Université Ibn Zohr
Faculté des sciences, Agadir
Département de Mathématiques

Année Universitaire : 2018 - 2019
Prof. F. MARAGH
Filière : SMA

Examen d'Analyse 2 - Session de Rattrapage

Durée : 1h30min

Barème

Exercice 1 (***Questions de cours*** sur 3 pts).

Soient $f,\ g :]a,b] \to \mathbb{R}^+$ deux fonctions localement intégrables tels que $f \sim g$ en a^+.

Montrer que : (3 pts)

$$\int_a^b f(t)\,dt \text{ et } \int_a^b g(t)\,dt \text{ sont de même nature.}$$

Indication : $f \sim g$ en $a^+ \iff$ il existe une fonction θ dont $\lim\limits_{t\to a^+} \theta(t) = 0$ tel que $f(t) = (1+\theta(t))g(t)$ au voisinage à droite de a.

Exercice 2 (6 pts).

(1) Calculer la limite de la suite (u_n) définie par : (3 pts)

$$u_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)}.$$

(2) Discuter suivant la valeur du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergence de l'intégrale : (3 pts)

$$I_\alpha = \int_1^{+\infty} \frac{t^\alpha + t^{2-\alpha}}{t^3+\sqrt{t}}\,dt.$$

Exercice 3 (6 pts).

Soient a, ε et X des réels strictement positifs, on définit les deux intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+a^2}\,dt \quad \text{et} \quad I_{\varepsilon,X} = \int_\varepsilon^X \frac{\ln(t)}{t^2+a^2}\,dt.$$

(1) Montrer que I est une intégrale convergente. (2 pts)

(2) A l'aide du changement de variable $t = \frac{a^2}{x}$, montrer que : (2 pts)

$$I_{\varepsilon,X} = -\frac{2\ln(a)}{a}\arctan\left(\frac{a}{X}\right) + \frac{2\ln(a)}{a}\arctan\left(\frac{a}{\varepsilon}\right) + \int_{\frac{a^2}{\varepsilon}}^{\frac{a^2}{X}} \frac{\ln(t)}{t^2+a^2}\,dt.$$

(3) Déduire la valeur de I. (2 pts)

Exercice 4 (5 pts).

(1) Calculer l'intégrale suivante : (2 pts)

$$\int \frac{x^2-1}{x\,(1+x^2)}\,dx.$$

Indication: On pourra chercher a, b et c réels tels que $\dfrac{x^2-1}{x\,(1+x^2)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{bx+c}{x^2+1}$.

(2) Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle : (3 pts)

$$\left(1+x^2\right)y' + \frac{x^2-1}{x}y = -2.$$

Fin