# 1 Clase 1

## 1.1 Info de la materia

*Mail del profesor.* daniel.penazzi@unc.edu.ar

*Temas a ver.*

- Coloreo de grafos
- Flujos en network
- Matchings
- Códigos de correción de errores
- P-NP (Complejidad computacional)
- Inteligencia artifical

La materia tiene tres partes: teórico, práctico y proyecto de programación. Solo la parte práctica tiene promoción (se explica abajo). El final tiene parte teórica y parte práctica. La parte teórica es demostrar uno de tres teoremas dados a priori. La parte práctica tiene ejercicios de demostración o pensamiento y de resolución de problemas.

La parte práctica se promociona si se aprueban los dos parciales, con cualquer nota $\geq 4$. De promocionarlo, la parte práctica del final no es necesaria.

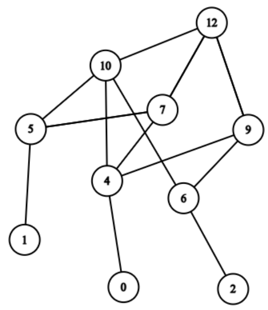
El proyecto de programación tiene dos partes. La primera es leer un grafo y cargar los datos al programa. La segunda es un problema de coloreo de grafos. La fecha de entrega de la parte uno es en dos o tres semanas a partir de hoy (13/03). La parte importante es la parte 2.

La biliografía está en el programa 2023.

## 1.2 Grafos

**Definition 1** *Una grafo es una 2-upla $G = (V, E)$ con $V$ un conjunto cualquiera (finito) y $E \subseteq \{A \subseteq V : |A| = 2\}$*

> **Nota.** La restricción de finitud es sólo de esta materia.




Los elementos de $V$ se llaman vértices o nodos. Los elementos de $E$ se llaman lados o aristas. Por convención, a menos que digamos lo contrario, es que $|V| = n$ y $|E| = m$.

**Definition 2** *Un camino en un grafo $G = (V, E)$ es una sucesión de vértices $v_1, \ldots, v_r$, con $v_i \in V$ para todo i, tal que $\left\{v_j, v_{j+1}\right\} \in E$ para todo $1 \leq j < r$.*

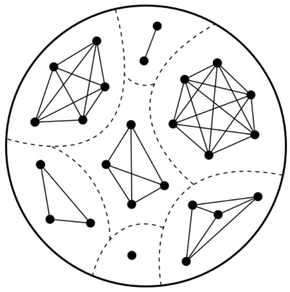
Dado un camino $v_1, \ldots, v_r$, si $v_1 = x, v_r = y$, decimos que es un camino de $x$ a $y$. Para todo $G = (V, E)$ definimos la relación binaria

$$\sim \ := \left\{(x, y) \in V^2 : \text{ existe un camino de } x \text{ a } y \right\}$$

Es decir, $x \sim y$ denota la relación de que existe un camino entre $x$ e $y$. Es trivial comproabar que $\sim$ es una relación de equivalencia. Cada clase de equivalencia $a/\!\sim$ con $a \in V$ se llama una componente conexa de $G$.

**Definition 3** *Decimos que G es conexo si y solo si tiene una sola componente conexa. Es decir, si $|V \sim \ | = 1$.*

El profesor no mencionó esto pero es lindo recordar (si alguien ha cursado lógica) que el conjunto de clases de equivalencia $A/R$ de un conjunto a sobre una relación binaria $R$ puede en sí mismo darse como un grupo de grafos disconexos. Por ejemplo, abajo se dan los grafos de un espacio cociente con siete clases de equivalencia; cada par de vértices unidos por un lado corresponde a dos elementos equivalentes.



Fíjense que de esto se sigue un dato curioso (aunque tal vez irrelevante): Si $G = (V, E)$ es un grafo conexo con $n$ vértices, el grafo que describe la clase de equivalencia de $V$ es $K_n$.

**Definition 4** *Decimos que un grafo $H = (W, F)$ es un subgrafo de $G = (V, E)$ si $W \subseteq V, F \subseteq E$.*

A veces usamos $H \subseteq G$ para decir "$H$ es un subgrafo de $G$", pero no debe entenderse por esto que $H$ y $G$ son conjuntos.

Observe que no todo $W \subseteq V, F \subseteq E$ satisfacen que $(W, F)$ es un grafo. Por ejemplo, si $F = \emptyset$ tenemos $F \subseteq E$, pero $F$ no cumple la propiedad de que todos sus elementos sean conjuntos con cardinalidad 2.

**Definition 5 (Densidad)** *Decimos que un grafo es denso si $m = O(n^2)$. Decimos que un grafo es raro si $m = O(n)$.*

**Random fact**. Recuerde que "raro" no sólo significa "inusual" sino que es el antónimo de "denso". La etimología inglesa es más interesante: La palabra *Weird* (raro) significaba, en la edad media, destino. Por eso, en la balada medieval *True Thomas*, se lee "Weird shall never daunton me": El destino nunca ha de asustarme. Se debe a una antigua leyenda nórdica en la cual las *Weird sisters*, diosas terribles, tejían el destino de los hombres. Si le da curiosidad:

https://en.wikipedia.org/wiki/Three$_{Witches}$

**Definition 6** *Dado $G = (V, E)$, si $x \in V$, $\Gamma(x) := \{y \in V : \{x, y\} \in E\}$ se llama el vecindario de $x$.*

Si $y \in \Gamma(x)$, decimos que $y$ es un vecino de $x$. El grado de $x$, denotado $d(x)$, es la cantidad de vecinos de $x$; es decir, $d(x) = |\Gamma(x)|$. Usamos $\delta = \min\{d(x) : x \in V\}$ y $\Delta = \max\{d(x) : x \in V\}$. Si $\delta = \Delta$ se dice que $G$ es regular. Por ejemplo, los grafos cíclicos y los completos son regulares.

## 1.3 Repaso de BFS y DFS

*A completar.*

## 1.4 Los grafos $K_n$ y $C_n$

- $K_n$ : El grafo completo en $n$ vértices se define

$$K_n = (\{1, 2, \ldots, n\}, \{\{x, y\} : x, y \in \{1, 2, \ldots, n\}\})$$

  Es el grafo de $n$ elementos donde todos los vértices están conectados unos con otros. Resulta que que $m = \binom{n}{2}$. Lo cual implica que $m = O(n^2)$.

- $C_n$: El grafo cíclico

$$C_n = (\ 1, 2, \ldots, n\ , \{12, 23, 34, \ldots, (n-1)n, n1\})$$

  Una observación es que $C_3 = K_3$; pero de allí en adelante difieren.

## 1.5 Coloreo de grafos

**Definition 7** *Un coloreo propio de $G = (V, E)$ con $k$ colores es una función*

$$C : V \mapsto A$$

*con $|A| = k$ y tal que $xy \in A \Rightarrow C(x) \neq C(y)$.*

Intuitivamente, un coloreo asigna $k$ propiedades a los vértices de modo tal que ningún par de grafos adyacentes cumple la misma propiedad.

> **Nota.** Hace unos meses escrbí un algoritmo de coloreo en C. Es el segundo algoritmo dado en esta entrada:
>
> https://slopezpereyra.github.io/2023-10-29-Hamiltonian/
>
> No prometo que sea muy prolijo o esté bien explicado; ya en general uno es tonto y encima de tonto no sabe de grafos. Pero tal vez a alguien le sirva, qué se yo.

**Definition 8** *El número cromático de un grafo $G = (V, E)$ es*

$$\chi(G) = \min_k (\exists \text{ coloreo propio de } G \text{ con } k \text{ colores})$$

No se conoce un algoritmo polinomial que calcule $\chi(G)$. El proyecto será dar un algoritmo polinomial que se aproxime a $\chi$.

## 1.6 Un algoritmo greedy de coloreo

Damos un algoritmo que colorea un grafo $G$ con vértices $v_1, \ldots, v_n$ y colores $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Para que el algoritmo funcione, los colores y los vértices deben tener un orden (en nuestro caso dado por los subíndices).

> **Invariante del algoritmo.** Los coloreos parciales son propios. Es decir, a medida que se va coloreando iterativamente el grafo, en cada paso el coloreo resultante debe ser propio.
>
> **Pasos del algoritmo**.
>
> *(1)* $C(v_1) = c_1$.
>
> *(2)* $C(v_k)$ = mínimo color que mantenga un coloreo propio (que satisfaga el invariante).

## 1.7 Acotando $\chi$

Generalmente nos interesa encontar $\chi(G)$ dado un grafo $G = (V, E)$. Damos unas pautas y observaciones generales para acotar $\chi(G)$ y así facilitar su hallazgo.

**Lemma 1** *Si existe un coloreo propio de $G = (V, E)$ con $k$ colores, entonces $\chi(G) \leq k$.*

> **Proof.** Es trivial por definición de $\chi$ ($\chi$ es el mínimo $k$ en el conjunto de los coloreos posibles de $G$ con $k$ colores).

El lema significa que para acotar $\chi$ por arriba solo basta dar un coloreo con $k$ colores.

**Lemma 2** *Si $H$ es un subgrafo de $G$, $\chi(H) \leq \chi(G)$.*

Este lema nos dice que podemos acotar $\chi$ por abajo si encontramos un subgrafo de $G$ cuyo número cromático es conocido. Es fácil ver que $\chi(K_r) = r$ para todo $r > 1$. Es menos directo pero en clase se demostró que

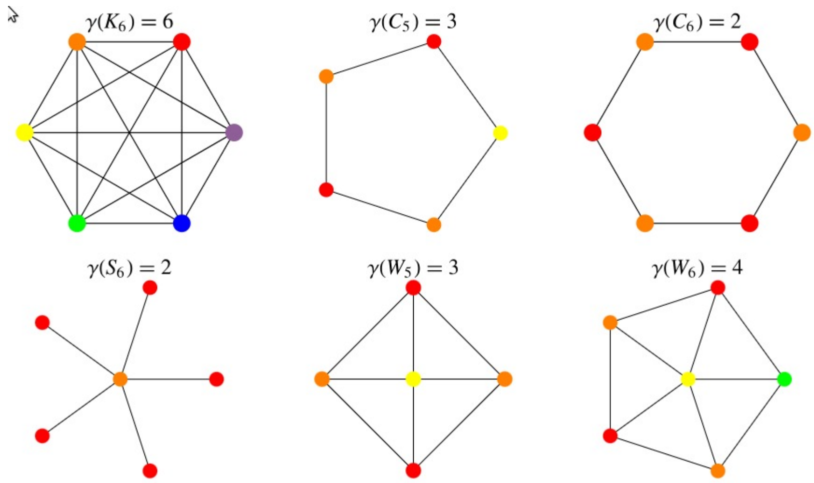
$$\chi(C_r) = \begin{cases} 2 & r \mod 2 \equiv 0 \\ 3 & r \mod 2 \equiv 1 \end{cases}$$

Esto, en combinación con el último lema, nos dice que podemos acotar $\chi(G)$ por abajo simplemente observando si $G$ contiene algún $C_r$ o $K_r$ como subgrafo. En el caso $C_r$, la cota inferior dada en el caso par, con $\chi(C_r) = 2$, es trivial (todo grafo necesita al menos dos colores). Por eso nos quedamos con el siguiente teorema:

**Theorem 1** *Sea $G = (V, E)$ un grafo. Si $C_r \subseteq G$ con $r$ impar entonces $\chi(G) \geq 3$. Si $K_r \subseteq G$ entonces $\chi(G) \geq r$.*

**Theorem 2** *Si $\chi(G) \geq 3$, entonces $G$ contiene un ciclo impar.*

**Proof.** Damos una prueba algorítmica. Llamamos a a este algoritmo "bipartito" o "2-color". En tiempo polinomial, determina si $G$ se puede colorear con dos colores; si $\chi(G) = 2$ da un coloreo, de otro modo devuelve un ciclo impar que es subgrafo de $G$. (El profe no llegó a dar la prueba.)




## 1.8 ¿Para qué acotar $\chi$? Para encontar $\chi$!

En general no es fácil mostrar que $\chi(G) = \varphi$ de manera directa. Uno puede mostrar entonces que $\varphi_l \leq \chi(G) \leq \varphi_u$ usando las acotaciones vistas antes. Si sucede que $\varphi_l = \varphi_u$ qué bonito hemos encontrado $\chi(G)$. Si este no es el caso de igual modo estamos restringiendo el espacio de soluciones posibles. Por ejemplo, si $3 \leq \chi(G) \leq 4$, tenemos que $\chi(G) = 3$ o $\chi(G) = 4$, y a veces es fácil ver (y demostrar) cuál de los casos es correcto.