Université Ibn Zohr Agadir
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année universitaire 2022-2023
Filière SMI (S2)

Série 1 : Espaces vectoriels

Exercice 1. 1. *Peut-on munir $\mathbb{Q}$ d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.*

2. *Peut-on munir $(\mathbb{Z},+)$ d'une structure d'espace vectoriel sur le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (p premier) ou sur $\mathbb{Q}$ ou sur $\mathbb{R}$ en considérant comme loi externe la multiplication par la partie entière d'un réel.*

Exercice 2. *Soit $\mathbb{R}_+^*$ muni de la loi interne définie par : $a \oplus b = a.b, \forall a,b \in \mathbb{R}_+^*$ et de la loi externe définie par : $\lambda \otimes a = a^\lambda, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $(\mathbb{R}_+^*, \oplus, \otimes)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 3. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On munit le produit cartésien $E \times E$ de l'addition usuelle et de la multiplication externe par les complexes définie par :*

$$(a+ib).(x,y) = (ax-by, ay+bx).$$

Montrer que $E \times E$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Celui-ci est appelé complexifié de E.

Exercice 4. *On definit sur $E = \mathbb{R}^2$*

— *l'addition par : $(x,y)+(z,t) = (x+z, y+t)$.*

— *La lois externe $\cdot$, ayant $\mathbb{R}$ comme corps des scalaires, par $\lambda \cdot (x,z) = (2x,0)$.*

Montrer que $(E,+,.)$ n'est pas un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$?

Exercice 5. *Les sous-ensembles F suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de E.*

1. $E = \mathbb{R}^4$. $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x-y=z\}$
2. $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(x) = f(1-x), \forall x \in \mathbb{R}\}$
3. $E = \mathbb{R}^3$. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0 \ \text{ et } \ 2x-y+3z=0\}$
4. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *l'espace vectoriel des suites réelles et* $F = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E : (u_n) \text{ est constante } \}$.
5. $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. $F = \{f \in E : f \text{ est croissante}\}$.
6. $E = \mathbb{R}^3$. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$.
7. $E = \mathbb{R}^3$. $F_c = \{(a+c, -a, a+b) : a,b \in \mathbb{R}\}$. *(Discuter suivant la valeur de c).*

Exercice 6. *Les familles suivantes de E sont-elles libres ou liées ?*

1. $E = \mathbb{R}^5$. $x_1 = (1,2,1,2,1)$, $x_2 = (2,1,2,1,2)$, $x_3(0,1,0,0,1)$ et $x_4 = (1,0,1,1,0)$.
2. $E = \mathbb{R}_2[X]$. $P_1(X) = 1$; $P_2(X) = -2X+1$; $P_3(X) = 6X^2 - 6X + 1$.
3. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. $f_1 : x \mapsto \cos^2(x)$; $f_2 : x \mapsto \sin^2(x)$; $f_3 : x \mapsto \cos(2x)$.
4. $E = \mathcal{F}(]0,+\infty[,\mathbb{R})$. $f_1 : x \mapsto x$; $f_2 : x \mapsto x^2$; $f_3 : x \mapsto x\ln(x)$; $f_4 : x \mapsto x^2\ln(x)$.
5. $E = \mathbb{R}^3$. $x_1 = (3,1,m)$, $x_2 = (1,3,2)$ et $x_3 = (1,-1,4)$. *(discuter suivant la valeur de m).*

Exercice 7. *Dans cet exercice on étudie l'espace vectoriel $\mathbb{R}$ sur le corps $\mathbb{Q}$.*

a) *Montrer que la famille $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ est libre.*

b) *Chercher la définition d'un nombre transcendant. (utiliser Google).*

c) *Déduire une famille de réels infinie est libre.*

d) *A l'aide du théorème fondamental de l'Arithmétique montrer l'ensemble des $\ln(p)$ où p est premier est libre.*

Exercice 8. *Dans chacun des cas suivants, montrer que les ensembles F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, et qu'ils sont supplémentaires.*

1. $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \{(x,y) \in E \mid x+y=0\}$ et $G = \{(x,y) \in E \mid x-y=0\}$.
2. $E = \mathcal{F}([-1,1],\mathbb{R})$ *l'ensemble des fonctions de* $[-1,1]$ *dans* $\mathbb{R}$. $F = \{f \in E \mid f$ *est constante sur* $[-1,1]\}$ et $G = \{f \in E : f(0) = 0\}$
3. $E = C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ $F = \{f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0\}$ et $G = \{x \to ax+b \mid a,b \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 9. *Soient* $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z=0$ et $x-y-z\}$ *un sous-ensemble de* $\mathbb{R}^3$ *et* $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-2z=0\}$ *un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$. *Soient* $b=(1,1,1)$ et $c=(0,2,1)$.

1. *Montrer que E est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$.
2. *Déterminer une base de E.*
3. *Montrer que F est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$ *et que* $\{b,c\}$ *est une base de F.*
4. *Montrer que* $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$.

Exercice 10. *Soient* $F = Vect(2, 4X - X^2, (X-2)^2, X-2)$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_4[X] : P(0) = P'(0) = 0\}$.

1. *Montrer que F est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}_4[X]$.
2. *Déterminer une base de F.*
3. *Montrer que G est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}_4[X]$ *et Déterminer une base de G.*
4. *Montrer que* $\mathbb{R}_4[X] = F \oplus G$.

Exercice 11. *Soit G le sous-espace de* $\mathbb{R}^4$ *engendré par les vecteurs :* $u = (1,-1,2,-2) v = (4,0,1,-5) w = (3,1,-1,-3)$. *Soit* $H = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y=0$ et $x-y+z+2t=0\}$.

1. *Déterminer la dimension de G.*
2. *Montrer que H est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$.
3. *Déterminer les dimensions des sous-espaces* $G \cap H$ et $G+H$.
4. *Trouver un sous-espace F de* $\mathbb{R}^4$ *tel que* $\mathbb{R}^3 = (G+H) \oplus F$.