Lista de exercícios 1

Questão 1. Para cada função a seguir, (i) aproxime o valor de $f(a)$ usando o polinômio de Taylor de primeira ordem para f definido em torno de x_0, (ii) calcule o erro relativo correspondente e (iii) obtenha um limitante para o erro de truncamento dessa aproximação para valores de x em um intervalo de tamanho unitário centrado em a.

(a) $f(x) = \ln x$; $a = 1{,}5$; $x_0 = 1$.
(b) $f(x) = \sqrt{x}$; $a = 9{,}5$; $x_0 = 9$.

Questão 2 (Burden et al. (2017), Exercícios 1.1(13))**.** Seja $P_3(x)$ o polinômio de Taylor de ordem 3 da função $f(x) = (x-1)\ln x$ em $x_0 = 1$.

(a) Use $P_3(x)$ para aproximar $f(0{,}5)$.
(b) Obtenha um limitante para o erro $|f(0{,}5) - P_3(0{,}5)|$ e compare-o com o erro real.
(c) Determine um limitante para $|f(x) - P_3(x)|$ para $x \in [0{,}5, 1{,}5]$.
(d) Aproxime $\int_{0,5}^{1,5} f(x)dx$ usando $\int_{0,5}^{1,5} P_3(x)dx$.
(e) Determine um limitante para o erro cometido em (d).

Questão 3 (Burden et al. (2017), Exercícios 1.1(18))**.** Sejam $f(x) = (1-x)^{-1}$, com $x < 1$, e $P_n(x)$ seu polinômio de Taylor de ordem n definido em torno de $x_0 < 1$.

(a) Determine a expressão de $P_n(x)$ para $x_0 = 0$.
(b) Determine o valor de n necessário para que $P_n(x)$ aproxime $f(x)$ com precisão de 10^{-6} para $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Questão 4 (Burden et al. (2017), Exercícios 1.2(2))**.** Calcule os erros absoluto e relativo de cada aproximação $\tilde{p}$ para o valor exato p, dados a seguir.

(a) $p = e^{10}$ e $\tilde{p} = 22.000$
(b) $p = 10^{\pi}$ e $\tilde{p} = 1.400$
(c) $p = 8!$ e $\tilde{p} = 39.900$
(d) $p = 9!$ e $\tilde{p} = \sqrt{18\pi}\,(9/e)^9$

Questão 5 (Burden et al. (2017), Exercícios 1.2(4))**.** Determine o maior intervalo no qual $\tilde{p}$ deve estar contido a fim de aproximar p com quatro dígitos significativos exatos para cada valor de p abaixo.

(a) π (b) e (c) $\sqrt{2}$ (d) $\sqrt[3]{7}$

Questão 6 (Cheney e Kincaid (2008), Problemas 2.1)**.** Sabe-se que a operação aritmética de ponto flutuante $a \oplus (b \oplus c)$ pode ter o resultado diferente de $(a \oplus b) \oplus c$, isto é, a operação de adição não é associativa. Exemplifique isso por meio de um exemplo.

Questão 7. Um sistema de ponto flutuante é dado por $\beta = 2$, $t = 2$, $e_{\min} = -1$, $e_{\max} = 1$.

(a) Liste todos os números desse sistema.
(b) Converta os números (i) 1/3, (ii) 2/3, (iii) 0,9 et (iv) 9,6 para esse sistema.

Questão 8. Realize as operações a seguir considerando um formato decimal normalizado com precisão de três dígitos, com o intervalo de expoentes válidos ilimitado. Calcule o erro absoluto e o erro relativo tomando o valor exato constituído de pelo menos cinco algarismos de precisão.

(a) $133 \oplus 0{,}921$
(b) $133 \ominus 0{,}499$
(c) $(121 \ominus 0{,}327) \ominus 119$
(d) $(121 \ominus 119) \ominus 0{,}327$

Questão 9. O sistema de precisão dupla do IEEE é um sistema numérico binário caracterizado por ter uma precisão de 53 bits, $e_{\min} = -1022$ e $e_{\max} = 1023$. Neste contexto, é verdade que $1/3 \oplus 2/3$ é diferente de 1 quando usamos:

(a) arredondamento para o mais próximo?
(b) arredondamento em direção ao zero?

Questão 10 (Adaptado de REAMAT/UFRGS, Exemplo 2.7.2; Ascher e Greif (2011), Exercícios 2.5(15-16))**.**

(a) Calcule as raízes da equação:

$$x^2 + 300x - 0{,}014 = 0$$

aplicando a fórmula de Bhaskara, considerando um sistema decimal com precisão de seis dígitos.

(b) Sabendo que os valores exatos das raízes com seis dígitos são $\xi_1 = -3{,}00000 \times 10^2$ e $\xi_2 = 4{,}66667 \times 10^{-5}$, discuta o que pode ter ocorrido com o resultado do item (a).

(c) Proponha uma solução para contornar esta dificuldade, calculando os novos valores e seus respectivos erros relativos. [Dica: utilize as Equações 1.1, 1.2 e 1.3 do livro-texto.]

(d) Implemente a fórmula de Bhaskara e o método escolhido no item (c) em funções denominadas `bhaskara` e `proposto`, respectivamente. Essas funções devem ter como entrada números reais a, b e c em precisão dupla e retornar as raízes do polinômio quadrático $ax^2 + bx + c$. Avalie o desempenho das funções implementadas nos seguintes casos:

(i) $a = 1$, $b = -10^5$, $c = 1$.
(ii) $a = 6 \times 10^{30}$, $b = 5 \times 10^{30}$, $c = -4 \times 10^{30}$.
(iii) $a = 10^{-30}$, $b = -10^{30}$, $c = 10^{30}$.