Université Ibn Zohr Agadir
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année universitaire 2022-2023
Filière SMI (S2)

Série 2 : Applications Lineaires et Matrices

Exercice 1. *Soient f une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, par*

$$f(x,y,z) = (x+y+z, y-z, x+2z),$$

1. *Montrer que f est linéaire.*
2. *Déterminer le noyau et l'image de f. f est-elle injective ? Est-elle surjective ?*
3. *Montrer que $ker(f) \oplus Im(f) = \mathbb{R}^3$.*
4. *Déterminer $f(F)$ où$F\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+2z = 0\}$.*

Exercice 2. *Soit φ l'application définie par*

$$\begin{aligned} \varphi : \quad & \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ & P \mapsto (P(1), P'(1), P(2), P'(2)) \end{aligned}$$

1. *Montrer que φ est linéaire..*
2. *Déterminer le noyau de φ. En déduire que φ est surjective.*

Exercice 3. *L'entier n étant dans $\mathbb{N}$. Soit f l'application définie par*

$$\begin{aligned} \varphi : \quad & \mathbb{R}_{n+1}[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ & P \mapsto (n+1)P - XP' \end{aligned}$$

1. *Montrer que f est linéaire..*
2. *Déterminer le noyau de f. En déduire que f est surjective.*

Exercice 4. *Soit g un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :*

$$g(1,0,0) = (2,1,3), g(0,1,0) = (0,1,-3), g(0,0,1) = (0,-2,2)$$

1. *Soit $X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Calculer $g(X)$.*
2. *Soit $E = \{X \in \mathbb{R}^3 : g(X) = 2X\}$ et $F = \{X \in \mathbb{R}^3 : g(X) = -X\}$. Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.*
3. *Déterminer une base de E et une base de F.*
4. *Y a-t-il $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.*

Exercice 5. *Soient E un $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E vérifiant $f \circ g =$ Id.*

1. *Montrer que $Ker(g \circ f) = Ker(f)$ et $Im(g \circ f) = Im(g)$*
2. *Montrer que $E = Ker(f) \oplus Im(g)$.*

Exercice 6. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Exercice 7. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. *Utiliser la méthode du pivot de Gauss pour montrer que A est inversible. Préciser son inverse.*

Exercice 8. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ *Calculer $A^2 - 4A + 3I$. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.*

Exercice 9. *Soient les matrices* $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ *et* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. a) *Calculer P^{-1}.*
   b) *Calculer $A_0 = P^{-1}AP$.*
   c) *Calculer A^n pour tout $n \geq 1$.*
2. *On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$ et les relations de récurrence suivantes*

$$\begin{cases} u_{n+1} &= 2u_n - v_n \\ v_{n+1} &= -u_n + 2v_n \end{cases}.$$

Calculer u_n et v_n pour tout $n \geq 1$.