Chapitre 1

ESPACES VECTORIELS

Dans ce chapitre et dans les suivants, $\mathbb{K}$ désignera un corps commutatif quelconque (le plus souvent $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Sommaire

1.1 Généralités

1.1.1 Structure d'espace vectoriel

Définition 1.1.1. On appelle espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ou encore $\mathbb{K}$-espace vectoriel, tout ensemble $\mathbb{E}$ muni de deux lois :
1. Une loi interne appelée addition, notée $+$ telle que $(\mathbb{E},+)$ soit un groupe abélien.
2. Une loi externe qui à tout couple $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times \mathbb{E}$ fait correspondre un élément de $\mathbb{E}$ noté $\lambda.x$, cette loi vérifiant les propriétés suivantes :
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x, y \in \mathbb{E}$, on a $\lambda.(x+y) = \lambda.x + \lambda.y$,
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in \mathbb{E}$, on a $(\lambda+\mu).x = \lambda.x + \mu.x$,
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in \mathbb{E}$, on a $(\lambda\mu).x = \lambda(\mu.x)$.
- $\forall x \in \mathbb{E}$, on a $1.x = x$

Les éléments de $\mathbb{E}$ s'appellent vecteurs, ceux de $\mathbb{K}$ scalaires.

Lorsqu'il n'y a pas de confusion, on dira espace vectoriel au lieu de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarques 1.1.1. *Si $\mathbb{E}$ est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$,*
- on dira que $\mathbb{E}$ est un $\mathbb{K}$-ev et que $\mathbb{K}$ est le corps de base de $\mathbb{E}$;
- l'élément neutre pour $+$, est noté 0_E et s'appelle le vecteur nul.

Exemples 1.1.1.
1. *$\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur lui même.*
2. *$\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.*
3. *$\mathbb{R}$ n'est pas un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.*
4. *$\mathbb{K}[X]$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ muni des lois classiques :*
   — $(P,Q) \longrightarrow P+Q$.
   — $(\lambda, P) \longrightarrow \lambda P$.
5. *L'ensemble $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour les opérations :*
   — *Une addition définie par : $(x,y)+(z,w) = (x+z, y+w)$.*
   — *Une loi externe définie par : $\lambda.(x,y) = (\lambda.x, \lambda.y)$.*
6. *Soit A un ensemble non vide d'un $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{E}$. On note $\mathcal{F}(A,E)$ l'ensemble des fonctions de A vers $\mathbb{E}$. On définit alors deux lois sur $\mathcal{F}(A,E)$:*

$$\forall (f,g) \in \mathcal{F}(A,E) \quad : (f+g) \quad \begin{array}{l} : A \to E \\ x \mapsto f(x)+g(x) \end{array}$$

$$\forall f \in \mathcal{F}(A,E),\ \forall \lambda \in K \quad : \lambda.f \quad \begin{array}{l} : A \to E \\ x \mapsto \lambda.f(x) \end{array}$$

   Alors $(\mathcal{F}(A,\mathbb{E}),+,.)$ est un $\mathbb{K}$-ev.

7. *Si $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, on peut munir $\mathbb{E} \times \mathbb{F}$ d'une structure naturelle de $\mathbb{K}$-espace vectoriel, en définissant ainsi les opérations :*

$$\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{E} \times \mathbb{F}, (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y').$$
$$\forall (x, y) \in \mathbb{E} \times \mathbb{F}, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \alpha.(x, y) = (\alpha.x, \alpha.y).$$

L'ensemble $\mathbb{E} \times \mathbb{F}$ muni de ces deux lois s'appelle l'espace vectoriel produit de $\mathbb{E}$ par $\mathbb{F}$.

Proposition 1.1.1. (Espace produit)
Soient $\mathbb{E}_1, \ldots, \mathbb{E}_n$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On définit sur $\mathbb{E}_1 \times \ldots \times \mathbb{E}_n$ les lois :

$$\begin{aligned} (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) &= (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \\ \lambda.(x_1, \ldots, x_n) &= (\lambda.x_1, \ldots, \lambda.x_n) \end{aligned}$$

$(E_1 \times \ldots \times E_n, +, .)$ est alors un $\mathbb{K}$-ev de vecteur nul $(0_{\mathbb{E}_1}, ..., 0_{\mathbb{E}_n})$.

Exemple 1.1.1. $(\mathbb{K}^n, +, .)$ *est un $\mathbb{K}$-ev.*

1.1.2 Calcul dans un espace vectoriel

Proposition 1.1.2. Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x, y \in \mathbb{E}$, on a $\lambda.(x - y) = \lambda.x - \lambda.y$.
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, on a $\lambda.0_E = 0_E$.
3. $\forall x \in \mathbb{E}, \forall \lambda \in \mathbb{K}$, on a $\lambda.(-x) = -\lambda.x$.
4. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in \mathbb{E}$, on a $(\lambda - \mu).x = \lambda.x - \mu.x$.
5. $\forall x \in \mathbb{E}$, on a $0.x = 0_E$.
6. $\forall x \in \mathbb{E}, \forall \lambda \in \mathbb{K}$, on a $\lambda.x = 0_E \iff \lambda = 0$ ou $x = 0_E$.

Démonstration.
1. On a $\lambda.(x - y) + \lambda.y = \lambda.((x - y) + y) = \lambda.x$.
2. On fait $x = y$ dans 1).
3. On fait $x = 0_E$ dans dans 1).
4. On a $(\lambda - \mu).x + \mu.x = ((\lambda - \mu) + \mu).x = \lambda.x$.
5. On fait $\lambda = 0$ dans 4).
6. On fait $\lambda = \mu$ dans 4).
7. En effet, supposons que $\lambda.x = 0_E$. Si $\lambda = 0$, on a gagné. Sinon λ est inversible dans le corps $\mathbb{K}$ et on a par multiplication par λ^{-1} : $\lambda^{-1}.(\lambda.x) = 1.x = 0_E$ d'où $x = 0_E$.

□

Remarques 1.1.2. *Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$,*
- On écrira désormais λx à la place de $\lambda.x$ lorsque la confusion ne sera plus à craindre.
- On pourra écrire $-\lambda x$ sans aucune ambiguité.

1.2 Sous-espaces vectoriels

Définition 1.2.1. Soit $(\mathbb{E}, +, .)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, une partie $\mathbb{F}$ de $\mathbb{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ (en abrégé sev) si et seulement si :

1. $0_{\mathbb{E}} \in \mathbb{F}$.
2. $\forall x, y \in \mathbb{F} \Longrightarrow x + y \in \mathbb{F}$.
3. $\forall x \in \mathbb{F}, \lambda \in \mathbb{K} \Longrightarrow \lambda.x \in \mathbb{F}$.

Remarque 1.2.1. *Tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$, est un espace vectoriel pour les lois induites par $\mathbb{E}$.*

Exemple 1.2.1.
1. *L'ensemble $\{0_E\}$ constitué de l'unique élément nul est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$, à ne pas confondre avec l'ensemble vide $\emptyset$ qui n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ (il ne contient pas le vecteur nul).*
2. *L'ensemble $\mathbb{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$.*

Pour montrer qu'un ensemble $\mathbb{F}$ est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel $\mathbb{E}$ on utilise les propositions suivantes :

Proposition 1.2.1. Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel et $\mathbb{F} \subset \mathbb{E}$. Alors $\mathbb{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ si et seulement si :

1. $\mathbb{F} \neq \emptyset$.
2. $\forall x, y \in \mathbb{F}, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \Longrightarrow \lambda.x + \mu.y \in \mathbb{F}$.

Démonstration. $\Rightarrow$) Trivial.
$\Leftarrow$) Montrons que $0_{\mathbb{E}} \in \mathbb{F}$. Puisque $\mathbb{F}$ est non vide, $\mathbb{F}$ contient un x. En prenant $\lambda = 1$ et $\mu = -1$, on a $x - x \in \mathbb{F}$.
La propriété $\lambda.x + \mu.y$ entraine la stabilité de $\mathbb{F}$ pour $+$ et pour . □

Proposition 1.2.2. Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel et $\mathbb{F} \subset \mathbb{E}$. Alors $\mathbb{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ si et seulement si :

1. $\mathbb{F} \neq \emptyset$.
2. $\forall x, y \in \mathbb{F} \Longrightarrow x - y \in \mathbb{F}$.
3. $\forall x \in \mathbb{F}, \forall \lambda \in \mathbb{K} \Longrightarrow \lambda.x \in \mathbb{F}$.

Démonstration. à faire en exercice. □

Exemples 1.2.1.
1. *Droite vectorielle : Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel et $v \in \mathbb{E}, v \neq 0$, alors $\mathbb{F} = \{x \in \mathbb{E} \mid \exists \lambda \in \mathbb{K}; x = \lambda.v\}$, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ dit droite vectorielle.*
2. *Plan vectoriel : Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel et $u, v \in \mathbb{E}$, alors $\mathbb{F} = \{x \in \mathbb{E} \mid \exists \lambda, \mu \in \mathbb{F}; x = \lambda.u + \mu.v\}$, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ dit plan vectoriel.*
3. *On note $\mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid deg(P) \leq n\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.*

4. *On note $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et on considère les sous-ensembles suivants de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.*
$F_1 = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ paire}\}$.
$F_2 = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ impaire}\}$.
$F_3 = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(1) = 1\}$.
F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels mais F_3 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Proposition 1.2.3. Soit I un ensemble non vide.
Soit $(\mathbb{F}_i)_{i\in I}$ une famille (finie ou infinie) de sev de $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev. Alors : $\mathbb{F} = \bigcap_{i\in I} \mathbb{F}_i$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$.

Démonstration. Pour tout $i \in I$, on a $0_E \in \mathbb{F}_i$, donc $0_E \in \mathbb{F}$. Soient $x, y \in \mathbb{F}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ alors pour tout $i \in I$, on a $\lambda x + \mu y \in \mathbb{F}_i$ donc $\lambda x + \mu y \in \mathbb{F} = \bigcap_{i\in I} \mathbb{F}_i$. □

Proposition 1.2.4. Soient $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{E}$.

1. $\mathbb{F} \cup \mathbb{G}$ n'est pas en général un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$.
2. Le complémentaire $C_{\mathbb{E}}^{\mathbb{F}} = \{x \in \mathbb{E} \mid x \notin \mathbb{F}\}$ d'un sous-espace vectoriel $\mathbb{F}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$.

Démonstration. 1. On prend $\mathbb{F} \not\subseteq \mathbb{G}$ et $\mathbb{G} \not\subseteq \mathbb{F}$, il existe donc $x \in \mathbb{F}$ et $x \notin \mathbb{G}$ et $y \in \mathbb{G}$ et $y \notin \mathbb{F}$; on a donc $x, y \in \mathbb{F} \cup \mathbb{G}$.
Si $\mathbb{F} \cup \mathbb{G}$ est un sous-espace vectoriel alors $x + y \in \mathbb{F} \cup \mathbb{G}$; c.à.d $x + y \in \mathbb{F}$ ou $x + y \in \mathbb{G}$.
Si $x + y \in \mathbb{F}$, alors $(x + y) - x \in \mathbb{F} \Longrightarrow y \in \mathbb{F}$; contradiction.
Si $x + y \in \mathbb{G}$, alors $(x + y) - y \in \mathbb{G} \Longrightarrow x \in \mathbb{G}$; contradiction.
2. Le complémentaire $C_{\mathbb{E}}^{\mathbb{F}}$ ne contient pas $0_{\mathbb{E}}$, donc n'est pas un sous-espace vectoriel. □

Proposition 1.2.5. Soient $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{E}$.
$\mathbb{F} \cup \mathbb{G}$ est un sev de $\mathbb{E}$ si et seulement si $\mathbb{F} \subset \mathbb{G}$ ou $\mathbb{G} \subset \mathbb{F}$.

Démonstration. à faire en exercice. □

1.3 Combinaisons linéaires, Espace engendré

1.3.1 Combinaisons linéaires

Définition 1.3.1. Soit $S = \{x_1, ..., x_p\}$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-space vectoriel $\mathbb{E}$. Une combinaison linéaire des éléments de S est tout élément v de $\mathbb{E}$ de la forme $v = \alpha_1 x_1 + ...\alpha_p x_p = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k x_k$, où les $\alpha_k \in \mathbb{K}$.
Les scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ sont nommés coefficients de la combinaison linéaire.

Exemples 1.3.1.
1. *Le vecteur 0_E est combinaison linéaire de toute famille finie de vecteurs, les coefficients étant nuls.*
2. *Tout vecteur x est combinaison linéaire de tout système de vecteurs contenant x, le coefficient de x étant 1, tous les autres égaux à 0.*

3. *Considérons les trois vecteurs :*
   $u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$
   On a $u_1 + u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = u_3$, *alors* u_3 *est combinaison linéaire des vecteurs* u_1 *et* u_2.
4. *Dans* $\mathbb{R}_n[X]$, *tout polynôme est une combinaison linéaire des éléments de la famille* $(1, X, X^2, \dots, X^n)$.

Remarque 1.3.1. *Pour prouver qu'un vecteur* v *est une combinaison linéaire des vecteurs* $u_1, u_2, ..., u_p$ *il faut montrer qu'il existe* p *constantes* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p$ *telles que*

$$v = \alpha_1 u_1 + ...\alpha_p u_p = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k u_k.$$

1.3.2 Sous-espace vectoriel engendré par une partie d'un ev

Définition 1.3.2. Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et S une partie finie de $\mathbb{E}$. On appelle sous-espace engendré par S, noté $Vect(S)$, l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de S. La famille S est dite génératrice du sous-espace $Vect(S)$.

Si $S = \{x_1, ..., x_p\}$, alors

$$Vect(S) = \{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p\},$$

ou encore
$$x \in Vect(S) \Leftrightarrow \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \ / \ x = \lambda_1 x_1 + ...\lambda_p x_p.$$

Proposition 1.3.1. ; Soit $S = \{x_1, ..., x_p\}$ un système fini de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{E}$. L'ensemble $\mathbb{F} = Vect(S)$ est un sev de $\mathbb{E}$; c'est le plus petit sev (pour l'inclusion) de $\mathbb{E}$ contenant S. $\mathbb{F}$ est dit sous-espace vectoriel engendré par S.

Démonstration. Soient x, y deux éléments de $\mathbb{F}$, alors $\exists (\alpha_1, ..., \alpha_p), (\mu_1, ..., \mu_p) \in \mathbb{K}^p$ tels que
$$x = \alpha_1 x_1 + ...\alpha_p x_p, \quad y = \mu_1 x_1 + ...\mu_p x_p.$$
Quels que soient les scalaires α et $\mu \in \mathbb{K}$, on a :

$$\alpha x + \mu y = (\alpha\alpha_1 + \mu\mu_1)x_1 + ... + (\alpha\alpha_p + \mu\mu_p)x_p.$$

On obtient une combinaison linéaire du systéme proposé, donc $\alpha x + \mu y \in \mathbb{F}$ qui est, par conséquent, sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$.
$\mathbb{F}$ contient évidemment chacun des x_i du systéme $(x_1, ..., x_p)$. D'autre part, tout sous-espace, contenant les vecteurs $x_1, ..., x_p$, doit contenir aussi la somme $\alpha_1 x_1 + ...\alpha_p x_p$ pour tout scalaires $\alpha_1, ..., \alpha_p$. Un tel sous-espace contient donc $\mathbb{F}$ qui est, par conséquent, le plus petit sous-espace contenant les vecteurs $x_1, ..., x_p$. □

Proposition 1.3.2. Soit S une partie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{E}$. L'ensemble $\mathbb{F} = Vect(S)$ des combinaisons linéaires finies d'éléments de S est un sev de $\mathbb{E}$; c'est le plus petit sev (pour l'inclusion) de $\mathbb{E}$ contenant S. $Vect(S)$ est dit sous-espace engendré par la partie S, il est noté :

$$Vect(S) = \langle S \rangle = \{x \in \mathbb{E} \mid \exists n \geq 1, \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}, x_1, ..., x_n \in S,\ x = \lambda_1 x_1 + ...\lambda_n x_n\}.$$

Corollaire 1.3.1. S est un sous-espace vectoriel, si et seulement si, $Vect(S) = S$.

Exemples 1.3.2.

1. *$Vect\{\emptyset\} = \{\ 0_E\}$ car l'espace nul est le plus petit sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$.*
2. *$Vect(\mathbb{E}) = \mathbb{E}$ car $Vect(\mathbb{E})$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant $\mathbb{E}$.*
3. *Soit $A = \{u\}$. Montrons que $Vect\{u\} = \{\alpha u \mid \alpha \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K}u$.*
   Puisque $u \in A \subset Vect(A)$ et comme $Vect(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$, on a $\alpha u \in Vect(A)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$. Ainsi $\mathbb{K}u \subset vect\{u\}$, par double inclusion on trouve $\mathbb{K}u = vect\{u\}$.
4. *Soit $A = \{u, v\}$. On montre comme ci-dessus que*
   $Vect\{u, v\} = \{\alpha u + \mu v \mid \alpha, \mu \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K}u + \mathbb{K}v$.

Exercice : Soit A et B une partie d'un espace vectoriel $\mathbb{E}$. Montrer que :

1. $A \subset B \Longrightarrow Vect(A) \subset Vect(B)$.
2. $Vect(vec(A)) = Vect(A)$.

1.4 Somme de sous-espaces vectoriels

1.4.1 Somme de deux sous-espaces vectoriels

Définition 1.4.1. Soient $\mathbb{F}, \mathbb{G}$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}$. On appelle somme de $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ l'ensemble

$$\mathbb{F} + \mathbb{G} = \{x_F + x_G \mid x_F \in \mathbb{F}\, et\ x_G \in \mathbb{G}\}.$$

Proposition 1.4.1. Soient $\mathbb{F}, \mathbb{G}$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}$.

$$\mathbb{F} + \mathbb{G} = Vect(\mathbb{F} \cup \mathbb{G}).$$

$\mathbb{F} + \mathbb{G}$ est donc un sev de $\mathbb{E}$.

Exercice : Soient A et B deux parties d'un espace vectoriel $\mathbb{E}$. Montrer que $Vect(A \cup B) = Vect(A) + Vect(B)$.

Définition 1.4.2. Soient $\mathbb{F}, \mathbb{G}$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}$. La somme $\mathbb{F} + \mathbb{G}$ est directe, et noté $\mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$, lorsque $\forall x \in \mathbb{F} + \mathbb{G}$, x s'écrit de façon unique $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in \mathbb{F}\, et\ x_G \in \mathbb{G}$.

Théorème 1.4.1. Soient $\mathbb{F}, \mathbb{G}$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}$.
On a la caractérisation suivante d'une somme directe :

$$\textit{La somme } \mathbb{F}+\mathbb{G} \textit{ est drecte } \iff \mathbb{F}\cap\mathbb{G}=\{0_E\}.$$

Démonstration. $\Rightarrow$) Soit $x \in \mathbb{F}\cap\mathbb{G}$. On montre facilement que $x = 0_E$.
$\Leftarrow$) Soit $x \in \mathbb{F}+\mathbb{G}$. Supposons que $x = x_F + x_G$ et $x = x'_F + x'_G$. On montre facilement que $x_F = x'_F$ et que $x_G = x'_G$. □

Remarque 1.4.1. *Il y a donc deux façons de prouver que $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont en somme directe :*

1. *Soit on prouve que tout vecteur de $\mathbb{F}+\mathbb{G}$ se décompose de façon unique comme somme d'un vecteur de $\mathbb{F}$ et d'un vecteur de $\mathbb{G}$.*
2. *Soit on prouve que $\mathbb{F}\cap\mathbb{G}=\{0_E\}$.*

1.4.2 Sous-espaces supplémentaires

Définition 1.4.3. Soient $\mathbb{F}, \mathbb{G}$ deux sous espaces vectoriels de $\mathbb{E}$. Ils sont supplémentaires si et seulement si

$$\mathbb{E} = \mathbb{F}\oplus\mathbb{G}.$$

Cela signifie que tout vecteur de $\mathbb{E}$ s'écrit de façon unique sous la forme $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in \mathbb{F}$ *et* $x_G \in \mathbb{G}$.

Proposition 1.4.2. Soient $\mathbb{F}, \mathbb{G}$ deux sous espaces vectoriels de $\mathbb{E}$. Alors $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{E}$ si et seulement si

$$\mathbb{E} = \mathbb{F}+\mathbb{G} \textit{ et } \mathbb{F}\cap\mathbb{G}=\{0_E\}.$$

Proposition 1.4.3. Tout sous-espace vectoriel $\mathbb{F}$ de $\mathbb{E}$ admet au moins un supplémentaire.

Remarque 1.4.2. *En général, un sous-espace vectoriel admet beaucoup de supplémentaires, les seuls cas d'unicité sont les suivants :*
le seul supplémentaire de l'espace vectoriel $\{0_E\}$ dans un espace vectoriel $\mathbb{E}$ est $\mathbb{E}$.
le seul supplémentaire de l'espace vectoriel $\mathbb{E}$ dans un espace vectoriel $\mathbb{E}$ est $\{0_E\}$.

Exemples 1.4.1.
1. *Dans $\mathbb{R}^2$, les deux sous-espaces vectoriels $\mathbb{F} = Vect\{(1,0)\}$ et $\mathbb{G} = Vect\{(0,1)\}$ sont supplémentaires. En effet, tout élément (x_1, x_2) de $\mathbb{R}^2$ s'écrit de manière unique sous la forme $x_1(1,0) + x_2(0,1)$.*
2. *Dans l'espace $\mathbb{E} = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ on considère les deux ensembles :*
   $\mathbb{F} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f \textit{ paire}\}$ *et* $\mathbb{G} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f \textit{ impaire}\}$.
   Montrer que $\mathbb{E} = \mathbb{F}\oplus\mathbb{G}$.

1.4.3 Somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels

Définition 1.4.4. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2, \ldots, \mathbb{F}_k$ des sev de $\mathbb{E}$. La somme $\mathbb{F} = \mathbb{F}_1 + \ldots + \mathbb{F}_k$ est un sev de $\mathbb{E}$ défini par :

$$\mathbb{F}_1 + \ldots + \mathbb{F}_k = \{x_1 + \ldots + x_k \mid \forall i \in \{1, ..., k\}, x_i \in \mathbb{F}_i\}$$

On dira que cette somme est directe et on notera $\mathbb{F} = \mathbb{F}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{F}_k$, lorsque tout élément de $\mathbb{F}$ se décompose de façon unique comme somme d'éléments de $\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2, \ldots, \mathbb{F}_k$.

Proposition 1.4.4. Soient $\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2, \ldots, \mathbb{F}_k$ des k sev de $\mathbb{E}$. On dit que la somme $\mathbb{F}_1 + \ldots + \mathbb{F}_k$ est directe et on notera $\mathbb{F} = \mathbb{F}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{F}_k$ lorsque $\mathbb{F} = \mathbb{F}_1 + \ldots + \mathbb{F}_k$ et $\mathbb{F}_i \cap \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} \mathbb{F}_j = \{0_E\}$.

Proposition 1.4.5. Soient $\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2, \ldots, \mathbb{F}_k$ des k sev de $\mathbb{E}$. On dit que la somme $\mathbb{F}_1 + \ldots + \mathbb{F}_k$ est directe si pour tout $x_1 \in \mathbb{F}_1, ..., x_k \in \mathbb{F}_k$, tels que $x_1 + \ldots + x_k = 0_E$, on a $x_1 = \ldots = x_k = 0_E$.

Définition 1.4.5. Lorsque $\mathbb{E} = \mathbb{F}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{F}_k$, on dit que les sev $\mathbb{F}_1, \ldots, \mathbb{F}_k$ sont supplémentaires dans $\mathbb{E}$.

1.5 Famille libre-Famille génératrice-Base

1.5.1 Famille libre-Famille liée

Définition 1.5.1.

1. On dit qu'un système fini $\{x_1, ..., x_p\}$ de vecteurs d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $\mathbb{E}$ est libre si toute combinaison linéaire de $x_1, ..., x_p$ est triviale càd :

   $$Si \quad \alpha_1, ..., \alpha_p \in \mathbb{K} \quad \text{tels que} \quad \alpha_1.x_1 + ... + \alpha_p.x_p = 0, \quad alors \quad \alpha_1 = ... = \alpha_p = 0.$$

   On dit aussi que les vecteurs de la famille sont linéairement indépendants.
2. On dit qu'un système fini $\{x_1, ..., x_p\}$ de vecteurs d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $\mathbb{E}$ est lié s'il n'est pas libre. Ce qui revient à dire qu'il existe des scalaires $\alpha_1, ..., \alpha_1$ non tous nuls tels que :

   $$\alpha_1.x_1 + ... + \alpha_p.x_p = 0$$

Proposition 1.5.1.

1. $\{x\}$ est une famille libre $\Longleftrightarrow x \neq 0_E$.
2. Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
3. Toute famille contenant une famille liée est liée.
4. Toute famille $\{v_1, ..., v_p\}$ dont l'un des vecteurs v_i est nul, est liée

Démonstration. 1. $\Rightarrow$) Si $x = 0_E$ alors $\alpha x = 0_E$ pour tout α d'où $\{x\}$ est liée.
$\Leftarrow$) $\alpha x = 0_E \Longrightarrow \alpha = 0 \quad car \quad x \neq 0_E$.

2. Soit $F = \{v_1, ..., v_p\}$ une famille libre et F' une sous-famille de F, quitte à changer la numérotation $F' = \{v_1, ..., v_k\}$ avec $k \leq p$.
Si F' est liée, l'un des v_i serait combinaison linéaire des autres.
3. Soit $F = \{v_1, ..., v_p\}$ et $G = \{v_1, ..., v_p, w_1, ..., w_q\}$, l'un des vecteurs v_i est combinaison linéaire des autres vecteurs de F, donc de G, d'où G est liée.
4. $\{0_E\}$ étant liée, toute sur-famille est liée.

□

Définition 1.5.2. 1. On dit qu'une partie A d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{E}$ est libre si tout système fini d'éléments distincts de A est libre, càd :
$\forall p \geq 1, \forall x_1, ..., x_p \in A, \forall \alpha_1, ..., \alpha_p \in \mathbb{K}$ tels que $\alpha_1.x_1 + ... + \alpha_p.x_p = 0_E$, on a :

$$\alpha_1 = ... = \alpha_p = 0.$$

2. On dit qu'une partie A de $\mathbb{E}$ est liée si elle n'est pas libre. Autrement dit, il existe un système fini de vecteurs de A qui soit lié.

Exemples 1.5.1. *1. La partie $\{1, X, ..., X^n, ...\}$ est libre dans $\mathbb{K}[X]$.*
2. Soient x, y deux vecteurs d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $\mathbb{E}$. $\{x, y\}$ est liée, si et seulement si, $(\exists \alpha \in \mathbb{K}, x = \alpha y)$ ou $(\exists \mu \in \mathbb{K}, y = \mu x)$. Ansi, la famille $\{x, y\}$ est liée, si et seulement si, x et y sont colinéaires.
3. Dans $\mathbb{E} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, considérons les fonctions $f : x \longmapsto 1, g :\longmapsto cosx, h :\longmapsto sinx$. Montrer que la famille $\{f, g, h\}$ est libre.

1.5.2 Famille génératrice

Définition 1.5.3. soit $\mathcal{F} = \{x_1, \ldots, x_p\}$ une famille finie de vecteurs de E. On dit qu'un vecteur x de E est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}$ si et seulement s'il existe une famille $\lambda_1 \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ telle que

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i.$$

Définition 1.5.4. Soit $\mathcal{F} = \{x_1, \ldots, x_p\}$ une famille finie de vecteurs de E. On dit que $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E si et seulement si tout vecteur de E est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}$ (i.e.Vect$\mathcal{F} = E$).

Définition 1.5.5. On dit que $\mathbb{G}$, famille non vide de $\mathbb{E}$, est une famille génératrice de $\mathbb{E}$ si et seulement si $\mathbb{E} = Vect(\mathbb{G})$, c'est-à-dire si tout élément de $\mathbb{E}$ est combinaison linéaire (finie) d'éléments de $\mathbb{G}$.

$$G\ famille\ génėeratrice\ de\ \mathbb{E} \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{E}, \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \exists (g_1, \ldots, g_p) \in \mathbb{G}^p \\ x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i. \end{cases}$$

Proposition 1.5.2. Toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.

Exemple 1.5.1. *Montrer que les vecteurs* $v_1 = (1,1), v_2 = (2,3)$ *et* $v_3 = (1,2)$ *forment une famille génératrice de* $\mathbb{R}^2$.

1.5.3 Base d'un espace vectoriel

Définition 1.5.6. On dit qu'une famille „$B = (e_i)_{1\leq i\leq n} = (e_1, ..., e_n)$ de vecteurs de $\mathbb{E}$ est une base de $\mathbb{E}$ si celle-ci est libre et génératrice.

Exemples 1.5.2.

1. *Soit* $\mathbb{E} = \mathbb{K}^n$, *on pose* $e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0) \in \mathbb{K}^n$ *où 1 se situe en ième position. Montrer que la famille* „$B = (e_i)_{1\leq i\leq n} = (e_1, ..., e_n)$ *est une base de* $\mathbb{K}^n$.
2. *La famille* „$B = (1, i)$ *est une base du* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $\mathbb{C}$.
3. *Si* $\mathbb{E}$ *et* $\mathbb{F}$ *sont deux espaces vectoriels de bases respectives* $\mathcal{B}_E = (e_1, ..., e_n)$ *et* $\mathcal{B}_F = (f_1, ..., f_m)$, *alors* $\mathbb{E}\times\mathbb{F}$ *admet pour base* $\mathcal{B} = \{(e_1, 0_F), ..., (e_n, 0_F), (0_E, f_1), ...(0_E, f_m)\}$.

Remarque 1.5.1. *La famille* $(1, i)$ *est liée dans le* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel* $\mathbb{C}$. *Elle n'est pas donc une base du* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel* $\mathbb{C}$.

Théorème 1.5.1. Si $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n} = (e_1, ..., e_n)$ est une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{E}$, alors

$$\forall x \in \mathbb{E}, \exists!(\alpha_1, ..., \alpha_n), x = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n.$$

Les scalaires $\alpha_1, ..., \alpha_n$ sont appelés les composantes de x dans la base „B (ou encore les coordonnées de x).

Théorème 1.5.2. Si $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base de $\mathbb{E}$ alors pour tout vecteur x et y de composantes $x_1, ..., x_n$ et $y_1, ..., y_n$ dans $\mathcal{B}$, les composantes de $x + y$ sont $x_1 + y_1, ..., x_n + y_n$ et celle de αx sont $\alpha x_1, ..., \alpha x_n$.

Proposition 1.5.3. Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel et $\mathcal{B}$ une famille non vide de $\mathbb{E}$, on a les équivalences :

1. $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{E}$,
2. $\mathcal{B}$ est une famille libre maximale,
3. $\mathcal{B}$ est une famille généeratrice minimale.

1.6 Espaces vectoriels de dimension finie

1.6.1 Notion de dimension

Définition 1.6.1. On appelle espace vectoriel de dimension finie tout espace vectoriel engendré par un système fini de vecteurs. Dans le cas contraire on dit que l'espace vectoriel est de dimension infinie.

Lemme 1.6.1. (Retrait d'un vecteur redondant)
Soit une famille formée de $n+1$ vecteurs de l'espace $\mathbb{E}$: $S = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in E^{n+1}$. Si le vecteur x_{n+1} est combinaison linéaire des autres vecteurs : $x_{n+1} \in \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$, alors on peut retirer le vecteur x_{n+1} sans modifier le sous-espace engendré par S :

$$\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$$

En particulier

$$Vect(x_1, \dots, x_p, 0_E) = Vect(x_1, \dots, x_p).$$

Démonstration. On procède par double inclusion.

1. $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n) \subset \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ est évident !
2. $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \subset \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ est facile à montrer !

□

Exemple 1.6.1. *Considérons dans $\mathbb{R}^4$ les trois vecteurs $v_1 = (1, 1, 0, -1), v_2 = (1, 2, 1, 0)$ et $v_3 = (3, 5, 2, -1)$.*
Montrer que $Vect(v_1, v_2, v_3) = Vect(v_1, v_2)$.

Théorème 1.6.1. (Théorème de la base extraite)
De toute famille génératrice $\mathcal{G}$ de $\mathbb{E}$ on peut extraire une base de $\mathbb{E}$.

Démonstration. Il suffit d'éliminer tous les vecteurs redondants. □

Corollaire 1.6.1. (Existence de bases)
Tout espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0_E\}$ possède au moins une base.

Lemme 1.6.2. (Augmentation d'une famille libre)
Soit $\mathcal{L} = (l_1, \dots, l_n)$ une famille libre de vecteurs d'un espace vectoriel $\mathbb{E}$ et un vecteur $x \in \mathbb{E}$. Si $x \notin Vect(\mathcal{L})$, alors la famille $\mathcal{L}' = (l_1, \dots, l_n, x)$ est encore libre.

Démonstration. Se démontre facilement par l'absurde. □

Théorème 1.6.2. Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Pour toute famille libre $\mathcal{L}$ de $\mathbb{E}$, il existe au moins une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{E}$ obtenue en complétant $\mathcal{L}$ à l'aide de vecteurs de $\mathbb{E}$.

Démonstration. On introduit une famille génératrice $\mathcal{G}$ quelconque. Si il existe un vecteur de $\mathcal{G}$ n'appartenant pas à $\mathrm{Vect}(\mathcal{L})$ alors on l'ajoute à $\mathcal{L}$. On procède ainsi tant qu'il reste des vecteurs de $\mathcal{G}$ n'appartenant pas à $\mathrm{Vect}(\mathcal{L})$. La famille $\mathcal{L}$ obtenue est alors libre et génératrice. C'est donc une base de $\mathbb{E}$. □

Lemme 1.6.3. (Lemme de Steinitz)
Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel engendré par le système $(e_1, ..., e_n)$ et soit $(f_1, ..., f_m)$ un système de vecteurs de $\mathbb{E}$. Si $m > n$, alors $(f_1, ..., f_m)$ est lié.

Théorème et Définition 1.6.1. Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, non réduit à $\{0_E\}$. Toutes les bases de $\mathbb{E}$ ont le même cardinal n.
Cet entier est appelé dimension de $\mathbb{E}$ et est noté $dimE$ ou $dim_{\mathbb{K}}E$. On convient que $\{0\}$ est de dimension nulle.

Démonstration. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases. Si $\mathcal{B}'$ avait plus d'éléments que $\mathcal{B}$ elle ne serait pas libre car $\mathcal{B}$ est génératrice. □

Théorème 1.6.3. (Théorème de la base incomplète).
Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel de base $(e_1, ..., e_n)$ et soit $(f_1, ..., f_m) \quad (m < n)$, un système libre. Alors il existe $n - m$ vecteurs parmi les vecteurs $e_1, ..., e_n$ tels que le système constitué de ces $n - m$ vecteurs et des vecteurs $f_1, ..., f_m$ forme une base de $\mathbb{E}$.

Proposition 1.6.1. Dans un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{F}$ une famille de p vecteurs de E.
- Si $\mathcal{F}$ est libre, alors $p \leq n$ avec égalité si et seulement si $\mathcal{F}$ est une base de E.
- Si $\mathcal{F}$ est génératrice, alors $p \geq n$ avec égalité si et seulement si $\mathcal{F}$ est une base de E.

Corollaire 1.6.2. Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel de dimension finie n. Alors
1. Toute famille génératrice de n éléments est une base.
2. Toute famille libre de n éléments est une base.

Démonstration.
1. De cette famille, on peut extraire une base, elle doit avoir n éléments, donc c'est elle même.
2. Cette famille peut être complétée pour former une base qui doit avoir n éléments, donc c'est elle même

□

Remarque 1.6.1. *Si $dimE = n$, pour montrer qu'une famille de n éléments est une base de $\mathbb{E}$, il suffit de montrer qu'elle est libre ou bien génératrice.*

Exemples 1.6.1.
1. *Si $\mathbb{E} = \{0_E\}$, on pose $dim_{\mathbb{K}}\mathbb{E} = 0$, et $\mathbb{E} = \{0_E\} \Longleftrightarrow dim_{\mathbb{K}}\mathbb{E} = 0$.*
2. *$dim_{\mathbb{K}}\mathbb{K}^n = n$.*
3. *La dimension d'un espace vectoriel dépend non seulement de $\mathbb{E}$ mais aussi de $\mathbb{K}$, $dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C} = 2$ et $dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C} = 1$.*
4. *$dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}_n[X] = n + 1$.*

Proposition 1.6.2. ;(Dimension d'un espace produit)
Soient $\mathbb{E}_1, ..., \mathbb{E}_p$ des espaces vectoriels de dimension finie sur le même corps $\mathbb{K}$, alors $dim_K(\mathbb{E}_1 \times ... \times \mathbb{E}_p) = dim_K\mathbb{E}_1 + ... + dim_K\mathbb{E}_p$.

1.7 Sous-espaces d'un ev de dimension finie

1.7.1 Dimension d'un sous-espace

Proposition 1.7.1. Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel de dimension finie et $\mathbb{F}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$. Alors

1. $dim_{\mathbb{K}}\mathbb{F} \leq dim_{\mathbb{K}}\mathbb{E}$.
2. $dim_{\mathbb{K}}\mathbb{F} = dim_{\mathbb{K}}\mathbb{E} \Longleftrightarrow \mathbb{E} = \mathbb{F}$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $dim_{\mathbb{K}}\mathbb{E} = n$.

1. - Si $dim_{\mathbb{K}}\mathbb{F} = 0$, on a $dim_{\mathbb{K}}\mathbb{F} \leq dim_{\mathbb{K}}\mathbb{E} = n$.
   - Si $dim_{\mathbb{K}}\mathbb{F} \neq 0$, alors $\mathbb{F} \neq \{0\}$, donc $\mathbb{F}$ admet une base, $\mathcal{B}$, qui est une partie libre de $\mathbb{F}$ donc de $\mathbb{E}$, d'où $dim_{\mathbb{K}}\mathbb{F} = cardinal\mathcal{B} \leq dim_{\mathbb{K}}\mathbb{E}$.
2. $\Leftarrow$) Trivial.
   $\Rightarrow$) Il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{F}$ ayant n éléments, elle est donc libre dans $\mathbb{F}$ et par suite dans $\mathbb{E}$, elle est donc base de $\mathbb{E}$; d'après le théorème précédent, donc famille génératrice de $\mathbb{E}$, donc $\mathbb{E} = \mathbb{F}$.

□

Exemple 1.7.1. *On considère dans $\mathbb{R}_3[X]$ les polynômes*

$$P_1 = 1 + X^3, P_2 = 1 - X^2 \text{ et } P_3 = 1.$$

1. *La famille $\{P_1, P_2, P_3\}$ est-elle libre ?*
2. *Déterminer un polynôme P_4 tel que la famille $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ soit une base de $\mathbb{R}_3[X]$.*

1.7.2 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Théorème 1.7.1. Soient $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ deux sous-espaces vectoriels non réduits à $\{0\}$ d'un espace vectoriel $\mathbb{E}$ de dimension finie. $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{E}$ si et seulement s'ils admettent pour bases respectives deux parties complémentaires d'une base de $\mathbb{E}$.

Théorème 1.7.2. (Grassmann)
Soient $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ deux sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel $\mathbb{E}$. Alors $\mathbb{F} + \mathbb{G}$ est de dimension finie et on a :

$$dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{F} + \mathbb{G}) = dim_{\mathbb{K}}\mathbb{F} + dim_{\mathbb{K}}\mathbb{G} - dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{F} \cap \mathbb{G}).$$

Démonstration. Soit $(e_1, ..., e_p)$ une base de $(\mathbb{F} \cap \mathbb{G})$, que l'on complète en une base $(e_1, ..., e_p, f_1, ..., f_q)$ de $\mathbb{F}$ et $(e_1, ..., e_p, g_1, ..., g_r)$ de $\mathbb{G}$.
On vérifiera alors que $(e_1, ..., e_p, f_1, ..., f_q, g_1, ..., g_r)$ est une base de $\mathbb{F} + \mathbb{G}$. □

Corollaire 1.7.1. si $\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$, alors $\dim\mathbb{E} = \dim\mathbb{F} + \dim\mathbb{G}$.

Théorème 1.7.3. tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel $\mathbb{E}$ de dimension finie admet au moins un supplémentaire dans $\mathbb{E}$.

Démonstration. On utilise ici le théorème de la base incomplète en considérant une base de $\mathbb{F}$ que l'on complète pour obtenir une base de $\mathbb{E}$. Les vecteurs ajoutés engendrent alors un sev supplémentaire de $\mathbb{F}$ dans $\mathbb{E}$. □

Théorème 1.7.4. Soient $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel $\mathbb{E}$ de dimension finie.

$$\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G} \iff \begin{cases} \mathbb{F} \cap \mathbb{G} = \{0_E\} \\ \\ \dim\mathbb{F} + \dim\mathbb{G} = \dim\mathbb{E} \end{cases} \iff \begin{cases} \mathbb{F} + \mathbb{G} = \mathbb{E} \\ \\ \dim\mathbb{F} + \dim\mathbb{G} = \dim\mathbb{E} \end{cases}$$

Exemple 1.7.2. *Soient* $\mathbb{E} = \mathbb{R}_n[X]$, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $\mathbb{G} = \{XP(X)/P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\}$.
Montrer que $\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$.

1.8 Rang d'un système fini de vecteurs

Définition 1.8.1. On appelle rang du système de vecteurs $\mathcal{F} = \{x_1, ..., x_n\}$ la dimension du sous-espace vectoriel engendré par ce système.

$$rg(\mathcal{F}) = dim_{\mathbb{K}} Vect\{x_1, ..., x_n\}.$$

Proposition 1.8.1. Le rang d'un système de vecteurs est le nombre maximum de vecteurs libres que l'on peut extraire de ce système.

Exemple 1.8.1. *Dans* $\mathbb{K}^4$, *considérons le système des trois vecteurs :*

$$v_1 = (1, 0, 0, 0), v_2 = (0, 1, 0, 0), v_3 = (1, 1, 0, 0).$$

Déterminer le rang de $\mathcal{F} = \{v_1, v_2, v_3\}$.

Chapitre 2

APPLICATIONS LINÉAIRES

Sommaire

2.1 Généralités

Définition 2.1.1. Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$ deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ et f une application de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{E}'$. On dit que f est linéaire si :

1. $f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{E}$.
2. $f(\alpha x) = \alpha f(x), \forall x \in \mathbb{E}, \forall \alpha \in \mathbb{K}$.
   ou, de manière équivalente

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y), \forall x, y \in \mathbb{E}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

Définition 2.1.2. Soit $f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}^{'}$ une application linéaire.

1. Si f est bijective, on dit que f est un isomorphisme de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{E}^{'}$.
2. Si $\mathbb{E} = \mathbb{E}^{'}$, on dit que f est un endomorphisme de $\mathbb{E}$.
3. Si $\mathbb{E} = \mathbb{E}^{'}$ et f est bijective, on dit que f est un automorphisme de $\mathbb{E}$.
4. Si $\mathbb{E}^{'} = \mathbb{K}$, on dit que f est une forme linéaire.

Notations :

1. On note $\mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{E}^{'})$ l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{E}^{'}$.
2. On note $\mathcal{L}(\mathbb{E})$ ou $End(\mathbb{E})$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{E}$.
3. On note $\mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{K})$ ou encore $\mathbb{E}^*$ l'ensemble des formes linéaires de $\mathbb{E}$.
4. On note $Isom(\mathbb{E}, \mathbb{E}^{'})$ l'ensemble des isomorphismes de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{E}^{'}$.
5. On note $GL(\mathbb{E})$ l'ensemble des automorphismes de $\mathbb{E}$.

Exemples 2.1.1.
1. *L'application nulle $f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}^{'}$, définie par $f(x) = 0_{E'}$ est linéaire.*
2. *L'application identique $id_E : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$, définie par $id_E(x) = x$ est un endomorphisme.*
3. *Les applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont les applications $f : x \longmapsto ax$.*
4. *$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (0, 2y - z, 0)$. Montrer que f est linéaire.*
5. *$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = x^2 + 2y$. Montrer que f n'est pas linéaire.*

Proposition 2.1.1. Soient $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{E}')$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Les applications $f+g$ et λf définies par

$$\forall x \in \mathbb{E}, (f+g)(x) = f(x) + g(x) \ \ et \ \ (\lambda f)(x) = \lambda f(x),$$

sont des éléments de $\mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{E}')$.
L'ensemble $\mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{E}')$ muni de ces deux lois est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Proposition 2.1.2. Soit $f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}^{'}$ une application linéaire.

1. L'image du vecteur nul est le vecteur nul : $f(0_E) = 0_{E'}$.
2. L'image de l'opposé est l'opposé de l'image : $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{E}$.
3. L'image d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images : $f(\sum_{k=1}^{p} \alpha_k x_k) = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k f(x_k)$ pour tout $x_1, ..., x_p \in \mathbb{E}$.

Démonstration.
1. Soit $x \in \mathbb{E}$, on a $f(x) = f(x + 0_E) = f(x) + f(0_E) \Longrightarrow f(0_E) = f(x) - f(x) = 0_{E'}$.
2. Soit $x \in \mathbb{E}$, on a $f(0_E) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x) \Longrightarrow f(x) + f(-x) = 0_{E'}$, d'où $f(-x) = -f(x)$.
3. Faisons une récurrence sur p.

□

Théorème 2.1.1. (Construction d'une application linéaire)
Soit $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension respectives n et m. Soient $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de $\mathbb{E}$, et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{E}')$. Alors f est entièrement déterminée par les images $f(e_i), i = 1, \ldots, n$.

Démonstration. Tout vecteur x de $\mathbb{E}$ se décompose d'une manière unique dans la base $\mathcal{B}$ sous la forme

$$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n,$$

où $x_1, \ldots, x_n$ appartenant à $\mathbb{K}$ sont les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$. Puisque f est linéaire, alors

$$f(x) = f(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \ldots + x_n f(e_n).$$

□

Exemple 2.1.1. *Soient $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et l'application $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par*

$$f(e_1) = e_1 + e_2,\ f(e_2) = e_1 - e_2 \ et\ f(e_3) = e_1 + e_3.$$

Montrer que f est l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = (x + y + z, x - y, z).$$

Proposition 2.1.3.
1. La composée de deux applications linéaires est linéaire :
$$f \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{E}^{'}), g \in \mathcal{L}(\mathbb{E}^{'}, \mathbb{G}) \Longrightarrow gof \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{G}).$$
2. Si f est un isomorphisme alors f^{-1} est un isomorphisme :
$$f \in Isom(\mathbb{E}, \mathbb{E}^{'}) \Longrightarrow f^{-1} \in Isom(\mathbb{E}^{'}, \mathbb{E}).$$
3. La composée de deux isomorphismes est isomorphisme :
$$f \in Isom(\mathbb{E}, \mathbb{E}^{'}), g \in Isom(\mathbb{E}^{'}, \mathbb{G}) \Longrightarrow gof \in Isom(\mathbb{E}, \mathbb{G}).$$

2.2 Images et noyau d'une application linéaire

2.2.1 Image

Définition 2.2.1. Soit $f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}'$ une application linéaire. On appelle image de f le sous-espace de $\mathbb{E}'$ noté Imf :

$$\mathrm{Im} f = f(\mathbb{E}) = \{y \in \mathbb{E}' \mid \exists x \in \mathbb{E}, f(x) = y\}$$

.

Proposition 2.2.1. Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{E}')$.

1. Si $\mathbb{E} = \mathrm{Vect}\{e_1, ..., e_n\}$ alors $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\{f(e_1), ..., f(e_n)\}$.
2. Si $\{e_1, ..., e_n\}$ est une famille libre dans $\mathbb{E}$ et f injective alors $\{f(e_1), ..., f(e_n)\}$ est une famille libre de $\mathbb{E}'$.

Proposition 2.2.2. Soit $f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}'$ une application linéaire.

1. Si $\mathbb{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$, alors $f(\mathbb{F})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}'$.
2. Si $\mathbb{G}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}'$, alors $f^{-1}(\mathbb{G})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$.

Démonstration.
1. On montre que $f(\mathbb{F})$ est une partie non vide de $\mathbb{E}'$ stable par CL.
2. On montre que $f^{-1}(\mathbb{G})$ est une partie non vide de $\mathbb{E}$ stable par CL.

□

Exemple 2.2.1. *Déterminer l'image de l'application linéaire* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *définie par* $f : (x, y) \longmapsto (x - y, x + y)$.

Proposition 2.2.3. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{E}')$ et $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{E}$.

1. f est surjective si et seulement si $f(\mathcal{B})$ est une famille génératrice de $\mathbb{E}'$.
2. f est injective si et seulement si $f(\mathcal{B})$ est libre.
3. f est bijective si et seulement si $f(\mathcal{B})$ est une base de $\mathbb{E}'$.

Exemple 2.2.2. *Soit* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *l'application définie par*

$$f(x, y, z) = (x + z, y + z, x + z)$$

.

1. *Déterminer* Imf.
2. f *est-elle surjective ?*

2.2.2 Noyau

Définition 2.2.2. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{E}')$. On appelle noyau de f le sous-espace $f^{-1}(\{0_{E'}\})$ de $\mathbb{E}$ noté Ker$f$:

$$\mathrm{Ker}f = \{x \in \mathbb{E} \mid f(x) = 0_{E'}\}.$$

Proposition 2.2.4. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{E}')$. On a

1. L'application f est injective si et seulement si Ker$f = \{0_E\}$ (ou encore si et seulement si : $\forall x \in \mathbb{E} \;\; f(x) = 0_{E'} \implies x = 0_E$).
2. L'application f est surjective si et seulement si Im$f = \mathbb{E}'$

Démonstration. Démonstrations faciles ! ! □

Exemple 2.2.3. *Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par*

$$f(x, y) = (2x - y, y, 3x + y).$$

Déterminer le noyau de l'application linéaire f.

2.3 Théorème du rang

2.3.1 Rang d'une famille finie de vecteurs

Définition 2.3.1. Soit une famille de vecteurs $\mathcal{F} = (x_1, \ldots, x_n)$ d'un espace vectoriel $\mathbb{E}$. On appelle rang de la famille $\mathcal{F}$, la dimension du sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{F}$:

$$\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \mathrm{dim}\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$$

2.3.2 Rang d'une application linéaire

Définition 2.3.2. soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F}')$ avec $\mathbb{E}$ de dimension finie. On appelle rang de f, on note $rg(f)$ la dimension de l'image de f, càd. $rg(f) = \mathrm{dim}f(E)$.
Une conséquence immédiate de cette définition est que f est surjective ssi $rg(f) = \mathrm{dim}\mathbb{E}^{'}$.

Théorème 2.3.1. Deux espaces vectoriels $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$ de dimension finie sont isomorphes si et seulement s'ils ont la même dimension.

Théorème 2.3.2. (Théorème du rang).
Soit $f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}^{'}$ une application linéaire ($\mathbb{E}$ étant de dimenssion finie), alors

$$dim_{\mathbb{K}}\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{rg}(f) = \mathrm{dim}\mathbb{E}.$$

Démonstration. Soit $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ une base de S supplémentaire de ker$f$. On montre alors assez facilement que $(f(e_{p+1}), \ldots, f(e_n))$ est une base de Imf. □

Exemple 2.3.1. *Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par*

$$f(x, y, z) = (x - y, z, 0).$$

Soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a $Kerf = Vect\{(1, 1, 0)\}$, donc $rgf = 2$. De plus $f(e_1) = e_1, f(e_2) = -e_1$ et $f(e_3) = e_2$. Ceci implique que $e_1 \in Imf$ et $e_2 \in Imf$. Comme $\{e_1, e_2\}$ est libre, on aura $Imf = Vect\{e_1, e_2\}$.

Proposition 2.3.1. si E et F sont de dimension finie et si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{E}')$, alors :

1. f injective $\Longrightarrow$ $\dim\mathbb{E} \leq \dim\mathbb{E}'$;
2. f surjective $\Longrightarrow$ $\dim\mathbb{E} \geq \dim\mathbb{E}'$.

Proposition 2.3.2. Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{E}')$. On a alors les équivalences suivantes

1. f est surjective $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{rg}f = \dim\mathbb{E}'$;
2. f est injective $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{rg}f = \dim\mathbb{E}$;
3. f est bijective $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{rg}f = \dim\mathbb{E} = \dim\mathbb{E}'$.

Corollaire 2.3.1. Soit $f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}'$ une application linéaire telle que $\dim\mathbb{E} = \dim\mathbb{E}'$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est injective (i.e. $\mathrm{Ker}f = \{0_E\}$) ;
2. f est surjective (i.e. $\mathrm{rg}f = n$) ;
3. f est bijective.

Démonstration. 1. Supposons f injective. Alors $\ker f = \{0_E\}$ et d'après la formule du rang : dim Imf $= n$. $\mathrm{Im}f$ est donc un sev de $\mathbb{E}'$ de même dimension que $\mathbb{E}'$. On a donc $\mathrm{Im}f = \mathbb{E}'$ et f est donc surjective. Et donc bijective !

2. Supposons f surjective. On utilise encore la formule du rang.

□

Chapitre 3

CALCUL MATRICIEL

Sommaire

3.1 Définitions et propriétés

Définition 3.1.1. Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. On appelle matrice de type (m,n) (ou d'ordre (m,n)) à coefficients dans $\mathbb{K}$ tout tableau de m lignes et n colonnes d'éléments de $\mathbb{K}$. Une matrice A est représentée par

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & & & & & . \\ . & & & & & . \\ . & & & & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ou encore

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$$

- Le nombre a_{ij}, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ s'appelle coefficient de la matrice A.
- Dans la notation a_{ij}, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, i désigne le numéro de la ligne, et j celui de la colonne.
- Lorsque $m = n$ la matrice A est appelée matrice carrée d'ordre n ou tout simplement matrice d'ordre n.

Notations :
— L'ensemble des matrices d'ordre (m,n) à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.
— L'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
— L'ensemble des matrices lignes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$.
— L'ensemble des matrices colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$.

Exemples 3.1.1. 1. *La matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -7 & 4 & 8 \\ 0 & -12 & 6 \end{pmatrix}$$

est carrée et d'ordre 3.

2. *La matrice*

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -7 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

est une matrice d'ordre $(2,3)$.

3. *La matrice*

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -7 & 4 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$$

est une matrice d'ordre $(3,2)$.

Définition 3.1.2. (Matrice nulle)
Matrice nulle, noté O_{mn}, est la matrice dont tous les éléments sont nuls.

$$0_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}).$$

Définition 3.1.3. (Matrice identité)
On appelle matrice identité d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice carrée notée I_n telle que $\mathrm{I}_n = (\delta_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$ où δ_{ij} est le symbole de Kronecker défini par

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{si } \ i = j, \\ \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Une matrice I_n est représentée par

$$\mathrm{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ . & 0 & . & . & & . \\ . & & . & . & . & . \\ . & & & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Définition 3.1.4. (Matrices de la base canonique)
Pour deux indices $k \in [\![1;m]\!]$ *et* $l \in [\![1;n]\!]$, on définit la matrice élémentaire $E_{kl} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ par :

$$E_{kl} = (\delta_{ik}\delta_{lj}) = \begin{pmatrix} 0 & . & . & . & 0 & . & . & . & 0 \\ . & & & & . & & & & . \\ . & & & & . & & & & . \\ . & & & & . & & & & . \\ 0 & . & . & . & 1 & . & . & . & 0 \\ . & & & & . & & & & . \\ . & & & & . & & & & . \\ . & & & & . & & & & . \\ 0 & . & . & . & 0 & . & . & . & 0 \end{pmatrix}$$

Tous les coefficients de la matrice E_{kl} sont nuls sauf celui qui se trouve à l'intersection de la ligne k et de la colonne l qui vaut 1.

Exemple 3.1.1. *Dans* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, *on a* $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

et $\quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Définition 3.1.5. Deux matrices $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ de même ordre (m, n) sont égales si et seulement si $a_{ij} = b_{ij}$ pour tout $(i, j) \in [\![1; m]\!] \times [\![1; n]\!]$.

3.2 Quelques types de matrices

1. **Matrice scalaire** : C'est une matrice de la forme :

$$A = \lambda \mathrm{I}_n = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & \lambda & . & . & . & 0 \\ . & 0 & . & . & & . \\ . & & . & . & . & . \\ . & & & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

où $\lambda \in \mathbb{K}$.

2. **Matrice carrée** : Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,\, j \leq n}$ une matrice carrée d'rdre n.
- Les éléments a_{ii}, sont appelés éléments diagonaux de A.
- Les éléments a_{ij} pour $i \neq j$, sont appelés éléments hors-diagonaux de A.
- L'ensemble des éléments diagonaux constitue la diagonale principale de A.

3. **Matrice diagonale** : C'est une matrice carrée telle que $a_{ij} = 0$, $\forall i \neq j$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & a_{22} & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & & . \\ . & & . & . & . & . \\ . & & & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

On la note $A = diag(a_{ii}) = diag(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn})$.

4. **Matrice triangulaire supérieure** : C'est une matrice carrée vérifiant : $a_{ij} = 0$, pour $i > j$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & & & . \\ . & & . & . & & . \\ . & & & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

5. **Matrice triangulaire inférieure** : C'est une matrice carrée vérifiant :

$a_{ij} = 0$, pour $i < j$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & . & . & . & 0 \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & 0 \\ . & & . & . & & . \\ . & & & . & . & . \\ . & & & & . & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}$$

3.3 Opérations sur les matrices

3.3.1 Addition

Définition 3.3.1. La somme de deux matrices $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$ de même type (m, n) est la matrice C de même type (m, n) ayant pour éléments $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ pour tout $(i, j) \in [\![1; m]\!] \times [\![1; n]\!]$.

Exemple 3.3.1. *Soient* $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -7 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 8 & -4 & 4 \end{pmatrix}$. *Alors on a*

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 2 \\ 1 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Remarque 3.3.1. *On ne somme que des matrices de même types.*

Propriétés . Si A, B et C sont des matrices de type (m, n), alors nous avons

1. $A + B = B + A$,
2. $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$,
3. $A + 0_{mn} = 0_{mn} + A = A$, où 0_{mn} est la matrice nulle,
4. $A + (-A) = (-A) + A = 0_{mn}$ où $(-A) = (-a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$.

3.3.2 Multiplication par un scalaire

Définition 3.3.2. Si $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$ est une matrice de type (m, n) et $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit le produit d'une matrice par un scalaire par

$$\lambda.A = (\lambda a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$$

Propriétés . Si A et B sont deux matrices de type (m, n) et $\alpha, \lambda \in \mathbb{K}$ deux scalaires, on a

1. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$,
2. $(\alpha + \lambda)A = \alpha A + \lambda A$,
3. $1.A = A$,
4. $\alpha(\lambda A) = \lambda(\alpha A) = (\alpha\lambda)A$.

Théorème 3.3.1. Muni des lois précédemment définies, l'ensemble $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), +, .)$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension $m \times n$.
La famille $(E_{kl})_{(k,l)\in [\![1;m]\!]\times[\![1;n]\!]}$ est une base de cet ev, appelée base canonique de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.
Si $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}$, $A = \sum_{(i,j)\in[\![1;m]\!]\times[\![1;n]\!]} a_{ij}E_{ij}$.

Démonstration. 1. $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), +, .)$ est un $\mathbb{K}$-ev, c'est facile à démontrer.

2. On montre facilement que $(E_{11}, \ldots, E_{mn})$ est libre et que $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) = \text{Vect}(E_{11}, \ldots, E_{mn})$.

□

Exemple 3.3.2. *Soit* $A \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 2 \\ 1 & 0 & 12 \end{pmatrix}$, *alors*
$A = 5E_{11} - 7E_{12} + 2E_{13} + E_{21} + 12E_{23}$.

3.3.3 Multiplication des matrices

Définition 3.3.3. Si $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq p}}$ une matrice de type (m,p) et $B = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq n}}$ une matrice de type (p,n). Alors le produit $C = AB$ est une matrice de type (m,n) dont les éléments sont définis par :

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{k=p} a_{ik}b_{kj}, \text{ où } (i,j) \in [\![1;m]\!] \times [\![1;n]\!]$$

.

Remarque 3.3.2. *Soit* $A = (a_{ij})$ *une matrice* (m,n) *et* $B = (b_{kl})$ *une matrice* (r,p). *Le produit* AB *(dans cet ordre) n'est défini que si* $n = r$ *(le nombre de colonnes de la matrices* A *est égal au nombre de lignes de la matrice* B*).*

Exemple 3.3.3. *Soient les deux matrices* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$
La matrice A *est de type* $(2,3)$*, la matrice* B *est de type* $(3,3)$*, donc la matrice produit* $A \times B$ *est une matrice de type* $(2,3)$ *:*

$$\begin{aligned} A \times B &= \begin{pmatrix} 1\times1+3\times0+0\times0 & 1\times2+3\times2+0\times(-1) & 1\times0+3\times3+0\times(-2) \\ -1\times1+1\times0+2\times0 & -1\times2+1\times2+2\times(-1) & -1\times0+1\times3+2\times(-2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le produit BA *n'est pas possible car le nombre de colonnes de* B *est différent du nombre de lignes de* A*.*

Remarque 3.3.3. *1. Le produit de matrices n'est pas commutatif.*

2. $AB = 0$ *n'implique pas que* $A = 0$ *ou* $B = 0$*.*

Propriétés .

1. $\mathrm{I}_m \times A = A \times \mathrm{I}_n = A,\ \forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.
2. $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C,\ \forall (A, B, C) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
3. $A \times (B + C) = AB + AC, \quad \forall (A, B, C) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
4. $(\lambda A) \times B = A \times (\lambda B) = \lambda(A \times B),\ \forall (A, B) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$.

Théorème 3.3.2. (Produit de deux matrices élémentaires)
$\forall (i, j, k, l) \in [\![1; m]\!] \times [\![1; n]\!] \times [\![1; n]\!] \times [\![1; p]\!],\ E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$.

Exemple 3.3.4. *Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a*

1. $E_{12} \times E_{21} = E_{11}$ *et* $E_{21} \times E_{12} = E_{22}$. *En particulier,* $E_{12} \times E_{21} \neq E_{21} \times E_{12}$.
2. *On note aussi que* $E_{12} \times E_{11} = 0_2$ *et pourtant* $E_{12} \neq 0_2$ *et* $E_{11} \neq 0_2$.

3.3.4 Puissance d'une matrice

Définition 3.3.4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On définit les puissances p-ièmes ($p \in \mathbb{N}$) de A, par

$$A^0 = \mathrm{I}_n (A \neq 0_n), A^p = A \times \ldots \times A, \quad \forall p \in \mathbb{N}^*.$$

Le produit est effectué p fois.

Proposition 3.3.1. Soit A une matrice carrée, p et q deux entiers naturels non nuls, on a

1. $A^p \times A^q = A^{p+q}$.
2. $(A^p)^q = A^{pq}$.

Proposition 3.3.2. (Formule du binôme de Newton)
Soient A et B, deux matrices carrées de même ordre telles que $AB = BA$, alors :

1. $$(A + B)^p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k A^k B^{p-k} \text{ (binôme)}$$
2. $$A^p - B^p = (A - B)(A^{p-1} + A^{p-2}B + \ldots + AB^{p-2} + B^{p-1})$$
3. $$(I_n - A^p) = (I_n - A)(I_n + A + A^2 + \ldots + A^{p-1})$$

Exemple 3.3.5. *On cherche à calculer A^p avec* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1. *Calculer A^2 et A^3.*
2. *Par récurrence, démontrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$*

$$A^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^p - 1 \\ 0 & (-1)^p & 0 \\ 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix}$$

Définition 3.3.5. (Matrice nilpotente)
Une matrice A d'ordre n est dite nilpotente s'il existe un entier p tel que $A^p = 0_n$.

Exemple 3.3.6. *La matrice* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *est nilpotente car* $A^2 = 0$.

3.3.5 Matrice transposée

Définition 3.3.6. Si $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ une matrice de type (m, n).
On appelle transposée de la matrice A, la matrice $A^T \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ définie par

$$A^T = (a_{ji})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq m}}$$

.

Remarque 3.3.4. *1. Notation : A^T et aussi parfois noté ${}^tA$.*

2. Pour trouver la transposée d'une matrice, il suffit d'inverser les lignes et les colonnes.

Exemple 3.3.7. *Soit la matrice A d'ordre $(2, 3)$ suivante*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sa transposée est la matrice A^T d'ordre $(3, 2)$ suivante

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Proposition 3.3.3.
1. $(A^T)^T = A$ si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$,
2. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$ si $\alpha \in \mathbb{K}$ et $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$,
3. $(A + B)^T = A^T + B^T$ si $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$,
4. $(A \times B)^T = B^T \times A^T$ si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

3.3.6 Matrice symétrique, matrice antisymétrique

Définition 3.3.7.
1. Une matrice A est dite symétrique si $A^T = A$.
   On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques.
2. Une matrice A est dite antisymétrique si $A^T = -A$.
   On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

Exemple 3.3.8. *La matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -9 \\ 5 & 4 & 0 \\ -9 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ *est symétrique et la matrice* $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -9 \\ -5 & 0 & 1 \\ 9 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ *est antisymétrique.*

Remarque 3.3.5. *Les éléments diagonaux d'une matrice antisymétrique sont tous nuls.*

3.3.7 Trace d'une matrice

Définition 3.3.8. Si A est une matrice carrée d'ordre n.
On appelle trace de la matrice A, la somme de ses coefficients diagonaux :

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Exemple 3.3.9. *La trace de la matrice A suivante*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

est $Tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 1 + 2 + (-2) = 1.$

Proposition 3.3.4.
1. L'application Tr : $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to K$ est une forme linéaire.
2. $\mathrm{Tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha \mathrm{Tr}(A) + \beta \mathrm{Tr}(B)$.
3. Pour toute matrice $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

Démonstration. 3. L'application est linéaire. Par ailleurs, $Tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii}$ où $AB = (c_{ij})$. Or, par définition du produit, $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$. D'où

$$Tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} = Tr(BA).$$

□

Exercice

1. Trouver un supplémentaire de KerTr.
2. Démontrer que : $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ Tr(AX) = Tr(BX) \Longleftrightarrow A = B$.

3.3.8 Matrices carrées inversibles

Définition 3.3.9. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; A est inversible si et seulement si

$$\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad A \times B = B \times A = I_n$$

$\mathcal{G}L_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n inversibles.

Proposition 3.3.5. Soit A et B deux matrices inversibles, alors
1. A^{-1} l'est aussi et $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. A^T l'est aussi et $(A^T)^{-1} =$(A$^{-1})^T$.
3. AB l'est aussi et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Exemple 3.3.10. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

1. *Montrer que la matrice A annule le polynôme :* $P = X^3 - 3X^2 + X - 5$.
2. *En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.*

3.4 Matrices et applications linéaires

3.4.1 Représentation matricielle d'un vecteur dans une base

Définition 3.4.1. (Matrice d'un vecteur dans une base) Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-espaces vectoriel de base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_m)$. Pour $x \in \mathbb{E}$, un vecteur qui se décompose sur la base $\mathcal{B}$ en :

$$x = x_1 e_1 + \ldots + x_m e_m$$

On appelle matrice colonne de x dans la base $\mathcal{B}$, la matrice $X \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$ définie par :

$$X = M_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

Définition 3.4.2. [Matrice d'une famille de vecteurs] Avec les notations précédentes, soit $\mathcal{S} = (u_1, \dots, u_n)$ un système de p vecteurs de E, qui se décomposent dans la base $\mathcal{B}$ sous la forme

$$u_j = x_{1j} e_1 + \ldots + x_{mj} e_m, \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

On appelle matrice de la famille $\mathcal{S}$ dans la base $\mathcal{B}$, la matrice $m \times n$

$$M_{\mathcal{B}}(\mathcal{S}) = M_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & a_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$$

Exemple 3.4.1. *1. Si $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et si $u_1 = e_1 - 2e_3$ et $u_2 = e_1 + 2e_2 - e_3$. Déterminer M la matrice de la famille $\mathcal{S} = (u_1, u_2)$ dans la base $\mathcal{B}$.*

2. Si $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et si $P_0 = 1$, $P_1 = X - 1$, et $P_2 = (X-1)^2$. Déterminer M la matrice de la famille $\mathcal{S} = (P_0, P_1, P_2)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Solution.

1. On a $u_1 = e_1 + 0e_2 - 2e_3$ et $u_2 = e_1 + 2e_2 - e_3$. Donc, $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{S}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.
2. On a $P_0 = 1 + 0X + 0X^2$, $P_1 = -1 + X + 0X^2$ et $P_2 = 1 - 2X + X^2$.
   Donc, $M_{\mathcal{B}}(P_0, P_1, P_2)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3.4.2 Représentation matricielle d'une application linéaire

Définition 3.4.3. (Matrice d'une application linéaire)
Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}^{'}$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimenssion n et m respectivement et $\mathcal{B}=(e_1,...,e_n)$ une base de $\mathbb{E}$ et $\mathcal{B}^{'}=(f_1,...,f_m)$ une base de $\mathbb{E}^{'}$.
Soit $f\in\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{E}^{'})$ définie par : $\forall j\in[\![1;n]\!],\ f(e_j)=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}f_i$.
On appelle matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}^{'}$, la matrice $m\times n$ définie par :

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)=M_{\mathcal{B}'}(f(e_1),\dots,f(e_n))=\begin{array}{c} \\ f_1\\ f_2\\ \vdots\\ f_m\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc} f(e_1) & \dots & f(e_j) & \dots & f(e_n)\end{array}\\ \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1j} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & & a_{2j} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & & a_{mj} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}\end{array}$$

Remarques 3.4.1.
1. *La taille de la matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ dépend uniquement de la dimension de $\mathbb{E}$ et de celle de $\mathbb{E}^{'}$.*
2. *Le nombre de lignes n est la dimension de l'espace d'arrivée.*
   Le nombre de colonnes m est la dimension de l'espace de départ.

Exemples 3.4.1.
1. *Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels tels que $dim\mathbb{E}=n$ et $dim\mathbb{E}'=m$. Soient θ l'application nulle de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{E}'$ et 0_{mn} la matrice nulle de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Alors*
$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\theta)=0_{mn}.$$
2. *Déterminer la matrice de l'application id_E dans la base $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ de $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev.*

Exercice.
1. Déterminer la matrice canonique de $D\in\mathcal{L}(\mathbb{R}_4[X])$ défini par : $D:P\longmapsto P'$.
2. Déterminer la matrice canonique de $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$ définie par :
$$f(x,y,z)=(2x-y+3z,x-2z)$$
dans les bases canoniques.

3.4.3 Opérations sur les applications linéaires et les matrices

Théorème 3.4.1. Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$ deux $\mathbb{K}$-ev de dimenssion finie de bases respectives $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Soit $f,\ g\in\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{E}')$ et $\lambda\in\mathbb{K}$. Alors :
— $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f+g)=M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)+M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g)$.
— $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\lambda f)=\lambda M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.
Autrement dit, si on note :
$$A=M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f),\quad B=M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g),\quad C=M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f+g)\quad et\ \ D=M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\lambda f)$$
Alors :
$$C=A+B\qquad et\qquad D=\lambda A$$

Théorème 3.4.2. Soient $\mathbb{E}$, $\mathbb{E}'$ et $\mathbb{G}$ trois $\mathbb{K}$-ev de dimenssion finie de bases respectives $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$. Alors : $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g\circ f) = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g) \times M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.
Autrement dit, si on note :

$$A = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f), \quad B = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g) \quad et \;\; C = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g\circ f)$$

Alors

$$C = B\times A$$

Démonstration. Posons $p = \dim(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_p)$ une base de E ; $n = \dim F$ et $\mathcal{B}' = (f_1,\dots,f_n)$ une base de F ; $q = \dim G$ et $\mathcal{B}'' = (g_1,\dots,g_q)$ une base de G. Écrivons $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = (a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice de f, $B = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g) = (b_{ij}) \in M_{q,n}(\mathbb{K})$ la matrice de g, $C = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g\circ f) = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ la matrice de $g\circ f$.

On a

$$\begin{array}{rcl} (g\circ f)(e_1) & = & g\Big(f(e_1)\Big) \\ & = & g(a_{11}f_1+\cdots+a_{n1}f_n) \\ & = & a_{11}g(f_1)+\cdots+a_{n1}g(f_n) \\ & = & a_{11}\Bigg(b_{11}g_1+\cdots+b_{q1}g_q\Bigg)+\cdots+a_{n1}\Bigg(b_{1n}g_1+\cdots+b_{qn}g_q\Bigg) \end{array}$$

Ainsi, la première colonne de $C = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g\circ f)$ est

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+\cdots+a_{n1}b_{1n} \\ a_{11}b_{21}+\cdots+a_{n1}b_{2n} \\ \vdots \\ a_{11}b_{q1}+\cdots+a_{n1}b_{qn} \end{pmatrix}.$$

Mais ceci est aussi la première colonne de la matrice BA. En faisant la même chose avec les autres colonnes, on remarque que $C = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g\circ f)$ et BA sont deux matrices ayant leurs colonnes égales. On a donc bien l'égalité cherchée. $\square$

Corollaire 3.4.1.
1. Soient $f\in\mathcal{L}(\mathbb{E})$ et $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{E}$. Alors

$$\forall n\in\mathbb{N},\; M_{\mathcal{B}}(f^n) = M_{\mathcal{B}}(f\circ f\circ\ldots\circ f) = (M_{\mathcal{B}}(f))^n.$$

2. Si $\dim(\mathbb{E}) = \dim(\mathbb{E}') = n$, alors $f\in \mathrm{Isom}(\mathbb{E},\mathbb{E}') \Leftrightarrow M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ est inversible et l'on a alors $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f^{-1}) = (M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f))^{-1}$.

Démonstration.
1. Par récurrence.
2. On a, d'une part $M_{\mathcal{B}}(f^{-1}\circ f) = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f^{-1})M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = M_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E) = \mathrm{I}_n$.
D'autre part, $M_{\mathcal{B}'}(f\circ f^{-1}) = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f^{-1}) = M_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_{E'}) = \mathrm{I}_n$.
Donc, $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ est inversible et $(M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f))^{-1} = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f^{-1})$.

$\square$

Exemple 3.4.2. *Soit* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y,2x-y) \end{array}$ *et* $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (0,x-y) \end{array}$

1. Déterminer A la matrice de l'application f dans la base canonique.

2. *Déterminer B la matrice de l'application g dans la base canonique.*
3. *Déterminer C la matrice de l'application $f \circ g$ dans la base canonique.*
4. *Déterminer D la matrice de l'application f^2 dans la base canonique.*

3.4.4 Ecriture matricielle

Théorème 3.4.3. Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}^{'}$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{E}$ et $\mathcal{B}'$ une base de $\mathbb{E}'$. Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{E}')$ et $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.
Soit x un vecteur représenté par la matrice colonne X dans la base $\mathcal{B}$.
Soit $y = f(x)$ son image par l'application f, que l'on représente par la matrice colonne Y dans la base $\mathcal{B}'$. Alors
$$f(x) = y \Longleftrightarrow AX = Y.$$

Exemple 3.4.3. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ *et soit f l'application linéaire associée à A relativement aux bases canoniques $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}' = \{f_1, f_2\}$ de $\mathbb{R}^2$. Soit* $x = 3e_1 + 2e_2 + e_3$ *et* $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. *Alors*
$$AX = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$
Donc, $f(x)$ a pour coordonnées : $(8, 7)$.

3.5 Changement de base

3.5.1 Matrice de passage

Définition 3.5.1. Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel de dimension n et soient $\mathcal{B}_1 = (e_1, ..., e_n)$ et $\mathcal{B}_2 = (f_1, ..., f_n)$ deux bases de $\mathbb{E}$.
On appelle matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ vers la base $\mathcal{B}_2$, la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par
$$P_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} = M_{\mathcal{B}_1}(f_1, \dots, f_n).$$

Théorème 3.5.1. (Interprétation d'une matrice de passage)
Si $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont deux bases du $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{E}$ de dimension n, alors : $P_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} = M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}(id_{\mathbb{E}})$.

Démonstration. $M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}(id_{\mathbb{E}})$ est la matrice de $(id_E(f_1), \dots, id_E(f_n))$ dans la base $\mathcal{B}_1$. C'est à dire $M_{\mathcal{B}_1}(f_1, \dots, f_n)$. □

Exemple 3.5.1. *Soit $B_1 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $B_2 = (f_1, f_2, f_3)$, où $f_1 = (1, 1, 0)$, $f_2 = (1, 0, 1)$ et $f_3 = (0, 1, 1)$.*
Déterminer la matrice de passage $P_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}$.

Proposition 3.5.1. 1) La matrice de passage d'une base $\mathcal{B}$ vers une base $\mathcal{B}'$ est inversible et son inverse est égale à la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ vers la base $\mathcal{B}$: $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = (P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})^{-1}$
2) Si $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ sont trois bases, alors $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}$

3.5.2 Formule de changement de base

Théorème 3.5.2. Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni de deux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$, $\mathbb{E}'$ un $\mathbb{K}$- espace vectoriel muni de deux bases $\mathcal{B}_1{}'$ et $\mathcal{B}_2{}'$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{E}')$. Alors les deux matrices $A = M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f)$ et $B = M_{\mathcal{B}_1{}',\mathcal{B}_2{}'}(f)$ vérifient

$$B = Q^{-1}AP$$

où $P = P_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}$ et $Q = P_{\mathcal{B}_1{}'\mathcal{B}_2{}'}$. Les matrices A et B sont dites matrices équivalentes.

Théorème 3.5.3. Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni de deux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$. Alors les deux matrices $A = M_{\mathcal{B}_1}(f)$ et $B = M_{\mathcal{B}_2}(f)$ vérifient

$$B = P^{-1}AP$$

où $P = P_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}$. Les matrices A et B sont dites matrices semblables.

Exemple 3.5.2. *Soit $\mathcal{B}_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soit $\mathcal{B}_2 = \{f_1, f_2, f_3\}$ une base $\mathbb{R}^3$ avec $f_1 = (2, 0, -1)$ $f_2 = (-8, 1, 0)$ et $f_3 = (0, 1, -5)$. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ où $\forall(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (2x - 2y, -x + 3y + z, 2x + y + z)$.*

1. *Déterminer la matrice de passage $P_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}$ de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$.*
2. *Déterminer la matrice de passage $P_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}$ de $\mathcal{B}_2$ à $\mathcal{B}_1$.*
3. *Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_1$.*
4. *En déduire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_2$.*

3.6 Noyau et image d'une matrice

Définition 3.6.1. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ de vecteurs colonnes $A = (C_1, \ldots, C_n)$. On appelle :
— Noyau de A l'ensemble Ker$A = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) | AX = 0\}$.
— Image de A l'ensemble

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}A &= \{AX \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K}) | X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\} \\ &= Vect(C_1, \ldots, C_n). \end{aligned}$$

Remarque 3.6.1. *Les colonnes d'une matrice engendrent son image et les lignes de la matrice donnent un système d' équations cartesiennes de son noyau.*

Théorème 3.6.1. *Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ alors :*

$$dim\ KerA + dim\ ImA = n.$$

Démonstration. On introduit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ canoniquement associé à A et on applique le théorème du rang.
On prouve que $\dim \mathrm{Ker} f = \dim \mathrm{Ker} A$ et $\dim \mathrm{Im}\, \mathrm{f} = \dim \mathrm{Im} A$ à l'aide des isomophismes canoniques $g : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $h : \mathbb{K}^m \longrightarrow \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$. □

Exemple 3.6.1.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

1. *Déterminer $KerA$ et ImA.*
2. *On note f une application linéaire de matrice A. Déterminer $Kerf$ et Imf dans le cas où $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ et $\mathcal{B} = (1, X-1, (X-1)^2)$.*

3.7 Rang d'une matrice

Définition 3.7.1. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. On appelle rang de A le rang du système de ses n vecteurs colonnes dans $\mathbb{K}^n$, noté $\mathrm{rg}(A)$.

Proposition 3.7.1.
1. Si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$, alors le rang de f est égal au rang de sa matrice.
2. $\mathrm{rg}(A) \leq \min(m, n)$.
3. Une matrice A d'ordre n est inversible ssi $rg(A) = n$.
4. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Alors, $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^T)$.
5. $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ sont équivalentes ssi $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$.

Exemple 3.7.1.

$$rg\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad rg\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 5 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \quad rg\begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3$$

3.8 Opérations élémentaires sur les matrices

Définition 3.8.1. On appelle opération élémentaire sur une matrice A de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$:
— Permuter de deux lignes (resp. deux colonnes) de A. $L_i \leftrightarrow L_j$ ou $C_i \leftrightarrow C_j$.
— Multiplier une ligne (resp. colonne) de A par un scalaire non nul. $L_j \leftarrow \lambda L_j$ ou $C_j \leftarrow \mu C_j$, où $\lambda, \mu \in \mathbb{K}^*$.
— Ajouter à une ligne (resp. colonne) le produit d'une autre ligne (resp. colonne) de A par un scalaire quelconque. $L_j \leftarrow L_j + \lambda L_i$ ou $C_j \leftarrow C_j + \mu C_i,\ i \neq j$.

Remarque 3.8.1. *$rg(A)$ ne change pas de valeur si on effectue les opérations élémentaires sur les lignes ou sur les colonnes de A.*

Exemple 3.8.1. *Trouver l'inverse de la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Réponse.
Pour déterminer l'inverse A^{-1} d'une matrice inversible, on place la matrice unité du même ordre, à droite de A, puis on applique les mêmes opérations élémentaires sur A et I jusqu'à ce qu'on obtienne la matrice I à gauche de A.

$$(A|I_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & | & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1, L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftrightarrow L_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & | & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & | & -6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3, L_3 \leftarrow -L_3$

$$(I_3|A^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donc,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Chapitre 4

DÉTERMINANTS

Sommaire

4.1 Déterminant d'une matrice carrée

4.1.1 Définition

Définition 4.1.1. Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, une matrice carrée d'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$).

1. Le mineur de a_{ij}, noté $\det(A_{ij})$, est égal au déterminant de la matrice obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de A.
2. On appelle cofacteur de a_{ij}, noté (C_{ij}), l'élément $(-1)^{i+j}\det(A_{ij})$.

Définition 4.1.2. Soit $n \geq 1$. Pour toute matrice carrée $A = (a_{ij})$, d'ordre n, nous associons $\det A \in \mathbb{K}$, défini comme suit :
Si $n = 1$, on pose $\det A = a_{11}$ (avec $A = (a_{11})$).
Si $n > 1$:
- Formule de développement par rapport à la j-ème colonne :

$$\det A = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}C_{ij},$$

- Formule de développement par rapport à la i-ème ligne

$$\det A = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij}.$$

Exemples 4.1.1. 1. **Déterminant d'ordre 2**

Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}).$$

On a

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\times a_{22} - a_{12}\times a_{21}$$

2. **déterminant d'ordre 3**

Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K}).$$

On a (développement, par exemple, suivant la 1ère ligne) :

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

3. Calculer le déterminant de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Si 0_n *est la matrice nulle de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det 0_n = 0$.

5. Si I_n *est la matrice identité de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det I_n = 1$.

4.2 Propriétés des déterminants

Proposition 4.2.1. Si $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}$ est une matrice triangulaire, alors

$$\det A = a_{11} \times a_{22} \times ... \times a_{nn}.$$

Corollaire 4.2.1. Si $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}$ est une matrice diagonale, alors

$$\det A = a_{11} \times a_{22} \times ... \times a_{nn}.$$

Remarque 4.2.1.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = a_{11} \times a_{22} \times ... \times a_{nn}.$$

On a les résultats et les règles de calcul suivants :

Propriétés .

1. Si tous les éléments d'une même ligne (resp. colonne) sont nuls alors le déterminant est nul.
2. Si l'on permute deux lignes (resp. colonnes) alors le déterminant change de signe.
3. Si une ligne (resp. colonne) s'écrit comme une combinaison linéaire des autres lignes (resp. colonnes) alors le déterminant est nul.
4. En particulier, si deux lignes (resp. colonnes) sont égales alors le déterminant est nul.
5. Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a
$$det(\alpha A) = \alpha^n det(A).$$
6. Le déterminant ne change pas si l'on rajoute à une ligne (resp. colonne) une combinaison linéaire des autres lignes (resp. colonnes).

Proposition 4.2.2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient A et B deux matrices carrées d'ordre n. Alors

1. En général, $\det(A+B) \neq \det A + \det B$.
2. A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$. Si A est inversible, alors
$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.$$
3. $\det AB = \det BA = \det A \det B$.
4. Si A et B sont semblables alors $\det A = \det B$.
5. $\det A^T = \det A$.

4.3 Déterminant d'une famille de vecteurs

Définition 4.3.1. Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$, et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $\mathbb{E}$. Soit $\mathcal{F} = (v_1, \ldots, v_n)$ une famille de n vecteurs de $\mathbb{E}$.
Écrivons $v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i,$ pour tout $j = 1, ..., n$. Le déterminant de la famille $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$ est le scalaire $\det(M_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}))$. On le note $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$.
$$\det{}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \det(a_{ij}).$$

Propriétés . Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$ de base $\mathcal{B}$ et $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{E}$.

1. La famille $(v_1, \ldots, v_n)$ est une base de $\mathbb{E}$ si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(v_1, \ldots, v_n) \neq 0$.
2. Soient $i \in [\![1; n]\!]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors
$$\begin{aligned}\det{}_{\mathcal{B}}(v_1, \ldots, v_{i-1}, u + \lambda v, v_{i+1} \ldots, v_n) &= \det{}_{\mathcal{B}}(v_1, \ldots, v_{i-1}, u, v_{i+1} \ldots, v_n)\\ &+\lambda \det{}_{\mathcal{B}}(v_1, \ldots, v_{i-1}, v, v_{i+1} \ldots, v_n).\end{aligned}$$
3. $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$.

Exercice 4.3.1. *Soit* $\mathcal{B} = (1 + X + X^2, 1 + 2X + 4X^2, 1 + 3X + 9X^2)$ *une famille de polynômes de* $\mathbb{R}_2[X]$. *Montrer que* $\mathcal{B}$ *est une base de* $\mathbb{R}_2[X]$.

Solution.
Soit $\mathcal{B}_c = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On a
$$\det{}_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$
Donc, la famille $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$..

Proposition 4.3.1. (Changement de base)
Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de $\mathbb{E}$ et $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille de n vecteurs de $\mathbb{E}$. Alors,
$$\det{}_{\mathcal{B}'}(v_1, \ldots, v_n) = \det{}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}).\det{}_{\mathcal{B}}(v_1, \ldots, v_n).$$

4.4 Déterminant d'un endomorphisme

Définition 4.4.1. Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$ et $\mathcal{B}$ une base de E. Alors $\det(M_{\mathcal{B}}(f))$ est indépendant de la base choisie. On le note $\det(f)$.

Proposition 4.4.1. Les résultats suivants sont vrais :

1. $\det(id_E) = 1$.
2. Pour tout $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$.
3. Pour tout $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$, $\det(f \circ g) = \det(f)\det(g)$.
4. Pour tout $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$, $f \in GL(\mathbb{K})$ si et seulement si $\det(f) \neq 0$, dans ce cas on a
$$\det(f^{-1}) = (\det(f))^{-1}.$$

Exemple 4.4.1. *Considérons l'application $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (-x + y + z, x - y + z, x + y - z)$ et $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.*

1. Déterminer $M_{\mathcal{B}}(f)$.

2. Montrer que f est bijective.

Solution.

1. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{E}$. On a
$$\begin{aligned} f(e_1) &= (-1, 1, 1) = -e_1 + e_2 + e_3, \\ f(e_2) &= (1, -1, 1) = e_1 - e_2 + e_3, \\ f(e_3) &= (1, 1, -1) = e_1 + e_2 - e_3. \end{aligned}$$
Donc, on trouve $M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
2. On calcule $\det(M_{\mathcal{B}}(f))$, on choisit de développer par rapport à la première colonne
$$\det(\mathcal{B}(f)) = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4.$$
Ceci prouve que f est bijective (automorphisme).

4.5 Calcul de l'inverse d'une matrice

Définition 4.5.1. (Cofacteur).
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice des cofacteurs (C_{ij}) des éléments (a_{ij}) de A, notée $\mathrm{Adj}(A)$ ou $Com(A)$, est appelée matrice adjointe de A ou co-matrice de A.
$$Com(A) = (C_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} = ((-1)^{i+j} \det(A_{ij}))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}.$$

Théorème 4.5.1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

1. Si $\det A = 0$ alors A n'est pas inversible.
2. Si $\det A \neq 0$ alors A est inversible, et on a
$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(Com(A))^T.$$

Exemple 4.5.1. *Soit la matrice*
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $\det A$.

2. Déterminer A^{-1}.

Solution.

1. On choisit de développer par rapport à la 3-ème colonne (car c'est là qu'il y a le plus de zéros) :
$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2(2 \times 2 - 3 \times 1) = 2.$$
On a $\det A \neq 0$. Donc A est inversible.
2. La comatrice de A est donnée par la formule :
$$Com(A) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} \text{ où } C_{ij} = (-1)^{i+j}\det A_{ij}, \text{ pour tout } (i,j) \in [\![1;3]\!]^2,$$
et A_{ij} est la matrice obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de A. Donc, on trouve
$$Com(A) = \begin{pmatrix} +\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \\ +\det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$
Soit :
$$Com(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & -6 & -5 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } (Com(A))^T = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 0 & -6 & 4 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$
On a alors
$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(Com(A))^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 0 & -6 & 4 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{-5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Chapitre 5

Systèmes d'équations linéaires

Sommaire

5.1 Les différentes présentations d'un système d'équations linéaires

5.1.1 Présentation classique

On se donne $n \times p$ nombres a_{ij}, $(i,j) \in [\![1;p]\!] \times [\![1;n]\!]$, puis p nombres b_i, $i \in [\![1;p]\!]$. On considère le système d'équations

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases},$$

où $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. (S) est un système de p équations linéaires à n inconnues (les nombres $x_1, \ldots, x_n$). On peut aussi ne considérer qu'il n'y a qu'une inconnue, le n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$.
Le système est dit homogène si et seulement si $b_1 = \ldots = b_p = 0$. Le système homogène associé au système (S) est

$$(S_h)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n = 0 \end{cases},$$

Définition 5.1.1. [Vocabulaire lié aux systèmes]

1. Résoudre un système consiste à trouver l'ensemble de tous les n-uplets $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ vérifiant (S).
2. On notera S (resp. $S_h = \ker A$ avec $A = (a_{ij})$) l'ensemble des solutions du système (S) (resp. (S_h)).
3. On dit que le système est compatible si l'ensemble des solutions est non-vide. On note qu'un système homogène est toujours compatible car le n-uplet $(0, \ldots, 0)$ est toujours solution d'un système homogène.

5.1.2 Ecriture matricielle d'un système

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le p \\ 1 \le j \le n}} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. A est la matrice du système (S). Soient $B = (b_i)_{1 \le i \le p} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $X = (x_j)_{1 \le j \le n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Le système (S) s'écrit matriciellement

$$(S)\ AX = B.$$

Le vecteur colonne B est le second membre du système (S) et X est le vecteur inconnu. Le rang de A est le rang du système (S). On dit dans ce cas que le système est un système

(n,p,r) (n inconnues, p équations, de rang r).
Si $B \in \mathrm{Im}A$, alors (S) est compatible et si $B \notin \mathrm{Im}A$, alors (S) n'est pas compatible.
Si de plus A est une matrice carrée (systèmes ayant autant d'équations que d'inconnues), le déterminant du système (S) est le déterminant de A.

5.1.3 Présentation en colonnes

On note $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de la matrices A. Donc, $\forall j \in [\![1;n]\!]$, $C_j = (a_{ij})_{1\leq i\leq p} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. Le système (S) s'écrit alors

$$(S)\ \sum_{j=1}^{n} C_j x_j = B.$$

Si $B \in \mathrm{Vect}(C_1, \ldots, C_n)$, alors (S) est compatible et si $B \notin \mathrm{Vect}(C_1, \ldots, C_n)$, alors (S) n'est pas compatible.

5.1.4 Avec une application linéaire

Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies non nulles notées n et p respectivement. Soient $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_p)$ une base de $\mathbb{E}$ et une base de $\mathbb{E}'$ respectivement.
Soit f l'élément de $\mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{E}')$ tel que $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = A$. Soient $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \in \mathbb{E}$ et $B = \sum_{i=1}^{p} b_i e'_i \in \mathbb{E}'$. Le système (S) s'écrit

$$f(x) = B.$$

L'inconnue x est alors un élément de $\mathbb{E}$. Le système (S) est compatible si et seulement si $B \in \mathrm{Im}(f)$.

5.2 Systèmes de Cramer

Définition 5.2.1. Un système (n,p,r) est dit de Cramer (on dit aussi cramérien) si et seulement si $n = p = r$.

Théorème 5.2.1. (S) est un système de Cramer $\Leftrightarrow A \in \mathcal{G}L_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \det(S) \neq 0$.

Théorème 5.2.2. Un système de Cramer admet une et une seule solution. En particulier, un système de Cramer homogène admet une et une seule solution à savoir la solution nulle $(0, ..., 0)$.

Démonstration. Notons A la matrice du système (S). Puisque $n = p$, A est une matrice carrée. Puisque $r = n$, $A \in \mathcal{G}L_n(\mathbb{K})$. Mais alors, pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$,

$$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B.$$

Ceci montre l'existence et l'unicité de la solution. □

Dans le théorème qui suit, on note $C_1, \ldots, C_n$, les colonnes de la matrice A.

Théorème 5.2.3. [Formules de Cramer]
Soit (S) : $AX = B$ un système de Cramer à n équations. Soit $X_0 = (x_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ l'unique solution du système (S). Alors,

$$\forall j \in [\![1; n]\!],\ x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta},$$

où $\Delta = \det(A) = \det(C_1, \ldots, C_n)$ est le déterminant du système (S) et pour tout $j \in [\![1; n]\!]$

$$\Delta_j = \det(C_1, \ldots, C_{j-1}, B, C_{j+1}, \ldots, C_n).$$

Exercice 5.2.1. *Résoudre le système suivant :*

$$(S) \quad \begin{cases} 4x + 5y = 3 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$$

Solution.
Le déterminant du système (S) est

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4 \times 3 - 2 \times 5 = 2 \neq 0.$$

Le système (S) est un système de Cramer et admet donc une et une seule solution (x, y). Les formules de Cramer fournissent

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ et } y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-2}{2} = -1.$$

Donc, $S = \{(2, -1)\}$.

5.3 Résolution par la Méthode de Gauss

Définition 5.3.1. On appelle « opération élémentaire sur les lignes » l'une des 3 opérations suivantes :

1. Échanger deux lignes $L_i \leftrightarrow L_j$
2. Remplacer une ligne L_i par $\lambda.L_i$ où $\lambda \in \mathbb{K}^*$
3. Remplacer une ligne $\mathrm{L}_i par \mathrm{L}_i + \lambda.L_j$ où $\lambda \in \mathbb{K}$

Théorème 5.3.1. On ne change pas l'ensemble des solutions d'un système en effectuant une opération élémentaire sur les lignes.

Le plus souvent, on transformera (S) en un système triangulaire (ou presque). Cette technique s'appelle la méthode de Gauss.
Méthode de Gauss :

1. On place en première ligne une équation qui fait apparaître la première inconnue. On choisit de préférence (si possible) la ligne telle que la première inconnue a un coefficient 1.
2. On utilise cette équation pour éliminer par OEL la première inconnue des autres équations.
3. On applique les opérations précédentes au sous-système obtenu où la première inconnue ne figure plus.

Nous illustrerons cette méthode par un exemple :

Exercice 5.3.1. *Résolvons le système*

$$(S)\ \begin{cases} 2x+3y+z=1 \\ x+y+2z=0 \\ x+y+z=2 \end{cases} \quad , \quad \textit{en s'aidant de la méthode de Gauss.}$$

Solution.
On peut choisir comme premier pivot le 1 de la ligne 2 (cela facilite les calculs) pour opérer sur les deux dernières lignes :

$$\begin{aligned}
\begin{cases} 2x+3y+z=1 \\ x+y+2z=0 \\ x+y+z=2 \end{cases} \quad &\Longleftrightarrow \begin{cases} x+y+2z=0 \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \\ 2x+3y+z=1 \\ x+y+z=2 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} x+y+2z=0 \\ 2x+3y+z=1 \\ \qquad\quad z=-2 \quad L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} x+y+2z=0 \\ \quad\ y-3z=1 \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ \qquad\quad z=-2 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} x+y+2z=0 \\ \quad\ y \qquad =-5 \quad L_2 \leftarrow L_2 + 3L_3 \\ \qquad\quad z=-2 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} x+y \qquad =4 \quad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ \quad\ y \qquad =-5 \\ \qquad\quad z=-2 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} x \qquad\quad =9 \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ \quad\ y \qquad =-5 \\ \qquad\quad z=-2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc, $S=\{(9,-5,-2)\}$.