Examen d'Analyse 2 – Intégration – SMA

Exercice 1 (6 points)**.**

(1) Donner la définition d'une fonction Riemann-intégrable sur $[a,b]$. (2 pts)

(2) Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ une fonction définie par :

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\in\mathbb{Q}\cap[0,1],\\ 0 & \text{sinon}.\end{cases}$$

Montrer que f n'est pas Riemann-intégrable. (2 pts)

(3) Calculer la limite de la suite de terme général : (2 pts)

$$u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right);\ n\geq 1.$$

Exercice 2 (6 points)**.**

Soient x un réel, n un entier naturel non nul et $\mathrm{E}(x)$ la partie entière de x.

(1) Montrer que la fonction (3 pts)

$$f:x\mapsto \mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right)$$

est en escalier sur $\left[\frac{1}{n},1\right]$.

(2) Montrer que $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1}f(x)dx=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$. (3 pts)

Exercice 3 (8 points)**.**

(1) Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle \mathrm{I}=\int_0^1(t+1)\cosh(t)dt$. (2 pts)

(b) $\displaystyle \mathrm{J}=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sin t}$. (**Indication :** *changement de variable* $x=\tan(t/2)$.) (2 pts)

(2) Calculer les primitives des fonctions suivantes :

(a) $\displaystyle f(x)=\frac{1}{x^3-x}$. (2 pts)

(b) $\displaystyle g(x)=\frac{1}{1-\sin x}$. (2 pts)