Correction d'Examen d'Analyse 2 – Intégration – SMA

Exercice 1 (8 pts).

(1) (a) On a f est une fonction en escalier sur $[a,b]$. (2 pts)
Alors il existe $\sigma = (x_i)_{0\leq i\leq n}$ une subdivision de $[a,b]$ et $(\lambda_i)_{0\leq i\leq n-1}$ tels que $f = \lambda_i$ sur $]x_i, x_{i+1}[$.
Puisque $|f| = |\lambda_i|$ sur $]x_i, x_{i+1}[$ donc $|f|$ est une fonction en escalier sur $[a,b]$.

(b) On a : (2 pts)

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| &= \left|\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i(x_i - x_{i-1})\right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n-1}|\lambda_i|(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b \left|f(x)\right| dx.\end{aligned}$$

(2) Soient $x > 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et F_α la fonction définie par :

$$F_\alpha(x) = \int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\,dt.$$

(a) On a (2 pts)

$$F_\alpha(x) = \begin{cases}[\ln t]_1^x & ; \alpha = 1, \\ \left[\frac{1}{1-\alpha}t^{1-\alpha}\right]_1^x & ; \alpha \neq 1.\end{cases}$$

(b) Discutant suivant le paramètre α on a : (2 pts)

– Si $\alpha = 1$; $F_\alpha(x) = \ln x - 1$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} F_\alpha(x) = +\infty$.

– Si $\alpha \neq 1$; $F_\alpha(x) = \frac{1}{1-\alpha}\left(x^{1-\alpha} - 1\right)$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} F_\alpha(x) = \begin{cases} +\infty & ; \quad 1-\alpha > 0 \\ \frac{-1}{1-\alpha} & ; \quad 1-\alpha < 0\end{cases}$.

Donc on peut conclure que :

$$\lim_{x\to+\infty} F_\alpha(x) \text{ existe si et seulement si } \alpha > 1.$$

Exercice 2 (8pts).

(1) La suite $(u_n)_{n>1}$ est une somme de Riemann car (2 pts)

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\frac{k}{n}}{\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

avec $f : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ une fonction continue, donc

$$\lim u_n = \frac{1}{1-0}\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \left[\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 = \sqrt{2} - 1.$$

(2) On prend $x = \tan t$ on a (3 pts)

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{\cos(t)\sin(t)} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan(t)} \frac{dt}{\cos^2(t)} = \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{x} dx = \ln 3.$$

(3) On pose (3 pts)

$$\omega(x) = \frac{\tan x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$$

on a $\omega(-x) = \omega(x)$ alors d'après les règles de Bioche on pose

$$t = \cos x \iff dt = -\sin x\, dx.$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\int \frac{\tan x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\sin x}{\cos x(1+\cos x)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{-1}{t(1+t)}\,\mathrm{d}t \\
&= \int \left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t \\
&= \ln\left|\frac{1+t}{t}\right| + \mathrm{C} \\
&= \ln\left|\frac{1+\cos x}{\cos x}\right| + \mathrm{C}
\end{aligned}$$

Exercice 3 (4 pts).

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\mathrm{F}(x) = \int_1^x \frac{\ln\left(1+t^2\right)}{t^2} dt.$$

(1) On a : (2 pts)

$$\begin{aligned}
\int_1^x \frac{\ln\left(1+t^2\right)}{t^2} dt &= \left[-\frac{\ln\left(1+t^2\right)}{t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{2}{\left(1+t^2\right)} dt \\
&= \left[-\frac{\ln\left(1+t^2\right)}{t} + 2\arctan(t)\right]_1^x \\
&= -\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x} + 2\arctan(x) + \ln 2 - \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\mathrm{F}(x) = -\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x} + 2\arctan(x) + \ln 2 - \frac{\pi}{2}.$$

(2) On a (2 pts)

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{F}(x) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x} + 2\arctan(x) + \ln 2 - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \ln 2.$$