Série 2

Exercice 1 :
Étudier la nature des intégrales généralisées suivantes par un calcul de primitive.

$$a)\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+\sqrt{x}},\quad b)\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}},\quad c)\int_1^{+\infty}e^{-\sqrt{x}}dx$$
$$d)\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^3+1},\quad e)\int_0^1 x\log x dx$$

Exercice 2 :
Discuter la nature des intégrales généralisées suivantes en appliquant les critères de convergences.

$$\mathrm{I}_1=\int_0^1\frac{\sin^2 t+1}{t^2(1+t)}dt,\quad \mathrm{I}_2=\int_1^{+\infty}e^{-t^2}dt,\quad \mathrm{I}_3=\int_0^1\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt,$$
$$\mathrm{I}_4=\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)dt,\quad \mathrm{I}_5=\int_1^{+\infty}\frac{1+\sin t}{1+\sqrt{t^3}}dt,\quad \mathrm{I}_6=\int_1^{+\infty}\frac{t+\cos t}{t^2+1}dt.$$

Exercice 3 :
Les intégrales suivantes sont-elles absolument convergentes? semi-convergentes?

$$\mathrm{J}_1=\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^{\frac{5}{2}}}dx,\quad \mathrm{J}_2=\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx,\quad \mathrm{J}_3=\int_0^{+\infty}\cos\left(x^2\right)dx,$$
$$\mathrm{J}_4=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}dx,\quad \mathrm{J}_5=\int_1^{+\infty}\frac{1+\sin x}{1+\sqrt{x^3}}dx.$$

Exercice 4 :
Intégrer les équations différentielles suivantes:

$$1)xy'+y=\sin x,\quad 2)y'=\frac{y}{x^2}+e^{-\frac{1}{x}},\quad 3)(1+x)y'-2y=2(1+x)^2\log(1+x),$$
$$4)y''-\frac{y'}{x}=x,\quad 5)y''-7y'+6y=(x-2)e^x,\quad 6)y''+4y=cos2x.$$