Examen d'Analyse 2 – Intégration – SMA

Exercice 1 (Questions du cours 3 pts).

(1) Définir une fonction Riemann intégrable sur un intervalle $[a,b]$. (1 pt)

(2) Donner une fonction bornée sur $[0,1]$ qui **n'est pas** Riemann intégrable. (2 pts)
(Justifiez votre réponse.)

Exercice 2 (3 pts).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^n}.$$

(1) En utilisant une intégration par partie, exprimer I_{n+1} en fonction de I_n. (2 pts)

(2) Déduire la valeur de I_2. (1 pt)

Exercice 3 (5 pts).

(1) Calculer la limite de la suite définie par $z_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)}$. (3 pts)

(2) Calculer l'intégrale $\int_{-1/2}^{1/2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{1}{1-x}dx$. **Indication :** $t=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. (2 pts)

Exercice 4 (4 pts).

Étudier la convergence des intégrales généralisées

(1) $\int_0^{+\infty} \frac{t-\sin(t)}{t^\alpha}dt$. $(\alpha \in \mathbb{R})$ (2 pts)

(2) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)\cos(t)}{t^{\frac{3}{2}}}dt$. (2 pts)

Exercice 5 (5 pts).

(1) Déterminer une primitive de la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $x \mapsto \frac{x^2-1}{x\left(1+x^2\right)}$. (2 pts)

Indication : Chercher les réels a, b et c tels que : $\frac{x^2-1}{x\left(1+x^2\right)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$.

(2) Résoudre l'équation différentielle sur $]0,+\infty[$: (3 pts)

$$\left(1+x^2\right)y'(x) + \frac{x^2-1}{x}y(x) = 1, \text{ qui vérifie } y(1)=1.$$