Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана» (МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Факультет «Информатика и системы управления»
Кафедра «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Отчет по лабораторной работе №2

по курсу:

«Математическая статистика»

Студент группы ИУ7-63Б: Фурдик Н. О.
(Фамилия И.О.)
Преподаватель: Власов П. А.
(Фамилия И.О.)

Москва, 2020

Оглавление

Постановка задания

Цель работы: построение доверительных интервалов для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины.

Содержание работы:

1. Для выборки объема n из нормальной генеральной совокупности X реализовать в виде программы на ЭВМ

а) вычисление точечных оценок $\hat{\mu}(\overrightarrow{x_n})$ и $S^2(\overrightarrow{x_n})$ математического ожидания MX и дисперсии DX;

б) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\mu}(\overrightarrow{x_n})$, $\overline{\mu}(\overrightarrow{x_n})$ для γ-доверительного интервала для математического ожидания MX;

в) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\sigma}(\overrightarrow{x_n})$, $\overline{\sigma}(\overrightarrow{x_n})$ для γ-доверительного интервала для дисперсии DX.

2. Вычислить $\hat{\mu}$ и S^2 для выборки из индивидуального варианта.

3. Для заданного пользователем уровня доверия γ и N – объема выборки из индивидуального варианта:

а) на координатной плоскости Oyn построить прямую $y = \hat{\mu}(\overrightarrow{x}_N)$, также графики функций $y = \hat{\mu}(\overrightarrow{x_n}), y = \underline{\mu}(\overrightarrow{x_n})$ и $y = \overline{\mu}(\overrightarrow{x_n})$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N;

б) на другой координатной плоскости Ozn построить прямую $y = S^2(\overrightarrow{x}_N)$, также графики функций $y = S^2(\overrightarrow{x_n}), y = \underline{\sigma}(\overrightarrow{x_n})$ и $y = \overline{\sigma}(\overrightarrow{x_n})$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.

Содержание отчета:

1. определение γ-доверительного интервала для значения параметра распределения случайной величины;

2. формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины;

3. текст программы;

4. результаты расчетов и графики для выборки 1 из индивидуального варианта (при построении графиков принять $\gamma = 0.9$).

Теоретическая часть

Определения величин

Определение 1. *Доверительный интервал уровня γ для параметра θ $\vec{X}_n$* называют пару статистик $\overline{\theta}(\overrightarrow{X})$ и $\underline{\theta}(\overrightarrow{X})$ таких, что $P\{\theta \in (\overline{\theta}(\overrightarrow{X}), \underline{\theta}(\overrightarrow{X}))\} = \gamma$.

Определение 2. Пусть $\overrightarrow{X_n}$– случайная выборка объема n из генеральной совокупности X с функцией распределения $F(x;\theta)$, зависящей от параметра θ, значение которого неизвестно. Предположим, что для параметра θ в построенном интервале $(\overline{\theta}(\overrightarrow{X_n}), \underline{\theta}(\overrightarrow{X_n}))$, где $\overline{\theta}(\overrightarrow{X_n})$ и $\underline{\theta}(\overrightarrow{X_n})$ являются функциями случайной выборки $\overrightarrow{X_n}$, такими, что выполняется равенство

$$P\{\underline{\theta}(\overrightarrow{X_n}) < \theta < \overline{\theta}(\overrightarrow{X_n})\} = \gamma \quad (1)$$

В этом случае интервал $(\overline{\theta}(\overrightarrow{X_n}), \underline{\theta}(\overrightarrow{X_n}))$, называют *интервальной оценкой для параметра* θ *с коэффициентом доверил* γ (или, сокращенно, γ - доверительной интервальной оценкой), а $\overline{\theta}(\overrightarrow{X_n})$ и $\underline{\theta}(\overrightarrow{X_n})$ соответственно нижней и верхней границами интервальной оценки.
Интервальная оценка $(\overline{\theta}(\overrightarrow{X_n}), \underline{\theta}(\overrightarrow{X_n}))$ представляет собой интервал со случайными границами, который с заданной вероятностью γ накрывает неизвестное истинное значение параметра γ.

Формулы для вычисления величин

Ниже представлены формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала.

Таблица 1: Формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала

Общий вид закона распр. ген. сов. X	Параметры	Центральная статистика и ее закон распределения	Границы интервала
$N(\mu, \sigma^2)$	μ - неизв., σ - изв. Оценить μ	$\frac{\mu-\overline{X}}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$	$\underline{\mu}(\overrightarrow{x_n}) = \overline{X} - \frac{u_{\frac{1-\gamma}{2}}\sigma}{\sqrt{n}}$ $\overline{\mu}(\overrightarrow{x_n}) = \overline{X} + \frac{u_{\frac{1+\gamma}{2}}\sigma}{\sqrt{n}}$
	μ - изв., σ - неизв. Оценить σ		$\underline{\sigma}(\overrightarrow{x_n}) = \frac{\sqrt{n}(\mu-\overline{X})}{u_{\frac{1-\gamma}{2}}}$ $\overline{\sigma}(\overrightarrow{x_n}) = \frac{\sqrt{n}(\mu-\overline{X})}{u_{\frac{1+\gamma}{2}}}$
	μ - неизв., σ - неизв. Оценить μ	$\frac{\mu-\overline{X}}{S(\overrightarrow{X_n})}\sqrt{n} \sim St(n-1)$	$\underline{\mu}(\overrightarrow{x_n}) = \overline{X} - \frac{t_{\frac{1-\gamma}{2}}S(\overrightarrow{X_n})}{\sqrt{n}}$ $\overline{\mu}(\overrightarrow{x_n}) = \overline{X} + \frac{t_{\frac{1+\gamma}{2}}S(\overrightarrow{X_n})}{\sqrt{n}}$
	μ - неизв., σ - неизв. Оценить σ	$\frac{S(\overrightarrow{X_n})}{\sigma^2}(n-1) \sim \chi^2(n-1)$	$\underline{\sigma}(\overrightarrow{x_n}) = \overline{X} - \frac{S^2(\overrightarrow{X_n})(n-1)}{h_{\frac{1-\gamma}{2}}}$ $\overline{\sigma}(\overrightarrow{x_n}) = \overline{X} + \frac{S^2(\overrightarrow{X_n})(n-1)}{h_{\frac{1+\gamma}{2}}}$
$Exp(\lambda)$	λ - неизв. Оценить λ	$2\lambda n\overline{X} \sim \chi^2(2n)$	$\underline{\lambda}(\overrightarrow{x_n}) = \frac{h_{\frac{1-\gamma}{2}}}{2n\overline{X}}$ $\overline{\lambda}(\overrightarrow{x_n}) = \frac{h_{\frac{1+\gamma}{2}}}{2n\overline{X}}$

$u_\alpha, t_\alpha, h_\alpha$ – квантили уровня α нормального распределения, распределения Стьюдента и распределения хи-квадрат соответственно.

Листинг программы

Листинг 1: Текст программы

```
function lab2()
clear all;


        X = [-17.04,-18.29,-17.38,-18.11,-18.96,-17.65,-17.02,-17.22,-16.25,
         -17.44,-17.69,-17.61,-17.09,-17.19,-16.02,-17.56,-16.94,-17.29,
         -16.93,-16.61,-19.38,-17.53,-16.39,-17.89,-17.98,-17.04,-16.22,
         -19.09,-18.91,-17.77,-18.30,-17.44,-18.84,-16.39,-16.13,-18.37,
         -16.37,-16.70,-17.78,-17.03,-17.76,-17.87,-17.20,-18.44,-17.19,
```

```
-17.75,-16.81,-17.97,-18.03,-16.87,-16.10,-19.16,-16.51,-18.39,
-16.48,-18.08,-17.49,-18.89,-19.09,-17.96,-18.40,-16.96,-18.15,
-18.71,-17.81,-17.86,-19.47,-17.86,-17.60,-17.30,-17.60,-17.71,
-18.42,-16.88,-16.76,-18.00,-17.97,-16.83,-18.00,-18.08,-17.61,
-17.02,-16.73,-17.64,-18.76,-17.68,-18.04,-16.45,-18.79,-18.03,
-17.38,-15.27,-15.97,-17.41,-18.61,-18.00,-17.42,-17.77,-19.05,
-16.16,-16.27,-18.00,-18.90,-17.05,-17.46,-17.49,-18.20,-17.59,
-15.78,-18.88,-18.53,-17.39,-17.83,-18.17,-16.15,-17.66,-17.76,
-18.32,-17.70,-17.56];

i_N = input('Введите N: ');

%начинаем с 10 значения, чтобы графики выглядели адекватнее
N = 10:i_N
%N = 10:120;

gamma = input('Введите gamma: ');
%gamma = 0.9;

alpha = (1 - gamma)/2;

%вычисление математического ожидания и дисперсии
mu = mean(X);
sSqr = var(X);

fprintf('mu = %.2f\n', mu);
fprintf('S^2 = %.2f\n\n', sSqr);

%вычисление точечных оценок математического ожидания и дисперсии
muArray = [];
for i = N
    muArray = [muArray, mean(X(1:i))];
end

varArray = [];
for i = N
    varArray = [varArray, var(X(1:i))];
end

figure
plot([N(1), N(end)], [mu, mu], 'm');
hold on;
```

```
    plot(N, muArray, 'g');

    %заполнение массивов для построение графиков
    %mu^(x_n), mu_down(x_n), mu_up(x_n)
    Ml = muArray - sqrt(varArray./N).*tinv(1 - alpha, N - 1);
    plot(N, Ml, 'b');

    Mh = muArray + sqrt(varArray./N).*tinv(1 - alpha, N - 1);
    plot(N, Mh, 'r');
    grid on;
    hold off;



    fprintf('mu_low = %.2f\n', Ml(end));
    fprintf('mu_high = %.2f\n', Mh(end));



    figure
    plot([N(1), N(end)], [sSqr, sSqr], 'm');
    hold on;
    plot(N, varArray, 'g');

    %заполнение массивов для построение графиков
    %S2(x_n), sigma_down(x_n), sigma_up(x_n)
    Sl = varArray.*(N - 1)./chi2inv(1 - alpha, N - 1);
    plot(N, Sl, 'b');

    Sh = varArray.*(N - 1)./chi2inv(alpha, N - 1);
    plot(N, Sh, 'r');
    grid on;
    hold off;
    fprintf('sigma^2_low = %.2f\n', Sl(end));
    fprintf('sigma^2_high = %.2f\n', Sh(end));
end
```

Результаты работы и графики

$$\mu = -17.59 \tag{2}$$

$$\sigma^2 = 0.73 \tag{3}$$

$$\text{Интервал для } \mu : (-17.68, -17.22) \tag{4}$$

$$\text{Интервал для } \sigma^2 : (0.54, 1.14)$$

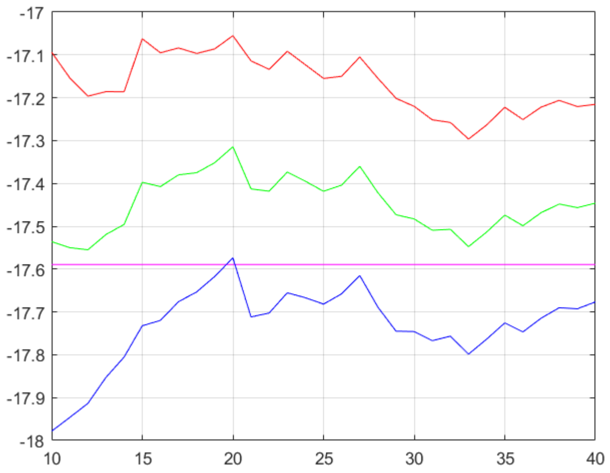

Рис. 1: График для задания 3а

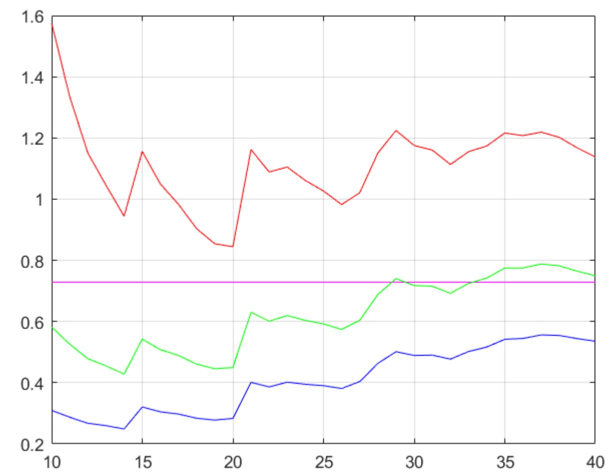

Рис. 2: График для задания 3б

Литература

1. Власов П.А. - Курс лекций по "Математической статистике"[Текст], Москва 2020 год.

2. Феллер В. Целочисленные величины. Производящие функции // Введение в теорию вероятностей и её приложения = An introduction to probability theory and its applicatons, Volume I second edition / Перевод с англ. Р. Л. Добрушина, А. А. Юшкевича, С. А. Молчанова Под ред. Е. Б. Дынкина с предисловием А. Н. Колмогорова. — 2-е изд. — М.: Мир, 1964. — С. 270—272.