Univérsité Ibn Zohr
Faculté des Sciences - Agadir
Département de Mathématiques
Année Univérsitaire 19-20
Filière: SMA & SMI (S2)

Corrigé de l'Examen blanc 1 d'Algèbre 3

Exercice 1

Soient

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y - 2z = 0,\ et\ 2x - y - z = 0\}, \quad \text{et} \quad F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y - z = 0\}$$

deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$. Soient $a = (1, 1, 1), b = (1, 0, 1)$ et $c = (0, 1, 1)$.

1. Montrer que E, F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base de E.
3. Montrer que $\{b, c\}$ est une base de F.
4. Montrer que $\{a, b, c\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.
6. Soit $u = (2, -1, 1)$, exprimer u dans la base $\{a, b, c\}$.

Solution 1

1. • Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$(x, y, z) \in E \iff \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2x - y - z = 0 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -y + 2z \\ 2(-y + 2z) - y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -y + 2z \\ z = y \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ z = y \end{cases} \quad (x, y, z) = (y, y, y) = y(1, 1, 1).$$

Comme $a = (1, 1, 1)$, donc, $E = \text{vect}(a)$ ce qui montre que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
Autre méthode : Montrons que $(0, 0, 0) \in E$.
On a

$$\begin{cases} 0 + 0 - 2 \times 0 = 0 \\ 2 \times 0 - 0 - 0 = 0 = 0 \end{cases} \implies (0, 0, 0) \in E$$

Soient $X_1 = (x_1, y_1, z_1), X_2 = (x_2, y_2, z_2) \in E$, et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{cases} x_1 + y_1 - 2z_1 = 0 \\ 2x_1 - y_1 - z_1 = 0 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_2 + y_2 - 2z_2 = 0 \\ 2x_2 - y_2 - z_2 = 0 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \lambda X_1 + X_2 = (\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2, \lambda z_1 + z_2).$$

On a

$$\begin{cases} \lambda(x_1 + y_1 - 2z_1) + x_2 + y_2 - 2z_2 = 0 \\ \lambda(2x_1 - y_1 - z_1) + 2x_2 - y_2 - z_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} (\lambda x_1 + x_2) + (\lambda y_1 + y_2) - 2(\lambda z_1 + z_2) = 0 \\ 2(\lambda x_1 + x_2) - (\lambda y_1 + y_2) - (\lambda z_1 + z_2) = 0 \end{cases}$$

Cela implique que $\lambda X_1 + X_2 \in E$. Et finalement E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

• Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. $(x, y, z) \in F \iff x + y - z = 0 \iff z = x + y$ alors $(x, y, z) = (x, y, x + y) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 1)$. Comme $b = (1, 0, 1)$ et $c = (0, 1, 1)$ donc, $F = \text{vect}(b, c)$ ce qui montre que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
Autre méthode : Montrons que $(0, 0, 0) \in F$.
On a

$$0 + 0 - 0 = 0 \implies (0, 0, 0) \in F$$

Soient $X_1 = (x_1, y_1, z_1), X_2 = (x_2, y_2, z_2) \in E$, et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{cases} x_1 + y_1 - z_1 = 0 \\ x_2 + y_2 - z_2 = 0 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \lambda X_1 + X_2 = (\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2, \lambda z_1 + z_2).$$

On a

$$\lambda(x_1 + y_1 - z_1) + x_2 + y_2 - z_2 = 0 \implies (\lambda x_1 + x_2) + (\lambda y_1 + y_2) - (\lambda z_1 + z_2) = 0$$

Cela implique que $\lambda X_1 + X_2 \in F$. Et finalement F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. On a $E = \text{vect}(a)$, alors $\{a\}$ est une famille génératrice de E, ce vecteur a est non nul, c'est une base de E.

3. On a $F = \text{Vect}(b, c)$ alors $\{b, c\}$ est une famille génératrice de F, de plus b et c ne sont pas proportionnels, ils forment une famille libre de F. Ainsi $\{b, c\}$ est une base de F.

4. Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \alpha a + \beta b + \gamma c = (0,0,0) \quad &\implies \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} \beta = -\alpha \\ \gamma = -\alpha \\ \alpha - \alpha - \alpha = 0 \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Alors $\{a, b, c\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$. De plus on a $\text{card}(\{a, b, c\}) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, ainsi $\{a, b, c\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

5. On $\mathcal{B}_E = \{a\}$ est une base de E et $\mathcal{B}_F = \{b, c\}$ est une base de F. Comme $\{a, b, c\} = \mathcal{B}_E \cup \mathcal{B}_F$ est une base de $\mathbb{R}^3$, alors $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$.

6. On a $u = (2, -1, 1) = 2(1, 0, 1) - (0, 1, 1) = 2b - c = 0a + 2b - c$ alors les coordonnées de u dans la base $\{a, b, c\}$ est $u = (0, 2, -1)$.
Autre méthode
On cherche $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, tels que $u = \alpha a + \beta b + \gamma c$.

$$\begin{aligned} u = \alpha a + \beta b + \gamma c \quad &\iff \begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ \alpha + \gamma = -1 \\ \alpha + \beta + \gamma = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \beta = 2 - \alpha \\ \gamma = -1 - \alpha \\ \alpha + 2 - \alpha - 1 + \alpha = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \beta = 2 \\ \gamma = -1 \\ \alpha = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

alors $u = 2b - c = 0a + 2b - c$, d'où $u = (0, 2, -1)$ dans la base $\{a, b, c\}$.

Exercice 2
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application définie par

$$f(x, y, z) = (x + y, y + z, x - z)$$

1. Énoncer le théorème du rang.

2. Montrer que f est linéaire.

3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$. Déduire le $\mathrm{rg}(f)$. f est-elle injective? surjective?

4. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.

5. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$. Déduire $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$.

Solution 2

1. Voir le cours.

2. Soient $u = (x, y, z), v = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(\lambda u + v) &= f((\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z')) \\ &= (\lambda x + x' + \lambda y + y', (\lambda y + y') + (\lambda z + z'), \lambda x + x' - (\lambda z + z') \\ &= (\lambda(x+y) + (x' + y'), \lambda((y+z) + (y' + z'), \lambda(x-z) + (x' - z')) \\ &= \lambda(x+y, y+z, x-z) + (x' + y', y' + z', x' - z') \\ &= \lambda f(u) + f(v). \end{aligned}$$

Donc, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

3.
   - Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(f) \iff f((x,y,z)) = (0,0,0) \iff \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -y \\ z = -y \end{cases} \iff (x,y,z) = (-y, y, -y) = y(-1, 1, -1).$$

   Donc, $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{vect}(u)$, avec $u = (-1, 1, -1)$. On en déduit $\{u\}$ est génératrice de $\mathrm{Ker}(f)$. Par suite, la famille $\{u\}$ est libre (car $u \neq (0,0,0)$) et finalement la famille $\{u\}$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
   - On a $\{u\}$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$, alors $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$. D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) \iff 1 + \dim(\mathrm{Im}(f)) = 3 \iff \mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = 2.$$

   - On a $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(a) \neq \{0\}$ donc f n'est pas injective.
   - $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = 2 \neq 3$ donc $\mathrm{Im}(f)) \neq \mathbb{R}^3$, ainsi f n'est pas surjective.
     Autrement
     On a $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, alors f est un endomorphisme, comme n'est pas injective alors f n'est pas surjective.

4. Notons $(e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1))$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Donc, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$.
On a

$$\begin{cases} u_1 = f(e_1) = (1,0,1) \\ u_2 = f(e_2) = (1,1,0), \\ u_3 = f(e_3) = (0,1,-1) \end{cases} \quad \text{alors } \mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}(u_1, u_2, u_3).$$

On a $u_3 = u_2 - u_1 \implies \mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}(u_1, u_2)$. Comme u_1 et u_2 ne sont pas proportionnels, (u_1, u_2) est une famille libre qui engendre $\mathrm{Im}(f)$, c'est donc une base de cet espace.

5. On a $\dim(\mathbb{R}^3) = 3 < +\infty$, et (u_1, u_2) base de $\mathrm{Im}(f)$, $\{u\}$ base de $\mathrm{Ker}(f)$. Pour montrer que $\mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) = \mathbb{R}^3$, il suffit de voir que la famille (u, u_1, u_2) est une base de $\mathbb{R}^3$. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$au + bu_1 + cu_2 = (0,0,0) \implies \begin{cases} -a + b + c = 0 & (L_1) \\ a + c = 0 & (L_2) \\ -a + b = 0 & (L_3) \end{cases} \implies \begin{cases} -a + b + c = 0 \\ c = -a \\ b = a \end{cases}, \implies \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Par suite, la famille (u, u_1, u_2) est libre. Comme (u, u_1, u_2) est une famille de 3 éléments de $\mathbb{R}^3$ et puisque $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, alors la famille (u, u_1, u_2) est une base $\mathbb{R}^3$. Finalement $\mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) = \mathbb{R}^3$.
Comme $\mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) = \mathbb{R}^3$, alors $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{(0,0,0)\}$.

Exercice 3
Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. On définit f l'application de E dans lui-même par

$$f(P) = P + (1-X)P'.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$. f est-elle injective? surjective?
3. Soit $\mathcal{B} = (P_0 = 1, P_1 = X - 1, P_2 = -X^2 + 2)$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E.
4. Déterminer les coordonnées de $f(P_0), f(P_1),$ et $f(P_2)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Solution 3

1. Soient $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(\lambda P + Q) &= \lambda P + Q + (1-X)(\lambda P^{'} + Q^{'}) \\ &= \lambda(P + (1-X)P^{'}) + Q + (1-X)Q^{'} \\ &= \lambda f(P) + f(Q). \end{aligned}$$

Donc, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$.

2. • Soit $P = a_2X^2 + a_1X + a_0 \in \mathbb{R}_2[X]$.

$$P \in \mathrm{Ker}(f) \iff f(P) = 0 \iff P + (1-X)P^{'} = 0 \iff a_2X^2 + a_1X + a_0 + (1-X)(2a_2X + a_1) = 0$$

$$\iff -a_2X^2 + 2a_2X + a_0 + a_1 = 0 \iff \begin{cases} -a_2 = 0 \\ 2a_2 = 0 \\ a_0 + a_1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_2 = 0 \\ a_0 = -a_1 \end{cases}$$

alors $P = 0X^2 + a_1X - a_1 = a_1(X-1)$. On obtient $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{vect}(P_1)$, avec $P_1 = X - 1$. On en déduit $\{P_1\}$ est génératrice de $\mathrm{Ker}(f)$. Par suite, la famille $\{P_1\}$ est libre (car $P_1 \neq (0,0,0)$) et finalement la famille $\{P_1\}$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

• Notons $(1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Donc, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}(f(1), f(X), f(X^2))$. On a

$$\begin{cases} f(1) = 1 + (1-X)(1)^{'} = 1 + 0 = 1 \\ f(X) = X + (1-X)(X)^{'} = X + 1 - X = 1, \\ f(X^2) = X^2 + (1-X)(X^2)' = X^2 + 2X - 2X^2 = -X^2 + 2X \end{cases}$$

alors $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}(1, 1, -X^2 + 2X) = \mathrm{vect}(1, -X^2 + 2X)$.
On a $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}(P_0, P_2)$, alors (P_0, P_2) est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. Comme $\{P_1\}$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$, alors $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$. D'après le théorème du rang $\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$, on obtient que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$, de plus (P_0, P_2) est une famille du cardinal $2 = \dim(\mathrm{Im}(f))$ et génératrice de $\mathrm{Im}(f)$, alors (P_0, P_2) est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

3. On a $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{vect}(P_1) \neq \{0_{\mathbb{R}_2[X]}\}$ alors f n'est pas injective.
On a $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$, et $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$, alors $\mathrm{Im}(f) \neq \mathbb{R}_2[X]$, ainsi f n'est pas surjective.

4. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$aP_0 + bP_1 + cP_2 = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \implies a + b(X-1) + c(-X^2 + 2X) = 0 \implies -cX^2 + (b + 2c)X + a - b = 0$$

$$\implies \begin{cases} c = 0 \\ b + 2c = 0 \\ a - b = 0 \end{cases}, \implies \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Par suite, la famille (P_0, P_1, P_2) est libre. Comme $\mathrm{card}(P_0, P_1, P_2) = \dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$, alors la famille (P_0, P_1, P_2) est une base $\mathbb{R}_2[X]$.

5. On a

$$\begin{cases} f(P_0) = P_0 + (1-X)P_0^{'} = 1 + 0 = 1 = 1P_0 + 0P_1 + 0P_2 \\ f(P_1) = P_1 + (1-X)P_1^{'} = X + 1 - X = 1 = 1P_0 + 0P_1 + 0P_2, \\ f(P_2) = P_2 + (1-X)P_2^{'} = -X^2 + 2X + 2(1-X)^2 = X^2 - 2X + 1 = 1P_0 + 0P_1 - 1P_2 \end{cases}.$$

Exercice 4

$$\text{Soit} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer N^2 et N^3 et déduire N^n pour $n \in \mathbb{N}$.

2. Vérifier que $A = I_3 + N$. En déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution 4

1. $N^0 = I_3$ et $N^1 = N$.

$$\text{On a} N^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{puis} \quad N^3 = N \times N^2 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que pour $n \geq 3$ (de sorte que $n - 3 \geq 0$), $N^n = N^{n-3} \times N^3 = N^{n-3} \times 0 = 0$.

2. $A^0 = I_3$ et $A^1 = A$. Soit $n \geq 2$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I_3 + N$$

et puisque les matrices N et I_3 commutent, la formule du binôme de Newton permet d'écrire

$$\begin{aligned} A^n = (I_3 + N)^n &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k N^k I_3^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k N^k \\ &= C_n^0 N^0 + C_n^1 N^1 + C_n^2 N^2 + C_n^3 N^3 + \ldots C_n^n N^n \\ &= I_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2. \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -n & -\frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$