Correction d'Examen d'Analyse 2 – Intégration – SMA

Exercice 1 (Questions du cours 3 pts).

Voir le polycopie du cours.

Exercice 2 (3 pts).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^n}.$$

(1) Exprimons I_{n+1} en fonction de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En effet : (2 pts)

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{\left(x^2+1\right)^n} dx = \left[\frac{x}{\left(x^2+1\right)^n}\right]_0^1 + 2n\int_0^1 \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^{n+1}} dx$$

$$= \frac{1}{2^n} + 2n\int_0^1 \frac{x^2+1-1}{\left(x^2+1\right)^{n+1}} dx = \frac{1}{2^n} + 2n\left(I_n - I_{n+1}\right),$$

Donc

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n + \frac{1}{n2^{n+1}}.$$

(2) Déduire la valeur de I_2, on a : (1 pt)

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Donc

$$I_2 = \frac{1}{2} I_1 + \frac{1}{2^2} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}.$$

Exercice 3 (5 pts).

(1) Voir Exercice 4 de la Série d'Exercices TD N°1.

(2) Calcul de l'intégrale suivante : (2 pts)

$$\int_{-1/2}^{1/2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{1}{1-x} dx.$$

On pose

$$t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \iff t^2 = \frac{1-x}{1+x} \iff x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$1 - x = \frac{2t^2}{1+t^2} \quad \text{et} \quad dx = \frac{-4t}{\left(1+t^2\right)^2} dt.$$

Donc

$$\int_{-1/2}^{1/2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{1}{1-x}dx=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{3}/3}t\frac{1+t^2}{2t^2}\frac{-4t}{\left(1+t^2\right)^2}dt$$
$$=-2\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{3}/3}\frac{1}{1+t^2}dt=2\int_{\sqrt{3}/3}^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+t^2}dt$$
$$=2\left[\arctan t\right]_{\sqrt{3}/3}^{\sqrt{3}}=2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{3}.$$

Exercice 4 (4 pts)**.**

Voir Exercice 1 et Exercice 3 de la Série d'Exercices TD N°2

Exercice 5 (4 pts)**.**

(1) On a $\dfrac{x^2-1}{x\left(1+x^2\right)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{bx+c}{x^2+1}=\dfrac{(a+b)\,x^2+cx+a}{x\left(1+x^2\right)}$

Par identification des constantes on a : $\begin{cases} a=-1 \\ a+b=1 \\ c=0 \end{cases} \implies \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \\ c=0 \end{cases}$.

Donc $\dfrac{x^2-1}{x\left(1+x^2\right)}=\dfrac{-1}{x}+\dfrac{2x}{x^2+1}$, alors

$$\int\frac{x^2-1}{x\left(1+x^2\right)}dx=\int\left(\frac{-1}{x}+\frac{2x}{x^2+1}\right)dx=\ln\left(x^2+1\right)-\ln|x|+c=-\ln\left(\frac{x}{x^2+1}\right)+c,\qquad c\in\mathbb{R}.$$

(2) Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle : $\left(1+x^2\right)y'(x)+\dfrac{x^2-1}{x}y(x)=1.$

L'équation différentielle linéaire du premier ordre (SSM) sans second membre est :

$$\left(1+x^2\right)y'(x)+\frac{x^2-1}{x}y(x)=0\iff y'(x)+\frac{x^2-1}{x\left(1+x^2\right)}y(x)=0$$

— La solution y_0 de l'équation SSM est sous la forme :

$$y_0(x)=\mathrm{K}e^{-\int\frac{x^2-1}{x\left(1+x^2\right)}dx}=\mathrm{K}\frac{x}{x^2+1},\ \text{avec}\,\mathrm{K}\in\mathbb{R}.$$

— Trouver y_p une solution particulière de l'équation par "La variation de la constante", on a :

$$y_p(x)=\mathrm{K}(x)\frac{x}{x^2+1}\implies\mathrm{K}'(x)\frac{x}{x^2+1}=\frac{1}{x^2+1}\implies\mathrm{K}(x)=\ln(x).$$

Donc

$$y_p(x)=\frac{x\ln x}{x^2+1}\ \text{est une solution particulière.}$$

D'où la solution générale $y=y_0+y_p$ de l'équation différentielle linéaire du premier ordre est :

$$y(x)=\frac{x}{x^2+1}\left(\mathrm{K}+\ln x\right),\ \text{avec}\,\mathrm{K}\in\mathbb{R}.$$

— $y(1)=1$ implique que $\mathrm{K}=2$, donc la solution désirée est :

$$y(x)=\frac{x}{x^2+1}\left(2+\ln x\right).$$