UNIVERSITE IBN ZOHR
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE
AGADIR

TRAVAUX DIRIGES D'ELECTRICITE 1
FILIERES : SMP1 ET SMIA1
Série N° 3
2022-2023

كلية العلوم
ⵜⴰⵙⵍⵉⵍⵜ ⵏ ⵜⵓⵙⵙⵏⴰ
FACULTÉ DES SCIENCES

Exercice 1: Sphères conductrices

1) On considère une sphère S_1 chargée, de rayon R_1et de centre O (Figure 1). Elle est isolée dans l'espace et porte une densité superficielle de charge σ_1 positive. On notera Q_1 la charge totale de S_1.

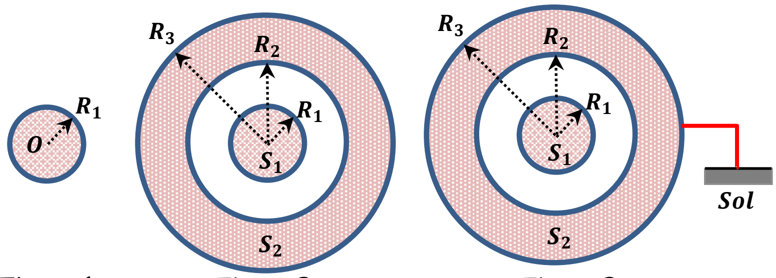


Figure **1** Figure **2** Figure **3**

Le tableau suivant rassemble les expressions du champ électrostatique et le potentiel électrostatique créés par cette sphère en tout point M de l'espace.

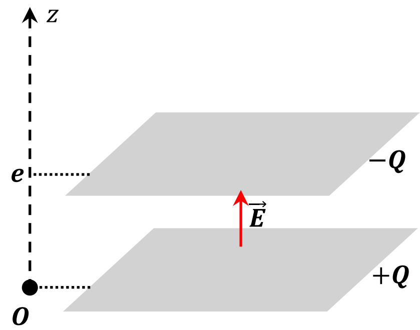
	$0 < r < R_1$	$r \geq R_1$
Le champ $\vec{E}(M)$	$\vec{E}(M) = \vec{0}$	$\vec{E}(M) = \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r = \dfrac{\sigma_1 R_1^2}{\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$
Le potentiel $V(M)$	$V(M) = \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \dfrac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0}$	$V(M) = \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} = \dfrac{\sigma_1 R_1^2}{\varepsilon_0 r}$

Déterminer l'énergie électrostatique de cette distribution de charge ainsi que sa capacité C.

2) On entoure cette sphère par une deuxième sphère creuse S_2 initialement neutre de rayons intérieur R_2 et extérieur R_3 $(R_1 < R_2 < R_3)$ –Figure 2.
   a. Quelle est la répartition des charges sur la sphère S_2 à l'équilibre électrostatique ?
   b. Montrer que les densités de charges qui apparaissent par influence sur la sphère S_2 vérifient la relation suivante : $\sigma_1 R_1^2 = -\sigma_2 R_2^2 = \sigma_3 R_3^2$
3) On relie la sphère S_2 au sol $(V = 0)$-Figure 3.
   a. Calculer le champ et le potentiel en tout point de l'espace.
   b. Calculer l'énergie électrostatique et en déduire la capacité de ce condensateur sphérique.

Exercice 2: condensateur plan.

Un condensateur plan placé dans l'air sec est constitué de deux armature métalliques de surface S et distantes de e. On admettra que les deux armatures sont en influence totale et que les effets de bords sont négligeables. On impose au condensateur à une différence de potentiel $U = V_1 - V_2$ grâce à un générateur de tension continu. Soient Q la charge du condensateur et σ sa densité de charge surfacique.



On donne l'expression du vecteur champ électrostatique en tout point de l'espace :

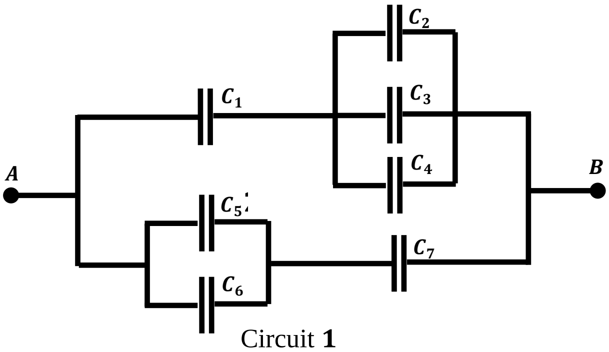
$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \vec{0} & si \quad z < 0 \\ +\dfrac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{e}_z, & si \quad 0 < z < e \\ \vec{0} & si \quad z > e \end{cases}$$

1) Établir l'expression de la différence de potentiel U.
2) En déduire l'expression de la capacité du condensateur ainsi formé.
3) Déterminer, en fonction de σ, e, ε_0 et S, l'expression de l'énergie électrostatique emmagasinée dans le condensateur. Justifier pourquoi cette énergie se situe dans l'espace interarmatures.

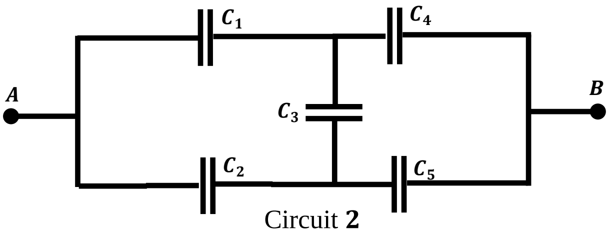
Exercice 3 : la capacité équivalente.

1) Déterminer la capacité équivalente du groupement des deux circuits de la figure ci-dessous. Prendre le cas où tous les condensateurs ont la même capacité $C = 8\mu F$.

2) Trouver la charge de chaque condensateur du Circuit **1**, sachant que la tension $U_{AB} = 200V$.



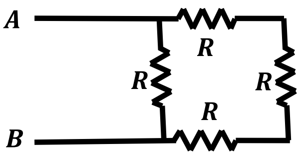
Circuit **1**



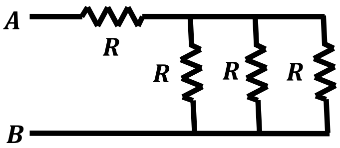
Circuit **2**

<u>Exercice 4 : Calcul des résistances équivalentes</u>

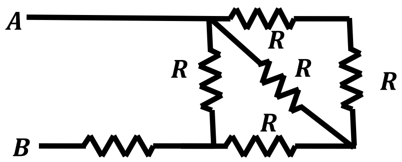
Toutes les résistances sont identiques de valeur R. Déterminer la résistance équivalente vue entre les bornes A et B pour les schémas ci-dessous.



Circuit 1



Circuit 2



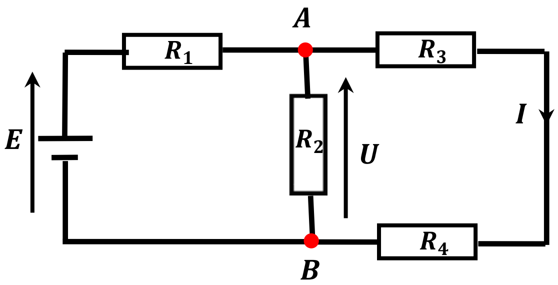
Circuit 3

<u>Exercice 5 : les lois de Kirchhoff.</u>

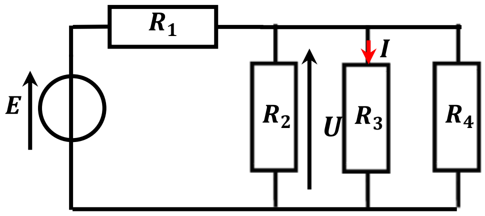
En faisant des associations de résistances et en appliquant les lois de Kirchhoff, déterminer pour le montages de la figure ci-dessous, l'intensité I qui traverse la résistance R_3 et la tension U aux bornes de la résistance R_2.

Application numérique pour :

$$E = 6\,V\ ,\ R_1 = \ 100\,\Omega,\ R_2 = R_3 = R_4 = 50\,\Omega.$$



Montage **1**



Montage **2**

Exercice 1: Sphères conductrices

1) On considère une sphère S_1 chargée, de rayon R_1et de centre O (Figure 1). Elle est isolée dans l'espace et porte une densité superficielle de charge σ_1 positive. On notera Q_1 la charge totale de S_1.

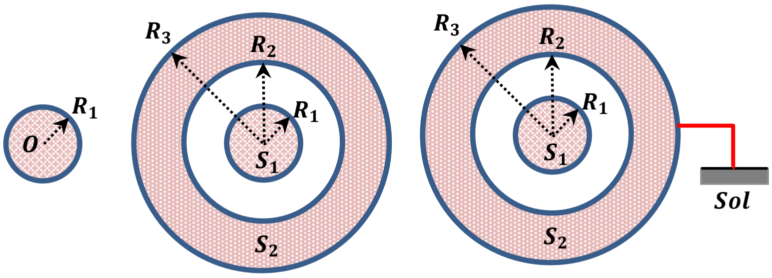


Figure **1** Figure **2** Figure **3**

- Déterminons l'énergie électrostatique de cette distribution de charge.

Pour un conducteur unique, l'énergie électrostatique s'écrit : $W = Q_1V_1/2$

Or

$$V_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0} \quad et \quad Q_1 = 4\pi\sigma_1 R_1^2$$

$$\Rightarrow W = \frac{2\,\pi\,\sigma_1^2}{\varepsilon_0} R_1^3$$

- Le calcul de la capacité s'obtient à partir de :

$$W = \frac{1}{2}\,C_1\,V_1^2 \Rightarrow C_1 = \frac{2\,W}{V_1^2}$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{2\,\varepsilon_0^2}{\sigma_1^2\,R_1^2}\,\frac{2\,\pi\,\sigma_1^2}{\varepsilon_0} R_1^3$$

$$\Rightarrow C_1 = 4\pi\,\varepsilon_0 R_1$$

2) On entoure cette sphère par une deuxième sphère creuse S_2 initialement neutre de rayons intérieur R_2 et extérieur R_3 $(R_1 < R_2 < R_3)$ –Figure 2.
   a. La sphère S_2 entoure complètement la sphère S_1, il y a influence totale entre les deux sphères. La paroi interne de S_2 (sphère de rayon R_2)porte la charge $Q_2 = -Q_1$.

Comme S_2 est globalement neutre, la paroi externe de S_2 portera la charge $Q_3 = Q_1$.

   b. On a $Q_1 = -Q_2 = Q_3 \Rightarrow \sigma_1 4\pi R_1^2 = -\,\sigma_2 4\pi R_2^2 = \sigma_3 4\pi R_3^2$

Finalement : $\sigma_1 R_1^2 = -\,\sigma_2 R_2^2 = \sigma_3 R_3^2$

3) On relie la sphère S_2 au sol ($V = 0$-Figure 3).
   a. Calculons le champ et le potentiel en tout point de l'espace.

La sphère S_2 est reliée au sol, son potentiel devient nul et sa charge extérieure (en $r = R_2$) s'annule car celle-ci s'est écoulée au sol. En utilisant le tableau des données et le théorème de superposition sur le système formé de deux sphères chargées en surface $(S_1, Q_1,\ \sigma_1)$ et $(S_2, -\,Q_1, -\sigma_1)$:

	$r < R_1$	$R_1 < r < R_2$	$r > R_2$
$E(M)$	$E(M) = 0$	$E(M) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$	$E(M) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} - \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = 0$
$V(M)$	A	$V(M) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} + B$	C

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V \Longrightarrow -\frac{\partial V}{\partial r} = \begin{cases} 0 & r \leq R_1 \\ \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & R_1 \leq r \leq R_2 \\ 0 & r > R_2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow V = \begin{cases} A & r \leq R_1 \\ \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} + B & R_1 \leq r \leq R_2 \\ C & r > R_2 \end{cases}$$

Avec A, B, C et D des constantes à déterminer en utilisant la continuité du potentiel et que le potentiel à l'infini est nul.

- Détermination de C

$$V(r \longrightarrow \infty) = 0 \Longrightarrow C = 0$$

- Détermination de B

$$V(r = R_2^+) = V(r = R_2^-) \Longrightarrow \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + B = C = 0$$

$$\Longrightarrow B = -\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

- Détermination de A

$$V(r = R_1^+) = V(r = R_1^-) \Longrightarrow \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + B = A$$

$$\Longrightarrow A = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} - \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

$$\Longrightarrow V = \begin{cases} \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} - \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_2} & r \leq R_1 \\ \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} - \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_2} & R_1 \leq r \leq R_2 \\ 0 & r > R_2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow V = \begin{cases} \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}\right] & r \leq R_1 \\ \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{R_2}\right] & R_1 \leq r \leq R_2 \\ 0 & r > R_2 \end{cases}$$

b. Calculons l'énergie électrostatique :

Le potentiel de la sphère S_2 est nul. L'énergie électrostatique du condensateur s'écrit alors :

$$W = \frac{1}{2} Q_1 V_{S_1} \Longrightarrow W = \frac{1}{2} Q_1 \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right]$$

$$\Longrightarrow W = \frac{Q_1^2}{8\pi\varepsilon_0}\left[\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}\right]$$

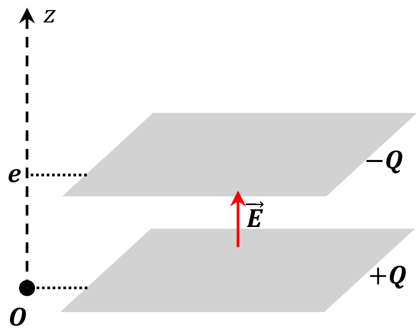
$$or\ Q_1 = \sigma_1 4\pi R_1^2 \Longrightarrow W = \frac{(4\pi)^2\,\sigma_1^2\,R_1^4}{8\pi\varepsilon_0}\left[\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}\right]$$

$$\Longrightarrow W = \frac{2\pi\,\sigma_1^2}{\varepsilon_0}\,\frac{R_1^3(R_2 - R_1)}{R_2}$$

Déduisons la capacité de ce condensateur sphérique :

$$C = \frac{Q_1}{V_{S_1}} \Longrightarrow C = \frac{Q_1}{\dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}\right]} \Longrightarrow C = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\left[\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}\right]} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

Exercice 2: condensateur plan.



Un condensateur plan placé dans l'air sec est constitué de deux armature métalliques de surface $\boldsymbol{S}$ et distantes de $\boldsymbol{e}$. On admettra que les deux armatures sont en influence totale et que les effets de bords sont négligeables. On impose au condensateur à une différence de potentiel $U = V_1 - V_2$ grâce à un générateur de tension continu. Soient Q la charge du condensateur et σ sa densité de charge surfacique.

On donne l'expression du vecteur champ électrostatique en tout point de l'espace :

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \vec{0} & si \quad z < 0 \\ +\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_z, & si \quad 0 < z < e \\ \vec{0} & si \quad z > e \end{cases}$$

1) Établir l'expression de la différence de potentiel U.

La différence de potentiel est donnée par :

$$U = V_1 - V_2 = \int_0^e \vec{E}(M) \cdot \overrightarrow{d\ell} = \int_0^e \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_z \cdot dz\vec{e}_z = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\int_0^e dz$$

$$U = V_1 - V_2 = \frac{\sigma e}{\varepsilon_0}$$

Et compte tenu de $\sigma = Q/S$, l'expression de U devient :

$$U = V_1 - V_2 = \frac{Qe}{\varepsilon_0 S}$$

2) En déduire l'expression de la capacité du condensateur ainsi formé.

La capacité d'un condensateur s'exprime par : $C = Q/U$
Ainsi, on aura : $C = \varepsilon_0 S/e$

3) Déterminer, en fonction de σ, e, ε_0 et S, l'expression de l'énergie électrostatique emmagasinée dans le condensateur. Justifier pourquoi cette énergie se situe dans l'espace interarmatures.

- **Méthode (1) :**

$$W_e = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2 S^2 e}{\varepsilon_0 S} = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2 S\, e}{\varepsilon_0}$$

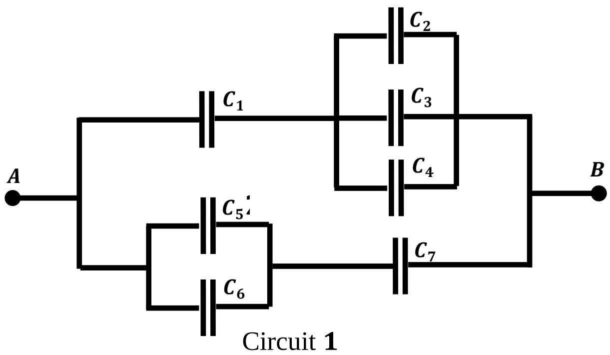
- **Méthode (2) :**

L'énergie emmagasinée dans le condensateur est aussi l'énergie électrostatique dans l'espace inter armature. On écrit :

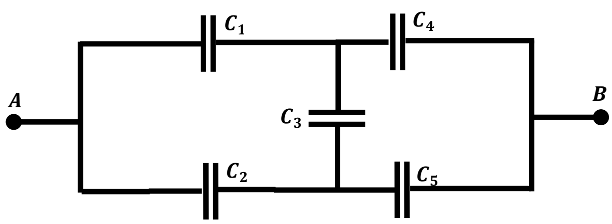
$$W_e = \iiint_{Esp\ Inter} \frac{\varepsilon_0 E^2(r)}{2} \mathrm{d}\mathcal{V} = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^e \left(\frac{Q}{\varepsilon_0 S}\right)^2 S dz = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2 S^2 e}{\varepsilon_0 S} = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2 S\, e}{\varepsilon_0}$$

Exercice 3 : la capacité équivalente.

1) Déterminons la capacité équivalente du groupement des deux circuits de la igure ci-dessous. Prendre. Le cas où tous les condensateurs ont la même capacité $C = 6\mu F$.



Circuit **1**



Circuit **2**

Circuit 1

$C_2//C_3//C_4 \Rightarrow C_{234} = C_2 + C_3 + C_4 = 3C$

$C_5//C_6 \Rightarrow C_{56} = C_5 + C_6 = 2C$

C_1 *et* C_{234} en série

$$\Rightarrow \frac{1}{C_{1234}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{234}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{3C} = \frac{4}{3C}$$

$$\Rightarrow C_{1234} = \frac{3C}{4}$$

C_{56} *et* C_7 en série

$$\Rightarrow \frac{1}{C_{567}} = \frac{1}{C_{56}} + \frac{1}{C_7} = \frac{1}{2C} + \frac{1}{C} = \frac{3}{2C}$$

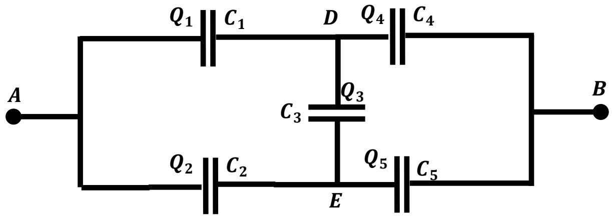
$$\Rightarrow C_{567} = \frac{2C}{3}$$

$C_{1234}//C_{567} \Rightarrow C_{éq} = C_{1234} + C_{567}$

$$\Rightarrow C_{éq} = \frac{3C}{4} + \frac{2C}{3}$$

$$\Rightarrow C_{éq} = \frac{17C}{12} = 8,5\mu F$$

Circuit 2



$Q = Q_1 + Q_2 = Q_4 + Q_5$

$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = C$

$$\Rightarrow Q_1 = Q_2 = \frac{Q}{2} \ et\ Q_4 = Q_5 = \frac{Q}{2}$$

$$U_{AB} = U_{AD} + U_{DE} + U_{EB} \Rightarrow U_{AB} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_3}{C_3} + \frac{Q_5}{C_5}$$

$$\Rightarrow U_{AB} = \frac{Q_1 + Q_3 + Q_5}{C}$$

$$U_{AB} = U_{AE} + U_{ED} + U_{DB} \Rightarrow U_{AB} = \frac{Q_2}{C_2} - \frac{Q_3}{C_3} + \frac{Q_4}{C_4}$$

$$\Rightarrow U_{AB} = \frac{Q_2 - Q_3 + Q_4}{C}$$

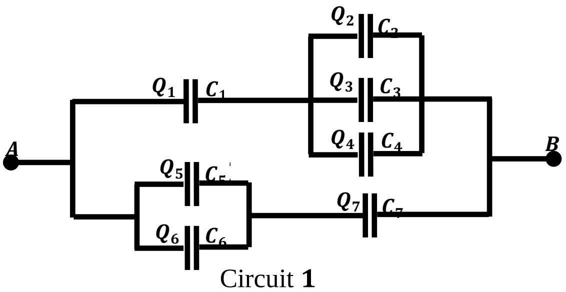
$\Rightarrow Q_2 - Q_3 + Q_4 = Q_1 + Q_3 + Q_5$

$\Rightarrow Q_3 = 0$

$$\Rightarrow U_{AB} = \frac{Q_2 - Q_3 + Q_4}{C} = \frac{Q_2 + Q_4}{C} = \frac{Q}{C}$$

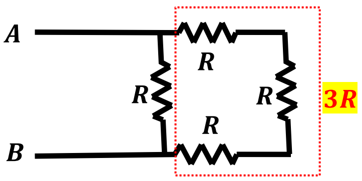
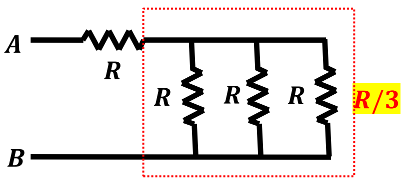
$$\Rightarrow C_{éq} = \frac{Q}{U_{AB}} = C$$

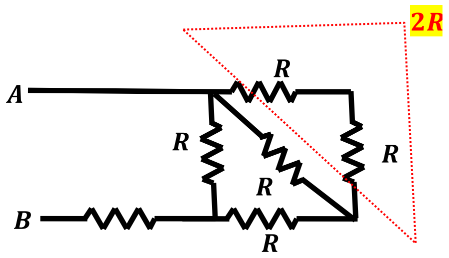
2) Trouver la charge de chaque condensateur du Circuit **1**, sachant que la tension $U_{AB} = 200V$.

 Circuit **1**	$Q_1 = \frac{3CU}{4}$; $Q_2 = Q_3 = Q_4 = \frac{Q_1}{3} = \frac{CU}{4}$; $Q_7 = \frac{2C\,U}{3}$ et $Q_5 = Q_6 = \frac{Q_7}{2} = \frac{C\,U}{3}$;

Exercice 4 : Calcul des résistances équivalentes

Toutes les résistances sont identiques de valeur R. Déterminer la résistance équivalente vue entre les bornes A et B pour les schémas ci-dessous.

	
Circuit 1	Circuit 2
$R_{éq_1} \equiv (R \parallel 3R)$ $R_{éq_1} = \frac{R\,3R}{R + 3R} = \frac{3R}{4}$	$R_{éq_1} \equiv \left(R\ série\ avec\ \frac{R}{3}\right)$ $R_{éq_1} = R + \frac{R}{3} = \frac{4R}{3}$



Circuit 3

$R_{éq_3} \equiv \{[(2R \parallel R)\ en\ série R] \parallel R\} en\ série\ R$

$R_{éq} \equiv (2R \parallel R) \Rightarrow R_{éq} = \dfrac{2R\ R}{2R+R} = \dfrac{2R}{3}$

$R'_{éq} \equiv \left(R_{éq}\ en\ série\ R\right) \Rightarrow R'_{éq} = \dfrac{2R}{3} + R = \dfrac{5R}{3}$

$R''_{éq} \equiv \left(R'_{éq} \parallel R\right) \Rightarrow R''_{éq} = \dfrac{\frac{5R}{3}\ R}{\frac{5R}{3} + R} = \dfrac{5R}{8}$

$R_{éq_3} \equiv \left(R''_{éq}\ en\ série\ R\right)$

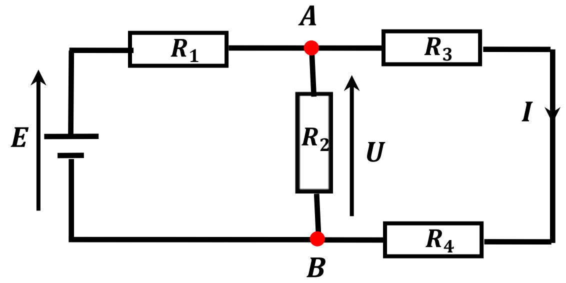
$\Rightarrow R_{éq_3} = R + \dfrac{5R}{8} = \dfrac{13\ R}{8}$

Exercice 5 : les lois de Kirchhoff.

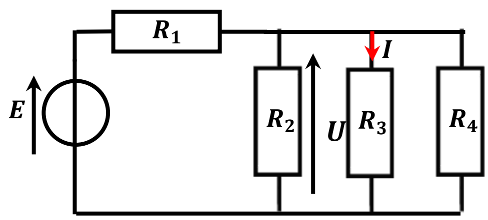
En faisant des associations de résistances et en appliquant les lois de Kirchhoff, déterminer pour le montages de la figure ci-dessous, l'intensité I qui traverse la résistance R_3 et la tension U aux bornes de la résistance R_2.

Application numérique pour :

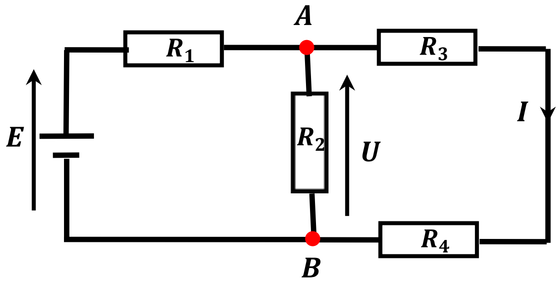
$$E = 6\ V\ ,\ R_1 = \ 100\ \Omega,\ R_2 = R_3 = R_4 = 50\ \Omega.$$

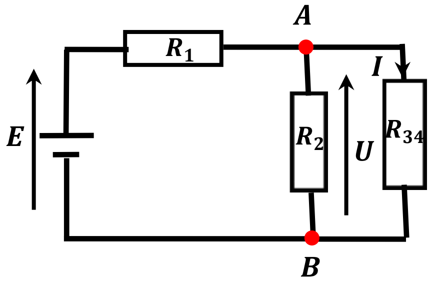


Montage **1**

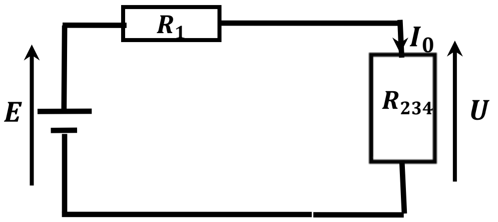


Montage **2**





$R_{34} = R_3 + R_4$



$R_{234} = \dfrac{R_{34}.R_2}{R_{34} + R_2} = \dfrac{(R_3 + R_4).R_2}{R_2 + R_3 + R_4}$

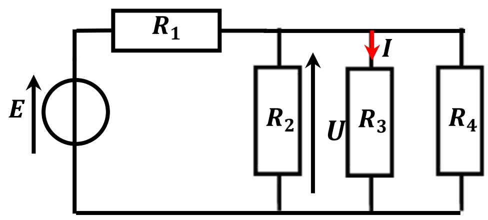
$E = (R_{234} + R_1)I_0 \Rightarrow I_0 = \dfrac{E}{R_{234} + R_1}$

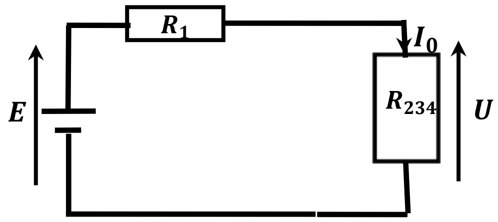
$U = R_{234}I_0 \Rightarrow U = \dfrac{E\ R_{234}}{R_{234} + R_1}$

$\Rightarrow U = \dfrac{E\ \frac{(R_3 + R_4).R_2}{R_2 + R_3 + R_4}}{\frac{(R_3 + R_4).R_2}{R_2 + R_3 + R_4} + R_1}$

$\Rightarrow U = \dfrac{E\ (R_3 + R_4).R_2}{(R_3 + R_4).R_2 + R_1(R_2 + R_3 + R_4)} = \dfrac{E}{4} = 1,5V$

$U = (R_3 + R_4)I \Rightarrow \mathrm{I} = \dfrac{U}{(R_3 + R_4)} = 1,5.10^{-2}A$





$$R_{234} = \frac{R_2R_3R_4}{R_2R_3 + R_2R_4 + R_3R_4}$$

$$U = R_{234}I_0 \Longrightarrow U = \frac{E\,R_{234}}{R_{234} + R_1}$$

$$\Longrightarrow U = \frac{E\,\dfrac{R_2R_3R_4}{R_2R_3 + R_2R_4 + R_3R_4}}{\dfrac{R_2R_3R_4}{R_2R_3 + R_2R_4 + R_3R_4} + R_1}$$

$$\Longrightarrow U = \frac{E\,R_2R_3R_4}{R_1R_2R_3 + R_1R_2R_4 + R_1R_3R_4 + R_2R_3R_4}$$

$$\Longrightarrow U == \frac{E}{7} = 0,86V$$

$$U = R_3I \Longrightarrow \mathrm{I} = \frac{U}{R_3} = 1,7.10^{-2}A$$