Université Ibn Zohr
Faculté des sciences, Agadir
Département de Mathématiques

Année Universitaire : 2018 - 2019
Prof. F. MARAGH
Filière : SMA

Correction d'Examen d'Analyse 2 - Session de Rattrapage

Durée : 1h30min

Barème

Exercice 1 (***Questions de cours*** sur 3 pts)**.**

Soient $f,\ g :]a,b] \to \mathbb{R}^+$ deux fonctions localement intégrables tels que $f \sim g$ en a^+.
Montrer que : (3 pts)

$$\int_a^b f(t)\,dt \text{ et } \int_a^b g(t)\,dt \text{ sont de même nature.}$$

Indication : $f \sim g$ en $a^+ \iff$ il existe une fonction θ dont $\lim\limits_{t\to a^+} \theta(t) = 0$ tel que $f(t) = (1+\theta(t))g(t)$ au voisinage à droite de a.

Réponse : $f \sim g$ en a^+, il existe θ une fonction dont $\lim\limits_{t\to a^+} \theta(t) = 0$ tel que

$$f(t) = (1+\theta(t))g(t)$$

au voisinage à droite de a.

— Donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall t \in]a,b]\,; 0 < t-a < \eta \implies |\theta(t)| < \varepsilon.$$

Pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\exists \eta_0 > 0$ tel que :

$$a < t < a+\eta_0 \implies \frac{1}{2}g(t) < f(t) < \frac{3}{2}g(t).$$

Soit $\eta_1 = \inf\{\eta_0; b-a\}$ (Ou prendre η_0 tel que $]a, a+\eta_0] \subset]a,b]$), alors on peut conclure que :

— $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge $\implies \displaystyle\int_a^{a+\eta_1} f(t)dt$ converge $\implies \displaystyle\frac{1}{2}\int_a^{a+\eta_1} g(t)dt$ converge $\implies \displaystyle\int_a^b g(t)dt$ converge.

— $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ diverge $\implies \displaystyle\int_a^{a+\eta_1} f(t)dt$ diverge $\implies \displaystyle\frac{3}{2}\int_a^{a+\eta_1} g(t)dt$ diverge $\implies \displaystyle\int_a^b g(t)dt$ diverge.

Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature.

Exercice 2 (6 pts)**.**

(1) Calculer la limite de la suite (u_n) définie par : (3 pts)

$$u_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)}.$$

Réponse : On a :

$$u_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)} = \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)\right).$$

$\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)$ est une somme de Riemann pour la fonction continue sur [0,1] définie par $f(x) = \ln(1+x^2)$ qui converge vers $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^2)dx$. Par composition des limites, (u_n) converge vers :

$$\exp\left(\int_0^1 \ln(1+x^2)dx\right) = \exp\left(\ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}\right) = 2e^{\frac{\pi-4}{2}}.$$

— L'intégrale se calcule à l'aide d'une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln(1+x^2)dx &= \left[x\ln(1+x^2)\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx\\ &= \ln(2) - 2\int_0^1 \left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx\\ &= \ln(2) - 2\left[x-\arctan x\right]_0^1 = \ln(2)-2+\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

(2) Discuter suivant la valeur du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergence de l'intégrale : (3 pts)

$$I_\alpha = \int_1^{+\infty} \frac{t^\alpha + t^{2-\alpha}}{t^3+\sqrt{t}}dt.$$

Réponse : Il y a problème en $+\infty$, sur l'intervalle $[1,+\infty[$, on a $t \mapsto \dfrac{t^\alpha + t^{2-\alpha}}{t^3+\sqrt{t}}$ a signe constante (positive) et on a :

— $t^3+\sqrt{t} \sim t^3$.

— Si $\alpha \leq 2-\alpha \Leftrightarrow \alpha \leq 1$, alors $t^\alpha + t^{2-\alpha} \sim t^{2-\alpha}$, donc

$$\frac{t^\alpha + t^{2-\alpha}}{t^3+\sqrt{t}} \sim \frac{1}{t^{\alpha+1}}.$$

I_α converge si et seulement si $\alpha+1>1 \Leftrightarrow \alpha>0$, donc $\alpha \in]0,1]$.

— Si $\alpha \geq 2-\alpha \Leftrightarrow \alpha \geq 1$, alors $t^\alpha + t^{2-\alpha} \sim t^{\alpha}$, donc

$$\frac{t^\alpha + t^{2-\alpha}}{t^3+\sqrt{t}} \sim \frac{1}{t^{3-\alpha}}.$$

I_α converge si et seulement si $3-\alpha>1 \Leftrightarrow \alpha<2$, donc $\alpha \in [1,2[$.

Finalement : l'intégrale I_α converge si et seulement si $\alpha \in]0,1] \cup [1,2[=]0,2[$.

Exercice 3 (6 pts).

Soient a, ε et $X>0$ on définit les deux intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+a^2}dt \text{ et } I_{\varepsilon,X} = \int_\varepsilon^X \frac{\ln(t)}{t^2+a^2}dt.$$

(1) Montrer que I est une intégrale convergente. (2 pts)

Réponse : Il y a deux problèmes un en 0 et un en $+\infty$.

— En 0 on a : sur l'intervalle $]0,1]$, on a $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^2+a^2}$ a signe constante (négative) et on a :

$$\lim_{t\to 0^+} t^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(t)}{t^2+a^2} = 0$$

Donc $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2+a^2}dt$ converge d'après les règles de Riemann car $\frac{1}{2}<1$.

— En $+\infty$ on a : sur l'intervalle $[1,+\infty[$, on a $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^2+a^2}$ a signe constante (positive) et on a :

$$\lim_{t\to 0^+} t^{\frac{3}{2}} \frac{\ln(t)}{t^2+a^2} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln(t)}{t^{\frac{1}{2}}\left(1+t^{-2}a^2\right)} = 0$$

Donc $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+a^2}dt$ converge d'après les règles de Riemann car $\frac{3}{2}>1$. D'où I est une intégrale convergente.

(2) A l'aide du changement de variable $t=\frac{a^2}{x}$, montrer que : (2 pts)

$$I_{\varepsilon,X} = -\frac{2\ln(a)}{a}\arctan\left(\frac{a}{X}\right) + \frac{2\ln(a)}{a}\arctan\left(\frac{a}{\varepsilon}\right) + \int_{\frac{a^2}{\varepsilon}}^{\frac{a^2}{X}} \frac{\ln(t)}{t^2+a^2}dt.$$

Réponse : On a $dt = -\frac{a^2}{x^2}dx$ et $\frac{\ln(t)}{t^2+a^2} = \frac{\ln\left(\frac{a^2}{x}\right)}{\frac{a^4}{x^2}+a^2}$

$$\begin{aligned}
I_{\varepsilon,X} &= \int_{\varepsilon}^{X} \frac{\ln(t)}{t^2+a^2}dt = \int_{\frac{a^2}{\varepsilon}}^{\frac{a^2}{X}} \frac{\ln\left(\frac{a^2}{x}\right)}{\frac{a^4}{x^2}+a^2}\left(-\frac{a^2}{x^2}\right)dx \\
&= \int_{\frac{a^2}{\varepsilon}}^{\frac{a^2}{X}} \frac{2\ln(a)-\ln(x)}{x^2+a^2}(-1)\,dx \\
&= -\int_{\frac{a^2}{\varepsilon}}^{\frac{a^2}{X}} \frac{2\ln(a)}{x^2+a^2}dx + \int_{\frac{a^2}{\varepsilon}}^{\frac{a^2}{X}} \frac{\ln(x)}{x^2+a^2}dx \\
&= -\frac{2\ln(a)}{a}\int_{\frac{a^2}{\varepsilon}}^{\frac{a^2}{X}} \frac{\frac{1}{a}}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}dx + \int_{\frac{a^2}{\varepsilon}}^{\frac{a^2}{X}} \frac{\ln(x)}{x^2+a^2}dx \\
&= -\frac{2\ln(a)}{a}\int_{\frac{a}{\varepsilon}}^{\frac{a}{X}} \frac{1}{t^2+1}dt + \int_{\frac{a^2}{\varepsilon}}^{\frac{a^2}{X}} \frac{\ln(t)}{t^2+a^2}dt \\
&= -\frac{2\ln(a)}{a}\arctan\left(\frac{a}{X}\right) + \frac{2\ln(a)}{a}\arctan\left(\frac{a}{\varepsilon}\right) + \int_{\frac{a^2}{\varepsilon}}^{\frac{a^2}{X}} \frac{\ln(t)}{t^2+a^2}dt.
\end{aligned}$$

(3) Déduire la valeur de I. (2 pts)

Réponse : On a $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \frac{a^2}{\varepsilon} = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{a^2}{X} = 0$ alors

$$\lim_{\substack{X\to+\infty\\ \varepsilon\to 0^+}} \int_{\frac{a^2}{\varepsilon}}^{\frac{a^2}{x}} \frac{\ln(x)}{a^2+x^2}dx = \int_{+\infty}^{0} \frac{\ln(x)}{a^2+x^2}dx = -I$$

et

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \arctan\left(\frac{a}{\varepsilon}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ et } \lim_{X\to+\infty} \arctan\left(\frac{a}{x}\right) = \arctan(0) = 0.$$

En faisant tendre ε vers 0 et X vers $+\infty$ dans la relation ci-dessous on obtient :

$$I = \frac{\pi}{2} \times \frac{2\times\ln(a)}{a} - I$$

D'où

$$I = \frac{\pi\ln(a)}{2a}.$$

Exercice 4 (5 pts)**.**

(1) Calculer l'intégrale suivante : (2 pts)

$$\int \frac{x^2-1}{x(1+x^2)}dx.$$

Indication : On pourra chercher a, b et c réels tels que $\frac{x^2-1}{x(1+x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$.

Réponse : On a

$$\frac{x^2-1}{x(1+x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1} = \frac{(a+b)x^2+cx+a}{x(1+x^2)}$$

Par identification des constantes on a :

$$\begin{cases} a=-1 \\ a+b=1 \\ c=0 \end{cases} \implies \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \\ c=0 \end{cases}$$

Donc

$$\frac{x^2-1}{x(1+x^2)} = \frac{-1}{x} + \frac{2x}{x^2+1}$$

Alors

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2-1}{x\left(1+x^2\right)}dx &= \int\left(\frac{-1}{x}+\frac{2x}{x^2+1}\right)dx\\ &= \ln\left(x^2+1\right)-\ln|x|+c\\ &= -\ln\left(\frac{|x|}{x^2+1}\right)+c,\end{aligned}$$

avec c une constante réel.

(2) Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle : <u>(3 pts)</u>

$$\left(1+x^2\right)y'+\frac{x^2-1}{x}y=-2.$$

Réponse : L'équation différentielle linéaire du premier ordre (SSM) sans second membre est :

$$\left(1+x^2\right)y'+\frac{x^2-1}{x}y=0 \iff y'+\frac{x^2-1}{x\left(1+x^2\right)}y=0$$

— La solution $y_0$de l'équation SSM est sous la forme :

$$y_0(x)=Ke^{-\int\frac{x^2-1}{x\left(1+x^2\right)}dx}=K\frac{x}{x^2+1},\text{ avec } K\in\mathbb{R}.$$

— La méthode de la variation de la constante pour trouver y_p une solution particulière de l'équation, on a :

$$y_p(x)=K\left(x\right)\frac{x}{x^2+1} \implies K'\left(x\right)\frac{x}{x^2+1}=\frac{-2}{x^2+1} \implies K(x)=-2\ln(x)+C.$$

Donc

$$y_p(x)=\frac{-2x\ln x}{x^2+1}\text{ est une solution particulière.}$$

— D'où la solution générale $y=y_0+y_p$ de l'équation différentielle linéaire du premier ordre est :

$$y(x)=\frac{x}{x^2+1}\left(K-2\ln x\right),\text{ avec } K\in\mathbb{R}.$$

Fin