Modelos y simulación - Prácticos

FAMAF - UNC

Severino Di Giovanni

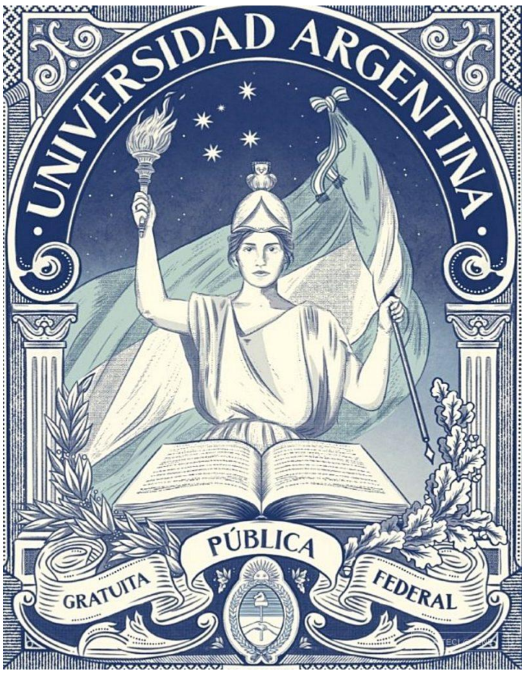

Figure 1: Severino Di Giovanni, el autor de este apunte. Un anarquista libertario, murió luchando por la libertad. Como él, otros miles han muerto para que nosotros gocemos de los derechos que tenemos. No te dejes engañar por los tristes pregoneros del egoísmo. Amá a tu prójimo y no olvides que si sus derechos se vulneran, los tuyos también. Ayudá a tu compañero de estudio, defendé tu universidad.

Contents

1 Práctico 4: Lenguaje imperativo simple

(**1**) Demostrar o refutar.

(c) (**if** b **then** c_0 **else** c_1); $c_2 \equiv$ **if** b **then** $c_0; c_2$ **else** $c_1; c_2$

(d) $c2$; (**if** b **then** $c0$ **else** $c1$) $\equiv$ **if** b **then** $c2; c0$ **else** $c_2; c_1$

(c) Sea $p =$ **if** b **then** c_0 **else** c_1 y

$$f = [\![\textbf{if } b \textbf{ then } c_0; c_2 \textbf{ else } c_1; c_2]\!] = \sigma \mapsto \begin{cases} [\![c_0; c_2]\!]\sigma & [\![b]\!]\sigma \\ [\![c_1; c_2]\!]\sigma & c.c. \end{cases}$$

Deseamos probar que $[\![p; c_2]\!] = f$. Por def.

$$\begin{aligned} [\![p; c_2]\!]\sigma &= [\![c_2]\!]_{\perp\!\!\perp}([\![p]\!]\sigma) \\ &= \begin{cases} [\![c_2]\!]_{\perp\!\!\perp}([\![c_0]\!]\sigma) & [\![b]\!]\,\sigma \\ [\![c_2]\!]_{\perp\!\!\perp}([\![c_1]\!]\sigma) & c.c. \end{cases} \\ &= \begin{cases} [\![c_2; c_0]\!]\sigma & [\![b]\!]\sigma \\ [\![c_2; c_1]\!]\sigma & c.c. \end{cases} \end{aligned}$$

$\therefore [\![p; c_2]\!] = f$.

(d)
$$\begin{aligned} [\![c_2; \textbf{if } b \textbf{ then } c_0 \textbf{ else } c_1]\!] &= [\![\textbf{if } b \textbf{ then } c_0 \textbf{ else } c_1]\!]_{\perp\!\!\perp}([\![c_2]\!]\sigma) \\ &= \begin{cases} [\![\textbf{if } b \textbf{ then } c_0 \textbf{ else } c_1]\!]([\![c_2]\!]\sigma) & [\![c_2]\!]\sigma \neq \perp \\ \perp & c.c. \end{cases} \\ &= \begin{cases} [\![c_0]\!]([\![c_2]\!]\sigma) & [\![c_2]\!]\sigma \neq \perp \wedge [\![b]\!]\sigma \\ [\![c_1]\!]([\![c_2]\!]\sigma) & [\![c_2]\!]\sigma \neq \perp \wedge \neg[\![b]\!]\sigma \\ \perp & [\![c_2]\!]\sigma = \perp \end{cases} \\ &= \begin{cases} [\![c_2; c_0]\!]\sigma & [\![c_2]\!]\sigma \neq \perp \wedge [\![b]\!]\sigma \\ [\![c_2; c_1]\!]\sigma & [\![c_2]\!]\sigma \neq \perp \wedge \neg[\![b]\!]\sigma \\ \perp & [\![c_2]\!]\sigma = \perp \end{cases} \\ &= \begin{cases} [\![c_2; c_0]\!]\sigma & [\![b]\!]\sigma \\ [\![c_2; c_1]\!]\sigma & \neg[\![b]\!]\sigma \end{cases} \\ &= [\![\textbf{if } b \textbf{ then } c_2; c_0 \textbf{ else } c_2; c_1]\!]\sigma \end{aligned}$$

(5) (a) Dar la semántica de **while** $x < 2$ **do if** $x < 0$ **then** $x := 0$ **else** $x := x{+}1$.

Razonamiento previo. Si $\sigma\ x < 2$, el **while** incrementa x hasta alcanzar el valor 2, por lo que su semántica converge a:

$$\sigma \mapsto \begin{cases} \sigma & \sigma\ x \geq 2 \\ [\sigma \mid x : 2] & \sigma\ x < 2 \end{cases}$$

En el peor caso ($\sigma\ x < 0$), el bucle realiza a lo sumo 3 iteraciones: una para corregir $x < 0$, y dos más para alcanzar 2.

De esto se sigue que: (1) el bucle siempre termina en a lo sumo 3 pasos, y (2) sólo $F^1 \perp$ a $F^4 \perp$ aportan información; luego, la cadena se vuelve no interesante.

Por simplicidad, hagamos $p :=$ **if** $x < 0$ **then** $x := 0$ **else** $x := x + 1$ y observemos que

$$[\![p]\!]\sigma = \begin{cases} [\sigma \mid x : 0] & \sigma\ x < 0 \\ [\sigma \mid x : \sigma\ x + 1] & \sigma\ x \geq 0 \end{cases} \tag{1}$$

Definamos $F : (\Sigma \mapsto \Sigma_\perp) \mapsto (\Sigma \mapsto \Sigma_\perp)$ como

$$F\ f\ \sigma = \begin{cases} \sigma & \sigma\ x \geq 2 \\ f_{\perp\!\!\!\perp}\ [\![p]\!]\ \sigma & \sigma\ x < 2 \end{cases}$$

Aplicando (1), obtenemos

$$F\ f\ \sigma = \begin{cases} \sigma & \sigma\ x \geq 2 \\ f\ ([\sigma \mid x : \sigma\ x + 1]) & \sigma\ x \in \{0, 1\} \\ f\ ([\sigma \mid x : 0]) & \sigma\ x < 0 \end{cases}$$

Es trivial observar que

$$F \perp \sigma = \begin{cases} \sigma & \sigma\ x \geq 2 \\ \perp & \sigma\ x < 2 \end{cases}$$

Ahora bien,

$$F^2 \perp \sigma = \begin{cases} \sigma & \sigma\ x \geq 2 \\ (F \perp)\ ([\sigma \mid x : \sigma\ x + 1]) & \sigma\ x \in \{0, 1\} \\ (F \perp)\ ([\sigma \mid x : 0]) & \sigma\ x < 0 \end{cases}$$

En el caso $\sigma\, x \in \{0, 1\}$, tenemos

$$(F\ \bot)\,([\sigma \mid x : \sigma\, x + 1]) = \begin{cases} F([\sigma \mid x : 2]) & \sigma\, x = 1 \\ F([\sigma \mid x : 1]) & \sigma\, x = 0 \end{cases} = \begin{cases} [\sigma \mid x : 2] & \sigma\, x = 1 \\ \bot & \sigma\, x = 0 \end{cases}$$

En el caso $\sigma\, x < 0$, claramente $F([\sigma \mid x < 0]) = \bot$. Con lo cual

$$F^2\ \bot\ \sigma = \begin{cases} \sigma & \sigma\, x \geq 2 \\ [\sigma \mid x : 2] & \sigma\, x = 1 \\ \bot & \sigma\, x < 1 \end{cases}$$

De manera análoga se demuestra que

$$F^3\ \bot\ \sigma = \begin{cases} \sigma & \sigma\, x \geq 2 \\ [\sigma \mid x : 2] & \sigma\, x \in \{0, 1\} \\ \bot & \sigma\, x < 1 \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned} F^4\ \bot\ \sigma &= \begin{cases} \sigma & \sigma\, x \geq 2 \\ (F^3\ \bot)\,([\sigma \mid x : \sigma\, x + 1]) & \sigma\, x \in \{0, 1\} \\ (F^3\ \bot)\,([\sigma \mid x : 0]) & \sigma\, x < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sigma & \sigma\, x \geq 2 \\ [\sigma \mid x : 2] & \sigma\, x < 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Es obvio entonces que a partir de $k \geq 4$, $F^{k+1}\bot = F^k\bot$, con lo cual $F^1\ \bot, F_2\ \bot, \ldots$ es una cadena no interesante con supremo $F^4\ \bot$.

$$\therefore \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} F^i\ \bot = \lambda\sigma. \begin{cases} \sigma & \sigma\, x \geq 2 \\ [\sigma \mid x : 2] & \sigma\, x < 2 \end{cases} = [\![\textbf{if}\ \sigma\, x \geq 2\ \textbf{then skip else}\ \sigma\, x := 2]\!]$$

(5) (b) Dar la semántica de

$$\textbf{while } x < 2 \textbf{ do if } y = 0 \textbf{ then } x := x + 1 \textbf{ else skip}$$

Debería ser claro que si $y \neq 0$ el ciclo no termina, pues se ejecuta **skip** indefinidamente.

Sea p el comando **if** ejecutado dentro del **while**. Si definimos $F : (\Sigma \mapsto \Sigma_\perp) \mapsto (\Sigma \mapsto \Sigma_\perp)$ como

$$F\ f\ \sigma = \begin{cases} \sigma & \sigma\ x \geq 2 \\ f_{\perp\!\!\!\perp}\ (\ [\![p]\!]\sigma) & \sigma\ x < 2 \end{cases}$$

entonces, desarrollando la semántica de p, tenemos

$$F\ f\ \sigma = \begin{cases} \sigma & \sigma\ x \geq 2 \\ f_{\perp\!\!\!\perp}\ ([\sigma \mid x : \sigma\ x + 1]) & \sigma\ x < 2 \wedge \sigma\ y = 0 \\ f_{\perp\!\!\!\perp}\sigma & \sigma\ x < 2 \wedge \sigma\ y \neq 0 \end{cases}$$

Ahora daremos el menor punto fijo de F, que será la semántica del comando. Claramente,

$$F\ \perp\ \sigma = \begin{cases} \sigma & \sigma\ x \geq 2 \\ \perp & \text{c. c.} \end{cases}$$

Continuando,

$$\begin{aligned} F^2 \perp \sigma &= \begin{cases} \sigma & \sigma\ x \geq 2 \\ (F\ \perp)_{\perp\!\!\!\perp}\ ([\sigma \mid x : \sigma\ x + 1]) & \sigma\ x < 2 \wedge \sigma\ y = 0 \\ (F\ \perp)_{\perp\!\!\!\perp}\sigma & \sigma\ x < 2 \wedge \sigma\ y \neq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sigma & \sigma\ x \geq 2 \\ [\sigma \mid x : \sigma\ x + 1] & \sigma\ x = 1 \wedge y = 0 \\ \perp & \sigma\ x < 1 \wedge y = 0 \\ \perp & \sigma\ x < 2 \wedge \sigma\ y \neq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sigma & \sigma\ x \geq 2 \\ [\sigma \mid x : 2] & \sigma\ x = 1 \wedge y = 0 \\ \perp & \sigma\ x < 1 \wedge y = 0 \\ \perp & \sigma\ x < 2 \wedge \sigma\ y \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Solo para ser explícitos, veamos que

$$F^3 \perp \sigma = \begin{cases} \sigma & \sigma\, x \geq 2 \\ (F \perp)^2_{\perp\!\!\perp} \left([\sigma \mid x : \sigma\, x + 1]\right) & \sigma\, x < 2 \wedge \sigma\, y = 0 \\ (F \perp)^2_{\perp\!\!\perp} \sigma & \sigma\, x < 2 \wedge \sigma\, y \neq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sigma & \sigma\, x \geq 2 \\ [\sigma \mid x : 2] & \sigma\, x \in \{0, 1\} \wedge y = 0 \\ \perp & \sigma\, x < 0 \wedge y = 0 \\ \perp & \sigma\, x < 2 \wedge \sigma\, y \neq 0 \end{cases}$$

Planteamos como hipótesis inductiva que

$$F^k \perp \sigma = \begin{cases} \sigma & \sigma\, x \geq 2 \\ [\sigma \mid x : 2] & 3 - k \leq \sigma\, x \leq 1 \wedge y = 0 \\ \perp & c.c. \end{cases}$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
F^{k+1} \perp \sigma &= \begin{cases} \sigma & \sigma\, x \geq 2 \\ (F \perp)^k_{\perp\!\!\perp} ([\sigma \mid x : \sigma\, x + 1]) & \sigma\, x < 2 \wedge \sigma\, y = 0 \\ (F \perp)^k_{\perp\!\!\perp} \sigma & \sigma\, x < 2 \wedge \sigma\, y \neq 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \sigma & \sigma\, x \geq 2 \\ [\sigma \mid x : \sigma\, x + 1] & \sigma\, x < 2 \wedge \sigma\, x + 1 \geq 2 \wedge y = 0 \\ [\sigma \mid x : 2] & \sigma\, x < 2 \wedge 3 - k \leq \sigma\, x + 1 \leq 1 \wedge y = 0 \\ \perp & c.c. \end{cases} \\
&= \begin{cases} \sigma & \sigma\, x \geq 2 \\ [\sigma \mid x : 2] & \sigma\, x < 2 \wedge \sigma\, x \geq 1 \wedge y = 0 \\ [\sigma \mid x : 2] & \sigma\, x < 2 \wedge 3 - (k + 1) \leq \sigma\, x \leq 0 \wedge y = 0 \\ \perp & c.c. \end{cases} \\
&= \begin{cases} \sigma & \sigma\, x \geq 2 \\ [\sigma \mid x : 2] & \sigma\, x = 1 \wedge y = 0 \\ [\sigma \mid x : 2] & 3 - (k + 1) \leq \sigma\, x \leq 0 \wedge y = 0 \\ \perp & c.c. \end{cases} \\
&= \begin{cases} \sigma & \sigma\, x \geq 2 \\ [\sigma \mid x : 2] & 3 - (k + 1) \leq \sigma\, x \leq 1 \wedge y = 0 \\ \perp & c.c. \end{cases}
\end{aligned}
$$

quod erat demonstrandum. Se sigue entonces que

$$
\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} F^i \perp = \lambda\sigma. \begin{cases} \sigma & \sigma\, x \geq 2 \\ [\sigma \mid x : 2] & \sigma\, x \leq 1 \wedge y = 0 \\ \perp & \sigma\, y \neq 0 \end{cases}
$$

Aclaración. Para no escribir tanto, agrupamos $\perp$ en un solo caso durante el desarrollo de $F^1 \perp, F^2 \perp$, etc. Pero debería ser claro que en uno de los casos damos $\perp$ porque la cantidad de iteraciones es limitada, mientras que en otro caso damos $\perp$ porque $\sigma\, y \neq 0$. En el primer caso, a medida que se aumentan las iteraciones, se añade más y más información y, en el límite, la indefinición desaparece. En el segundo caso, la indefinición no desaparece: siempre que $\sigma\, y \neq 0$, se da $\perp$.

(6) Asuma que $[\![\textbf{while } b \textbf{ do } c]\!]\sigma \neq \bot$. Demuestre (a) que existe $n \geq 0$ tal que $F^n \perp \sigma \neq \bot$. Demuestre (b) que si $\sigma' = [\![\textbf{while } b \textbf{ do } c]\!]\sigma$, entonces $\neg[\![b]\!]\sigma'$.

(a) Sabemos que

$$[\![\textbf{while } b \textbf{ do } c]\!] = \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} F^i \perp$$

para

$$F\ f\ \sigma = \begin{cases} \sigma & \neg[\![b]\!]\sigma \\ f_{\perp\!\!\!\perp}[\![c]\!]\sigma & c.c. \end{cases}$$

Asuma que no existe $n \geq 0$ tal que $F^n \perp \sigma \neq \bot$. Se sigue que la cadena $\left\{F^i \perp\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ es simplemente la cadena $\bot \sqsubseteq \bot \sqsubseteq \bot \sqsubseteq \ldots$. El supremo de esta cadena es $\bot$. Por lo tanto,

$$[\![\textbf{while } b \textbf{ do } c]\!] = \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} F^i \perp = \bot$$

lo cual contradice la hipótesis. La contradicción viene de asumir que no existe $n \geq 0$ tal que $F^n \perp \sigma \neq \bot$.

$\therefore$ Existe $n \geq 0$ tal que $F^n \perp \sigma \neq \bot$. ■

(b) Dado que la semántica de **while** b **do** c es un punto fijo de F, si usamos $\varphi := [\![\textbf{while } b \textbf{ do } c]\!]$, entonces

$$\varphi\ \sigma = F\ \varphi\ \sigma$$

Si σ es tal que $\neg[\![b]\!]\sigma$, entonces se sigue inmediatamente de la definición de F que en el estado $\varphi\sigma$ no se cumple b. Veamos el caso en que se cumple $[\![b]\!]\sigma$. Por la definición de F,

$$\varphi\ \sigma = \varphi_{\perp\!\!\!\perp}\ (\varphi_{\perp\!\!\!\perp} \ldots (\varphi_{\perp\!\!\!\perp}[\![c]\!]\sigma)) = \varphi^k_{\perp\!\!\!\perp}[\![c]\!]\sigma \tag{2}$$

donde la hipótesis de que el ciclo nunca es $\bot$ nos permite garantizar que existe tal $k \in \mathbb{N}$. Ahora bien, por la definición de F, k es definido estrictamente por el hecho de que

$$\neg[\![b]\!](\varphi^k_{\perp\!\!\!\perp}[\![c]\!]\sigma)$$

Por la ecuación (2), resulta entonces

$$\neg[\![b]\!]\ (\varphi\sigma) \quad \blacksquare$$

(7) Demostrar o refutar:

(a) **while false do** $c \equiv$ **skip**

(b) **while** b **do** $c \equiv$ **while** b **do** $(c; c)$

(c) (**while** b **do** c); **if** b **then** c_0 **else** $c_1 \equiv$ (**while** b **do** c); c_1

(a) Es trivial.

(b) Falso. Basta dar un contraejemplo. Sea σ un estado con $\sigma\ x = 0$ y considere

$$w_1 := \textbf{while}\ x \leq 0\ \textbf{do}\ x := x + 1, \qquad w_2 := \textbf{while}\ x \leq 0\ \textbf{do}\ (x := x + 1); (x := x + 1)$$

Claramente, $[\![w_1]\!]\sigma\ x = 1$ y $[\![w_2]\!]\sigma\ x = 2$. Sin embargo, dados comandos c_1, c_2,

$$c_1 \equiv c_2 \iff \forall \sigma \in \Sigma : [\![c_1]\!]\sigma = [\![c_2]\!]\sigma$$

$\therefore\ w_1 \not\equiv w_2$.

(c) Es verdadero. En el ejercicio anterior, demostramos que si un ciclo termina, entonces la guarda no puede cumplirse en el estado resultante del ciclo. Es decir que si

$$[\![\textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ c]\!]\sigma = \sigma' \neq \bot$$

entonces $[\![b]\!]\sigma' \equiv$ **False**. Por lo tanto, asumiendo que $[\![\textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ c]\!]\sigma$ termina y no es $\bot$,

$$\begin{aligned}
&[\![(\textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ c); \textbf{if}\ b\ \textbf{then}\ c_0\ \textbf{else}\ c_1]\!]\sigma \\
&= [\![\textbf{if}\ b\ \textbf{then}\ c_0\ \textbf{else}\ c_1]\!]\ ([\![\textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ c]\!]\sigma) \\
&= [\![c_1]\!]\ ([\![\textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ c]\!]\sigma) \\
&= [\![(\textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ c); c_1]\!]\sigma \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Ahora bien, si el ciclo no termina (es decir, si devuelve $\bot$), es trivial demostrar que la equivalencia también se cumple.