1 Comentario preliminar

Usamos φ para denotar un elemento arbitrario del alfabeto $\{\#, *\}$. Usamos la notación $f \sim (n, m, \varphi)$ para decir "f es de tipo (n, m, φ)".

2 Guia 2 : Infinituplas

Problem 1 *Demostrá por inducción: Para todo $x \in \mathbb{N}$ hay una infinitupla única $\overrightarrow{s} \in \omega^{[\mathbb{N}]}$ tal que*

$$x = \prod_{i=1}^{\infty} pr(i)^{s_i}$$

El caso base es trivial. Supongamos que la afirmación se cumple para todo $n \leq k$. El teorema fundamental de la aritmética asegura que $k + 1 = p_1 \cdot \ldots \cdot p_m$, donde p_i es primo. Supongamos que la factorización anterior está ordenada (es decir, $p_{j+1} > p_j$ para todo $j \in [1, m]$). Entonces $k + 1 = p_m \cdot q$ con $q = p_1 \cdot \ldots \cdot p_{m-1}$.

Subdemostración. Demostraremos $k + 1 = p_m \cdot q \Rightarrow q \leq k$. Supongamos que la premisa se cumple y la consecuencia no. Dado que $q > k$, tenemos $q \cdot x > k + 1$ para todo $x > 1$. Entonces $q \cdot x > k + 1$ para todo x que sea primo. Entonces $q \cdot p_m \neq k + 1$, lo cual es una contradicción. Entonces, si $k + 1 = q \cdot p_m$, tenemos $q \leq k$. ■

Dado que $q \leq k$, mediante la hipótesis inductiva, q toma la forma productoria del teorema anterior. Entonces $k+1 = q \cdot pr(j)$ donde $pr(j) = p_m$. Entonces el teorema se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$.

Problem 2 *Prove that $S = \{(x, @^x) : x \equiv 0 \mod 2\}$ is $\{@\}$-effectively enumerable.*

Prueba corta. Se hace demostrando que S es Σ-efectivamente computable. Esto es fácil: se da un procedimiento que verifica, dado un input (x, α), si x es par y si $\alpha = @^x$. Demostrando que es Σ-efectivamente computable, demostramos que es Σ-enumerable.

Prueba larga. Damos explícitamente el programa que enumera a S.

Lo hacemos notando que $*^{\leq}$ es Σ-efectivamente computable bajo cualquier orden $\leq$ de Σ, ya que la función es bastante algorítmica por naturaleza. (Si no se convence, escriba el procedimiento efectivo de esta función.) Sea $\mathbb{P}_{\text{número a palabra}}$ el procedimiento que, dado un valor $x \in \omega$, calcula $*^{\leq}(x)$. Entonces definimos $\mathbb{P}$ como el procedimiento que tomando un valor $x \in \omega$ hace lo siguiente:

(0) Computa $(x)_1, (x)_2$.
(1) Usa $\mathbb{P}_{\text{número a palabra}}$ para calcular $*^{\leq}(x_2)$ y lo guarda en α.
(2) Comprueba si $(x)_1$ es par; si lo es continúa, si no lo es va a *(5)*
(3) Comprueba si $\alpha = @^{(x)_1}$. Si lo es, continúa, si no lo es va a *(5)*
(4) Devuelve (x_1, α) y termina.
(5) Devuelve $(0, \varepsilon)$ y termina.

Ejemplo. Considera $\mathbb{P}(6)$. En *(0)*, esto asigna $x_1 = 1$, $x_2 = 1$. La primera palabra en Σ es @. El programa encuentra la tupla (1, @. Como 1 es impar va a *(5)* y devuelve $(0, \epsilon)$.

Considera la tupla $(2, @@@@)$. Sabemos que existe algún $x \in \omega$ tal que $\mathbb{P}(x) = (2, @@@@)$ (aquí uso la notación matemática de manera flexible). Dado que @@@@ es la cuarta palabra en Σ, x es tal que $x = \langle 2, 4, (x)_3, (x)_4, \ldots\ldots \rangle$. Por ejemplo, $2^2 + 3^4 = 85$ o $2^2 + 3^4 + 5^{17} = 762939453210$ satisfarán esto.

3 Guia 4

Problem 3 *Si M es una máquina de Turing, entonces δ es una función Σ-mixta.*

Se dice que una función es una función Σ-mixta si $\mathcal{D}_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^m$ para algunos $n, m \geq 0$ y $\mathcal{I}_f \subseteq \omega$ o $\mathcal{I}_f \subseteq \Sigma$. La función δ no satisface ninguna de estas propiedades; por ejemplo, su dominio es un conjunto de estados $Q \times \Gamma \nsubseteq \Sigma^{*m}$.

4 Guías 5 y 6

Problem 4 *Encuentre funciones que definan recursivamente a $R = \lambda t \left[2^t\right]$.*

Seamos claros con los tipos. Pues $R \sim (1, 0, \#)$ y la recursión se hará claramente sobre una variable numérica, debemos encontrar $f \sim (0, 0, \#), g \sim (2, 0, \#)$ tales que $R(0) = f$ y $R(t+1) = g\,(R(t), t)$. Evidentemente $R(0) = 1 \Rightarrow f = C_1^{0,0}$. Puesto que $R(t+1) = 2^{t+1} = 2^t \times 2$ tenemos que $g = \lambda x\,[2 \cdot x] \circ \left[p_1^{2,0}\right]$.

> *Observación.* Aunque g involucra, a fines prácticos, una sola variable numérica, la definimos de modo tal que su dominio es ω^2. Esto es para respetar los tipos exigidos por la recursión primitiva.

Problem 5 *Lo mismo para $R = \lambda t\,[t!]$.*

Los tipos de f y g serán igual que en el ejercicio anterior. Pero como esta recursión sí involucra al factor t, el segundo argumento de g ya no será superfluo. Es fácil ver que $f = C_1^{0,0}$. Dado que $R(t+1) = t!(t+1)$ tenemos que

$$g = \lambda xy\,[x \cdot y] \circ \left[p_1^{2,0}, Suc \circ p_2^{2,0}\right]$$

(Recuerde que para recursión de función numérica sobre variable numérica, requerimos $R(t+1, \vec{x}, \vec{\alpha}) = g(R(t), t, \vec{x}, \vec{\alpha}))$.

Problem 6 *Lo mismo para* $R = \lambda t x_1 \alpha_1 \alpha_2\,[t \cdot x_1]$.

Seamos rigurosos con los dominios y observemos que la f y la g buscadas son tal que $f \sim (1, 2, \#), g \sim (3, 2, \#)$. Es evidente entonces que $f = C_0^{1,2}$. Pues $R(t+1, x, \alpha, \beta) = t \cdot x_1$ tenemos simplemente que

$$g = \lambda xyz\alpha\beta\,[x \cdot y] \circ \left[p_2^{3,2}, p_3^{3,2}\right]$$

Problem 7 *Sea* $\Sigma = \{@, !, ?\}$. *Encuentre* f, g *tales que* $R(f, g) = \lambda t x_1\,\left[!@!!!!?^t\right]$.

Pues hacemos recursión sobre una variable numérica de $R(f, g) \sim (2, 0, *)$, requerimos que $f \sim (1, 0, *), g \sim (2, 1, *)$. Observe que $R(f, g)(0, x_1) = !@!!!!\varepsilon$. Luego $f = C_{!@!!!!}^{1,0}$. Observe que $R(t+1, x) = !@!!!!?^t ?^{t+1} = R(t)?^{t+1}$. Luego

$$g = \lambda\alpha\beta\,[\alpha\beta] \circ \left[p_3^{2,1}, \lambda\,[\alpha^x] \circ \left[C_?^{2,1}, p_1^{2,1}\right]\right]$$

Es fácil observar, reemplazando las variables, que

$$\lambda\alpha\beta\,[\alpha\beta] \circ \left[p_3^{2,1}, \lambda x\alpha\,[\alpha^x] \circ \left[Suc \circ p_1^{2,1}, C_?^{2,1},\right]\right](t, x, R(t)) = R(t)?^{t+1}$$

Problem 8 *Si* $\Sigma = \{@, !, ?\}$, *encuentre* $f, \mathcal{G}$ *tales que* $R(f, \mathcal{G}) = \lambda\alpha_1\alpha\,[|\alpha|_1 + |\alpha|_@]$

Otra vez seamos explícitos con los dominios. Pues $R(f, g) \sim (0, 2, \#)$ tenemos $f \sim (0, 1, \#), g \sim (1, 2, \#)$.

Es evidente que $R(f, \mathcal{G}), \alpha_1, \epsilon) = |\alpha|$. Luego $f = \lambda\alpha\,[|\alpha|]$. Veamos que

$$R(\alpha_1, \alpha a) = \begin{cases} R(\alpha_1, \alpha) & a \neq @ \\ R(\alpha_1, \alpha) + 1 & a = @ \end{cases}$$

Tomando la familia indexada de funciones $\mathcal{G} = \left\{(!, p_1^{1,2}), (?, p_1^{1,2}), (@, Suc \circ p_1^{1,2})\right\}$, obtenemos efectivamente que $R(f, \mathcal{G})$.

Problem 9 *Encuentre $f, \mathcal{G}$ tales que $R(f, \mathcal{G}) = \lambda\alpha_1\alpha\ [\alpha_1\alpha]$*

Evidentemente, $f = \lambda\alpha\ [\alpha]$. Pues $R(f, \mathcal{G})(\alpha_1, \alpha a) = \alpha_1\alpha a$, observamos que $\mathcal{G} = \left\{a \in \Sigma : (a, d_a \circ p_3^{0,3})\right\}$. Entonces, es evidente que

$$\begin{aligned} R(f, \mathcal{G})(\alpha_1, \alpha a) &= \mathcal{G}_a\ (\alpha_1, \alpha, R(f, \mathcal{G})(\alpha_1, \alpha)) \\ &= (d_a \circ p_3^{3,0)})\ (\alpha_1, \alpha, R(f, \mathcal{G})(\alpha_1, \alpha)) \\ &= R(f, \mathcal{G})(\alpha_1, \alpha)a \end{aligned}$$

Por ejemplo, $R(f, \mathcal{G})(!?!, ?@) = R(f, \mathcal{G})(!?!, ?)@ = (R(f, \mathcal{G})(!?!, \varepsilon)?)@ = ((!?!)?)@ =!?!?@$.

tal como deseábamos.

Problem 10 *Demuestre que $\mathcal{F} = \lambda xy\alpha\beta\ [\alpha^x = \beta]$ es Σ-p.r.*

Cuidado con los dominios: $\mathcal{D}_\mathcal{F} = \omega^2 \times \Sigma^{*2}$, aunque la variable y de la expresión lambda no sea utilizada. Es fácil ver que

$$\mathcal{F} = \lambda\alpha\beta\ [\alpha = \beta] \circ \left[\lambda x\alpha\ [\alpha^x] \circ \left[p_1^{2,2}, p_3^{2,2}\right], p_4^{2,2}\right]$$

Problem 11 *Demuestre que el conjunto $S = \left[(x, y, \alpha, \beta, \gamma) \in \omega^2 \times \Sigma^{*3} : x \leq |\gamma|\right]$ es Σ-p.r.*

Observe que

$$\chi_S^{\omega^2 \times \Sigma^{*3}} = \lambda xy\ [x \leq y] \circ \left[p_1^{2,3}, \lambda\alpha\ [|\alpha|] \circ p_5^{2,3}\right]$$

Puesto que $\lambda xy\ [x \leq y]$ es Σ-p.r. y $\lambda\alpha\ [|\alpha|]$ también, $\chi_S^{\omega^2\times\Sigma^{*3}}$ es Σ-p.r.

$\therefore S$ es Σ-p.r.

Problem 12 *Sea* $\Sigma = [@, ?]$. *Demuestre que*

$$f : \{(x, y, \alpha) : x \leq y\} \mapsto \omega$$
$$(x, y, \alpha) \mapsto \begin{cases} x^2 & |\alpha| \leq y \\ 0 & |\alpha| > y \end{cases}$$

es Σ*-p.r.*

Sean

$$S_1 = \left\{(x, y, \alpha) \in \omega^2 \times \Sigma^* : x \leq y \wedge |\alpha| \leq y\right\}$$
$$S_2 = \left\{(x, y, \alpha) \in \omega^2 \times \Sigma^* : x \leq y \wedge |\alpha| > y\right\}$$

Evidentemente, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Es claro que cada conjunto corresponde a uno de los casos de f, y que $S_1 \cup S_2 = \mathcal{D}_f$.

Ahora bien, la función $f_1 := \lambda xy\alpha \left[x^2\right]$ es evidentemente Σ-p.r. Lo mismo aplica a la función $f_2 := C_0^{2,1}$. Más aún, es fácil probar que S_1, S_2 son Σ-p.r. (esto lo dejamos). Luego, puesto que la restricción de una función Σ-p.r. a un dominio Σ-p.r. es a su vez una función Σ-p.r., tenemos que $f_{1|S_1}, f_{2|S_2}$ son Σ-p.r. Luego $f = f_{1|S_1} \cup f_{2|S_2}$ es Σ-p.r.

Problem 13 *Pruebe que la función* $\lambda xx_1 \left[\sum_{t=1}^{t=x} Pred(x_1)^t\right]$ *es* Σ*-p.r.*

(1) Evidentemente, $\lambda xy\,[Pred(x)^y] = \lambda xy\,[x^y] \circ \left[Pred \circ p_1^{2,0}, p_2^{2,0}\right]$ es Σ-p.r.

(2) Considere la función $G := \lambda xyx_1 \left[\sum_{t=x}^{t=y} Pred(x_1)^t\right]$. Pues $Pred(x_1)^t$ es Σ-p.r. sabemos que G es Σ-p.r. Evidentemente, la función del ejercicio es

$$G \circ \left[C_1^{2,0}, p_1^{2,0}, p_2^{2,0}\right]$$

Luego es Σ-p.r.

Problem 14 *Lo mismo para* $\mathcal{F} := \lambda xyz\alpha\beta \left[\subset_{t=3}^{t=z+5} \alpha^{Pred(z)\cdot t}\beta^{Pred(Pred(|\alpha|))}\right]$

Observe que $\mathcal{D}_{\mathcal{F}} = \left\{(x, y, z, \alpha, \beta) \in \omega^3 \times \Sigma^{*2} : z \geq 1 \wedge |\alpha| \geq 2\right\}$, pues la función $Pred$ no está definida para el valor cero.

(1) Observe que

$$f_1 := \lambda xy\alpha\beta\left[\alpha^{Pred(x)y}\right] = \lambda x\alpha\,[\alpha^x] \circ \left[\lambda xy\,[Pred(x).y] \circ [p_1^{2,2}, p_2], p_3^{2,2}\right]$$
$$f_2 := \lambda xy\alpha\beta\left[\beta^{Pred(Pred(|\alpha|))}\right] = \lambda x\alpha\,[\alpha^x] \circ \left[Pred \circ \left[Pred \circ \left[\lambda\alpha\,[|\alpha|] \circ p_3^{2,2}\right]\right], p_4^{2,2}\right]$$

Luego

$$f := \lambda xy\alpha\beta\,[f_1(x,y,\alpha,\beta)f_2(x,y,\alpha,\beta)] = \lambda\alpha\beta\,[\alpha\beta] \circ [f_1, f_2]$$

es Σ-p.r. Esta es la función que está dentro de la concatenación.

(2) Sea $G := \lambda xyz\alpha\beta\left[\subset_{t=x}^{t=y} f(z,t,\alpha,\beta)\right]$. Sabemos que, dado que f es Σ-p.r., G es Σ-p.r. Ahora bien,

$$\mathcal{F} = G \circ \left[C_3^{3,2}, \lambda x\,[x+5] \circ p_3^{3,2}, p3^{3,2}, p_4^{3,2}, p_5^{3,2}\right]$$

Luego $\mathcal{F}$ es Σ-p.r.

Problem 15 *Use que $x \in \mathbb{N}$ es primo si y solo si $x > 1 \wedge ((\forall t \in \omega)_{t \leq x}\ t = x \vee \neg(t \mid x))$ para demostrar que $\lambda x\,[x \text{ es primo }]$ es Σ-p.r.*

Definamos $P_1 = \lambda\,[x > 1]\,, P_2 = \lambda x\left[(\forall t \in \omega)_{t \leq x}\, t = x \vee \neg\,(t \mid x)\right]$. Observe que el predicado $P' = \lambda tx\,[t = x \vee \neg(t \mid x)]$ es Σ-p.r. (se deja al lector). Pues P' es Σ-p.r. tenemos que $P_2 = \lambda x\,[(\forall t \in \omega)_{t \leq x} P'(t,x)]$ es Σ-p.r. Dado que $\mathcal{D}_{P_1} = \mathcal{D}_{P_2}$ podemos tomar $P = P_1 \wedge P_2$ y P es Σ-p.r. Es evidente que $P = \lambda x\,[x \text{ es primo}]$.

Problem 16 *Pruebe que* $L = \left\{(x, \alpha, \beta) \in \omega \times \Sigma^{*2} : (\exists t \in \omega)\ \alpha^x = \beta^t\right\}$ *es* Σ*-p.r.*

El predicado siendo cuantificado es trivialmente Σ-p.r. y así lo es a su vez ω (pues $\chi_\omega^\omega = C_1^{1,0}$). Fijemos un elemento arbitrario $(x, \alpha, \beta) \in L$. Pues $\alpha^x = \beta^t$, tenemos dos casos a considerar:

(1) Si $|\alpha| \leq |\beta|$ es necesario que $t \leq x$. En este caso la cota de la cuantificación aparece naturalmente. Observe que esto implica que $t \leq xk$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$ (esto junto con *(2)* justifica nuestra conclusión).

(2) Si $|\alpha| > |\beta|$ es necesario que $t > x$. Operemos bajo este supuesto. Pues $\alpha^x = \beta^t$, tenemos que $|\alpha|x = |\beta|t$. Si $|\beta| \mid |\alpha|$ tenemos $t = (|\alpha|/|\beta|)x$ (siempre que $|\beta| \neq 0$) y esta cantidad es una cota. Si $|\beta| \nmid |\alpha|$, entonces sabemos que $(|\alpha|/|\beta|)x \leq t$ (siempre que $|\beta| \neq 0$). La división entera es o bien positiva o nula.

Si $|\alpha|/|\beta| = 0$ resulta que $0 \leq t$, pero la hipótesis $\alpha^x = \beta^t$ inmediatamente implica que $t = 0$ también. Y si $t = 0$ entonces no sucede $t > x$, una contradicción.

Si $|\alpha|/|\beta| > 0$ el hecho de que $(|\alpha|/|\beta|)x \leq t$ contradice la hipótesis de que $t > x$.

Por último, el caso $|\beta| = 0$ junto con $|\alpha| > |\beta|$ y $t > x$ implica $x = 0$. Pero tenemos que $|\alpha|^0 = 0t \Rightarrow t = 0$, lo cual contradice $t > x$.

De todo lo anterior se sigue que el único caso válido es aquel donde $|\beta| \mid |\alpha|$.

$\therefore\ t \leq (|\alpha|/|\beta|)\, x$ es una cota para t.

Ahora que dimos con una cota para t, observe que $f = \lambda x\alpha\beta\,[(|\alpha|/|\beta|)x]$ es Σ-p.r. (se deja al lector). Luego

$$\chi_L^{\omega\times\Sigma^{*2}} = \lambda x x_0 \alpha\beta\left[(\exists t \in \omega)_{t \leq x}\, \alpha^{x_0} = \beta^t\right] \circ \left[f\ , p_1^{1,2}, p_2^{1,2}, p_3^{1,2}\right]$$

que es Σ-p.r.

Problem 17 *Sea* $\Sigma = \{@, ?\}$. *Demuestre que*

$$L = \left\{(x, \alpha, \beta) \in \mathbb{N} \times \Sigma^* \times \Sigma^+ : (\exists \gamma \in \Sigma^*)\ @\beta@ = \gamma?\alpha?\gamma^R\right\}$$

es Σ*-p.r.*

(1) Sea $P_0 = \lambda\alpha\beta\gamma\left[@\beta@ = \gamma?\alpha?\gamma^R\right]$. Para demostrar que es Σ-p.r. observe que $\lambda\alpha\left[\alpha^R\right] = R\left(C_\varepsilon^{0,2}, \left\{a \in \Sigma : \left(a, \lambda\alpha\beta\left[\alpha\beta\right] \circ \left[p_3^{0,4}, p_4^{0,4}\right]\right)\right\}\right)$. Pues tomar la recíproca de una palabra es una función Σ-p.r. se sigue fácilmente que P_0 es Σ-p.r.

(2) Sea $(x, \alpha, \beta) \in L$ un elemento arbitrario. Considere $\gamma \in \Sigma^*$ t.q. $@\beta@ = \gamma?\alpha?\gamma^R$. Evidentemente,

$$\begin{aligned} |@\beta@| = \gamma?\alpha?\gamma^R &\Rightarrow |\beta| + 2 = 2 + 2|\gamma| + |\alpha| \\ &\Rightarrow |\beta| - |\alpha| = 2|\gamma| \end{aligned}$$

Si $|\beta| - |\alpha|$ es par obtenemos que $(|\beta| - |\alpha|)/2$ es una cota. Si es impar entonces $(|\beta| - |\alpha| + 1)/2$ es una cota. Como este último valor es superior a $|\gamma|$ en ambos casos, lo tomamos como la cota de t. Es trivial observar que $\lambda\alpha\beta\left[(|\alpha| - |\beta| + 1)/2\right]$ es Σ-p.r.

(3) Tenemos entonces que

$$\chi_L^{\omega\times\Sigma^{*2}} = \lambda x\alpha\beta\left[(\exists\gamma \in \Sigma^*)_{|\gamma| \leq (|\alpha| - |\beta| + 1)/2} @\beta@ = \gamma?\alpha?\gamma^R\right] \wedge \lambda x\alpha\beta\left[x \neq 0 \wedge \beta \neq \varepsilon\right]$$

El segundo predicado asegura que respetemos que los elementos de L son de $\mathbb{N} \times \Sigma^* \times \Sigma^+$. Es muy fácil mostrar que el primer predicado en la cojunción es una composición de la cuantificación acotada por un x general (se deja al lector). Esto, combinado con el hecho de que Σ^* (el conjunto sobre el que se hace la cuantificación) y P_0 (el predicado sobre el que se hace la cuantificación) son Σ-p.r., es suficiente para probar que L es Σ-p.r.

Problem 18 *Pruebe que*

$$L = \left\{(x, \alpha, \beta) \in \omega \times \Sigma^{*2} : (\exists t \in Im(pr))\ \alpha^{Pred(Pred(x)) \cdot Pred(|\alpha|)} = \beta^t\right\}$$

es Σ*-p.r.*

(1) Sea $P_0 = \lambda x_0 x_1 \alpha\beta \left[\alpha^{Pred(Pred(x_0))\cdot Pred(|\alpha|)} = \beta^{x_1}\right]$. Salteamos la prueba de que P_0 es Σ-p.r. porque es mecánica.

(2) Sabemos que $\chi_L^{\omega\times\Sigma^{*2}}$ es el predicado $P = \lambda x_0\alpha\beta\, [(\exists t \in Im(pr))\ P_0(x_0, t, \alpha, \beta)]$. Sea $(x_0, \alpha, \beta) \in L$ un elemento arbitrario y $t \in Im(pr)$.

$$\alpha^{(x_0-2)(|\alpha|-1)} = \beta^t \Rightarrow |\alpha|(x_0 - 2)(|\alpha| - 1) = |\beta|t$$

Sea $u = (x_0-2)(|\alpha|-1)$. Si $|\alpha| \leq |\beta|$ tenemos que $t \leq u$ necesariamente—de otro modo no se satisface $\alpha^u = \beta^t$— y la cota surge naturalmente.

Veamos el caso $|\alpha| > |\beta|$. Si $|\beta|$ divide a $|\alpha|u$ la cota surge naturalmente. Si $|\beta|$ no divide a $|\alpha|$, $|\alpha| = |\beta|q + r$ con $0 < r < |\beta|$. Luego $|\beta|q + r = |\beta|t$, lo cual es absurdo dado que $r < |\beta|$. Luego el caso $|\beta|$ no divide a $|\alpha|$ es inválido y ni siquiera lo consideramos.

Tomando el caso $|\alpha| > |\beta|$ y $|\beta|$ divide a $|\alpha|$, por ser el que da la cota mayor, obtenemos

$$t \leq (|\alpha|\ /\ |\beta|)\, u$$

(3) Es fácil demostrar que $\lambda x_0\alpha\beta\, [(x_0 - 2)(|\alpha| - 1)]$ es Σ-p.r. En el espíritu de los ejercicios anteriores, ahora sola queda expresar $\chi_L^{\omega\times\Sigma^{*2}}$, con esta cota, como una composición del predicado de cuantificación general (es decir el que tiene como cota una x arbitraria). Se deja esto al lector.