**Univérsité Ibn Zohr**
**Faculté des Sciences - Agadir**
**Département de Mathématiques**
**Année Univérsitaire 19-20**
**Filière: SMA & SMI (S2)**

## Examen blanc 2 d'Algèbre 3

### Exercice 1

On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 2. On considère les polynômes :

$$P_0 = X^2 - 2, P_1 = (X-1)(X+1), P_2 = (X-2)(X+1), P_3 = (X-1)(X+2).$$

1. Rappeler la définition de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Quelle est la dimension de cet espace ?
2. Montrer que $P_0$ est combinaison linéaire de $P_2$ et $P_3$.
3. Montrer que la famille $(P_1, P_2, P_3)$ est libre. Est-ce une base de $\mathbb{R}_2[X]$ ?

### Exercice 2

On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (x + y, -x - y, 0)$.

1. Montrer que $f$ est linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de $f$ (bases et dimensions).
3. L'application $f$ est-elle injective ? surjective ?
4. Soit
$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x - y = 0\}.$$
Montrer que $E$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$ et que $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Ker}(f) \oplus E$.

### Exercice 3

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vérifier que $A^2 = A + 2I_2$, où $I_2$ dénote la matrice identité d'ordre 2.