Univérsité Ibn Zohr
Faculté des Sciences - Agadir
Département de Mathématiques
Année Univérsitaire 19-20
Filière: SMA & SMI (S2)

Examen d'Algèbre 3

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire définie par

$$f(x, y, z) = (x - y + 2z, -2x + y - 3z, -x + y - 2z),$$

1. Donner la matrice A de f relativement à la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $u = (1, 1, 0)$. Calculer $f(u), f^2(u)$ et $f^3(u)$ (rappel : $f^2 = f \circ f, f^3 = f \circ f \circ f$).
3. Montrer que $\mathcal{B}_0 = (u, f(u), f^2(u))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Écrire la matrice A_0 de f dans une base $\mathcal{B}_0$.
5. Donner la matrice P de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}_0$ puis calculer P^{-1}.
6. Donner la relation entre A, A_0 et P. Utiliser celle-ci pour vérifier la réponse à la question 4.
7. Échelonner la matrice A et en déduire le rang de f.
8. Donner les dimensions du noyau et de l'image de f puis déterminer une base de $Kerf$ et une base de Imf.
9. A-t-on $\mathbb{R}^3 = Kerf \oplus Imf$?

Exercice 2

On se place dans $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 2. On rappelle que la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est la famille de polynômes $(1, X, X^2)$. Soient f et g les applications définies sur $\mathbb{R}_2[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad f(P) = P(X + 1) \text{ et } g(P) = P(X - 1).$$

1. Soit $P = a+bX+cX^2$ un polynôme quelconque de $\mathbb{R}_2[X]$. Montrer que $f(P) = a+b+c+(b+2c)X+cX^2$ et calculer $g(P)$.
2. Montrer que f est linéaire, on admettra que g l'est aussi.
3. Montrer que les applications f et g sont inverses l'une de l'autre.
4. Donner U et V, matrices respectivement de f et g dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$
5. Vérifier que U et V sont inverses l'une de l'autre.

Exercice 3

1. Résoudre le système linéaire en utilisant la méthode de Gramer:

$$\begin{cases} -x + y + z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

2. Résoudre le système linéaire en utilisant la méthode de Gauss:

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 1 \\ 2x - 2y = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

Exercice 4

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, f une application linéaire de E dans E ; montrer que

1. $$\ker(f) = \ker(f^2) \iff \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$$
2. $$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2) \iff E = \ker(f) + \mathrm{Im}(f)$$