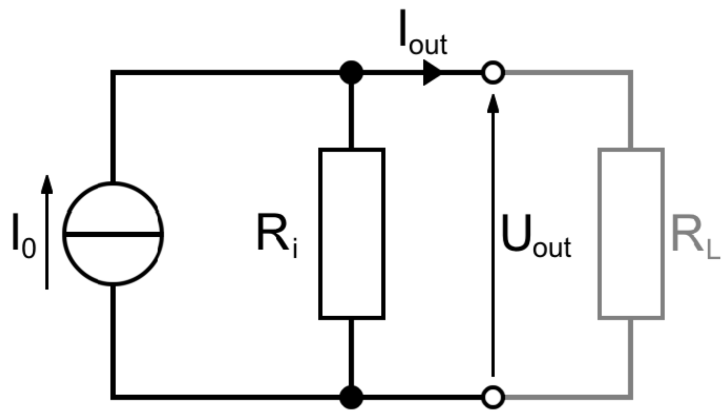
UNIVERSITE IBN ZOHR
FACULTE DES SCIENCES
Département de Physique
AGADIR

Module 8

COURS D'ELECTROCINETIQUE

SMI_2



Année universitaire 2021 / 2022

I. Courant et résistance électriques

I-1 Notion du courant électrique

Nous avons vu en électrostatique qu'il était possible d'électriser un matériau **(A)**, par différents moyens (frottement, chauffage…). Si l'on met ensuite ce conducteur de charge $\mathbf{Q_A}$ en contact avec un autre matériau **(B)**, le deuxième devient à son tour électrisé, c'est à dire qu'il a acquis une certaine charge $\mathbf{Q_B}$. Cela signifie que lors du contact des charges se sont déplacées de l'un vers l'autre (de **A** vers **B**). Ce déplacement de charges est appelé ″courant électrique″ et on peut définir alors le courant électrique par : $I = \frac{dQ}{dt}$

Où les unités sont les Ampères (symbole A). La définition précédante de I ne nous renseigne pas sur son signe, il faut choisir une convention.

Exemple : soit ($Q_A > 0$) la charge du conducteur initialement chargé (A). On a affaire ici à une décharge de (A) vers (B). Si l'on désire compter positivement le courant de (A) vers (B) il faut mettre un signe moins à l'expression ci-dessus. $I = -\frac{dQ}{dt}$

Nous appellerons ligne de courant la trajectoire d'un porteur de charge libre. Cette trajectoire étant orientée dans le sens du mouvement.

I-2 Densité et intensité de courant électrique

I-2-1 Vecteur densité de courant

Soit $\vec{V}$ la vitesse à un instant donné d'un porteur de charge q, en un point N où le nombre de porteur de charge par unité de volume est n ; nous appellerons le vecteur densité de courant $\vec{j}$ le vecteur :

$$\vec{j} = n\,q\,\vec{V} = \rho_N \vec{V}$$

Où ρ_N est la densité volumique de porteur de charge au point N.

Suivant le matériau, les porteurs de charges responsables du courant peuvent être différents. Dans un métal, ce sont des électrons, dits de conduction. Dans un gaz constitué de particules ionisées, un plasma, ou bien dans un électrolyte, il peut y avoir plusieurs espèces chargées en présence. En toute généralité, on doit donc définir la densité locale de courant de la forme :

$$\vec{j} = \sum_{\alpha} n_\alpha\, q_\alpha . \vec{V}_\alpha$$

où l'on fait une sommation sur toutes les éspèces (électrons et ions) en présence. Dans le cas particulier d'un cristal composé d'ions immobiles (dans le référentiel du laboratoire) et d'électrons en mouvement, on a :

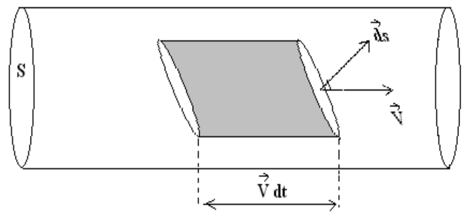
$$\vec{j} = -n_e\, e . \vec{V}_e$$

où e est la charge élémentaire et n_e la densité locale d'électrons libres. La densité de courant (donc le sens attribué à I) est ainsi dans le sens contraire du déplacement réel des électrons.

I-2-2 Intensité de courant

On appelle intensité **I** d'un courant électrique à travers une surface S le flux, à travers cette surface, du vecteur densité de courant $\vec{j}$: $I = \iint_S \vec{j}.\vec{ds}$

Plaçons nous dans le cas d'un seul type de porteurs de charges et calculons la quantité $(I dt)$ pour une surface S d'un fil conducteur dans lequel se trouve (n) porteurs de charges q, animés d'une vitesse V. Pendant un instant (dt) ces charges parcourent une distance $\vec{V}\,dt$. Soit $\vec{ds}$ un élément infinitésimale de surface mesuré sur la section du fil, orienté dans une direction arbitraire : $I\,dt = \iint_S \vec{j}.\vec{ds}\;dt = \iint_S n\,q\,\vec{V}\,dt.\vec{ds}$

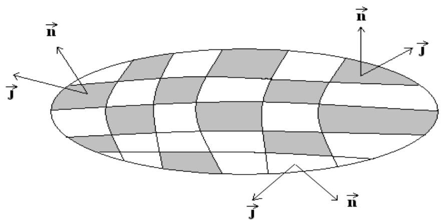


Or $\vec{V}\,dt.\vec{ds}$ est le volume du petit cylindre oblique de base ds et de génératrice $V\,dt$. Alors $n\,q\,\vec{V}dt\vec{ds}$ est la quantité de charges électriques mobiles contenue dans ce cylindre. Mais d'autre part, les charges qui traversent la surface ds pendant le temps dt sont celles situées à une distance de ds inférieure ou égale à $V\,dt$; c'est à dire les charges contenues dans le petit cylindre oblique.

La quantité $I dt$ est la quantité de charges qui traverse la surface S entre les instants t et $t+dt$:

$$dQ = I\,dt \text{ où } I = \frac{dQ}{dt} \qquad \text{Unité : } [I] = \left[\frac{\text{Coulomb}}{\text{Seconde}}\right] = [\text{Ampère}]$$

I-2-3 La conservation des charges



Soit S une surface fermée entourant un volume τ d'un conducteur. Supposons que la charge volumique ρ soit une fonction de temps. Pendant un intervalle de temps dt, la variation de la charge qui en résulte dans un volume élémentaire dτ, s'écrit : $dq = \frac{\partial \rho}{\partial t} dt\, d\tau$

D'où la variation de charge pour le volume τ : $q = \int_\tau \frac{\partial \rho}{\partial t} dt\, d\tau$

Par ailleurs, l'intensité du courant traversant un élément de surface dS est :

$$dI = \vec{j} \bullet d\vec{S} = \vec{j} \bullet \vec{n}\, dS$$

où $\vec{n}$ est le vecteur unitaire de la normale sortante. La charge totale transférée pendant le même intervalle de temps est donc : $q' = dt\int_S \vec{j} \bullet \vec{n}\, dS$

Ce qui s'écrit, d'après le théorème d'Ostrograski : $q' = dt\int_\tau div\,\vec{j}\, d\tau$

La loi de conservation de la charge pour un système isolé entraîne que : $q' + q = 0$

Alors $$\int_\tau \frac{\partial\rho}{\partial t} d\tau + \int_\tau div\,\vec{j}\, d\tau = 0$$

Cela étant vrai pour tout volume (τ), on en déduit que : $$div\,\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

Cette équation constitue l'équation de continuité, qui régit tout phénomène de transfert de charges. Elle traduit l'idée que dans un circuit, il ne peut y avoir d'accumulation de charges, ni de courant : c'est la formulation locale de la loi de conservation de la charge électrique.

Remarque :
Un régime est dit stationnaire (permanent) si la distribution des charges et des courants est indépendante du temps. Par conséquent $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$. *Autrement dit, la charge contenue dans le volume dτ est renouvelée par le passage du courant, sans aucune variation de la charge volumique. C'est le cas du courant continu. L'équation de continuité s'écrit :* $div\,\vec{j} = 0$. *Cette relation équivalente à* $\iint_S \vec{j}.\vec{ds} = 0$ *exprime que le flux I de la densité de courant* $\vec{j}$ *est conservatif.*

I-3 La loi d'Ohm microscopique

Soit un matériau conducteur comportant des ions positifs fixes ⊕ et des électrons libres de se déplacer. Si le système est en équilibre : $I = 0$ et $\vec{E} = 0$ alors le potentiel est constant.

Admettons que $\vec{E} = \vec{Cte}$ sur une portion du matériau. Les électrons sont soumis à la force de coulomb $\vec{F}$: $\vec{F} = q\vec{E} = c^{ste}$ or $\vec{F} = m\vec{\psi} \Rightarrow \vec{\psi} = \vec{Cte} \Rightarrow \vec{V}$ est croissante (non borné)

Mais, expérimentalement on constate que I est fini, par conséquent j est fini car $I = js$ et $j = nqV$ alors V est aussi finie. Donc il y a une contradiction ($\vec{\psi} = \vec{Cte}$ et $\vec{V}$ croissante).

Les électrons ne se déplacent donc pas librement à l'intérieur du conducteur, car ils sont freinés par des collisions avec les impuretés contenues dans celui-ci. Donc les électrons ont une vitesse limitée à l'intérieur du conducteur.

Une hypothèse plus simple pour expliquer cette valeur limite de la vitesse consiste à traduire ces collisions par une force de frottement f proportionnelle à la vitesse (moyenne) $\vec{V}$ des électrons ($f = -k\vec{V}$). La relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$m\frac{d\vec{V}}{dt} = q\vec{E} - k\vec{V}$$

Cette équation montre qu'en régime permanent (stationnaire, mais non statique), la charge q atteint une vitesse limite $\vec{V} = \mu\vec{E}$ où $\mu = q/k$ est appelé la **<u>mobilité</u>** des charges. Or $\vec{j} = nq\vec{V}$ donc

$$\vec{j} = \gamma\vec{E} \qquad \text{avec } \gamma = nq\mu$$

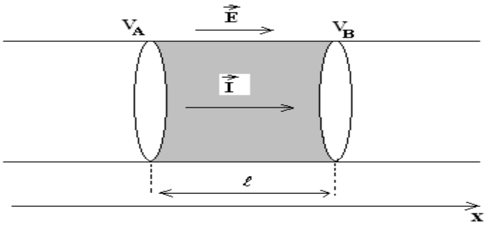
Le coefficient de proportionnalité γ est appelé la **<u>conductivité</u>** du milieu. On définit également la résistivité du milieu : $\eta = 1/\gamma$. La conductivité est une grandeur locale positive, dépendant uniquement des propriétés du matériau.

<u>Remarque :</u>

Cette loi implique que les lignes de champ électrostatique sont également des lignes de courant, indiquant donc le chemin pris par les charges électriques. Par ailleurs, comme γ est positive, cela implique que <u>le courant s'écoule dans la direction des potentiels décroissants.</u>

I-4 Résistance d'un conducteur : loi d'Ohm macroscopique

Considérons une portion AB de longueur ℓ d'un conducteur parcouru par un courant I. S'il existe un courant, cela signifie qu'il y a une chute de potentiel entre A et B :



$dV = -E\,dx \Rightarrow U = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}\cdot\vec{dl}$. On définit alors la résistance de cette portion par :

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\int_A^B \vec{E}\cdot\vec{dl}}{\iint_S \gamma\,\vec{E}\cdot\vec{ds}}$$

où l'unité est l'Ohm (symbol Ω). Dans le cas simple d'un conducteur filiforme de section S où sur une longueur ℓ le champ électrostatique est uniforme, on obtient le lien entre la résistance d'un conducteur (propriété macroscopique) et sa résistivité (propriété microscopique) :

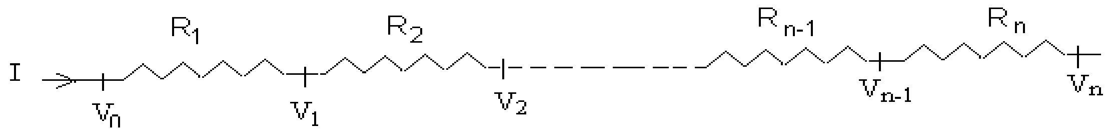
$$U = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}.\vec{dl} = E\ell \ ,\qquad \textbf{Or} \quad j = \gamma E \quad \text{et} \quad I = jS \quad \textbf{alors :} \quad U = V_A - V_B = \frac{\ell}{\gamma S} I = RI$$

avec $R = \dfrac{\ell}{\gamma S} = \eta \dfrac{\ell}{S}$

<u>Unités :</u> $R = \dfrac{V_A - V_B}{I} \Rightarrow \dfrac{[\text{Volt}]}{[\text{Ampère}]} = [\text{Ohm}] \ (\Omega)$, $\quad \eta = R\dfrac{S}{\ell} \Rightarrow \dfrac{\Omega\,\text{m}^2}{\text{m}} = \Omega\,\text{m}$

I.4.1 Résistances en séries

Soient n résistances R_i mises bout à bout dans un circuit et parcourues par un courant I. La différence de potentiel aux bornes de la chaîne de résistances est simplement la somme des différences de potentiels entre les bornes de chaque résistance :

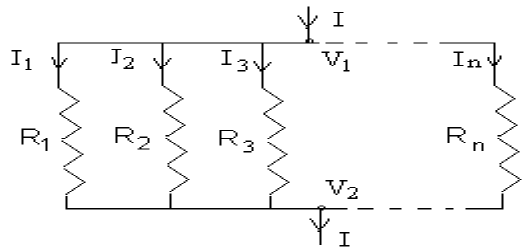


$$U = \ (V_0 - V_1) + (V_1 - V_2) + \cdots + (V_{n-1} - V_n) \ = \ R_1 I + R_2 I + \cdots + R_n I$$

c'est à dire analogue à celle obtenue par une résistance unique dont la valeur est : $R = \sum_{i=1}^{n} R_i$

I.4.2 Résistances en parallèles

Soient n résistances mises en parallèles sous une tension $U = V_1 - V_2$ et alimentées par un courant I. Le courant se sépare alors en n courants dans chacune des n branches : $I_i = \dfrac{U}{R_i}$. En vertu de la conservation du



courant, on a : $I = \sum_{i=1}^{n} I_i = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{U}{R_i} = \dfrac{U}{R}$. C'est à dire que l'ensemble des n branches est analogue à une résistance équivalente en série :

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}$$

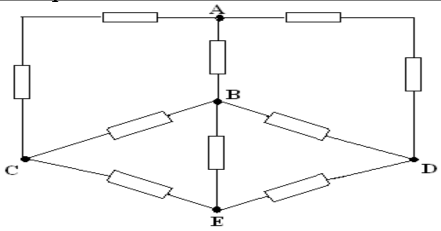
II. Eléments d'un circuit électrique

II-1 Notion de circuit électrique

II-1-1 Définition

Un circuit électrique est constitué d'un ensemble de dispositifs appelés <u>dipôles électrocinétiques</u>, reliés entre eux par un fil conducteur et formant ainsi une structure <u>fermée</u>. Un nœud d'un circuit est une interconnexion où arrivent 3 fils ou plus. Une <u>branche</u> est un tronçon de circuit situé entre deux nœuds. Enfin, une <u>maille</u> est un ensemble de branches formant une boucle fermée.

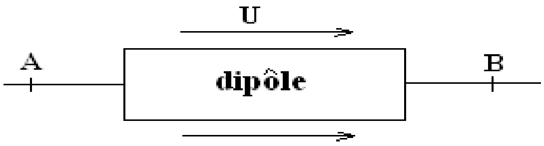
<u>Exemple :</u>



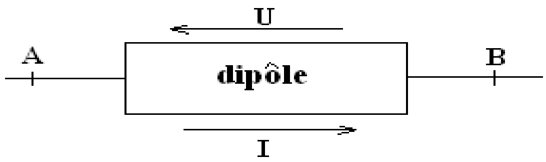
- Les nœuds : A, B, C, D, E
- Les branches: AC, AD, AB, BD, CE, BE, ED
- Les mailles : ABCA, ABDA, CBEC, DBED…

II-1-2 Dipôle électrocinétique

Un dipôle électrocinétique s'insère dans un circuit par l'intermédiaire de deux pôles. Le comportement d'un dipôle est caractérisé par deux grandeurs électriques duales : la tension et le courant. Il existe deux possibilités pour le choix des sens conventionnels de la tension et du courant. Selon que U et I sont de même sens ou non nous avons :



Convention générateur



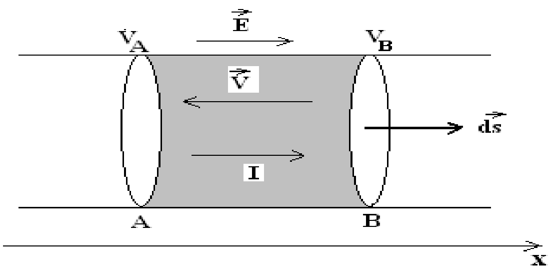
Convention récepteur

On distingue deux grandes catégories :

- **Les dipôles passifs** : dans lesquels il y a simplement transformation d'énergie électrique en énergie calorifique. On les appelle résistances.
- **Les dipôles actifs** : dans lesquels, outre l'énergie calorifique, apparaissent d'autres formes d'énergie. Dans cette catégorie, on range :
  1. *Les générateurs* : dont le rôle principal est de transformer de l'énergie non électrique en énergie électrique.
  2. *Les récepteurs* **:** dont le rôle principal est de transformer de l'énergie électrique en énergie non électrique.

Le dipôle est caractérisé par sa réponse à une différence de potentiel U entre ses bornes : c'est à dire la courbe caractéristique $I = f(U)$. Un dipôle est linéaire si sa caractéristique est une droite alors que celle d'un dipôle non linéaire n'est pas une droite.

II-2 Puissance électrique disponible



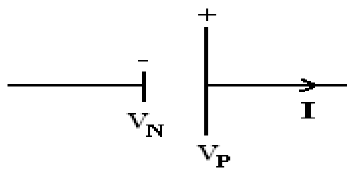
Soit une portion d'un circuit de section S, parcourue par un courant permanent I allant de A vers B ($\vec{V}_A > \overrightarrow{V_B}$). Cette différence de potentiel se traduit par l'existence d'un champ électrostatique $\vec{E}$ produisant une force de coulomb $\vec{F} = q\vec{E}$ capable d'accélérer une charge q. Ainsi, soit $P_q = \vec{F}.\vec{V}$ la puissance (travail par unité de temps) nécessaire pour communiquer une vitesse $\vec{V}$ à une particule de charge q quelconque. Sachant que dans ce conducteur il y a (n) porteurs de charge par unité de volume, la puissance totale P mise en jeu dans le brin AB parcouru par un courant I est :

$$
\begin{aligned}
P &= \iiint_V nP_q \, d\vartheta = \int_A^B d\ell \iint_{Section\,S} n\, P_q ds \\
&= \int_A^B d\ell \iint_S nq\vec{E}.\vec{V}\, ds \\
&= \iiint \left(nq\vec{V}.\vec{ds}\right)\vec{E}.\vec{d\ell} \\
&= \int_A^B \vec{E}.\vec{d\ell} \iint_S \vec{j}.\vec{ds} \\
&= I\int_A^B \vec{E}.\vec{d\ell} = I[V_A - V_B] = IU
\end{aligned}
$$

Où $U = V_A - V_B > 0$ puisque le courant circule de A vers B. Cette puissance est donc la puissance électrique disponible entre A et B, du simple fait qu'il y circule un courant I.

Suivant la nature du dipôle placé entre A et B (récepteur), l'énergie électrique disponible sera convertie sous une forme ou une autre. Dans le cas simple où entre A et B ne se trouve qu'une résistance R, la puissance disponible P ne sert qu'à chauffer la résistance puisque $U = RI$. Cela se traduit par une dissipation d'énergie sous forme de chaleur, appelé **effet joule**, et donc la puissance vaut : $P_J = RI^2 = \dfrac{U^2}{R}$

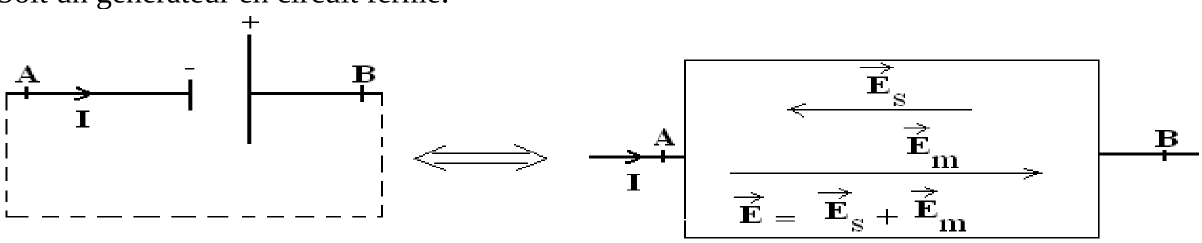
II-3 Générateur linéaire



Si on veut établir un courant constant dans un circuit , c'est à dire dont l'intensité ne varie pas au cours du temps, il faut employer un générateur, appareil qui maintient entre ses bornes une différence de potentiel indépendante du temps. Un tel dispositif transforme en énergie électrique toute énergie de nature non électrique : Le pôle P dont le potentiel Vp est supérieur à celui du pôle N est appelé pôle positif, l'autre pôle négatif. Si l'on relie un générateur à un circuit extérieur par des fils conducteurs, par convention le courant va du pôle positif au pôle négatif.

II-3-1 Force électromotrice d'un générateur

Soit un générateur en circuit fermé:



Le courant circule de B vers A à l'exterieur du générateur. En régime permanent, il n'y a pas accumulation de charge en aucun point de circuit : cela implique que les charges doivent traverser le générateur. Or $\vec{V_A} < \overrightarrow{V_B}$ alors il existe un champ électrostatique $\vec{E_S}$ dirigé de B vers A qui s'oppose au mouvement des charges à l'interieur. La seule façon d'obtenir un régime stationnaire avec un courant permanent I, c'est donc d'avoir un champ supplémentaire, appelé champ électromoteur E_m, supérieur en norme et dirigé en sens inverse de $\vec{E_S}$.

Mettons le générateur en circuit ouvert ($I = 0$) (générateur n'est pas relié à un circuit extérieur). Les charges sont en moyenne immobiles. Ainsi, la force totale s'exerçant sur une charge doit s'écrire:

$\vec{F} = q\left(\overrightarrow{E_S} + \overrightarrow{E_m}\right)$

A l'équilibre et en l'absence de courant : $\left(\overrightarrow{E_S} + \overrightarrow{E_m}\right) = 0$

En admettant toujours $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$: $V_A - V_B = \int_A^B \overrightarrow{E_S}.\overrightarrow{d\ell} = -\int_A^B \overrightarrow{E_m}.\overrightarrow{d\ell}$ où $V_A - V_B < 0$

On appelle $e = \int_A^B \overrightarrow{E_m}.\overrightarrow{d\ell}$ la force électromotrice (fem). Elle caractérise l'aptitude du générateur à produir du courant. L'unité de e est : [e] = [volts]

A l'équilibre, mais en présence de courant I (générateur branché dans un circuit fermé) les porteurs de charge responsables de ce courant subissent une force supplémentaires, dûe aux collisions se produisant à l'interieur du conducteur. Pour un générateur idéal ces collisions sont négligeables et l'on obtient : $V_A - V_B = -e$

En revanche, pour un générateur non idéal, de telles collisions se traduisent par l'existence d'une résistance interne r. En régime permanent une charge q est soumise à une force totale nulle, donc :

$$-k\vec{V} + q\overrightarrow{E_S} + q\overrightarrow{E_m} = 0$$

$$\int_A^B \left(-\frac{k}{q}\vec{V} + \overrightarrow{E_S} + q\overrightarrow{E_m}\right).\overrightarrow{d\ell} = 0$$

$$V_A - V_B + e = \int_A^B \frac{k}{q}\vec{V}.\overrightarrow{d\ell} \qquad or \qquad \frac{k}{q} = \frac{1}{\mu}$$

$$= \int_A^B \frac{\vec{V}}{\mu}.\overrightarrow{d\ell}$$

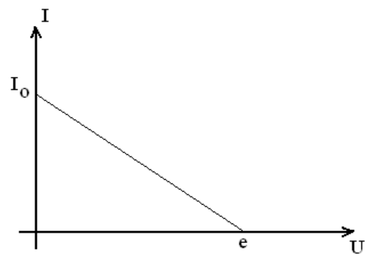
$$= \int_A^B \frac{\vec{j}.\overrightarrow{d\ell}}{n q \mu} \qquad or \qquad \frac{1}{n q \mu} = \eta$$

$$= \int_A^B I \frac{\eta}{S}\, d\ell$$

$$= r\, I \qquad \Rightarrow \qquad V_A - V_B = rI - e \quad \Leftrightarrow \quad V_B - V_A = e - rI$$

La résistance interne du générateur introduit une chute de tension, ce qui fait qu'il délivre une tension inferieure à celle donnée par sa force électromotrice. La puissance transformée par le générateur en puissance électrique est : $P = e\ I$

II-3-2 Schématisation d'un générateur linéaire



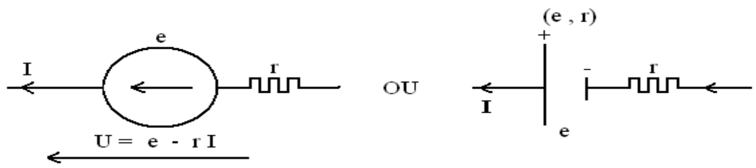
La caractéristique d'un générateur linéaire est la suivante :

La différence de potentiel pour laquelle le courant est nul est la force électromotrice du générateur (fem), l'intensité I pour laquelle $U = 0$ est le courant de court circuit, la pente de la droite est l'opposé de la conductance interne ($g = 1/r$ g) du générateur.

$I = I_0 - \dfrac{U}{r}$ et aussi $U = e - r\,I$, la correspondance entre les deux relations donne : $I_0 = \dfrac{e}{r}$ où r est <u>la résistance interne</u> du générateur.

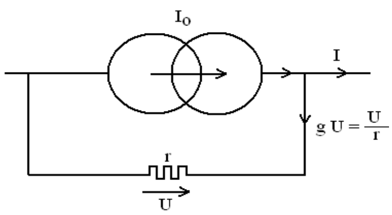
Un générateur peut être schématisé de deux manières différentes :

- *En générateur de tension* de force électromotrice (e) en série avec sa résistance interne (r) :



Le sens de la flèche indique le potentiel le plus élevé ; celui du pôle positif du générateur.

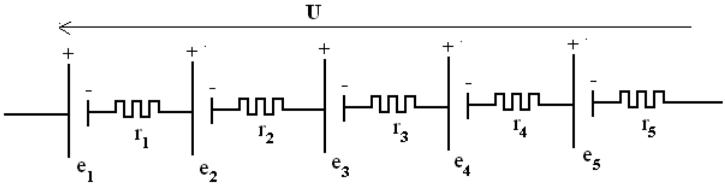
- *En générateur de courant* de courant de court-circuit I_0 en parallèle sur la résistance interne **r** :



II-3-3 Association de générateurs

a- Association en série

En série, les différences de potentiel s'ajoutent et tous les générateurs sont traversés par le même courant. Il convient d'utiliser la schématisation génératrice de tension :

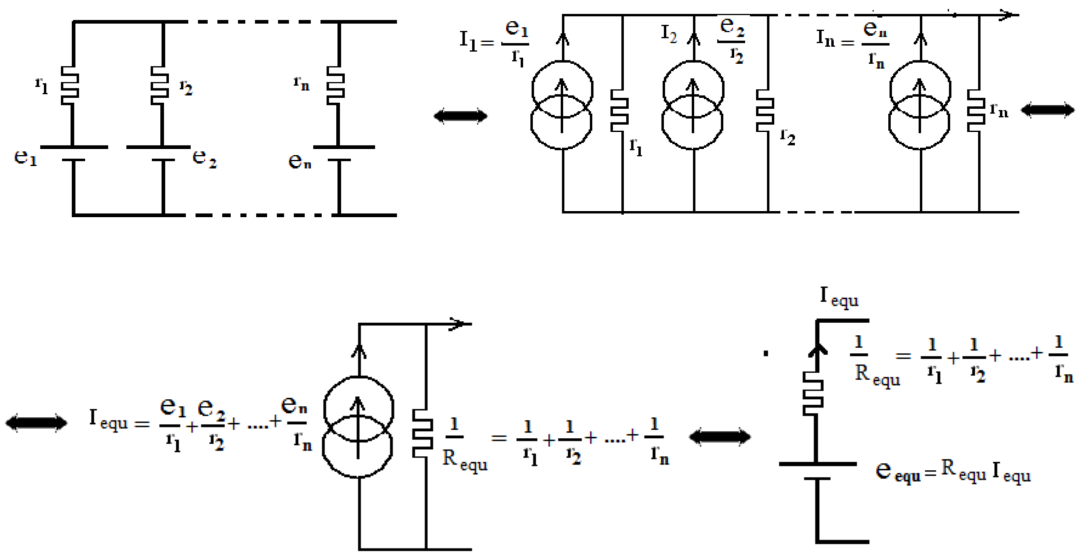


$$U = e_1 - r_1 I + e_2 - r_2 I + \ldots\ldots + e_n - r_n I = \sum_i e_i - I \sum_i r_i$$

L'association est donc équivalente à un générateur de tension de fem $e = \sum_i e_i$ et de résistance $r = \sum_i r_i$.

b- Association en parallèle

En parallèle, les intensités s'ajoutent et tous les générateurs présentent la même différence de potentiel à leurs bornes. Il convient donc d'utiliser la schématisation *générateur de courant* :



L'association est donc équivalente à un générateur de courant dont :

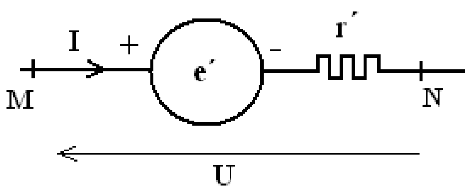
- Le courant de court-circuit est $I_{equ} = \sum_i I_i$
- La résistance est $\frac{1}{r_{equ}} = \sum_i \frac{1}{r_i}$

II-4 Récepteur

Un recepteur est un appareil capable de transformer de l'énergie électrique en une autre forme non exclusivement calorifique. On appelle force contre-électromotrice du récepteur le quotient de la puissance transformée à l'intensité du courant traversant celui-ci :

$$e' = \frac{P'}{I} \qquad [e'] = [Volts]$$

Soit un récepteur branché entre deux points M et N d'un circuit et traversé par un courant I. La puissance totale dissipée entre M et N est $(V_M - V_N)I$. Cette puissance est en partie transformée en une puissance non électrique par le récepteur : eI et en partie en puissance calorifique à l'interieur de celui-ci. On caractérise donc ce récepteur par sa résistance interne r. La conservation de l'énergie, donc de la puissance s'écrit :



$$I\left(V_M - V_N\right) = e'I + r'I^2$$

$$d'ou \quad \left(V_M - V_N\right) = e' + r'I$$ **: la loi d'ohm pour un récepteur**

La différence de potentiel aux bornes du récepteur est donc plus grande que sa force contre-électromotrice.

III. Les lois et théorèmes régissant les circuits électriques

III.1 lois de Kirchhoff

Les lois de l'électrocinétique, connues sous le nom de lois de Kirchhoff, sont en effet de simples lois de conservation. Elles sont utiles à la résolution des circuits à courant continu.

III-1-1 Lois des nœuds (Conservation du courant)

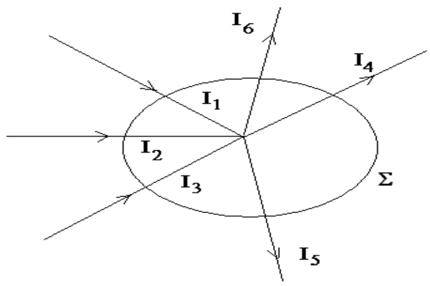
Soit un nœud quelconque du circuit sur lequel arrive un certain nombre de fils. Sur chacun de ces fils, circule un courant. En régime permanent, la conservation de la charge électrique se traduit par la conservation du courant : en aucun point du circuit il ne peut y avoir accumulation (ou perte) de charges. Cela signifie donc que l'ensemble des courants entrants componse exactement les courants sortants :

$$div\ \vec{j} = 0$$

$$\oiint_{\Sigma} \vec{j}.\vec{ds} = 0$$

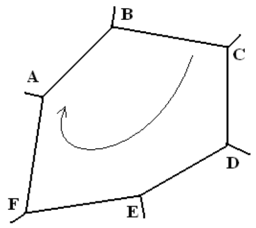
$$\oiint_{\Sigma} \overrightarrow{j_{entrant}}.\vec{ds} + \oiint_{\Sigma} \overrightarrow{j_{sor\tan t}}.\vec{ds} = 0$$

$$-I_{entrant} + I_{sor\tan t} = 0$$



III-1-2 Loi des mailles (Conservation de l'énergie)

Une maille est un circuit fermé pris dans le réseau (I.5.1). Si l'on choisit un sens de parcourt sur la maille, la somme de toutes les différences de potentiels est nulles lorsqu'un tour complet a été effectué.



$$(V_A - V_B) + (V_B - V_C) + (V_C - V_D) + (V_D - V_E) + (V_E - V_F) = 0$$

III-1-3 Résolution partique des équations en électrocinétique

En général, on cherche à calculer les courants qui circulent dans chacune des branches d'un circuit. Du fait des lois de conservation ci-dessus, un circuit comportant n branches n'a pas n courants indépendants les uns des autres. Le nombre réel d'inconnues est en fait : $M = B - N + 1$

Où B est le nombre de branches du circuit et N est le nombre de nœuds. Pour résoudre ce problème on utilisera la méthode suivante :

- Sur chaque branche, on adopte un sens positif pour le courant. On écrit les lois relatives aux nœuds.
- On détermine sur le schéma du circuit la polarité des différents dipôles non polarisés en fonction du sens de courant déjà choisi. Quant aux dipôles non polarisés, leur polarité dépend du sens du courant qui les traversent : le bout où entre le courant est considéré positif, l'autre bout est nécessairement négatif.
- Choisir M mailles indépendantes, c'est à dire ayant au moins une branche non partagée avec une autre maille.
- définir un sens de parcours arbitraire sur chacune de ces mailles.

- On écrit ensuite la loi relative aux mailles indépendantes : Chaque fois que nous rencontrons un pôle positif sur le parcours, nous attribuons un signe positif à la différence de potentiel aux bornes de l'élément en question. De même, on attribue un signe négatif à la différence de potentiel lorsqu'on rencontre un pôle négatif
- La résolution de ce système d'équations fournit les valeurs algébriques des intensités. Les valeurs positives signifient que le courant circule effectivement dans le sens choisi. S'il n'y a pas de récepteurs non polarisés, des valeurs négatives signifient que le courant circule effectivement dans le sens opposé au sens choisi. Enfin, s'il y a des récepteurs non polarisés et si l'on trouve dans une branche contenant un tel récepteur une intensité négative, il faut recommencer les calculs en inversant le sens de cette intensité. Si, en fin de calcul, on trouve dans cette branche une intensité positive, tout va bien. Si on trouve encore une intensité négative, cela signifie que la diférence de potentiel aux bornes du récepteur est insuffisante pour faire fonctionner celui-ci : aucun courant ne traverse donc la branche et on peut la supprimer. Le calcul est terminé lorsque toutes les intensités sont positives dans toutes les branches contenant des récepteurs non polarisés.

III-2 Le théorème de Thévenin

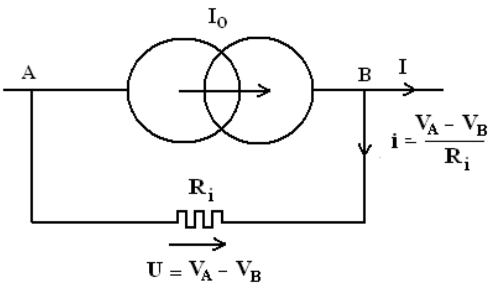
Enoncé : tout réseau linéaire compris entre deux bornes A et B, aussi compliqué soit-il, est équivalent à un générateur de tension de fem **e** et de résistance interne **r** telles que :

- $e = E_{th}$ est la tension mesurée entre A et B en circuit ouvert ;
- $r = R_{th}$ est la résistance équivalente du réseau, vue entre A et B lorsque l'on a enlevé toutes les fem et fcem en en gardant les résistances.

Ce générateur équivalent est dit **générateur de Thévenin**

III-3 Le théorème de Norton

Enoncé : tout réseau linéaire compris entre deux bornes A et B est équivalent à un générateur de courant dont le courant principal I_0 est le courant de court-circuit du dipôle et dont la résistance interne montée en parallèle est la résistance équivalente vue des deux bornes du dipôle lorsqu'on a enlevé toutes les forces électromotrice.

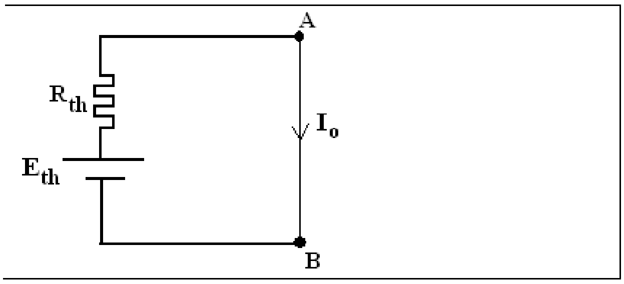


Ce générateur équivalent est dit **générateur de Norton**

On schématise le réseau linéaire par un générateur de thévenin et on court-circuite les bornes A et B :

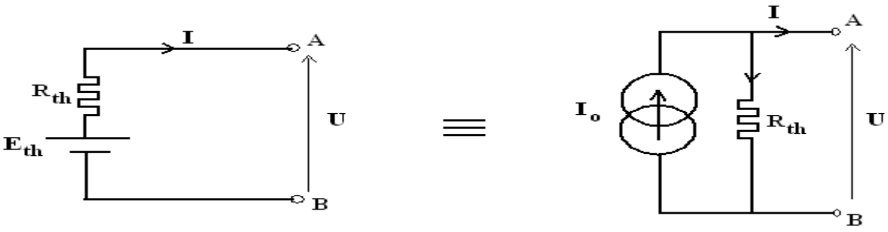
$$I_0 = \frac{U_{th}}{R_{th}}$$

$$I = \frac{U_{th}}{R_{th}} - \frac{V_A - V_B}{R_{th}}$$



III-4 Equivalence entre représentation de Thévenin et Norton

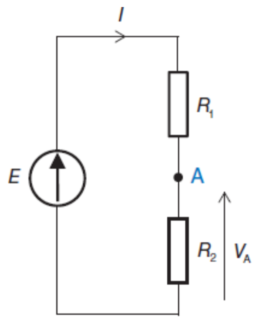
L'application respective des théorèmes de Thévenin et Norton permet de montrer l'équivalence de deux circuits suivants : $E_{th} = R_{th}\, I_0$



III-5 Les ponts diviseurs

III-5-1 Le pont diviseur de tension

Le circuit en face représente un pont de deux résistances placées en série et alimentées par un générateur de tension parfait. Les deux résistances sont ainsi parcourues par le même courant. On s'intéresse au potentiel V_A au point A, point commun aux deux résistances R_1 et R_2, autrement dit, à la tension aux bornes de R_2. Par simple application de la loi d'Ohm, on peut écrire :



$$I_1 = \frac{E}{R_1 + R_2} \qquad \text{d'où} \qquad V_A = E\frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

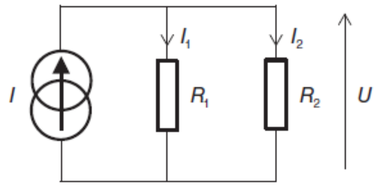
Le principe du pont diviseur de tension

Le potentiel au point commun de deux résistances est égal à la tension qui règne aux bornes de l'ensemble multiplié par la résistance connectée au potentiel le plus bas et divisé par la somme des deux résistances.

Important

Le principe du pont diviseur de tension ne peut s'appliquer que si les deux résistances sont parcourues par le même courant.

III-5-2 Le pont diviseur de courant



Le circuit de la figure en face représente un pont de deux résistances placées en parallèle et alimentées par un générateur de courant parfait. Les trois dipôles sont ainsi soumis à la même différence de potentiel U.

On s'intéresse aux valeurs des deux courants I_1 et I_2 qui parcourent respectivement les deux résistances R_1 et R_2. Si on considère que la source de courant alimente l'association en parallèle des deux résistances, on obtient, par une simple application de la loi d'Ohm : $U = I\dfrac{R_2 R_1}{R_1 + R_2}$

Par conséquent : $$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I \qquad et \qquad I_2 = \frac{U}{R_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I$$

Le principe du pont diviseur de courant

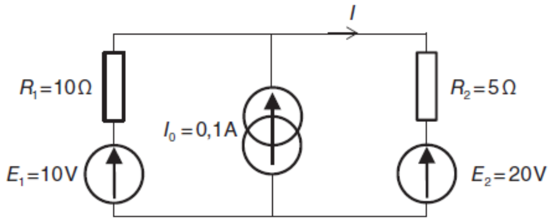
Lorsqu'une source de courant I alimente deux résistances associées en parallèle, chacune des résistances est parcourue par le courant I multiplié par la valeur de l'autre résistance et divisé par la somme des deux.

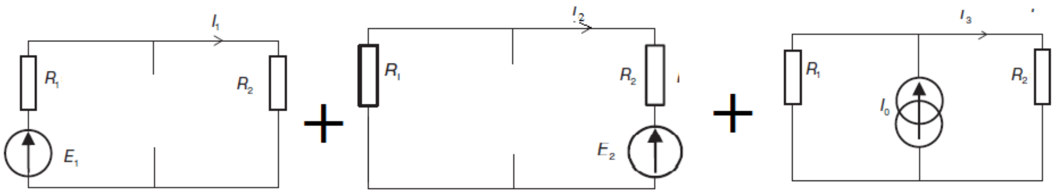
III-6 Principe de superposition

Enoncé : *Dans un circuit linéaire possédant plusieurs générateurs de tension, et à condition que ces sources soient indépendantes, tout potentiel en un point quelconque (ou tout courant dans une branche du circuit) est égal à la somme des potentiels (ou des courants) créés séparément par chaque générateur, les autres générateurs étant éteints, c'est-à-dire court-circuités. Si le circuit contient des générateurs de courant, le principe reste valable si les sources sont indépendantes : on effectue les calculs avec chaque source prise séparément en remplaçant les générateurs de courant par des circuits ouverts.*

Exemple : Dans le circuit suivant, on cherche à calculer le courant I ?

D'après le principe de superposition, ce courant est la somme de trois courants I_1 , I_2 et I_3 correspondant respectivement aux contributions de chaque générateur E_1 , E_2 et I_0 . On calcule alors successivement chaque courant en ne laissant subsister, à chaque fois, qu'un seul des trois générateurs.



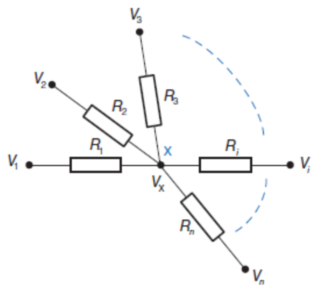


$$I_1 = \frac{E_1}{R_1 + R_2} \qquad I_2 = -\frac{E_2}{R_1 + R_2} \qquad I_3 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I_0$$

Rappel

Lorsqu'on annule un générateur de tension, on le court-circuite, et lorsqu'on annule un générateur de courant, on le remplace par un circuit ouvert.

III-7 Le théorème de Millman



Le théorème de Millman permet d'exprimer le potentiel en un nœud quelconque d'un réseau en fonction des potentiels aux nœuds voisins.

Le potentiel V_X s'exprime en fonction des potentiels aux noeuds voisins de la manière suivante :

$$V_X = \frac{\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \cdots + \frac{V_n}{R_n}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{V_i}{R_i}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}}$$

On peut définir également la conductance d'un dipôle résistif par l'inverse de sa résistance.

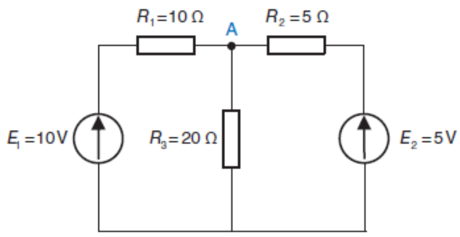
Soit : $G_i = \frac{1}{R_i}$ unité : siemens (S)

Ainsi, le théorème de Millman peut aussi s'écrire :

$$V_X = \frac{\sum_{i=1}^{n} G_i V_i}{\sum_{i=1}^{n} G_i}.$$

Exemple :

On considère le circuit de la figure suivante dans lequel on cherche à calculer le potentiel au point A. L'application du théorème de Millman en ce point est immédiate.



$$V_A = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{0}{R_3} + \frac{E_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2}} = \frac{\frac{10}{10} + \frac{5}{5}}{\frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{5}} = 5{,}7\ \text{V}$$