Université Ibn Zohr
Faculté des Sciences - Agadir
Département de Mathématiques
Année Universitaire 19-20
Filière: SMA & SMI (S2)

Corrigé de l'Examen blanc 2 d'Algèbre 3

Exercice 1
Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie.

1. Donner la définition d'une famille finie libre de vecteurs de E.
2. Donner la définition du rang d'une famille finie de vecteurs de E.
3. Montrer qu'une famille finie de vecteurs de E contenant le vecteur nul n'est pas libre.

Solution 1

1. Une famille $F=\{u_1,\dots,u_p\}$ de E est dite libre, lorsque
$$\forall \lambda_1,\dots,\lambda_p\in\mathbb{R}(\text{car } E \text{ } est \text{ réel }),\lambda_1u_1+\ldots+\lambda_pu_p=0_E \implies \lambda_1=\ldots=\lambda_p=0.$$
2. Soit $F=\{u_1,\dots,u_p\}$ une famille de p vecteurs de E. Le rang de F est la dimension de $\mathrm{vect}(\{u_1,\dots,u_p\})$.
3. Soit $F=\{u_1,\dots,u_p,0_E\}$ une famille de E contenant un vecteur nul. On a $0u_1+\ldots+0u_p+2\times 0_E=0_E$ et $2\neq 0$ alors la famille $F=\{u_1,\dots,u_p,0_E\}$ n'est pas libre c-à-d liée.

Exercice 2
On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 2. On considère les polynômes :
$$P_0=X^2-2, P_1=(X-1)(X+1), P_2=(X-2)(X+1), P_3=(X-1)(X+2).$$

1. Rappeler la définition de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Quelle est la dimension de cet espace ?
2. Montrer que P_0 est combinaison linéaire de P_2 et P_3.
3. Montrer que la famille (P_1,P_2,P_3) est libre. Est-ce une base de $\mathbb{R}_2[X]$?

Solution 2

1. La base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est $(1,X,X^2)$.
La dimension de $\mathbb{R}_2[X]$ est 3.
2. On a
$$\begin{cases} P_0=X^2-2\\ P_2=(X-2)(X+1)=X^2-X-2\\ P_3=(X-1)(X+2)=X^2+X-2\end{cases} \implies P_2+P_3=2P_0$$
On alors $P_0=\frac{1}{2}P_2+\frac{1}{2}P_3$.
3. Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que
$$aP_1+bP_2+cP_3=0_{\mathbb{R}_2[X]} \implies a(X-1)(X+1)+b(X-2)(X+1)+c(X-1)(X+2)=0$$
$$\implies \begin{cases} -2b=0 \text{ pour } X=1\\ 3a=0 \text{ pour } X=-2\\ -2c=0 \text{ pour } X=-1\end{cases}, \implies \begin{cases} a=0\\ b=0\\ c=0\end{cases}$$
Par suite, la famille (P_1,P_2,P_3) est libre.
Autrement
Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que
$$aP_1+bP_2+cP_3=0_{\mathbb{R}_2[X]} \implies a(X-1)(X+1)+b(X-2)(X+1)+c(X-1)(X+2)=0$$
$$\implies (a+b+c)X^2+(c-b)X-a-2b-2c=0 \implies \begin{cases} a+b+c=0\\ c-b=0\\ -a-2b-2c=0\end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} a = -b - c \\ b = c \\ -2c = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Par suite, la famille (P_1, P_2, P_3) est libre.
Comme $\text{card}(P_1, P_2, P_3) = \dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$, alors la famille (P_1, P_2, P_3) est une base $\mathbb{R}_2[X]$

4.

Exercice 3
On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (x + y, -x - y, 0)$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de f (bases et dimensions).
3. L'application f est-elle injective ? surjective ?
4. Soit
$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x - y = 0\}.$$
Montrer que E est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$ et que $\mathbb{R}^2 = \text{Ker}(f) \oplus E$.

Solution 3

1. Soient $u = (x, y), v = (x', y') \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
$$\begin{aligned} f(\lambda u + v) &= f((\lambda x + x', \lambda y + y')) \\ &= (\lambda x + x' + \lambda y + y', -(\lambda x + x') - (\lambda y + y'), 0) \\ &= (\lambda(x + y) + (x' + y'), -\lambda(x + y) - (x' + y'), 0) \\ &= \lambda(x + y, -x - y, 0) + (x' + y', -x' - y', 0) \\ &= \lambda f(u) + f(v). \end{aligned}$$
Donc, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$.

2. • Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
$$(x, y) \in \text{Ker}(f) \iff f((x, y)) = (0, 0, 0) \iff \begin{cases} x + y = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = -y \\ x = -y \end{cases} \iff (x, y) = (-y, y) = y(-1, 1).$$
Donc, $\text{Ker}(f) = \text{vect}(u)$, avec $u = (-1, 1)$. On en déduit $\{u\}$ est génératrice de $\text{Ker}(f)$. Par suite, la famille $\{u\}$ est libre (car $u \neq (0, 0)$) et finalement la famille $\{u\}$ est une base de $\text{Ker}(f)$, et $\dim(\text{Ker}(f)) = 1$.
   • Notons $(e_1 = (1, 0,), e_2 = (0, 1))$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Donc, $\text{Im}(f) = \text{vect}(f(e_1), f(e_2))$. On a
$$\begin{cases} u_1 = f(e_1) = (1, -1, 0) \\ u_2 = f(e_2) = (1, -1, 0), \end{cases} \quad \text{alors } \text{Im}(f) = \text{vect}(u_1, u_2).$$
On a $u_2 = u_1 \implies \text{Im}(f) = \text{vect}(u_1)$. Comme $u_1 \neq 0$ alors $\{u_1\}$ est une base de $\text{Im}(f)$, et $\dim(\text{Im}(f)) = 1$.
   • On a $\{u\}$ est une base de $\text{Ker}(f)$, alors $\dim(\text{Ker}(f)) = 1$. D'après le théorème du rang
$$\dim(\ker(f) + \dim(\text{Im}(f) = \dim(\mathbb{R}^3) \iff 1 + \dim(\text{Im}(f)) = 3 \iff \text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f)) = 2.$$
   • On a $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(u) \neq \{(0, 0)\}$ donc f n'est pas injective.
   • On a $\dim(\text{Im}(f)) = 1 \neq 3$ donc $\text{Im}(f)) \neq \mathbb{R}^3$, ainsi f n'est pas surjective.

3. • Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$(x,y) \in E \iff x - y = 0$$
$$\iff y = x \iff (x,y) = (x,x) = x(1,1).$$

Soit $a = (1,1)$, donc, $E = \text{vect}(a)$ ce qui montre que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
Autre méthode : Montrons que $(0,0) \in E$.
On a $0 - 0 = 0 \implies (0,0) \in E$ Soient $X_1 = (x_1, y_1), X_2 = (x_2, y_2) \in E$, et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{cases} x_1 - y_1 = 0 \\ x_2 - y_2 = 0 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \lambda X_1 + X_2 = (\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2).$$

On a

$$\lambda(x_1 - y_1) + x_2 - y_2 = 0 \implies (\lambda x_1 + x_2) - (\lambda y_1 + y_2) = 0$$

Cela implique que $\lambda X_1 + X_2 \in E$. Et finalement E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

• On a $E = \text{vect}(a)$ et $a \neq 0$ alors $\{a\}$ est une base de E.
On a $\dim(\mathbb{R}^2) = 2 < +\infty$, $\{u\}$ est une base de $\text{Ker}(f)$ et $\{a\}$ est une base de E. Pour montrer que $E \oplus \text{Ker}(f) = \mathbb{R}^2$, il suffit de voir que la famille (a, u) est une base de $\mathbb{R}^2$. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\alpha a + \beta u = (0,0) \implies \begin{cases} \alpha - \beta = 0 \alpha + \beta = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = \beta \\ 2\alpha = 0 \end{cases}, \implies \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

Par suite, la famille (a, u) est libre. Comme $\text{card}\{(a, u)\} = \dim(\mathbb{R}^2) = 2$, alors la famille (a, u) est une base $\mathbb{R}^2$. Finalement $E \oplus \text{Ker}(f) = \mathbb{R}^2$.

Exercice 4
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vérifier que $A^2 = A + 2I_2$, où I_2 dénote la matrice identité d'ordre 2.

Solution 4

$$\text{On a} A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$
$$\text{puis} \quad A + 2I_2, = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $A^2 = A + 2I_2$.