UNIVERSITE IBN ZOHR
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE
AGADIR

TRAVAUX DIRIGES D'ELECTRICITE 1

FILIERES : SMP1 ET SMIA1

Série N° 2

2022-2023

Exercice 1 : Plan infini uniformément chargé

On considère un plan infini $\boldsymbol{A}$ parallèle au plan $\boldsymbol{xoy}$ (de cote $\boldsymbol{z=0}$) chargé avec une densité de charges surfacique uniforme et positive $\boldsymbol{\sigma > 0}$. (FIG. (1)).

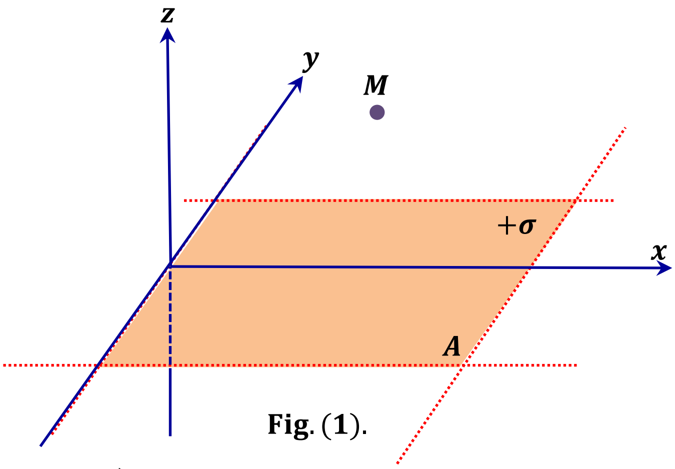


Fig. (1).

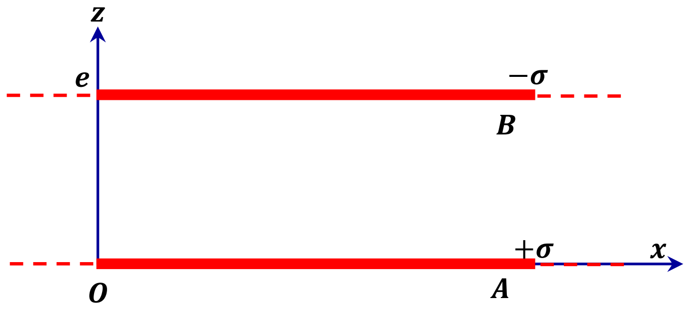


FIG. (2).

1) Montrer par des considérations de symétrie et d'invariance que le vecteur champ électrostatique produit par le plan $\boldsymbol{A}$ en un point $\boldsymbol{M}$ de cote $\boldsymbol{z}$ s'écrit sous la forme :

$$\vec{E}(M) = E(z)\vec{e_z}$$

2) En utilisant le théorème de Gauss, déterminer l'expression de $\vec{E}(M)$
3) Trouver l'expression du potentiel $\boldsymbol{V(M)}$ en tout point $\boldsymbol{M}$ de l'espace.
4) On considère un autre plan infin $\boldsymbol{B}$ parallèle au plan $\boldsymbol{A}$ chargé avec une densité de charges surfacique uniforme et négative $\boldsymbol{-\sigma}$ et de cote $\boldsymbol{z=+e}$. (FIG. (2)).
   En utilisant le principe de superposition, déterminer le vecteur champ et le potentiel en tout point $\boldsymbol{M}$ de l'espace.

Exercice 2 : Sphère chargée

I) Une sphère de centre $\boldsymbol{O}$ et de rayon $\boldsymbol{R}$ contient une charge répartie dans le volume de la sphère avec une densité volumique de charges uniforme $\boldsymbol{\rho_0}$.
   En utilisant le théorème de Gauss, exprimer le champ $\vec{E}$ en tout point de l'espace.

I) On considère une distribution de charges volumique uniforme de densité $\boldsymbol{\rho_0}$ et à symétrie sphérique répartie dans le volume $\boldsymbol{r < R_1}$ et dans le volume $\boldsymbol{R_2 < r < R_3}$. (FIG. (3)).

1) En utilisant le principe de superposition, exprimer le champ $\vec{\mathbf{E}}$ en un point $\boldsymbol{M}$ de l'espace, situé à une distance $\boldsymbol{r}$ du centre $\boldsymbol{O}$, dans les cas suivants :
   - $\boldsymbol{r \geq R_3}$;
   - $\boldsymbol{R_2 \leq r \leq R_3}$
   - $\boldsymbol{R_1 \leq r \leq R_2}$
   - $\boldsymbol{r \leq R_1}$
2) Déduire l'expression du potentiel $\boldsymbol{V(r)}$ en tout point $\boldsymbol{M}$ de l'espace.

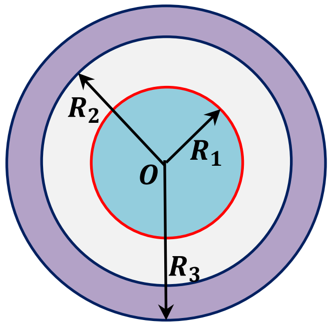


Fig. (3)

Exercice 3 : Deux cylindres concentriques

On considère une distribution de charge constituée de deux cylindres concentriques infinis de même axe $\boldsymbol{Oz}$. Le premier cylindre, de rayon $\boldsymbol{R_1}$, est un cylindre plein chargé en volume par une densité de charge $\boldsymbol{\rho(r) = -\alpha r}$ $(\boldsymbol{\alpha > 0, r \leq R_1})$. Le second cylindre, de rayon $\boldsymbol{R_2 > R_1}$ est un cylindre creux chargé uniquement sur son pourtour extérieur avec une densité surfacique de charge uniforme $\boldsymbol{\sigma > 0}$. [**Fig. (4)**]

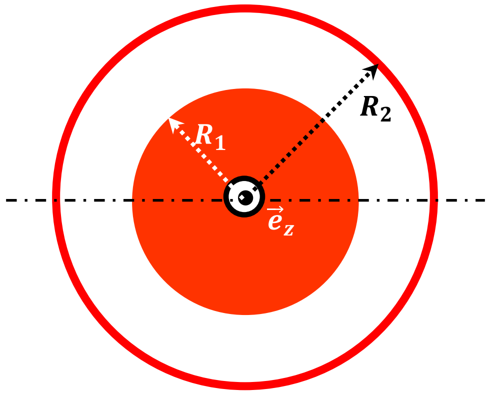


Fig. (4)

1) En utilisant le théorème de Gauss, calculer le champ électrique créé par cette distribution en tous point de l'espace.
2) Étudier la continuité de $\vec{\boldsymbol{E}}$ en $\boldsymbol{r = R_1}$ et $\boldsymbol{r = R_2}$. Commenter.
3) Représenter sa composante non nulle en fonction de $\boldsymbol{r}$.

Exercice 4 : Cylindres coaxiaux

Exprimer, en utilisant l'équation locale : $\boldsymbol{div\,\vec{E} = \rho/\varepsilon_0}$, le vecteur champ électrostatique créé en tout point $\boldsymbol{M}$ de l'espace, par une distribution volumique de charge $\boldsymbol{\rho}$ positive répartie entre deux cylindres coaxiaux de longueur infinie de rayons respectifs $\boldsymbol{R_1}$ et $\boldsymbol{R_2}$ $(\boldsymbol{R_1 < R_2})$ avec une densité volumique de charges uniforme $\boldsymbol{\rho}$. (Fig. (5)).

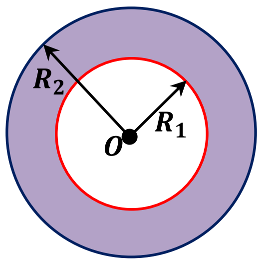


Fig. (5)

On admet que $\boldsymbol{\vec{E}(r = 0) = \vec{0}}$

En coordonnées cylindriques l'expression de $\boldsymbol{div\,\vec{E}}$ **est :**

$$\boldsymbol{div\,\vec{E} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rE_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial E_z}{\partial z}}$$

Série
Corrigé

Exercice 1 : Plan infini uniformément chargé

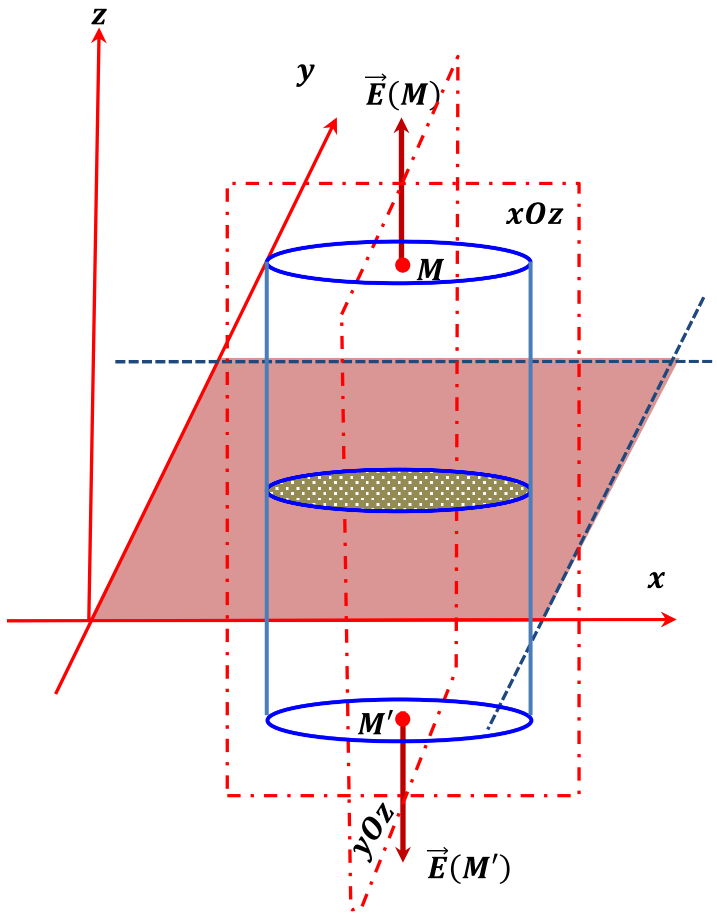
1) Les symétries

- Les plans zOx et zOy sont des plans de symétries alors $\vec{E} \in (zOx) \cap (zOy)$

$\Rightarrow \vec{E}(M) \in Oz$
$\Rightarrow \vec{E}(M) = E(x,y,z)\vec{e}_z$

Les invariances

- La distribution de charge est invariante par translation suivant l'axe Ox ou Oy donc ne dépend ni de x ni de y alors :
  $\Rightarrow \vec{E}(M) = E(z)\vec{e}_z$
- Le plan $z = 0$ est un plan de symétrie. Le champ en M' symétrique de M par rapport (M)au plan $z = 0$ est :
  $\vec{E}(M') = -\vec{E}(M) = -E(z)\vec{e}_z$



2) La surface de Gauss est un cylindre C coupant verticalement le plan chargé.
En appliquant le théorème de Gauss :

$$\oiint_{(C)} \vec{E}\,.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \iint_{B1} \vec{E}.\overrightarrow{dS}_{B1} + \iint_{B2} \vec{E}.\overrightarrow{dS}_{B2} + \iint_{Lat} \vec{E}.\overrightarrow{dS}_L = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

A la base B_1 : $\vec{E}(M) = E(z)\vec{e}_z$ et $\overrightarrow{dS}_{B1} = dS_{B1}\vec{e}_z \Rightarrow \vec{E}\,\overrightarrow{dS}_{B1} = E(z)\,dS_{B1}$

A la base B_2 : $\vec{E}(M') = -E(z)\vec{e}_z$ et $\overrightarrow{dS}_{B2} = -dS_{B2}\vec{e}_z \Rightarrow \vec{E}\,\overrightarrow{dS}_{B2} = E(z)\,dS_{B2}$

Avec $E(z) = Cte$ et $dS_{B2} = dS_{B1} = dS_B$

A la surface latérale $\vec{E} \perp \overrightarrow{dS}_L \Rightarrow \vec{E}\,\overrightarrow{dS}_L = 0$

$$\Rightarrow \oiint_{(C)} \vec{E}\,.\overrightarrow{dS} = \iint_C 2\,E(z)\,dS_B$$

$$\Rightarrow \oiint_{(C)} \vec{E}\,.\overrightarrow{dS} = 2\,E(z) \iint_C dS_B$$

$$\Rightarrow \oiint_{(C)} \vec{E}\,.\overrightarrow{dS} = 2\,E(z)\,S_B$$

$$Q_{int} = \iint_C \sigma\,dS_B$$

$$\Rightarrow Q_{int} = \sigma \iint_C dS_B$$

$$\Rightarrow Q_{int} = \sigma\, S_B$$

$$\oiint_{(C)} \vec{E}\,.\,\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow 2\,E(z)\,S_B = \frac{\sigma\, S_B}{\varepsilon_0}$$

$$E(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_A(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z \; et \; \vec{E}_A(M') = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \vec{E}_A \begin{cases} \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z & pour\ z > 0 \\ -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z & pour\ z < 0 \end{cases}$$

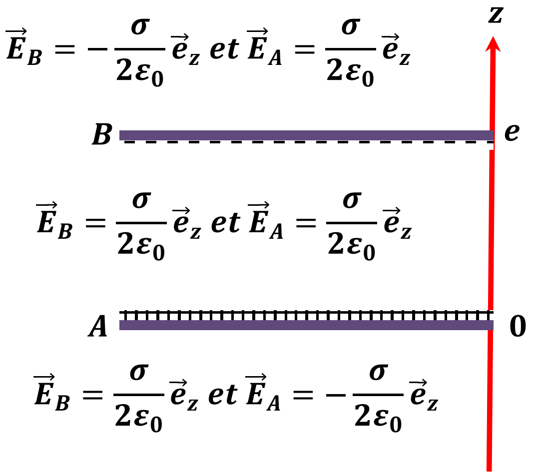
3) le potentiel $V(z)$ en tout point de l'espace.

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial z} = \begin{cases} -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z & pour\ z > 0 \\ +\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z & pour\ z < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow V(z) == \begin{cases} -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} z\,\vec{e}_z & pour\ z > 0 \\ +\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\, z\,\vec{e}_z & pour\ z < 0 \end{cases}$$

4) On considère un autre plan $\boldsymbol{B}$ parallèle au plan $\boldsymbol{A}$ chargé avec une densité de charges surfacique uniforme $-\sigma$ et de cote $z = +e$. En utilisant le principe de superposition, déterminer le champ et le potentiel en tout point de l'espace.

$$\begin{cases} \vec{E}_B(z > e) = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z \;\; et\, \vec{E}_B(z < e) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z \\ \vec{E}_A(z > 0) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z \;\; et\, \vec{E}_A(z < 0) = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z \end{cases}$$



$$\vec{E}_{Total}(M) = \vec{E}_A(M) + \vec{E}_B(M) \Rightarrow \vec{E}_{Total}(M) = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_z\ \ si\ z \in\,]0, e[\\ 0\ si\ \ z \in\,]-\infty, 0[\ U]e, +\infty[\end{cases}$$

Exercice 2 : Sphère chargée

I) On considère une distribution de charges volumique uniforme de densité ρ_0 et à symétrie sphérique répartie dans le volume $r < R$.

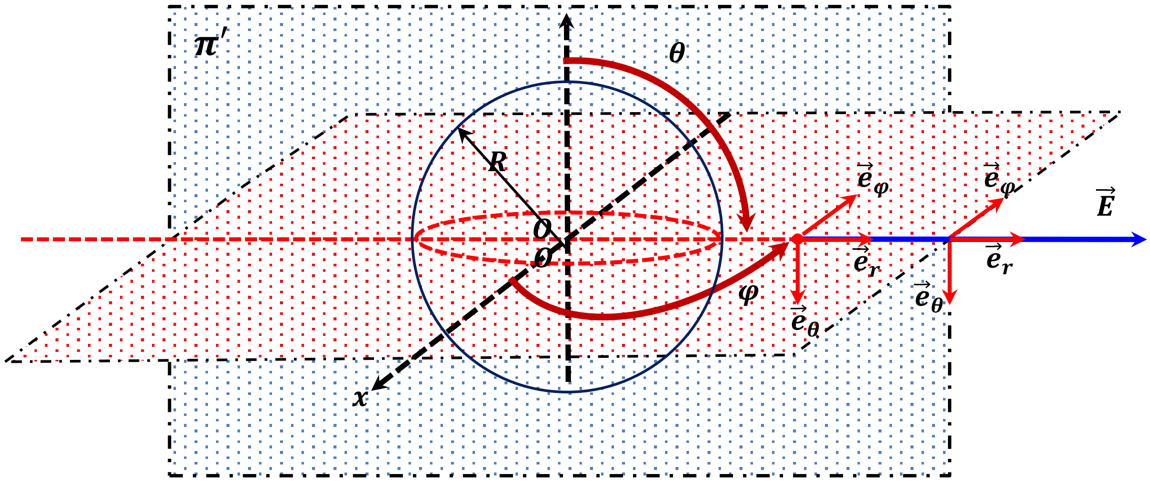
Les symétries :

$\pi' \equiv (M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ et $\pi \equiv (M, \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi)$ deux plans de symétrie donc $\vec{E}$ appartient à l'intersection des deux plans π et π'alors $\vec{E} = E(r, \theta, \varphi)\vec{e}_{r,}$

Les Invariances

La distribution de charge est invariantes par toutes rotation autour de $\boldsymbol{O}$. En coordonnées sphériques deux rotations autour de $\boldsymbol{O}$ sont possibles une d'un angle $\boldsymbol{\theta}$ et l'autre d'un angle $\boldsymbol{\varphi}$ donc $\boldsymbol{E}$ ne dépend ni de $\boldsymbol{\theta}$ ni de $\boldsymbol{\varphi}$ par suite $\boldsymbol{E(r,\theta,\varphi) = E(r)}$

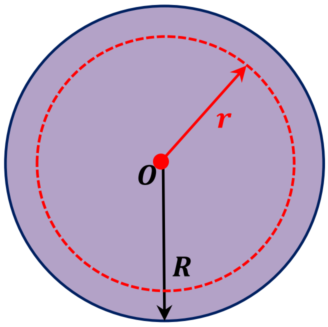
Donc le champ est radiale et ne dépend que de $\boldsymbol{r}$.



Finalement $\vec{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{E(r)}\vec{\boldsymbol{e_r}}$

En utilisant le théorème de Gauss, exprimons le champ $\vec{\mathbf{E}}$ en un point de $\boldsymbol{M}$ l'espace dans les cas suivants :

- $\boldsymbol{r \geq R}$;
- $\boldsymbol{r < R}$



Puisque $\boldsymbol{E}$ ne dépend que de $\boldsymbol{r}$ donc la surface de GAUSS sera une sphère contenant $\boldsymbol{M}$ et de centre $\boldsymbol{O}$.

En appliquant le théorème de Gauss :

$$\oiint_{(S)} \vec{E}\,.\,\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$\oiint_{(S)} \vec{E}_M\,.\,\vec{dS} = \oiint_{(S)} E_M(r)\vec{e_r}.\,dS\vec{e_r}$$

$$\Rightarrow \oiint_{(S)} \vec{E}_M\,.\,\vec{dS} = \oiint_{(S)} E_M(r)\,.\,.\,dS$$

$$\Rightarrow \oiint_{(S)} \vec{E}_M\,.\,\vec{dS} = E_M(r)\oiint_{(S)} dS$$

$$\Rightarrow \oiint_{(S)} \vec{E}_M\,.\,\vec{dS} = E_M(r)\,S$$

$$\Rightarrow \oiint_{(S)} \vec{E}_M\,.\,\vec{dS} = E_M(r)\,4\pi\,r^2$$

- Le champ électrostatique $\vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{ext}}$ à l'extérieur de la sphère $\boldsymbol{r \geq R}$

$$Q_{int} = \iiint_V \rho_0\,d\tau \Rightarrow Q_{int} = \rho_0 \iiint_0^R d\tau \Rightarrow Q_{int} = \rho_0\,\frac{4}{3}\pi\,R^3$$

$$\Rightarrow\ E_M(r)\,4\pi\,r^2 = \frac{\rho_0\,\frac{4}{3}\pi\,R^3}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_M(r)\ = \frac{\rho_0\ R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$$

- Le champ électrostatique $\vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{int}}$ à l'extérieur de la sphère $\boldsymbol{r < R}$:

$$Q_{int} = \iiint_V \rho_0\, d\tau \Rightarrow Q_{int} = \rho_0 \iiint_{R_2}^{r} d\tau \Rightarrow Q_{int} = \rho_0 \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow E_M(r)\, 4\pi\, r^2 = \frac{\rho_0 \frac{4}{3}\pi\, r^3}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E_M(r) = \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0}$$

Conclusion $\Rightarrow E_M(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0 r^2} & r \geq R \\ \dfrac{\rho_0\, r}{3\varepsilon_0} & r < R \end{cases}$

II) On considère une distribution de charges volumique uniforme de densité ρ_0 et à symétrie sphérique répartie dans le volume $r < R_1$ et dans le volume $R_2 < r < R_3$. (FIG. (3)).

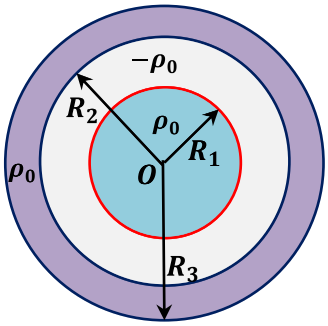


FIG. (3)

On peut considérer le système comme l'association de trois sphères chargées en volume :

- Sphère chargée de rayon R_1 **de densité** ρ_0 **;**
- Sphère chargée de rayon R_2 **de densité** $-\rho_0$ **;**
- Sphère chargée de rayon R_3 **de densité** ρ_0**.**

En utilisant le principe de superposition, exprimons le champ $\vec{E}$ en un point de M l'espace, l'espace situé à une distance r du centre O, dans les cas suivants :

$$r \geq R_3 \quad : \quad E = \frac{\rho_0 R_1^3}{3\varepsilon_0 r^2} - \frac{\rho_0 R_2^3}{3\varepsilon_0 r^2} + \frac{\rho_0 R_3^3}{3\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow E = \frac{\rho_0\left(R_1^3 - R_2^3 + R_3^3\right)}{3\varepsilon_0 r^2}$$

$$R_2 \leq r \leq R_3 \quad : \quad E = \frac{\rho_0 R_1^3}{3\varepsilon_0 r^2} - \frac{\rho_0 R_2^3}{3\varepsilon_0 r^2} + \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho_0\left(R_1^3 - R_2^3 + r^3\right)}{3\varepsilon_0 r^2}$$

$$R_1 \leq r \leq R_2 \quad : \quad E = \frac{\rho_0 R_1^3}{3\varepsilon_0 r^2} - \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0} + \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho_0 R_1^3}{3\varepsilon_0 r^2}$$

$$r \leq R_1 \quad : \quad E = \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0} - \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0} + \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0} \Rightarrow \; E = \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0}$$

2) Déduisons l'expression du potentiel $V(r)$ en tout point M de l'espace.

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial r} = \begin{cases} -\dfrac{\rho_0\ \left(R_1^3 + R_3^3 - R_2^3\right)}{3\varepsilon_0 r^2} & r > R_3 \\ -\dfrac{\rho_0\left(R_1^3 + r^3 - R_2^3\right)}{3\varepsilon_0 r^2} & R_2 \leq r \leq R_3 \\ -\dfrac{\rho_0 R_1^3}{3\varepsilon_0 r^2} & R_1 \leq r \leq R_2 \\ -\dfrac{\rho_0\, r}{3\varepsilon_0} & r \leq R_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow V(M) = \begin{cases} \dfrac{\rho_0\ \left(R_1^3 + R_3^3 - R_2^3\right)}{3\varepsilon_0 r} + A & r > R_3 \\ \dfrac{\rho_0\left(R_1^3 - R_2^3\right)}{3\varepsilon_0 r} - \dfrac{\rho_0 r^2}{6\varepsilon_0} + B & R_2 \leq r \leq R_3 \\ \dfrac{\rho_0 R_1^3}{3\varepsilon_0 r} + C & R_1 \leq r \leq R_2 \\ -\dfrac{\rho_0\, r^2}{6\varepsilon_0} + D & r \leq R_1 \end{cases}$$

Avec A, B, C et D des constantes à déterminer en utilisant la continuité du potentiel et que le potentiel à l'infini est nul.

- Détermination de A

$$V(r \longrightarrow \infty) = 0 \Rightarrow A = 0$$

- Détermination de B

$$V(r = R_3^+) = V(r = R_3^-) \Rightarrow \frac{\rho_0\ \left(R_1^3 + R_3^3 - R_2^3\right)}{3\varepsilon_0 R_3} + A = \frac{\rho_0\left(R_1^3 - R_2^3\right)}{3\varepsilon_0 R_3} - \frac{\rho_0 R_3^2}{6\varepsilon_0} + B$$

$$\Rightarrow \frac{\rho_0\, R_3^2}{3\varepsilon_0} = -\frac{\rho_0 R_3^2}{6\varepsilon_0} + B$$

$$\Rightarrow B = \frac{\rho_0 R_3^2}{3\varepsilon_0} + \frac{\rho_0 R_3^2}{6\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow B = \frac{\rho_0 R_3^2}{2\varepsilon_0}.$$

- Détermination de C

$$V(r = R_2^+) = V(r = R_2^-) \Rightarrow \frac{\rho_0(R_1^3 - R_2^3)}{3\varepsilon_0 R_2} - \frac{\rho_0 R_2^2}{6\varepsilon_0} + B = \frac{\rho_0 R_1^3}{3\varepsilon_0 R_2} + C$$

$$\Rightarrow -\frac{\rho_0 R_2^2}{3\varepsilon_0} - \frac{\rho_0 R_2^2}{6\varepsilon_0} + \frac{\rho_0 R_3^2}{2\varepsilon_0} = C$$

$$\Rightarrow C = -\frac{\rho_0 R_2^2}{2\varepsilon_0} + \frac{\rho_0 R_3^2}{2\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow C = \frac{\rho_0(R_3^2 - R_2^2)}{2\varepsilon_0}$$

- Détermination de D

$$V(r = R_1^+) = V(r = R_1^-) \Rightarrow \frac{\rho_0 R_1^3}{3\varepsilon_0 R_1} + C = -\frac{\rho_0 R_1^2}{6\varepsilon_0} + D$$

$$\Rightarrow \frac{\rho_0 R_1^2}{3\varepsilon_0} + \frac{\rho_0(R_3^2 - R_2^2)}{2\varepsilon_0} + \frac{\rho_0 R_1^2}{6\varepsilon_0} = D$$

$$\Rightarrow D = \frac{\rho_0}{6\varepsilon_0}(2R_1^2 + 3R_3^2 - 3R_2^2 + R_1^2)$$

$$\Rightarrow D = \frac{\rho_0}{6\varepsilon_0}(3R_1^2 + 3R_3^2 - 3R_2^2)$$

$$\Rightarrow D = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}(R_1^2 + R_3^2 - R_2^2)$$

Les expressions du potentiel en un point M de l'espace est

$$\Rightarrow V(M) = \begin{cases} \dfrac{\rho_0\ (R_1^3 + R_3^3 - R_2^3)}{3\varepsilon_0 r} & r > R_3 \\ \dfrac{\rho_0(R_1^3 - R_2^3)}{3\varepsilon_0 r} - \dfrac{\rho_0 r^2}{6\varepsilon_0} + \dfrac{\rho_0 R_3^2}{2\varepsilon_0} & R_2 \le r \le R_3 \\ \dfrac{\rho_0 R_1^3}{3\varepsilon_0 r} + \dfrac{\rho_0(R_3^2 - R_2^2)}{2\varepsilon_0} & R_1 \le r \le R_2 \\ -\dfrac{\rho_0 r^2}{6\varepsilon_0} + \dfrac{\rho_0}{2\varepsilon_0}(R_1^2 + R_3^2 - R_2^2) & r \le R_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow V(M) = \begin{cases} \dfrac{\rho_0\ (R_1^3 + R_3^3 - R_2^3)}{3\varepsilon_0 r} & r > R_3 \\ \dfrac{\rho_0(R_1^3 - R_2^3)}{3\varepsilon_0 r} - \dfrac{\rho_0 r^2}{6\varepsilon_0} + \dfrac{\rho_0 R_3^2}{2\varepsilon_0} & R_2 \le r \le R_3 \\ \dfrac{\rho_0 R_1^3}{3\varepsilon_0 r} + \dfrac{\rho_0(R_3^2 - R_2^2)}{2\varepsilon_0} & R_1 \le r \le R_2 \\ \dfrac{\rho_0}{6\varepsilon_0}(3R_1^2 + 3R_3^2 - 3R_2^2 - r^2) & r \le R_1 \end{cases}$$

Exercice 3 : Deux cylindres concentriques

1) Soit M un point quelconque de l'espace. L'étude est évidemment menée en coordonnées cylindriques, voir figure 1.

Invariances :

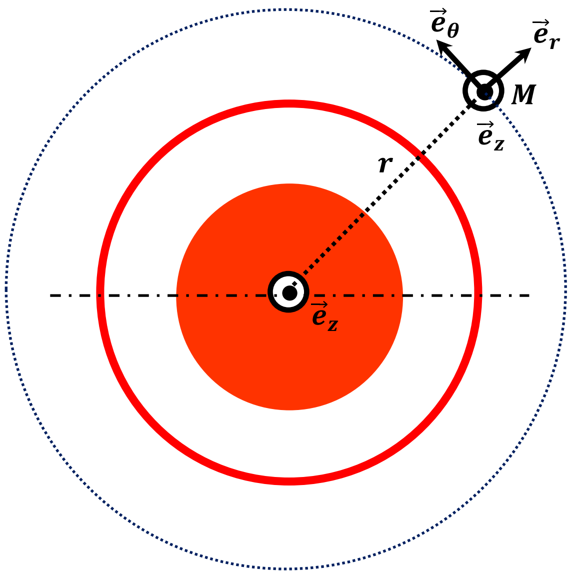
- La distribution de charges est invariante par toute translation le long de l'axe Oz, donc $\vec{E}(M)$ est indépendant de la coordonnée z ;
- La distribution de charges est invariante par toute rotation autour de l'axe Oz, donc $\vec{E}(M)$ est indépendant de la coordonnée angulaire θ autour de cet axe.

Symétries :

- le plan de la figure 1 engendré par les vecteurs $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ est un plan de symétrie de la distribution de charge contenant M, donc $\vec{E}(M)$ est inclus dans ce plan, ce qui impose $E_z = 0$;

- le plan perpendiculaire à la figure 1 engendré par les vecteurs $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_z$ est également plan de symétrie de la distribution de charges, donc $E_\theta = 0$.

Finalement, il reste $\vec{E}(M) = E_r(r)\,\vec{e}_r$.



Théorème de Gauss :

- Le flux du champ électrostatique $\vec{E}(M)$ à travers toute surface fermé (surface de Gauss Σ) est égal à la somme de toutes les charges intérieures à cette surface divisée par la permitivitté du vide ε_0.

$$\oiint_\Sigma \vec{E}(M)\cdot\vec{dS} = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

- La surface de Gauss Σ est un cylindre passant par M, donc de rayon r, et fermé par deux surfaces planes orthogonales à $\vec{e}_z$ distantes de h.
- Le flux de $\vec{E}$ sortant de cette surface vaut :

$$\oiint_\Sigma \vec{E}(M)\cdot\vec{dS} = \iint_{haut} E_r(r)\,\vec{e}_r\cdot dS\,\vec{e}_z + \iint_{haut} E_r(r)\,\vec{e}_r\cdot dS\,\vec{e}_r + \iint_{haut} E_r(r)\,\vec{e}_r\cdot(-dS\,\vec{e}_z)$$

$$\Rightarrow \oiint_\Sigma \vec{E}(M)\cdot\vec{dS} = 0 + 2\pi rh\,E_r(r) + 0 = 2\pi rh\,E_r(r)$$

- La charge intérieure contenue dans cette surface dépend du rayon :

$$\rightarrow si\ r < R_1 : Qint\ = \iiint \rho(r)\,r\,dr\,d\theta\,dz\ = 2\pi h\int_0^r -\alpha\,r^2\,dr = -2\pi h\alpha\frac{r^3}{3}$$

Dans ce cas, on a d'après le théorème de Gauss :

$$2\pi rh\,E_r(r) = -2\pi h\alpha\frac{r^3}{3\,\varepsilon_0} \Rightarrow E_r(r) = -\frac{\alpha\,r^2}{3\,\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(r < R_1) = -\frac{\alpha\,r^2}{3\,\varepsilon_0}\,\vec{e}_r$$

$\rightarrow si\ R_1 < r < R_2$, un calcul identique au précédent donne directement

$$Qint\ = \iiint \rho(r)\,r\,dr\,d\theta\,dz = 2\pi h\int_0^{R_1} -\alpha\,r^2\,dr = -2\pi h\alpha\frac{R_1^3}{3}$$

et d'après le théorème de Gauss :

$$2\pi rh\,E_r(r) = -2\pi h\alpha\frac{R_1^3}{3\varepsilon_0} \Rightarrow E_r(r) = -\frac{\alpha\,R_1^3}{3\,\varepsilon_0 r} \Rightarrow \vec{E}(R_1 < r < R_2) = -\frac{\alpha\,R_1^3}{3\,\varepsilon_0 r}\,\vec{e}_r$$

$\rightarrow si\ r \geq R_2$, un calcul identique au précédent donne directement

$$Qint\ = \iiint \rho(r) r\,dr\,d\theta\,dz + \iint \sigma R_2\,d\theta dz = 2\pi h\int_0^{R_1} -\alpha\,r^2\,dr + \int_0^{2\pi}\sigma R_2\,d\theta\int_0^h dz$$

$$\Rightarrow Qint = -2\pi h\alpha\frac{R_1^3}{3} + 2\pi\sigma\,R_2\ h$$

et d'après le théorème de Gauss :

$$2\pi rh\,E_r(r) = -2\pi h\alpha\frac{R_1^3}{3\varepsilon_0} + 2\pi\sigma\,R_2\;h \Rightarrow E_r(r \geq R_2\,) = -\frac{\alpha\,R_1^3}{3\,\varepsilon_0 r} + \frac{\sigma\,R_2}{\varepsilon_0 r}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(r \geq R_2\,) = \frac{1}{\varepsilon_0 r}\left[-\frac{\alpha\,R_1^3}{3} + \sigma\,R_2\right]\vec{e}_r$$

2) En $r = R_1$:

$$\vec{E}(R_1^+) = -\frac{\alpha R_1^2}{3\,\varepsilon_0}\,\vec{e}_r \quad et \quad \vec{E}(R_1^-) = -\frac{\alpha\,R_1^3}{3\,\varepsilon_0 R_1}\,\vec{e}_r = -\frac{\alpha R_1^2}{3\,\varepsilon_0}\,\vec{e}_r$$

$\Rightarrow \vec{E}(R_1^+) = \vec{E}(R_1^-)$ **alors le champ électrostatique est continu en** $r = R_1$

En $r = R_2$:

$$\vec{E}(R_2^+) = -\frac{\alpha\,R_1^3}{3\,\varepsilon_0 R_2}\,\vec{e}_r \quad et \quad \vec{E}(R_2^-) = \frac{1}{\varepsilon_0 R_2}\left[-\frac{\alpha\,R_1^3}{3} + \sigma\,R_2\right]\vec{e}_r = \left[-\frac{\alpha\,R_1^3}{3\varepsilon_0 R_2} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right]\vec{e}_r$$

$\Rightarrow \vec{E}(R_2^+) \neq \vec{E}(R_2^-)$ **alors le champ électrostatique est discontinu en** $r = R_1$

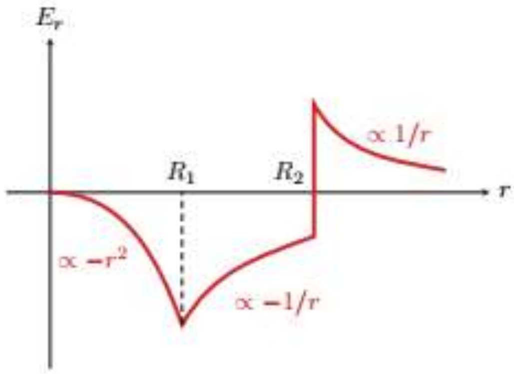
La discontinuité vaut :

$$\vec{E}(R_2^-) - \vec{E}(R_2^+) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\vec{e}_r$$

Ce qui est conforme à la relation de passage au travers d'une interface portant une charge surfacique. Rappelons que seules les charges surfaciques peuvent provoquer des discontinuités de champ électrique. La composante de $\vec{E}$ tangentielle à la surface est toujours continue, mais la composante normale est discontinue.

3) Champ créé par deux cylindres concentriques.

On suppose pour ce tracé que $\sigma R_2 > \alpha R_1^3/3$.



Exercice 4 : Cylindres coaxiaux

Exprimons le champ électrique créé en tout point de l'espace par une distribution volumique de charge ρ positive répartie uniformément entre deux cylindres coaxiaux de longueur infinie de rayons respectifs R_1 et R_2 ($R_1 < R_2$).

A partir de l'équation locale : $div\,\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$.

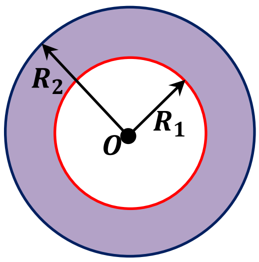


FIG. (5)

En coordonnées cylindriques l'expression de $div\,\vec{E}$ **est :**

$$div\,\vec{E} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rE_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial E_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Or suite aux symétries et aux invariances $\vec{E} = E(r)\,\vec{e}_r = E_r\vec{e}_r$

$$\Rightarrow div\,\vec{E} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rE_r)}{\partial r}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial(rE_r)}{\partial r} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial(rE_r)}{\partial r} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}r$$

La valeur de ρ dépend de la position du point M.

- si $r < R_1$ (point à l'intérieur du 1er cylindre) on a $\rho = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial\big(rE(r)\big)}{\partial r} = 0$$

$$\Rightarrow rE(r) = A$$

Comme $E(r = 0) = 0 \Rightarrow A = 0$

$\Rightarrow$ si $r < R_1$ **on a** $E(r) = 0$

- si $R_1 \leq r < R_2$, (point entre les deux cylindres) on a $\rho = Cte \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial\big(rE(r)\big)}{\partial r} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\big(rE(r)\big)}{\partial r} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} r$$

$$\Rightarrow rE(r) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r^2 + B$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r + \frac{B}{r}$$

$E(r)$ est continue en $r = R_1 \Rightarrow E(R_1^+) = E(R_1^-)$

$$\Rightarrow \frac{\rho}{2\varepsilon_0} R_1 + \frac{B}{R_1} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{B}{R_1} = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0} R_1$$

$$\Rightarrow B = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0} R_1^2$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r - \frac{\rho}{2\varepsilon_0 r} R_1^2$$

$$\Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(r - \frac{R_1^2}{r}\right)\vec{e}_r \ \textbf{pour} \quad R_1 \le r < R_2$$

- $r \ge R_2$(point à l'extérieur du 2ème cylindre) on a $\rho = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial\big(rE(r)\big)}{\partial r} = 0$$

$$\Rightarrow rE(r) = C$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{C}{r}$$

$E(r)$ est continue en $r = R_2 \Rightarrow E(R_2^+) = E(R_2^-)$

$$\Rightarrow \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(R_2 - \frac{R_1^2}{R_2}\right) = \frac{C}{R_2}$$

$$\Rightarrow C = \frac{\rho R_2}{2\varepsilon_0}\left(R_2 - \frac{R_1^2}{R_2}\right)$$

$$\Rightarrow C = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(R_2^2 - R_1^2\right)$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0 r}\left(R_2^2 - R_1^2\right)$$

$$\vec{E}(M) = \frac{\rho\left(R_2^2 - R_1^2\right)}{2\varepsilon_0\, r}\vec{e}_r$$

Conclusion :

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \vec{E}(M) = \vec{0} & \text{pour} \quad r < R_1 \\ \vec{E}(M) = \dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(r - \dfrac{R_1^2}{r}\right)\vec{e}_r & \text{pour} \quad R_1 \le r < R_2 \\ \vec{E}(M) = \dfrac{\rho\left(R_2^2 - R_1^2\right)}{2\varepsilon_0\, r}\vec{e}_r & \text{pour} \quad r > R_2 \end{cases}$$