

Lista de exercícios 2

Questão 1. Encontre intervalos que contenham soluções das seguintes equações por intermédio da análise de seus gráficos.

(a)
$$3x - e^x = 0$$

(b)
$$x+1-2 \operatorname{sen}(\pi x) = 0$$

Questão 2. Mostre que as equações a seguir possuem pelo menos uma solução no intervalo especificado.

(a)
$$x - (\ln x)^x = 0$$
 em [4,5]

(b)
$$-3 \operatorname{tg}(2x) + x = 0 \operatorname{em} [0, 1]$$

Questão 3. Mostre que as equações a seguir possuem uma única raiz real positiva.

(a)
$$e^x + x - 2 = 0$$

(b)
$$ln(x) + x^3 - \frac{1}{x} - 10 = 0$$

(c)
$$x^7 + x^5 + x^3 + 1 = 0$$

(d)
$$e^x + x^3 - 2 = 0$$

Questão 4. Verifique se o método da bisseção pode ser empregado para calcular o zero da função $f(x) = \ln x + x^2 - 3$ no intervalo [1,2].

Questão 5.

- (a) Determine π com erro absoluto no máximo igual a 0,05 aplicando o método da bisseção à equação senx = 0, iniciando com o intervalo [3,4].
- (b) Quantas iterações seriam suficientes para aproximar π com precisão de 10^{-8} ?

Questão 6. Seja ξ a menor raiz real positiva de $f(x) = 1 - x + \sin x$.

- (a) Determine um intervalo [a,b] de comprimento igual a um, a partir do qual o método da bisseção convergirá para ξ .
- (b) Utilize o método da bisseção, iniciando com o intervalo obtido em (a), para aproximar ξ com erro absoluto menor do que 0,1.



Questão 7. Seja $f(x) = (x+2)(x+1)x(x-1)^3(x-2)$. Indique para qual raiz o método da bisseção convergirá quando aplicado a f, partindo-se dos intervalos:

- (a) [-3;2,5]
- (b) [-2,5;3]
- (c) [-1,75;1,5]
- (d) [-1,5;1,75]

Questão 8. Para resolver $x^3 - 2x + 1 = 0$, foram propostos os seguintes problemas de ponto fixo.

(i)
$$x = \frac{1}{2} (x^3 + 1)$$

(iii)
$$x = \sqrt{2 - \frac{1}{x}}$$

(ii)
$$x = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$$

(iv)
$$x = -\sqrt[3]{1 - 2x}$$

- (a) Deduza cada uma das equações.
- (b) Tomando $p_0 = \frac{1}{2}$, calcule as aproximações p_1 a p_4 para cada equação.
- (c) Baseando-se apenas no item (b), quais métodos parecem convergir?

Questão 9. Construa uma função de ponto fixo convergente para obter a raiz negativa da equação $x\cos(x) - x^2 - 8x - 1$ em [-1,0].

Questão 10. As raízes da equação $x^2 - 3x + 2 = 0$ são 1 e 2. Considere a função de iteração de ponto fixo:

$$g(x) = \frac{1}{\omega} (x^2 - (3 - \omega)x + 2), \ \omega \neq 0.$$

- (a) Determine para quais valores de ω o método do ponto fixo convergirá para 1, supondo como valor inicial $x_0 \neq 1$.
- (b) Realize uma análise análoga à do item (a), mas agora para a raiz 2.

Questão 11. Mostre que o método de Newton aplicado a f(x) = ax + b converge em um único passo.

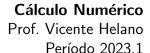
Questão 12. Utilize o método de Newton para determinar soluções com precisão de 10^{-2} para as equações:

(a)
$$e^x + 2^{-x} + 2\cos x - 6 = 0$$
, para $1 \le x \le 2$

(b)
$$(x-2)^2 - \ln x = 0$$
, para $e \le x \le 4$

Questão 13. Construa um polinômio *P* de grau máximo dois tal que o método de Newton aplicado a *P* produza a seguinte sequência cíclica:

$$x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 2, \dots$$





Questão 14. Analise o que acontece com o método de Newton quando aplicado à função $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 15$ ao iniciar com $x_0 = 3$, $x_0 < 3$ ou $x_0 > 3$.

Questão 15. O gerente de um posto de combustíveis está desconfiado de que a régua de medição de volume de seu fornecedor está desregulada. Segundo o gerente, os combustíveis são armazenados em tanques cilíndricos "deitados". O sistema utilizado no posto informa quando é necessário solicitar mais combustível baseado no volume de combustível vendido. A cada reabastecimento, o motorista do caminhão fornecedor insere uma régua de medição para aferir quanto foi despejado. Essa régua relaciona o comprimento da porção submersa da régua com o volume correspondente. O gerente procurou você para verificar a última medição realizada, na qual a régua mostrava 16,13 m³ correspondendo a uma altura de 1,3 metros.

Empregando conceitos de integração, o volume V de combustível referente a uma altura submersa h é dado por:

$$V(h) = L \left\lceil \frac{\pi r^2}{2} - r^2 \arcsin\left(\frac{r-h}{r}\right) + (h-r)\sqrt{r^2 - (h-r)^2} \right\rceil,$$

onde r e L são o raio da base e o comprimento do cilindro, respectivamente.

- (a) Implemente a função V em Python, usando o bloco de notas em anexo.
- (b) Sabendo que r = 1 m e L = 7 m, o que você diria das suspeitas do gerente? Elas são procedentes? Porque?
- (c) O gerente aproveitou também para lhe pedir uma orientação quanto ao momento certo para solicitar o reabastecimento de seus tanques. Geralmente, ele solicita mais combustível à distribuidora quando um tanque possui 1/3 ou menos de sua capacidade total ocupada. Utilize os conceitos vistos até então para resolver este problema com precisão de 10⁻² metros.