre el suelo. Hallar θ que maximiza la aceleración.

El problema establece que la aceleración es horizontal, i.e. $\vec{a} = a\hat{\imath}$ y basta maximizar a. Sabemos que

$$F_{\parallel} + R = ma$$

con $\vec{R}$ la fuerza de rozamiento y $\vec{F}_{\parallel}$ la proyección de $\vec{F}$ en $\hat{\imath}$. Pero entonces la ecuación resulta

$$\left|\vec{F}\right| \cos\theta + \mu_d \left|\vec{N}\right| = ma$$

La fuerza normal es el conjunto de fuerzas verticales, i.e. la fuerza que se opone a la gravedad más la componente perpendicular de $\vec{F}$:

$$\left|\vec{N}\right| = mg + \left|\vec{F}\right| \sin\theta$$

Resulta entonces

$$\begin{aligned} & 12\text{N}\cos\theta + \mu_d\left(mg + 12\text{N}\sin\theta\right) = ma \\ \iff \quad & a = \frac{12\text{N}\cos\theta + \mu_d mg + \mu_d 12\text{N}\sin\theta}{m} \\ \iff \quad & a = \frac{12\text{N}(\cos\theta + \mu_d \sin\theta) + \mu_d mg}{m} \end{aligned}$$

Es claro que maximizar a respecto a θ se corresponde con maximizar

$$\varphi(\theta) := \cos\theta + \mu_d \sin\theta$$

Ahora bien, $\varphi' = \frac{d\varphi}{d\theta} = -\sin\theta + \mu_d \cos\theta$ y

$$
\begin{aligned}
\varphi'(\theta) = 0 &\iff \mu_d \cos\theta = \sin\theta \\
&\iff \mu_d = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \\
&\iff \mu_d = \tan\theta \\
&\iff \theta = \arctan(0.4)
\end{aligned}
$$

Entonces $\arctan(0.4)$ es el valor de θ que maximiza la aceleración.

(10) Un bloque de masa m_A, m_B se deslizan por un plano inclinado, unidos por una cuerda sin masa, donde m_A arrastra a m_B. El ángulo de inclinación es θ, hay fricción con coeficiente μ_A para A y μ_B para B.

(a) Encuentre una expresión para $\vec{T}$ la tensión de la cuerda.

(b) Encuentre una expresión para $\vec{a}$.

(a) Tomaremos que hacia arriba de la pendiente es la dirección positiva, hacia abajo la negativa. La tensión actúa en dirección contraria para cada cuerpo, i.e. $T_A = -T_B$. Por segunda ley de Newton,

$$T_A + G_{A\|} + R_A = m_A a, \qquad -T_A + G_{B\|} + R_B = m_B a$$

donde

$$\begin{aligned} R_A &= \left|\vec{N}_A\right| \mu_A = m_A g \mu_A, & R_B &= m_B g \mu_B \\ G_{A\|} &= -m_A g \sin\theta, & G_{B\|} &= -m_B g \sin\theta \end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones, obtenemos

$$\begin{aligned} & a(m_A + m_B) = G_{A\|} + G_{B\|} + R_A + R_B \\ \iff\quad & a(m_A + m_B) = -m_A g \sin\theta - m_B g \sin\theta + m_A g \mu_A + m_B g \mu_B \\ \iff\quad & a(m_A + m_B) = -g \sin\theta\, (m_A + m_B) + g\, (m_A \mu_A + m_B \mu_B) \\ \iff\quad & a = -g \sin\theta + \frac{g(m_A \mu_A + m_B \mu_B)}{m_A + m_B} \end{aligned}$$

Se sigue que con $T := T_A$,

$$
\begin{aligned}
& T = m_A a - G_{A\|} - R_A \\
\iff \quad & T = m_A\left(-g\sin\theta + \frac{g(m_A\mu_A + m_B\mu_B)}{m_A + m_B}\right) + m_A g\sin\theta - m_A g\mu_A \\
\iff \quad & T = m_A\left(-g\sin\theta + \frac{g(m_A\mu_A + m_B\mu_B)}{m_A + m_B} + g\sin\theta - g\mu_A\right) \\
\iff \quad & T = m_A g\left(-\sin\theta + \frac{m_A\mu_A + m_B\mu_B}{m_A + m_B} + \sin\theta - \mu_A\right) \\
\iff \quad & T = m_A g\left(\frac{m_A\mu_A + m_B\mu_B}{m_A + m_B} - \mu_A\right)
\end{aligned}
$$

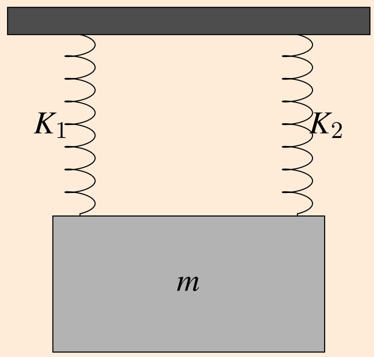
Pero

$$
\frac{m_A\mu_A + m_B\mu_B - \mu_A(m_A + m_B)}{m_A + m_B} = \frac{m_B\mu_B - m_B\mu_A}{m_A + m_B} = \frac{m_B(\mu_B - \mu_A)}{m_A + m_B}
$$

con lo cual finalmente obtenemos

$$
T = m_A g\frac{m_B(\mu_B - \mu_A)}{m_A + m_B}
$$

Problema 12. Dos resortes de longitudes naturales $L_0 = 0.5\,\mathrm{m}$ pero con diferentes constantes elásticas, $K_1 = 50\,\mathrm{N/m}$ y $K_2 = 100\,\mathrm{N/m}$, se encuentran colgados del techo. Un cuerpo de masa $m = 2.5\,\mathrm{kg}$ que inicialmente está suspendido de ellos es estirado hacia abajo hasta que la longitud de los resortes se duplica. ¿Cuál es la aceleración $\vec{a}$ que adquiere el cuerpo cuando se deja libre?



La masa m se mueve por la acción conjunta de los dos resortes. En particular, por la segunda ley de Newton,

$$R_1 + R_2 + G = ma$$

donde $R_1 = -k_1 \Delta y R_2 = -k_2 \Delta y$ y $G = -mg$. La distancia Δy es tal que la longitud de los resortes se duplica, i.e. la longitud es de 0.5m. Esto significa que $\Delta y = -1/2\mathrm{m}$. Por lo tanto obtenemos

$$\begin{aligned} a &= \frac{-\left(-\frac{1}{2}\mathrm{m}\right) 50\mathrm{N/m} - \left(-\frac{1}{2}\mathrm{m}\right) 100\mathrm{N/m} - 2.5\mathrm{kg} \cdot 9.8\mathrm{m/s}^2}{2.5\mathrm{kg}} \\ &= \frac{25\mathrm{N} + 50\mathrm{N} - 24.5\mathrm{N}}{2.5\mathrm{kg}} \\ &= \frac{50.5\mathrm{N}}{2.5\mathrm{kg}} \\ &= 20.2\mathrm{m/s}^2 \end{aligned}$$

(13) Un resorte de constante elástica k tiene un extremo fijo y el otro coincide con el punto x_0 cuando no está deformado. A este extremo se adhiere una masa m que se desplaza hasta x_1, donde se la suelta. $k = 8\text{N/m}, m = 2\text{kg}, x_0 = 40\text{cm}, x_1 = 55\text{cm}$.

(a) Determine las funciones de movimiento, velocidad y aceleración respecto al tiempo.

(b) Determine el período, la frecuencia, las coordenadas extremas del movimiento, y el módulo de la velocidad de la masa m en el punto de equilibrio.

(a) Asumimos que no hay movimiento vertical. Sea $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Sabemos que

$$a(t) = -\omega^2 x(t), \qquad v(t) = \omega A \cos(\omega t + \phi), \qquad x(t) = x_0 + A \sin(\omega t + \phi)$$

con x_0 el punto de reposo. Las condiciones del problema establecen

$$x(t = 0) = x_1 = 55\text{cm} = 0.55\text{m}, \qquad v(t = 0) = 0$$

Sustituyendo $v(t = 0)$ por su evaluación, se tiene

$$\omega A \cos(\phi) = 0$$

Por def. sabemos que $\omega \neq 0$. Si A fuera cero, entonces tendríamos $x(t = 0) = x_0$, lo cual es absurdo porque $x_0 \neq x_1$. Por ende $A \neq 0$. Pero entonces la ecuación anterior se satisface si y solo si $\cos(\phi) = 0$, es decir si $\phi \in \left\{\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right\}$. Pero restringimos ϕ a los reales positivos, obteniendo $\phi = \frac{\pi}{2}$.

Ahora tomemos $x(t = 0) = x_1$, y evaluamos la expresión izquierda sustituyendo ϕ por $\frac{\pi}{2}$. Obtenemos

$$x_0 + A \sin(\phi) = x_1 \iff A = x_1 - x_0$$

Con esto lo hemos determinado todo.

(b) El periodo del movimiento oscilatorio harmónico se define como $\frac{2\pi}{\omega}$. Pero

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{8\text{N/m}}{2\text{kg}}} = \sqrt{4\frac{1}{\text{s}^2}} = \frac{2}{\text{s}}$$

Por lo tanto, el período es

$$\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{2}{\mathrm{s}}} = \pi\mathrm{s}$$

La frecuencia se define como la inversa del período, i.e. $\frac{1}{\pi\mathrm{s}} = \frac{1}{\pi}\mathrm{Hz}$.

Las coordenadas máximas y mínimas son

$$x_{\max} = x_0 + A, \qquad x_{\min} = x_0 - A$$

(lso casos en que el seno es uno y menos uno). Estos valores se pueden calcular fácil.

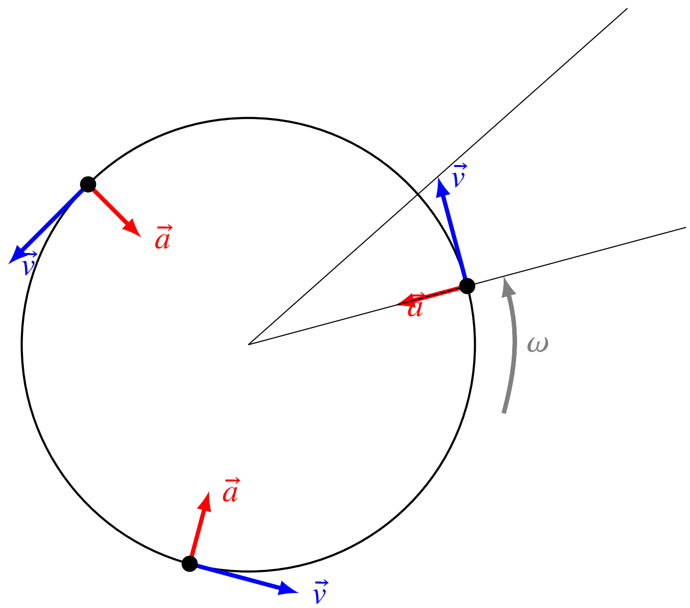
Observemos ahora que $x(t) = x_0$ si y solo si $A\sin(\omega t + \phi) = 0$, i.e. si y solo si $\sin(\omega t + \phi) = 0$, i.e. si y solo si $\omega t + \phi = \pi$, lo cual se comple si y solo si $t = \frac{\pi - \phi}{\omega}$

Pero $\phi = \frac{\pi}{2}$ y por lo tanto $\pi - \phi = \phi$. Luego $x(t) = x_0$ si y solo si $t = \frac{\phi}{\omega}$. En dicho instante, la velocidad es

$$\begin{aligned} v\left(\frac{\phi}{\omega}\right) &= \omega A\cos\left(\omega \cdot \frac{\phi}{\omega} + \phi\right) \\ &= \omega A\cos(2\phi) \\ &= \omega A\cos(\pi) \\ &= -\omega A \end{aligned}$$

Por lo tanto, el módulo de la velocidad en dicho instante es ωA.

(14). Sobre una superficie horizontal se fija un extremo de un resorte que tiene una longitud natural de 0.5 m y cuya constante elástica es 400 N/m. Al otro extremo se une un cuerpo de 2 kg de masa que se mueve de forma tal que describe una trayectoria circular. (a) Si el radio de la circunferencia es de 1 m, ¿Cual sera la velocidad del cuerpo? (b) Si se duplica la velocidad, ¿Cual deberíaa ser el nuevo radio?



(a) Nuestro sistema de coordenadas tendrá $\hat{\imath}$ antiparalelo a la aceleración y $\hat{\jmath}$ paralelo a la velocidad. Pues el movimiento es uniforme sabemos que la aceleración tiene solo una componente centrípeta, i.e. $\vec{a} = a\hat{\imath}$ para algún $a < 0$. (Si $\hat{\imath}$ fuera paralelo en vez de antiparalelo a la aceleración, sería $a > 0$.)

Por la segunda ley de Newton, la aceleración será la suma de las fuerzas centrípetas dividida por la masa. Pero la única fuerza centrípeta es la del resorte. Por lo tanto,

$$\vec{a} = \frac{\vec{R}}{m} \iff a = \frac{\left|\vec{R}\right|}{m} \iff a = -\frac{k}{m} \cdot \frac{1}{2}\text{m}$$

dado que la distancia entre el resorte y su punto de reposo es medio metro. Sin embargo, el movimiento circular uniforme obedece la ley

$$a = -\frac{v^2}{r}$$

(Si nuestro sistema de coordenadas tuviera $\hat{\imath}$ apuntanado hacia dentro, i.e. centrípeto, sería $a = v^2/r$). De los dos resultados hasta ahora presentados, se sigue

$$\begin{aligned} \frac{v^2}{r} = \frac{k}{m} \cdot \frac{1}{2}\text{m} &\iff \frac{v^2}{r} = \frac{400\text{N/m}}{2\text{kg}} \cdot \frac{1}{2}\text{m} \\ &\iff \quad \frac{v^2}{r} = 100\text{m/s}^2 \end{aligned}$$

Si $r = 1$m, entonces resulta

$$v^2 = 100(\text{m/s})^2 \iff v = 10\text{m/s}$$

lo cual resuelve el ejercicio.

(b) Asumamos que se duplica la velocidad, i.e. que $v = 20$m/s. Notar que ahora la tensión del resorte depende de un r desconocido, y se obtiene

$$a = -\frac{k}{m} \cdot \Delta r$$

donde $\Delta r = r - \frac{1}{2}$m. Por ende,

$$\begin{aligned} \frac{v^2}{r} = \frac{k\Delta r}{m} &\iff \frac{400(\text{m/s})^2}{r} = \Delta r \frac{400\text{N/m}}{2\text{kg}} \\ &\iff \quad \frac{1(\text{m/s})^2}{r} = \Delta r \frac{\text{N/m}}{2\text{kg}} \\ &\iff \quad \frac{1(\text{m/s})^2}{r} = \frac{\Delta r}{2\text{s}^2} \\ &\iff \quad \Delta r \cdot r = 2\text{m} \\ &\iff \quad r(r - \frac{1}{2}\text{m}) = 2\text{m} \\ &\iff \quad r^2 - \frac{r}{2}\text{m} - 2\text{m} = 0 \end{aligned}$$

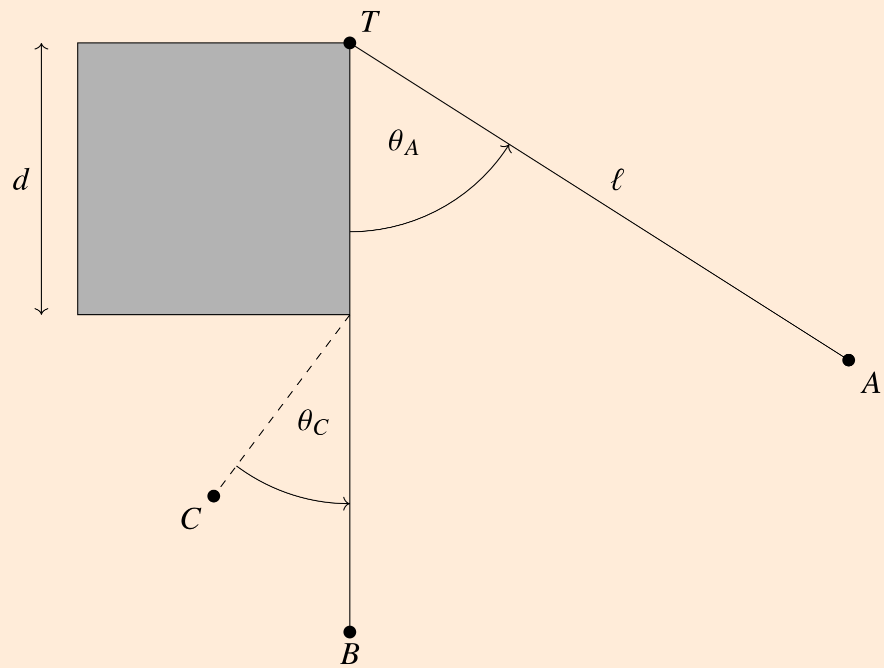
Como $[r] = \text{m}$ las unidades son todas las mismas y simplemente nos enfocamos en la función cuadrática $\varphi(x) = x^2 - \frac{x}{2} - 2$, con raíces

$$x = \frac{0.5 \pm \sqrt{0.5^2 + 8}}{2} \iff x \in \{1.68614066163, -1.18614066163\}$$

Pero obviamente el radio debe ser positivo. Por ende, nos quedamos con la raíz positiva y concluimos $r \approx 1.686$m.

3 Guía 3

(1) Considerá el diagrama siguiente:



Una masa pequeña se coloca al final de la cuerda de largo $\ell = 132$cm y se suelte desde el reposo. Sabiendo que $\theta_A = 5^\circ$, $d = 66$cm, determinar:

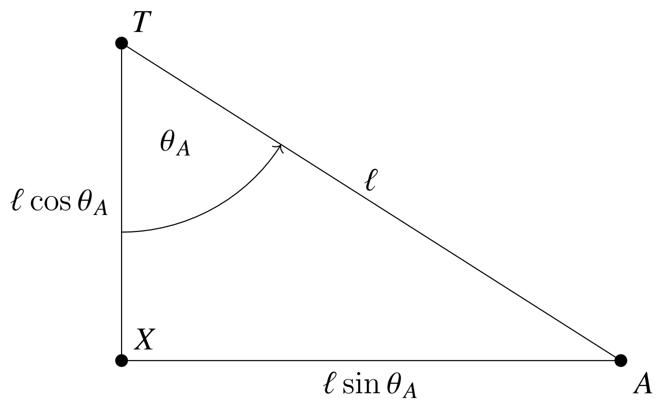
(a) La velocidad en el punto más bajo de la trayectoria.

(b) El valor de θ_C para la máxima altura que alcanza la masa (punto C).

(c) La tensión de la cuerda en la posición B.

(a) El sistema posee energía kinética (por el movimiento de la masa) y potencial (por la gravedad, que es conservativa). Establezcamos nuestro sistema de coordenadas con origen en el punto de reposo B y crecimiento hacia arriba y hacia la derecha. La energía potencial de la gravedad es $U = mg\Delta y$ con Δy la distancia vertical entre la masa (en un instante dado) y el punto de reposo. Como el punto de reposo coincide con la coordenada $(0, 0)$, resulta $U = mgy$.

Es fácil determina la altura de A geométricamente. Si formamos un triángulo rectángulo con T y A, como se ve abajo en la figura,



obtenemos que la altura del punto A es $\ell - \ell\cos\theta_A \approx 0.502$cm.

Ahora bien, cuando la masa se encuentra en A en el instante inicial, no hay movimiento y por ende la energía es estrictamente potencial. Cuando la masa cruza la posición de reposo, no hay energía potencial de la gravedad (pues la altura es cero), y la energía es estrictamente cinética. Pero por preservación de la energía, la energía en ambos instantes debe ser idéntica. Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
E_A = E_B &\iff K_A + U_A = K_B + U_E \\
&\iff 0 + mg\Delta y = \frac{1}{2}mv_B^2 + 0 \\
&\iff 2(9.8\text{m/s}^2)\,(\ell - \ell\cos\theta_A) = v_B^2 \\
&\iff 9.84507709704 \cdot (\text{m/s}^2)\text{cm} = v_B^2 \\
&\iff 9.84507709704 \cdot (\text{m/s}^2)\text{cm} = v_B^2 \\
&\iff 0.09845077097(\text{m/s}^2)\text{m} = v_B^2 \\
&\iff v_B = 0.31376865836\text{m/s}
\end{aligned}
$$

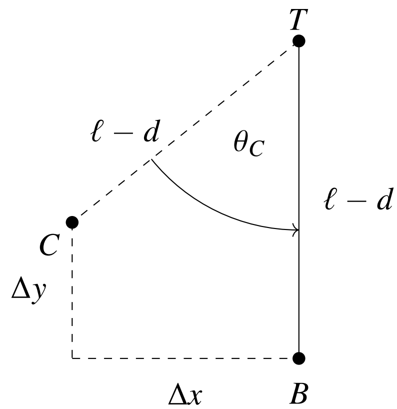
(b) Se nos dice que la altura máxima que alcanza la masa es la de C, con lo cual sabemos que en C se detiene y la velocidad de la masa es cero ($v_C = 0$). Mismo razonamiento que antes: en C la energía es estrictamente potencial, pero en B es estrictamente kinética. Por preservación de la energía,

$$E_B = E_C \iff \frac{1}{2}mv_B^2 = mg\Delta y$$

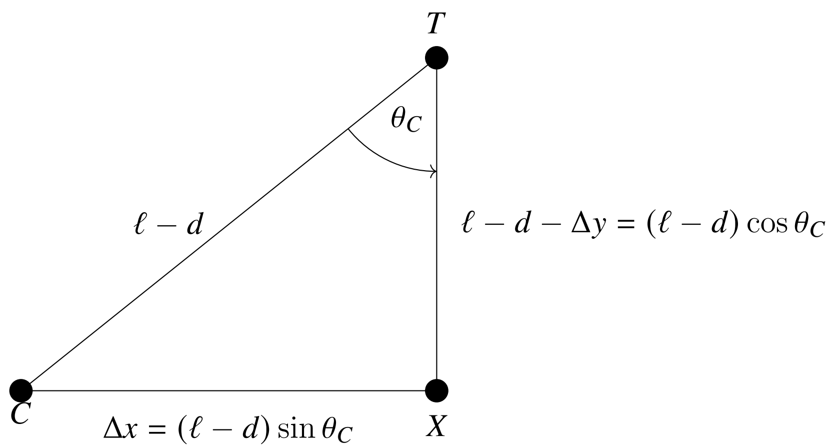
con Δy la altura alcanzada en C. Pero conocemos v_B. Tomando la aproximación $v_B \approx 0.314$, tenemos

$$\Delta y = \frac{\frac{1}{2}(0.314)^2(\text{m/s})^2}{9.8\text{m/s}^2} = 0.00503040816\text{m} \approx 0.503\text{cm}$$

Para expresar lo que sabemos en un gráfico, tenemos:



donde Δy, $\ell - d$ son conocidos y Δx solo es ilustrativo (no nos importa.) Es claro que si formamos un triángulo rectángulo uniendo C a la línea BT, dicho triángulo satisface



Pero

$$
\begin{aligned}
\ell - d - \Delta y = (\ell - d)\cos\theta_C \iff \cos\theta_C &= \frac{\ell - d - \Delta y}{\ell - d} \\
\iff \quad \cos\theta_C &= 1 - \frac{\Delta y}{\ell - d} \\
\iff \quad \cos\theta_C &= 1 - \frac{0.503\text{cm}}{132\text{cm} - 66\text{cm}} \\
\iff \quad \cos\theta_C &= 0.99237878787 \\
\iff \quad \theta &= 0.123538758
\end{aligned}
$$

(c) Se nos pide la tensión de la cuerda en la posición de reposo. Consideremos el movimiento del objeto como un movimiento circular. Las fuerzas en acción son la gravedad (contraria al centro) y la tensión de la cuerda (centrípeta):

$$T - W = a_c m$$

con a_c el conjunto de fuerzas con componente centrípeto, de acuerdo con la segunda ley de Newton. Sin embargo, el movimiento circular siempre satisface $a_c = v^2/r$ con r el radio de la circunferencia descrita por el movimiento. Pero $r = \ell = 132\text{cm} = 1.32\text{m}$. Por lo tanto,

$$T - W = \frac{v^2 m}{\ell}$$

La velocidad en el punto B ya la conocemos. Sustituyendo y sumando $W = mg$ a ambos lados, con un poco de álgebra se obtiene

$$T = m\left(\frac{0.314^2}{132}\text{m/s}^2 + 9.8\text{m/s}^2\right) = m(9.80074693939\text{m/s}^2)$$

Como $[m] = \text{kg}$, se tiene correctamente $[T] = \text{N}$.

(2) Un bloque de 20kg es empujado sobre una superficie horizontal por medio de una fuerza $\vec{F}$ que forma un ángulo θ con la misma. La magnitud de la fuerza cuando la masa está en la posición x es $\left|\vec{F}(x)\right| = 6x\text{N}$.

(a) Calcular el trabajo realizado por la fuerza en el intervalo $x \in [10\text{m}, 20\text{m}]$.

(b) Calcule la energía cinética del cuerpo en la posición final para $\mu_d = 0, \mu_d = 0.05$, asumiendo que se parte del reposo.

(a) Recordemos que por def. el trabajo realizado por una fuerza $\vec{F}$ al obrar un desplazamiento $\vec{\Delta r}$ es el producto punto entre ambos:

$$W_F = \vec{F} \cdot \vec{\Delta r} = F\Delta r \cdot \cos\theta$$

con θ el ángulo entre ambos. En nuestro caso, la magnitud de $\vec{F}$ es variable (no así el ángulo θ), y por lo tanto

$$\begin{aligned} W_F &= \int_{10}^{20} \left|\vec{F}(x)\right| \cos\theta \, dx \\ &= 6\text{N} \cos\theta \int_{10}^{20} x \, dx \\ &= 6\text{N} \cos\theta \left[\frac{x^2}{2}\right]_{10}^{20} \\ &= 6\text{N} \cos\theta \, (150\text{m}) \\ &= 900 \cos\theta \text{Nm} \\ &= 900 \cos\theta \text{ J} \end{aligned}$$

(b)

> Entiendo que el ejercicio pide desde $x = 0\text{m}$ hasta $x = 20\text{m}$. De cualquier modo, el procedimeinto es esl mismo para un desplazamiento desde $x = 10\text{m}$ hasta $x = 20\text{m}$.

Recordemos que $W = \Delta K$. Pero la energía cinética en el instante cero es nula y por lo tanto resulta $W = K_f$. Es decir, la energía cinética en el instante final es el trabajo neto de las fuerzas a lo largo de todo el recorrido:

$$W = W_F + W_R$$

con W_R el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento. El ángulo entre la fuerza de rozamiento y la dirección del movimiento es de 180 grados, pues se oponen, y por ende su coseno es -1. Es decir que la fuerza de rozamiento hace un trabajo negativo:

$$\begin{aligned}
W_R &= -\left|\vec{R}\right| \Delta x \\
&= -\mu \left|\vec{N}\right| 20\text{m} \\
&= -\mu m g 20\text{m} \\
&= -\mu(20 \cdot 9.8 \cdot 20)(\text{kg} \cdot \text{m/s}^2 \cdot \text{m}) \\
&= -\mu 3920 \text{ J}
\end{aligned}$$

Por el mismo razonamiento que antes,

$$W_F = 6\text{N} \cos\theta \int_0^{20} x \, dx = 1200 \cos\theta \text{ J}$$

Por lo tanto,

$$W = 1200 \cos\theta \text{ J} - \mu 3920 \text{ J}$$

4 P4

(1) Determinar el campo eléctrico en un punto a 12cm de una carga de -4×10^{-9}C. ¿Cuál sería el vector fuerza $\vec{F}$ que experimentaría un electrón situado en dicha posición?

(a) Recordemos que el campo eléctrico no es más que la fuerza que experimentaría una carga positiva y unitaria a una distancia d de una carga de referencia. Es decir, es la fuerza electroestática *normalizada*. Más formalmente, dada una carga de referencia Q y una carga q,

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\,\hat{r} \tag{1}$$

con $\hat{r}$ un vector unitario de dirección (de Q a q). En este caso, $r = 12\text{cm} = 0.12\text{m}$. Tomando $\kappa = 1/4\pi\epsilon_0$:

$$\vec{E} = \kappa\frac{-4 \times 10^{-9}C}{0.0144\text{m}^2}\,\hat{r} \tag{2}$$

Con $\epsilon_0 = 8.854187817 \times 10^{-12}$F/m, se obtiene la aproximación

$$\kappa \approx 8.99 \times 10^9\text{N} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{C}^2} \tag{3}$$

Usaré 9 en vez de 8.99. La ecuación (2), separando por un lado los factores numéricos y por otro los factores unidad, resulta entonces

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= (8.99 \times 10^9) \cdot \frac{-4 \times 10^{-9}}{0.0144} \times \left(\text{N} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{C}^2}\right)\left(\frac{\text{C}}{\text{m}^2}\right) \times \hat{r} \\
&= \frac{9}{3.6} \times (-10^3)\text{N/C}\,\hat{r} \\
&= -2497.222\text{N/C}\,\hat{r}
\end{aligned}$$

(b) La carga de un electrón es -1.602×10^{-19}C. La fuerza que experimenta una carga q en un campo magnético $\vec{E}$ es $\vec{F} = q\vec{E}$. Por lo tanto, el electrón experimenta la fuerza

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= \left(-1.602 \times 10^{-19}\text{C}\right) \times -2497.222\text{N/C}\,\vec{r} \\
&= 4000.549644 \times 10^{-19}\text{N}\,\hat{r}
\end{aligned}$$

Notemos que la fuerza es positiva, lo cual significa que el electrón es repelido por la carga de referencia que genera el campo magnético. Esto tiene sentido, porque tanto la carga del electrón como la carga de referencia Q son negativas.

(2)

(a) Recordemos que al calcular una fuerza electroestática, la constanta $\kappa = 1/4\pi\epsilon_0$ tiene unidades N (m^2/C^2), y al multiplicarla por el producto de las cargas sobre la distancia al cuadrado, solo nos queda N:

$$\left[\mathrm{N}\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{C}^2}\right]\left[\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{m}^2}\right] = [\mathrm{N}]$$

Por lo tanto, nos ahorraremos este cálculo de unidades y de ahora en adelante escribiremos directamente la fuerza en Newton, obviando las otras unidades. Usando la aproximación $\kappa = 8.99 \times 10^9$, con $r^2 = 0.25$ (metros al cuadrado),

$$F_{12} = \kappa\frac{2\times 10^{-12}}{0.25}\,\hat{r}\ \mathrm{N} = 0.07192\ \mathrm{N} \qquad \{\text{Atractiva}\}$$
$$F_{13} = \kappa\frac{3\times 10^{-12}}{0.25}\mathrm{N} = 0.10788\ \mathrm{N} \qquad \{\text{Repulsiva}\}$$
$$F_{23} = \kappa\frac{6\times 10^{-12}}{0.25}\mathrm{N} = 0.21576\ \mathrm{N} \qquad \{\text{Atractiva}\}$$

Ahora bien, cada carga está en el campo eléctrico de las otras dos, i.e. es afectada por ambas. Por lo tanto, la fuerza que experimentada por cada carga es

$$F_1 = F_{12}\hat{\imath} - \hat{\imath}F_{13} = \hat{\imath}(0.07192 - 0.10788)\mathrm{N} = -0.03596\mathrm{N}\,\hat{\imath}$$
$$F_2 = -\hat{\imath}F_{12} + \hat{\imath}F_{13} = \hat{\imath}(-0.07192 + 0.10788)\mathrm{N} = 0.03596\mathrm{N}\,\hat{\imath}$$
$$F_3 = -\hat{\imath}F_{23} + \hat{\imath}F_{13} = \hat{\imath}(-0.21576 + 0.10788)\mathrm{N} = -0.10788\mathrm{N}\,\hat{\imath}$$

(c)

$$V_1 = \kappa\left(\frac{q_2}{0.5} + \frac{q_3}{1}\right)$$
$$V_2 = \kappa\left(\frac{q_1}{0.5} + \frac{q_3}{1}\right)$$
$$V_3 = \kappa\left(\frac{q_1}{1} + \frac{q_2}{0.5}\right)$$

(3) Consideremos la bola derecha, notando que existe una simetría en las fuerzas operando sobre cada bola.

Datos del problema:

1. $\vec{G} + \vec{T} + \vec{E} = \vec{0}$
2. $m = 30\text{g}, \qquad \ell = 15\text{cm}, \qquad \theta = 5°$
3. $G = -mg\hat{j}$
4. $T_x = -T\sin\theta, \quad T_y = T\cos\theta$
5. $\vec{E} = E_x\hat{i} = E\hat{i}$ (por ser la bola derecha, y las cargas iguales, la fuerza eléctcrica va hacia la derecha.

Valores desconocidos: a, la mitad de la distancia entre las dos bolas; $\vec{E}$, la fuerza eléctrica.

Valor a determinar: q, la carga de las bolas.

Relación entre los datos conocidos y el valor a determinar: Por ley de Couloumb,

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{4a^2}$$

Estrategia: (i) Usar (1) para encontrar una expresión para E. (ii) Determinar a. (iii) Usar la ley de Couloumb con q como única incógnita.

(i) De los datos se sigue fácilmente que

$$\begin{aligned}(G_y + T_y)\hat{j} + (E_x + T_x)\hat{i} = 0 \iff & \begin{cases} G_y + T_y = 0 \\ E_x + T_x = 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} -mg + T\cos\theta = 0 \\ E - T\sin\theta = 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} T\cos\theta = mg \\ E = T\sin\theta \end{cases}\end{aligned}$$

Despejando T en la ecuación de arriba y sustituyendo en la de abajo,

$$E = mg\tan\theta \tag{4}$$

(ii) Es fácil ver geométricamente que $a = L\sin\theta$.

(iii) Por la ley de Coulomb, sustuyendo los valores concoidos de E y a,

$$
\begin{aligned}
& mg\tan\theta = \frac{\kappa q^2}{4\left(\ell\sin\theta\right)^2} \\
\iff \quad & q = \pm\sqrt{\frac{mg\tan\theta \times 4\ell^2\sin^2\theta}{\kappa}}
\end{aligned}
$$

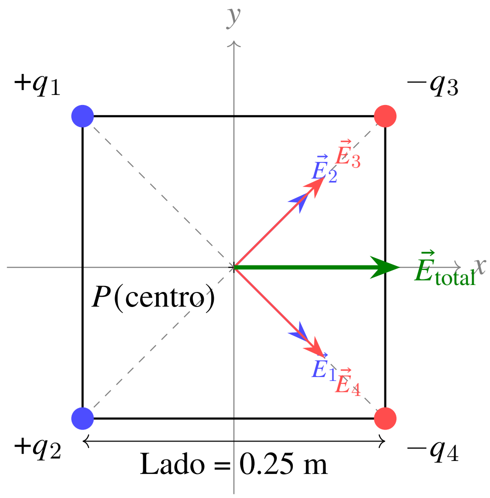
donde estoy obviando la escritura de las unidades. Notar que el ejercicio pide la *magnitud* de la carga, y por ende podemos quedarnos con el valor positivo de esta raiz. Usando la aproximación $\kappa \approx 8.99 \times 10^{-9}$ se puede estimar el valor de la raíz.

(4)

(a) La distancia entre el punto central **p** y cualquiera de los vérticas es

$$d = \frac{\sqrt{\frac{1}{4}^2 + \frac{1}{4}^2}}{2} \approx 0.178 \tag{5}$$

Notemos que una partícula de carga unitaria y positiva ubicada en el centro **p** sería atraída por las cargas negativas de la derecha y repelida por las cargas positivas de la izquierda. Más aún, la carga inferior izquierda empujaría la partícula equidireccionalmente a la atracción de la carga superior derecha, y lo mismo sucede entre las cargas superior izquierda e inferior derecha (ver diagrama).



Let $\vec{r}_{q_i p}$ be the unitary vector pointing from q_i to the center **p**. The electric field will be the sum of the fields generated by each charge:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{4}\frac{q_i}{d^2}\vec{r}_{q_i p} &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0 d^2}\left[q_1\vec{r}_{q_1 p} + q_2\vec{r}_{q_2 p} - q_3\vec{r}_{q_3 p} - q_4\vec{r}_{q_4 p}\right] \\
&= \frac{1}{2\pi\epsilon_0 d^2}\left[q(\vec{r}_{q_1 p} + \vec{r}_{q_2 p}) - q(\vec{r}_{q_3 p} + \vec{r}_{q_4 p})\right] \\
&= \frac{q}{2\pi\epsilon_0 d^2}\left[(\vec{r}_{q_1 p} + \vec{r}_{q_2 p}) - (\vec{r}_{q_3 p} + \vec{r}_{q_4 p})\right]
\end{aligned}$$

The sum of these vectors, with $\theta = \pi/4$, is

$$
\begin{aligned}
&(\cos\theta, -\sin\theta) + (\cos\theta, \sin\theta) - (-\cos\theta, -\sin\theta) - (-\cos\theta, \sin\theta) \\
=&(4\cos\theta, 0) \\
=&(\sqrt{2}, 0) \\
=&\sqrt{2}\hat{i}
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \ \vec{E} = \frac{q\sqrt{2}}{\pi\epsilon_0 d^2}\hat{i}
$$

(b) Recordemos que el campo eléctrico es la fuerza experimentada por una partícula q en un punto dado *normalizada*, i.e. dividida por su propia magnitud. Por ende, habiendo determinado $\vec{E}$, sabemos que la fuerza experimentada por una partícula de magnitud q ubicada en el punto **p** es

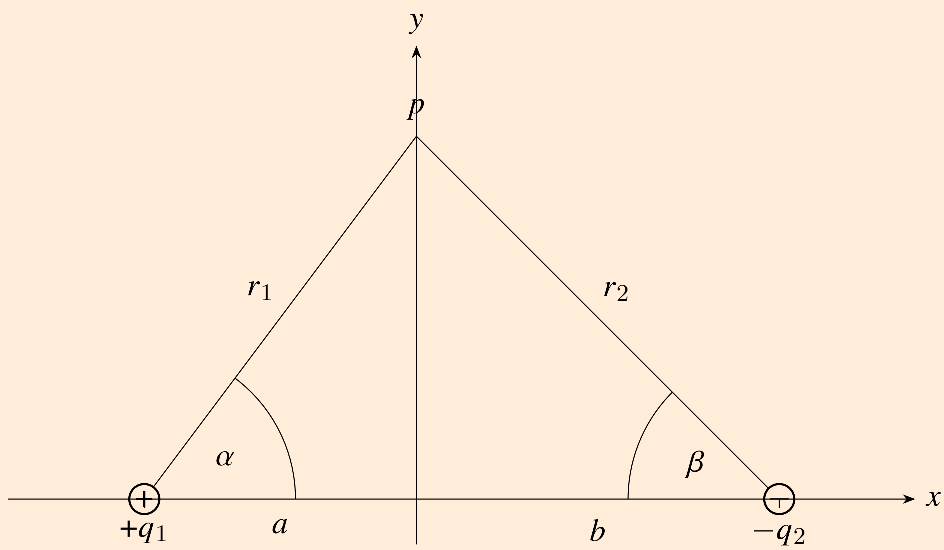
$$
q\vec{E} = \frac{q^2\sqrt{2}}{\pi\epsilon_0 d^2}\ \hat{i}
$$

Es decir, la partícula se movería horizontalmente a la derecha con un vector de fuerza de magnitud $q^2\sqrt{2}/\pi\epsilon_0 d^2$.

5. Las cargas q_1 y q_2 se ubican en el eje x a distancias a y b del origen, como se muestra en la figura.

(a) Encuentre el campo eléctrico $\vec{E}$ resultante en el punto p, que está sobre el eje y.

(b) Evalúe el campo eléctrico en el punto p en el caso especial de que $|q_1| = |q_2|$ y $a = b$.



(a) Sea y la altura del punto p, i.e. $y = r_1 \sin\alpha = r_2 \sin\beta$. Notemos:

$$\vec{r}_{1p} = a\hat{i} + y\hat{j}$$
$$\vec{r}_{2p} = -b\hat{i} + y\hat{j}$$

Entonces los vectores *unitarios* desde q_1 a p y desde q_2 a p son $\vec{r}_{1p}/r_1, \vec{r}_{2p}/r_2$ respectivamente. Entonces

$$\vec{E}_1 = \kappa\frac{q_1}{r_1^3}\vec{r}_{1p}, \qquad \vec{E}_2 = \kappa\frac{-q_2}{r_2^3}\vec{r}_{2p}$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
\vec{E} &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \\
&= \kappa \left(\frac{q_1}{r_1^3} \vec{r}_{1p} - \frac{q_2}{r_2^3} \vec{r}_{2p} \right) \\
&= \kappa \left(\varphi_1 \vec{r}_{1p} - \varphi_2 \vec{r}_{2p} \right) && \left\{ \text{Con } \varphi_i = q_i / r_i^3 \right\} \\
&= \kappa \left([\varphi_1 a, \varphi_1 y] - [-\varphi_2 b, \varphi_2 y] \right) \\
&= \kappa \left[\varphi_1 a + \varphi_2 b, \varphi_1 y - \varphi_2 y \right] \\
&= \kappa (\varphi_1 a + \varphi_2 b) \hat{i} + \kappa y (\varphi_1 - \varphi_2) \hat{j}
\end{aligned}
$$

(b) Si asumimos $|a_1| = |q_2|$ y $a = b$, nos queda obviamente $\alpha = \beta$ y $r_1 = r_2$ en consecuencia. Por lo tanto, $\varphi_1 = \varphi_2$, y por ende

$$
\begin{aligned}
\vec{E} &= 2\kappa a \varphi \hat{i} \\
&= 2\kappa a \left(\frac{q}{r^3} \right) \hat{i} \\
&= 2\kappa a \frac{q}{(\sqrt{a^2 + y^2})^3} \hat{i} \\
&= \frac{2\kappa a q}{(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \; \hat{i}
\end{aligned}
$$

Esto tiene sentido: las componentes verticales de las fuerzas ejercidas por q_1 y q_2 se cancelan, pues son de igual magnitud pero opuesta dirección. Sin embargo, las componentes horizontales se suman: tanto q_1 como q_2 llevan la partícula situada en p "hacia la derecha".

(6) Datos del problema:

- $x = 5\text{cm}$
- $q = 3.2 \times 10^{-19}$C.
- $m = 6.68 \times 10^{-27}$g.
- $t = 2 \times 10^{-6}$g.

Notemos que

- $\vec{F} = F\hat{i} = Eq\hat{i}$
- $\vec{F} = ma\hat{i}$

Por lo tanto $Eq = ma$.

Como el campo es uniforme la aceleración es constante. Para una aceleración constante, podemos relacionar la distancia recorrida, el tiempo transcurrido y la velocidad inicial:

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Entonces

$$a = \frac{2x}{t^2}$$

Entonces

$$E = \frac{2mx}{t^2 q}$$

con lo cual ya podemos determinar E numéricamente.

(b) El trabajo realizado será por def.

$$W = \vec{F} \cdot \vec{x} = Fx = \frac{2mx^2}{t^2}$$

(c) La diferencia de potencial elétrico entre dos puntos es el trabajo realizado por unidad de carga:

$$\Delta V = \frac{W}{q} = \frac{2mx^2}{t^2 q} = Ex$$

(7) Un electrón entra en una región de campo eléctrico uniforme (vea la figura) con una velocidad $v = 3 \times 10^6$ m/s y $E = 200$ N/C. La longitud horizontal de los platos es $L = 0.1$ m y su separación es $h = 1.5$ cm.

(a) Encuentre la aceleración del electrón mientras esta en el campo eléctrico.

(b) Asuma que la posición vertical del electrón al entrar al campo es $y = 0$, ¿logra abandonar la región de campo eléctrico? En caso de abandonarlo calcule el tiempo en el cual lo hace, caso contrario calcule la posición en la cual impacta.

(a) Observaciones iniciales:

- $\vec{F} = \vec{a}m$, con $m = 9.109 \times 10^{-31}$kg la masa de un electrón.
- $\vec{F} = \vec{E}e$, con $e = -1.602 \times 10^{-19}$ la carga de un electrón.
- $\vec{a} = a\hat{j}$
- $\vec{E} = E\hat{j}$

Con esto es suficiente:

$$
\begin{aligned}
& \vec{a}m = \vec{E}e \\
\iff \quad & am\hat{j} = Ee\hat{j} \\
\iff \quad & a = \frac{Ee}{m} \\
\iff \quad & a = -\frac{200(1.602)}{9.109}\frac{10^{-19}}{10^{-31}}\left[\frac{\text{N C}}{\text{C kg}}\right] \\
\iff \quad & a = -35.1740037326 \cdot 10^{12}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}
\end{aligned}
$$

(b) Para una aceleración constante vertical a, nos queda una velocidad vertical $v_y(t) = at$ (asumiendo que la velocidad vertical en el tiempo cero es cero) y una función de posición vertical $y(t) = y_0 + \frac{a}{2}t^2$, con $y_0 = 0$ de acuerdo al enunciado.

Si asumimos que la aceleración horizontal es constante (no hay otras fuerzas en juego), la distancia recorrida se relaciona con la velocidad inicial y el tiempo en que se la recorre:

$$L = v_{0x}t$$

v_{0x} es conocida, y el tiempo en que la partícula recorre la distancia L es

$$t_{\text{horizontal}} = \frac{0.1\text{m}}{3 \times 10^6 \text{m/s}} = \frac{1}{3} \cdot 10^{-7} \text{ s}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} y(t_{\text{horizontal}}) &= \frac{a}{2} t_{\text{horizontal}}^2 \\ &= \frac{-17.5870018663}{3^2} \cdot (10^{-7})^2 \cdot 10^{12} \cdot \left[\frac{m}{s^2} s^2 \right] \\ &= -1.95411131848 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\ &= -0.01954111318 \text{ m} \\ &= -1.954111318 \text{ cm} \end{aligned}$$

Esto excede la longitud vertical h entre las dos barras y por lo tanto el electrón no llega a salir.