Correction d'Examen d'Analyse 2 – Intégration – SMA

Exercice 1 (6 points)**.**

(1) Soit $\mathscr{E}([a,b])$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$, on dit que f est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$ si et seulement si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists (g,h) \in \mathscr{E}([a,b])$ vérifiant : (2 pt)

(i) $g \leq f \leq h$,

(ii) $\int_a^b (h-g)(x)\,dx \leq \varepsilon$.

(2) Soit (g,h) un couple *quelconque* de fonctions en escalier sur $[0,1]$ vérifiant : (2 pts)

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \quad ; \quad \forall x \in [0,1],$$

et soit σ une subdivision de $[0,1]$ adaptée à la fois à g et à h. L'intérieur de chaque intervalle de σ contient des valeurs rationnelles et irrationnelles par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, alors

$$g(x) \leq 0 \text{ et } h(x) \geq 1; \quad \forall x \in [0,1],$$

d'où

$$\int_0^1 \big(h(x) - g(x)\big)\,dx \geq 1,$$

Donc la fonction f n'est pas Riemann-intégrable.

(3) Il suffit de prendre la fonction continue sur $[0,1]$ définie par $f(x) = \cos(2\pi x)$. (2 pts)
On a alors

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} u_n &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\\ &= \int_0^1 f(x)dx\\ &= \int_0^1 \cos(2\pi x)\,dx = \left[\frac{1}{2\pi}\sin(2\pi x)\right]_0^1 = \boxed{0.}\end{aligned}$$

Exercice 2 (6 points)**.** Soit n un entier naturel non nul.

(1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{1;2;3;\ldots;n\}$. (3 pts)
On a :

$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right) = k \quad \text{si} \quad \frac{1}{x} \in \left]k, k+1\right[$$

donc

$$\forall x \in \left]\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right[; f(x) = k.$$

Alors la fonction f est une fonction en escalier et $\sigma = \left\{\frac{1}{n}; \frac{1}{n-1}; \frac{1}{n-2}; \cdots; 1\right\}$ est une subdivision adaptée à f.

(2) On a (3 pts)

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx = \sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} \mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right)dx$$
$$= \sum_{k=1}^{n-1} k\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} 1dx$$
$$= \sum_{k=1}^{n-1} k\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}$$
$$= \boxed{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}.}$$

Exercice 3 (8 points)**.**

(1) Calcul des intégrales :

(a) On a : (2 pts)

$$\mathrm{I} = \int_0^1 (t+1)\cosh(t)dt = [(t+1)\sinh(t)]_0^1 - \int_0^1 \sinh(t)dt$$
$$= [(t+1)\sinh(t) - \cosh(t)]_0^1$$
$$= 2\sinh(1) - \cosh(1) - \sinh(0) + \cosh(0)$$
$$= 2\sinh(1) - \cosh(1) + 1 = \boxed{\frac{e}{2} - \frac{3e^{-1}}{2} + 1.}$$

(b) On prend $x = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$ (2 pts)

On a $\sin(t) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ et $dt = \dfrac{2x}{1+x^2}dx$, donc

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin t} = \int_{\tan\frac{\pi}{6}}^{\tan\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{x} = \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1} \frac{dx}{x} = [\ln x]_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1} = \boxed{\ln\sqrt{3}.}$$

(2) Calcul des primitives des fonctions, dans la suite C désigne une constante réelle arbitraire.

(a) On a : (2 pts)

$$f(x) = \frac{1}{x^3-x} = \frac{1}{x(x-1)(x+1)}$$
$$= \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{-1}{x} + \frac{\frac{1}{2}}{x+1}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{-1}{x} + \frac{\frac{1}{2}}{x+1} \right) dx \\
&= \frac{1}{2}\ln(|x-1|) - \ln(|x|) + \frac{1}{2}\ln(|x+1|) + C \\
&= \boxed{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\left|x^2-1\right|}{x^2}\right) + C.}
\end{aligned}$$

(b) On pose $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ on a : (2 pts)

$$\begin{aligned}
G(x) &= \int \frac{1}{1-\sin x} dx \\
&= \int \frac{1}{1-\frac{2t}{1+t^2}} \times \frac{2}{1+t^2} dt \\
&= \int \frac{2}{(t-1)^2} dt \\
&= -\frac{2}{t-1} + C \\
&= \boxed{-\frac{2}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)-1} + C.}
\end{aligned}$$