Univérsité Ibn Zohr
Faculté des Sciences - Agadir
Département de Mathématiques
Année Univérsitaire 19-20
Filière: SMA & SMI (S2)

Examen blanc 1 d'Algèbre 3

Exercice 1

Soient

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y - 2z = 0,\ et\ 2x - y - z = 0\}, \quad \text{et} \quad F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y - z = 0\}$$

deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$. Soient $a = (1, 1, 1), b = (1, 0, 1)$ et $c = (0, 1, 1)$.

1. Montrer que E, F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base de E.
3. Montrer que $\{b, c\}$ est une base de F.
4. Montrer que $\{a, b, c\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.
6. Soit $u = (2, -1, 1)$, exprimer u dans la base $\{a, b, c\}$.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application définie par

$$f(x, y, z) = (x + y, y + z, x - z)$$

1. énoncer le théorème du rang.
2. Montrer que f est linéaire.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$. Déduire le $\mathrm{rg}(f)$. f est-elle injective? surjective?
4. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.
5. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$. Déduire $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 3

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. On définit f l'application de E dans lui-même par

$$f(P) = P + (1 - X)P'.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$. f est-elle injective? surjective?
3. Soit $\mathcal{B} = (P_0 = 1, P_1 = X - 1, P_2 = -X^2 + 2)$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E.
4. Déterminer les coordonnées de $f(P_0), f(P_1)$, et $f(P_2)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 4

$$\text{Soit} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer N^2 et N^3 et déduire N^n pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Vérifier que $A = I_3 + N$. En déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.