UNIVERSITE IBN ZOHR
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE
AGADIR

TRAVAUX DIRIGES D'ELECTRICITE 1

FILIERES : SMP1 ET SMIA1

Série N° 1

Exercice 1 : Etude d'un système de charges ponctuelles

Quatre charges ponctuelles identiques q sont placées aux points A, B, C et D qui se situent sur les axes (Ox) et (Oy) à une distance a de l'origine du repère orthonormé $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ comme le montre la figure (1).

On suppose que le champ de gravitation $\vec{g}$ est uniforme.

1) Trouver l'expression de la force électrostatique exercée sur une masse ponctuelle m de charge q placée au point M sur l'axe (Oz) de côte z.
2) Montrer que l'intensité de cette force passe par un maximum lorsque $z = a\sqrt{2}/2$.
3) Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, montrer que l'équilibre de la masse m n'est possible que si cette masse ne dépasse pas une valeur m_0 à déterminer.

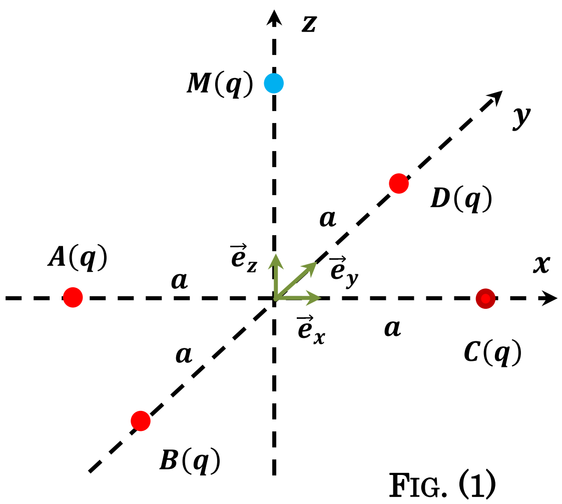


FIG. (1)

Exercice 2 : Champ créé par des charges ponctuelles

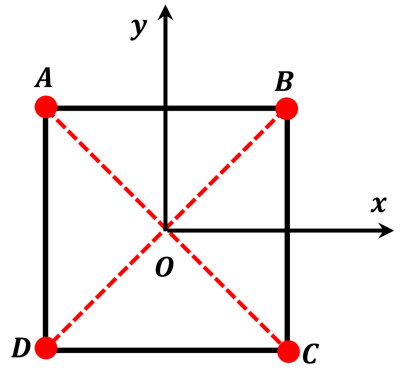
1) Deux charges ponctuelles $q_1(|q_1| = 6\mu C)$ et $q_2(|q_2| = 5\mu C.)$ sont placées dans le vide respectivement en A et en B tel que $AB = d = 10cm$.

Trouver un point M de la droite (AB) où le vecteur champ $\vec{E}$ résultant est nul. On envisage deux cas :

- 1° cas : q_1 et q_2 ont même signe.
- 2° cas : q_1 et positif et q_2 est négatif.

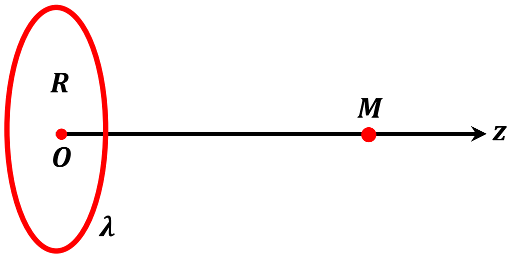
2) Un ensemble de quatre charges électriques ponctuelles $+q$, $-q$, $+2q$ et $-q$ placées respectivement en A, B, C et D sommets d'un carré de côté a.

Déterminer l'intensité de champ électrostatique créé par les différentes charges au centre O du carré.



Exercice 3 : Spire chargée

On considère une spire circulaire de rayon $\boldsymbol{R}$, de centre $\boldsymbol{O}$, incluse dans le plan $\boldsymbol{xOy}$ et d'axe de symétrie de révolution $\boldsymbol{Oz}$. Cette spire porte une charge positive $\boldsymbol{Q}$ répartie uniformément avec la densité linéique de charge $\boldsymbol{\lambda}$. On se propose d'étudier le champ sur l'axe $\boldsymbol{Oz}$.

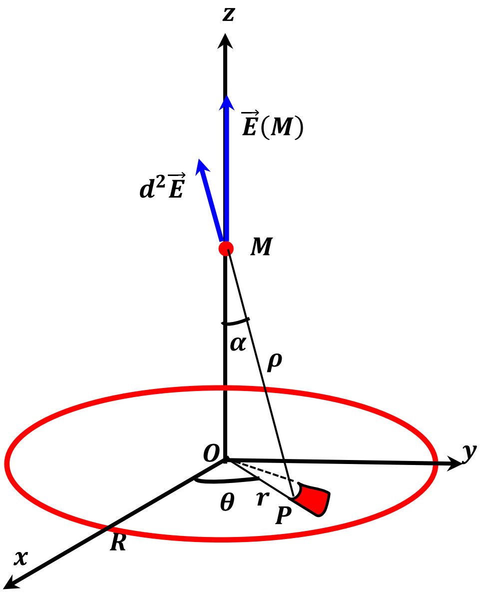


1) Montrer par des arguments de symétrie que le champ $\vec{E}$ au point $\boldsymbol{M}$ est porté par l'axe $\boldsymbol{Oz}$?
2) Déterminer $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{z})$?
3) Calculer le potentiel $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{z})$ par calcul direct ?
4) Calculer le champ à partir du potentiel ?

Exercice 4 : Disque chargé

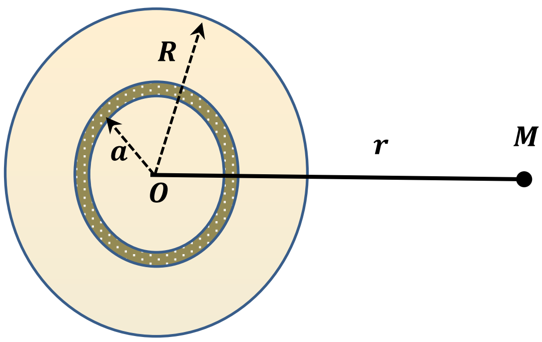
Soit un disque de centre $\boldsymbol{O}$ et de rayon $\boldsymbol{R}$ uniformément chargé en surface avec la densité $\boldsymbol{\sigma}$ positive et uniforme.

1) Montrer qualitativement que le champ créé par le disque au point $\boldsymbol{M}$ est porté par l'axe $\boldsymbol{Oz}$?
2) Déterminer l'expression vectorielle du champ électrostatique créé en tout point $\boldsymbol{M}$ de l'axe de révolution du disque ?
3) En considérant le disque comme engendré par un fil circulaire de rayon $\boldsymbol{r}$ et d'épaisseur $\boldsymbol{dr}$, quand r varie de $\boldsymbol{O}$ à $\boldsymbol{R}$, utiliser les résultats de l'exercice 3 pour déterminer l'expression du potentiel au point $\boldsymbol{M}$? en déduire le champ ?



Exercice 5 : Sphère chargée en volume

Soit une sphère uniformément chargée en volume avec la densité ρ. En considérant la sphère comme engendrée par une coque sphérique de rayon $\boldsymbol{a}$ et d'épaisseur $\boldsymbol{da}$, quand $\boldsymbol{a}$ varie de $\mathbf{0}$ à $\boldsymbol{R}$. Trouver l'expression de $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{M})$ potentiel au point $\boldsymbol{M}$?



UNIVERSITE IBN ZOHR
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE
AGADIR

كلية العلوم
ⵜⴰⵙⵖⵍⵉⵜ ⵏ ⵜⵎⴰⵙⵙⵏⵉⵏ
FACULTÉ DES SCIENCES

TRAVAUX DIRIGES D'ELECTRICITE 1

FILIERES : SMP1, SMC1 ET SMIA1

Correction Série N° 1

Exercice 1 : Etude d'un système de charges ponctuelles

1) Expression de la force électrostatique exercée sur une masse ponctuelle m de charge charge q placée au point M sur l'axe (Oz) de côte z

Les forces électrostatiques exercée sur la masse ponctuelle m de charge q placée au point M sur l'axe (Oz) de côte z par chaque charge q placées en A, B, C et D sont :

$$\vec{F}_A = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{AM}}{AM^3} \qquad \vec{F}_B = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{BM}}{BM^3} \qquad \vec{F}_C = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{CM}}{CM^3} \qquad \vec{F}_D = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{DM}}{DM^3}$$

Avec $$AM = BM = CM = DM = \sqrt{a^2+z^2}$$

D'autre part, les coordonnées de A, B, C, D et M sont :

$$A\begin{cases}-a\\0\\0\end{cases} \qquad B\begin{cases}0\\-a\\0\end{cases} \qquad C\begin{cases}a\\0\\0\end{cases} \qquad D\begin{cases}0\\a\\0\end{cases} \qquad M\begin{cases}0\\0\\z\end{cases}$$

En conséquence, les vecteurs apparaissant dans les forces sont :

$$\overrightarrow{AM}\begin{cases}x_M-x_A\\y_M-y_A\\z_M-z_A\end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AM}\begin{cases}a\\0\\z\end{cases} \quad ; \quad \overrightarrow{BM}\begin{cases}x_M-x_B\\y_M-y_B\\z_M-z_B\end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{BM}\begin{cases}0\\a\\z\end{cases}$$

$$\overrightarrow{CM}\begin{cases}x_M-x_C\\y_M-y_C\\z_M-z_C\end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{CM}\begin{cases}-a\\0\\z\end{cases} \quad ; \quad \overrightarrow{DM}\begin{cases}x_M-x_D\\y_M-y_D\\z_M-z_D\end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{DM}\begin{cases}0\\-a\\z\end{cases}$$

On remplace pour avoir :

$$\vec{F}_A = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a\vec{e}_x+z\vec{e}_z}{\left(\sqrt{a^2+z^2}\right)^3} \quad ; \quad \vec{F}_B = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a\vec{e}_y+z\vec{e}_z}{\left(\sqrt{a^2+z^2}\right)^3}$$

$$\vec{F}_C = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-a\vec{e}_x+z\vec{e}_z}{\left(\sqrt{a^2+z^2}\right)^3} \quad ; \quad \vec{F}_D = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-a\vec{e}_y+z\vec{e}_z}{\left(\sqrt{a^2+z^2}\right)^3}$$

La force électrostatique exercée sur la masse ponctuelle $\boldsymbol{m}$ de charge $\boldsymbol{q}$ placée au point M sur l'axe $(\boldsymbol{Oz})$ de côte $\boldsymbol{z}$ sera alors en vertu du principe de superposition :

$$\vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{F}_D$$

Donc $$\vec{F} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\left(\sqrt{a^2+z^2}\right)^3}\left(a\vec{e}_x + z\vec{e}_z + a\vec{e}_y + z\vec{e}_z - a\vec{e}_x + z\vec{e}_z - a\vec{e}_y + z\vec{e}_z\right)$$

d'où $$\vec{F} = \frac{4q^2z}{4\pi\varepsilon_0\left(\sqrt{a^2+z^2}\right)^3}\vec{e}_z$$

Enfin $$\vec{F} = \frac{q^2\,z}{\pi\varepsilon_0\left(\sqrt{a^2+z^2}\right)^3}\vec{e}_z$$

2) Montrons que l'intensité de cette force passe par un maximum lorsque $z = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

L'intensité de cette force passe par un maximum lorsque : $dF/dz = 0$. Ainsi, on écrira que :

$$\frac{dF}{dz} = \frac{q^2}{\pi\varepsilon_0}\,\frac{\left(\sqrt{a^2+z^2}\right)^3 - z\,\frac{3}{2}2z\,\sqrt{a^2+z^2}}{(a^2+z^2)^3}$$

$$\frac{dF}{dz} = \frac{q^2\,\sqrt{a^2+z^2}}{\pi\varepsilon_0}\,\frac{\left(a^2+z^2\right)-3z^2}{(a^2+z^2)^3}$$

$$\frac{dF}{dz} = \frac{q^2}{\pi\varepsilon_0}\,\frac{a^2-2z^2}{(a^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

D'où $\qquad \frac{dF}{dz} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{q^2}{\pi\varepsilon_0}\,\frac{a^2-2z^2}{(a^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} = 0$

$$a^2 - 2z^2 = 0$$

$$z^2 = \frac{a^2}{2}$$

$$z = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Et la force électrostatique sera dans ce cas :

$$F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,a\right) = \frac{q^2\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,a}{\pi\varepsilon_0\left(\sqrt{a^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,a\right)^2}\right)^3}$$

Ou $\qquad F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,a\right) = \frac{q^2\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,a}{\pi\varepsilon_0\left(\frac{3}{2}a^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

Enfin $\qquad F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,a\right) = \frac{2\,q^2}{\pi\varepsilon_0\sqrt{27}\,a^2}$

3) Étude de la possibilité de l'équilibre de la masse m

Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, montrons que l'équilibre de la masse m n'est possible que si cette masse ne dépasse pas une valeur m_0 qu'on détermine.

La masse m est soumise à :

Le poids de la masse m donné par : $\qquad \vec{P} = -m\,g\,\vec{e}_z$

La force électrostatique donnée par : $\qquad \vec{F} = \frac{q^2\,z}{\pi\varepsilon_0\left(\sqrt{a^2+z^2}\right)^3}\vec{e}_z$

La condition d'équilibre de la masse m portant la charge q se traduit par l'équation :

$F(z) = mg \qquad \Rightarrow \qquad \frac{q^2\,z}{\pi\varepsilon_0\left(\sqrt{a^2+z^2}\right)^3} = mg$

$$m = \frac{q^2\,z}{\pi\varepsilon_0\,g\,\left(\sqrt{a^2+z^2}\right)^3}$$

Puisque la valeur maximale de la force électrostatique est :

$$F_{max} = F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,a\right) = \frac{2\,q^2}{\pi\varepsilon_0\sqrt{27}\,a^2}$$

Donc $\qquad F \le F_{max} \qquad \Rightarrow \qquad mg \le F_{max}$

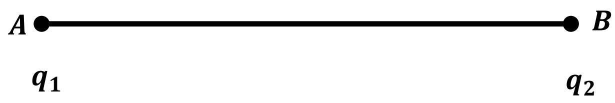
Ou encore $\qquad mg \le \frac{2\,q^2}{\pi\varepsilon_0\sqrt{27}\,a^2}$

C'est-à-dire, $$m \leq m_0 = \frac{2\,q^2}{\pi\varepsilon_0 g\,\sqrt{27}\,a^2}$$

Exercice 2 : Champ créé par des charges ponctuelles

1) Deux charges ponctuelles $q_1(|q_1| = 6\mu C)$ et $q_2(|q_2| = 5\mu C.)$ sont placées dans le vide respectivement en A et en B tel que $AB = d = 10cm$.

Trouvons un point M de la droite (AB) où le vecteur champ $\vec{E}$ résultant est nul. On envisage deux cas :



Le champ électrostatique $\vec{E}$ créé par les charges q_1 en A, q_2 **en** B en point M de la droite AB:

$\vec{E} = \vec{E}_A + \vec{E}_B$

Avec : $$\vec{E}_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{AM^2}\,\vec{u}_{AM} \quad et \quad \vec{E}_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{BM^2}\,\vec{u}_{BM}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{AM^2}\,\vec{u}_{AM} + \frac{q_2}{BM^2}\,\vec{u}_{BM}\right)$$

$$\vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \frac{q_1}{AM^2}\,\vec{u}_{AM} + \frac{q_2}{BM^2}\,\vec{u}_{BM} = \vec{0}$$

$$\frac{q_1}{AM^2}\,\vec{u}_{AM} = -\frac{q_2}{BM^2}\,\vec{u}_{BM} \Rightarrow \frac{|q_1|}{AM^2} = \frac{|q_2|}{BM^2} \Rightarrow \frac{6}{AM^2} = \frac{5}{BM^2} \Rightarrow \sqrt{5}\,AM = \sqrt{6}\,BM$$

$$\Rightarrow AM = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}\,BM$$

- 1° cas : q_1 et q_2 ont même signe.

$$\frac{q_1}{AM^2}\,\vec{u}_{AM} = -\frac{q_2}{BM^2}\,\vec{u}_{BM}$$

$\vec{u}_{AM}$ et $\vec{u}_{BM}$ ont des sens opposées alors M est entre A et B.

$$AM + BM = AB \Rightarrow BM + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}\,BM = AB \Rightarrow BM\left(1 + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}\right) = AB \Rightarrow BM = \frac{\sqrt{5}\,AB}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} BM = \dfrac{\sqrt{5}\,AB}{\sqrt{5}+\sqrt{6}} \\ AM = \dfrac{\sqrt{6}\,AB}{\sqrt{5}+\sqrt{6}} \end{cases}$$

- 2° cas : q_1 et positif et q_2 est négatif.

$$\frac{q_1}{AM^2}\,\vec{u}_{AM} = -\frac{q_2}{BM^2}\,\vec{u}_{BM}$$

$\vec{u}_{AM}$ et $\vec{u}_{BM}$ ont le même sens alors M est à l'extérieur du segment $[A, B]$.

Deux cas possible, théoriquement :

➧ M après le point B :

$$AM = AB + BM \Rightarrow \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}\,BM = AB + BM \Rightarrow BM\left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} - 1\right) = AB \Rightarrow BM = \frac{\sqrt{5}\,AB}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} BM = \dfrac{\sqrt{5}\,AB}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} \\ AM = \dfrac{\sqrt{6}\,AB}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} \end{cases}$$

➧ M avant le point A :

$$BM = AB + AM \Rightarrow BM = AB + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}BM \Rightarrow BM\left(1 - \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}\right) = AB \Rightarrow BM = \frac{\sqrt{5}\,AB}{\sqrt{5}-\sqrt{6}} < 0$$

C'est impossible car BM est positif

2) Un ensemble de quatre charges électriques ponctuelles $+q, -q, +2q$ et $-q$ placées respectivement en A, B, C et D sommets d'un carré de côté a.

Déterminons l'intensité de champ électrostatique créé par les différentes charges au centre O du carré.

Le champ électrostatique $\vec{E}$ créé par les charges $+q$ en A, $-q$ **en** B $+2q$ en C et $-q$ **en** D :

$\vec{E} = \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C + \vec{E}_D$ avec :

$$\vec{E}_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{+q}{AO^2}\vec{u}_{AO} \quad et \quad \vec{E}_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-q}{BO^2}\vec{u}_{BO}$$

$$\vec{E}_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{+2q}{CO^2}\vec{u}_{CO} \quad et \quad \vec{E}_D = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-q}{DO^2}\vec{u}_{DO}$$

On peut écrire que

$$\vec{u}_{AO} = \frac{\overrightarrow{AO}}{AO} \quad et \quad \vec{u}_{BO} = \frac{\overrightarrow{BO}}{BO} \; et \quad \vec{u}_{CO} = \frac{\overrightarrow{CO}}{CO} \, et \quad \vec{u}_{BO} = \frac{\overrightarrow{DO}}{DO}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{+q}{AO^3}\overrightarrow{AO} \quad et \; \vec{E}_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-q}{BO^3}\overrightarrow{BO}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{+2q}{CO^3}\overrightarrow{CO} \quad et \; \vec{E}_D = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-q}{DO^3}\overrightarrow{DO}$$

Les coordonnées des deux vecteurs $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{CO}$ *et* $\overrightarrow{DO}$ sont :

$$\overrightarrow{AO}\begin{cases} x_O - x_A = a/2 \\ y_O - y_A = -a/2 \end{cases}, \qquad \overrightarrow{BO}\begin{cases} x_O - x_B = -a/2 \\ y_O - y_B = -a/2 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{CO}\begin{cases} x_O - x_C = -a/2 \\ y_O - y_C = a/2 \end{cases}, \qquad \overrightarrow{DO}\begin{cases} x_O - x_D = a/2 \\ y_O - y_D = a/2 \end{cases}$$

$$AO = BO = CO = DO = a\sqrt{2}/2$$

Le champ électrostatique totale s'écrit donc :

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{AO^3}\left(\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{BO} + 2\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{DO}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{AM^3}\left[\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - a - \frac{a}{2}\right)\vec{\imath} + \left(-\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + a - \frac{a}{2}\right)\vec{\jmath}\right]$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{AM^3}\left[-\frac{a}{2}\vec{\imath} + \frac{a}{2}\vec{\jmath}\right]$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,a}{2\left(a\sqrt{2}/2\right)^3}\left[-\vec{\imath} + \vec{\jmath}\right]$$

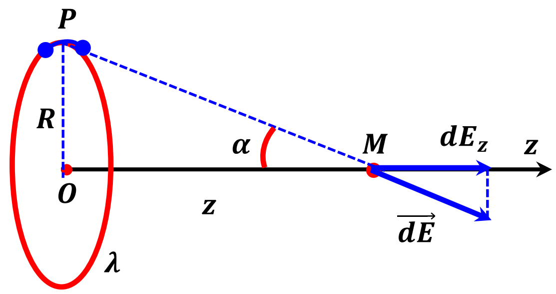
$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\sqrt{2}}{a^2}\left[-\vec{\imath} + \vec{\jmath}\right]$$

Exercice 3 : Spire chargée

1) À chaque élément dl du fil, on peut faire correspondre un élément dl symétrique par rapport à O.

Par raison de symétrie, seule la composante de $d\vec{E}$ sur l'axe $O\vec{z}$ intervient : $\vec{E}$ est porté par $\vec{e}_z$.

L'élément dl crée $d\vec{E}$ au point M :



$$dE_z = dE\cos\alpha$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{PM^2}$$

Avec $PM = \sqrt{z^2 + R^2}$ **et** $dq = \lambda dl$

$$cos\alpha = \frac{z}{PM} = \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}$$

$$\Rightarrow dE_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dl}{z^2 + R^2}\frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, z}{\sqrt{z^2 + R^2}^3}\, dl$$

$$\Rightarrow E_z = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, z}{\sqrt{z^2 + R^2}^3}\, dl$$

$$\Rightarrow E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, z}{\sqrt{z^2 + R^2}^3}\int dl$$

$$\Rightarrow E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, z}{\sqrt{z^2 + R^2}^3}\int_0^{2\pi} R\, d\,\theta$$

$$\Rightarrow E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, z}{\sqrt{z^2 + R^2}^3}2\pi R$$

$$\Rightarrow E_z = \frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{\lambda R\, z}{\sqrt{z^2 + R^2}^3}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{\lambda R\, z}{\sqrt{z^2 + R^2}^3}\vec{e}_z$$

2) Calcul direct du potentiel :

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{PM}$$

Avec $PM = \sqrt{z^2 + R^2}$ **et** $dq = \lambda dl$

$$\Rightarrow dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dl}{\sqrt{z^2 + R^2}}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\lambda dl}{\sqrt{z^2 + R^2}}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dl}{\sqrt{z^2 + R^2}}\int dl$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{\sqrt{z^2 + R^2}}\int_0^{2\pi} R\, d\,\theta$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, R\, 2\pi}{\sqrt{z^2 + R^2}}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{\lambda\;\, R}{\sqrt{z^2 + R^2}}$$

3) Calcul du champ à partir du potentiel.

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V \Rightarrow E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\Rightarrow E_z = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{\lambda\, R}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right)$$

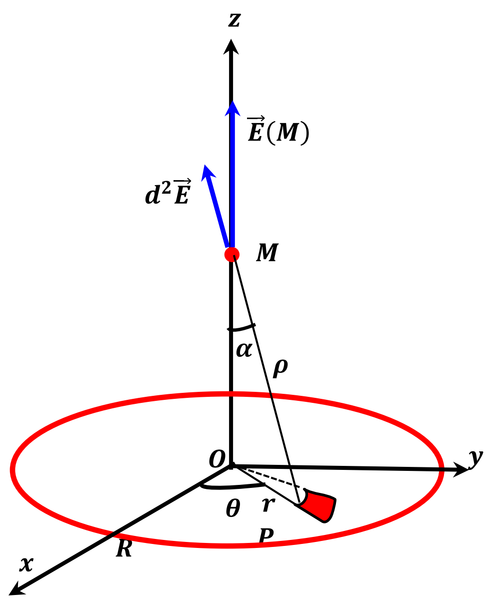
$$\Rightarrow E_z = \frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{\lambda\, 2\, z\, R}{2\sqrt{z^2+R^2}^3}$$

$$\Rightarrow E_z = \frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{\lambda\, z\, R}{\sqrt{z^2+R^2}^3}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{2\varepsilon_0}\,\frac{\lambda\, z\, R}{\sqrt{z^2+R^2}^3}\vec{e}_z$$

Exercice 4 : Disque chargé

Soit un disque de centre $\boldsymbol{O}$ et de rayon $\boldsymbol{R}$ uniformément chargé en surface avec la densité $\boldsymbol{\sigma}$ positive et uniforme.



1) Considérons le champ d'un premier élément de surface $\boldsymbol{dS}$ du disque. Un deuxième élément $\boldsymbol{dS'}$, symétrique du premier par rapport à $\boldsymbol{O}$, donnera au point $\boldsymbol{M}$ un vecteur champ de même norme. La résultante de ces deux vecteurs champs sera portée par l'axe $\boldsymbol{Oz}$. Il en est ainsi pour tout autre élément $\boldsymbol{dS}$ du disque.

2) Déterminons l'expression vectorielle du champ électrostatique créé en tout point $\boldsymbol{M}$ de l'axe de révolution du disque :

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{PM^2} \Rightarrow dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\, dS}{PM^2}$$

$$dE_Z = d\vec{E}.\vec{e}_Z \Rightarrow dE_Z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\, dS}{PM^2}\, cos\alpha$$

$$cos\alpha = \frac{z}{\rho} = \frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}} \quad \text{et} \quad PM = \rho = \sqrt{r^2+z^2}$$

$$\Rightarrow dE_Z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\, z\, dS}{\sqrt{r^2+z^2}^3}$$

En coordonnées polaire $dS = r\, dr\, d\theta$

$$\Rightarrow E_Z = \iint \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\, z\, r\, dr\, d\theta}{\sqrt{r^2+z^2}^3}$$

$$\Rightarrow E_Z = \frac{\sigma\, z}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R \frac{r\, dr}{\sqrt{r^2+z^2}^3}\int_0^{2\pi} d\theta$$

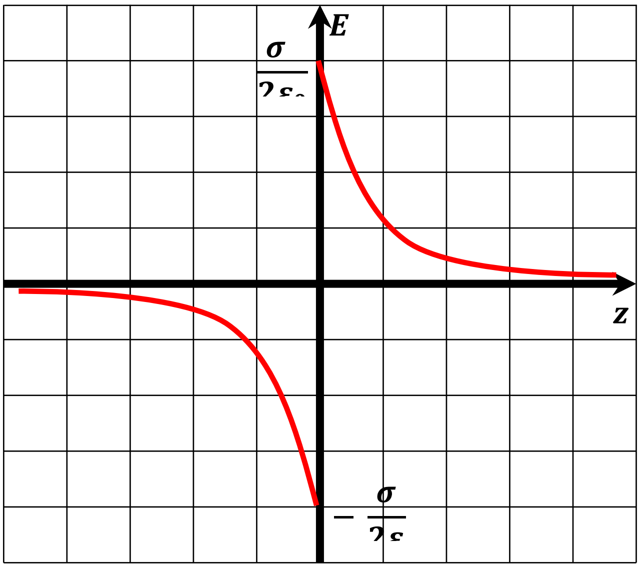
$$\Rightarrow E_Z = \frac{\sigma\, z\, 2\pi}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}\right]_0^R$$

$$\Rightarrow E_Z = \frac{\sigma\, z}{2\varepsilon_0}\left(\frac{-1}{\sqrt{R^2+z^2}} + \frac{1}{\sqrt{z^2}}\right)$$

$$\Rightarrow E_Z = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\left(\frac{-1}{\sqrt{R^2+z^2}} + \frac{1}{|z|}\right)$$

$$\Rightarrow E_Z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{-z}{\sqrt{R^2+z^2}} + \frac{z}{|z|}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{E}(z>0) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\dfrac{-z}{\sqrt{R^2+z^2}} + 1\right)\vec{e}_z \\ \vec{E}(z<0) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\dfrac{-z}{\sqrt{R^2+z^2}} - 1\right)\vec{e}_z \end{cases}$$



3) On peut considérer le disque comme engendré par un fil circulaire de rayon r et d'épaisseur dr, quand r varie de 0 à R. De la sorte, on peut appliquer les résultats de l'exercice précédent.
Pour trouver la correspondance des densités de charge, on écrit que la charge $2\pi r\lambda$ portée par le fil de l'exemple précédent est maintenant portée par le fil de même rayon mais d'épaisseur dr. On a donc la correspondance :
$2\pi r\lambda \longrightarrow 2\pi r dr\sigma$ *et* $\lambda \longrightarrow \sigma dr$

$$V = \frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{\lambda\ R}{\sqrt{z^2+R^2}}\ \ \textit{sera remplacé par}\ \ dV = \frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{\sigma\, r\, dr}{\sqrt{z^2+r^2}}$$

$$\Rightarrow V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{r\, dr}{\sqrt{z^2+r^2}}$$

$$\Rightarrow V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{r^2+z^2}\right]_0^R$$

$$\Rightarrow V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{R^2+z^2} - \sqrt{z^2}\right]$$

$$\Rightarrow V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{R^2+z^2} - |z|\right]$$

Le champ électrostatique :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V \Rightarrow E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\Rightarrow E_z = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{\partial\left[\sqrt{R^2+z^2} - |z|\right]}{\partial z}$$

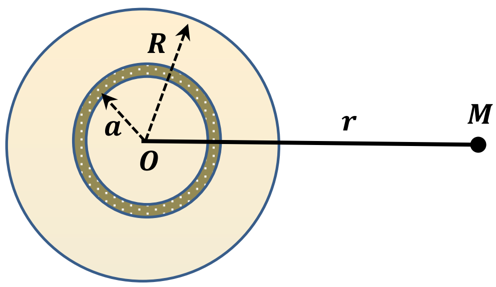
$$\Rightarrow E_z = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} - \frac{z}{|z|}\right]$$

$$\Rightarrow E_z = -\frac{\sigma\, z}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}} - \frac{1}{|z|}\right]$$

$$\Rightarrow E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{-z}{\sqrt{R^2+z^2}} + \frac{z}{|z|}\right]$$

Exercice 5 : Sphère chargée

Soit une sphère uniformément chargée en volume avec la densité ρ. En considérant la sphère comme engendrée par une coque sphérique de rayon $\boldsymbol{a}$ et d'épaisseur $\boldsymbol{da}$, quand $\boldsymbol{a}$ varie de $\boldsymbol{O}$ à $\boldsymbol{R}$, trouver l'expression de $\boldsymbol{V(M)}$ potentiel au point $\boldsymbol{M}$?



On a :

Le potentiel électrostatique élémentaire créé par la coque sphérique de rayon a et d'épaisseur da est :

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r}$$

Avec $dq = \rho\, dV = \rho 4\pi\, a^2\, da$

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho 4\pi\, a^2\, da}{r} \Rightarrow dV = \frac{\rho\, a^2\, da}{\varepsilon_0\, r} \Rightarrow V = \int dV = \int_0^R \frac{\rho\, a^2\, da}{\varepsilon_0\, r}$$

$$\Rightarrow V = \frac{\rho}{\varepsilon_0 r}\int_0^R a^2\, da \Rightarrow V = \frac{\rho}{\varepsilon_0 r}\left[\frac{a^3}{3}\right]_0^R \Rightarrow V = \frac{\rho}{\varepsilon_0 r}\frac{R^3}{3}$$

Le potentiel créé par la sphérique de rayon R en fonction de la charge totale de la sphère peut être exprimé comme suit :

$$dq = \rho 4\pi\, a^2\, da \Rightarrow Q = \int_0^R \rho 4\pi\, a^2\, da$$

$$\Rightarrow Q = \rho 4\pi\left[\frac{a^3}{3}\right]_0^R$$

$$\Rightarrow Q = \frac{\rho\, 4\pi\, R^3}{3}$$

$$\Rightarrow V = \frac{\rho}{\varepsilon_0 r}\frac{R^3}{3} \Rightarrow V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$