Université Ibn Zohr
Faculté des sciences, Agadir
Département de Mathématiques

Année Universitaire : 2019 - 2020
Filière : SMA
Durée 1h30min

Examen Blanc d'Analyse 2 - SMA

Exercice 1 (8 pts).

(1) Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. (règles de Riemann) (2 pts)

(2) Montrer que si $f \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$ alors la fonction F définie par (2 pts)

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

est continue sur $[a,b]$. **Indication** : Montrer que F est lipschitzienne.

(3) Soit $f,\ g \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$. Montrer que : (2+2 pts)

$$(i)\ f+g \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R}) \text{ et } (ii)\ \int_a^b (f+g)(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx.$$

Exercice 2 (6pts).

(1) Calculer la limite de la suite (u_n) définie par : (2 pts)

$$u_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \left(1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2\right)}.$$

(2) Calculer l'intégrale suivante : (2 pts)

$$I = \int_0^1 t^2 \sqrt{1-t^2} dt.$$

(3) Calculer une primitive de la fonction F définie par : (2 pts)

$$F(x) = \int \frac{x^2-1}{x(1+x^2)} dx.$$

(**Indication** : On pourra chercher a, b et c réels tels que $\frac{x^2-1}{x(1+x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$.)

Exercice 3 (6 pts).

(1) Montrer avec les règles de Riemann que $I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t^2+1}} dt$ converge. (1 pt)

(2) Calculer la fonction primitive (3 pts)

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t\sqrt{t^2+1}} dt$$

à l'aide du changement de variable $u = \sqrt{t^2+1}$.

(3) Calculer la valeur de $I = \lim_{x \to +\infty} F(x)$. (2 pts)