Univérsité Ibn Zohr
Faculté des Sciences - Agadir
Département de Mathématiques
Année Univérsitaire 19-20
Filière: SMA & SMI (S2)

Examen blanc 3 d'Algèbre 3

Exercice 1
Soit E le sous-espace vectoril de $\mathbb{R}^3$ défini par: $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y - z = 0\}$ et soient les vecteurs

$$a_1 = (1, 2, 0), \quad a_2 = (0, 3, 1) \; et \; a_3 = (1, -1, -1).$$

1. Montrer que $e_1 = (-2, 1, 0)$ et $e_2 = (1, 0, 1)$ forment une base de E et déduire $\dim E$.
2. On pose $F = \{a_1, a_2, a_3\}$.
   a) La famille F est-elle libre? liée? justifier.
   b) Former l'équation cartésienne de $G = \mathrm{vect}(F)$.
3. Déterminer le sous-espace vectoriel $E \cap G$ et en donner une base.

Exercice 2
Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par:

$$\begin{aligned} f: \; & \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow E \\ & P \longmapsto (2X+1)P + (1-X^2)P'. \end{aligned}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
3. Montrer que f est un automorphisme.
4. Soit $\mathcal{B} = (P_0 = 1, P_1 = X - 1, P_2 = (x-1)^2)$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
5. Déterminer les coordonnées de $f(P_0), f(P_1)$, et $f(P_2)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 3
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On pose

$$u = e_1 + 2e_2 + 2e_2 \text{ et } v = e_2 + e_3.$$

Montrer que la famille $\{u, v\}$ est libre et completer celle-ci en une base de E.