# Examen d'Analyse 2 – Intégration – SMA

**Exercice 1** (8 pts).

(1) Soit $f$ une fonction en escalier sur $[a, b]$.

(a) Montrer que $|f|$ est en escalier sur $[a, b]$. (2 pts)

(b) Montrer que : (2 pts)

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b \left|f(x)\right| dx.$$

(2) Soient $x > 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $F_\alpha$ la fonction définie par :

$$F_\alpha(x) = \int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\,dt.$$

(a) Calculer $F_\alpha(x)$ . (2 pts)

(b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} F_\alpha(x)$ existe si et seulement si $\alpha > 1$. (2 pts)

**Exercice 2** (8pts).

(1) Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n>1}$ définie par : (2 pts)

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{n^2+k^2}}$$

(2) Calculer l'intégrale suivante : (3 pts)

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{\cos(t)\sin(t)}.$$

**Indication** : *Utiliser le changement de variable* $x = \tan(t)$.

(3) Calculer une primitive de la fonction F définie par : (3 pts)

$$F(x) = \int \frac{\tan x}{1+\cos x}\,dx.$$

**Indication** : *Utiliser les règles de Bioche.*

**Exercice 3** (4 pts).

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_1^x \frac{\ln\left(1+t^2\right)}{t^2}\,dt.$$

(1) Calculer $F(x)$. (2 pts)
**Indication** : *Intégration par parties.*

(2) Calculer la valeur de $I = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$. (2 pts)