Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана» (МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Факультет «Информатика и системы управления»
Кафедра «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Отчет по домашней работе №1

по курсу:

«Математическая статистика»

Вариант 25

Студент группы ИУ7-63Б: Фурдик Н. О.

(Фамилия И.О.)

Преподаватель: Власов П. А.

(Фамилия И.О.)

Москва, 2020

Оглавление

Задание 1

Постановка задачи

Вероятность некоторого случайного события равна 0.67. Сколько нужно произвести испытаний, чтобы с вероятностью 0.98 можно было ожидать, что наблюденная частота этого события отклонится от его вероятности не более, чем на 0.01? Решить задачу, используя неравенство Чебышева и интегральную теорему Муавра-Лапласа.

Решение

Пусть случайная величина X - число появлений случайного события в n опытах. X имеет биномиальное распределение с параметрами n и $p = 0.67$. Для биномиальной случайной величины математическое ожидание равно np, а дисперсия $np(1-p)$. Тогда

$$\begin{aligned} M(X) &= np = 0.67n \\ D(X) &= np(1-p) = n \cdot 0.67 \cdot 0.33 = 0.2211n \end{aligned} \tag{1}$$

1) Используя неравенство Чебышева,

$$P\left(|X - M(X)| \le \epsilon\right) \ge \frac{1 - D(X)}{\epsilon^2} \tag{2}$$

Получим:

$$P\left(|m - np| \le 0.01n\right) = P\left(|X - M(X)| \le 0.01n\right) \ge \frac{1 - 0.2211n}{(0.01n)^2} = 1 - \frac{2211}{n} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} 1 - \frac{2211}{n} &\ge 0.98 \\ \frac{2211}{n} &\le 0.02 \qquad (4) \\ n \ge \frac{2211}{0.02} &= 110550 \qquad (5) \end{aligned}$$

2) Решим эту же задачу, используя интегральную теорему Муавра—Лапласа (а точнее, следствие из нее),

$$P\left(|m - np| \le \epsilon\right) \approx 2\Phi\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \tag{6}$$

Подставим значения в формулу (6):

$$P\left(|m - np| \le 0.01n\right) = 2\Phi\left(\frac{0.01n}{\sqrt{0.2211n}}\right) = 0.98 \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \Phi\left(\frac{0.01n}{\sqrt{0.2211n}}\right) &= 0.49 \\ \frac{0.01n}{\sqrt{0.2211n}} &\approx 2.33 \qquad (8) \\ n = \frac{2.33^2 \cdot 0.2211}{0.01^2} &\approx 12003.30 \qquad (9) \end{aligned}$$

Ответ: $n \ge 110550$ из неравенства Чебышева, $n \ge 12004$ по теореме Муавара–Лапласа.

Задание 2

Постановка задачи

С использованием метода моментов для случайной выборки $\overline{X} = (X_1, ..., X_n)$ из генеральной совокупности X найти точечные оценки указанных параметров заданного закона распределения.

$$f_X(x) = 2\theta x e^{-\theta x^2}, x > 0 \tag{10}$$

Решение

Найдем среднее выборочное:

$$\overline{X} = \int_0^\infty x \cdot 2\theta x e^{-\theta x^2} dx = -\int_0^\infty x e^{-\theta x^2} d(-\theta x^2) = -\int_0^\infty x d(e^{-\theta x^2}) = \tag{11}$$
$$= \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ v = e^{-\theta x^2} & dv = d(e^{-\theta x^2}) \end{vmatrix} = -x \cdot e^{-\theta x^2}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\theta x^2} dx = \int_0^\infty e^{-\theta x^2} dx =$$
$$= \begin{vmatrix} t = \sqrt{2\theta} x \\ x = \frac{t}{\sqrt{2\theta}} \\ dx = \frac{1}{\sqrt{2\theta}} dt \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\theta}} \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\theta}} \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\theta}} \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\theta}}$$

Откуда получаем, что

$$\theta = (\frac{\sqrt{\pi}}{2\overline{X}})^2 \tag{12}$$

Ответ: $\theta = (\frac{\sqrt{\pi}}{2\overline{X}})^2$

Задание 3

Постановка задачи

С использованием метода максимального правдоподобия для случайной выборки $\overline{X} = (X_1, ..., X_n)$ из генеральной совокупности X найти точечные оценки параметров заданного закона распределения. Вычислить выборочные значения найденных оценок для выборки $\overline{x_5} = (x_1, ..., x_n)$

$$f_X(x) = \frac{\theta}{x^{\theta+1}}, x > 1 \tag{13}$$
$$\overline{x_5} = (e, e^2, e^3, e^4, e^5) \tag{14}$$

Решение

Получим функцию правдоподобия для нашей выборки $\overline{x_5}$:

$$L(X_1, ..., X_n, \theta) = P\{X = X_1\} \cdot ... \cdot P\{X = X_n\} = \theta^5 \cdot \frac{1}{e^{\theta+1}} \cdot \frac{1}{e^{2(\theta+1)}} \cdot \frac{1}{e^{3(\theta+1)}} \cdot \frac{1}{e^{4(\theta+1)}} \cdot \tag{15}$$
$$\cdot \frac{1}{e^{5(\theta+1)}} = \theta^5 \cdot \frac{1}{e^{15(\theta+1)}}$$

Прологарифмируем ее:

$$lnL(X_1, ..., X_n, \theta) = ln\left(\theta^5 \cdot \frac{1}{e^{15(\theta+1)}}\right) = ln(\theta^5) + ln\left(\frac{1}{e^{15(\theta+1)}}\right) = 5ln\theta - 15(\theta+1) \tag{16}$$

Необходимое условие экстремума $L(\overline{X}, \theta)$:

$$\frac{dlnL}{d\theta} = 0 \tag{17}$$

Продифференцируем (12):

$$\frac{dlnL}{d\theta} = \frac{d(5ln\theta - 15(\theta+1))}{d\theta} = \frac{5}{\theta} - 15 \tag{18}$$

Приравняв к нулю, получим, что

$$\theta = \frac{1}{3} \tag{19}$$

Ответ: $\theta = \frac{1}{3}$

Задание 4

Постановка задачи

По результатам $n = 25$ измерений скорости снаряда получена оценка дисперсии $S^2(\overline{X_n}) = 5.8/c^2$. Считая распределение контролируемого признака нормальным, построить 90% – доверительные интервалы для дисперсии и среднего квадратичного отклонения скорости снаряда.

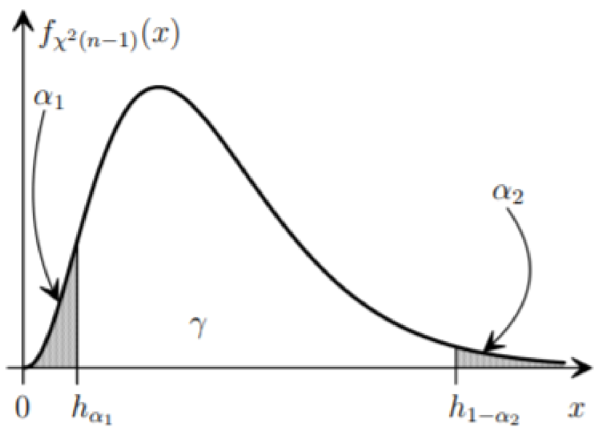
Решение

Построим доверительный интервал для дисперсии скорости снаряда, используя центральную статистику:

$$T(\vec{X}, \sigma^2) = \frac{S^2(\overline{X_n})}{\sigma^2}(n-1) \sim \chi^2(n-1) \tag{20}$$

Ниже изображен график функции плотности распределения статистики T.

Рис. 1: График функции плотности распределения статистики T



В соответствии со свойствами непрерывных случайных величин,

$$\gamma = P\left\{h_{\frac{1-\alpha}{2}} < T(\vec{X}, \sigma^2) < h_{\frac{1+\alpha}{2}}\right\} \tag{21}$$

Подставим формулу (20) для $T(\vec{X}, \sigma^2)$:

$$\gamma = P\left\{h_{0.05} < \frac{S^2(\overline{X_n})}{\sigma^2}(n-1) < h_{0.95}\right\} \tag{22}$$

$$\gamma = P\left\{\frac{S^2(\overline{X_n})}{h_{0.05}}(n-1) < \sigma^2 < \frac{S^2(\overline{X_n})}{h_{0.95}}(n-1)\right\} \tag{23}$$

Откуда получим 90%-ый доверительный интервал для дисперсии снаряда:

$$0.9 = P\left\{3.82 < \sigma^2 < 10.05\right\} \tag{24}$$

Соответственно, 90%-ый доверительный интервал для среднего квадратичного отклонения скорости снаряда:

$$0.9 = P\left\{\sqrt{3.82} < \sigma < \sqrt{10.05}\right\}$$

$$0.9 = P\left\{1.95 < \sigma < 3.17\right\} \tag{25}$$

Ответ: $\sigma^2 \in (3.82; 10.05)\frac{\text{м}}{c^2}$; $\sigma \in (1.95; 3.17)\frac{\text{м}}{c}$.

Литература

1. Власов П.А. - Курс лекций по "Математической статистике"[Текст], Москва 2020 год.

2. Феллер В. Целочисленные величины. Производящие функции // Введение в теорию вероятностей и её приложения = An introduction to probability theory and its applicatons, Volume I second edition / Перевод с англ. Р. Л. Добрушина, А. А. Юшкевича, С. А. Молчанова Под ред. Е. Б. Дынкина с предисловием А. Н. Колмогорова. — 2-е изд. — М.: Мир, 1964. — С. 270—272.