Corrigé de l'examen d'Algèbre 3 (Rattrapage Juin 2019)

SMA2 et SMI2

Exercice ①

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $M_B(f) = A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ où $B = (e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soient $u = (1, 0, -1)$; $v = (0, 1, 1)$ et $w = (1, 0, 1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1) Montrons que $B' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Dans $\mathbb{R}^3$ de dimension 3 :

$B' = (u, v, w)$ base $\Leftrightarrow$ B' libre $\Leftrightarrow$ $\det(u, v, w) \neq 0$

Or, $\det(u, v, w) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$

$= 1 + 1 = 2 \neq 0$

Donc, B' est une base de $\mathbb{R}^3$.

2) On détermine $P_{BB'}$ la matrice de passage de B à B'.

On a $P = P_{BB'} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u & v & w \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$ où les colonnes de P sont les coordonnées des u, v et w dans B.

* On calcule P^{-1} à l'aide de la comatrice.

La comatrice de P est donnée par la formule

$\mathrm{com}(P) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}$ où $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ $\forall (i,j) \in [\![1, 3]\!]^2$.

et A_{ij} est la matrice obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de A

Donc, on obtient:

$$com(P) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } {}^t com(P) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

on a alors

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} {}^t com(P) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

car $\det P = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$

**) On en déduit l'expression de e_1, e_2 et e_3 en fonction de u, v et w.

on a, d'après le cours, $P^{-1} = (P_{BB'})^{-1} = P_{B'B} = M_{B'}(B)$

Donc, $M_{B'}(e_1, e_2, e_3) = P^{-1}$

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} u \\ v \\ w \end{array}$$

Et par suite, $\begin{cases} e_1 = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}w \\ e_2 = \frac{1}{2}u + v - \frac{1}{2}w \\ e_3 = -\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}w \end{cases}$

3) On détermine la matrice $N = M_{B'}(f)$.

On a $N = M_{B'}(f) = M_{B'}(f(u), f(v), f(w))$.

Donc, N est obtenue en calculant les coordonnées des vecteurs $f(u)$, $f(v)$ et $f(w)$ dans la base $B' = (u, v, w)$.

•) $f(u) = f(e_1 - e_3) = f(e_1) - f(e_3)$
$= (3e_1 + e_3) - (e_1 + 3e_3)$
$= 2e_1 - 2e_3$
$= 2(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}w) - 2(-\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}w)$
$= 2u = 2u + 0v + 0w$.

••) $f(v) = f(e_2 + e_3) = f(e_2) + f(e_3)$
$= (-e_1 + 2e_2 - e_3) + (e_1 + 3e_3)$
$= 2e_2 + 2e_3$
$= 2(\frac{1}{2}u + v - \frac{1}{2}w) + 2(-\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}w)$
$= 2v = 0u + 2v + 0w$

•••) $f(w) = f(e_1 + e_3) = f(e_1) + f(e_3)$
$= (3e_1 + e_3) + (e_1 + e_3)$
$= 4e_1 + 4e_3 = 4(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}w) + 4(-\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}w)$
$= 4w = 0u + 0v + 4w$.

D'où $N = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(u) & f(v) & f(w) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$ (matrice diagonale)

4) On détermine la relation entre A et N.

On a $A = M_B(f)$, $N = M_{B'}(f)$ et $P = P_{BB'}$.

Alors, d'après le cours, on a $N = P^{-1}AP$.

On calcule A^n, $n \in \mathbb{N}$.

- Si $n = 0$, $A^0 = I_3$ (par définition)
- Si $n \geq 1$, on a $N = P^{-1}AP$

Donc, $A = PNP^{-1}$

Soit: $A^n = PN^nP^{-1}$, $\forall n \geq 1$

Or, on a $N^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^{2n} \end{pmatrix}$, $\forall n \geq 1$

Alors $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

En faisant les calculs on obtient:

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{2n-1} + 2^{n-1} & 2^{n-1} - 2^{2n-1} & 2^{2n-1} - 2^{n-1} \\ 0 & 2^n & 0 \\ 2^{2n-1} - 2^{n-1} & 2^{n-1} - 2^{2n-1} & 2^{2n-1} + 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

5) •) On détermine $M_{BB'}(f)$ la matrice de f relativement aux bases B et B'.

On a $M_{BB'}(f) = M_{B'}(f(B))$

$= M_{B'}(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$

•) $f(e_1) = f(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}w)$
$= u + 2w$

••) $f(e_2) = f(\frac{1}{2}u + v - \frac{1}{2}w)$
$= u + 2v - 2w$

•••) $f(e_3) = f(-\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}w)$
$= -u + 2w$

Et par suite, on a

$$M_{BB'}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} u \\ v \\ w \end{array}$$

Les colonnes de $M_{BB'}(f)$ sont les coordonnées des vecteurs $f(e_i)$, $1 \leq i \leq 3$ dans la base $B' = (u, v, w)$.

**) On détermine $M_{B'B}(f)$ la matrice de f relativement aux bases B' et B.

On a $M_{B'B}(f) = M_B(f(u), f(v), f(w))$

•) $f(u) = 2u = 2e_1 - 2e_3$

••) $f(v) = 2v = 2e_2 + 2e_3$

•••) $f(w) = 4w = 4e_1 + 4e_3$

D'où,

$$M_{B'B}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(u) & f(v) & f(w) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$