Correction d'Examen d'Analyse 2 – Intégration – SMA

Exercice 1 (Questions du cours 3 pts).
Voir le polycopie du cours.

Exercice 2 (4pts).
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que, pour tout $x \in [a,b]$, on a $f(a+b-x) = f(x)$.

(1) Montrer que : (2 pts)

$$\int_a^b x f(x)dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx.$$

Réponse :

Effectuant le changement de variables $u = a+b-x$, on trouve donc

$$\begin{aligned}\int_a^b x f(x)dx &= -\int_b^a (a+b-u)f(a+b-u)du \\ &= \int_a^b (a+b-u)f(u)du \\ &= (a+b)\int_a^b f(x)dx - \int_a^b x f(x)dx.\end{aligned}$$

Ceci donne le résultat demandé.

(2) Déduire la valeur de : (2 pts)

$$\mathrm{I} = \int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx.$$

Réponse :

Posons $a=0$, $b=\pi$ et $f(x) = \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$. Alors $f(\pi - x) = f(x)$ et donc, d'après le résultat précédent, on a

$$\mathrm{I} = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx.$$

Effectuant le changement de variables $u = \cos x$, on déduit

$$\begin{aligned}\mathrm{I} &= \frac{\pi}{2}\int_1^{-1}\frac{-du}{1+u^2} = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\frac{du}{1+u^2} \\ &= \frac{\pi}{2}\big(\arctan(1) - \arctan(-1)\big) = \frac{\pi^2}{4}.\end{aligned}$$

Exercice 3 (5pts).

(1) Montrer la convergence de l'intégrale : (2 pts)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt.$$

Réponse :

On va justifier, pour tout $a > 0$, la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2} dt$. D'abord, la fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{a^2+t^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$. Au voisinage de 0, on a l'équivalence

$$\frac{\ln t}{a^2+t^2} \sim_0 \frac{\ln t}{a^2},$$

et on sait que $t \mapsto \ln t$ est intégrable au voisinage de 0.
De même, au voisinage de $+\infty$, on a la fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{a^2+t^2}$ est positive et est intégrable au voisinage de $+\infty$ car

$$\lim_{t\to+\infty} t^{3/2} \times \frac{\ln t}{a^2+t^2} = 0.$$

On en déduit la convergence de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2}.$$

---

(2) Avec le changement de variables $u = 1/t$, montrer que (1 pt)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt = 0.$$

Réponse :

Avec le changement de variables $u = 1/t$ on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt = -\int_0^{+\infty} \frac{-\ln u}{1+\frac{1}{u^2}} \frac{-1}{u^2} du = -\int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{1+u^2} du.$$

On en déduit que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt = 0.$$

---

(3) Soit $a > 0$, calculer (2 pts)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2} dt.$$

Réponse :

Pour calculer cette intégrale, on fait le changement de variables $t = au$. On obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2} dt &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln au}{a^2+a^2u^2} a du \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\ln a}{a(1+u^2)} du + \int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{a(1+u^2)} du \\
&= \frac{\ln a}{a} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2} du + \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{1+u^2} du.
\end{aligned}$$

Utilisant le calcul précédent et le fait qu'une primitive de $\frac{1}{1+u^2}$ est $\arctan u$, on trouve finalement

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2} dt = \frac{\pi \ln a}{2a}.$$

Exercice 4 (5pts).

Voir Exercice 6 TD 1.

Exercice 5 (3pts).

Résoudre l'équation différentielle suivante : (3 pts)

$$(x+1)y' + y = 1 + \ln(x+1), \; y(0) = 1 \text{ sur }]-1, +\infty[.$$

Réponse :

On commence par résoudre l'équation homogène $(1+x)y' + y = 0$, dont la solution générale est donnée par $y_0(x) = \frac{\lambda}{1+x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière par la méthode de variation de la constante, en posant $y_p(x) = \frac{\lambda(x)}{1+x}$, de sorte que

$$y_p'(x) = \frac{\lambda'(x)}{1+x} - \frac{\lambda(x)}{(1+x)^2}.$$

En introduisant ceci dans l'équation différentielle, on trouve

$$(1+x)\left(\frac{\lambda'(x)}{1+x} - \frac{\lambda(x)}{(1+x)^2}\right) + \frac{\lambda(x)}{1+x} = 1 + \ln(1+x)$$

ce qui donne après simplifications

$$\lambda'(x) = 1 + \ln(1+x).$$

Une primitive est donnée par $\lambda(x) = (1+x)\ln(1+x)$, et la solution générale de l'équation avec second membre est donc donnée par

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x) = \frac{\lambda}{1+x} + \ln(1+x),$$

telle que $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifie

$$y(0) = 1 \iff \lambda = 1.$$