Université Ibn Zohr
Faculté des sciences, Agadir
Département de Mathématiques

Année Universitaire : 2018 - 2019
Prof. F. MARAGH
Filière : SMA

Examen d'Analyse 2 - Session Normale (Durée : 1h30min)

Exercice 1 (Questions de cours sur 4 pts). **Barème**

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction Riemann intégrable.

(1) Montrer que la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\, dt$ est continue sur $[a, b]$. (2 pts)

(2) Montrer que si $f \geq 0$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f(t)\, dt \geq 0$. (2 pts)

Exercice 2 (6 pts).

(1) Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n} \sqrt{k^2 - k}$ est convergente et calculer sa limite. (2 pts)

(**Indication** : Encadrer u_n par deux sommes de Riemann.)

(2) Calculer une primitive de la fonction f définie par : (2 pts)

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 - 2x + 5}.$$

(3) Discuter suivant la valeur du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergence de l'intégrale : (2 pts)

$$\int_0^{+\infty} \frac{t - \sin t}{t^\alpha} dt.$$

Exercice 3 (5 pts).

(1) Calculer (2 pts)

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t\sqrt{t^2 + 1}} dt$$

à l'aide du changement de variable $u = \sqrt{t^2 + 1}$.

(2) Montrer avec les règles de Riemann que $I = \int_1^{+\infty} \dfrac{1}{t\sqrt{t^2 + 1}} dt$ converge. (1 pt)

(3) Calculer la valeur de I. (2 pts)

Exercice 4 (5 pts).

(1) Résoudre l'équation différentielle : (3 pts)

$$z''(t) + 2z'(t) - 3z(t) = te^t + \cos(t).$$

(2) Déduire la solution générale de l'équation différentielle (Euler) : (2 pts)

$$x^2 y''(x) + 3xy'(x) - 3y(x) = |x| \ln|x| + \cos(\ln|x|).$$