

1 Clase 1

1.1 Info de la materia

Mail del profesor: daniel.penazzi@unc.edu.ar

Temas a ver.

- Coloreo de grafos
- Flujos en network
- Matchings
- Códigos de corrección de errores
- P-NP (Complejidad computacional)
- Inteligencia artificial

La materia tiene tres partes: teórico, práctico y proyecto de programación. Solo la parte práctica tiene promoción (se explica abajo). El final tiene parte teórica y parte práctica. La parte teórica es demostrar uno de tres teoremas dados a priori. La parte práctica tiene ejercicios de demostración o pensamiento y de resolución de problemas.

La parte práctica se promociona si se aprueban los dos parciales, con cualquier nota ≥ 4 . De promocionarlo, la parte práctica del final no es necesaria.

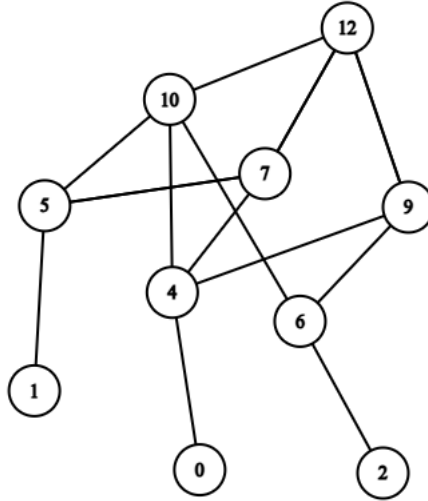
El proyecto de programación tiene dos partes. La primera es leer un grafo y cargar los datos al programa. La segunda es un problema de coloreo de grafos. La fecha de entrega de la parte uno es en dos o tres semanas a partir de hoy (13/03). La parte importante es la parte 2.

La bibliografía está en el programa 2023.

1.2 Grafos

Definition 1 Una grafo es una 2-upla $G = (V, E)$ con V un conjunto cualquiera (finito) y $E \subseteq \{A \subseteq V : |A| = 2\}$

Nota. La restricción de finitud es sólo de esta materia.



Los elementos de V se llaman vértices o nodos. Los elementos de E se llaman lados o aristas. Por convención, a menos que digamos lo contrario, es que $|V| = n$ y $|E| = m$.

Definition 2 Un camino en un grafo $G = (V, E)$ es una sucesión de vértices v_1, \dots, v_r , con $v_i \in V$ para todo i , tal que $\{v_j, v_{j+1}\} \in E$ para todo $1 \leq j < r$.

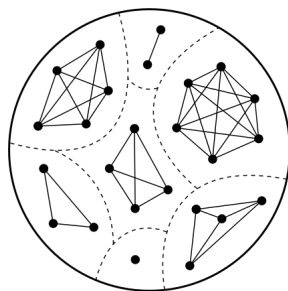
Dado un camino v_1, \dots, v_r , si $v_1 = x$, $v_r = y$, decimos que es un camino de x a y . Para todo $G = (V, E)$ definimos la relación binaria

$$\sim := \{(x, y) \in V^2 : \text{existe un camino de } x \text{ a } y\}$$

Es decir, $x \sim y$ denota la relación de que existe un camino entre x e y . Es trivial comprobar que \sim es una relación de equivalencia. Cada clase de equivalencia a/\sim con $a \in V$ se llama una componente conexa de G .

Definition 3 Decimos que $G = (V, E)$ es conexo si y solo si tiene una sola componente conexa. Es decir, si $|V/\sim| = 1$.

El profesor no mencionó esto pero es lindo recordar (si alguien ha cursado lógica) que el conjunto de clases de equivalencia A/R de un conjunto A sobre una relación binaria R puede en sí mismo darse como un grupo de grafos desconexos. Por ejemplo, abajo se dan los grafos de un espacio cociente con siete clases de equivalencia; cada par de vértices unidos por un lado corresponde a dos elementos equivalentes.



Fíjense que de esto se sigue un dato curioso (aunque tal vez irrelevante): Si $G = (V, E)$ es un grafo conexo con n vértices, el grafo que describe la clase de equivalencia de V es K_n .

Definition 4 Decimos que un grafo $H = (W, F)$ es un subgrafo de $G = (V, E)$ si $W \subseteq V, F \subseteq E$.

A veces usamos $H \subseteq G$ para decir " H es un subgrafo de G ", pero no debe entenderse por esto que H y G son conjuntos.

Observe que no todo $W \subseteq V, F \subseteq E$ satisfacen que (W, F) es un grafo. Por ejemplo, si $F = \emptyset$ tenemos $F \subseteq E$, pero F no cumple la propiedad de que todos sus elementos sean conjuntos con cardinalidad 2.

Definition 5 (Densidad) Decimos que un grafo es denso si $m = O(n^2)$. Decimos que un grafo es raro si $m = O(n)$.

Random fact. Recuerde que "raro" no sólo significa "inusual" sino que es el antónimo de "denso". La etimología inglesa es más interesante: La palabra *Weird* (raro) significaba, en la edad media, destino. Por eso, en la balada medieval *True Thomas*, se lee "Weird shall never daunt me": El destino nunca ha de asustarme. Se debe a una antigua leyenda nórdica en la cual las *Weird sisters*, diosas terribles, tejían el destino de los hombres. Si le da curiosidad:

https://en.wikipedia.org/wiki/Three_witches

Definition 6 Dado $G = (V, E)$, si $x \in V$, $\Gamma(x) := \{y \in V : \{x, y\} \in E\}$ se llama el vecindario de x .

Si $y \in \Gamma(x)$, decimos que y es un vecino de x . El grado de x , denotado $d(x)$, es la cantidad de vecinos de x ; es decir, $d(x) = |\Gamma(x)|$. Usamos $\delta = \min \{d(x) : x \in V\}$ y $\Delta = \max \{d(x) : x \in V\}$. Si $\delta = \Delta$ se dice que G es regular. Por ejemplo, los grafos cíclicos y los completos son regulares.

Definition 7 Dado un grafo $G = (V, E)$, decimos que G es regular si $d(x) = d(y)$ para todo $x, y \in V$.

Es decir, un grafo es regular si todo vértice tiene la misma cantidad de vecinos.

1.3 Repaso de BFS y DFS

A completar.

1.4 Los grafos K_n y C_n

- K_n : El grafo completo en n vértices se define

$$K_n = (\{1, 2, \dots, n\}, \{\{x, y\} : x, y \in \{1, 2, \dots, n\}\})$$

Es el grafo de n elementos donde todos los vértices están conectados unos con otros. Resulta que $m = \binom{n}{2}$. Lo cual implica que $m = O(n^2)$.

- C_n : El grafo cíclico

$$C_n = (1, 2, \dots, n, \{12, 23, 34, \dots, (n-1)n, n1\})$$

Una observación es que $C_3 = K_3$; pero de allí en adelante difieren.

1.5 Coloreo de grafos

Definition 8 Un coloreo propio de $G = (V, E)$ con k colores es una función

$$C : V \mapsto A$$

con $|A| = k$ y tal que $xy \in E \Rightarrow C(x) \neq C(y)$.

Intuitivamente, un coloreo asigna k propiedades a los vértices de modo tal que ningún par de grafos adyacentes cumple la misma propiedad.

Nota. Hace unos meses escribí un algoritmo de coloreo en C. Es el segundo algoritmo dado en esta entrada:

<https://slopezpereyra.github.io/2023-10-29-Hamiltonian/>

No prometo que sea muy prolijo o esté bien explicado; ya en general uno es tonto y encima de tonto no sabe de grafos. Pero tal vez a alguien le sirva, qué se yo.

Definition 9 El número cromático de un grafo $G = (V, E)$ es

$$\chi(G) = \min_k (\exists \text{ coloreo propio de } G \text{ con } k \text{ colores})$$

No se conoce un algoritmo polinomial que calcule $\chi(G)$. El proyecto será dar un algoritmo polinomial que se aproxime a χ .

1.6 Un algoritmo greedy de coloreo

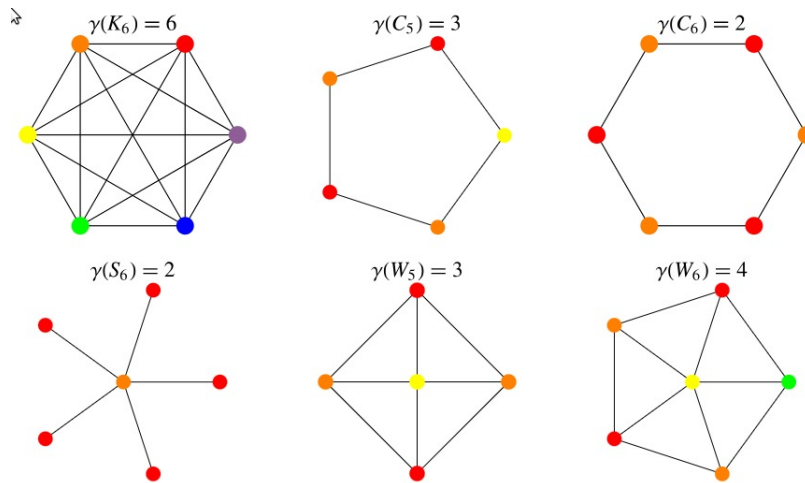
Damos un algoritmo que colorea un grafo G con vértices v_1, \dots, v_n y colores c_1, c_2, \dots, c_n . Para que el algoritmo funcione, los colores y los vértices deben tener un orden (en nuestro caso dado por los subíndices).

Invariante del algoritmo. Los coloreos parciales son propios. Es decir, a medida que se va coloreando iterativamente el grafo, en cada paso el coloreo resultante debe ser propio.

Pasos del algoritmo.

(1) $C(v_1) = c_1$.

(2) $C(v_k) =$ mínimo color que mantenga un coloreo propio (que satisfaga el invariante).



1.7 Acotando χ

Generalmente nos interesa encontrar $\chi(G)$ dado un grafo $G = (V, E)$. Damos unas pautas y observaciones generales para acotar $\chi(G)$ y así facilitar su hallazgo.

Lemma 1 Si existe un coloreo propio de $G = (V, E)$ con k colores, entonces $\chi(G) \leq k$.

Proof. Es trivial por definición de χ (χ es el mínimo k en el conjunto de los coloreos posibles de G con k colores).

El lema significa que para acotar χ por arriba solo basta dar un coloreo con k colores.

Lemma 2 Si H es un subgrafo de G , $\chi(H) \leq \chi(G)$.

Este lema nos dice que podemos acotar χ por abajo si encontramos un subgrafo de G cuyo número cromático es conocido. Es fácil ver que $\chi(K_r) = r$ para todo $r > 1$. Es menos directo pero en clase se demostró que

$$\chi(C_r) = \begin{cases} 2 & r \equiv 0 \pmod{2} \\ 3 & r \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

Esto, en combinación con el último lema, nos dice que podemos acotar $\chi(G)$ por abajo simplemente observando si G contiene algún C_r o K_r como subgrafo. En el caso C_r , la cota inferior dada en el caso par, con $\chi(C_r) = 2$, es trivial (todo grafo necesita al menos dos colores). Por eso nos quedamos con el siguiente teorema:

Theorem 1 Sea $G = (V, E)$ un grafo. Si $C_r \subseteq G$ con r impar entonces $\chi(G) \geq 3$. Si $K_r \subseteq G$ entonces $\chi(G) \geq r$.

Theorem 2 Sea $G = (V, E)$ un grafo. Entonces

$$\chi(G) = \max \{ \chi(C) : C \text{ es componente conexa de } G \}$$

Theorem 3 Sea $G = (V, E)$ un grafo. Entonces G contiene un ciclo impar si y solo si $\chi(G) \geq 3$.

Proof. (\Rightarrow) Trivial.

(\Leftarrow) Damos una prueba algorítmica. La prueba es simple, pero debe tenerse presente que usamos tres grafos diferentes en ella: el grafo $G = (V, E)$ del teorema, una componente conexa $C \subseteq G$, y un grafo $\mathcal{B} \subseteq C$ resultante de correr BFS de a partir de un vértice de C . El algoritmo determina si $\chi(G) = 2$ y de no serlo construye un ciclo impar. Usamos la notación $n(z)$ si $z \in V$ para denotar el nivel de z en \mathcal{B} . Dividimos la prueba en tres partes.

(1) Como $\chi(G) = \max \{ \chi(C) : C \text{ es componente conexa de } G \}$, tenemos que

$$\chi(G) \geq 3 \Rightarrow \exists \text{ c.c. } C \text{ tal que } \chi(C) \geq 3$$

Elegimos $x \in C$ y corremos BFS a partir de él, generando un subgrafo $\mathcal{B} \subseteq C$ con todos los vértices de C (pero no todos los lados).

(2) Coloreamos cada vértice de C como sigue: como sigue: $c(z)$ será el nivel BFS de z módulo 2. Esto equivale a hacer $c(x) = 0$ y cada vez que y agrega a z a la cola de BFS, hacer $c(z) = 1 - c(y)$.

Esto da un coloreo con 2 colores, pero podría no ser propio (por ejemplo, dos vecinos de la raíz que son vecinos entre sí tendrían ambos color 1). Por lo tanto verificamos si es propio o no.

(3) Si es propio tenemos un coloreo propio de dos colores y $\chi(G) = 2$. Si es impropio, construiremos un ciclo impar. En particular, si no es propio, existen $u, v \in V$ tales que $c(u) = c(v)$ y $uv \in E$. Pero si $c(u) = c(v)$, entonces

$$n(u) \equiv n(v) \pmod{2}$$

Pero en un árbol siempre existe un camino de la raíz a cualquier vértice arbitrario. Entonces, en \mathcal{B} existe un camino desde x hasta u , y existe un camino desde x hasta v . En particular, existe un vértice z que está en ambos caminos y a partir del cual los caminos se separan (note que puede ser x). Pero en C , uv forman un lado. Luego, en C tenemos el ciclo z, u, v, z .

¿Cuántos lados tiene el ciclo? Vea que de z a u hay $n(u) - n(z)$ lados. De u a v un solo lado, y de v a z otra vez $n(v) - n(z)$. En total, hay

$$n(u) + n(v) - 2n(z) + 1$$

lados. Pero $n(u) \equiv n(v) \pmod{2}$ y su suma es par. Luego la suma anterior es impar. Luego existe un ciclo impar en G .

Theorem 4 Para todo grafo $G = (V, E)$, $\chi(G) \leq \Delta + 1$.

Proof. \mathcal{G} siempre colorea con $\Delta + 1$ colores o menos. Tome cualquier orden $v_1 \dots v_n$ sobre V . Para colorear $v_i, i \neq 1$, se mira el color de los vecinos de v_i que son anteriores en el orden.

El peor caso posible es que todos los vecinos sean anteriores en el orden y todos tengan colores distintos. En ese caso, \mathcal{G} descarta $d(v_i)$ colores. Como $d(v_i) \leq \Delta$, entonces \mathcal{G} descarta a lo sumo Δ colores. Por lo tanto, siempre habrá al menos un color disponible en $\{1, 2, \dots, \Delta, \Delta + 1\}$. ■

Una pregunta natural es si hay grafos cuyo número cromático alcanza la cota $\Delta + 1$. La respuesta es sí: a saber,

- $\chi(K_n) = n$ y $\Delta = n - 1$.
- $\chi(C_{2r+1}) = 3$ y $\Delta = 2$.

El siguiente teorema establece que, de todos los grafos conexos, K_n y C_{2r+1} son los únicos que alcanzan la cota.

Theorem 5 (Brooks) Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo distinto de un K_n y un C_{2r+1} . Entonces $\chi(G) \leq \Delta$.

Proof. Complicada, una hora y media o dos de hacer. Triste.

Theorem 6 (Baby Brooks o Brooks para bebés) Si $G = (V, E)$ un grafo conexo y no regular, entonces $\chi(G) \leq \Delta$.

Proof. Es un caso particular del teorema de Brooks. Corramos BFS(x) con $d(x) = \delta$. Como G es conexo, obtenemos todos los vértices. Pues los vértices son agregados iterativamente al árbol del BFS, existe un orden dado precisamente por el orden de inserción al árbol.

Daremos un orden (que no es el anterior) tal que \mathcal{G} colorea G con a lo sumo Δ colores. En particular, es el orden inverso al anterior. Es decir que el último elemento del orden es la raíz x .

Como siempre el color del primer elemento es 1. Sea $z \neq v_1$ (en el orden del \mathcal{G}). El peor caso posible, que z tenga como vecinos a todos los anteriores, es imposible aquí, porque en el orden de DFS todo $y \neq x$ es insertado en el árbol por un vértice que ya estaba en el árbol. Y ese vértice debe ser un vecino. Es decir, en el orden de inserción del BFS, todo vértice tiene un vecino que es anterior en el orden. Entonces, en el orden inverso, todo $y \neq x$ tiene al menos un vecino posterior. Entonces, en el peor de los casos, tiene $d(y) - 1$ vecinos anteriores. Por lo tanto, greedy elimina a lo sumo $d(y) - 1 \leq \Delta - 1$ colores. \therefore Siempre puede colorear a y con un color en $\{1, 2, \dots, \Delta\}$.

Cuando llega a x , \mathcal{G} elimina a lo sumo $d(x) = \delta$ colores. Y como G no es regular, $\delta < \Delta$. \therefore Existe al menos un color para x en $\{1, 2, \dots, \Delta\}$.

1.8 ¿Para qué acotar χ ? Para encontrar χ !

En general no es fácil mostrar que $\chi(G) = \varphi$ de manera directa. Uno puede mostrar entonces que $\varphi_l \leq \chi(G) \leq \varphi_u$ usando las acotaciones vistas antes. Si sucede que $\varphi_l = \varphi_u$ qué bonito hemos encontrado $\chi(G)$. Si este no es el caso de igual modo estamos restringiendo el espacio de soluciones posibles. Por ejemplo, si $3 \leq \chi(G) \leq 4$, tenemos que $\chi(G) = 3$ o $\chi(G) = 4$, y a veces es fácil ver (y demostrar) cuál de los casos es correcto.

1.9 Limitaciones de \mathcal{G}

Ejemplo de \mathcal{G} mal. Sea $G = (V, E)$ un grafo tal que $n = 2i$ es par y

$$E = \{xy : x \text{ impar}, y \text{ par}, y \neq x + 1\}$$

El grafo es claramente bipartito (un par nunca se conecta con un par, un impar nunca con un impar) y tiene un coloreo de 2 colores. Sin embargo, al correr \mathcal{G} sobre este grafo, obtenemos un coloreo sub-óptimo.

Se deja al lector verificar los coloreos sub-óptimos que resultan si $n = 2, 4, 6$. Se presenta la siguiente hipótesis inductiva haciendo inducción sobre i :

Hipótesis inductiva. Para todo $j \leq k$, \mathcal{G} colorea el grafo con $c(2j - 1) = c(2j) = j$ colores.

Caso inductivo. Si $j \leq k$ por HI tenemos $c(2j - 1) = c(2j) = j$. Si $j = k + 1$, tenemos que $2(k + 1) - 1$ es impar y forma lados con todos los pares anteriores. Luego greedy no puede asignarle el color de ningún par anterior. Es decir, no puede asignar ningún color entre 1 y k . Luego greedy lo colorea con $k + 1$. El mismo razonamiento muestra que el vértice $2(k + 1)$ se colorea con $i + 1$.

Por lo tanto, greedy colorea G con $\frac{n}{2}$ colores.

1.10 Hill climbing

Hill climbing es un algoritmo de optimización matemática. Dada una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que se quiere maximizar, el algoritmo toma un punto arbitrario $\vec{x} \in \mathcal{D}_f$ y evalúa $f(\vec{x})$. Luego se hace $\Delta\vec{x} = (x_1, \dots, x_i + \epsilon, \dots, x_n)$ con $\epsilon \in R$ e i arbitrario y se vuelve a testear. Si la función incrementa, se hace $\vec{x} = \Delta\vec{x}$; si no, se hace la modificación inversa. Este proceso se repite iterativamente hasta que un criterio es satisfecho.

El principal problema del algoritmo de Hill climbing es que encuentra solo óptimos locales. Para lidiar con este problema, se usa *simulated annealing*. Si $\Delta\vec{x}$ va mejor se lo acepta; pero si $\Delta\vec{x}$ va peor se otorga una cierta probabilidad de aceptarlo de todos modos. La probabilidad de aceptar va reduciendo con el tiempo. La idea es permitir la salida de óptimos locales con el tiempo.

En coloreo de grafos, Hill climbing toma la siguiente forma. Se prueba un orden de V arbitrario y se lo colorea con \mathcal{G} . Luego hacer una pequeña permutación y se prueba de nuevo, etc.

Existe un modo de asegurarnos que la mutación $\Delta\vec{x}$ de \vec{x} nunca empeore (puede permanecer igual). El problema es que para hacer esto, reducimos el espacio de búsqueda; es decir, las permutaciones que exploraremos (las que no pueden empeorar el rendimiento) son muy pocas, y puede ser que ninguna mejore el rendimiento.

Una forma de lidiar con esto es elegir varios órdenes iniciales al azar y aplicar esta idea a cada una de ellas.

Theorem 7 (VIT) Sea $G = (V, E)$ un grafo con un coloreo propio c con r colores c_1, \dots, c_r . Sea $V_{c_i} := \{x \in V : c(x) = c_i\}$. Sea P una permutación de c_1, \dots, c_r . Es claro que $P : \{c_1, \dots, c_r\} \mapsto \{c_1, \dots, c_r\}$ es una biyección.

Ordenemos los vértices poniendo primero los vértices de $V_{P(c_1)}$; luego los de $V_{P(c_2)}$, etc. Es decir, ordenamos los vértices por bloques de color. Entonces \mathcal{G} con ese orden usa a lo sumo r colores.

Proof. Hacemos inducción sobre r .

Caso base $i = 1$. Los vértices de $V_{P(c_i)}$ tienen el mismo color $P(c_i)$. Porque c es un coloreo propio, y los vértices en cada $V_{P(c_i)}$ no pueden formar lados entre sí, \mathcal{G} los colorea a todos con el color 1 y usa un color. ■

$HI(i) \Rightarrow HI(i+1)$: Sea $x \in V_{P(c_1)} \cup \dots \cup V_{P(c_{i+1})}$. Si x está en alguno de los primeros i bloques, \mathcal{G} lo colorea con uno de entre i colores por hipótesis inductiva.

Si $x \in V_{P(c_{i+1})}$, el caso en que \mathcal{G} lo colorea con un color menor o igual a $i+1$ no viola lo que queremos demostrar. Pero asumamos que lo colorea con el color $i+2$. Entonces ningún color menor estaba disponible; entonces x es vecino de algún z de color $i+1$. Pero todos los vértices de $V_{P(c_i)}$ están coloreados el color c_i . Luego $z \in V_{P(c_{i+1})}$. Pero si tanto $x, z \in V_{P(c_{i+1})}$ entonces $c(x) = c(z) = P(c_{i+1})$, lo cual implica que c no es propio. (\perp)

2 Redes y flujos

Una red es un grafo dirigido con un límite en la información o carga transferible de un nodo a otro.

El modelo de problema central es una red de productores y consumidores. Se trata de encontrar el máximo de información (o producto) transferible de los productores a los consumidores. Lo transferido de productores a consumidores se llama flujo. Llamamos a este problema *max flow*.

Definition 10 Un grafo $G = (V, E)$ con V un conjunto y $E \subseteq V \times V$ se llama dirigido.

Usaremos \vec{xy} para denotar (x, y) donde $(x, y) \in E$. Observe que $\vec{xy} \neq \vec{yx}$.

Definition 11 Una red o network es una 3-upla (V, E, c) donde (V, E) es un grafo dirigido y $c : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ es una función.

La función c denota la capacidad de cada uno de los lados.

Definition 12 (Vecinos) Definimos $\Gamma^+(x) = \{x \in V : \vec{xy} \in E\}$ y, por otro lado, $\Gamma^-(x) = \{y \in V : \vec{yx} \in E\}$

Usualmente nos preguntamos no cuánta información puede enviarse de un nodo a otro, sino cuánta puede enviarse de un conjunto de nodos a otro (de una parte del grafo a otra). Esto inspira la siguiente notación.

Definition 13 Sea $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ y sean $A, B \subseteq V$. Definimos

$$g(A, B) = \sum_{x \in A, y \in B \text{ t.q. } \exists \vec{xy} \in E} g(\vec{xy})$$

Usualmente usamos la siguiente notación: Si ζ es una expresión booleana, $[\zeta]$ es su evaluación en $\{0, 1\}$. Esto a veces facilita las cosas; por ejemplo, la definición anterior es equivalente a

$$g(A, B) = \sum_{\vec{xy} \in E} [x \in A][y \in B][\vec{xy} \in E]g(\vec{xy})$$

Definition 14 Sea $N = (V, E, c)$ una network. Sea $x \in V$ y $g : E \rightarrow \mathbb{R}$. Definimos

$$out_g(x) := \sum_E [y \in V][\vec{xy} \in E]g(x) = g(\{x\}, V)$$

Análogamente,

$$in_g(x) := \sum [y \in V][\vec{yx} \in E]g(\vec{yx}) = g(V, \{x\})$$

Definition 15 Dada $N = (V, E, c)$ una network y $s, t \in V$, una función $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ es un flujo si y solo si

1. $0 \leq f(\vec{xy}) \leq c(\vec{xy}) \forall \vec{xy} \in E$ (feasability)
2. $in_f(x) = out_f(x) \forall x \in V - \{s, t\}$ (conservación)
3. $out_f(s) \geq in_f(s)$ (s es una source o productor)
4. $in_f(t) \geq out_f(t)$ (t es un consumidor o sink)

A veces se pide que lo que entra a s sea cero y lo que salga de t sea cero, pero esto no es necesario. A fines prácticos, en los ejemplos que veremos esta última restricción se cumple. Más aún, suele suceder que $\Gamma^+(t) = \emptyset$ y $\Gamma^-(s) = \emptyset$.

Definition 16 Sea $N = (V, E, c)$ una network y f un flujo en N de s a t . Definimos el valor de un flujo como sigue:

$$v(f) = out_f(s) - in_f(s)$$

El valor de un flujo es, por lo tanto, lo que "sale" de s en ese flujo; o bien, la cantidad total de información que está siendo transferida desde s hacia t . Es intuitivo pensar que esto será lo mismo que la cantidad de información que llega a t . El siguiente teorema establece esta equivalencia.

Theorem 8 Sea $N = (V, E, c)$ una network y f un flujo en N . Luego $v(f) = in_f(t) - out_f(t)$.

Proof. Observe que

$$\begin{aligned} f(V, V) &= \sum_{\vec{xy} \in E} f(\vec{xy}) \\ &= \sum_{x \in V} \sum_{y \in V, \vec{xy} \in E} f(\vec{xy}) \\ &= \sum_{x \in V} out_f(x) \end{aligned}$$

Ahora bien, el mismo razonamiento indica que $f(V, V) = \sum_{x \in V} in_f(x)$. Es decir,

$$\sum_{x \in V} out_f(x) = \sum_{x \in V} in_f(x)$$

Por la propiedad (2) de un flujo, tenemos que $in_f(x) = out_f(x)$. Cancelando términos en las sumatorias, llegamos a

$$\begin{aligned} \sum_{x \in V} out_f(x) &= \sum_{x \in V} in_f(x) \\ \Rightarrow out_f(s) - in_f(s) &= in_f(t) - out_f(t) = v(t) \blacksquare \end{aligned}$$

(Incidentalmente, como $out_f(s) \geq in_f(s)$, tenemos que $v(t) \geq 0$, y por lo tanto $in_f(t) \geq out_f(t)$, lo cual es la propiedad (4) de un flujo.)

Definition 17 Sea $\mathcal{N} = (V, E, c)$ una network y f un flujo en \mathcal{N} de s a t . f se dice maximal si y solo si $v(f) \geq v(g)$ para toda g que sea un flujo en \mathcal{N} de s a t .

Lemma 3 (Un lema obvio) Sean f, g funciones sobre los lados con $f(\vec{xy}) \leq g(\vec{xy})$ para toda $\vec{xy} \in E$. Entonces $f(A, B) \leq g(A, B)$ para todo $A, B \subseteq V$.

Observemos que si $v(f) = c(\{s\}, V)$, entonces f es maximal. Es el caso en que saturamos completamente la capacidad de s . Sin embargo, la inversa no se cumple: si un flujo es maximal, no necesariamente saturamos los lados de s .

Theorem 9 (Probar que flujo es maximal) Sea f un flujo sobre $\mathcal{N} = (G, E, c)$ de s a t . Entonces $v(f) = c(\{s\}, V) \Rightarrow f$ es maximal.

Proof. Sea g un flujo en $\mathcal{N} = (V, E, c)$ de s a t . Por propiedad (1) de la definición de flujo, $g(\vec{xy}) \leq c(\vec{xy})$ para todo $\vec{xy} \in E$. Por el lema anterior,

$$g(\{s\}, V) \leq c(\{s\}, V)$$

Vea que $v(g) = out_g(s) - in_g(s) \leq out_g(s)$. Pues $out_g(s) = g(\{s\}, v) \leq c(\{s\}, v) = v(f)$. Obtenemos entonces $v(g) \leq v(f)$.

2.1 Algoritmo \mathcal{G} para flujo

Damos un algoritmo para encontrar un flujo f sobre una network $\mathcal{N} = (V, E, c)$. Recordemos que el flujo f de una network es simplemente una función que asigna valores a sus lados. El algoritmo hace lo siguiente:

- (1) Inicializa el flujo en $f(\vec{xy}) = 0$ para todo $\vec{xy} \in E$.
- (2) Encuentra un camino no saturado de s a t ; es decir, un camino tal que el flujo es inferior a la capacidad en cada lado. Si el camino no existe, termina.
- (3) Suma al flujo de cada lado en el camino el valor máximo que puede sumarse sin sobrepasar la capacidad de ningún lado.
- (4) Regresa a (2).

En pseudo-código, el algoritmo es:

```

 $f(\vec{xy}) = 0$  for all  $\vec{xy} \in E$ 
while ( $\exists$  camino no saturado de  $s$  a  $t$ ) do
    Encuentra camino no saturado  $sx_0 \dots x_r t$ 
     $\epsilon = \min_{0 \leq i < r} \{c(\overrightarrow{x_i x_{i+1}}) - f(\overrightarrow{x_i x_{i+1}})\}$ 
    for  $i := 0$  do
         $f(\overrightarrow{x_i x_{i+1}}) := f(\overrightarrow{x_i x_{i+1}}) + \epsilon$ 
    od
od

```

Algunas propiedades buenas del algoritmo \mathcal{G} para flujos son las siguientes:

- Siempre devuelve un flujo
- Siempre termina, porque en cada iteración satura al menos un lado y nunca "desatura" los lados.
- Su complejidad $O(m^2)$, porque hace $O(m)$ iteraciones y en cada iteración es $O(m)$.

Su gran propiedad mala es que no siempre devuelve un flujo maximal. Pero esto puede resolverse si adaptamos un poco el algoritmo de \mathcal{G} . Para dar con la adaptación adecuada, antes damos una nueva definición.

2.2 Algoritmo Ford-Fulkerson

Definition 18 Un f -camino aumentante es una sucesión x_0, \dots, x_r de vértices tal que $x_0 = s, x_r = t$, y para cada $0 \leq i < r$, uno de los dos casos se cumplen:

- $\overrightarrow{x_i x_{i+1}} \in E$ y $f(\overrightarrow{x_i x_{i+1}}) < c(\overrightarrow{x_i x_{i+1}})$.
- $\overleftarrow{x_i x_{i+1}} \in E$ y $f(\overleftarrow{x_i x_{i+1}}) > 0$.

La primera condición establece que si un trecho del camino es *forward* ($\overrightarrow{x_i x_{i+1}} \in E$), el flujo circulante en ese trecho es inferior a su capacidad. La segunda condición establece que si un trecho del camino es *backward* ($\overleftarrow{x_i x_{i+1}} \in E$), el flujo circulante en ese trecho es mayor a cero.

Theorem 10 Si f es un flujo de valor v , y aumentamos f con un f -camino aumentante con ϵ , entonces lo que queda sigue siendo un flujo y su valor es $v + \epsilon$.

La propiedad linda de Ford-Fulkerson es que, si termina, devuelve un flujo maximal. La propiedad fea es que no siempre termina.

```

 $f(\overrightarrow{xy}) := 0$  for all  $\overrightarrow{xy} \in E$ 
while ( $\exists$   $f$ -camino aumentante  $s$  a  $t$ ) do
  Hallar  $f$ -camino aumentante  $x_0 \dots x_{r-1} x_r$  con  $x_0 = s, x_r = t$ 
  for  $i := 0$  to  $r$  do
     $\epsilon_i := \begin{cases} c(\overrightarrow{x_i x_{i+1}}) - f(\overrightarrow{x_i x_{i+1}}) & \overrightarrow{x_i x_{i+1}} \in E \\ f(\overleftarrow{x_i x_{i+1}}) & \overleftarrow{x_i x_{i+1}} \in E \end{cases}$ 
  od
   $\epsilon = \min \{\epsilon_0, \dots, \epsilon_r\}$ 
  for  $i := 0$  to  $r$  do
    if  $\overrightarrow{x_i x_{i+1}} \in E$  then
       $f(\overrightarrow{x_i x_{i+1}}) := f(\overrightarrow{x_i x_{i+1}}) + \epsilon$ 
    else
       $f(\overleftarrow{x_i x_{i+1}}) := f(\overleftarrow{x_i x_{i+1}}) - \epsilon$ 
    fi
  od
od

```

Como puede observarse, el algoritmo encuentra un camino aumentante arbitrario, encuentra la menor cantidad de flujo que puede o bien agregarse o bien removerse de la circulación en cada trecho del camino, y luego lo agrega o lo sustrae en cada trecho dependiendo del caso.

2.3 Análisis de Ford-Fulkerson

Definition 19 Sea $N = (V, E, c)$ una network. Un corte es un conjunto $S \subseteq V$ tal que $s \in S, t \notin S$.

Lemma 4 Sea f un flujo sobre una network N con un corte S . Entonces $v(f) = f(S, \bar{S}) - f(\bar{S}, S)$.

Prueba. Recordemos que $out_f(x) - in_f(x) = 0$ si $x \neq s, t$. Recordemos además que $out_f(s) - in_f(s) = v(f)$ por definición. Entonces

$$\begin{aligned} \sum_{x \in S} (out_f(x) - in_f(x)) &= out_f(s) - in_f(s) + \sum_{x \in S, x \neq s} out_f(x) - in_f(x) \\ &= out_f(s) - in_f(s) \\ &= v(f) \end{aligned}$$

Ahora bien, la sumatoria dada puede expresarse de otra forma. Observe que

$$\sum_{x \in S} (out_f(x) - in_f(x)) = \sum_{x \in S} [f(\{x\}, V) - f(V, \{x\})]$$

Por la definición de $g(A, B)$, si partimos los dos términos dentro de la sumatoria en dos sumatorias separadas, obtenemos que lo anterior es

$$\begin{aligned} f(S, V) - f(V, S) &= f(S, S \cup \bar{S}) - f(S \cup \bar{S}, S) \\ &= [f(S, S) + f(S, \bar{S})] - [f(S, S) + f(\bar{S}, S)] \end{aligned}$$

En resumen,

$$\begin{aligned} \sum_{x \in S} (out_f(x) - in_f(x)) &= f(S, S) + f(S, \bar{S}) - f(S, S) - f(\bar{S}, S) \\ &= f(S, \bar{S}) - f(\bar{S}, S) \end{aligned}$$

Combinando ambos resultados, $v(f) = f(S, \bar{S}) - f(\bar{S}, S)$.

Definition 20 La capacidad de un corte S se define como $Cap(S) = c(S, \bar{S})$.

Es decir, es la suma de las capacidades de todos los vértices que van desde el corte hacia fuera del corte.

Definition 21 Un corte S es minimal si su capacidad es menor o igual a la de todo otro corte.

Theorem 11 (Max flow, min cut) Sea S un corte arbitrario sobre una network $\mathcal{N} = (V, E, c)$ con flujo f . Luego $v(f) \leq \text{Cap}(S)$. Más aún, f es maximal si y solo si existe un corte minimal S tal que $v(f) = \text{Cap}(S)$.

Prueba. (I) Probaremos que $f \leq \text{Cap}(S)$ para un corte S y un flujo f arbitrarios. Por el lema anterior, $v(f) = f(S, \bar{S}) - f(\bar{S}, S)$.

Consider que el segundo término es una suma de la forma $\sum f(\vec{xy})$, etc. Por definición, cada término en esa sumatoria es mayor o igual a cero, y por lo tanto la sumatoria es positiva. Es decir que $-f(\bar{S}, S) \leq 0$. Luego

$$v(f) = f(S, \bar{S}) - f(\bar{S}, S) \leq f(S, \bar{S})$$

El primer término también es una sumatoria de términos positivos y es por lo tanto mayor a cero, pero cada término es a su vez menor a la capacidad de cada lado. es decir $f(S, \bar{S}) \leq c(S, \bar{S}) = \text{Cap}(S)$. Más prolijo,

$$v(f) \leq f(S, \bar{S}) \leq \text{Cap}(S) \quad \blacksquare$$

(\Leftarrow) Sea ahora f un flujo y S un corte con $v(f) = \text{Cap}(S)$. Sea g cualquier otro flujo. Entonces, por la propiedad recién demostrada, $v(g) \leq \text{Cap}(S)$. Pues $\text{Cap}(S) = v(f)$, tenemos $v(g) \leq v(f)$. Por lo tanto f es maximal. Como detalle, si T es un corte, $\text{Cap}(T) \geq v(f) = \text{Cap}(S)$, lo cual implica que S es minimal.

(\Rightarrow) Asuma que f es maximal. Probaremos que existe un corte S con $v(f) = \text{Cap}(S)$. Para esto, debemos construir S a partir f . Definiremos

$$S = \{s\} \cup \{x \in V : \exists f\text{-camino aumentante entre } s \text{ y } x\}$$

Que S es un corte se sigue por contradicción. Si S no es corte, debe contener a t . Luego existe un f -camino aumentante desde s a t . Esto implica que puedo aumentar el flujo f , lo cual contradice que f es maximal. (\perp)

Sabiendo que S es un corte, tenemos

$$v(f) = f(S, \bar{S}) - f(\bar{S}, S) \tag{1}$$

Considere el primer término en la resta de (1):

$$f(S, \bar{S}) = \sum_{x \in S, z \notin S, \vec{xz} \in E} f(\vec{xz})$$

Sea \vec{xz} un par dentro del rango de la suma de arriba. Pues $x \in S$, existe un f -camino aumentante de s a x . Pues $z \notin S$, no existe un f -camino aumentante de s a z . Pero el lado \vec{xz} sí existe. Así que $s \dots x z$ podría ser un f -camino aumentante; como tal camino no existe por hipótesis, no es aumentante. Esto implica que $f(\vec{xz}) = c(\vec{xz})$. La conclusión es que $f(\vec{xz}) = c(\vec{xz})$ para todo $x \in S, z \notin S, \vec{xz} \in E$. Entonces

$$f(S, \bar{S}) = \sum_{\dots} f(\vec{xz}) = \sum_{\dots} c(\vec{xz}) = \text{Cap}(S)$$

Ahora consideremos el segundo término de la ecuación (1).

$$f(\bar{S}, S) = \sum_{w \notin S, x \in S, \vec{wx} \in E} f(\vec{wx})$$

Sea \vec{wx} un par arbitrario en el rango de la suma. Como antes, $x \in S \Rightarrow$ que hay un camino aumentante de s a x ; pero no existe camino aumentante entre s y w ; pero \vec{wx} es un lado. Es decir, $s \dots \vec{wx}$ podría ser un f -camino aumentante; y como no lo es sucede que $f(\vec{wx}) = 0$. Luego

$$f(\bar{S}, S) = \sum_{\dots} f(\vec{wx}) = 0$$

Luego $v(f) = \text{Cap}(S) - 0 = \text{Cap}(S)$. ■

Observación. La hipótesis de f maximal se usa solo para demostrar que S es corte. Es decir que en realidad hemos probado que hay tres proposiciones equivalentes: f es maximal, el S "especial" dado es un corte, y $v(f) = \text{Cap}(S)$ para cualquier S .

El corolario importante de la prueba es el siguiente: Si Ford-Fulkerson termina, termina con un flujo maximal. La prueba de esto es simple: Ford-Fulkerson termina solo cuando no existe un f -camino aumentante de s a t ; es decir, cuando S es corte.

Theorem 12 (Integralidad) *Si las capacidades son todas enteras, Ford-Fulkerson termina, y termina con un flujo "entero".*

Prueba. Ford-Fulkerson empieza con $f(\vec{xy}) = 0$ para todo $\vec{xy} \in E$. Este flujo es entero. Demostraremos que si las capacidades son todas enteras, el hecho de que $f(\vec{xy}) \in \mathbb{N}_0$ para todo $\vec{xy} \in E$ es una invariante del algoritmo.

Asuma que f es un flujo entero y que aumentamos a un flujo f' por medio de Ford-Fulkerson. Por definición del algoritmo de Ford-Fulkerson,

$$\epsilon_i = \begin{cases} c(\vec{x_i x_{i+1}}) - f(\vec{x_i x_{i+1}}) \\ f(\vec{x_{i+1} x_i}) \end{cases}$$

La hipótesis de que los argumentos son enteros hace que los valores de ϵ_i sean enteros; en particular, $\epsilon = \min \{\epsilon_0, \dots, \epsilon_r\} \in \mathbb{N}$. Ahora bien, para f' , el valor de cada lado va a ser bien o f , o $f + \epsilon$, o $f - \epsilon$, dependiendo del caso. Entonces todos los valores en f' son enteros. ■

Como $\epsilon \in \mathbb{N} \Rightarrow \epsilon \geq 1 \Rightarrow v(f') \geq v(f) + 1 \Rightarrow$ Ford-Fulkerson termina.

2.4 Edmonds-Karp: Una mejora sobre Ford-Fulkerson

Edmonds-Karp dieron un criterio para elegir uno entre todos los f -caminos aumentados posibles; en particular, elegir siempre el que tiene menor longitud usando BFS. La combinación Ford-Fulkerson + BFS siempre termina y es polinomial $O(nm^2)$.

Theorem 13 *Edmonds-Karp siempre termina y opera con complejidad $O(nm^2)$.*

Para probar esto, necesitamos hacer dos demostraciones auxiliares vinculadas a las siguientes definiciones:

Definition 22 (Primera definición para el teorema) *Un lado es (o se vuelve) crítico en un paso dado del algoritmo Edmonds-Karp si es usado para actualizar el flujo y satisface que: (a) se usa en modo forward y se satura, o (b) se usa en modo backward y se vacía.*

Cuando un lado se vuelve crítico, no puede volver a usarse (en la misma dirección) en el próximo paso; si se satura, no puede enviarse más flujo forward; si se vacía, no puede enviarse más flujo backward.

Definition 23 (Segunda definición para el teorema) *Dados $x, z \in V$ en una network con flujo f , definimos $d_f(x, z)$ la distancia entre esos vértices relativa al flujo f como sigue:*

$$d_f(x, z) := \begin{cases} 0 & x = z \\ \infty & \text{No existe } f\text{-c.a. de } x \text{ a } z \\ \min \{\text{longitudes de los } f\text{-c.a. de } x \text{ a } z\} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Theorem 14 (Teorema auxiliar uno) *Sean f_0, f_1, \dots , los flujos que se van obteniendo en las iteraciones $0, 1, \dots$ de Edmonds-Karp. Definamos*

$$d_k(x) = d_{f_k}(s, x), \quad b_k(x) = d_{f_k}(x, t)$$

Entonces, para todo $x \in V$,

$$(1) \quad d_k(x) \leq d_{k+1}(x)$$

$$(2) \quad b_k(x) \leq b_{k+1}(x)$$

Es decir, la longitud de los f -caminos aumentados que se obtienen iterativamente con Edmonds-Karp nunca decrece.

Prueba. Sea $A = \{x : d_{k+1}(x) < d_k(x)\}$. Suponga que $A \neq \emptyset$. Sea $x_0 \in A$ el elemento tal que la distancia $d_{k+1}(x_0)$ es menor a todas las distancias $d_{k+1}(y)$ con $y \in A$. Observe que $x_0 \in A \Rightarrow d_{k+1}(x_0) < d_k(x_0) \leq \infty \Rightarrow d_{k+1} < \infty$. Entonces existe un f_{k+1} -c.a. entre s y x_0 .

Sea $p_{k+1} := s \dots x_0$ el f_{k+1} -c.a. de longitud mínima entre s y x_0 ; es decir, de longitud $d_{k+1}(x)$. En este camino existe un vértice z inmediatamente anterior a x_0 ; es decir, p_{k+1} es de la forma $s \dots zx_0$. Pues este camino es de longitud mínima entre s y x_0 , es de longitud mínima entre s y cualquier otro vértice en el medio, incluyendo a z .

Por lo tanto,

$$d_{k+1}(z) = d_{k+1}(x_0) - 1 \quad (2)$$

Observe que esto implica que $z \notin A$ (piense por qué). Ahora bien, como $s \dots zx_0$ es f_{k+1} -c.a., o existe \vec{zx} o existe \vec{xz} (forward o backward). Analizamos los dos casos.

(1) Si \vec{zx} es un lado, tenemos que $d_{k+1}(z) < d_{k+1}(x)$. Pero

$$z \notin A \Rightarrow d_k(z) \leq d_{k+1}(z) < d_{k+1}(x) < \infty$$

Como $d_k(z) < \infty$, existe un f_k -camino aumentante entre s y z . Lo denotamos p_k . Como \vec{zx} es un lado, podría, en principio, agregar x al final de p_k , obteniendo un f_k -c.a. entre s y x que pasa por z . Pero entonces tendríamos $d_k(x) \leq d_k(z) + 1 \leq d_{k+1}(z) + 1 \leq d_{k+1}(x)$. Pero esto implica $x \notin A$. (\perp)

Por lo tanto, no puedo agregar x al final de p_k . Entonces, o bien el lado \vec{zx} está saturado en el paso k , o bien $f_k(\vec{zx}) = c(\vec{zx})$. Pero p_{k+1} era aumentante; es decir, sus lados no pueden estar saturados; lo cual implica que $f_{k+1}(\vec{zx}) < c(\vec{zx})$ en el paso $k + 1$. Luego, para pasar de f_k a f_{k+1} , se usó el lado \vec{xz} y se usó backwards en el camino

$$\tilde{p}_k : s \dots \vec{xz} \dots t$$

Como este camino se usa en Edmonds-Karp, es de longitud mínima. Por lo tanto, $d_k(z) = d_k(x) + 1$.

De aquí deriva una contradicción de manera mística.

(2) Si \vec{xz} es un lado, tenemos que p_{k+1} es de la forma $s \dots \vec{xz}$. Como antes,

$$d_{k+1}(z) < d_{k+1}(x) \Rightarrow z \in A \Rightarrow d_k(z) \leq d_{k+1}(z)$$

lo cual a su vez implica que existe un f_k -c.a. entre s y z :

$$p_k : s \dots z$$

Podríamos agregar a x en el final de este camino usando \vec{xz} backwad; llegaríamos a la misma contradicción de antes, en que no podíamos agregar a x . En este caso, si no lo podemos agregar, es porque $f_k(\vec{xz}) = 0$. Pero p_{k+1} es f_{k+1} -aumentante, lo cual implica que $f_{k+1}(\vec{xz}) > 0$. Luego debimos haber usado \vec{xz} en modo forward al pasar de f_k a f_{k+1} . Por lo tanto, existe un f_k -c.a. de la forma

$$\tilde{p}_k : s \dots \vec{xz} \dots t$$

Y como usamos Edmonds-Karp, este camino aumentante es de longitud mínima. Luego $d_k(z) = d_k(x) + 1$, de lo cual deriva la contradicción de la misma manera mística.

Conclusión. $A = \emptyset$.

Prueba. Edmonds-Karp construye una sucesión de caminos aumentantes. Cada camino se encuentra con BFS, que es $O(m)$. \therefore la complejidad de Edmonds-Karp es $O(m\zeta)$ donde ζ es la cantidad de caminos aumentantes. Solo basta observar que $\zeta = nm$.

Sean f_0, f_1, f_2, \dots los flujos que se van obteniendo en Edmonds-Karp. Sea $d_k(x) = d_{f_k}(s, x)$ y $b_k(x) = d_{f_k}(x, t)$.

Si ambas son finitas, $d_k(t) = d_k(x) + b_k(x)$ para cualquier $x \in V$.

A su vez, para todo $x \in V$, $d_k(x) \leq d_{k+1}(x)$ y $b_k(x) \leq b_{k+1}(x)$; es decir, las distancias son crecientes respecto a los flujos f_0, f_1, \dots . Hacemos la prueba para d ; queda como ejercicio hacer para b .

UF! Ya sabemos que las distancias de los f -caminos aumentantes que usa Edmonds-Karp aumentan con cada iteración, o bien que $d_k(x) \leq d_{k+1}(x)$. Ahora preguntamos: cuántas veces puede un lado volverse crítico en Edmonds-Karp?

Sea \vec{xy} un lado que se vuelve crítico en el paso k . Entonces o bien el lado se satura con forward o bien se vacía con backward.

(1) Asuma que \vec{xy} se satura. Entonces $f_k(\vec{xy}) < c(\vec{xy})$ y $f_{k+1}(\vec{xy}) = c(\vec{xy})$. \therefore De f_k a f_{k+1} usamos un camino aumentante de la forma $s \dots xy \dots t$. Como estamos usando Edmonds-Karp, este camino es de longitud mínima. $\therefore d_k(y) = d_k(x) + 1$. Supongamos que \vec{xy} se vuelve a volver crítico en algún paso $j > k$. Se puede volver crítico:

(a) Porque se vació; es decir, usamos \vec{xy} backward en el paso j .

(b) Se saturó, habiendo devuelto backward sin vaciarse en algún paso i con $k < i < j$.

En ambos casos, existe un $k < i \leq j$ tal que \vec{xy} se usa en forma backward. Es decir, usamos un f_i -c.a. de la forma

$$s \dots \overleftarrow{yx} \dots t$$

Como estamos usando Edmonds-Karp, ese camino es de longitud mínima. Por lo tanto, $d_i(x) = d_i(y) + 1$.

Ahora bien, $d_j(t) \geq d_i(t) = d_i(x) + b_i(x)$. Por el último resultado, esto equivale a

$$d_j(t) \geq d_i(y) + 1 + b_i(x) \geq d_k(y) + 1 + b_k$$

porque las distancias no disminuyen. Pero $d_k(y) = d_k(x) + 1$. Luego

$$d_j(t) \geq d_k(x) + 1 + 1 + b_k(x)$$

o bien $d_j(t) \leq d_k(t) + 2$.

(2) Asuma que \vec{xy} se vacía. Entonces, la próxima vez que se vuelva crítico, va a ser porque se saturó, o bien porque se vació otra vez, habiéndose llenado un poco antes. En cualquier caso, el paso k lo usa backwards con c.a. $s \dots \overleftarrow{yx} \dots t$, que implica $d_k(x) = d_k(y) + 1$. Al reutilizarlo forward en algún paso i obtenemos $d_i(y) = d_i(x) + 1$. Luego

$$\begin{aligned}
d_j(t) &\geq d_i(t) \\
&= d_i(y) + b_i(y) \\
&= d_i(x) + 1 + b_i(y) \\
&\leq d_k(x) + 1 + b_k(y) \\
&= d_k(y) + 1 + 1 + b_k(y) \\
&= d_k(t) + 2
\end{aligned}$$

En conclusión, para cualquiera de los dos casos, $d_j(t) \geq d_k(t) + 2$. Es decir, una vez un lado se vuelve crítico, para poder volver a volverse crítico, la distancia entre s y t debe aumentar al menos en 2. Como la distancia entre s y t varía entre 1 y $n - 1$, un lado puede volverse crítico a lo sumo $(\frac{n}{2}) = O(n)$ veces.

En resumen, cada camino aumentante vuelve crítico al menos un lado; cada lado se vuelve crítico a lo sumo $O(n)$ veces; hay m lados. Luego hay $O(mn)$ caminos aumentantes.

Corolario. Siempre existe al menos un flujo maximal.

2.5 Algoritmo de Dinitz

El algoritmo de Dinitz es una mejora sobre Edmonds-Karp. Utiliza una estructura auxiliar, que llamaremos *network auxiliar*.

Definition 24 *Un network por niveles es un network con $V_i \subseteq V$, $0 \leq i \leq r$, tales que:*

- $V_i \cap V_j = \emptyset$
- $V = \cup_{i=0}^r V_i$
- $E \subseteq \cup_{i=0}^{r-1} (V_i \times V_{i+1})$

Definition 25 *Dado un flujo f sobre un network N , definimos el network auxiliar (relativo a f) como el network por niveles dado por:*

- $r = d_f(s, t)$
- $V_0 = \{s\}$
- $V_r = \{t\}$
- $V_i = \{x : d_f(s, x) = i\}$ donde $0 < i < r$.
- $E = \left\{ (x, y) : \exists i : x \in V_i, y \in V_{i+1} \wedge \left(\vec{xy} \in E_N \wedge f(\vec{xy}) < c(\vec{xy}) \right) \vee \left(\vec{yx} \in E_N \wedge f(\vec{yx}) > 0 \right) \right\}$

Definition 26 (Blocking flow) *Un flujo en un network $N = (V, E, c)$ se dice bloqueante si, al querer correr greedy a partir de ese flujo, el flujo no puede aumentarse.*

La definición anterior equivale a decir que todo camino dirigido desde s a t tiene al menos un lado saturado bajo el flujo bloqueante.

Algoritmos tipo Dinitz. Los algoritmos "tipo Dinitz" tienen la siguiente forma:

- Se comienza con $f = 0$.
- Se construye un network auxiliar a partir de f .

- Se halla un flujo bloqueante g en el network auxiliar.
- Se usa g para cambiar f .

Estos algoritmos se detienen cuando en el network auxiliar ya no puede llegarse a t . La diferencia entre los algoritmos de la familia Dinitz está en cómo se halla el flujo bloqueante del network auxiliar. En la versión original y la versión occidental del algoritmo de Dinitz, el flujo bloqueante se encuentra corriendo \mathcal{G} usando DFS. Observe que en el network auxiliar no se usarán lados backward.

Ejemplo. Considere este grafo:

$sA : 80$ $DA : 20$
 $sB : 70$ $DC : 90$
 $sD : 90$ $DG : 90$
 $sG : 90$ $Et : 90$
 $AC : 90$ $EF : 90$
 $AE : 10$ $Ft : 90$
 $AI : 40$ $GA : 10$
 $BH : 90$ $GH : 90$
 $BJ : 90$ $Ht : 70$
 $Ct : 80$ $It : 90$
 $CE : 10$ $Jt : 90$
 $CG : 90$

El primer nivel es $V_0 = \{s\}$. Construímos los niveles tal como construimos la cola en Edmonds-Karp, pero ahora agregando todos los lados posibles en cada nivel. De esto se sigue:

$$V_1 = \{A, B, D, G\}$$

Entonces s queda conectado a todos estos vértices. Luego consideramos los vecinos de A :

$$V_2 = \left\{ \overbrace{C, E, I}^A, \overbrace{H, J}^B, \overbrace{C}^D, \overbrace{H}^G \right\}$$

El dA y dG no los podemos agregar, porque A, G están en un nivel anterior. Pero si agregamos DC . Cada vértice en V_2 está conectado con el vértice de V_1 que está encima suyo. Si repetimos, vemos que en V_3 solo está t , y está conectado con todos los de V_2 .

Una vez que armamos por niveles es fácil encontrar un camino a t ; por ejemplo, $sACt$ se halla fácil, y puede enviarse 80 por él. Como antes, debemos actualizar la capacidad restante; por ejemplo, una vez este camino es usado, la capacidad de AC es 10 y la de los otros lados involucrados queda en 0. Más aún, como se usa

\mathcal{G} , los lados no se desaturan; por lo tanto, los lados sA , AC , Ct quedan saturados y no pueden volverse a usar.

Cada vez que el algoritmo llega con DFS a un vértice que no puede ya conducir flujo a t , elimina el lado que conduce a él. Eventualmente no quedan más lados que considerar y el flujo bloqueante en el network auxiliar fue encontrado.

Luego se encuentra $sBHt : 70$, también usando \mathcal{G} . Una vez se hace esto no hay más lados que usar.

Ahora construimos otro auxiliar, teniendo en cuenta que algunos lados ya no pueden usarse (se han saturado):

Se hace $\{s\}, \{sD, sG\}, \{GA, DC, DA, GH\}, \{AE, CE, AI, HB\}, \{Et, It\}$

(El lado HB en el network auxiliar corresponde a BH backwards en el network original.) Aquí se halla fácil $sDAEt : 10$; como el lado AE se satura, se lo borra. Luego se halla $sDAIt : 10$, sin saturar ningún lado. Luego se halla $sDCEt$ saturando DA . Luego se encuentra $sGAIt : 10$, saturando GA . Aquí se termina, se actualiza el flujo en el network original, y se empieza a construir otro network auxiliar.

El tercer network auxiliar será:

$$\{s\}, \{sD, sG\}, \{DC, GH\}, \{CA, HB\}, \{AI, BJ\}, \{It, Jt\}$$

CA y HB corresponden a AC y HB backwards en el network original. Los caminos son $s\overleftarrow{DCA}IG : 20$ y $s\overleftarrow{GHB}Jt : 70$.

Nota. Observe que los caminos de cada network auxiliar son de la misma longitud, y el network auxiliar i siempre tiene caminos más largos que el network auxiliar $i - 1$. Estas dos propiedades siempre se cumplen.

El último network auxiliar resulta

$$\{s\}, \{sD, sG\}, \{DC, GH\}, \{CA\}$$

Ya no puede llegarse a t y se termina. Y el corte minimal son los vértices del último network auxiliar; es decir, $\mathcal{S} = \{s, D, C, A, G, H\}$

Theorem 15 *La distancia entre s y t (esto es, el nivel de t) aumenta en networks auxiliares sucesivos.*

Prueba. Para esta prueba, introducimos una network util. Dado un flujo f sobre una network \mathcal{N} , la **network residual** \mathcal{N}_f relativo a f es la network que tiene a todos los vertices de \mathcal{N} y tiene lados

$$E(\mathcal{N}_f) = \{(x, y) \in E(\mathcal{N}) : f(\overrightarrow{xy}) < c(\overrightarrow{xy}) \vee \overrightarrow{yx} \in E(\mathcal{N}) : f(\overrightarrow{yx}) > 0\}$$

Es lo mismo que la network auxiliar, pero no dividido por niveles. En particular, si para un lado la capacidad es 10 y el flujo es 7, tendremos el \overrightarrow{xy} con capacidad restante 3 y el \overleftarrow{yx} con capacidad restante 7. (Lo que puedo enviar, lo que puedo devolver...).

Sea \mathcal{N}_A una network auxiliar relativa a un flujo f , \mathcal{N}_f el flujo residual, y f' el flujo que se obtiene luego de encontrar un flujo bloqueante en \mathcal{N}_A . Definimos $\mathcal{N}'_A, \mathcal{N}_{f'}$ de igual modo pero relativa a f' .

Sean d, b las distancias definidas en Edmonds-Karp pero para en \mathcal{N}_f , y d', b' las distancias en $\mathcal{N}_{f'}$. (Recuerde que $d_f(x) = d_f(s, x)$, $b_f(x) = d_f(x, t)$)

Por Edmonds-Karp, sabemos que $d \leq d'$ y $b \leq b'$. Queremos demostrar que en el algoritmo de Dinitz, se da un menor estricto.

Caso 1. $d'(t) = \infty$. Luego $d(t) < \infty = d'(t)$. ■

Caso 2. $d'(t) < \infty$. En este caso, existe un f' -c.a. entre s y t , y esto da lugar a un camino dirigido en \mathcal{N}'_A entre s y t . Si $x_0 = s, x_r = t$, denotamos el camino en cuestión x_0, x_1, \dots, x_r . (Aquí el nivel de t es r .)

Como \mathcal{N}'_A es network por niveles, entonces $d'(x_i) = i$ para todo i .

Como para pasar de \mathcal{N}_A a \mathcal{N}'_A tuvimos que encontrar un flujo bloqueante, ese camino no puede estar en \mathcal{N}_A . (Si estuviera en \mathcal{N}_A , algún lado está saturado al pasar a \mathcal{N}'_A , y no podríamos formar el camino en primer lugar.)

Como no está en \mathcal{N}_A , debe pasar alguno de los dos casos siguientes.

Subcaso 2.1: Falta al menos un vertice. Existe un i tal que $x_i \notin \mathcal{N}_A$. Como $t \in \mathcal{N}_A$, $i < r$. Pero, para que un vertice no este en la network auxiliar, debe suceder que $d(t) \leq d(x_i)$. Pero, por lo demostrado para Edmonds-Karp, $d(x_i) \leq d'(x_i)$. Podemos expandir esto usando algunos hechos conocidos:

$$d(t) \leq d'(x_i) = i < r \Rightarrow d(t) < r \Rightarrow d(t) < d'(t)$$

En otras palabras, $d(t) < d'(t)$.

Subcaso 2.2: Todos los vertices están pero falta un lado. Pueden haber muchos lados que falten, pero tomemos el primero. Sea i el primer indice tal que $\overrightarrow{x_i x_{i+1}}$ no está en $E(\mathcal{N}_A)$. Por ser el primero que falta, todos los anteriores están. Por lo tanto, el camino $s x_1 \dots x_i$ está en \mathcal{N}_A . Entonces, los niveles de estos vertices se corresponden con sus indices; es decir, $d(x_j) = j$ para todo $j \leq i$.

Aquí otra vez hay dos casos a considerar.

Caso 2.2.1 $d(x_{i+1}) = i + 1$. Es decir, x_i, x_{i+1} están en los niveles correctos pero el lado entre ellos no existe en \mathcal{N}_A . Pero este lado debe existir en \mathcal{N}'_A . Entonces debio usarse en la otra dirección al pasar de \mathcal{N}_A a \mathcal{N}'_A . Esto implica que existe un camino en \mathcal{N}_A de la forma $s \dots x_{i+1} x_i \dots t$. Pero esto implica que $d(x_i) = d(x_{i+1}) + 1 \Rightarrow i = i + 1 + 1 \Rightarrow 0 = 2$ (\perp). Este caso es imposible.

Caso 2.2.2 $d(x_{i+1}) < i + 1$. Como $x_{i+1} \in \mathcal{N}_A$, existe un camino $s \dots x_{i+1}$ en \mathcal{N}_A . Pero consideremos que $b(x_{i+1}) \leq b'(x_{i+1}) < \infty$, pues $x_{i+1} x_{i+2} \dots t$ es un camino en \mathcal{N}'_A . Entonces,

existe un camino $x_{i+1} \dots t$ en \mathcal{N}_A . Entonces
 existe un camino $s \dots x_{i+1} \dots t$ en \mathcal{N}_A .
 Esto implica que $d(t) = d(x_{i+1}) + b(x_{i+1})$.
 Pero la hipótesis de este subcaso es que $d(x_{i+1}) <$
 $i + 1$. De lo cual se sigue

$$\begin{aligned} d(x_{i+1}) + b(x_{i+1}) &< i + 1 + b(x_i) \\ &\leq i + 1 + b'(x_{i+1}) \\ &= d'(x_{i+1}) + b'(x_{i+1}) \\ &= d'(t) \end{aligned}$$

Es decir, $d(t) < d'(t)$. ■

Theorem 16 *La complejidad de Dinitz, en su versión original como occidental, es $O(n^2m)$.*

Prueba. Como el nivel de t en los networks auxiliares aumenta, solo puede haber $O(n)$ networks auxiliares. ∴ La complejidad de Dinitz es igual a la complejidad de hallar un flujo bloqueante en un network auxiliar, más la complejidad de construir un network auxiliar, por la cantidad de networks auxiliares—que es $O(n)$. Porque usamos DFS, la complejidad de construir un network auxiliar es $O(m)$. Basta probar que la complejidad de hallar un flujo bloqueante es $O(nm)$, porque tendremos

$$(O(nm) + O(m)) O(n) = O(n^2m)$$

En la versión original del algoritmo, el n.a. es tal que no hay vértices sin lado de salida. Esto implica que DFS siempre llega a t sin hacer backtracking. Entonces, DFS no es $O(m)$ sino $O(\text{cantidad de niveles})$ que podemos simplificar como $O(n)$. Como cada camino borra al menos un lado del n.a. hay $O(m)$ caminos. Luego la complejidad de hallar los caminos y aumentar el flujo por ellos es $O(nm)$. Pero debemos calcular el costo de que el n.a. satisfaga la propiedad de que no hay vértices sin lados de salida.

Para esto, luego de cada camino hay que hacer algo para mantener esa propiedad como invariante. Dinitz llamó a la operación que logra esto "podar". La operación consiste en recorrer los vértices desde los niveles más altos a los más bajos, chequea si el vértice tiene lados de salida; si tiene no hace nada, si no lo tiene lo borra.

Chequear si el lado tiene lados de salida es $O(1)$; hay $O(n)$ vértices, y hay un "podar" por cada camino y hay $O(m)$ caminos. Esto entonces también es $O(mn)$.

Nos queda analizar la complejidad de borrar el vértice y sus lados; esto se hace a lo sumo una vez por vértice, y una vez que podamos un vértice es probable que podar los siguientes requiera una complejidad menor (porque estamos quitando lados). Esto nos dice que podemos pensar en la complejidad promedio del problema, y no en la complejidad límite (es decir como cota).

Borrar un vértice x y sus lados es $O(d(x))$; sobre todos los vértices, esto da $\sum O(d(x)) = O(m)$ (por la propiedad del apretón de manos). Luego la complejidad de hallar un flujo bloqueante es

$$O(nm) + O(nm) + O(m) = O(nm)$$

Ahora consideremos la versión occidental. Lo más cómodo es dar el pseudo-código. Estamos hablando del network auxiliar y el problema de hallar un flujo bloqueante en él; no asuma que hablamos del network original.

```

g := 0
bool flag := true
while flag do
  type path := [s]
  int x := s
  while x ≠ t do
    if  $\Gamma^+(x) \neq 0$  then
      tomar y  $\in \Gamma^+(x)$ 
      agregar y a path
      x := y                                {Esta línea y la anterior son la parte (A) de avanzar}
    else
      if x ≠ s then                          {(R) Retroceder}
        z := elemento anterior a x en path
        borro x de path
        borro  $\vec{zx}$  de la n.a.
        x := z
      else
        flag := 0
      fi
    fi
  od
  if x = t then                              {(I) Incrementar}
    aumentar flujo g a lo largo de path
    borrar lados saturados
  fi
od

```

Entonces, una corrida de Dinitz occidental es una palabra $AAAI\AAARAARRA\dots$. Miraremos subpalabras de la forma $A\dots AX$ con $X \in \{I, R\}$. Cada A es $O(1)$; cada R es $O(1)$; cada I es recorrer un camino dos veces (una para incrementar el flujo, otra para borrar los lados), y resulta ser $O(n)$.

La cantidad de A s en $A\dots AX$ se calcula como sigue. Cada avanzar, mueve el pivote x de un nivel al siguiente. \therefore Hay $O(n)$ letras A .

$$\therefore O(A\dots AR) = O(n) + O(1) + O(n) \text{ y } O(A\dots AI) = O(n)(\#A) + O(n)(\#I) = O(n)$$

donde $\#Z$ es la cantidad de veces que ocurre la letra Z en la palabra en cuestión. En resumen, $O(A\dots AX) = O(n)$. Y la cantidad de palabras $A\dots AX$ en una corrida se calcula así: Cada R borra un lado, y cada I borra *al menos* un lado; luego hay $O(m)$ palabras $A\dots AX$. Luego la complejidad total es $O(nm)$.

2.6 Algoritmo wave de Tarjan

Pertenece a una familia de algoritmos llamada *push-pull*. Hasta ahora, los algoritmos que vimos se basan en construir el flujo usando caminos aumentantes, un camino por vez. La idea de esta familia de algoritmos es no construir uno por vez, sino usar el network auxiliar para construir muchos caminos de manera simultánea.

Recuerde que el invariante del algoritmo de Dinitz es que siempre se lidia con un flujo. El algoritmo se detiene cuando el flujo es bloqueante. En wave, se invierte el orden: El invariante es que sea bloqueante, y el stop es que sea un flujo. Es decir, construye "pseudo-flujos" que no son flujos, pero son bloqueantes, y los va cambiando hasta que se da con un flujo.

La propiedad de los flujos que se va a violar es que algunos vertices podran enviar menos flujo de lo que reciben (es decir, es posible que $in(x) > out(x)$). En estos casos, diremos que el vértice está desbalanceado. Lo que el algoritmo intenta hacer es ir balanceando estos vértices desbalanceados. Una vez los balancea, se tiene un flujo.

El algoritmo de Tarjan para encontrar un flujo bloqueante es el siguiente.

(1) Manda todo el flujo que se pueda de s a su vecino. De allí en mas, hace unas "olas" hacia adelante y "olas" hacia atras como sigue:

(2) En cada vertice del nivel V_i , envia todo lo que pueda sus vecinos en V_{i+1} , hasta llegar a t . (Esto es la ola hacia adelante). Este es el caso en el que se trata de balancear, es decir se trata de sacar de cada vertice todo lo que recibe.

Si el vértice no logra balancearse, el vértice se "bloquea".

(3) En la "ola hacia atras", recorremos los vértices desde el nivel $t - 1$ al nivel 1, mirando cada vértice bloqueado y desbalanceado, y devolvemos el flujo necesario para balancearlo.

Theorem 17 La complejidad de Tarjan es $O(n^3)$.

Esta complejidad es igual a la de Dinitz para grafos raros, pero la supera para grafos densos.

Prueba. Como es un algoritmo de tipo Dinitz, la distancia en N_A aumenta. Por lo tanto hay $O(n)$ networks auxiliares. Basta probar que la complejidad de hallar un flujo bloqueante en Tarjan es $O(n^2)$.

Dividiremos la complejidad en varias partes. Los "balanceos hacia a delante" involucran pararse en un vértice, mirar uno por uno todos los vecinos, y enviar todo lo que se pueda. Cuando un vértice x manda flujo a otro z , puede pasar que z se sature o que no se sature. Sean S los pasos donde se satura un lado, y P los pasos donde se envia un flujo parcial (no se saturó un lado).

Análisis de S. Supongamos que \vec{xz} se saturó. La pregunta es si puede volver a saturarse en alguna otra ola hacia adelante. Para volver a saturarse, debe primero desaturarse. Por lo tanto, z debe devolver flujo a x . Esto implica que z debe estar bloqueado. Pero, en las olas hacia adelante, cuando un vértice chequea sus vecinos, solo manda flujo a vértices no bloqueados. Por lo tanto, si z devuelve a x , x no puede volver a enviar flujo a z . Por lo tanto, \vec{xz} no puede volverse a saturar.

\therefore Cada lado se satura a lo sumo una vez, y la complejidad de S es $O(m)$.

En los "balanceos hacia atras", el razonamiento es análogo. Cuando devolvemos flujo, podemos devolverlo todo o solo un poco. Sea V toda parte donde un lado se

vacía y sea P toda parte donde se devuelve flujo solo parcialmente.

Análisis de V . La pregunta es cuantas veces puede vaciarse un lado. La respuesta es muy similar al caso de S . Sea x devuelve flujo a u y se vacía \vec{ux} , entonces x debe estar bloqueado. Por lo tanto, u nunca puede volver a enviar flujo, y por lo tanto no puede volver a vaciarse (porque no puede volver a enviar nada).

\therefore Cada lado se vacía a lo sumo una vez. Por lo tanto, la complejidad de vaciado es $O(m)$.

Análisis de P y Q . Cuando intentamos balancear hacia adelante desde un vértice, todos los lados excepto quizás el ultimo se saturan. Es decir, en cada vértice de cada ola hacia adelante, hay a lo sumo un lado que no se satura, y "cuenta" para la complejidad de P . Enviar flujo por ese lado es $O(1)$. Luego la complejidad de P es $O(n) \times \zeta$ donde ζ es la cantidad de olas.

Con Q el análisis es similar. Al balancear hacia atras, en cada vértice se vacían todos los lados excepto a lo sumo uno. Luego la complejidad de Q es $O(n) \times \varphi$, con φ la cantidad de olas hacia atras.

Ahora, es claro que $\varphi = \zeta$ (a cada ola hacia adelante corresponde una ola hacia atras). La pregunta es cual es el valor de φ . En cada ola hacia adelante excepto la ultima (cuando se logra el balanceo), algun vertice queda desbalanceado. Pero entonces la ola debio de bloquearlo. Por lo tanto, en cada ola hacia adelante excepto tal vez la ultima, se bloquea al menos un vertice. Los vertices nunca se desbloquean. Luego hay $O(n)$ olas.

Luego, la complejidad de P es igual a la de Q , que es $O(n) \times O(n) = O(n^2)$.

La complejidad del paso bloqueante es, en conclusión:

$$\begin{aligned} O(m) + O(m) + O(n^2) + O(n^2) &= O(m) + O(n^2) & \left\{ m = O(n^2) \right\} \\ &= O(n^2) \end{aligned}$$

3 Matchings

Definition 27 Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido. Un *matching* en G es un subgrafo $M \subseteq G$ tal que $d_M(x) = 1$ para todo $x \in M$.

Un problema general es encontrar un *matching maximal*; i.e. uno con la mayor cantidad de lados posibles.

Definition 28 Sea $G = (V, E)$ un grafo y $M \subseteq G$ un *matching*. Decimos que M es *maximal* si $|E(M)| \geq |E(M')|$ para todo *matching* $M' \subseteq G$.

Como el problema de hallar matchings maximales es muy difícil, estudiaremos sólo un subproblema; a saber, cómo encontrar matchings maximales en grafos bipartitos. Este subproblema fue resuelto en las décadas del 30' al 50'. El problema general fue resuelto por Edmonds (de Edmonds-Karp) en 1966.

Un ejemplo del tipo de problemas que los matchings modelan es el siguiente. Imaginemos un conjunto de trabajadores y un conjunto de trabajos, tal que unimos un trabajador a un trabajo solo si ese trabajador puede hacer ese trabajo. Queremos unir trabajadores con trabajos de manera tal que la mayor cantidad de trabajos se realicen. La asociación trabajador \rightarrow trabajo es un *matching*.

Transformaremos este problema en un problema de flujos maximales. Es decir, expresaremos el problema de los matchings en términos de la teoría de redes.

Notación. Sea $G = (V, E)$ un grafo bipartito. Usamos X, Y para denotar los conjuntos tales que $V = X \cup Y$ con $X \cap Y = \emptyset$ y $E \subseteq \{xy : x \in X \wedge y \in Y\}$

Definition 29 El *network* N asociado a $G = (V, E)$ es el *network* con $V(N) = \{s, t\} \cup V(G)$ y

$$E(N) = \bigcup_{x \in X} \{\overrightarrow{sx}\} \cup \bigcup_{y \in Y} \{\overleftarrow{yt}\} \cup \bigcup_{xy \in E(G), x \in X, y \in Y} \{\overrightarrow{xy}\}$$

Theorem 18 (Una propiedad) Sea N el *network* asociado a $G = (V, E)$. Un flujo entero f relativo a N se corresponde con un *matching* en G . En particular, un flujo maximal en N se corresponde con un *matching maximal* en G .

Prueba. Sea f un flujo en N . Definamos $M_f \subseteq G$ como el subgrafo de G con

$$\begin{aligned} V(M_f) &= \{x \in X : f(\overrightarrow{sx}) = 1\} \cup \{y \in Y : f(\overleftarrow{yt}) = 1\} \\ E(M_f) &= \{xy \in E(G) : x \in X \wedge y \in Y \wedge f(\overrightarrow{xy}) = 1\} \end{aligned}$$

Observe que M_f es un subgrafo, porque $f(\overrightarrow{xy}) = 1 \Rightarrow \text{out}_f(x) = 1 = \text{in}_f(x)$. Luego $f(\overrightarrow{sx}) > 0$. $\therefore f(\overrightarrow{sx}) = 1$. $\therefore x \in V(M_f)$. La prueba para y es similar. Ahora veamos que es un *matching*.

Asuma que $d_{M_f}(y) \geq 2$. Luego existen x_1, x_2 distintos entre sí tales que $x_1y, x_2y \in E(M_f)$. Por lo tanto, $f(\overrightarrow{x_1y}) = f(\overrightarrow{x_2y}) = 1$. Luego $\text{in}_f(y) \geq 2$. Pero y sólo conduce a t con $\text{out}_f(y) = 1$. (\perp) La prueba para x es similar.

$\therefore M_f$ es un matching.

Ahora observe que

$$\begin{aligned} v(f) &= \text{out}_f(s) \\ &= \sum_{x \in X} f(\vec{s\bar{x}}) \\ &= \# \{x \in X : f(\vec{s\bar{x}}) = 1\} \\ &= \# \{x \in X : \text{out}_f(x) = \text{in}_f(x) = 1\} \end{aligned}$$

Pero si $f(\vec{s\bar{x}}) = 1$, entonces está en M_f . Es decir,

$$\begin{aligned} \{x \in X : \text{out}_f(x) = \text{in}_f(x) = 1\} &= |(V(M_f) \cap X)| \\ &= |E(M_f)| \end{aligned}$$

La recíproca también vale; es decir, si M un matching, definimos un flujo en N como

$$\begin{aligned} f_M(\vec{xy}) &= 1 & \forall xy \in E(M) \\ f_M(\vec{xy}) &= 0 & xy \notin E(M) \\ f_M(\vec{s\bar{x}}) &= \begin{cases} 1 & x \in V(M) \\ 0 & x \notin V(M) \end{cases} \\ f_m(\vec{yt}) &= \begin{cases} 1 & y \in V(M) \\ 0 & y \notin V(M) \end{cases} \end{aligned}$$

Es trivial ver que f_m es un flujo y que $M_{f_m} = M$ y $f_{M_f} = f$.

\therefore Todo matching se corresponde con un flujo entero, y como $v(f) = |E(M_f)|$, un flujo maximal corresponde a un matching maximal.

3.1 Matchings en grafos bipartitos

Para hallar un matching maximal en un grafo bipartito:

- Transformamos G en un network N .
- Hallamos un flujo maximal en N .

En los ejercicios, operaremos bajo ciertos supuestos para grafos con pesos y bipartitos con partes X, Y .

- $|X| = |Y|$
- Existe al menos un matching "perfecto"; es decir un matching con $|X| = |Y|$ lados.

Usamos $\Omega^{n \times n}$ para denotar la matriz de costos, tal que las filas corresponden a elementos de X , las columnas a elementos de Y , y los valores a los pesos asociados a los lados entre los vértices de X e Y . Observe que ahora n no refiere a la cantidad de vértices en G sino a la cantidad de vertices en X e Y .

En un grafo con pesos (costos), hay dos formas de aproximarse al problema de hallar un matching de costo mínimo. Podemos minimizar el mayor costo en el matching, o minimizar la suma de los costos. Estos no son equivalentes.

3.2 Minimizar el máximo

Sea M un mathcing cuyo mayor costo es α . La pregunta es si podemos mejorarlo. Es decir, determinar si existe algún matching perfecto cuyo costo sea menor a α .

La estrategia es buscar los sub-grafos cuyos lados tienen costos menores que α , y determinar si ellos son matchings.

Una manera de hacer esto es hacer una búsqueda binaria con α como valor de referencia. Se ordenan los pesos Ω_{ij} con un algoritmo de ordenamiento y se hace una matriz auxiliar Ω' . En este punto tenemos los costos ordenados

$$\omega_1, \dots, \omega_{n^2}$$

Seteamos $\alpha = \omega_{\frac{n^2}{2}}$ (es decir empezamos con α el costo medio) y vemos si existe un matching con costo menor o igual (yendonos hacia la mitad izquierda). Si lo hay continuamos allí; si no, nos vamos a la mitad derecha, etc.

Para encontrar el matching en cada paso, en la matriz auxiliar ponemos un cero en cada entrada con costo mayor a α y uno en cada entrada con costo menor o igual a α . Es decir, en términos booleanos, la matriz auxiliar se define como

$$\Omega'_{ij} := [\Omega_{ij} \leq \alpha]$$

Sobre la matriz auxiliar, se hace el network auxiliar y el matching. En algún momento, no podemos extender el matching; usamos S para denotar las filas etiquetadas al final, T para denotar las columnas etiquetadas al final.

Definition 30 Dado $W \subseteq V$, $\Gamma(W) = \bigcup_{x \in W} \Gamma(x)$.

En general, $\Gamma(S) = \Gamma(T)$, y siempre que el algoritmo se detiene es porque S tal que $|S| < |\Gamma(S)|$.

Theorem 19 (Teorema de Hall) Sea $G = (V, E)$ bipartito con partes X e Y . Existe un matching completo de X a Y (i.e. existe un matching $M \subseteq G$ tal que $|E(M)| = |Z|$ con $Z \in \{X, Y\}$) si y solo si

$$\forall S \subseteq Z : |\Gamma(S)| \geq |S|$$

Prueba. (\Rightarrow). La prueba es obvia, pues si existe un tal matching, ese matching induce una función inyectiva $f : X \rightarrow Y$ tal que $f(x) \in \Gamma(x)$. Pues f es inyectiva, $|f(S)| = |S|$ para todo S . Luego $f(S) \subseteq \Gamma(S) \Rightarrow |S| \leq |\Gamma(S)|$.

(\Leftarrow) Sea $|\Gamma(S)| \geq |S|$ para todo $S \subseteq X$ la condición de Hall. Asuma que la condición de Hall se cumple. Asuma además que, al correr el algoritmo para hallar matching maximal, nos quedamos con un matching maximal M_{max} tal que $|E(M_{max})| < |X|$; es decir, un matching incompleto en X (podría ser en Y). Construiremos un $S \subseteq X$ que viola la condición de Hall, es decir tal que $|\Gamma(S)| < |S|$, llegando a un absurdo.

Corramos el algoritmo de extensión de matching sobre el último matching M_{max} . Como este matching no cubre a X , existen filas sin matchear, más otras filas etiquetadas. Sea S el conjunto de filas etiquetadas, incluyendo las etiquetadas con "*", y sea T el conjunto de columnas etiquetadas.

Sea S_0 el conjunto de filas etiquetadas con "*"; es decir, las filas que no forman parte del matching.

Nota. Como el matching no es completo, $S_0 \neq \emptyset$.

Sea T_1 el conjunto de las columnas etiquetadas por filas de S_0 . En general, T_{i+1} serán las columnas etiquetadas por S_i ; y S_j son las filas etiquetadas por T_j . Las sucesiones son finitas y $S = S_0 \cup S_1 \cup \dots$ con uniones disjuntas, y $T = T_1 \cup T_2 \cup \dots$ con uniones disjuntas.

Cuando revisamos una columna, o está libre y el matching se extiende (lo cual en este caso no sucede por hipótesis), o encuentra una fila matcheada con esa columna y la etiqueta. Por lo tanto, el algoritmo nunca se detiene cuando pasa de algún T_j al S_j . Es decir que el algoritmo se detiene sólo al pasar de un S_k a un T_{k+1} que es vacío; *es decir cuando, al revisar un conjunto de vecinos para una fila, no hay vecinos libres.*

Observemos que, como cada columna etiqueta a la fila con la cual está matcheada, cada columna etiquetada etiqueta a una sola fila. Se sigue que

$$|T_j| = |S_j| \quad (3)$$

Porque el T_j crea al S_j .

$$\begin{aligned} |S| &= |S_0| + |S_1| + \dots + |S_k| \\ &= |S_0| + |T_1| + |T_2| + \dots + |T_k| && \{\text{Por (3)}\} \\ &= |S_0| + |T| > |T| && \{\text{Pues } S_0 \neq \emptyset\} \end{aligned}$$

$\therefore |S| > |T|$ Si demostráramos que $T = \Gamma(S)$, la prueba concluiría.

Recordemos que T son las columnas etiquetadas, y las columnas son etiquetadas por filas de S . Y una fila solo etiqueta columnas vecinas. Esto implica que $T \subseteq \Gamma(S)$. Ahora probaremos que $\Gamma(S) \subseteq T$.

Sea $y \in \Gamma(S)$. Si $y \in T$, la prueba concluye. Si $y \notin T$, entonces no está etiquetado. Pero, pues $y \in \Gamma(S)$, tenemos que existe un $x \in S$ tal que

$y \in \Gamma(x)$. Cada vez que escaneamos a x , vamos a encontrar a y , y x debería etiquetarlo. Pero esto es absurdo pues dijimos que y no está etiquetado. Luego todo $y \in \Gamma(S)$ satisface $y \in T$.

Theorem 20 (Teorema del matrimonio de Koenig) *Todo grafo bipartito (con $\chi(G) = 2$) regular tiene matching perfecto.*

Prueba. Dado $W \subseteq V$, definimos

$$E_W = \{wu : w \in W\}$$

Sean X, Y las partes de G . Sea $S \subseteq X$. Sea $l \in E_S$. Se sigue que

$$\exists x \in S, y \in Y : l = xy = yx$$

Es decir que $y \in \Gamma(x)$. Pero $x \in S$. Entonces $y \in \Gamma(S)$. Entonces $l \in E_{\Gamma(S)}$. $\therefore E_S \subseteq E_{\Gamma(S)}$. Por lo tanto

$$|E_S| \leq |E_{\Gamma(S)}| \quad (4)$$

Calculemos en general $|E_W|$ cuando $W \subseteq X$ o $W \subseteq Y$. Si $wu \in E_W$, entonces $v \notin W$, pues $W \subseteq X \Rightarrow v \in Y$, y $W \subseteq Y \Rightarrow v \in X$.

De lo anterior se sigue que

$$E_W = \bigcup_{w \in W} \{wv : v \in \Gamma(w)\} \quad (5)$$

donde la unión es disjunta. Luego

$$|E_W| = \sum_{w \in W} |\Gamma(w)| = \sum_{w \in W} d(w) \quad (6)$$

Como G es regular, $d(w) = \delta = \Delta$. Luego

$$|E_W| = \Delta|W| \quad (7)$$

Usando (4) i (7) tenemos que

$$|S|\Delta \leq |\Gamma(S)|\Delta \Rightarrow |S| \leq |\Gamma(S)| \quad (8)$$

Como esto vale para todo $S \subseteq X$, el teorema de Hall implica que existe un matching completo de X a Y . Si demostramos que $|X| = |Y|$, se seguirá que ese matching será perfecto.

La primera forma de probar esto es ver que como X, Y son las partes de G , $E = E_X = E_Y$. Entonces $|E_X| = |E_Y|$, de lo cual se sigue que $|X|\Delta = |Y|\delta \Rightarrow |X| = |Y|$.

Otra forma de verlo es observar que, dado que existe un matching completo de X a Y , $|X| \leq |Y|$. Pero la elección de X sobre Y en la prueba fue arbitraria. Por lo tanto vale lo mismo para Y . Luego $|X| = |Y|$.

En ambos casos, el matching es perfecto.

Definition 31 Un coloreo propio lateral o de lados de un grafo $G = (V, E)$ es una función $c : E \rightarrow A$ con A arbitrario tal que

$$C(l) \neq C(\tilde{l}) \iff l \cap \tilde{l} = \emptyset$$

En otras palabras, para cualesquiera lados xy y xz (con un vértice en común), los colores serán distintos.

En vez de colorear los vértices adyacentes de manera diferente, coloreamos los vértices incidentes de manera diferente.

Definition 32 $\chi'(G)$ se llama el índice cromático y es el menor número de colores con el cual existe un coloreo propio lateral.

Una observación trivial es que todos los lados xy con y fijo e $y \in \Gamma(x)$ tienen que tener colores distintos. Esto implica que $\chi'(G) \geq d(x)$ para todo x . Es decir que $\chi'(G) \geq \Delta$.

Theorem 21 (Teorema de Vizing, 1964) $\chi'(G) \leq \Delta + 1$

Informalmente hablando, $\chi'(G)$ está acotado en un espacio muy chico; o es Δ o es $\Delta + 1$.

Theorem 22 (Teorema de Koenig) Si $G = (V, E)$ es bipartito, $\chi'(G) = \Delta$.

Prueba. (1 : Caso regular). Suponga que $G = (V, E)$ es regular además de bipartito. Haremos inducción en Δ . Si $\Delta = 1$, G es un matching y los lados de G son disjuntos; los coloreo todos con color 1 y $\chi'(G) = 1$.

Ahora suponga $\Delta(G) > 1$ y sea la HI que el teorema vale para grafos bipartitos regulares con $\Delta < \Delta(G)$.

Como G bipartito regular, por el teorema del matrimonio de Koenig, existe un matching perfecto M en G .

Sea $\tilde{G} = G - E(M)$ (borramos los lados de M pero no los extremos). Si se borra un lado xy de un grafo G , entonces $d_{\text{borrado}}(x) = d_G(x) - 1$. Como M es un matching, sus lados no se tocan, y esto implica que los extremos de cada lado de M disminuyen su grado en exactamente 1. Se sigue que

$$d_{\tilde{G}}(z) = d_G(z) - 1, \forall z$$

Pero G es regular, con $d_G(z) = \Delta$ y por lo tanto $d_{\tilde{G}}(z) = \Delta - 1$. Por lo tanto \tilde{G} es regular con $\Delta(\tilde{G}) = \Delta - 1$. Por HI, $\chi'(\tilde{G}) = \Delta - 1$, y puede colorearse con los colores $\{1, 2, \dots, \Delta - 1\}$, y coloreo los lados de M con el color Δ . Luego $\chi'(G) = \Delta$.

(2 : Caso no regular). Suponga que probamos que $\forall G$ bipartito, existe H bipartito regular con $G \subseteq H$, y con $\Delta(G) = \Delta(H)$. Es decir, que podemos "extender" un grafo bipartito no regular a un grafo bipartito regular sin modificar su Δ .

Como H es regular, $\chi'(H) = \Delta(H)$. Y como $G \subseteq H$ tenemos $\chi'(G) \leq \chi'(H)$, o bien $\chi'(G) \leq \Delta(G)$. Pero sabemos que $\chi'(G) \in \{\Delta, \Delta + 1\}$. Luego $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Subprueba. Demostraremos la existencia del H deseado. Para esto, probaremos que $\exists \tilde{G}$ bipartito con $G \subseteq \tilde{G}$, $\Delta(G) = \Delta(\tilde{G})$, $\delta(G) + 1 = \delta(\tilde{G})$. Repitiendo esta construcción muchas veces ($\tilde{G}, \tilde{\tilde{G}}, \tilde{\tilde{\tilde{G}}}, \dots$) llegamos a un grafo tal que

$$\delta(\tilde{\tilde{\tilde{G}}}) = \Delta(\tilde{\tilde{\tilde{G}}})$$

Sean X, Y las partes de G . Para cada $v \in V$ sea v^* una "copia" de v . Sea

$$X^* = \{x^* : x \in X\}$$

y lo mismo para Y^* . Más aún, sea $E^* = \{x^*y^* : xy \in E\}$.

Sea $\tilde{X} = X \cup Y^*$, $\tilde{Y} = Y \cup X^*$. Construimos \tilde{G} con $V(\tilde{G}) = \tilde{X} \cup \tilde{Y}$ y

$$E(\tilde{G}) = E \cup E^* \cup \overbrace{\{vv^* : d_G(v) < \Delta\}}^{:=F}$$

Vemos que E une vértices de X con Y , E^* une vértices de Y^* con X^* , y F une vértices de X con X^* o Y^* con Y . Es decir, $E(\tilde{G})$ une vértices de \tilde{X} con \tilde{Y} y entonces \tilde{G} es bipartito.

Además,

$$d_{\tilde{G}}(v) = \begin{cases} \Delta & d_G(v) = \Delta \\ d_G(v) + 1 & d_G(v) < \Delta \end{cases} = d_{\tilde{G}}(v^*)$$

De esto se sigue que $\Delta(\tilde{G}) = \Delta(G)$ y $\delta(\tilde{G}) = \delta(G) + 1$. y

3.3 Minimizar la suma

Dada una matriz $\Omega^{n \times n}$ de costos, se nos pide hallar un matching maximal que minimice la suma de los costos.

Pues asumimos $n \times n$ (misma cantidad de filas y columnas, o $|X| = |Y|$), todo matching perfecto da una biyección entre filas y columnas (o entre elementos de X e Y). A su vez, toda biyección entre filas y columnas es un matching perfecto.

Notación. Hacemos

$$S_n = \{\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\} \text{ es una biyección}\}$$

Dada una matriz de costos $\Omega^{n \times n}$ y una biyección $\sigma \in S_n$, definimos la suma de costos relativa a σ como

$$SC_{\sigma}(\Omega) = \sum_{i=1}^n \Omega_{i, \sigma(i)}$$

En términos intuitivos, SC_σ es la suma de los costos asociados al matching que equivale a la biyección σ .

Deseamos encontrar σ tal que $SC_\sigma(\Omega) \leq SC_\tau(\Omega)$ para todo $\tau \in S_n$.

Lemma 5 (Lema súper fácil pero MUY importante) Sea $\Omega^{n \times n}$ una matriz de costos, c una constante, y $\tilde{\Omega}$ la matriz que se obtiene de Ω restando c a una fila o una columna. Entonces

$$SC_\sigma(\Omega) \leq SC_\tau(\Omega) \forall \tau \in S_n \iff SC_\sigma(\tilde{\Omega}) \leq SC_\tau(\tilde{\Omega}) \forall \tau \in S_n$$

Prueba. Suponga que restamos c a la k -ésima fila de Ω (la prueba es similar para columnas). Entonces

$$\tilde{\Omega}_{ij} = \begin{cases} \Omega_{ij} & i \neq k \\ \Omega_{ij} - c & i = k \end{cases}$$

Encontremos $SC_\tau(\tilde{\Omega})$ para un $\tau \in S_n$ arbitrario. Por definición,

$$\begin{aligned} SC_\tau(\tilde{\Omega}) &= \sum_{i=1}^n \tilde{\Omega}_{i, \tau(i)} \\ &= \left(\sum_{i \neq k} \tilde{\Omega}_{i, \tau(i)} \right) + \tilde{\Omega}_{k, \tau(k)} \\ &= \left(\sum_{i \neq k} \Omega_{i, \tau(i)} \right) + \Omega_{k, \tau(k)} - c \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \Omega_{i, \tau(i)} \right) - c \\ &= SC_\tau(\Omega) - c \end{aligned}$$

Entonces $SC_\sigma(\tilde{\Omega}) \leq SC_\tau(\tilde{\Omega}) \forall \tau \in S_n$ si y solo si

$$\begin{aligned} SC_\sigma(\Omega) - c &\leq SC_\tau(\Omega) - c \\ \iff SC_\sigma(\Omega) &\leq SC_\tau(\Omega) \end{aligned}$$

para todo $\tau \in S_n$.

Lemma 6 (Otro obvio pero crucial) Sea $\Omega^{n \times n}$ una matriz de costos con $\Omega_{ij} \geq 0$ para todo i, j . Entonces un matching "de ceros" minimiza la suma de los costos; es decir, $M_{i, \sigma(i)} = 0 \forall i \implies SC_\sigma(\Omega) \leq SC_\tau(\Omega) \forall \tau \in S_n$.

Los dos lemas anteriores nos dan una estrategia para minimizar la suma. Utilizamos el primer lema repetidas veces para construir una matriz $\tilde{\Omega}$ con suficientes ceros para hallar un matching de ceros. Ahora traducimos la estrategia a un algoritmo.

Primera parte del algoritmo. Dada una matriz de costos Ω :

1. Restar a cada fila su mínimo, asegurando que en cada fila hay un cero.
2. Restar a cada columna su mínimo, asegurando que en cada columna hay un cero.
3. Hallar, o al menos tratar de hallar, un matching de 0.

Ahora damos un ejemplo. Sea

$$\Omega^{7 \times 7} = \begin{bmatrix} 10 & 8 & 12 & 14 & 3 & 13 & 3 \\ 7 & 5 & 3 & 9 & 3 & 9 & 4 \\ 10 & 9 & 8 & 12 & 11 & 11 & 12 \\ 12 & 7 & 5 & 10 & 1 & 12 & 1 \\ 8 & 8 & 5 & 13 & 7 & 11 & 5 \\ 11 & 10 & 7 & 15 & 9 & 17 & 7 \\ 13 & 11 & 2 & 10 & 2 & 17 & 3 \end{bmatrix}$$

la matriz de costos. Restando el mínimo a cada fila y luego el mínimo a cada columna obtenemos la siguiente matriz de costos, en la que resaltamos los matchings con un cuadrado y etiquetamos con * los que pares que no pudimos matchear.

$$\begin{bmatrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \\ & - & - & - & - & - & - & - & \\ A | & 5 & 4 & 9 & 7 & \boxed{0} & 7 & 0 & | \\ B | & 2 & 1 & \boxed{0} & 2 & 0 & 3 & 1 & | \\ C | & \boxed{0} & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 & | \\ D | & 9 & 5 & 4 & 5 & 0 & 8 & \boxed{0} & | \\ E | & 1 & 2 & 0 & 4 & 2 & 3 & 0 & | * \\ F | & 2 & 2 & 0 & 4 & 2 & 7 & 0 & | * \\ G | & 9 & 8 & 0 & 4 & 0 & 12 & 1 & | * \end{bmatrix}$$

Una vez llegado a este punto, debemos usar el procedimiento usual para aumentar el matching, revisando las filas estrelladas y agregando a la cola de cada fila las columnas que son sus vecinas.

$$\begin{bmatrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \\ & - & - & - & - & - & - & - & \\ A | & 5 & 4 & 9 & 7 & \boxed{0} & 7 & 0 & | 5 \\ B | & 2 & 1 & \boxed{0} & 2 & 0 & 3 & 1 & | 3 \\ C | & \boxed{0} & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 & | \\ D | & 9 & 5 & 4 & 5 & 0 & 8 & \boxed{0} & | 7 \\ E | & 1 & 2 & 0 & 4 & 2 & 3 & 0 & | * \\ F | & 2 & 2 & 0 & 4 & 2 & 7 & 0 & | * \\ G | & 9 & 8 & 0 & 4 & 0 & 12 & 1 & | * \\ & - & - & - & - & - & - & - & \\ & & & E & & G & & E & \end{bmatrix}$$

Una vez llegado a este punto, debemos realizar una operación que agregue nuevos ceros a la matriz de alguna forma inteligente. Recordamos que, por el teorema de Hall, $S = \{\text{filas etiquetadas}\}$ es un conjunto tal que $|S| \leq |\Gamma(S)|$. En nuestro ejemplo, $S = \{A, B, D, E, F, G\}$.

El algoritmo restará $\varphi := \min \{\tilde{\Omega}_{ij} : i \in S, j \notin \Gamma(S)\}$ a todos los vértices de $S \times \overline{\Gamma(S)}$ y suma φ a las columnas de $\Gamma(S)$. Esto produce nuevos ceros con los que incrementar el matching.

Este proceso se repite hasta dar con un matching perfecto.

3.4 Complejidades

Matching maximal en grafo sin pesos. Vimos dos implementaciones; una es usar Dinitz, otra usar una matriz. Con la matriz, se revisa cada fila buscando vecinos, lo cual es $O(n)$ por cada fila. Luego se revisa cada columna para ver si está "libre" o encontrar una fila matcheada. Esto es $O(n)$ por cada columna. El matching inicial es revisar todas las filas: $O(n^2)$. Para luego extender el matching en uno, potencialmente habrá que revisar $O(n)$ filas y $O(n)$ columnas. Entonces la complejidad total hasta aquí es $O(n^2) + O(n^2) = O(n^2)$.

Como el matching se puede extender a lo sumo $O(n)$ veces, la complejidad total es

$$O(n^2) + \overbrace{O(n^2)O(n)}^{\text{extensión}} = O(n^3)$$

Si usamos Dinitz, que tenía complejidad $O(n^2m)$, que en grafos densos llega a $O(n^4)$. Pero en un network que tiene todas las capacidades = 1, y tal que para todo $x \notin \{s, t\}$ resulta que $|\Gamma^+(x)| = 1 \vee |\Gamma^-(x)| = 1$, tiene complejidad $O(\sqrt{nm})$ (esto no se demuestra). En este caso especial, esta complejidad es mejor que la de la implementación matricial. Por ejemplo, si $m = O(n^2)$ (un grafo denso), resulta $O(\sqrt{nm}) = O(n^{\frac{5}{2}})$.

Minimizar el máximo. El primer paso era ordenar los n^2 posibles valores distintos, a fin de realizar una búsqueda binaria. Usando un algoritmo bueno, la complejidad de la ordenación es $O(n^2 \log n^2) = O(n^2 2 \log n) = O(n^2 \log n)$.

Luego, se revisa el grafo a sociado a un "umbral" de valores para ver si existe o no un matching perfecto. Para esto se usa el algoritmo de encontrar un matching, y por lo tanto es $O(n^3)$ o $O(\sqrt{nm})$, dependiendo de la implementación. Esto se hace con búsqueda binaria, y por lo tanto se hace $O(\log n^2) = O(2 \log n) = O(\log n)$ veces. La complejidad total es, por lo tanto,

$$O(n^2 \log n) + O(n^3 \log n) = O(n^3 \log n)$$

o bien, usando Dinitz,

$$O(n^2 \log n) + O(\sqrt{nm} \log n) = \begin{cases} O(n^{\frac{5}{2}} \log n) & \text{Para grafos densos} \\ O(n^2 \log n) & \text{Para grafos raros} \end{cases}$$

Minimizar la suma. Demos esto como un teorema.

Theorem 23 *La complejidad del algoritmo "minimizar la suma", también llamado "algoritmo húngaro", tal como fue dado en clase haciéndolo a mano, es $O(n^4)$.*

Prueba. Hallar un matching inicial es $O(n^2)$. La complejidad total será $O(n^2) + O(n) \times \zeta$, donde ζ es la complejidad de extender el matching en un lado.

Como vimos, si no hubiera cambios de matrices, la complejidad de extender el matching en un lado sería $O(n^2)$. Pero, como hay cambios de matrices, si continuamos el matching luego de cambiar la matriz, a partir del matching con el que veníamos, la complejidad de extender el matching en un lado es

$$\begin{array}{c} \text{Revisar filas y columnas} \\ \overbrace{O(n^2)} \quad + \phi\omega \end{array}$$

con ϕ la cantidad de matrices hasta extender el matching, ω la complejidad de cambiar la matriz.

Debemos demostrar que siempre podemos continuar con el matching con el que veníamos. Para esto, debemos ver que los ceros del matching nunca se pierden al cambiar la matriz. La demostración de que estos ceros nunca se pierden es gráfica. Partiendo la matriz de costos en cuatro cuadrantes, dos en los que se suma y resta, respectivamente, y dos en los que no se cambia nada, se observa que todos los ceros que pueden perderse están en la región de la suma; es decir, en $\bar{S} \times \Gamma(S)$. Pero $\Gamma(S)$ es el conjunto de columnas etiquetadas, y cada columna etiquetada se revisa, y si tiene algún cero del matching, se agrega la fila correspondiente a S . Por lo tanto, como las filas que se suman están en \bar{S} , los ceros del matching no están entre los valores que incrementan.

Lo único que queda por hacer es calcular ϕ y ω .

Lemma 7 (Lema interno) *Luego de un cambio de matriz, si se continúa la búsqueda a partir del matching con el que se venía, entonces o bien se extiende el matching, o bien crece el conjunto S .*

Con "crece" queremos decir que si cambiamos la matriz usando un S , y en la nueva matriz no podemos extender el matching llegando a un S_{nuevo} , entonces $|S_{\text{nuevo}}| > |S|$, y $S \subset S_{\text{nuevo}}$.

Prueba. La demostración es gráfica, una vez más. Se hace la misma partición de la matriz de costos. Como se toma $\varphi = \min(S \times \bar{\Gamma}(S))$, en $S \times \bar{\Gamma}(S)$ hay ceros nuevos. Como cada columna en donde hay un cero nuevo no estaba en $\Gamma(S)$, no estaban etiquetadas, y se etiquetan luego del cambio de matriz. Como se etiquetan, se revisan.

Completar.

Como consecuencia del lema interno, dado que $1 \leq |S| \leq n$, hay $O(n)$ cambios de matriz antes de tener que extender el matching. Es decir, $\phi = O(n)$.

Para el cambio de matriz, debemos calcular $\varphi := \min S \times \bar{\Gamma}(S)$, restarlo a algunas filas y sumarlo a algunas columnas. Encontrar φ es $O(n^2)$, y restarlo de algunas filas es $O(n)$ por cada fila o columna; es decir $O(n^2)$. Es decir, $\omega = O(n^2)$.

$$\begin{aligned}\therefore O(n^2) + O(n) \left(O(n^2) + O(n)O(n^2) \right) &= O(n^2) + O(n^3) + O(n^4) \\ &= O(n^4)\end{aligned}$$

En la suma larga (antes del $=$), el primer término es , el segundo término es la cantidad de matrices en la extensión. Dentro del paréntesis, el $O(n^2)$ es revisar filas/columnas, $O(n)$ es la cantidad de cambio de matrices, y $O(n^2)$ es la complejidad del cambio de matrices.

Theorem 24 *El algoritmo húngaro se puede codificar con complejidad $O(n^3)$.*

Prueba. Si el cambio de matrices pudiera hacerse en $O(n)$, tendríamos la complejidad total $O(n^3)$. Pero para esto, debemos usar un par de trucos sucios relativos a cómo funcionan las computadoras modernas.

El primer truco sucio es el siguiente. Trataremos de restar/sumar una constante en tiempo $O(1)$ en vez de $O(n)$. El truco sucio es *no* hacer la suma/resta sino "dejarla indicada". A cada fila x asociamos un valor $RF(x)$ que asigna cuánto hay que restarle a la fila. Lo mismo haríamos con $SC(y)$, el valor de cuánto hay que sumarle a la columna y .

La pregunta es cómo buscar ceros, si los ceros no aparecen! Supongamos que la matriz de costos es Ω . Donde deberíamos hacer **if** ($0 == \Omega[x][y]$), el chequeo de si una entrada es cero, hacemos

$$\mathbf{if} \ (0 == C[x][y] - RF(x) + SC(y))$$

Asumimos que la computadora realiza estas operaciones en $O(1)$.

El segundo truco sucio es calcular φ en $O(n)$. Recordemos que

$$\begin{aligned}\varphi &= \min S \times \overline{\Gamma(S)} = \min \{C[x, y] : x \in S, y \notin \Gamma(s)\} \\ &= \min_{y \notin \Gamma(S)} \left(\min_{x \in S} \{C[x, y]\} \right)\end{aligned}$$

Supongamos que guardamos esto en $MS[y]$. Es decir, $MS[y]$ sería el mínimo de la intersección de la columna y con las filas del conjunto S . Los valores de MS se pueden inicializar en infinito e ir actualizándose. Entonces φ será $O(n)$, porque será ahora el mínimo entre n elementos.

Solo queda observar que $MS[y]$ debe actualizarse cuando revisamos las filas. Cada vez que etiquetamos una fila, la misma se incluye en S y debe ser revisada en busca de algún cero (algún vecino). Con los que no son vecinos no se hace nada. Pero se puede aprovechar que se revisan todas las columnas para actualizar $MS[y]$ para cada columna y . Es decir, la revisar x , se agrega un *if* del tipo

$$\mathbf{if} \ (C[x, y] < MS[y]) \ \mathbf{then} \ MS[y] = C[x, y] \ \mathbf{fi}$$

4 Códigos de corrección de errores

La idea es la siguiente. Dado un emisor que envía un mensaje a un receptor a través de un canal dado,

$$E \xrightarrow{\text{canal}} R$$

La idea es definir códigos tales que, si existe ruido que distorsione el mensaje enviado a través del canal, permitan al receptor entender el mensaje de todos modos.

Definition 33 *Un código de bloque de longitud n es un subconjunto de Σ^n para algún alfabeto Σ .*

Para un alfabeto binario $\Sigma = \{0, 1\}$, el código se llama binario. Salvo que se especifique lo contrario, *código* significará *código binario en bloque*. También supondremos que el código en cuestión tiene al menos dos palabras.

Ejemplo. El código Morse es binario, pero no es de bloque porque no todas las palabras tienen la misma longitud.

Respecto al canal de transmisión, suponemos lo siguiente:

1. El canal puede invertir bits, pero no agregar ni destruir bits.
2. La probabilidad de invertir un bit es la misma independientemente del bit.
3. La probabilidad de que cambie el bit i es independientemente de que cambie el bit j .
4. La probabilidad de que cambie el bit i es igual a la probabilidad de que cambie el bit j .
5. Si llamamos p a la probabilidad de que cambie el bit i -ésimo, suponemos que $0 < p < \frac{1}{2}$.

Ejemplo. Supongamos que tenemos 4 instrucciones para dar a un receptor. Como son cuatro instrucciones, necesito como mínimo $n = 2$ bits. Por lo tanto, podríamos tomar el código $C_1 = \{00, 01, 10, 11\}$. Suponga que enviamos 01 y, dado un cierto ruido, se recibe 11. Pero por la poca cantidad de símbolos, no podemos decidir si 11 fue un error o no. Este es un ejemplo que motiva una búsqueda de equilibrio: demasiados bits permiten descifrar más fácilmente, pero es ineficiente, y viceversa.

Tomemos entonces $C_2 = \{000, 101, 110, 011\}$. Supongamos que enviamos 101 y hubo un solo error. Las palabras posibles que el receptor tiene son 001, 111, 100. Aquí hay una ventaja: si el receptor recibe 001, puede saber que hubo un error porque 001 no existe en C_2 . Lo mismo sucede con las demás.

Pero la palabra que llegara fuera 001, cuál es la palabra original más probable? La probabilidad de que 000 o 101 sean las originales es p , y lo mismo pasa con 011 (solo un error genera esas palabras). Por lo tanto, no tenemos un criterio para discriminar los candidatos posibles y corregir el error.

Tomemos $C_3 = \{11111, 10000, 01100, 00011\}$ y veamos si es mejor, y denotemos α_i a la i -ésima palabra del alfabeto.

Si el receptor recibe 01101, sabe que hubo un error. La probabilidad de que α_3 genere ese error es p , mientras que la de $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ son p^2, p^4, p^3 , respectivamente.

Vemos que para la palabra 01101 tenemos criterio suficiente para discriminar y corregir. Puede demostrarse que, si usamos C_3 , esto es así para todos los errores posibles.

Definition 34 (Distancia de Hamming) La distancia de Hamming entre dos palabras $\alpha, \gamma \in \{0, 1\}^*$ es $\delta_H = \# \{i : \alpha_i \neq \gamma_i\}$.

Como la distancia de Hamming es la cantidad de bits diferentes entre α y γ , puede interpretarse como la cantidad de errores necesarios para que enviando α se reciba γ .

La distancia de Hamming es una distancia en el sentido estricto; es decir,

1. $d_H(\alpha, \gamma) \geq 0$
2. $d_H(\alpha, \gamma) = 0 \iff \alpha = \gamma$
3. $d_H(\alpha, \gamma) = d_H(\gamma, \alpha)$
4. $d_H(\alpha, \gamma) \leq d_H(\gamma, \beta) + d_H(\beta, \gamma)$

Todas estas propiedades son triviales excepto la 4., que se llama desigualdad triangular. Daremos una prueba de esta propiedad.

Prueba (desigualdad triangular). Sean

$$\begin{aligned} A &= \{i : \alpha_i = \gamma_i\} \\ B &= \{i : \alpha_i = \beta_i\} \\ C &= \{i : \beta_i = \gamma_i\} \end{aligned}$$

Observe que, por definición,

$$\begin{aligned} d_H(\alpha, \gamma) &= n - |A| = |\overline{A}| \\ d_H(\alpha, \beta) &= n - |B| = |\overline{B}| \\ d_H(\gamma, \beta) &= n - |C| = |\overline{C}| \end{aligned}$$

Sea $i \in B \cap C$; es decir, i un bit que α y β comparten, y que β y γ comparten. Por transitividad, $\alpha_i = \gamma_i$. Y por definición resulta $i \in A$. Es decir, $B \cap C \subseteq A$. De esto se sigue que $\overline{A} \subseteq \overline{B \cap C}$. Pero, por de Morgan, $\overline{B \cap C} = \overline{B} \cup \overline{C}$. Por lo tanto tenemos

$$d_H(\alpha, \gamma) = |\overline{A}| \leq |\overline{B \cap C}| \leq |\overline{B}| + |\overline{C}| = d_H(\alpha, \beta) + d_H(\beta, \gamma)$$

Esto concluye la prueba.

Definition 35 (Disco) El disco de radios alrededor de $\alpha \in \{0, 1\}^n$ es

$$D_r(\alpha) = \{\gamma \in \{0, 1\}^n : d_H(\alpha, \gamma) \leq r\}$$

En otras palabras, el disco de radio r alrededor de una palabra α del código es el conjunto de palabras del código que difiere de α por a lo sumo r símbolos. Como α difiera de α por cero símbolos, es claro que $\alpha \in D_r(\alpha)$ para todo r .

Definition 36 (Detección) Un código $C \subseteq \{0, 1\}^n$ detecta (hasta) r errores si

$$\forall \alpha \in C : D_r(\alpha) \cap C = \{\alpha\}$$

La definición establece que, dado un mensaje α , en el código no hay palabras en el código que difieran de α por menos de r símbolos. Esto es lo que permite la detección. Por ejemplo, si $C = \{0001, 0011, 0111\}$, resulta que $D_1(0001) \cap C = \{0001, 0011\}$, y el código *no* detecta (hasta) 1 error. Intuitivamente, esto significa que podríamos enviar 0001 y recibir 0011, pero como $0011 \in C$ no podríamos detectar que hubo un error.

En cambio, si $C = \{0001, 0111, 1000\}$, resulta que $D_1(\alpha) \cap C = \{\alpha\}$ para cada $\alpha \in C$. Esto significa que si enviamos una palabra del código y sucede un error, podríamos detectarlo. Sin embargo, $D_2(\alpha) \cap C \neq \{\alpha\}$ para todo $\alpha \in C$, porque $D_2(\alpha) \cap C = C$.

Definition 37 (Corrección) Un código $C \subseteq \{0, 1\}^n$ corrige hasta t errores si

$$\forall \alpha, \gamma \in C : \alpha \neq \gamma : D_t(\alpha) \cap D_t(\gamma) = \emptyset$$

Si esto se satisface, será tal que si una palabra $\alpha \in C$ se envía con hasta t errores, no existe ninguna otra palabra en C que haya podido generar α a través de t errores.

Por ejemplo, el ejemplo $C = \{0001, 0111, 1000\}$ no corrige hasta un error. Intuitivamente, si enviamos 0001 y el error es 0101, es imposible determinar si este error vino de 0001 o de 0111—ambas palabras están "a un error de distancia" del mensaje recibido. Formalmente, esto significa que

$$D_1(0001) \cap D_1(0111) = \{0101, 0011\} \neq \emptyset$$

Definition 38 ($\delta(C)$) Dado $C \subseteq \{0, 1\}^n$, definimos

$$\delta(C) = \min \{d_H(\alpha, \gamma) : \alpha, \gamma \in C \wedge \alpha \neq \gamma\}$$

Si tenemos solo un código C , usamos δ para denotar $\delta(C)$. Como esta es la distancia mínima existente entre dos palabras del código, cuanto mayor sea δ mayor será la cantidad mínima de errores necesaria para producir un error que no se puede detectar—esto es, un error que lleva de una palabra del alfabeto a otra palabra del alfabeto.

Ejemplo. Hagamos una tabla para las distancias entre las palabras de C_1, C_2 y C_3 dadas en el primer ejemplo de este capítulo. Para C_1 tenemos

$$\begin{bmatrix} & 00 & 01 & 10 & 11 \\ 00 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 01 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 10 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 11 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Para C_2 ,

	000	101	110	011
000	0	2	2	2
101	2	0	2	2
110	2	2	0	2
011	2	2	2	0

Para C_3 ,

	11111	10000	01100	00011
11111	0	4	3	3
10000	4	0	3	3
01100	3	3	0	4
00011	3	3	4	0

Si recordamos lo que vimos en el ejemplo con C_1, C_2, C_3 , recordaremos que C_1 no detectaba ni corregía errores, que C_2 detectaba pero no corregía errores, y que C_3 detectaba y corregía errores. Es intuitivo pensar que existe cierta relación entre δ y la calidad del código, en tanto que $\delta_1 = 1, \delta_2 = 2, \delta_3 = 3$.

Theorem 25 Sea $C \subseteq \{0, 1\}^n$ y $\delta = \delta(C)$. Entonces (1) C detecta $\delta - 1$ errores, pero no detecta δ ; y (2) Si $t = \lfloor \frac{\delta-1}{2} \rfloor$, entonces C corrige t errores pero no $t + 1$.

Del teorema se sigue fácilmente que $\delta = 1 \Rightarrow$ no se detectan ni corrigen errores; $\delta = 2$ detecta un error y no más, pero no corrige errores, pues $\lfloor \frac{1}{2} \rfloor = 0$. Finalmente, si $\delta = 3$, se detectan 2 pero no 3, pero se corrige un error (pero no 2).

Que detecta 2 pero no tres, y corrige uno pero no 2, significa que si dos bits han cambiado me puedo dar cuenta que hubo un error; y que existe al menos un error de dos bits que no se puede corregir.

Prueba. (1) Sea $\alpha \in C$ y $\gamma \in D_{\delta-1}(\alpha) \cap C$. De esto se sigue que $d_H(\alpha, \gamma) \leq \delta - 1 < \delta$, lo cual implica que $\alpha = \gamma$. Luego C detecta $\delta - 1$ errores (por def.).

Pero no detecta δ , pues $\delta = \min \{d_H(\alpha, \gamma) : \alpha, \gamma \in C, \alpha \neq \gamma\}$. Tomando $v, w \in C$ con $\delta = d_H(v, w)$ resulta que $w \in D_\delta(v) \cap C \wedge w \neq v$.

(2) Sea $u \in D_t(v) \cap D_t(w)$ con $v, w \in C, v \neq w$. Entonces

$$\delta \leq d_H(v, w) \leq d_H(v, u) + d_H(u, w) \leq t + t = 2t$$

Pues $t = \lfloor \frac{\delta-1}{2} \rfloor \leq \frac{\delta-1}{2}$ tenemos

$$d_H(v, w) \leq 2t \leq \delta - 1$$

Entonces $\delta \leq \delta - 1$, lo cual es absurdo. Entonces el u en cuestión no existe, y $D_t(v) \cap D_t(w) = \emptyset$.

Ahora veamos que no corrige $t + 1$. Sea $v, w \in C, v \neq w$, tales que $\delta = d_H(v, w)$. Hay δ bits distintos entre v y w . Tomemos $t + 1$ de esos bits, y cambiémoslos

en v , obteniendo una palabra u . Por construcción de u , $d_H(v, u) = t + 1$. Luego $u \in D_{t+1}(v)$. Si probamos que $u \in D_{t+1}(w)$, tendremos $D_{t+1}(v) \cap D_{t+1}(w) \neq \emptyset$. Pero, por construcción de u ,

$$d_H(u, w) = \delta - (t + 1)$$

Queremos ver que $\delta - (t + 1) \leq t + 1$; es decir que

$$\delta \leq 2t + 2$$

(Caso $\delta = 2k + 1$) En este caso,

$$t = \left\lfloor \frac{2k}{2} \right\rfloor = k$$

y $\delta = 2k + 1 \leq 2k + 2 = 2t + 2$, que es lo que se quería demostrar.

(Caso $\delta = 2k$) En este caso,

$$t = \left\lfloor \frac{2k - 1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor k - \frac{1}{2} \right\rfloor = k - 1$$

Entonces $2t + 2 = 2(k - 1) + 2 = 2k = \delta$, y $\delta \leq \delta$.

Theorem 26 (Cota de Hamming) Sea $C \subseteq \{0, 1\}^n$. Sea $\delta = \delta(c)$ y $t = \left\lfloor \frac{\delta - 1}{2} \right\rfloor$. Entonces

$$|C| \leq \frac{2^n}{1 + n + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{t}}$$

Un ejemplo de aplicación de este teorema es el siguiente. C_3 tiene cardinalidad 4, corrige 1 error (tiene $\delta = 3$), y tiene $n = 5$. C_2 , a su vez, tenía $n = 3$. Entonces, uno podría preguntar si existe algún código C con cardinalidad 4 y $n = 4$ que corrija un error (es decir, que opere tan bien como C_3 pero usando menos bits). La cota de Hamming nos dice que, si tal código existiese, como t sería 1, tendríamos

$$4 = |C| \leq \frac{2^4}{1 + 4} = \frac{16}{5} = 3.2$$

lo cual es absurdo. Es decir, no hay ningún código con $n = 4$ de cardinalidad 4 que sea mejor que C_3 .

Prueba de la Cota de Hamming. Sea $A = \bigcup_{v \in C} D_t(v)$. Como $t = \left\lfloor \frac{\delta-1}{2} \right\rfloor$, C corrige t errores y

$$\forall v, w \in C : v \neq w : D_t(v) \cap D_t(w) = \emptyset$$

Es decir que la unión A es disjunta. Esto implica que $|A| = \sum_{v \in C} |D_t(v)|$.

Sean

$$S_r(v) = \{w \in \{0, 1\}^n : d_H(v, w) = r\}$$

Entonces $D_t(V) = \bigcup_{r=0}^t S_r(v)$, y esta unión es obviamente disjunta. Luego $|D_t(v)| = \sum_{r=0}^t |S_r(v)|$. La pregunta es cuál es el valor de $|S_r(v)|$.

Recordemos que

$$\begin{aligned} w \in S_r(v) &\iff d_H(v, w) = r \\ &\iff w \text{ difiere en exactamente } r \text{ bits de } v \end{aligned}$$

Esa última condición nos permite definir un conjunto de bits; es decir, el conjunto de los r bits en que v y w difieren. Y a su vez, tal conjunto nos identifica a w (relativo a v).

Es decir, w mapea a un conjunto de r bits, y el conjunto de r bits mapea a w cambiando esos r bits a v . Es decir, existe una biyección entre $S_r(V)$ y el conjunto de subconjuntos de r bits, de los n bits posibles.

Como se trata de una biyección,

$$\begin{aligned} |S_r(v)| &= \text{cardinalidad del conjunto de subconjuntos de } r \text{ bits del conjunto de } n \text{ bits} \\ &= \binom{n}{r} \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} |D_t(v)| &= \sum_{r=0}^t |S_r(v)| \\ &= \sum_{r=0}^t \binom{n}{r} \end{aligned}$$

Pero como $|A| = \sum_{v \in C} |D_t(v)|$, tenemos

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{v \in C} \left(\sum_{r=0}^t \binom{n}{r} \right) \\ &= |C| \sum_{r=0}^t \binom{n}{r} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$|C| = \frac{|A|}{\sum_{r=0}^t \binom{n}{r}}$$

Como $A \subseteq \{0, 1\}^n \Rightarrow |A| \leq 2^n$, tenemos

$$|C| \leq \frac{2^n}{\sum_{r=0}^t \binom{n}{r}}$$

Una pregunta natural es si existen códigos donde la cardinalidad de C alcance exactamente la cota, es decir códigos tal que $|C| = 2^n / \sum_{r=0}^t \binom{n}{r}$.

Definition 39 (Códigos perfectos) *Un código se dice perfecto si alcanza exactamente la cota de Hanning.*

4.1 Códigos lineales

Definition 40 *Si $C \subseteq \{0, 1\}^n$ es un subespacio vectorial, se llama un código lineal, suma módulo dos.*

Recordemos que $C \subseteq V$ es un subespacio vectorial si V es un espacio vectorial o si C es en sí mismo un espacio vectorial. En el caso particular de $C = \{0, 1\}^n$, veremos que C es subespacio vectorial si y solo si

- $C \neq \emptyset$
- $\alpha, \beta \in C \Rightarrow \alpha + \beta \in C$
- $\alpha \in C \Rightarrow 1 \cdot \alpha \in C$
- $\alpha \in C \Rightarrow 0 \cdot \alpha \in C$

Pero el tercer ítem es trivial porque $1 \cdot \alpha = \alpha$; y el cuarto también porque $0 \cdot \alpha = \vec{0}$, y puede demostrarse que $\vec{0} \in C$. Simplemente debe observarse que $\alpha + \alpha = \vec{0}$ para todo $\alpha \in C$ ($1 + 1 = 0, 0 + 0 = 0$).

Como ejemplos,

$$\begin{aligned} C_1 &= \{00, 01, 10, 11\} && \text{es lineal} \\ C_2 &= \{000, 101, 110, 011\} && \text{es lineal} \\ C_3 &= \{11111, 10000, 01100, 00011\} && \text{no es lineal} \\ C_4 &= \{00000, 01111, 10011, 11100\} && \text{es lineal} \end{aligned}$$

Definition 41 (Peso de Hamming) *El peso de Hamming de un código x es $|X| = d_H(x, \vec{0})$. Esto equivale a la cantidad de 1's en x .*

Lemma 8 Si C es lineal, entonces

$$\delta = \delta(C) = \min \left\{ |x| : x \in C \wedge x \neq \vec{0} \right\}$$

Prueba. Sea $p = \min \left\{ |x| : x \in C \wedge x \neq \vec{0} \right\}$ y $\delta = \delta(C)$. Veremos que $\delta \leq p \wedge p \leq \delta$.

Sea $x \in C$ con $x \neq \vec{0}$ y tal que $p = |x| \Rightarrow p = d_H(x, \vec{0})$. Esto implica que $p \geq \delta$.

Sean $x, y \in C$ distintos con $\delta = d_H(x, y) = |x+y| \in C$ (pues C es lineal. Entonces $yx \neq y \Rightarrow x+y \neq \vec{0}$. Luego $\delta \geq p$.

Sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal. Entonces $Im(T)$ es un subespacio vectorial de W y $Nu(T)$ es un subespacio vectorial de V . Dada una matriz A , la función $T(x) = xA$ es una transformación lineal. Si A es $k \times n$, y $\vec{x} \in \{0, 1\}^k$, entonces $\vec{x}A$ es un vector $1 \times n$. Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0+1 & 0+0+0 & 0+0+1 & 1+0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Recordemos que $B \subseteq V$ es base de V si B genera V y si B es linealmente independiente. En este caso, en la generación de V solo se suman vectores de V , pues los únicos escalares son 0 y 1.

Si $\alpha \in C \Rightarrow 1\alpha = \alpha$ y $0\alpha = \vec{0}$, y por lo tanto ser LI es no ser LD. En resumen, un conjunto $\{\alpha_1, \dots, \alpha_t\}$ es LD si

$$\exists k_1, \dots, k_t : k_i \in \{0, 1\} : k_1\alpha_1 + \dots + k_t\alpha_t = \vec{0}$$

Pues $k_i \in \{0, 1\}$, el conjunto será LD si y solo si existe un elemento que es suma de otros o existe el cero.

Todas las bases de un espacio V tienen la misma cardinalidad y esa cardinalidad se llama la dimensión de V .

Notación. Llamamos n a la longitud del código, k a la dimensión del código.

Observación. $k = \dim(C) \Rightarrow C \simeq \{0, 1\}^k \Rightarrow |C| = 2^k$, donde \simeq denota un isomorfismo.

Definition 42 Sea C un código lineal de longitud n y dimensión k . Una matriz $G^{k \times n}$ se llama matriz generadora de C si

1. $C = Im(G) = \left\{ z \in \{0, 1\}^n : \exists x \in \{0, 1\}^k : z = xG \right\}$
2. Las filas de G son base de C .

Es importante ver que $(2) \Rightarrow (1)$ y que si

$$(1) \wedge \text{ las filas de } G \text{ son LI} \Rightarrow (2)$$

Para conseguir un código de longitud n y dimensión k , hay que tomar una matriz G con k filas y n columnas con filas LI. Entonces se define $C = \text{Im}(G)$. En general, G se toma de la forma $(I|A)$ o $(A|I)$.

Ejemplo. Sea

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sea C un código tal que G es su matriz generadora. La longitud de C es 7, pues G tiene 7 columnas. La cantidad de palabras de C es 2^3 , pues G tiene 3 filas. Pero cuáles son las palabras de C ?

La respuesta se obtiene tomando todos los elementos $x \in \{0, 1\}^3$ y multiplicándolos por G . Las primeras $k = 3$ coordenadas de todas las palabras de C son los x por los que se multiplicó G .

La matriz generadora permite separar las palabras que uno quiere enviar del código mismo:

Palabras que quiero enviar \rightarrow Palabras del código \rightarrow Recepción \rightarrow Decodificación

o bien

$$x \in \{0, 1\}^k \rightarrow xG = x(A) \rightarrow x$$

Ejemplo. Sea

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 00 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 00 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 01 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 01 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & \end{bmatrix} = [A|I]$$

Pues $n = 10, k = 5, |C| = 2^5 = 32$. Tomemos dos palabras no nulas que no sean columnas de G ; p. ej. $x = 11000, y = 10100$. Entonces

$$\begin{aligned} xG &= 11111 \overbrace{11000}^x \\ yG &= 10000 \overbrace{10100}^y \end{aligned}$$

Con lo cual vemos que G puede escribirse como $[A|I]$.

Definition 43 Dado un código lineal C , una matriz H se llama matriz de corrección de C si $C = \text{Nu}(H) = \{x \in \{0, 1\}^n : Hx^t = 0\}$. H debe tener n columnas.

Aunque la definición no lo impone, pediremos que las filas de H sean LI.

Theorem 27 Sea C código con matriz generadora $G = [A|I]$ of $G = [I|A]$. Entonces $H = [I|A^t]$ (o $H = [A^t|I]$) es una matriz de chequeo de C .

Si A es cuadrada no pasa nada, pero sino lo es, las I de $[A|I]$ y de $[I|A^t]$ van a tener dimensiones distintas, y se debe usar aquella que sea adecuada.

Ejemplo. Usando $G = [A|I]$ del último ejemplo, tenemos que

$$H = [I|A^t]$$

Theorem 28 (Teorema fundamental del álgebra lineal) Si V, W son espacios vectoriales y $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal, entonces $\dim(V) = \dim(\text{Nu}(T)) + \dim(\text{Im}(T))$.

Definition 44 Dada una matriz A , el espacio fila es el espacio vectorial generado por las filas de A , y el rango fila de A es la dimensión de este espacio. Lo mismo se define para las columnas.

Theorem 29 (Teorema del rango) $\text{Row}(A) = \text{Col}(A)$ y se define como $\text{Rank}(A)$.

Lemma 9 Sea H una matriz de chequeo de un código C , donde las filas de H son LI. Entonces $\dim(C) = \#columnas(H) = \#filas(H)$.

Prueba. Sea $V = \{0, 1\}^n$ con n la longitud de $C = \#columnas(H)$. Sea $F = \#filas(H)$. Sea $T : V \rightarrow \{0, 1\}^F$ dada por $T(x) = Hx^t$. Por teorema fundamental del álgebra lineal,

$$\begin{aligned}\dim V &= \dim(\text{Nu}(T)) + \dim(\text{Im}(T)) \Rightarrow \dim V = n \\ \text{Nu}(T) &= \text{Nu}(H) = C \Rightarrow \dim(\text{Nu}(T)) = \dim C = k \\ n &= k + \dim(\text{Im}(T)) \Rightarrow k = n - \dim(\text{Im}(T))\end{aligned}$$

y como $n = \#columnas(H)$ basta ver que $\dim(\text{Im}(T)) = F = \#filas(H)$.

COMPLETAR.

Theorem 30 $[A \mid I]$ es generadora de C si y solo si $[I|A^t]$ es de chequeo de C . Análogamente, $[I|A]$ es generadora si y solo si $[A^t|I]$ es de chequeo.

COMPLETAR. PRUEBA.

Theorem 31 (Teorema muy importante) Sea C un código lineal con matriz de chequeo H . Entonces $\delta(C)$ es el mínimo número de columnas LD de H .

En general, nos darán H tal que $\delta(C) = 3$ o 4 .

Por ejemplo, en

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

resulta que $\delta = 3$.

Un **Corolario** es que si $C = Nu(H)$ y H no tiene la columna cero ni columnas repetidas, $\delta \geq 3$ y C corrige al menos un error.

Prueba. Como H no tiene col 0 y $\delta > 1$ y no tiene columnas repetidas, entonces $H^{(i)} \neq H^{(j)}$ para todo $i \neq j$, lo cual implica que

$$H^i + H^j \neq 0$$

$$\{H^i, H^j\} \text{ es LI}$$

La técnica es primero ver si la matriz cumple las condiciones del corolario. Luego, sabiendo que $\delta' \geq 3$, ver si alguna columna es suma de otras dos, y si lo es, $\delta = 3$. (Esto puede no ser exacto.)

Theorem 32 Sea $C = Nu(H)$ y supongamos que C corrige al menos un error. Supongamos que se manda una palabra $v \in C$ y llega una palabra w con a lo sumo un error. Entonces

1. Si $Hw^t = 0$ entonces $v = w$.
2. Si $Hw^t = H^i$ para algún i , $v = w + C_i$.
3. Si no pasa a ni b, los supuestos son incorrectos y hubo ≥ 2 errores.

Definition 45 (Códigos de Hamming) Un código de Hamming es un código lineal que tiene una matriz de chequeo con algún número de filas y tal que sus columnas son todas las columnas distintas de cero con r filas.

Denotaremos \mathcal{H}_r a cualquier código de Hamming con r filas en su matriz de chequeo. Por ejemplo,

$$\mathcal{H}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

En general, la matriz de chequeo será $r \times (2^r - 1)$

Theorem 33 Los códigos de Hamming son perfectos.

4.2 Códigos cíclicos

Definition 46 (Código cíclico) Un código es cíclico si es lineal y la rotación de cualquier palabra es una palabra del código.

Aquí, rotación significa desplazar los bits un bit a la derecha, y el bit de la extrema derecha ponerlo al inicio. Por ejemplo, $C = \{000, 110, 011, 101\}$ es cíclico.

Si una palabra $w = w_0 \dots w_{n-1}$ es del código, escribimos $Rot(w_0 w_1 \dots w_{n-1}) = w_{n-1} w_0 w_1 \dots w_{n-2}$.

Recordemos que un anillo es un grupo con operaciones $(+, \cdot)$ y que una función polinómica sobre un anillo es cualquier función de la forma $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$, con $n \in \mathbb{N}$ y a_i en el anillo.

Recordemos que dos funciones f y g son iguales si $f(x) = g(x)$ para todo x . Por ejemplo, sobre $\{0, 1\}$, resulta que $f(x) = 1 + x$ y $g(x) = 1 + x^2$ son iguales.

Una forma alternativa de pensar un polinomio es como una palabra infinita a la derecha pero con una cantidad finita de entradas no nulas. Es decir, podemos escribir

$$w = w_0 w_1 \dots w_{n-1}$$

como

$$w = w_0 + w_1 x + \dots + w_{n-1} x^{n-1}$$

La ventaja de pensar las palabras como polinomios es que podemos multiplicarlas y sumarlas.

Dado un módulo $m(x)$ (polinomio), para un polinomio cualquiera $p(x)$, definimos $p(x) \bmod m(x)$ como el resto de dividir p por m . El resto siempre tiene grado menor al grado de $m(x)$. Para códigos cíclicos, otmaremos siempre $m(x) = 1 + x^n$.

Como notación, haemos $p(x) \circ q(x) = [p(x)q(x)] \bmod (1+x^n)$ donde n es la longitud del código.

Lemma 10 $Rot(w) = x \circ w$ si w es representado como un polinomio.

Prueba. Veamos que

$$\begin{aligned} x \circ w &= x(w_0 + w_1 x + \dots + w_{n-1} x^{n-1}) \\ &= x(w_0 + w_1 x + \dots + w_{n-1} x^{n-1}) \bmod (1 + x^n) \\ &= (w_0 x + w_1 x^2 + \dots + w_{n-1} x^n) \bmod (1 + x^n) \end{aligned}$$

Ahora bien, $(1 + x^n) \bmod (1 + x^n) = 0 \Rightarrow x^n \bmod (1 + x^n) = 1$. Entonces

$$\begin{aligned} (w_0 x + w_1 x^2 + \dots + w_{n-1} x^n) \bmod (1 + x^n) &= w_0 x + w_1 x^2 + \dots + w_{n-1} x^{n-1} + w_{n-1} \times 1 \\ &= w_{n-1} + w_0 x + \dots + w_{n-2} x^{n-1} \\ &= w_{n-1} w_0 w_1 \dots w_{n-2} \\ &= Rot(w) \end{aligned}$$

Lemma 11 Si C es lineal y miramos sus palabras como polinomios, entonces existe un único polinomio no nulo de menor grado en C .

Prueba. COMPLETAR.

Definition 47 Si C es cíclico, el polinomio no nulo de menor grado se llama el polinomio generador de C , y se lo denota $g(x)$.

La razón por la cual se llama polinomio generador es dada por el siguiente teorema.

Theorem 34 Sea C cíclico y $g(x)$ su polinomio generador. Entonces

1. $C = \{p(x) : \text{gr}(p(x)) < n \wedge g(x) \mid p(x)\}$; es decir, los códigos son los múltiplos de $g(x)$ con grado $< n$.
2. $C = \{g(x) \circ v(x) : v \text{ es un polinomio arbitrario}\}$
3. $\text{gr}(g(x)) = n - k$ con $k = \dim C$
4. $g(x) \mid 1 + x^n$
5. Si $g(x) = g_0 + g_1x + \dots$, entonces $g_0 = 1$

Prueba. COMPLETAR.

Metodo 1. Los puntos (1) y (3) nos dan el primer metodo para codificar. Dado C y $g(x)$ y $k = \dim C$, para codificar una $w \in \{0, 1\}^k$ la tomo como un polinomio $w(x)$ y la codifico como $w(x)g(x)$. Naturalmente, si $w(x)g(x) = p(x)$, el mensaje $p(x)$ se decodifica tomando $p(x)/g(x) = w(x)$.

Ejemplo. Sea $n = 7$ y $g(x) = 1 + x + x^3$. Tomamos $k = n - \text{gr}(g) = 7 - 3 = 4$. Esto nos da un código con $2^4 = 16$ palabras. Codifiquemos $w = 0101$ como polinomio haciendo $w = x + x^3$. Luego vemos que

$$\begin{aligned} p(x) &:= (x + x^3)(1 + x + x^3) \\ &= x + x^2 + x^4 + x^5 + x^4 + x^6 \\ &= x + x^2 + x^3 + x^6 \\ &= 0111001 \end{aligned} \quad \{\text{Visto como palabra}\}$$

La matriz generadora asociada al metodo 1 es dada por la base canonica de $\{0, 1\}^4$:

$$\begin{cases} 1000 = 1 & \mapsto g(x) \\ 0100 = x & \mapsto xg(x) \\ 0010 = x^2 & \mapsto x^2g(x) \\ 0001 = x^3 & \mapsto x^3g(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Metodo 2. Otra manera es usar la idea del item (2) del teorema, usando reduccion modular pero con modulo $g(x)$. En esencia, la idea es generar múltiplos de $g(x)$.

Notación. Dado $p(x)$ arbitrario, hacemos $v(x) = [p(x) \bmod g(x)] + p(x)$.

Entonces,

$$\begin{aligned}
v(x) \bmod g(x) &= [(p(x) \bmod g(x)) + p(x)] \bmod g(x) \\
&= p(x) \bmod g(x) \bmod g(x) + p(x) \bmod g(x) \\
&= p(x) \bmod g(x) + p(x) \bmod g(x) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Es decir, $g(x) \mid v(x)$. Esta será la manera de generar múltiplos de $g(x)$. Sin embargo, debemos observar que si el polinomio elegido es un $u(x) \in \{0, 1\}^k$, entonces $u(x) \bmod g(x) + u(x)$ no funciona porque no es inyectivo; es decir, podríamos estar asociando el mismo código a palabras diferentes.

Ahora bien, la función no es inyectiva solo si $gr(u) < gr(g)$. Entonces, podemos hacer un "truco"; a saber, usar $x^{gr(g)}u(x)$ en vez de $u(x)$ directamente. Es decir, codificar $u(x)$ con

$$\left[x^{gr(g)}u(x) \bmod g(x) \right] + x^{gr(g)}u(x)$$

Obviamente, se sigue cumpliendo que $g(x)$ divide a esta transformación; sin embargo, hemos asegurado que la transformación es inyectiva.

Ejemplo. Sea $g(x) = 1 + x + x^3$ y $n = 7$. Queremos codificar $u(x) = 1001$, $v(x) = 0110$, que vistos como polinomios son $u(x) = 1 + x^3$, $v(x) = x + x^2$. El grado de g es 3. Por lo tanto, codificamos

$$\begin{aligned}
1 &\mapsto (x^3 \bmod g) + x^3 = 1 + x + x^3 \\
x &\mapsto x^4 \bmod g + x^4 = x + x^2 + x^4 \\
x^2 &\mapsto x^5 \bmod g + x^5 = x^2 + 1 + x + x^5 \\
x^3 &\mapsto x^6 \bmod g + x^6 = 1 + x^2 + x^6
\end{aligned}$$

Esta codificación nos da la matriz generadora asociada al método:

$$\begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}$$

Ahora bien, como $g(x) \mid 1 + x^n$, existe $h(x)$ tal que $1 + x^n = g(x)h(x)$. Sea $p(x)$ un polinomio con $gr(p) < n$. Sabemos que

$$p \in C \iff g \mid p \iff \exists q : p = qg \Rightarrow hp = qgh = q(1 + x^n)$$

De esto se sigue que $h \circ p = hp \bmod (1 + x^n) = 0$. Es decir que este criterio puede usarse para ver si una palabra pertenece al código.

Para corregir un error, vemos que $v \rightarrow w = v + x$

4.3 Códigos de Reed-Solomon

Son códigos cíclicos pero no binarios.

Definition 48 (Cuerpo finito) *Un cuerpo finito es un cuerpo que tiene una cantidad finita de elementos.*

Por ejemplo, $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_5$, o generalmente \mathbb{Z}_p con p primo son cuerpos finitos. Pero en general no se trabaja sobre los \mathbb{Z}_p porque las computadoras operan bien con binarios. Daremos un cuerpo que satisface una propiedad que también satisface \mathbb{Z}_2 ; a saber, que $1 + 1 = 0$. Esta propiedad facilita muchas cosas.

Definition 49 Sea F un cuerpo finito y 1_F la unidad de F . Para $k \in \mathbb{N}_0$, definimos

$$k \times \alpha = \overbrace{\alpha + \alpha + \dots + \alpha}^{k \text{ veces}}$$

para cualquier $\alpha \in F$.

Algunas propiedades son:

- $(k + j)\alpha = k\alpha + j\alpha$
- $(kj)\alpha = k(j\alpha)$

Theorem 35 Sea F un cuerpo finito. Existen un primo p y $r \geq 1$ entero tales que $|F| = p^r$. Más aún,

$$(F, +) \simeq (\mathbb{Z}_p^r, +)$$

donde \mathbb{Z}_p^r es el espacio vectorial r -dimensional con sobre \mathbb{Z}_p .

Prueba. Miremos $1_F, 2 \times 1_F, 3 \times 1_F, 4 \times 1_F$, etc. Como F es finito, la secuencia anterior no puede consistir de números todos distintos. Esto implica que existen k, j con $k \neq j$ tales que $k \times 1_F = j \times 1_F$. Asumamos que $k > j$ (pues son distintos, uno es mayor que el otro); la prueba asumiendo lo contrario es análogo.

Por las propiedades antes mencionadas,

$$k \times 1_F = j \times 1_F \Rightarrow (k - j)1_F = 0$$

Es decir, existe un i (en este caso $k - j$) tal que $i \times 1_F = 0$. Es decir que en la secuencia $1_F, 2 \times 1_F, \dots$, en algún momento ocurre cero.

Sea p el menor $i > 0$ tal que $p \times 1_F = 0$. Probaremos que p es primo.

Supongamos que p no es primo. Entonces existen a, b con $1 < a, b < p$ tales que $p = ab$. Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned}
0 &= p \times 1_F \\
&= (ab) \times 1_F \\
&= a(b \times 1_F) \\
&= b \times 1_F + \dots + b \times 1_F \text{ }^a \text{ veces} \\
&= b(1_F + \dots + 1_F \text{ }^a \text{ veces}) \\
&= b(a \times 1_F) \\
&\neq 0
\end{aligned}$$

Pero $b \times 1_F \neq 0$ porque $b < p$ que es el menor i tal que $i \times 1_F = 0$.

Pero $(a \times 1_F)(b \times 1_F) = 0$, y como F es un cuerpo esto implica que o bien a es 0 o bien b es 0, lo cual contradice la hipótesis. $\therefore p$ es primo.

Ahora bien, pues \mathbb{Z}_p es un cuerpo, podemos intentar darle a F una estructura equivalente a la de \mathbb{Z}_p visto como espacio vectorial. Para esto, tomamos la suma como la suma de F y el producto por escalares $i \in \mathbb{Z}_p$ como

$$i \circ \alpha = i\alpha$$

Ahora bien, para todo k , $k\alpha = (k \bmod p) \circ \alpha$.

Entonces es trivial ver que $(F, +, \circ)$ es un espacio vectorial sobre \mathbb{Z}_p . Ahora definamos $r = \dim(F)$ visto como espacio vectorial. Entonces $(F, +) \simeq (\mathbb{Z}_p^r, +) \Rightarrow |F| = p^r$.

Ahora veamos que siempre existe un cuerpo F con cardinalidad p^r para cualquier primo p y $r \in \mathbb{Z}^+$. Haremos una prueba por construcción. El primer paso es tomar un polinomio irreducible de grado r sobre \mathbb{Z}_p . Asumamos sin demostración que siempre existe un polinomio irreducible sobre \mathbb{Z}_p para todo p, r .

Sea $F = \mathbb{Z}_p[x]/m(x)$ (los restos módulo $m(x)$). Aquí $\mathbb{Z}_p[x]$ son todos los polinomios sobre \mathbb{Z}_p . Se define $+$ y \cdot de la manera usual pero modular. Sean $f(x) \in \mathbb{Z}_p[x]/m(x)$ tal que $f(x) \neq 0$. Queremos ver que f siempre tiene inverso.

Como $\deg(f) < \deg(m)$ y m es irreducible, entonces $\gcd(m(x), f(x)) = 1$. Entonces existen $a(x), b(x)$ tal que $1 = a(x)m(x) + b(x)f(x)$ en $\mathbb{Z}_p[x]$. Pero tomando módulo m en ambos lados, esto implica que

$$\begin{aligned}
1 \bmod m &= 1 \\
&= b(x)f(x) \bmod m(x)
\end{aligned}$$

lo cual implica que $b(x)$ es el inverso de $f(x)$.

Definition 50 Un elemento primitivo en un cuerpo F es un α tal que

$$F - \{0\} = \{1, \alpha, \dots, \alpha^{algo}\}$$

Es decir, un elemento es primitivo si sus potencias son todos los elementos no nulos de F .

Theorem 36 (Teorema del elemento primitivo) *Todo cuerpo finito tiene al menos un elemento primitivo.*

Prueba. Dado un grupo abeliano (y $F - \{0\}$ es un grupo abeliano), se define el orden de un elemento x como el menor r tal que $x^r = 1$.

Se puede demostrar que si $m = \max \{\text{orden}(x) : x \in \text{grupo abeliano}\}$ entonces $x^m = 1$ para todo x .

Sea entonces m el máximo orden de $F - \{0\}$, y sea $q = |F| = p^r$. Sea α tal que $\text{orden}(\alpha) = m$. Entonces $\alpha, \dots, \alpha^{m-1}, \alpha^m = 1$ son todos distintos. Entonces $m \leq q - 1$ (pues $|F - \{0\}| = q - 1$).

Ahora bien, pues m es el máximo orden, $\beta^m = 1$ para todo $\beta \in F - \{0\}$. Entonces, el polinomio $x^m - 1$ tiene a todos los elementos de $F - \{0\}$ como raíces. Como estamos en un cuerpo, un polinomio $p(x)$ no puede tener más de $\text{gr}(p(x))$ raíces. Y como tiene $q - 1$ raíces, resulta que

$$q - 1 \leq \text{gr}(x^m - 1) = m$$

Un corolario es que, dado que $F - \{0\}$ son las potencias del elemento primitivo, y multiplicar potencias es sumar los exponentes,

$$(F - \{0\}, \cdot) \simeq (\mathbb{Z}_{q-1}, +)$$

Se puede ver que para todo p primo, $r \geq 1$, si $|F| = p^r = |\tilde{F}|$, entonces $(F, +, \cdot) \simeq (\tilde{F}, +, \cdot)$. Es decir, existe un único cuerpo finito de cardinalidad p^r . Como hay uno solo, suele denotarse $GF(p^r)$ o \mathbb{F}_{p^r} , donde GF viene de Galois field.

Definition 51 (Código de Reed-Solomon) *Un código de Reed-Solomon $RS(p^r, b)$ es:*

1. *Un código cíclico*
2. *Es sobre \mathbb{F}_{p^r} (el alfabeto no es binario; sus letras son polinomios)*
3. *Su polinomio generador es de la forma $g(x) = (x - \beta^t)(x - \beta^{t+1}) \dots (x - \beta^{t+b-2})$ para algún t y un β primitivo.*

En general, si $g(x) = (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_r)$ con los α_i 's distintos, entonces $\alpha_i^{q-1} = 1 \Rightarrow g(x) \mid x^{q-1} - 1$. Entonces $g(x) \mid x^{q-1} - 1$ y por lo tanto g genera un código cíclico de longitud $q - 1$.

Probaremos que el δ del código es b . Pero antes un ejemplo. Construyamos un RS que corrija dos errores ($\alpha = 3$). Trabajaremos con $GF(2^3)$.

El primer paso en la construcción es tomar $m(\alpha) = 1 + \alpha^2 + \alpha^3$.

Por un lado tenemos los elementos del cuerpo $GF(2^3)$, y por otro lado tenemos el polinomio $g(x)$, que es un polinomio sobre $GF(2^3)$, y las otras palabras del alfabeto, que también son palabras sobre $GF(2^3)$. Para éstos usamos coeficiente x , pero para los de $GF(2^3)$ usamos α .

En $GF(2^3) = \mathbb{Z}^2[x]/m(x)$ tenemos

$$\begin{aligned}\alpha^3 &= 1 + \alpha^2 \\ \alpha^4 &= \alpha + \alpha^3 = 1 + \alpha + \alpha^2 \\ \alpha^5 &= \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 = \alpha + 1 = 1 + \alpha \\ \alpha^6 &= \alpha + \alpha^2 \\ \alpha^7 &= \alpha^2 + \alpha^3 = 1\end{aligned}$$

Como $GF(2^3)$ debe tener 7 elementos, estos son todos los elementos y efectivamente α es primitivo; es decir, $GF(2^3) - \{0\} = \{\alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^7 = 1\}$.

Tomo $t = -1$ y $\beta = \alpha$ (en general, t será elegido entre $-1, 0$ y 1). Entonces

$$\begin{aligned}g(x) &= (x + \alpha^{-1})(x + \alpha^0)(x + \alpha)(x + \alpha^2) \\ &= \alpha^2 + (\alpha + \alpha^2)x^2 + x^3 + x^4\end{aligned}$$

La matriz generadora con el segundo método, donde $k = n - gr(g) = 7 - 4 = 3$, es

$$\begin{bmatrix} x^4 & \text{mod } g + x^4 \\ x^5 & \text{mod } g + x^5 \\ x^6 & \text{mod } g + x^6 \end{bmatrix}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}x^4 \text{ mod } g(x) &= \alpha^2 + \alpha x + (\alpha + \alpha^2)x^2 + x^3 \\ x^5 \text{ mod } g(x) &= x \times x^4 \text{ mod } g = \alpha^2 x + \alpha x^2 (\alpha + \alpha^2)x^3 + (x^4 \text{ mod } g) \\ &= \alpha^2 x + (\alpha + \alpha^2)x^3 + (\alpha^2 + (\alpha + \alpha^2)x^2 + x^3) \\ &= \alpha^2 + \begin{bmatrix} \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha + \alpha^2 \end{bmatrix} x^2 + \begin{bmatrix} \alpha + \alpha^2 \\ 1 \end{bmatrix} x^3 \\ &= \alpha^2 + (\alpha + \alpha^2)x + \alpha^2 x^2 + (\alpha + \alpha + \alpha^2)x^3\end{aligned}$$

donde la notación matricial no denota vectores sino los coeficientes correspondientes a las variables de cada grado. Ahora bien,

$$\begin{aligned}x^6 \text{ mod } g(x) &= \alpha^2 x + (\alpha + \alpha^2)x^2 + \alpha^2 x^3 + (1 + \alpha + \alpha^2)(x^4 \text{ mod } g(x)) \\ &= \alpha^2 x + (\alpha + \alpha^2)x^2 + \alpha^2 x^3 + (1 + \alpha + \alpha^2) [\alpha^2 + \alpha x + (\alpha + \alpha^2)x^2 + x^3]\end{aligned}$$

Lo más simple es ver que $1 + \alpha + \alpha^2 = \alpha^4$ y que $\alpha + \alpha^2 = \alpha^6 = \alpha^{-1}$. Entonces todo esto resulta

$$\begin{aligned}(a + \alpha + \alpha^2)(\alpha^2 + \alpha x + (\alpha + \alpha^2)x^2 + x^3) &= \alpha^4(\alpha^2 + \alpha^{-1}x + x^3) \\ &= \alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^3x^2 + \alpha^4x^3\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}x^6 \mod g &= \alpha^2x + (\alpha + \alpha^2)x^2 + \alpha^2x^3 + [\alpha^6 + \alpha^5x + \alpha^3x^2 + \alpha^4x^3] \\ &= \alpha^2x + (\alpha + \alpha^2)x^2 + \alpha^2x^3 + (\alpha + \alpha^2) + (1 + \alpha)x + (1 + \alpha^2)x^2 + (a + \alpha + \alpha^2)x^3 \\ &= (\alpha + \alpha^2) + (a + \alpha + \alpha^2)x + (1 + \alpha)x^2 + (a + \alpha)x^3\end{aligned}$$

Luego, la matriz generadora del código es

$$\begin{bmatrix} \alpha^2 & \alpha & \alpha + \alpha^2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha^2 & \alpha + \alpha^2 & \alpha^2 & 1 + \alpha + \alpha^2 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha + \alpha^2 & 1 + \alpha + \alpha^2 & 1 + \alpha & 1 + \alpha & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ya que estamos, chequeemos. Veamos que

$$\begin{aligned}x^7 \mod g &= (\alpha + \alpha^2)x + (1 + \alpha + \alpha^2)x^2 + (1 + \alpha)x^3 + (1 + \alpha)(\alpha^2 + \alpha x + (\alpha + \alpha^2)x^2 + x^3) \\ &= (\alpha + \alpha^2)x + (1 + \alpha + \alpha^2)x^2 + (a + \alpha)x^3 + \alpha^5(\alpha^2 + \alpha^{-1}x^2 + x^3) \\ &= (\alpha + \alpha^2)x + (1 + \alpha + \alpha^2)x^2 + (a + \alpha)x^3 + \alpha^7 + \alpha^6x + \alpha^4x^2 + \alpha^5x^3 \\ &= 1\end{aligned}$$

porque $\alpha^5 = 1 + \alpha$, $\alpha + \alpha^2 = \alpha^6$, y $1 + \alpha + \alpha^2 = \alpha^4$, y por lo tanto sus sumas se cancelan, y por último $\alpha^7 = 1$.

Theorem 37 (Cota singleton) $\delta \leq n - k + 1$.

Prueba. Vimos que $\delta = \min$ numero de columnas LD de una matriz de chequeo H . Luego todo conjunto de $\delta - 1$ columnas de H es LI. Pero un conjunto LI no puede tener mas elementos que la dimension de su espacio; es decir que $\delta - 1$ es menor o igual que la dimensión del espacio columna de H :

$$\delta - 1 \leq \text{Rank}_C(H) \Rightarrow \delta - 1 \leq \text{Rank}_F(H)$$

Pero $k = n - \text{Rank}_F(H)$. Entonces

$$\delta - 1 \leq n - k$$

Observemos que este teorema es para cualquier codigo lineal —es decir, no vale solo para los codigos de Reed-Solomon.

Definition 52 Si se da el = en la cota singleton, el código se llama un código Maximum Distance Separable (MDS).

Theorem 38 *El δ del código $RS(p^r, b)$ es b , $k = p^r - b$, y los códigos de Reed-Solomon son MDS.*

Prueba. Recordemos que $RS(p^r, b)$ tiene como generador a algún polinomio de la forma

$$g(x) = (x - \beta^t)(x - \beta^{t+1}) \dots (x - \beta^{t+b-2})$$

con β un primitivo del espacio. Entonces $gr(g) = b - 1$ y por lo tanto $k = n - gr(g) = n - (b - 1)$. Pero la longitud de un código de Reed-Solomon es $p^r - 1$. Entonces

$$gr(g) = p^r - b$$

Por la cota singleton,

$$\begin{aligned} \delta &\leq n - k + 1 = (p^r - 1) - (p^r - b) + 1 \\ &= b \end{aligned}$$

Si probamos $b \leq \delta$ tendremos $\delta = b$. Y además tendremos $\delta = b = n - k + 1 \Rightarrow$ MDS.

Supongamos que $b \leq \delta$ es falso; es decir que $\delta < b \Rightarrow \delta \leq b - 1$. Pero δ era el mínimo número de columnas LD de cualquier matriz de chequeo H (*). Es decir que para cualquier H existen $b - 1$ columnas LD. La estrategia de la prueba es: Dar una H para el código $C = RS(p^r, b)$ y como vale (*) existiran $b - 1$ cols. LD que conduciran a un absurdo.

Sea

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \beta^t & \dots & (\beta^t)^{n-1} \\ 1 & \beta^{t+1} & \dots & \beta^{(t+1)n-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \beta^{t+b-2} & \dots & (\beta^{t+b-2})^{n-1} \end{bmatrix}$$

Los subíndices son $i = 0, \dots, b-2$ para las filas, $j = 0, \dots, n-1$ para las columnas.

Veamos que $H_{ij} = (\beta^{t+i})^j$. Sean g_0, g_1, \dots los coeficientes de $g(x)$. Entonces

$$g(x) = g_0 + g_1x + g_2x^2 + \dots + g_{b-1}x^{b-1}$$

Si probamos que $H(g(x))^t = 0$, donde el polinomio es visto como una palabra, el hecho de que g es generador de C nos garantizaría que $Hv^t = 0$ para todo $v \in C$. Es decir que H sería matriz de chequeo.

El polinomio generador visto como palabra es

$$g(x)^t = [g_0 \quad g_1 \quad \dots g_{b-1} \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0]^t = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_{b-1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Veamos que

$$\begin{aligned} (H(g(X))^t)_{i,j} &= \sum_{j=0}^{n-1} H_{ij}(g(x)^t)_{j,1} \\ &= \sum_{j=0}^{b-1} H_{ij}g_j \quad \left\{ \text{Porque } g(x)^t_{i,j} = 0 \text{ si } j > b-1 \right\} \\ &= \sum_{j=0}^{b-1} g_j \left(\beta^{t+i} \right)^j \end{aligned}$$

Pero el polinomio g era

$$\begin{aligned} g(x) &= g_0 + g_1x + g_2x^2 + \dots + g_{b-1}x^{b-1} \\ &= \sum_{j=0}^{b-1} g_jx^j \end{aligned}$$

Entonces

$$\sum_{j=0}^{b-1} g_j \left(\beta^{t+i} \right)^j = g(\beta^{t+1})$$

Pero

$$g(x) = (x - \beta^t) \dots (x - \beta^{t+b-2}) \Rightarrow g(\beta^{t+1}) = 0$$

para todo $i = 0, \dots, b-2$. Entonces

$$(Hg(x)^t)_{ij} \Rightarrow g(\beta^{t+1}) = 0$$

Es decir que

$$H(g(x))^t = 0$$

Entonces H es de chequeo de C . Como suponemos $\delta < b$, existen $b-1$ columnas LD de H . Es decir, existen r_1, r_2, \dots, r_{b-1} tales que $H_{r_1}, H_{r_2}, \dots, H_{r_{b-1}}$ es LD.

Sea A la matriz formada por las columnas LD:

$$A = \begin{bmatrix} H^{(r_1)} & H^{(r_2)} & \dots & H^{(r_{b-1})} \end{bmatrix}$$

Claramente, A es $(b-1) \times (b-1)$.

Como las columnas de A son LD, $\det(A) = 0$. Entonces las filas de A son LD. Es decir que existen c_0, c_1, \dots, c_{b-2} no nulos tales que

$$\sum_{i=0}^{b-2} c_i A_i = 0$$

donde A_i denota la i -ésima fila de A . Entonces

$$\sum_{i=0}^{b-2} c_i A_{i,j} = 0 \quad \text{para todo } j$$

Entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=0}^{b-2} c_i H_{i,r_j} \quad \text{para todo } j \\ &= \sum_{i=0}^{b-2} c_i \left(b^{t+i} \right)^{r_j} \\ &= \sum_{i=0}^{b-2} c_i \beta^{(t+i)r_j} \\ &= \sum_{i=0}^{b-2} c_i \beta^{tr_j + ir_j} \\ &= \sum_{i=0}^{b-2} c_i \beta^{tr_j} \beta^{ir_j} \quad \{\text{El 2do factor no depende de } i\} \\ &= \beta^{tr_j} \sum_{i=0}^{b-2} c_i \beta^{ir_j} \end{aligned}$$

Pero entonces

1. $0 = \beta^{tr_j} \sum_{i=0}^{b-2} c_i \beta^{ir_j}$
2. $\beta^{tr_j} \neq 0$, porque β es primitivo.
3. Vivimos en un cuerpo.

Por lo tanto, debe suceder que

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=0}^{b-2} c_i \beta^{ir_j} \quad \text{para todo } j \\ &= \sum_{i=0}^{b-2} c_i (\beta^{r_j})^i \end{aligned}$$

Esto parece un polinomio. Hagamos

$$p(x) = \sum_{i=0}^{b-2} c_i x^i$$

Luego

$$\sum_{i=0}^{b-2} c_i (\beta^{r_j})^i = 0 \Rightarrow p(\beta^{r_j}) = 0$$

para todo j . Es decir que $p(x)$ tiene raíces $\beta^{r_1}, \beta^{r_2}, \dots, \beta^{r_{b-1}}$. Son $b-1$ raíces pero $\text{gr}(p) \leq b-2$. Pues estamos en un cuerpo, un polinomio no nulo de grado n no puede tener mas de n raíces. Entonces sucede que $p(x) = 0$. Pero entonces $c_0 = c_1 = \dots = c_{b-2} = 0$, lo cual contradice que las filas de A son LD.

5 P-NP

El problema P-NP es el primer escalon de un area mas general llamada *Complejidad computacional*.

Definition 53 (Problema de decision) *Un problema de decision es un problema cuyas unicas respuestas son "si" o "no".*

Esto los distingue de problemas de decision. No es lo mismo calcular el determinante de una matriz que decidir si tal determinante existe.

En general son de la forma

Dado $x \in I$, es cierto que $x \in S$?

donde I, S son conjuntos fijos que dependen del problema. El conjunto I suele llamarse el "conjunto de instancias".

Definition 54 *P es la familia de problemas de decision para los cuales existe un algoritmo polinomial.*

Por ejemplo, el problema de decision

Dado un grafo G , es G conexo?

puede resolverse con DFS o BFS, que es un algoritmo polinomial. Entonces, este problema pertenece a la familia P .

Un problema de decision famoso es el k -clique. Dado un grafo, existe un K_k dentro de G ? Se ha probado que k -clique pertenece a P para todo k . El algoritmo consiste en buscar todos los subconjuntos de k vertices y revisar si son completos. La complejidad de revisar si son completos, pues debe revisarse todos los lados, es

$$O(k^2) = \text{constante}$$

porque k es un numero fijo una vez que se da el grafo. La complejidad de encontrar todos los subconjuntos de k elementos es

$$\binom{n}{k}$$

que es un polinomio de grado $\min\{k, n - k\}$. Para n suficientemente grande, resulta en un polinomio de grado k . Entonces la complejidad del algoritmo para k -clique es

$$O(\text{Polinomio de grado } k) = O(n^k)$$

Otro problema es el problema clique (a secas). Pregunta si dados un G y un k , existe un K_k en G . Es decir que ahora k no es una constante dada, sino que es una variable. En otras palabras, k es parte de la instancia.

La complejidad suge de que el numero combinatorio donde k no es fijo no es un polinomio bonito.

Definition 55 *NP es la familia de problemas de decision para los cuales existe un algoritmo no-deterministico polinomial que lo resuelve.*

Cuando decimos que "lo resuelve", queremos decir lo siguiente. Asumamos que tenemos el problema de decision Π con instancias $x \in I$, y un algoritmo no-deterministico que vamos a denotar $A(E, x)$ con $x \in I$ y E las elecciones no-deterministicas que toma. Diremos que A resuelve a Π "para el si" si y solo si:

1. $A(E, x)$ debe ser "si" o "no se" para todo E, x .
2. Si existe E tal que $A(E, x) = \text{"si"}$, entonces $\Pi(x) = \text{si}$.
3. Si $A(E, x) = \text{"no se"}$, entonces no se puede decir nada.
4. Si $\Pi(x) = \text{si}$, entonces existe alguna instancia (E, x) tal que $A(E, x) = \text{si}$.

Si la cantidad de elecciones E es polinomial, puedo resolver el problema tomando todas las decisiones en ese tiempo. EL problema es que en general recorrer las decisiones de E no puede hacerse en tiempo polinomial.

Diremos que A resuelve a Π "para el no" si satisface las mismas condiciones, pero cambiando las "si" por "no".

Es importante ver que NP no es el complemento de P, sino que $NP \subset P$.

La definicion correspondiente a NP para el "no" se llama CO-NP. Es decir que NP contiene los NP para el si y los NP para el no, aunque siempre que digamos NP nos referiremos a NP para el si.

Ejemplo. El problema k -color, determinar si un grafo G tiene $\chi(G) \leq k$, es NP. Porque simplemente puedo intentar un coloreo con algun numero menor a k . Si el coloreo es propio la respuesta es si, pero si no lo es la respuesta es "no se" (puede haber otro coloreo que funcione).

Algunos algoritmos son NP y CO-NP al mismo tiempo, pero no es el caso del problema del k -color.

Primo. El problema de decidir si un numero n es primo o no esta en CO-NP. Porque para ver el "no", simplemente elijo dos numeros menores a n y veo si n es su producto. Y esta en NP porque solo podemos recibir un "no" o un "no se".

A su vez, primo esta en NP—es decir, existe una manera no-deterministica de decidir si un numero es primo o no.

Mas tarde, el algoritmo AKS sirvio para probar que primo esta en P.

Nadie sabe si $P = NP$ ni tampoco si $NP = CO - NP$.

6 Prácticos

6.1 Práctico 1

Problem 1 *Dar el algoritmo más rápido posible que resuelva el problema siguiente:*

Dado un input (T, n, m) con T un árbol, n el número de vértices, m el número de lados, dar $\chi(G)$.

El número cromático de un árbol siempre es dos. Se puede probar por inducción. El caso $n = 2$ es trivial. Asumamos vale para $k \in \mathbb{N}$ arbitrario. Sea $T = (V, E)$ un árbol con $k + 1$ vértices (y por lo tanto k lados). Sea $x \in V$ un vértice tal que $d(x) = 1$ y sea y el único $y \in V$ tal que $\{x, y\} \in E$. (Si lo desea, demuestre que si T es un árbol entonces necesariamente existe un vértice de grado 1; es trivial por def de árbol.)

Definamos $T' \subseteq T$ el sub-árbol cuyos vertices son $V - \{x\}$ y cuyos lados son $E - \{x, y\}$. Pues T' tiene k vértices, $\chi(T') = 2$. Ahora bien, aplicando cualquier coloreo propio de dos colores en $\{0, 1\}$ a los vértices de T' , si hacemos $c(x) = 1 - c(y)$ obtenemos un coloreo propio de T .

$\therefore \chi(T) = 2$ para todo árbol T .

Por lo tanto, el algoritmo más rápido que devuelve el número cromático de un árbol es:

Algoritmo.

(1) Output 2.

Problem 2 (Ejercicio 6)

G contiene un C_{2r+1} y por lo tanto $\chi(G) \geq 3$. Es fácil dar un coloreo de cuatro colores para G_{2r+1} ; utilice los tres colores necesarios para el C_{2r+1} contenido en x_0, \dots, x_{2r} y construya el resto de los valores desde allí; se llega por necesidad a cuatro colores. Entonces $\chi(G) \leq 4$. Mostraremos que $\chi(G) \neq 3$.

Asuma que existe un coloreo propio de tres colores. El C_{2r+1} contenido en x_0, \dots, x_{2r} debe colorearse con tres colores; digamos, con 0 en los índices pares, 1 en los impares, y 2 en el caso x_{2r} .

De esto se sigue que $c(y_i) = 1, c(z_i) = 2$ donde i es par (podríamos invertir esta asignación pero da lo mismo); $c(y_i) = 0, c(z_i) = 2$ si i impar; excepto en el caso $c(y_{2r}) = 0, c(z_{2r}) = 1$.

Habiendo coloreado cada triángulo x_i, y_i, z_i , queda un solo color posible para cada w_i ; a saber, $c(w_i) = 0$ si i par; $c(w_i) = 1$ si i impar, y el caso especial $c(w_{2r}) = 2$.

Cada w_i se conecta con p . Pero los w_i ya tienen tres colores en total. (Y observe que para todo r , G_r siempre tendrá al menos tres w_i) Entonces no hay forma de dar un coloreo para p que sea propio.

Pues $\chi(G) \leq 4$ y $\chi(G) \neq 3$ tenemos que $\chi(G) = 4$.

Problem 3 Dado n natural, sea G_n el grafo con vértices $1, 2, \dots, n$ y cuyos lados son $\{i, j\}$ tales que $(i, j) = 1$ (coprimos). Calcular $\chi(G_{100})$.

Es fácil notar que 1 y los z números primos en $2, 3, \dots, n$ forman un K_{z+1} y por lo tanto $\chi(G_n) \geq z + 1$. Damos un coloreo propio con $z + 1$ colores; a saber,

$$c(i) = \begin{cases} 1 & i = 1 \\ \min_p \{p \text{ primo y } p \mid i\} & i > 1 \end{cases}$$

Que es propio se sigue de que $c(i) = c(j) \Rightarrow \gcd(i, j) = 1$ lo cual implica que no comparten ningún primo en su factorización; y en particular, no comparten el mínimo. Todo número no primo se expresa con el color del menor primo que está en su descomposición; es decir, no utiliza un color propiamente nuevo. Luego los únicos colores usados son los que identifican a los z primos y al 1. Es decir, es un coloreo propio de $z + 1$ colores.

Conclusión. $\chi(100) = 25 + 1 = 26$ (Hay 25 primos entre 1 y 100).

Problem 4 Sea Q_n el Queen graph. Probar que si n no es coprimo con 6, entonces $\chi(G) = n$.

Sea $v_{00}, \dots, v_{(n-1)(n-1)}$ un orden sobre los n^2 vértices de Q_n , donde damos a entender que v_{ij} es el vértice que está en la casilla (i, j) del tablero. Asuma que $\gcd(n, 6) = 1$. Naturalmente, cada columna $v_{0i}v_{1i} \dots v_{(n-1)i}$, cada fila $v_{i0}v_{i1} \dots v_{i(n-1)}$, y cada diagonal $v_{ij}v_{(i+1)(j+1)} \dots$ necesitan n colores porque cada cual es un subgrafo K_n . Damos el siguiente coloreo:

$$c(v_i) = i \pmod n$$

Daremos una fórmula para los lados. En particular, la k -ésima horizontal es de la forma $v_{nk}, v_{nk+1}, \dots, v_{nk+(n-1)}$. Luego

$$E_H = \{v_{nk}v_{nk+i} : k, i \in \mathbb{N}_0, k < n, i < n\}$$

La i -ésima vertical es de la forma $v_i, v_{n+i}, v_{2n+i}, \dots, v_{(n-1)n+i}$. Es decir,

$$E_V = \{v_{nk+i} : k, i \in \mathbb{N}_0, k < n, i < n\}$$

Finalmente, las diagonales son de la forma $v_{nk+j}, v_{n(k+1)+(j+1)}, \dots$,

$$E = \{v_{nk+j}v_{n(k+p)+(j+p)} : k \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}, k < n, j < n\}$$

Problem 5 Sea $G = (V, E)$ un grafo coloreado por \mathcal{G} con t colores y V_i el conjunto de colores con el color i . Diga V o F:

Nota. Este problema es lindo para ver diversas permutaciones del orden V_0, \dots, V_{t-1} y entender que algunas mejoran el rendimiento de \mathcal{G} y otras no. En directa relación con el **Theorem 7**.

(1) Si se ordenan los vértices poniendo primero los de V_0 , luego los de V_1 , y así hasta V_{t-1} , entonces \mathcal{G} con ese orden colorea con exactamente t colores.

Pues \mathcal{G} asigna un color mínimo a cada vértice, sólo asigna el color i a un vértice si éste tiene vecinos de color $0, 1, \dots, i-1$. Es decir que cada $v \in V_i$ tiene un vecino en V_j para cada $j < i$. Luego V_0 se colorea con 0, y el único color disponible para V_1 es 1, y el único disponible para V_2 es 2, etc. Se usan exactamente t colores.

(2) Suponga $t \geq 3$. Si se ordenan los vértices poniendo primero los de V_0 , luego los de V_1 , y así hasta V_{t-3} , y se ponen luego los de V_{t-1}, V_{t-2} . Entonces correr \mathcal{G} con este nuevo orden colorea G con exactamente t colores.

Recordemos otra vez que si un vértice está en V_i , entonces tiene vecinos en cada V_j tal que $j < i$. Esto significa que usaremos $t-3$ colores para colorear el orden desde V_0 hasta V_{t-3} . Ahora bien, V_{t-1} no puede tener los colores en $\{0, \dots, t-3\}$, y por lo tanto se colorea con el color $t-2$. Finalmente, V_{t-2} tiene vértices asociados con todos sus predecesores, y sabemos que V_{t-1} tiene lados con V_{t-2} . Entonces los colores $\{0, \dots, t-2\}$ no están disponibles. Se usa el color $t-1$ y \mathcal{G} colorea con exactamente t colores.

(3) Suponga $t \geq 3$. Si se ordenan los vértices poniendo primero los de V_0 , luego los de V_1 , etc. hasta V_{t-4} ; y luego se ponen los de V_{t-2} , los de V_{t-3} , y al final los de V_{t-1} , entonces corriendo \mathcal{G} con este nuevo orden colorea G con exactamente t colores.

El razonamiento es igual. Hasta V_{t-4} tenemos que usar $t-4$ colores. Es decir que V_{t-2} tiene un solo color posible; a saber, $t-3$.

Ahora bien, todo vértice en V_{t-3} tiene vecinos en V_0, \dots, V_{t-4} . Pero si bien todo vértice en V_{t-2} tiene un vecino en V_{t-3} , no necesariamente todo vértice en V_{t-3} tiene un vecino en V_{t-2} .

Entonces es posible que parte de los vértices de V_{t-3} se colorean con $t-2$ (si tienen vecinos en V_{t-2}) y otros con $t-3$ (si no tienen vecinos en V_{t-2}).

Finalmente, debemos colorear los de V_{t-1} . El mejor caso posible es que los vértices de V_{t-3} que son vecinos de V_{t-1} sean los de color $t-3$ (los que no son vecinos de V_{t-2}). En este caso, se colorea V_{t-1} con el color $t-2$.

Pues en el mejor de los casos, \mathcal{G} usa $t-1$ colores, es falso que en este orden \mathcal{G} usa exactamente t colores.

Problem 6 (10) *Pruebe que el gráfico en la figura tiene número cromático 4.*

Pues $C_5 \subseteq G$, $\chi(G) \geq 3$. Es fácil dar un coloreo de 4 colores. Ahora solo queda ver que un coloreo de 3 colores no es posible.

Denotemos con c_1, \dots, c_5 los vértices que conforman el subgrafo C_5 ; con w el vértice central del subgrafo estrella, y con x_1, \dots, x_4 cada uno de los vértices no centrales del subgrafo estrella.

Asuma que existe un coloreo propio de tres colores sobre G . Asumamos, sin p.d.g., que los colores que colorean c_1, \dots, c_5 son $\{0, 1, 2\}$. Claramente, todos los otros vértices deben colorearse con colores de este conjunto.

Sea $\varphi \in \{0, 1, 2\}$ el color asignado a w , el vértice central de la estrella. Haremos uso de una propiedad que no es difícil de probar (y es trivial observar):

Propiedad. En un C_5 , cada vértice tiene dos vértices no adyacentes. En un coloreo propio de tres colores de un C_5 , todos los vértices comparte color con un vértice no adyacente y difiere del otro, excepto por uno que no comparte color con ninguno de los vértices.

Asumamos, sin p.d.g., que c_5 es el vértice del $C_5 \subseteq G$ que no comparte color con ninguno de los vértices adyacentes.

Pues $c(w) = \varphi$, tenemos que existen dos colores posibles para cada x_1, \dots, x_4 ; a saber, $\{0, 1, 2\} - \varphi$. Pero cada vértice x_1, \dots, x_4 se une a un par de vértices del C_5 que *no* son adyacentes en el C_5 . En particular, existe un x_i que se une a c_5 y c_j para algún $1 \leq j < 5$. Pero dado que el color de c_5 y c_j difieren, hay dos colores que x_i no puede tomar. Luego existe un único color disponible para x_i , llamémosle ψ , donde $\varphi \neq \psi$ necesariamente.

Problem 7 Sea $G = (V, E)$ un grafo tal que $\chi(H) < \chi(G)$ para todo $H \subseteq G$. Probar que $\chi(G) \leq \delta + 1$.

Asuma que $\chi(G) > \delta + 1$. Esto implica que $\delta < \chi(G) - 1$. Sea G' el grafo inducido por un vértice de grado δ y todos sus vecinos. Es trivial observar que en el peor caso este grafo tiene $\chi(G') = \delta + 1$. Pues G es crítico, tendríamos que $\delta + 1 < \chi(G)$, lo cual contradice la hipótesis.

Pues existe al menos un caso que contradice la hipótesis, y la hipótesis es general, la contradicción es general. Es decir, $\chi(G) \leq \delta + 1$.

6.2 Practico 2

Problem 8 Cambie la definición de network permitiendo que cada lado tenga dos capacidades asociadas, $c_1(\vec{xy})$ y $c_2(\vec{xy})$, con $c_1(\vec{xy}) \leq c_2(\vec{xy})$ para todo $\vec{xy} \in E$. Cambie la definición de flujo agregando la restricción de que $c_1(\vec{xy}) \leq f(\vec{xy}) \leq c_2(\vec{xy})$.

Encuentra una network donde pueda no existir ningún flujo de s a t .

Sea $\mathcal{N} = (V, E, c_1, c_2)$ una network bajo la nueva definición. Queremos construir \mathcal{N} de modo tal que no exista ninguna f que satisfaga simultáneamente las siguientes propiedades:

- $c_1(\vec{xy}) \leq f(\vec{xy}) \leq c_2(\vec{xy})$
- $in_f(x) = out_f(x) \forall x \in (V - \{s, t\})$
- $out_f(s) \geq in_f(s)$
- $in_f(t) \geq out_f(t)$

Problem 9 Sea $\mathcal{N} = (V, E, c)$ una network con max flow \mathcal{M} . Sea $\mathcal{N}' = (V, E, c')$ donde $c'(\vec{xy}) = c(\vec{xy}) + k$ para toda $\vec{xy} \in E$. Determine si el max flow \mathcal{M}' de \mathcal{N}' es mayor a \mathcal{M} y (de serlo) cuánto.

Sea f un flujo maximal de \mathcal{N} ; es decir, un flujo tal que $v(f) = \mathcal{M}$. Luego $out_f(s) - in_f(s) = \mathcal{M}$ (por definición).

Sea f' un flujo sobre \mathcal{N}' definido como $f'(\vec{xy}) = f(\vec{xy}) + k$ para todo $\vec{xy} \in E$, excepto cuando $y = s$, donde se define simplemente como $f(\vec{xs})$. Observe que

$$\begin{aligned} v(f') &= \sum_{x \in V \wedge \vec{sx} \in E} f'(\vec{sx}) - \sum_{x \in V \wedge \vec{xs} \in E} f'(\vec{xs}) \\ &= \sum_{\dots} [f(\vec{sx}) + k] - \sum_{\dots} [f(\vec{xs})] \\ &= v(f) + kw \\ &= \mathcal{M} + kw \end{aligned}$$

donde w es la cantidad de lados que salen de s . Esto basta para probar que el max flow de \mathcal{N}' es al menos $\mathcal{M} + k$, y aumenta proporcionalmente a la cantidad de lados que salen de s .

Problem 10 (Ejercicio 3)

Sea $\mathcal{N} = (V, E, c)$ una network tal que existen loops y lados bidireccionales y sea $\mathcal{N}' = (V, E', c)$ la misma network pero con todos los loops y lados bidireccionales removidos; es decir, $E' = E - \{\vec{xy} \in E : x = y \vee \vec{yx} \in E\}$. Sea f' un flujo sobre \mathcal{N} . Observe que, si existen lados bidireccionales o loops que involucren a s , tenemos

$$\begin{aligned}
v(f) &= \sum_{\dots} f(\overrightarrow{sx}) - \sum_{\dots} f(\overrightarrow{xs}) \\
&= \left[\sum_{\dots} f(\overrightarrow{sx}) + \sum_{\text{bidirecciones}} f(\overrightarrow{sx}) + f(\overrightarrow{sx}) \right] - \left[\sum_{\dots} f(\overrightarrow{xs}) + \sum_{\text{bidirecciones}} f(\overrightarrow{xs}) + f(\overrightarrow{xs}) \right] \\
&= \sum_{\text{respecto a } E'} f(\overrightarrow{sx}) - \sum_{\text{respecto a } E'} f(\overrightarrow{xs}) \\
&= v(f) \text{ respecto a } \mathcal{N}'
\end{aligned}$$

En otras palabras, los loops y las bidirecciones no contribuyen al valor de un flujo, y el valor de todo flujo f en un grafo con loops y bidirecciones es igual al valor de ese mismo flujo sobre el grafo sin loop y bidirecciones. Observe que la identidad indica lo mismo en el sentido inverso; es decir $v(f)$ sobre \mathcal{N}' equivale a $v(f)$ sobre \mathcal{N} .

Luego, si tenemos una caja negra que encuentra flujos maximales para grafos sin loops y bidirecciones, simplemente la usamos para encontrar el flujo maximal de \mathcal{N}' , y ese mismo flujo (cualquiera sea el valor que asigne a los loops y bidirecciones) será maximal en \mathcal{N} .

Problem 11 (Ejercicio 4)

Usaremos s para denotar la única fuente de la network que queremos construir, y s_1, \dots, s_n las n fuentes de la network dada.

La primera cuestión obvia es que \overrightarrow{sx} debe existir para todo x tal que $\overrightarrow{s_i x}$ existe. Es decir, si un nodo puede recibir flujo de alguna de las n fuentes del grafo original, la fuente de nuestro grafo construido debe poder transferir flujo a ese nodo.

La segunda cuestión obvia es que si \mathcal{F} es la cantidad total de flujo que puede recibir x desde las n fuentes originales, la fuente s de nuestro grafo construido debe poder ser capaz de transferir \mathcal{F} a x . Es decir, $c(\overrightarrow{sx})$ debe hacerse igual a $c(\{s_1, \dots, s_n\}, x)$. Es fácil ver que estas dos condiciones concluyen el problema.

Transformar k resumideros t_1, \dots, t_k en uno solo es análogo.

Problem 12 (Ejercicio 6) Algoritmo:

- *Buscar todos los cortes*
- *Calcular sus capacidades*
- *Retornar la menor capacidad*

Por max-flow min-cut, sabemos que este algoritmo devuelve el max flow. Deben computarse todos los subconjuntos $S \subseteq V - \{t\}$ que contengan a s . Hay 2^n subconjuntos de V ; si excluimos t , hay 2^{n-1} subconjuntos de V ; y si aseguramos que s se encuentre en ellos, hay 2^{n-2} .

Por cada uno de estos cortes, debemos computar su capacidad, lo cual involucra sumar las capacidades de todos los lados desde el conjunto hacia afuera del conjunto. Es evidente que $\frac{n(n-1)}{2}$, la máxima cantidad de lados, es una cota a la cantidad de capacidades a sumar. Esto nos dice que la complejidad del cálculo de las capacidades es *a lo sumo* $O(n^2)$. Pues esto es menor a la complejidad exponencial del primer paso, no hace falta considerarlo más.

El último paso (retornar la menor capacidad) también requiere 2^{n-1} pasos. La complejidad del algoritmo es $O(2^{n-2})$.

Problem 13 (Ejercicio 7)

Por min-cut max-flow, el valor de cualquier flujo maximal es la capacidad del corte minimal. En particular, $S = \{s\} \cup \{x \in V : \exists f\text{-c.a. de } s \text{ a } x\}$ es un corte minimal.

Si todos los lados tienen capacidad par, la suma de las capacidades de los lados que van desde hacia fuera del corte minimal es una suma par. ■

6.3 Practico 4 (Dinitz)

$sA : 144/44$ $sB : 96$ $sN : 150$
 $AC : 100/20$ $AD : 70$ $AF : 85$ $AL : 17$
 $BC : 10$ $BD : 17$ $BG : 102$ $BL : 35$
 $Ct : 80/0$ $CJ : 5$ $Dt : 80$
 $EC : 100$ $ED : 15$ $EG : 10$
 $FH : 15$ $FK : 100$ $Gt : 80$
 $Ht : 20$ $HM : 40$ $ID : 22$ $IG : 10$
 $JA : 5$ $Kt : 120$ $LH : 30$ $LK : 60$
 $Mt : 30$ $NE : 110$ $NI : 40$

El primer network auxiliar es