Problem 1 *Sea $Y \sim Geom(0.6)$ y X con distribución*

$$P(X = i) = P(Y = i \mid Y \leq 20)$$

Veamos que

$$\begin{aligned} P(Y = i \mid Y \leq 20) &= \frac{P(Y = i \cap Y \leq 20)}{P(Y \leq 20)} \\ &= \frac{P(Y = i)}{\sum_{k=0}^{20}(1-p)^k p} \\ &= \frac{(1-p)^{i-1}p}{\sum_{k=1}^{21}(1-p)^{k-1}p} \end{aligned}$$

Notemos que $Im(X) = \{1, \ldots, 20\}$. Sea $U \sim \mathcal{U}\{1, \ldots, 20\}$. Buscamos c tal que

$$\frac{P(X = x)}{P(U = x)} \leq c \iff 20 \cdot P(X = x) \leq c$$

Claramente, $P(X = x)$ es decreciente y por lo tanto su máximo está en $x = 1$. Por lo tanto, tomamos $c = 20$. Entonces el método de aceptación y rechazo nos queda:

1. Generar $Z \sim \mathcal{U}\{1, \ldots, 20\}$.
2. Generar $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$
3. Si $U \leq P(X = Z)$ devovler Y, de otro modo volver a 1.

```
def pX(x):
    den = sum( [ 0.4**(k)*0.6 for k in range(21) ]
    num = ( (0.4)**(x-1) ) * 0.6
    return num/den
while True:
  Z = randint(1, 20)
  U = random()
  c = 21

  if U <= pX(Z): # dividido 1/20 * c = 1/20 * 20 = 1
```

```
return Z
```

Una compañía tiene 1000 clientes, cada uno de los cuales puede presentar un reclamo en forma independiente en el próximo mes con probabilidad $p = 0.05$. Se asume que los montos de los reclamos son variables aleatorias con dist. exponencial con media 800.

(a) Diseñar una simulación.

Sean $X_1, \ldots, X_{1000}$ Bernoullis con $p = 0.05$ representando la realización/no-realización de un reclamo por parte de un cliente. La simulación hará lo siguiente:

1. Generar un diccionario vacío `reclamos`.
2. Desde $i = 1$ hasta $i = 1000$:
   (a) Simular la Bernoulli X_i. Si dicha Bernoulli es un fallo, pasar a la siguiente iteración salteando los pasos siguientes.
   (b) Simular una exponencial `reclamo` con distribución $\mathcal{E}(\frac{1}{800})$, que tiene media 800.
   (c) Setear `reclamos[i] = reclamo`.
   (d) Pasar a la siguiente iteración.
3. Devolver `reclamos`

De este modo, al terminar, se tiene en `reclamos` información de qué cliente reclamó y cuál es el monto de su reclamo. Claramente, se usan variables Bernoulli y exponenciales.

(1) Juan tiene diez cartas numeradas del 1 al 10 mezcladas aleatoriamente y apiladas boca abajo. Sucesivamente intentará adivinar el valor de la carta superior de la pila y luego la coloca dada vuelta en otra pila. Si acerita termina el juego, si no acierta repite.

Juan tiene buena memoria, por lo cual si la primera carta resultó un 5 y la segunda un 3, ,sabe que ninguna de las siguientes puede ser 5 o 3. Además en cada oportunidad elige un valor aleatorio entre los posibles.

(a) Calcular la probabilidad de que haya dado vuelta exactamente 6 cartas hasta acertar.

(b) Escribir una expresión que permita calcular el valro esperado del número de cartas que dará vuelta hasta acertar.

(c) Simular con 10000 simulaciones para estimar el valor de b.

Sea X_i la carta predicha por Juan en la i-écima vuelta. Y la carta que verdaderamente está en la parte superior del mazo. Juan gana si $X = Y$. Como Y es fija (el mazo ya está mezclado), tenemos

$$P(X_1 = Y) = \frac{1}{10}, P(X_2 = Y) = \frac{1}{9}, \ldots$$

o generalmente

$$P(X_i = Y) = \frac{1}{11 - i}$$

Sea p_i la probabilidad de que $X_i = Y$. Si Z es la cantidad de predicciones hasta tener un éxito,

$$P(Z = k) = p_k \prod_{i=1}^{k-1} (1 - p_i)$$

Por lo tanto,

$$(Z = 6) = \frac{1}{5} \left(\frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{5}{6} \right)$$

(b) Es el valor esperado de Z:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{10} kP(Z=k) &= \sum_{k=1}^{10} k\left(p_k\prod_{i=1}^{k-1}(1-p_i)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{10} k\left(\frac{1}{11-k}\prod_{i=1}^{k-1}(1-\frac{11}{i})\right) \\
&= \sum_{k=1}^{10} k\left(\frac{1}{11-k}\prod_{i=1}^{k-1}(1-\frac{11}{i})\right)
\end{aligned}
$$

Sea X con densidad

$$f(x) = \begin{cases} 1.2 \cdot e^{-x} + 2.1e^{-3x} & x \geq 0 \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

(a) Indicar cómo puede generarse valores con método de composición.

(b) Decidir para qué valores de λ, con $\lambda > 0$, se puede usar método de aceptación y rechazo para generar valores de $Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

(c) Implementar el algoritmo dado en a para simular X y usarlo para estimar $\mathbb{E}[X]$.

Notemos que X es una combinación lineal de distribuciones exponenciales, con $E_1 \sim \mathcal{E}(1), E_2 \sim \mathcal{E}(3).$ En particular, para $x \geq 0$,

$$f(x) = 1.2 f_{E_1}(x) + 2.1 f_{E_2}(x)$$

El problema es que $1.2 + 2.1 \neq 1$.

Claramente, la imagen pertenece a $(0, -3)$.

$$\begin{aligned} x = -3\sqrt{1-u} &\iff \frac{x^2}{9} = 1 - u \\ &\iff 1 - \frac{x^2}{9} = u \end{aligned}$$

Es decir, $F(x) = 1 - x^2/9$. Por lo tanto,

$$f_X(x) = -\frac{2}{9}x$$