Série 2

Exercice 1 :
Étudier la nature des intégrales généralisées suivantes par un calcul de primitive.

$$a) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+\sqrt{x}}, \quad b) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}, \quad c) \int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$$
$$d) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3+1}, \quad e) \int_0^1 x \log x dx$$

Exercice 2 :
Discuter la nature des intégrales généralisées suivantes en appliquant les critères de convergences.

$$\mathrm{I}_1 = \int_0^1 \frac{\sin^2 t + 1}{t^2(1+t)} dt, \quad \mathrm{I}_2 = \int_1^{+\infty} e^{-t^2} dt, \quad \mathrm{I}_3 = \int_0^1 \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt,$$
$$\mathrm{I}_4 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\left(e^{\frac{1}{t}} - 1\right) dt, \quad \mathrm{I}_5 = \int_1^{+\infty} \frac{1+\sin t}{1+\sqrt{t^3}} dt, \quad \mathrm{I}_6 = \int_1^{+\infty} \frac{t+\cos t}{t^2+1} dt.$$

Exercice 3 :
Les intégrales suivantes sont-elles absolument convergentes? semi-convergentes?

$$\mathrm{J}_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^{\frac{5}{2}}} dx, \quad \mathrm{J}_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx, \quad \mathrm{J}_3 = \int_0^{+\infty} \cos\left(x^2\right) dx,$$
$$\mathrm{J}_4 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}} dx, \quad \mathrm{J}_5 = \int_1^{+\infty} \frac{1+\sin x}{1+\sqrt{x^3}} dx.$$

Exercice 4 :
Intégrer les équations différentielles suivantes:

$$1) xy' + y = \sin x, \quad 2) y' = \frac{y}{x^2} + e^{-\frac{1}{x}}, \quad 3) (1+x)y' - 2y = 2(1+x)^2 \log(1+x),$$
$$4) y'' - \frac{y'}{x} = x, \quad 5) y'' - 7y' + 6y = (x-2)e^x, \quad 6) y'' + 4y = cos2x.$$