Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Факультет «Информатика и системы управления»
Кафедра «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

«Рубежный контроль №1 по математической статистике»

Вариант 79

Студент группы ИУ7-63Б: Фурдик Н. О.
(Фамилия И.О.)
Преподаватель: Власов П. А.
(Фамилия И.О.)

Москва, 2020

Оглавление

Задание 1

Постановка задачи

1. Непрерывная случайная величина V имеет плотность распределения

$$f_V(v) = \frac{7\lambda^7}{v^8}, \qquad v \geqslant \lambda,$$

где значение $\lambda > 0$ неизвестно. Для оценки параметра λ используется статистика

$$\hat\lambda\left(\vec{V}\right) = \frac{7n-1}{7n} \min_{k=\overline{1,n}} \{V_k\},$$

где $\vec{V} = (V_1, \ldots, V_n)$ — случайная выборка из генеральной совокупности V. Является ли оценка $\hat\lambda\left(\vec{V}\right)$ а) несмещенной; б) эффективной по Рао-Крамеру?

Решение

N1 а)

$$F_V(v) = \int_\lambda^v \frac{7\lambda^7}{v^8}\,dv = 7\lambda^7\left(-\frac{1}{7v^7} + \frac{1}{7\lambda^7}\right) = 1 - \frac{\lambda^7}{v^7}$$

$$Y = \min_{k=\overline{1,n}} V_k$$

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = 1 - \prod P\{V_k > y\} = 1 - \prod_{k=1}^{n}\left(1 - P\{V_k \le y\}\right) = 1 - \prod_{k=1}^{n}\left(1 - F_V(y)\right) = 1 - \left(1 - F_V(y)\right)^n$$

$$MY = \int_{-\infty}^{+\infty} y n f_V(y)\left(1 - F_V(y)\right)^{n-1} dy = \int_\lambda^{+\infty} yn\frac{7\lambda^7}{y^8}\left(1 - 1 + \frac{\lambda^7}{y^7}\right)^{n-1} dy = \int_\lambda^{+\infty} \frac{7n\lambda^{7n}}{y^{7n}}\,dy = \frac{7n\lambda}{7n-1}$$

$$M[\hat\lambda] = \frac{7n-1}{7n} MY = \frac{7n-1}{7n}\cdot\frac{7n\lambda}{7n-1} = \lambda \Rightarrow$$

оценка $\hat\lambda$ явл. несмещенной

Ответ: а) является несмещенной

Задание 2

Постановка задачи

Пусть $X \sim Exp(\lambda)$, где значение λ неизвестно. Построить для λ доверительный интервал уровня $\gamma = 0.8$, если после n $= 6$ испытаний получены значения $\overline{x} = 4.32$, $S^2(\overrightarrow{x}) = 1.69$.

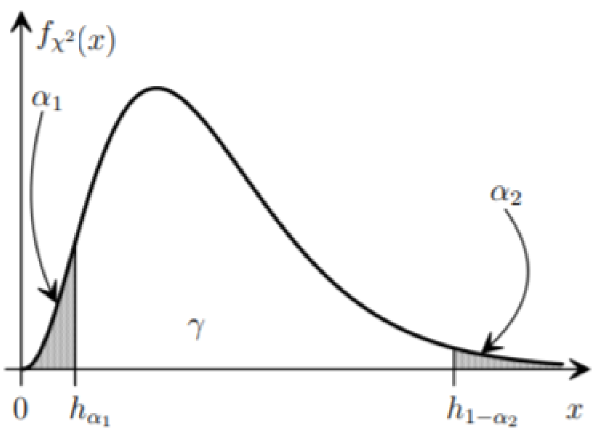
Решение

Построим доверительный интервал для дисперсии скорости снаряда, используя центральную статистику:

$$T(\vec{X}, \lambda) = 2\lambda n\overline{x} \sim \chi^2(2n) \tag{1}$$

Ниже изображен график функции плотности распределения статистики T.

Рис. 1: График функции плотности распределения статистики T



В соответствии со свойствами непрерывных случайных величин,

$$\gamma = P\left\{h_{\frac{1-\alpha}{2}} < T(\vec{X}, \lambda) < h_{\frac{1+\alpha}{2}}\right\} \tag{2}$$

Подставим формулу (1) для $T(\vec{X}, \lambda)$:

$$\gamma = P\left\{h_{0.1} < 2\lambda n\overline{x} < h_{0.9}\right\} \tag{3}$$

$$\gamma = P\left\{\frac{h_{0.1}}{2n\overline{x}} < \lambda < \frac{h_{0.9}}{2n\overline{x}}\right\} \tag{4}$$

Откуда получим доверительный интервал уровня $\gamma = 0.8$ для λ:

$$0.8 = P\left\{\frac{6.3}{2 \cdot 6 \cdot 4.32} < \lambda < \frac{18.54}{2 \cdot 6 \cdot 4.32}\right\} \tag{5}$$

$$0.8 = P\left\{0.121 < \lambda < 0.357\right\} \tag{6}$$

Ответ: $\lambda \in (0.121; 0.357)$