

Contrôle d'électricité (Physique 2)
(SMP₁, SMC₁, SM₁)

Problème

On se propose de déterminer les intensités des courants I_1 , I_2 et I_3 circulant dans le circuit de la figure 1.a, formé de :

Résistances : R , R_1 et R_2

Générateurs de résistances internes nulles : E_1 et E_2

Récepteur non polarisé : (e, r)

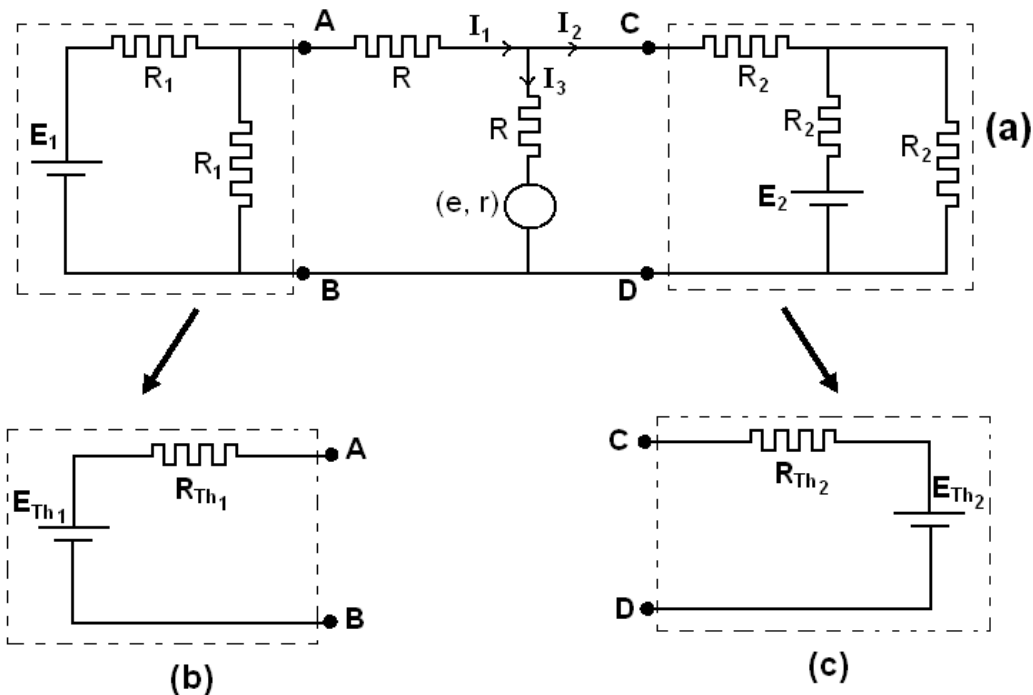


Figure 1

I- Pour la facilité des calculs, on commence par simplifier le circuit en utilisant le théorème de Thévenin.

1. Déterminer les caractéristiques (E_{Th1}, R_{Th1}) du générateur de thévenin de la figure 1.b, vu entre les bornes A et B du circuit de la figure 1.a
2. Déterminer les caractéristiques (E_{Th2}, R_{Th2}) du générateur de thévenin de la figure 1.c, vu entre les bornes C et D du circuit de la figure 1.a

II- En prenant : $E_{Th1} = E_{Th2} = E$, $R_{Th1} = R$ et $R_{Th2} = 2R$; le circuit de la figure 1.a est équivalent au circuit de la figure 2.

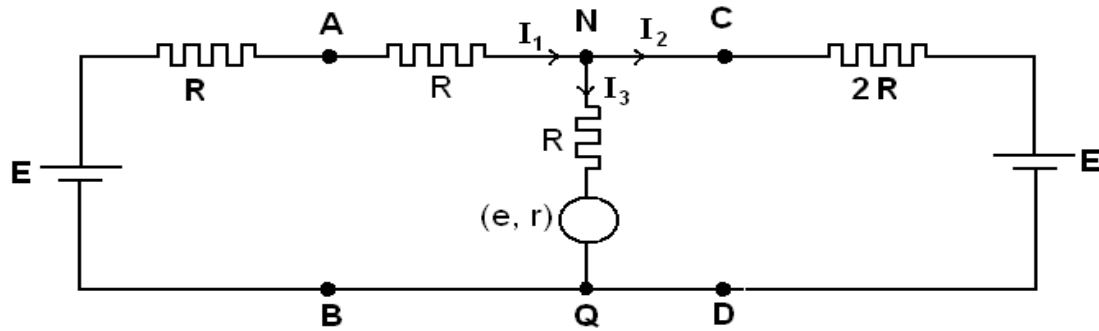


Figure 2

1. Enumérer les branches et les nœuds du circuit de la figure 2 ?
2. Etablir la loi des nœuds relative au nœud N ?
3. Etablir la loi des mailles relative à la maille (NQBAN) ?
4. Etablir la loi des mailles relative à la maille (NCDQN) ?
5. Etablir le système d'équations à deux inconnus I_1 et I_2 ?
6. Déterminer les intensités I_1 , I_2 et I_3 ?
7. En considérant $E > e$, représenter les vrais sens des courants?

III- On se propose de retrouver l'intensité du courant I_3 en appliquant le théorème de Thévenin au circuit de la figure 2.

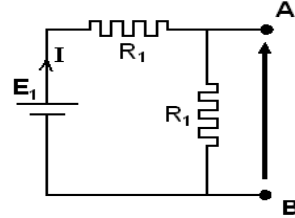
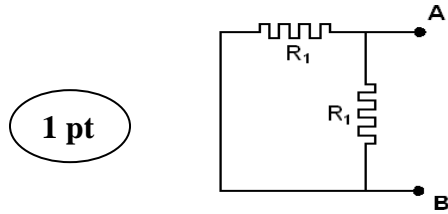
1. Déterminer les caractéristiques (E_{Th} , R_{Th}) du générateur de Thévenin vu entre les bornes N et Q du circuit de la figure 2 ?
2. Donner le nouveau circuit équivalent au circuit de la figure 2 ?
3. Déterminer l'intensité du courant I_3 ?

Correction du contrôle d'électricité (Physique 2)
(SMP₁, SMC₁, SM₁)

I-

1- $R_{Th1} = R_1 // R_1 = \frac{R_1}{2}$

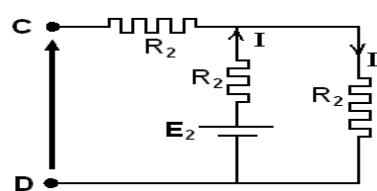
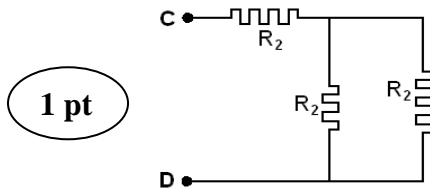
$$E_{Th1} = V_{AB} = R_1 I = \frac{E_1 R_1}{R_1 + R_1} = \frac{E_1}{2}$$



(1 pt)

2- $R_{Th2} = (R_2 // R_2) + R_2 = \frac{3R_2}{2}$

$$E_{Th2} = V_{CD} = R_2 I = \frac{E_2 R_2}{R_2 + R_2} = \frac{E_2}{2}$$



(1 pt)

II-

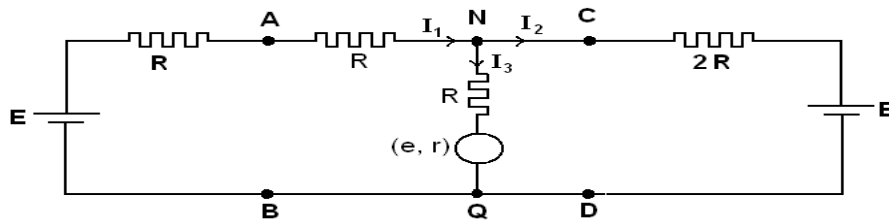


Figure 2

1. Nœuds : N et Q

(2.5 pt)

Branches : NQ, NABQ, NCDQ

2. Loi des nœuds : $I_1 = I_2 + I_3$

(0.5)

3. $2RI_1 + (R + r)I_3 = E - e$

(2)

4. $-2RI_2 + (R + r)I_3 = E - e$

(2)

5. $I_1 = I_2 + I_3, \quad 2RI_1 + (R + r)I_3 = E - e, \quad -2RI_2 + (R + r)I_3 = E - e$

$$(3R + r)I_1 - (R + r)I_2 = E - e$$

$$(R + r)I_1 - (3R + r)I_2 = E - e$$

(2 pt)

6. $\Delta = -4R(2R + r)$

$$\Delta_1 = -2R(E - e) \Rightarrow I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{(E - e)}{2(2R + r)}$$

(0.75 pt)

$$\Delta_2 = 2R(E - e) \Rightarrow I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{(E - e)}{2(2R + r)}$$

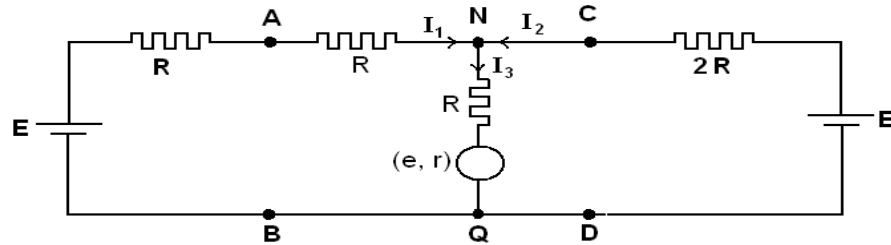
(0.75 pt)

$$I_3 = I_1 - I_2 = \frac{E - e}{2(2R + r)} + \frac{E - e}{2(2R + r)} = \frac{E - e}{(2R + r)}$$

0.5 pt

7. Si $E > e$ on a :

$$I_1 = \frac{(E - e)}{2(2R + r)} > 0, \quad I_2 = -\frac{(E - e)}{2(2R + r)} < 0 \quad \& \quad I_3 = \frac{(E - e)}{(2R + r)} > 0$$

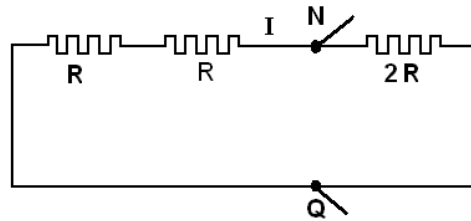


2 pt

III-

1. R_{Th} ?

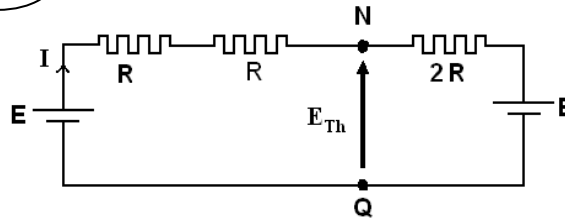
1 pt



$$R_{Th} = 2R // 2R = R$$

E_{Th} ?

1 pt

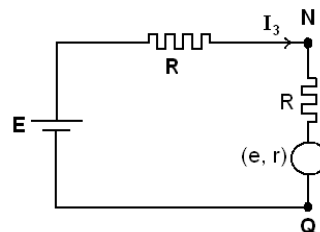


$$E_{Th} = V_{NQ}$$

$$4RI = 0 \Rightarrow I = 0 \Rightarrow E_{Th} = E$$

2.

0.5 pt



$$3. (2R + r)I_3 = E - e \Rightarrow I_3 = \frac{E - e}{2R + r}$$

0.5 pt

Examen d'électricité (Module Physique 2)
(SMP, SM, SMC, SMI)₁
Session d'Automne
Durée 1h30mn

Problème

On considère le circuit de la figure 1 formé de deux générateurs de tension idéales de forces électromotrices (**fem**) E_1 et E_2 , un récepteur non polarisé de force contre électromotrice (**fcem**) e' et quatre résistances R_1 , R_2 , R_3 et R_4 . On se propose de calculer les intensités des courants traversant les différentes branches de ce circuit en utilisant les lois de Kirchhoff.

1. Enumérer les nœuds et les mailles du circuit.
2. Etablir la loi des nœuds relative au nœud du circuit.
3. Etablir la loi des mailles relative aux mailles ABCDA et ADEFA.
4. Donner le système d'équations à deux inconnus I_1 et I_2 .
5. En remplaçant les résistances, les **fem** et les **fcem** par leurs valeurs numérique ($E_1 = 5V$, $E_2 = 8V$, $e' = 4V$, $R_1 = R_4 = 3\Omega$, $R_3 = 5\Omega$, et $R_2 = 4\Omega$) calculer les intensités des courants I_1 , I_2 et I .
6. Donner le sens réel de chaque courant ? En déduire le nombre de récepteur sur le circuit.
7. On branche une résistance $R = 4\Omega$ entre les points M et N du circuit (figure 2). On se propose de calculer le courant I traversant la résistance R en utilisant le théorème de Thévenin.
8. Enoncer le théorème de Thévenin.
9. Déterminer la résistance du générateur de Thévenin R_{TH} vu entre M et N.
10. En utilisant la question 5 calculer la force électromotrice du générateur de Thévenin E_{TH} ?
11. Calculer l'intensité du courant I .

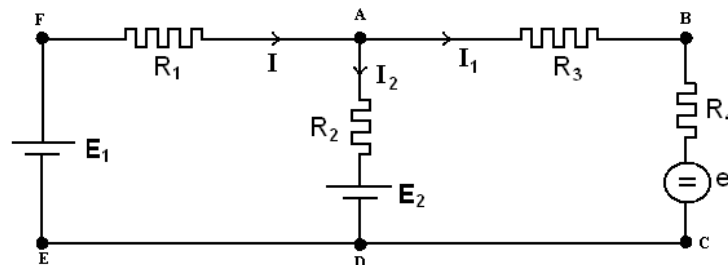


Figure 1

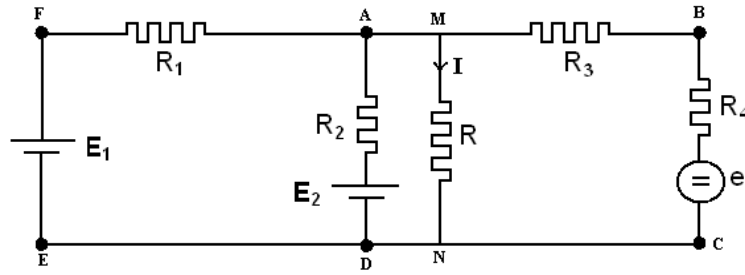
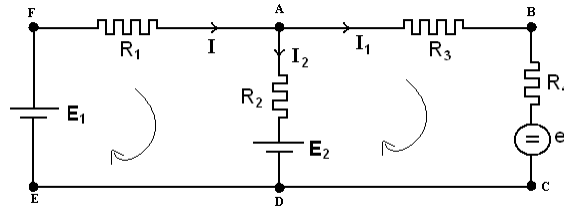


Figure 2

Correction



1. Les nœuds : A et D ; les mailles : ABCDA, ADEFA, ABCDEFA

2. $I = I_1 + I_2$

3. $-R_1 I - R_2 I_2 = E_2 - E_1$ et $-(R_3 + R_4)I_1 + R_2 I_2 = e' - E_2$

4. $-R_1 I_1 - (R_1 + R_2)I_2 = E_2 - E_1$ et $-(R_3 + R_4)I_1 + R_2 I_2 = e' - E_2$

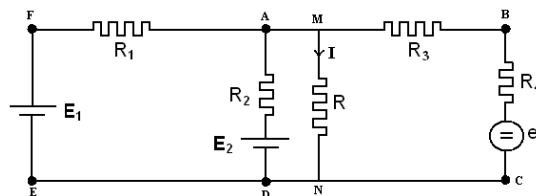
5. $-3I_1 - 7I_2 = 3$ et $-8I_1 + 4I_2 = -4$

$$I_1 = \frac{4}{17} A = 0.24 A, \quad I_2 = -\frac{9}{17} A = 0.53 A \quad \text{et} \quad I = -\frac{5}{17} A = 0.29 A$$

6. Le sens des courants : I est de A vers F, I_1 de A vers B, I_2 de D vers A. En plus du récepteur non polarisé le générateur E_1 joue le rôle d'un récepteur puisqu'il reçoit le courant I.

7. Théorème de Thévenin :

8. $R_{TH} = R_1 // R_2 // (R_3 + R_4) \Rightarrow R_{TH} = \frac{24}{17} \Omega = 1.41 \Omega$

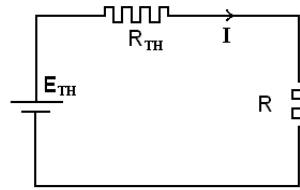


9. La tension entre M et N est la même que celle entre A et B : $E_{TH} = E_2 - R_2 I_2$ où

I_2 est le courant calculé auparavant (question 5) $E_{TH} = \frac{100}{17} V = 5.88 V$

10.

$$I = \frac{E_{TH}}{R_{TH} + R} \quad \Rightarrow \quad I = 1.09 \text{ A}$$

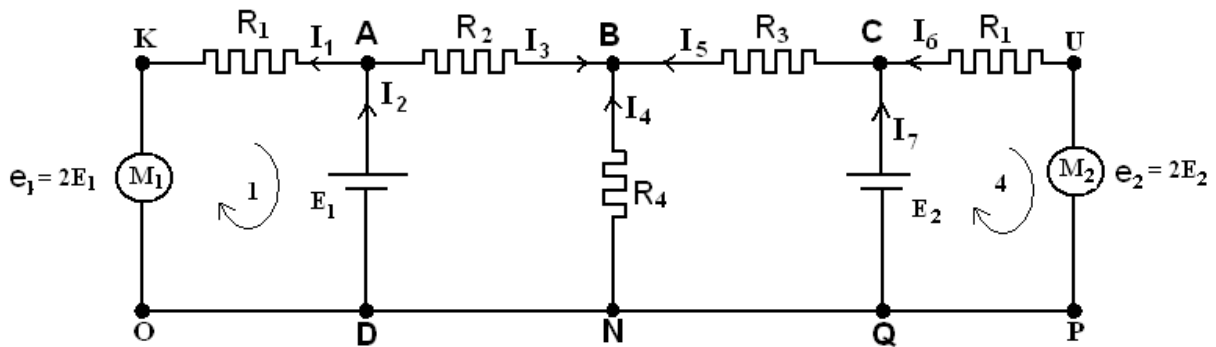


Epreuve d'électricité (Module Physique 2)
Session normale (printemps 2010)
(SMC₂, SMP₂)
Durée 1H30

Problème

Soit le circuit de la figure ci-dessous composé de :

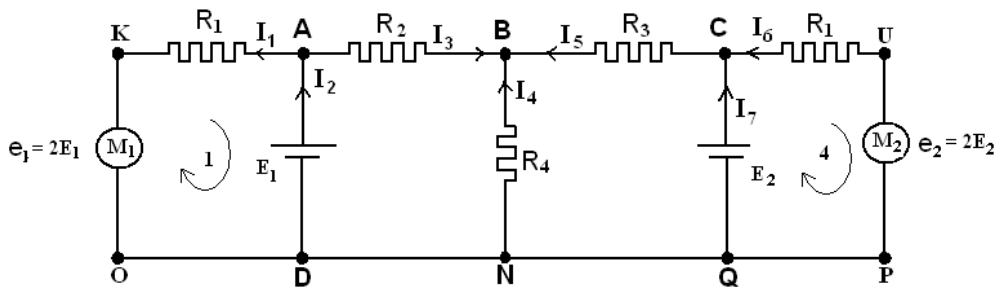
- deux générateurs de f.e.m E_1 et E_2
- deux moteurs non polarisés M_1 et M_2 de f.c.e.m respectivement $e_1 = 2E_1$ et $e_2 = 2E_2$
- résistances R_1, R_2, R_3 et R_4



On se propose de déterminer les intensités et les sens des courants dans différentes branches du circuit.

1. Enumérer les nœuds, les branches et les mailles du circuit
2. En choisissant le sens de parcours indiqué sur la figure, établir la loi des mailles relative aux mailles ADOKA et CUPQC
3. Calculer les courants traversant les moteurs. Conclure.
4. En simplifiant le circuit et en choisissant un sens de parcours sur chaque maille
 - a- Etablir la loi des nœuds
 - b- Etablir la loi des mailles
5. Etablir le système à deux équations aux inconnus I_2 et I_4
6. Pour $e_1 = e_2 = 2 \text{ V}$ et $R_2 = R_4 = R_3 = 2\Omega$, déterminer l'intensité et le sens des courants circulant dans les différentes branches du circuit simplifié

Correction

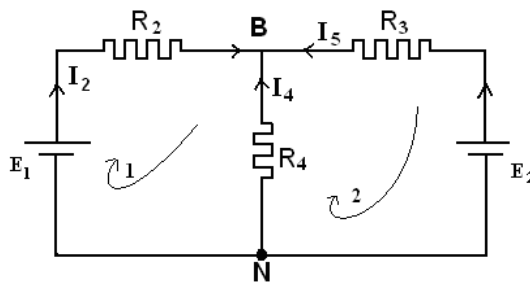


1. Les nœuds : A, B, C et (D = O = N = Q = P)
 Les mailles : ADOKA, ABNDA, BCQNB, CUPQC, KBNOK, KCQOK, UBNPU, UADPU, CADQC et KUPOK
 Les branches: AO, AD, AB, BN, BC, CQ, CP
2. La maille ADOKA : $-e_1 - R_1 I_1 + E_1 = 0$
 La maille CUPQC : $-e_2 - R_1 I_6 - E_2 = 0$
3. En remplaçant e_1 et e_2 par $2E_1$ et $2E_2$ respectivement : $I_1 = -\frac{E_1}{R_1}$ et $I_6 = -\frac{3E_2}{R_1}$
4. Les courants sont négatifs, on change le sens des courants I_6 et I_1 et par conséquent la polarité des moteurs:

$$\text{La maille ADOKA : } e_1 + R_1 I_1 + E_1 = 0 \Rightarrow I_1 = -\frac{3E_1}{R_1}$$

$$\text{La maille CUPQC : } e_2 + R_1 I_6 - E_2 = 0 \Rightarrow I_2 = -\frac{E_2}{R_1}$$

Conclure : les courants I_6 et I_1 sont nuls on peut alors supprimer branches AO et CP.



5. la loi des nœuds : $I_2 + I_4 + I_5 = 0$
 la loi des mailles : $R_2 I_2 - R_4 I_4 = E_1$ et $R_4 I_4 - R_3 I_5 = -E_2$
6. $R_2 I_2 - R_4 I_4 = E_1$ et $R_3 I_2 + (R_3 + R_4) I_4 = -E_2$
7. Pour $e_1 = e_2 = 2 \text{ V}$ et $R_2 = R_4 = R_3 = 2 \Omega \Rightarrow I_2 = I_5 = \frac{1}{3} \text{ A}$ et $I_4 = -\frac{2}{3} \text{ A}$ le sens de I_4 est de B vers N

Examen d'électricité (Module Physique 2)
(SM₂, SMC₂)
Session de Printemps
Durée 1h30mn

Electrocinétique

I- On considère le circuit de la figure 1 formé d'un générateur de tension de force électromotrice (f.e.m) E et de résistance interne r en série avec une résistance R_1 .

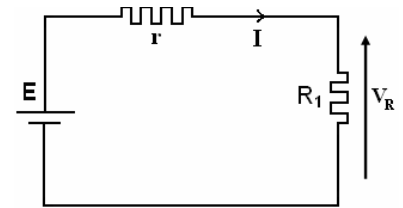


Figure 1

12. En utilisant la loi des mailles, déterminer l'expression du courant I . En déduire l'expression de la différence de potentiel V_R aux bornes de R_1 .
13. En déduire l'expression de la puissance P dissipée aux bornes de R_1 .
14. Pour quelle valeur de R_1 la puissance P est maximale ?

15. On branche une résistance R_2 en parallèle avec R_1 (figure2). En utilisant la loi des nœuds et la loi des mailles relative à la maille 1, donner l'expression des courants I_1 et I_2 en fonction de R_1 , R_2 et I .

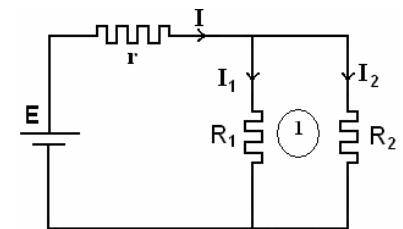


Figure 2

II- 1. On se propose de calculer le potentiel V_O au nœud O de la figure 3. En utilisant la loi d'Ohm et la loi des nœuds

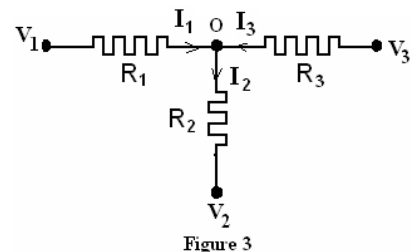


Figure 3

montrer que :

$$V_O = \frac{\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

2. En utilisant la formule précédente, calculer le potentiel aux nœuds A et C du circuit de la figure 4.
3. Donner sur un schéma le sens réel des courants traversant les 7 branches du circuit. Justifier.

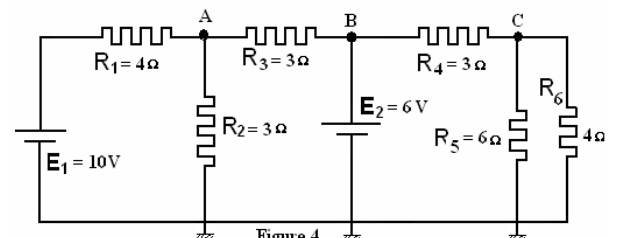


Figure 4

4. Calculer les intensités des différents courants en utilisant uniquement la loi d'Ohm.

Electrostatique

A l'intérieur d'un cylindre de longueur infinie d'axe $(z'z)$, de rayon R , se trouve des charges réparties avec une densité volumique de charge ρ .

1. Calculer le champ électrostatique créé par cette distribution en tout point P de l'espace.
2. En déduire le champ créé par un fil infini uniformément chargé avec une densité linéique de charge λ .
3. On considère maintenant des charges réparties uniformément avec une densité volumique de charge ρ_0 entre deux cylindres coaxiaux $(z'z)$ et de rayons R_1 et R_2 ($R_2 > R_1$).
 - a- Calculer le champ électrique $E(r)$ en un point M à la distance r de l'axe $(z'z)$, r variant de 0 à l'infini.
 - b- En déduire le champ créé en un point M par un cylindre, de rayon R_1 , uniformément chargé avec une densité surfacique σ .
 - c- Calculer le potentiel $V(r)$ en M ($0 < r < \infty$) ; on prendra arbitrairement le potentiel nul en un point de l'axe.

Correction Examen d'électricité (Module Physique 2)
(SM₂, SMC₂) Session de Printemps

Electrocinétique

I-

$$1. \quad E = (r + R_1)I \Rightarrow I = \frac{E}{r + R_1} \Rightarrow V_R = \frac{R_1 E}{r + R_1}$$

$$2. \quad P = V_R I = \frac{E^2 R_1}{(r + R_1)^2}$$

$$3. \quad \frac{dP}{dR_1} = E^2 \frac{r^2 - R^2}{(r + R)^4} = 0 \Rightarrow R_1 = r$$

$$4. \quad I = I_1 + I_2 \Rightarrow R_1 I_1 = R_2 I_2 \Rightarrow I_1 = \frac{R_2 I_2}{R_1} \Rightarrow I = I_2 \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \Rightarrow I_2 = \frac{I R_1}{R_1 + R_2}$$

$$I_2 = \frac{R_1 I_1}{R_2} \Rightarrow I = I_1 \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) \Rightarrow I_1 = \frac{I R_2}{R_1 + R_2}$$

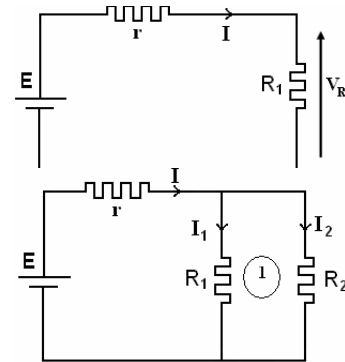


Figure 2

II-

$$1. \quad I_1 + I_3 = I_2, \quad V_1 - V_0 = R_1 I_1, \quad V_0 - V_2 = R_2 I_2, \quad V_3 - V_0 = R_3 I_3$$

$$I_1 = \frac{V_1 - V_0}{R_1}, \quad I_2 = \frac{V_0 - V_2}{R_2}, \quad I_3 = \frac{V_3 - V_0}{R_3}$$

$$\frac{V_1 - V_0}{R_1} + \frac{V_3 - V_0}{R_3} = \frac{V_0 - V_2}{R_2} \Rightarrow V_0 = \frac{\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

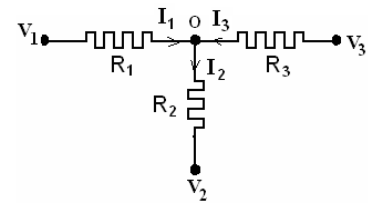


Figure 3

$$2. \quad V_A = \frac{\frac{10}{4} + \frac{6}{3} + \frac{0}{3}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = \frac{54}{11} V, \quad V_C = \frac{\frac{6}{3} + \frac{0}{6} + \frac{0}{4}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3}} = \frac{8}{3} V$$

3. Le courant circule dans le sens des potentiels décroissants

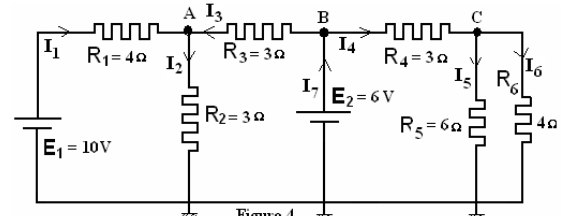


Figure 4

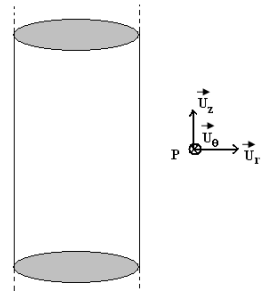
$$4. \quad I_1 = \frac{10 - V_A}{4} = 1.27 A, \quad I_2 = 1.63 A, \quad I_3 = 0.36 A, \\ I_4 = 1.11 A, \quad I_5 = 0.44 A, \quad I_6 = 0.66 A, \quad I_7 = I_4 + I_3 = 1.47 A$$

Electrostatique

1. Symétries :

- Le plan $(P, \vec{U}_r, \vec{U}_z)$ est un plan de symétrie donc \vec{E} appartient à ce plan
- Le plan $(P, \vec{U}_r, \vec{U}_\theta)$ est un plan de symétrie donc \vec{E} appartient à ce plan

Le champ est donc dirigé selon \vec{U}_r



Calcul du champ

Choisissons comme surface de Gauss un cylindre.

$$\oiint_{(S_{\text{Gauss}})} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{(S_{\text{base 1}})} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{(S_{\text{latérale}})} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{(S_{\text{base 2}})} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

✓ Sur les surfaces de base du cylindre, $\vec{E} \perp d\vec{S} \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$

$$\text{Donc } \iint_{(S_{\text{base 1}})} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{(S_{\text{base 2}})} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

✓ Sur la surface latérale, $\vec{E} = E(r) \cdot \vec{u}_r$ et $d\vec{S} = dS \cdot \vec{u}_r$

$$\text{Donc } \iint_{(S_{\text{latérale}})} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{(S_{\text{latérale}})} E(r) \cdot dS = E(r) \iint_{(S_{\text{latérale}})} dS = E(r) \times 2\pi rh$$

(car $E(r)$ est constant sur la surface latérale)

$$\text{Donc } \oiint_{(S_{\text{Gauss}})} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2\pi rh \times E(r)$$

➤ 1^{er} cas : si $r \geq R$

$$Q_{\text{int}} = \rho \times \pi R^2 h$$

$$\text{L'équation (1) donne ainsi : } 2\pi rh \times E(r) = \frac{\rho \times \pi R^2 h}{\epsilon_0}, \text{ soit } E(r) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r}$$

Finalement, $\text{si } r \geq R, \vec{E}(M) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} \vec{u}_r$

➤ 2^{ème} cas : si $r \leq R$

$$Q_{\text{int}} = \rho \times \pi r^2 h$$

$$\text{L'équation (1) donne alors : } 2\pi r h \times E(r) = \frac{\rho \times \pi r^2 h}{\epsilon_0} \quad , \text{ soit } E(r) = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}$$

$$\text{Finalement, si } r \leq R, \quad \vec{E}(M) = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \vec{u}_r$$

2. A l'extérieur du cylindre on a :

$$\text{si } r \geq R, \quad \vec{E}(M) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} \vec{u}_r$$

On fait tendre R vers 0 et on écrit que la charge du cylindre se conserve ; ainsi pour

$$\text{une longueur } L \text{ du cylindre on a : } \rho \pi R^2 L = \lambda L \quad \text{d'où} \quad \vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{U}_r$$

3. a-

Symétries: La symétrie cylindrique de la distribution impose de prendre pour surface de Gauss un cylindre de rayon r et de hauteur h (Voir question 1).

Calcul du champ : Théorème de Gauss :

$$\int_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\Sigma q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

$r < R_1$:

$$\Sigma q_{\text{int}} = 0 \implies \vec{E} = \vec{0}$$

$R_1 < r < R_2$:

$$2\pi r h E = \pi(r^2 - R_1^2) h \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left(r - \frac{R_1^2}{r} \right) \vec{u}_r$$

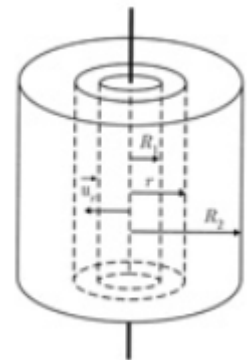
c) $r > R_2$:

Cette fois, on a :

$$2\pi r h E = \pi(R_2^2 - R_1^2) h \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho}{2\epsilon_0 r} (R_2^2 - R_1^2) \vec{u}_r$$

b- A l'extérieur on a $E = \frac{\rho}{2\epsilon_0 r} (R_2^2 - R_1^2)$



On fait tendre R_2 vers R_1 et on écrit que la charge entre les deux cylindres se conserve ; ainsi pour une longueur L du cylindre on a : $\rho \pi (R_2^2 - R_1^2)L = \sigma 2\pi R_1 L$

d'où $E(r) = \frac{\sigma R_1}{\varepsilon_0 r}$.

Examen d'électricité (Module Physique 2)
(SM₂) Session de rattrapage
Durée 1h30mn

Electrostatique (14 pts)

Une sphère de centre O et de rayon R contient une charge Q répartie uniformément avec une densité volumique ρ .

1. On se propose de calculer le champ électrostatique en tout point de l'espace en utilisant le théorème de Gauss.

a)- Montrer par des raisons de symétrie que le champ électrostatique est radial.

b)- Calculer le champ $E(r)$ en tout point de l'espace.

2. En utilisant l'équation de Laplace, on retrouvera les expressions du champ en tout point de l'espace. En coordonnées sphériques, l'équation de Laplace se réduit à :

$$\Delta V = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \text{ et le gradient se réduit à } \vec{\nabla} = \frac{d}{dr}$$

(On prend $V(\infty) = 0$ et $E(0) = 0$)

a)- Pour $r < R$ déterminer l'expression de $\frac{dV}{dr}$.

b)- En déduire que le potentiel s'écrit $V(r) = Ar^2 + B$ où B est une constante.

c)- Pour $r > R$, montrer que $V(r) = -\frac{C}{r}$ où C est une constante.

d)- En utilisant la propriété de continuité du champ et du potentiel déterminer les constantes B et C .

e)- Retrouver les expressions du champ électrostatique en tout point de l'espace.

Electrocinétique (6 pts)

Un générateur continu, de force électromotrice $E = 10 \text{ V}$ et de résistance interne négligeable, alimente un circuit comprenant une résistance R_0 et un dipôle X équivalent à une résistance R_X (Fig. 1). On note U_X la tension à ses bornes.

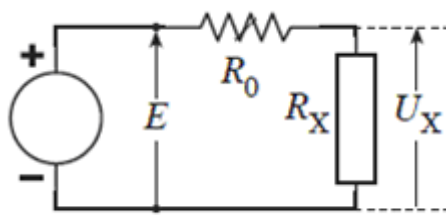


Fig. 1

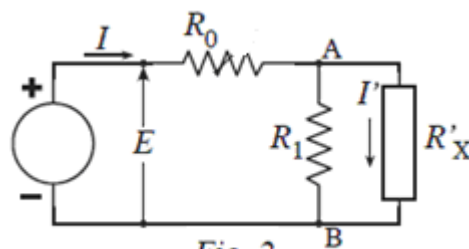


Fig. 2

1.

a- Etablir l'expression de U_X en fonction de E , R_0 et R_X .

b- Le dipôle X est un voltmètre, de résistance propre R_X que l'on cherche à mesurer. Pour $R_0 = 1 \text{ M}\Omega$, la tension indiquée par le voltmètre est $U_X = 9 \text{ V}$. Quelle est la valeur de R_X ?

2. Le dipôle est maintenant constitué par une résistance R_1 connue et une résistance R'_X inconnue en parallèle sur R_1 (Fig. 2). On note I le courant débité par le générateur, et I' celui traversant R'_X .

a- Ecrire la relation traduisant la loi des noeuds dans le circuit.

b- Ecrire deux relations à partir de la loi des mailles appliquée à deux mailles différentes.

c- Montrer, à partir des relations obtenues en (a) et en (b), que : $\frac{E}{I} = R_0 + R'_X \left(1 + \frac{R_0}{R_1}\right)$

d- La résistance inconnue est la résistance propre R'_X d'un ampèremètre que l'on cherche à mesurer. Pour $R_0 = 100 \text{ }\Omega$ et $R_1 = 50 \text{ }\Omega$, le courant indiqué par l'ampèremètre est égal à 40 mA . Quelle est la valeur de R'_X ?

Correction d'examen d'électricité (Module Physique 2)
(SM₂) Session de Rattrapage (Printemps)

1.

a- Soit M un point de l'espace où l'on calcule le champ. Tous les plans passants par O et M sont des plans de symétrie alors le champ au point M est porté par ces plan. Alors le champ est porté par la droite OM qui est l'intersection de ces plans de symétrie.

b-

On applique le théorème de Gauss :
$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

où la surface de Gauss S est une sphère de centre O et de rayon r sur laquelle se trouve le point où l'on calcule le champ E(r).

$$\text{Pour } r < R : E 4\pi r^2 = \frac{\rho 4\pi r^3}{3\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$$

$$\text{Pour } r > R : E 4\pi r^2 = \frac{\rho 4\pi R^3}{3\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}$$

2.

a) pour $r < R$: L'équation de Poisson s'écrit :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow r^2 \frac{dV}{dr} = -\frac{\rho r^3}{3\epsilon_0} + A$$

b) Or $E(r) = -\frac{dV}{dr}$ et on a $E(0) = 0$:

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{\rho r}{3\epsilon_0} + \frac{A}{r^2}$$

$$\vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \left(\frac{dV}{dr} \right)_{r=0} = 0$$

Donc $A = 0$. Par suite :

$$V(0 < r < R) = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + B$$

c) pour $r > R$ on a $\rho = 0$ et l'équation de Laplace s'écrit :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) = 0$$

D'où l'on tire successivement :

$$r^2 \frac{dV}{dr} = C$$

$$V = -\frac{C}{r} + D$$

$$V(\infty) = 0 \Rightarrow D = 0$$

Par suite :

$$V(r > R) = -\frac{C}{r}$$

d- Le potentiel et le champ électrique sont continus pour $r = R$. On a donc d'une part :

Pour le potentiel on a : (1)
$$-\frac{\rho R^2}{6\epsilon_0} + B = -\frac{C}{R}$$

et d'autre part pour le champ c-à-d la continuité de $\frac{dV}{dr}(r)$ on a : (2)
$$-\frac{\rho R}{3\epsilon_0} = \frac{C}{R^2}$$

Alors
$$C = -\frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \quad B = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0} + \frac{\rho R^2}{6\epsilon_0} = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}$$

e- les expressions du potentiel sont alors :

Pour $r < R$: $V(r) = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}$ pour $r > R$: $V(r) = -\frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r}$

Or $E(r) = -\frac{dV}{dr}$ alors : Pour $r < R$: $E(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$ pour $r > R$: $E(r) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}$

Electrocinétique

1.

a- $E = (R_0 + R_X)I \Rightarrow I = \frac{E}{R_0 + R_X} \Rightarrow U_X = \frac{R_X E}{R_0 + R_X}$

b- $R_X = 9 M\Omega$ (réponse sans unité est fausse)

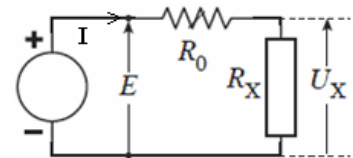


Fig. 1

2.

a- $I = I' + I''$ (1)

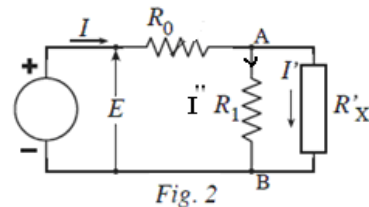


Fig. 2

b- (2) $R_1 I'' = R_X' I'$, (3) $E = R_0 I + R_1 I''$ ou (4) $E = R_0 I + R_X' I'$

c- On remplace l'expression de I (1) dans l'équation (3) (ou 4) on aura :

$$E = R_0 I' + (R_1 + R_0) I'' \text{ on remplace } I'' \text{ par son expression de (2) on aura :}$$

$$E = R_0 I' + \frac{(R_1 + R_0) R_X'}{R_1} I' \Rightarrow \frac{E}{I'} = R_0 + R_X' \left(1 + \frac{R_0}{R_1}\right)$$

d- $R_X = 50 \Omega$ (réponse sans unité est fausse)

Examen d'Électricité 1 : SMP₂
Session normale

Problème

On considère le référentiel $\mathcal{R}(x, y, z)$ orthonormé direct auquel est associé la base (i, j, k) . À \mathcal{R} est également associé la base cylindrique $(ur, u\varphi, uz)$. On donne la divergence en coordonnées cylindriques

$$\text{div } A = 1/r \partial(rAr)/\partial r + 1/r \partial A\varphi/\partial \varphi + \partial Az/\partial z.$$

A) On considère un conducteur cylindrique plein \mathcal{D}_1 de rayon R_1 et de charge positive Q_1 et un conducteur cylindrique creux \mathcal{D}_2 de rayon intérieur R_2 et de rayon extérieur R_3 . \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 ont la même hauteur h et \mathcal{D}_2 porte la charge $-Q_1$: $R_1 < R_2 < R_3$ et $h \gg R_3$ (voir figure 1). Les conducteurs sont considérés en équilibres et à une distance infinie l'un de l'autre.

1. Quelle est la répartition des charges des deux conducteurs ?
2. On place le cylindre \mathcal{D}_1 dans la cavité du conducteur \mathcal{D}_2 . Les deux cylindres ont le même axe de révolution (Figure 1). Quelle est la nouvelle répartition des charges ?
3. La hauteur h est supposée infinie. Grâce aux invariances de la distribution de charges et en utilisant les coordonnées cylindriques r, φ et z établir que le champ électrostatique est de la forme $E_{r,\varphi,z} = E(r)ur$.
4. Sans calcul, donner la valeur de $E_1(r)$ pour $r < R_1$.
5. En appliquant le théorème de Gauss à une surface cylindrique de hauteur h , calculer $E_2(r)$ dans l'espace compris entre les deux cylindres ($R_1 < r < R_2$).
6. Calculer la circulation \mathcal{C} du champ E_2 le long d'un parcours normal à l'axe de révolution et compris entre les deux cylindres en fonction de Q_1, ϵ_0, h, R_1 et R_2 .
7. Les potentiels électrostatiques de \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont respectivement V_1 et V_2 . Exprimer (sans démonstration) la circulation \mathcal{C} en fonction de V_1 et V_2 .
8. Exprimer la capacité C_1 du condensateur $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ formé par \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 en fonction de Q_1, V_1 et V_2 puis en fonction de ϵ_0, h, R_1 et R_2 . En déduire la capacité par unité de longueur.

B) On place \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 dans la cavité d'un cylindre creux \mathcal{D}_3 (figure 2) de même hauteur h et de rayons R_4 et R_5 ($R_4 < R_5$). \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_3 portent respectivement les charges positives Q_1 et Q_3 alors que \mathcal{D}_2 porte une charge Q_2 . Le système formé par les trois cylindres a le même axe de révolution et il est neutre $\sum Q_i = 0$.

1. Établir l'expression de la charge Q_2 . En déduire son signe.
2. Quelle est la répartition des charges des trois conducteurs ?

3. On relie les conducteurs \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_3 par un fil conducteur (Figure 3). Soit V_1 leur potentiel commun. Le conducteur \mathcal{D}_2 reste au potentiel V_2 .
 - a- En appliquant le théorème de Gauss calculer $E'(r)$ entre les deux cylindres \mathcal{D}_2 et \mathcal{D}_3 ($R_3 < r < R_4$).
 - b- Calculer la circulation \mathcal{C}' du champ E' le long d'un parcours normal à l'axe de révolution et compris entre \mathcal{D}_2 et \mathcal{D}_3 en fonction de Q_3 , ϵ_0 , h , R_3 et R_4 . En déduire l'expression de $(V_1 - V_2)$.
 - c- Exprimer la capacité C_2 du condensateur $\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ formé par la face externe de \mathcal{D}_2 et la face interne de \mathcal{D}_3 en fonction de Q_3 , V_1 et V_2 puis en fonction de ϵ_0 , h , R_3 et R_4 .
 - d- Le système de la figure 3 est un condensateur $\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_3, \mathcal{D}_2$ dont la première armature est formée par \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_3 et la deuxième armature est formée par \mathcal{D}_2 . Donner la capacité C correspondante en fonction de Q_1 , Q_3 et $(V_1 - V_2)$.
 - e- Ecrire C en fonction de C_1 et C_2 . Conclure.

C. Dans la suite, les deux cylindres \mathcal{D}_2 et \mathcal{D}_3 sont supposés électriquement neutres ($Q_2 = Q_3 = 0$), d'épaisseurs négligeables ($R_2 \cong R_3$ et $R_4 \cong R_5$) et infiniment éloignés du cylindre \mathcal{D}_1 . Ce dernier porte toujours la charge Q_1 en surface. Les trois cylindres sont disposés comme indiqué sur la figure 4. L'espace entre les deux cylindres est un milieu diélectrique chargé. Soit ρ sa distribution volumique de charge supposée uniforme et positive.

1. En appliquant le théorème de Gauss à une surface cylindrique de hauteur h , calculer $E_3(r)$ pour $R_2 < r < R_4$ et $E_4(r)$ pour $r > R_4$
2. En utilisant la forme locale du théorème de Gauss ($\text{div } E = \rho/\epsilon_0$) et en tenant compte de la continuité du champ en $r = R_2$, $E_2 R_2 = E_3 R_2$, retrouver l'expression de $E_2(r)$ pour $R_1 < r < R_2$
3. Sans calcul et en utilisant le principe de superposition donner le champ produit la distribution volumique ρ au point $M(r > R_4)$.

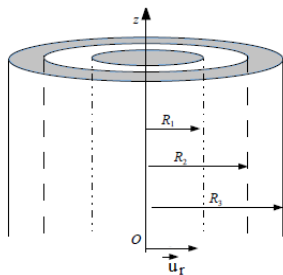


Figure 1

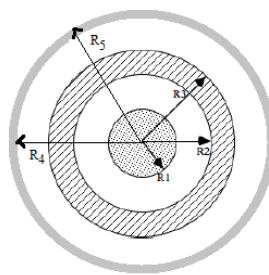


Figure 2

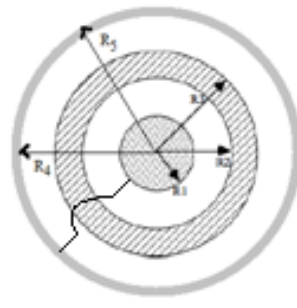


Figure 3

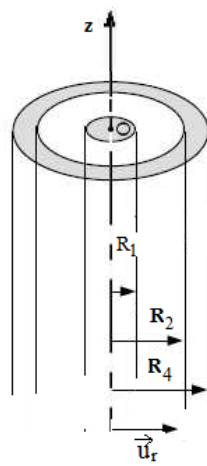


Figure 4

Correction de l'examen

Problème

A) (9 pots)

1. D'après les propriétés d'un conducteur en équilibre, la charge Q_1 se répartie sur la surface du conducteur \mathcal{D}_1 et la charge $-Q_1$ se répartie sur la surface externe du conducteur \mathcal{D}_2 .

0,5

2. Les deux conducteurs sont en influence totale, alors la charge $-Q_1$ de \mathcal{D}_2 passe sur sa face interne de sorte que les deux surfaces en regard portent des charges de signes opposées et égales en valeurs absolue.

0,5

3.

- Pour tout point M, le plan OzM et le plan perpendiculaire à Oz passant par M sont des plans de symétrie. Par conséquent le champ \vec{E} au point M est parallèle à ces deux plans et donc dirigé suivant leur intersection : $E = E(r, \varphi, z) \vec{u}_r$.

0,5

- La distribution reste invariante par toute rotation autour de l'axe Oz , ainsi que pour toute translation le long de cet axe alors $E(r, \varphi, z) = E(r) \vec{u}_r$.

0,5

4. Le champ à l'intérieur d'un conducteur en équilibre est nul : $E_1(r) = 0$ pour $r < R_1$

0,5

5. On applique le théorème à un cylindre de rayon r ($R_1 < r < R_2$) et de hauteur h :

Le champ est radial et perpendiculaire à la surface latérale du cylindre alors les flux à travers les surfaces de bases du cylindre sont nuls :

$$\text{Cylindre } E \cdot ds = \text{surface latérale } E \cdot ds = \text{surface latérale } E 2\pi r ds = Q_{\text{int}} \epsilon_0$$

Q_{int} est la charge contenue dans le cylindre de hauteur h qui est égale à Q_1

3

$$E 2\pi r 2\pi r h = Q_1 \epsilon_0 \quad \text{alors} \quad E 2\pi r = Q_1 2\pi \epsilon_0 r h$$

$$\oint_C E \cdot dr = \int_{R_1}^{R_2} E 2\pi r dr = Q_1 2\pi \epsilon_0 h \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

1

$$\oint_C E \cdot dr = -\Delta V = -V_2 - V_1 = V_1 - V_2$$

1

$$C_1 = Q_1 V_1 - V_2, \quad \text{et} \quad C_1 = 2\pi \epsilon_0 h \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

0,5

1

la capacité par unité de longueur est $C = 2\pi \epsilon_0 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$

0,5

B) (7 pots)

0,5

1. Le système est neutre alors $Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0 \Rightarrow Q_2 = -Q_1 + Q_3 < 0$

2.

- le conducteur \mathcal{D}_1 porte toujours la charge Q_1 sur sa surface externe
- la face interne de \mathcal{D}_2 porte la charge $-Q_1$ car il est en influence totale avec \mathcal{D}_1
- la face externe de \mathcal{D}_2 portera le reste de la charge qui est $-Q_3$
- puisque \mathcal{D}_2 est en influence totale avec \mathcal{D}_3 alors la face interne de ce dernier portera la charge Q_3 et sa face externe reste sans charge.

3.

a. On applique le théorème à un cylindre de rayon r ($R_3 < r < R_4$) et de hauteur h :

Le champ est radial et perpendiculaire à la surface latérale du cylindre alors les flux à travers les surfaces de bases du cylindre sont nuls :

$$\text{Cylindre } E' . ds = \text{surface latérale } E' . ds = \text{surface latérale } E' r ds = Q_{\text{int}} \epsilon_0$$

Q_{int} est la charge contenue à l'intérieur du cylindre de Gauss. Elle est égale à la somme des charges portées par les faces interne et externe de \mathcal{D}_2 et la charge de \mathcal{D}_1

alors $Q_{\text{int}} = -Q_3$

$$E' r 2\pi r h = -Q_3 \epsilon_0 \quad \text{alors } E' r = -Q_3 2\pi \epsilon_0 r h$$

$$b. \quad \mathcal{C}' = R_3 R_4 E' r . dr = -Q_3 2\pi \epsilon_0 h R_3 R_4 \int_{R_3}^{R_4} \frac{1}{r} dr = -Q_3 2\pi \epsilon_0 h \ln\left(\frac{R_4}{R_3}\right)$$

$$\mathcal{C}' = -\Delta V = -V_1 - V_2 \Rightarrow V_1 - V_2 = Q_3 2\pi \epsilon_0 h \ln\left(\frac{R_4}{R_3}\right)$$

1

c. Le condensateur \mathcal{C}_2 $\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ formé par \mathcal{D}_2 et \mathcal{D}_3 porte la charge Q_3 et il est soumis à la différence de potentiel $(V_1 - V_2)$ alors $C_2 = Q_3 V_1 - V_2$, $C_2 = 2\pi \epsilon_0$

0,5

$$h \ln\left(\frac{R_4}{R_3}\right)$$

d. Le condensateur \mathcal{C}_1 $\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_3, \mathcal{D}_2$ dont la première armature est formée par \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_3 et la deuxième est formée par \mathcal{D}_2 porte la charge $(Q_1 + Q_3)$ et il est

0,5

soumis à la différence de potentiel $V_1 - V_2$ alors $C = Q_1 + Q_3 V_1 - V_2$

e. On a $C_1 = Q_1 V_1 - V_2$ et $C_2 = Q_3 V_1 - V_2$

0,5

$$C = Q_1 + Q_3 V_1 - V_2 = Q_1 V_1 - V_2 + Q_3 V_1 - V_2 = C_1 + C_2$$

C est la capacité équivalente de deux capacités C_1 et C_2 montées en parallèles.

C) (5 pots)

1. On applique le théorème à un cylindre de rayon r et de hauteur h :

- Pour $R_2 < r < R_4$

Le champ est radial et perpendiculaire à la surface latérale du cylindre alors les flux à travers les surfaces de bases du cylindre sont nuls :

1,5

Cylindre $E_3 \cdot ds = \text{surface latérale}$ $E_3 \cdot ds = \text{surface latérale}$ $E_3 r ds = Q_{int} \epsilon_0$

$$E_3 r 2\pi r h = \rho \pi h r^2 - R^2 + Q_1 \epsilon_0 = \rho \pi h r^2 - R^2 \epsilon_0 + Q_1 \epsilon_0$$

$$E_3 r = \rho r^2 - R^2 \epsilon_0 + Q_1 2\pi r h \epsilon_0$$

- Pour $r > R_4$

$$E_4 r 2\pi r h = \rho \pi h R^2 - R^2 + Q_1 \epsilon_0 = \rho \pi h R^2 - R^2 \epsilon_0 + Q_1 \epsilon_0$$

1,5

$$E_4 r = \rho R^2 - R^2 \epsilon_0 + Q_1 2\pi r h \epsilon_0$$

2. $\text{div } A = 1/r \partial(rA)/\partial r + 1/r \partial A/\partial \varphi + \partial A_z/\partial z$ pour $R_1 < r < R_2$ on a $\rho = 0$ alors

$$\text{div } E_2 r = 1/r \partial(rE_2)/\partial r = 0 \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow E_2 r = Kr \text{ où } K \text{ est une constante à déterminer}$$

D'après la continuité du champ au point $r = R_2$ on a

$$E_2 R_2 = E_3 R_2 \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow KR_2 = \rho R^2 - R^2 \epsilon_0 + Q_1 2\pi R_2 h \epsilon_0 = Q_1 2\pi R_2 h \epsilon_0$$

$$\text{D'où } E_2 r = Q_1 2\pi r h \epsilon_0$$

3. D'après le principe de superposition le champ $E_4 r > R_4$ est la somme des champs :

$E_2(r)$ créé par le cylindre \mathcal{D}_1 et le champ $E_\rho(r)$ créé la distribution volumique ρ :

$$E_4 r > R_4 = E_2 r + E_\rho r = \rho R^2 - R^2 \epsilon_0 + Q_1 2\pi r h \epsilon_0$$

$$\text{Or } E_2 r = Q_1 2\pi r h \epsilon_0 \text{ alors } E_\rho r = \rho R^2 - R^2 \epsilon_0$$

Examen d'Électricité 1 (SMP₂)
Session de rattrapage 2016

Électrocinétique

On se propose de calculer les intensités des courants I_1 , I_2 et I_3 circulant dans les branches du circuit de la figure 1 et ce en utilisant trois méthodes différentes.

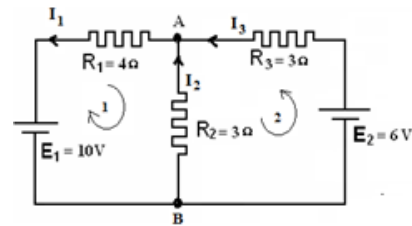


Figure 2

A) Théorème de Millman

1. Montrer que potentiel V_O de la figure 2 s'écrit :

$$V_O = \frac{\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

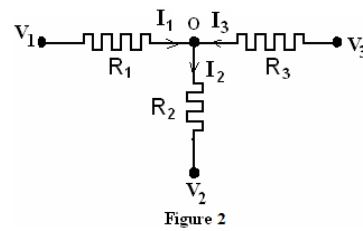


Figure 2

2. En utilisant la formule précédente, calculer le potentiel au nœud A du circuit de la figure 1 et en déduire les valeurs algébriques des intensités des différents courants.

$V_A = \dots\dots\dots$

$I_1 = \dots\dots\dots$, $I_2 = \dots\dots\dots$, $I_3 = \dots\dots\dots$

B) Lois de Kirchhoff

1. Etablir la loi des nœuds et la loi des mailles relative aux mailles 1 et 2 du circuit de la figure 1.

•
•

2. Donner le système d'équations à deux inconnus I_1 et I_2 .

..
.

3. Calculer les valeurs algébriques des intensités des courants I_1 , I_2 et I_3 .

$I_1 = \dots\dots\dots$, $I_2 = \dots\dots\dots$, $I_3 = \dots\dots\dots$

C) Théorème de thévenin

En appliquant le théorème de thévenin, au circuit de la figure 1 calculer les valeurs algébriques des courants :

1. **Courant I_1**

- a. Donner l'expression de la résistance du générateur de Thévenin R_{th} vue entre A et B en fonction de R_2 et R_3 .

$R_{th} = \dots\dots\dots$, A.N:
 $R_{th} = \dots\dots\dots$

- b. Donner l'expression de la force électromotrice du générateur de Thévenin E_{th} vue entre A et B en fonction de R_2 et R_3 et E_2 .

$E_{th} = \dots\dots\dots$, A.N:
 $E_{th} = \dots\dots\dots$

- a. Donner l'expression du courant I_1 en fonction de R_1 et R_{th} , E_1 et E_{th}

I_1 = $\dots\dots\dots$

A.N: $I_1 = \dots\dots\dots$

2. Courant I_3

- a. Donner l'expression de la résistance du générateur de Thévenin R_{th} vue entre A et B en fonction de R_2 et R_1 .

$R_{th} = \dots\dots\dots$,
 A.N: $R_{th} = \dots\dots\dots$

- b. Donner l'expression de la force électromotrice du générateur de Thévenin E_{th} vue entre A et B en fonction de R_2 et R_1 et E_1 .

$E_{th} = \dots\dots\dots$,
 A.N: $E_{th} = \dots\dots\dots$

- c. Donner l'expression du courant I_3 en fonction de R_3 et R_{th} , E_2 et E_{th} . En déduire I_2

$I_3 = \dots\dots\dots$ A.N: $I_3 = \dots\dots\dots$,
 $I_2 = \dots\dots\dots$

Electrostatique

On considère le référentiel $\mathcal{R}(x, y, z)$ orthonormé direct auquel est associé la base (i, j, k) . À \mathcal{R} est également associé la base cylindrique $(ur, u\varphi, uz)$. le champ électrostatique est supposé avoir la forme $\vec{E}(r, \varphi, z) = E(r)\vec{u}_r$.

- C) On considère un fil et un cylindre creux \mathcal{D}_1 de rayon R_1 infinis chargés respectivement d'une densité linéique de charge λ et une densité surfacique σ .

9. En appliquant le théorème de Gauss calculer :

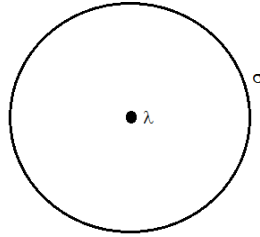
a- Le champ $E_1(r)$ créé par le fil infini en tout point de l'espace.

b- Le champ $E_2(r)$ créé par le cylindre infini en tout point de l'espace.

- D) On place le fil à l'intérieur du cylindre \mathcal{D}_1 . Le système ainsi formé possède le même axe de révolution.

1. En utilisant le principe de superposition donner le champ $E_3(r)$ produit par le système formé par le fil et le cylindre en tout point de l'espace.

2. Tracer sur la figure ci-dessous l'allure des lignes de champ et les surfaces équipotentielles à l'intérieur et l'extérieur du cylindre.



- E) On place le système (fil et cylindre \mathcal{D}_1) à l'intérieur d'un cylindre \mathcal{D}_2 de rayons R_2 et R_3 ($R_2 < R_3$). \mathcal{D}_2 est chargé avec une densité volumique de charges positive ρ répartie dans l'espace compris entre R_2 et R_3 . Le nouveau système possède le même axe de révolution.
1. En appliquant le théorème de Gauss calculer le champ $E(r)$ produit par le nouveau système en un point $M(r > R_3)$.
 2. En appliquant le principe de superposition trouver le champ produit par distribution volumique de charge au point $M(r > R_3)$.

Correction d'Électricité 1 (SMP₂) Session de rattrapage 2016

Électrocinétique

On se propose de calculer les intensités des courants I_1 , I_2 et I_3 circulant dans les branches du circuit de la figure 1 et ce en utilisant trois méthodes différentes.

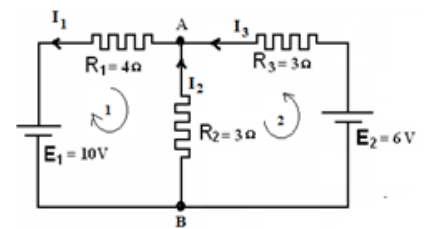


Figure 2

D) Théorème de Millman

3. Montrer que potentiel V_O de la figure 2 s'écrit :

$$V_O = \frac{\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

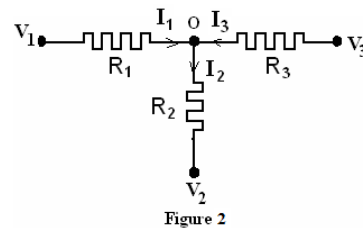


Figure 2

$$I_1 + I_3 = I_2, \quad V_1 - V_O = R_1 I_1, \quad V_O - V_2 = R_2 I_2, \quad V_3 - V_O = R_3 I_3$$

$$I_1 = \frac{V_1 - V_O}{R_1}, \quad I_2 = \frac{V_O - V_2}{R_2}, \quad I_3 = \frac{V_3 - V_O}{R_3}$$

$$\frac{V_1 - V_O}{R_1} + \frac{V_3 - V_O}{R_3} = \frac{V_O - V_2}{R_2} \Rightarrow V_O = \frac{\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

4. En utilisant la formule précédente, calculer le potentiel au nœud A du circuit de la figure 1 et en déduire les valeurs algébriques des intensités des différents courants.

$$V_A = 4,9 \text{ V}$$

$$I_1 = -1,27 \text{ A}, \quad I_2 = -1,63 \text{ A}, \quad I_3 = 0,36 \text{ A}$$

E) Lois de Kirchhoff

4. Etablir la loi des nœuds et la loi des mailles relative aux mailles 1 et 2 du circuit de la figure 1.

$$I_1 = I_2 + I_3,$$

$$4I_1 + 3I_3 = -10,$$

$$I_2 - I_3 = -2,$$

5. Donner le système d'équations à deux inconnus I_1 et I_2 .

$$-I_1 + 2I_2 = -2,$$

$$4I_1 + 3I_2 = -10,$$

6. Calculer les valeurs algébriques des intensités des courants I_1 , I_2 et I_3 .

$$I_1 = -1,27 \text{ A} \quad , \quad I_2 = -1,63 \text{ A} \quad , \quad I_3 = 0,36 \text{ A}$$

F) Théorème de thévenin

En appliquant le théorème de thévenin, au circuit de la figure 1 calculer les valeurs algébriques des courants :

3. Courant I_1

c. Donner l'expression de la résistance du générateur de Thévenin R_{th} vue entre A et B en fonction de R_2 et R_3 .

$$R_{th} = R_3 R_2 R_2 + R_3 \quad , \quad \text{A.N:} \quad R_{th} = 1,5 \, \Omega$$

d. Donner l'expression de la force électromotrice du générateur de Thévenin E_{th} vue entre A et B en fonction de R_2 et R_3 et E_2 .

$$E_{th} = E_2 R_2 R_2 + R_3 \quad , \quad \text{A.N:} \quad E_{th} = 3 \text{ V}$$

b. Donner l'expression du courant I_1 en fonction de R_1 et R_{th} , E_1 et E_{th}

$$I_1 = \frac{E_{th} - E_1 R_1}{R_{th}}$$

$$\text{A.N:} \quad I_1 = -1,27 \text{ A}$$

4. Courant I_3

d. Donner l'expression de la résistance du générateur de Thévenin R_{th} vue entre A et B en fonction de R_2 et R_1 .

$$R_{th} = R_1 R_2 R_2 + R_1 \quad ,$$

$$\text{A.N:} \quad R_{th} = 1,71 \, \Omega$$

e. Donner l'expression de la force électromotrice du générateur de Thévenin E_{th} vue entre A et B en fonction de R_2 et R_1 et E_1 .

$$E_{th} = E_1 R_2 R_2 + R_1 \quad , \quad \text{A.N:} \quad E_{th} = 4,28 \text{ V}$$

f. Donner l'expression du courant I_3 en fonction de R_3 et R_{th} , E_2 et E_{th} . En déduire I_2

$$I_3 = \frac{E_2 - E_{th} R_3}{R_{th}}$$

$$I_2 = -1,63 \text{ A}$$

Electrostatique

On considère le référentiel $\mathcal{R}(x, y, z)$ orthonormé direct auquel est associé la base (i, j, k) . À \mathcal{R} est également associé la base cylindrique (u_r, u_φ, u_z) . le champ électrostatique est supposé avoir la forme $\vec{E}(r, \varphi, z) = E(r)\vec{u}_r$.

F) On considère un fil et un cylindre creux \mathcal{D}_1 de rayon R_1 infinis chargés respectivement d'une densité linéique de charge λ et une densité surfacique σ .

10. En appliquant le théorème de Gauss calculer :

c- Le champ $E_1(r)$ créé par le fil infini en tout point de l'espace.

On applique le théorème à un cylindre de rayon r et de hauteur h . Le champ est radial et perpendiculaire à la surface latérale du cylindre alors les flux à travers les surfaces de bases du cylindre sont nuls :

$$\text{Cylindre } E_1 \cdot ds = \text{surface latérale } E_1 \cdot ds = \text{surface latérale } E_1 r ds = Q_{\text{int}} \epsilon_0$$

$$E_1 r 2\pi r h = \lambda h \epsilon_0 \quad \text{alors} \quad E_1 r = \lambda 2\pi \epsilon_0 r$$

d- Le champ $E_2(r)$ créé par le cylindre infini en tout point de l'espace.

On applique le théorème à un cylindre de rayon r et de hauteur h . Le champ est radial et perpendiculaire à la surface latérale du cylindre alors les flux à travers les surfaces de bases du cylindre sont nuls :

- $r < R_1$

$$\text{Cylindre } E_2 \cdot ds = 0 \quad \text{alors} \quad E_2 r < R_1 = 0$$

- $r > R_1$

$$\text{Cylindre } E_2 \cdot ds = \text{surface latérale } E_2 \cdot ds = \text{surface latérale } E_2 r ds = Q_{\text{int}} \epsilon_0$$

$$E_2 r 2\pi r h = \sigma 2\pi R_1 h \epsilon_0 \quad \text{alors} \quad E_2 r > R_1 = \sigma R_1 \epsilon_0 r$$

G) On place le fil à l'intérieur du cylindre \mathcal{D}_1 . Le système ainsi formé possède le même axe de révolution.

3. En utilisant le principe de superposition donner le champ $E_3(r)$ produit par le système formé par le fil et le cylindre en tout point de l'espace.

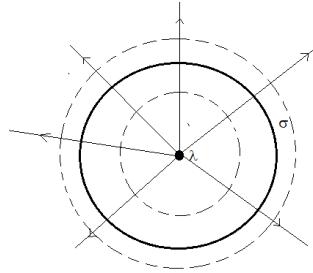
- $r < R_1$

$$E_3(r < R_1) = E_1 r + E_2 r < R_1 = \lambda 2\pi \epsilon_0 r + 0 = \lambda 2\pi \epsilon_0 r$$

- $r > R_1$

$$E_3(r > R_1) = E_1 r + E_2 r > R_1 = \lambda 2\pi \epsilon_0 r + \sigma R_1 \epsilon_0 r$$

4. Tracer sur la figure ci-dessous l'allure des lignes de champ et les surfaces équipotentielles à l'intérieur et l'extérieur du cylindre.



- H) On place le système (fil et cylindre \mathcal{D}_1) à l'intérieur d'un cylindre \mathcal{D}_2 de rayons R_2 et R_3 ($R_2 < R_3$). \mathcal{D}_2 est chargé avec une densité volumique de charges positive ρ répartie dans l'espace compris entre R_2 et R_3 . Le nouveau système possède le même axe de révolution.
3. En appliquant le théorème de Gauss calculer le champ $E_4(r)$ produit par le nouveau système en un point $M(r > R_3)$.

Cylindre $E_4 ds = \text{surface latérale}$ $E_4 ds = \text{surface latérale}$ $E_4 r ds = Q_{\text{int}} \epsilon_0$

$$E_4 2\pi r h = \lambda h \epsilon_0 + \sigma 2\pi R_1 h \epsilon_0 + \rho \pi h (R_3^2 - R_2^2) \epsilon_0$$

$$E_4 r = \lambda 2\pi r \epsilon_0 + \sigma R_1 r \epsilon_0 + \rho (R_3^2 - R_2^2) r \epsilon_0$$

4. En appliquant le principe de superposition trouver le champ produit par distribution volumique de charge au point $M(r > R_3)$.

$$E_{4r > R_3} = E_{1r} + E_{2r > R_1} + E_{\text{distribution } r > R_3} = \lambda 2\pi r \epsilon_0 + \sigma R_1 r \epsilon_0 + \rho (R_3^2 - R_2^2) r \epsilon_0$$

Alors

$$E_{\text{distribution } r > R_3} = \rho (R_3^2 - R_2^2) r \epsilon_0$$

Examen d'Électricité 1
(SMP₂, SMC₂) Session normale

N° d'examen :	CNE :
Nom & Prénom :	CIN :
Filière :	

Problème

I- On se propose de calculer en un point M de coordonnées cylindriques (ρ, φ, z) le champ créé par une portion d'un fil portée par l'axe (Oz) , de charge linéique uniforme λ positive, comprise entre les points P_1 et P_2 repérés respectivement par les angles β_2 et β_1 (Fig.1).

- Donner dans la base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_z)$ l'expression du champ élémentaire $d\vec{E}(M)$ créé au point $M(\rho, 0, 0)$ par un élément du fil de longueur dz centré sur le point $P(0, 0, z)$, repéré par l'angle $\alpha = (\widehat{OMP})$ en fonction de α, λ, L, dz et ϵ_0 où $L = PM$.
- En adoptant le changement de variables $z = \rho(\tan(\alpha))$, donner l'expression du champ total $\vec{E}(M)$ en fonction de $\rho, \lambda, \epsilon_0, \beta_1$ et β_2 .
- En déduire le champ $\vec{E}(M)$ produit par un fil infini uniformément chargé.

II- On considère un fil conducteur cylindrique B mince, de longueur h infinie et de rayon R , portant une densité linéique de charge positive λ (Fig.2).

- Montrer par des considérations de symétrie et d'invariances que le champ créé par un fil infini est radial et ne dépend que de ρ ($\vec{E} = E(\rho)\vec{u}_\rho$).
- En appliquant le théorème de Gauss, retrouver l'expression du champ de la question (I.c) en un point M placé à une distance ρ du fil (Fig.2).
- En déduire à constante additive près le potentiel $V(M)$.
- Peut-on considérer l'infini comme origine du potentiel ($V(\infty) = 0$) ? Justifier.
- On place une charge ponctuelle positive q au point M . Quelle est son énergie électrostatique $E_q(\rho)$?
- Sous l'action du champ électrostatique, la charge se déplace d'une distance $MF = \rho_F - \rho_M$; un travail w_0 s'effectue au cours de ce déplacement. En utilisant le résultat de la question précédente (II.5) calculer w_0 (ρ_M et ρ_F sont respectivement les distances séparant les points M et F de l'axe du fil).
- Un deuxième fil A identique portant la densité linéique de charge $-\lambda$ est placé parallèlement au premier fil (Fig.3). Les axes des deux fils sont séparés d'une distance a .
 - En utilisant le principe de superposition calculer le potentiel au point M situé à la distance ρ de l'axe du fil B et à la distance ρ' de l'axe du fil A en fonction de $\lambda, \epsilon_0, \rho'$ et ρ . On prend comme origine du potentiel le point O ($V(O) = 0$) situé à la même distance $\frac{a}{2}$ des deux fils.
 - Quelle est la surface équipotentielle dont le potentiel est nul ?

- c) En utilisant la question (7.a) et en considérant $a \gg R$, calculer le potentiel à la surface de chaque conducteur V_A et V_B . En déduire la différence de potentiel entre les deux fils ($V_B - V_A$).
- d) En déduire la capacité par unité de longueur ($h = 1m$) de cet ensemble bifilaire.
- e) Soient trois plans : π perpendiculaire aux fils, π' parallèle aux fils et passant par O, et π'' le plan contenant les deux fils.
- e-1) Quelles sont les propriétés de symétrie de chacun de ces plans ?
- e-2) En déduire la direction du champ total produit par l'ensemble bifilaire en chacun de ces plans.
- e-3) Calculer la circulation du champ total entre deux points du plan π' ? En déduire la nature du plan π' .

III- On se place dans les conditions de la figure 4. Les deux fils sont perpendiculaires au plan (Oxy). On désigne par $A(-a/2, 0)$ et $B(a/2, 0)$ les intersections respectives du fil chargé $(-\lambda)$ et celui chargé $(+\lambda)$ avec le plan (Oxy). L'origine O du repère (Oxy) est le milieu de AB ($AB = a$). Soit M un point du plan (Oxy) repéré en coordonnées polaires par (r, θ) avec $r = OM$ et $\theta = (\widehat{BOM})$.

- a- Dans le cadre de l'approximation dipolaire ($a/r \ll 1$), montrer que AM et BM peuvent s'écrire sous la forme: $AM \cong r \left(1 + \frac{a}{2r} \cos \theta \right)$ et $BM \cong r \left(1 - \frac{a}{2r} \cos \theta \right)$
- b- En utilisant les résultats des questions (II.7.a) et (III.a), montrer que le potentiel au point M peut s'écrire sous la forme : $V(M) \cong \frac{\lambda a \cos \theta}{2\pi \epsilon_0 r}$. En déduire le moment dipolaire.
- c- Donner les composantes (radiale E_r et orthoradiale E_θ), le module et la direction du champ $\vec{E}(M)$.

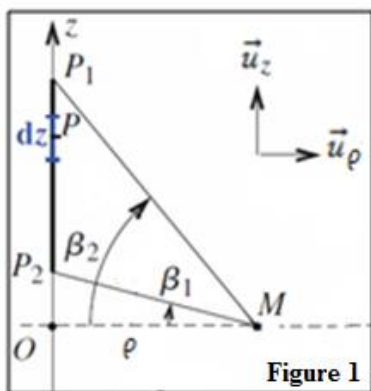


Figure 1

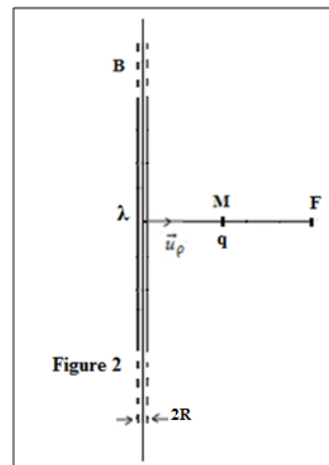


Figure 2

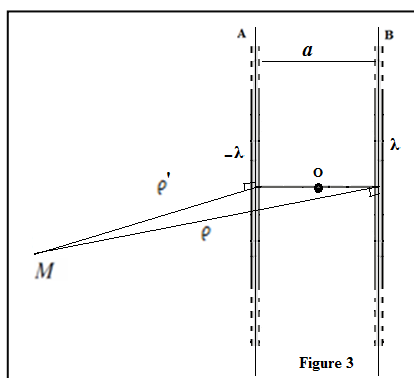


Figure 3

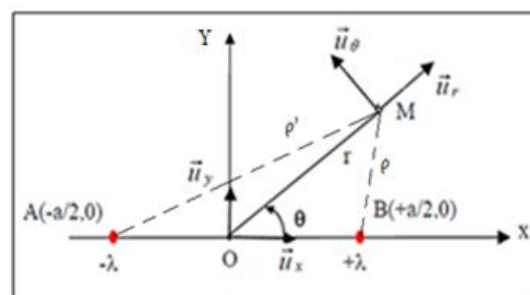


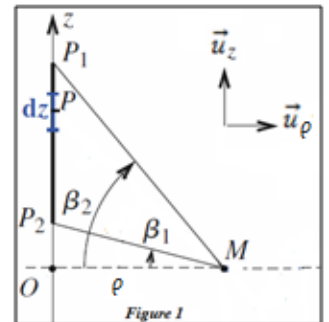
Figure 4

Examen d'Électricité 1
(SMP₂, SMC₂)
Session normale

Problème

I- On se propose de calculer en un point M de coordonnées cylindriques (ρ, φ, z) le champ créé par une portion d'un fil porté par l'axe (Oz) , de charge linéique uniforme λ positive, comprise entre les points P_1 et P_2 repérés respectivement par les angles β_2 et β_1 (Fig.1).

d- Donner dans la base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_z)$ l'expression du champ élémentaire $d\vec{E}(M)$ créé au point $M(\rho, 0, 0)$ par un élément du fil de longueur dz centré sur le point $P(0, 0, z)$, repéré par l'angle $\alpha = (\vec{OMP})$ en fonction de $\alpha, \lambda, \ell, dz$ et ε_0 où $\ell = PM$.



$$d\vec{E}(M) = \frac{\lambda dz}{4\pi\varepsilon_0 \ell^2} \vec{U} = \frac{\lambda dz}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(\cos\alpha \vec{u}_r - \sin\alpha \vec{u}_z)}{\ell^2} \quad \text{où} \quad \vec{U} = \frac{\vec{PM}}{PM}$$

e- En adoptant le changement de variables $z = \rho(\tan(\alpha))$, donner l'expression du champ total $\vec{E}(M)$ en fonction de $\rho, \lambda, \varepsilon_0, \beta_1$ et β_2 .

$$z = \rho(\tan(\alpha)) \Rightarrow dz = d(\rho \tan(\alpha)) = \frac{\rho d\alpha}{\cos^2(\alpha)} \quad \text{et} \quad \ell = \frac{\rho}{\cos(\alpha)} \quad \text{alors}$$

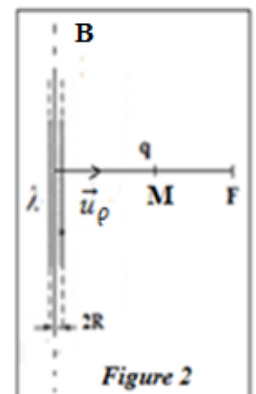
$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 \rho} (\sin\beta_2 - \sin\beta_1) \vec{u}_\rho + (\cos\beta_2 - \cos\beta_1) \vec{u}_z$$

f- En déduire le champ $\vec{E}(M)$ produit par un fil infini uniformément chargé.

$$\text{Pour un fil infini } \beta_1 \text{ tend vers } -\frac{\pi}{2} \text{ et } \beta_2 \text{ vers } \frac{\pi}{2} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \rho} \vec{u}_\rho$$

II- On considère un fil conducteur cylindrique **B mince**, de longueur h infinie et de rayon R , portant une densité linéique de charge positive λ (Fig.2).

8. Montrer par des considérations de symétrie et d'invariances que le champ créé par un fil infini est radial et ne dépend que de ρ ($\vec{E} = E(\rho)\vec{u}_\rho$).



* Pour tout point M, le plan OzM et le plan perpendiculaire à Oz passant par M sont des plans de symétrie. Par conséquent le champ \vec{E} au point M est parallèle à ces deux plans et donc dirigé suivant leur intersection : $\vec{E} = E(\rho, \varphi, z)\vec{u}_\rho$.

* La distribution reste invariante par toute rotation autour de l'axe Oz , ainsi que pour toute translation le long de cet axe alors $\vec{E}(\rho, \varphi, z) = E(\rho)\vec{u}_\rho$.

9. En appliquant le théorème de Gauss, retrouver l'expression du champ de la question (I.c) en un point M placé à une distance ρ du fil (Fig.2).

La surface de Gauss sera un cylindre de rayon ρ , de hauteur h ayant le même axe que le fil. Le champ est radial et perpendiculaire à la surface latérale du cylindre alors les flux à travers les surfaces de bases du cylindre sont nuls :

$$\oiint_{\text{Cylindre}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iint_{\text{surface latérale}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iint_{\text{surface latérale}} E(\rho) ds = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

Q_{int} est la charge contenue dans le cylindre de hauteur h qui est égale à λh .

$$E(\rho)2\pi\rho h = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0} \text{ alors } \vec{E}(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\rho}\vec{u}_\rho$$

10. En déduire à constante additive près le potentiel $V(M)$.

$$\vec{E}(\rho) = -\overrightarrow{\text{grad}} V \Rightarrow V(\rho) = -\int E(\rho) d\rho = -\int \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\rho} d\rho = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln(\rho) + k$$

$$V(\rho) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln(\rho) + k$$

11. Peut-on considérer l'infini comme origine du potentiel ($V(\infty) = 0$) ? Justifier.

On ne peut pas considérer l'infini comme origine des potentiels car il y a des charges à l'infini

12. On place une charge ponctuelle positive q au point M. Quelle est son énergie électrostatique $E_q(\rho)$?

$$E_p(M) = qV(M) = -\frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln(\rho) + qk$$

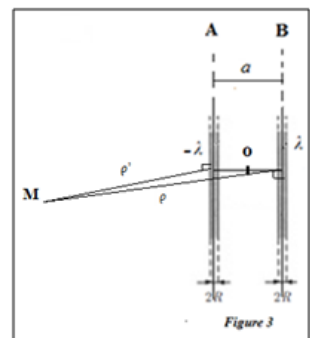
13. Sous l'action du champ électrostatique, la charge se déplace d'une distance $d = MF = \rho_F - \rho_M$; un travail w_0 s'effectue au cours de ce déplacement. En utilisant le résultat de la question précédente (II.5) calculer w_0 (ρ_M et ρ_F sont respectivement les distances séparant les points M et F de l'axe du fil).

La charge est soumise à la force $\vec{F} = q\vec{E}$, au cours d'un déplacement élémentaire $\vec{d\rho}$ de la charge q la force électrostatique effectue un travail élémentaire dw donné par :

$$dw = \vec{F} \cdot \vec{d\rho} = q\vec{E} \cdot \vec{d\rho} = -qdV = -dE_p \Rightarrow w_0 = E_p(M) - E_p(F) = \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(\rho_F/\rho_M)$$

Un deuxième fil A identique portant la densité linéique de charge $-\lambda$ est placé parallèlement au premier fil (Fig.3). Les axes des deux fils sont séparés d'une distance a .

- f) En utilisant le principe de superposition calculer le potentiel au point M situé à la distance ρ de l'axe du fil B et à la distance ρ' de l'axe du fil A en fonction de $\lambda, \epsilon_0, \rho'$ et ρ . On prend comme origine du potentiel le point O ($V(O) = 0$) situé à la même distance $\frac{a}{2}$ des deux fils.



$$V_A(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(\rho') + k \quad \text{et} \quad V_B(M) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(\rho) + k'$$

Le principe de superposition donne :

$$V(M) = V_A(M) + V_B(M) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(\rho) + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(\rho') + k + k' = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{\rho'}{\rho}\right) + C^{ste}$$

Or au point O on a $\rho = \rho' = \frac{a}{2}$ et $V(O) = 0$ alors $C^{ste} = 0 \Rightarrow V(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)$

- g) Quelle est la surface équipotentielle dont le potentiel est nul ?

$$V(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{\rho'}{\rho}\right) = 0 \Rightarrow \rho' = \rho. \text{ La surface équipotentielle est un plan parallèle aux deux fils et passant par le point O.}$$

- h) En utilisant la question (7.a) et en considérant $a \gg R$, calculer le potentiel à la surface de chaque conducteur V_A et V_B . En déduire la différence de potentiel entre les deux fils ($V_B - V_A$).

Pour le fil A : $\rho = a - R \cong a$; $\rho' = R$ alors $V_A = V_- = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{R}{a}\right)$

Pour le fil B : $\rho = R$; $\rho' = a - R \cong a$ alors $V_B = V_+ = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{a}{R}\right) = -V_A$

$$V_B - V_A = 2V_A = \frac{\lambda}{\pi \epsilon_0} \ln\left(\frac{a}{R}\right)$$

i) En déduire la capacité par unité de longueur ($h = 1m$) de cet ensemble bifilaire.

D'où, la capacité C de l'ensemble bifilaire de longueur h est donnée par : $C = \frac{\lambda h}{V_B - V_A}$

La capacité par unité de longueur ($h = 1m$) est $C_\ell = \frac{\pi \epsilon_0}{\ln\left(\frac{a}{R}\right)}$

j) Soient trois plans : π perpendiculaire aux fils, π' parallèle aux fils et passant par O, et π'' le plan contenant les deux fils.

e-1) Quelles sont les propriétés de symétrie de chacun de ces plans ?

π et π'' sont des plans de symétrie, π' est un plan d'antisymétrie.

e-2) En déduire la direction du champ total produit par l'ensemble bifilaire en chacun de ces plans.

π' est un plan d'antisymétrie alors le champ est perpendiculaire à ce plan .

π et π'' Sont des plans de symétrie alors le champ est contenu dans ces plans.

e-3) Calculer la circulation du champ total entre deux points quelconques du plan π' ? En déduire la nature du plan π' .

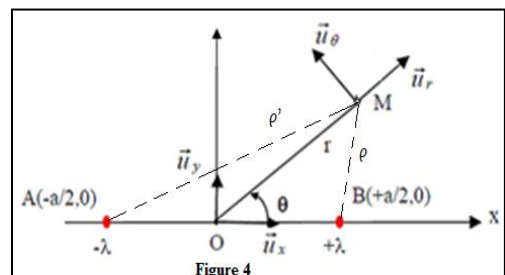
Soient N et H deux points du plan π' . La circulation entre ces deux points est donnée par :

$$dC = -dV \Rightarrow C_{NH} = \int_N^H \overrightarrow{E(r)} \cdot d\vec{\ell} = V(N) - V(H)$$

Or $d\vec{\ell}$ est contenu dans le plan π' et $\overrightarrow{E(r)}$ est perpendiculaire au plan car c'est un plan d'antisymétrie alors $C_{xy} = 0$.

$C_{xy} = 0$ alors $V(N) = V(H) = V(O) = 0 \Rightarrow$ le plan π' est une surface équipotentielle à potentielle nul.

III- On se place dans les conditions de la figure 4. Les deux fils sont perpendiculaires au plan (Oxy). On désigne par $A(-a/2, 0)$ et $B(a/2, 0)$ les intersections respectives du fil chargé $(-\lambda)$ et celui chargé $(+\lambda)$ avec le plan (Oxy). L'origine O du repère (Oxy) est



le milieu de AB ($AB = a$). Soit M un point du plan (Oxy) repéré en coordonnées polaires par (r, θ) avec $r = OM$ et $\theta = (\widehat{BOM})$.

d- Dans le cadre de l'approximation dipolaire ($a/r \ll 1$), montrer que AM et BM peuvent s'écrire sous la forme: $AM \cong r \left(1 + \frac{a}{2r} \cos \theta\right)$ et $BM \cong r \left(1 - \frac{a}{2r} \cos \theta\right)$

$$\bullet \quad \|\vec{AM}\|^2 = (\vec{AO} + \vec{OM})^2 = \vec{AO}^2 + 2\vec{AO} \cdot \vec{OM} + \vec{OM}^2 \quad \text{où} \quad \|\vec{OM}\| = r; \quad \|\vec{AO}\| = \frac{a}{2}$$

$$\text{et} \quad \vec{AO} \cdot \vec{OM} = \frac{ar}{2} \cos(\theta)$$

$$\text{On a } \|\vec{AM}\|^2 = r^2 + a \cdot r \cos(\theta) + \frac{a^2}{4} = r^2 \left(1 + \frac{a}{r} \cos(\theta) + \frac{a^2}{4r^2}\right)$$

$$\text{Puisque } a/r \ll 1, \text{ on a : } \frac{a^2}{4r^2} \ll \frac{a}{r} \text{ alors } \|\vec{AM}\|^2 \cong r^2 \left(1 + \frac{a}{r} \cos(\theta)\right)$$

$$\|\vec{AM}\| \cong r \left(1 + \frac{a}{r} \cos(\theta)\right)^{1/2} \text{ or puisque } \frac{a}{r} \cos(\theta) \ll 1 \text{ alors } AM \cong r \left(1 + \frac{a}{2r} \cos(\theta)\right)$$

$$\bullet \quad \|\vec{BM}\|^2 = (\vec{BO} + \vec{OM})^2 = \vec{BO}^2 + 2\vec{BO} \cdot \vec{OM} + \vec{OM}^2 \quad \text{où} \quad \|\vec{OM}\| = r; \quad \|\vec{BO}\| = \frac{a}{2}$$

$$\text{et} \quad \vec{BO} \cdot \vec{OM} = -\frac{ar}{2} \cos(\theta)$$

$$\text{On a } \|\vec{BM}\|^2 = r^2 - a \cdot r \cos(\theta) + \frac{a^2}{4} = r^2 \left(1 - \frac{a}{r} \cos(\theta) + \frac{a^2}{4r^2}\right)$$

$$\text{Puisque } a/r \ll 1, \text{ on a : } \frac{a^2}{4r^2} \ll \frac{a}{r} \text{ alors } \|\vec{BM}\|^2 \cong r^2 \left(1 - \frac{a}{r} \cos(\theta)\right)$$

$$\|\vec{BM}\| \cong r \left(1 - \frac{a}{r} \cos(\theta)\right)^{1/2} \text{ or puisque } \frac{a}{r} \cos(\theta) \ll 1 \text{ alors } BM \cong r \left(1 - \frac{a}{2r} \cos(\theta)\right)$$

e- En utilisant les résultats des questions (II.7.a) et (III.a), montrer que le potentiel au point M peut s'écrire sous la forme : $V(M) \cong \frac{\lambda a \cos \theta}{2\pi \epsilon_0 r}$. En déduire le moment dipolaire.

$$\text{On a d'après la question (II.7.a) : } V(M) = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln \left(\frac{\rho}{\rho'} \right)$$

$$\text{et d'après la question (III.a) : } \rho' = AM \text{ et } \rho = BM \text{ alors } V(M) = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln \left(\frac{AM}{BM} \right)$$

$$\begin{aligned}
 V(M) &= \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0} \ln \left(\frac{AM}{BM} \right) = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0} \ln \left(\frac{1 + \frac{a}{2r} \cos(\theta)}{1 - \frac{a}{2r} \cos(\theta)} \right) \\
 &= \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0} \left(\ln \left(1 + \frac{a}{2r} \cos(\theta) \right) - \ln \left(1 - \frac{a}{2r} \cos(\theta) \right) \right) \\
 &\cong \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0} \left(\frac{a}{2r} \cos(\theta) + \frac{a}{2r} \cos(\theta) \right) = \frac{\lambda a \cos(\theta)}{2\pi \varepsilon_0 r}
 \end{aligned}$$

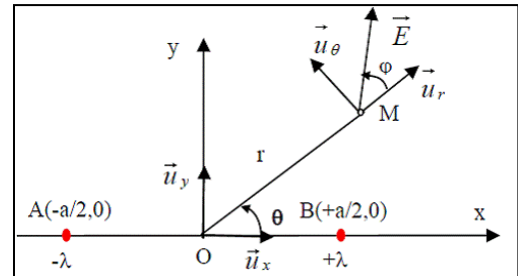
Le moment dipolaire : $\vec{p} = Q \overline{AB} = Qa \vec{u}_x \Rightarrow p = (\lambda \ell)a$ où ℓ : longueur du fil

f- Donner les composantes (radiale E_r et orthoradiale E_θ), le module et la direction du champ $\vec{E}(M)$.

$$* \vec{E}(M) = \begin{cases} E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\lambda a \cos \theta}{2\pi \varepsilon_0 r^2} \\ E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{\lambda a \sin \theta}{2\pi \varepsilon_0 r^2} \end{cases}$$

$$* E = (E_r^2 + E_\theta^2)^{1/2} = \frac{\lambda a}{2\pi \varepsilon_0 r^2}$$

$$* \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \theta$$



On donne :

- Pour $x \ll 1$, $\ln(1+x) \cong x$ (au premier ordre)
- $\overrightarrow{\operatorname{grad} f} = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta$

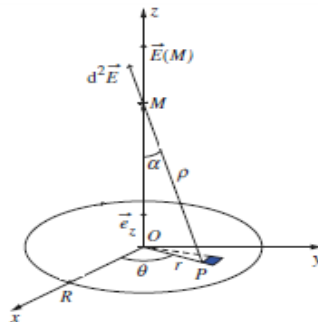
Examen d'Électricité 1
(SMP₂, SMC₂) Session de Rattrapage

N° d'examen :	CNE :
Nom & Prénom :	CIN :
Filière :	N° salle d'examen :

Electrostatique

I- Soit le disque de la figure ci-dessous de centre O et de rayon R uniformément chargé en surface avec la densité σ positive et uniforme.

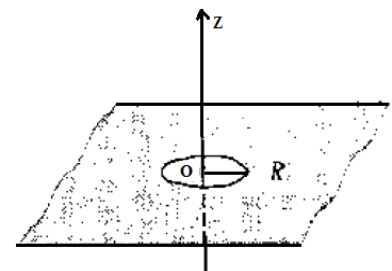
1. Montrer qualitativement que le champ créé par le disque au point M de son axe est porté par l'axe Oz ?



2. Donner l'expression de l'élément de surface ds en coordonnées polaires. En déduire sa charge dq .
3. Donner l'expression vectorielle du champ élémentaire $\vec{dE}_z(M)$ créé par ds au point M en fonction de $\sigma, r, dr, d\theta, \epsilon_0$ et z .
4. Trouver l'expression vectorielle du champ électrostatique $\vec{E}_z(M)$ créé en un point M de l'axe de révolution du disque ($z > 0$ et $z < 0$) ?
5. En déduire le champ produit par un plan infini chargé avec la même densité surfacique σ .

II- On considère une plaque conductrice assimilée à un plan infini uniformément chargé en surface avec une densité positive σ .

1. Etudier les symétries et les invariances de cette distribution de charges.
2. En appliquant le théorème de Gauss, calculer le **vecteur** champ \vec{E} produit par la plaque en tout point de l'espace.
3. On pratique une ouverture circulaire, de rayon R, sur la plaque chargée (Figure 2). En utilisant les résultats des questions **I.4** et **II.2** et en appliquant le principe de superposition, déterminer le champ électrostatique créé en un point $M(z > 0)$ de l'axe du trou.

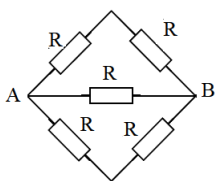
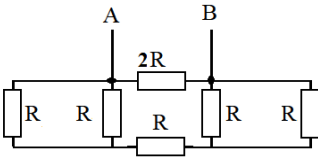
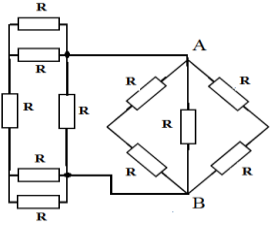


II- On considère maintenant deux plaques infinies parallèles : A dans le plan (yOx) uniformément chargée en surface avec la densité surfacique de charges $\sigma > 0$ et B , dans le plan d'équation $z = e$, chargée avec la densité surfacique de charges $-\sigma$.

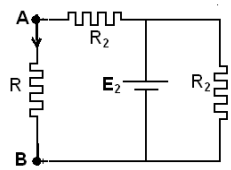
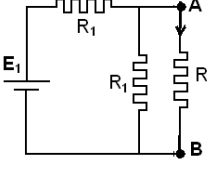
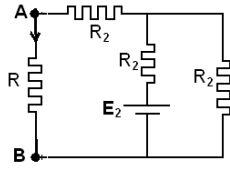
1. En utilisant le principe de superposition, exprimer le **vecteur** champ $\vec{E}(M)$ en tout point de l'espace.
2. Si V_A est le potentielle de la plaque A et V_B est celui de la plaque B, exprimer $\Delta V = V_A - V_B$
3. Sur chacune des plaques, isolons deux régions identiques en regard de surface S et de charge Q . Exprimer la capacité C du condensateur ainsi formé en fonction de ϵ_0 , S et e .
4. On isole le condensateur et on introduit entre ses armatures une plaque métallique D initialement neutre d'épaisseur x parallèle aux armatures A et B. On appelle e_1 et e_2 les distances de ses faces aux armatures.
 - a. Décrire les phénomènes électriques qui se produisent lorsqu'on introduit cette plaque et tracer sur le schéma la forme des lignes du champ et les surfaces équipotentiels.
 - b. Déterminer le vecteur champ dans les trois zones 1, 2 et 3 de l'espace inter-armatures.
 - c. Calculer la nouvelle différence de potentielle $\Delta V' = V_A - V_B$ en fonction de Q, e_1, e_2, ϵ_0 et S .
 - d. Calculer la nouvelle capacité C' du condensateur en fonction de e_1, e_2, ϵ_0 et S .
 - e. La capacité dépend-t-elle de la position de la plaque D ? Justifier.

Electrocinétique

- Déterminer la résistance équivalente au dipôle AB suivant
-

 <p>$R_{\text{equiv}} = \dots\dots\dots$</p>	 <p>$R_{\text{equiv}} = \dots\dots\dots$</p>	 <p>$R_{\text{equiv}} = \dots\dots\dots$</p>
--	--	--

- En appliquant le théorème de Thévenin calculer la résistance et la tension de Thévenin entre les bornes A et B des circuits suivants :

		
$R_{Th} =$	$R_{Th} =$	$R_{Th} =$
$E_{Th} =$	$E_{Th} =$	$E_{Th} =$

Correction d'examen d'Électricité 2017
(SMP₂, SMC₂) Session de Rattrapage

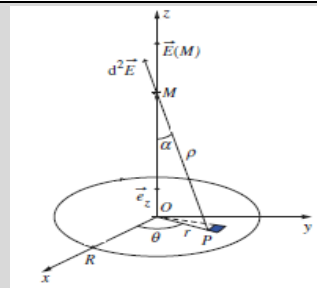
N° d'examen :	CNE :
Nom & Prénom :	CIN :
Filière :	N° salle d'examen :

Electrostatique

I- Soit le disque de la figure ci-dessous de centre O et de rayon R uniformément chargé en surface avec la densité σ positive et uniforme.

6. Montrer qualitativement que le champ créé par le disque au point M de son axe est porté par l'axe Oz ?

Considérons le champ d'un premier de surface dS du disque. Un deuxième élément dS' , symétrique du premier par rapport à O, donnera au point M un vecteur champ de même norme. La résultante de ces deux vecteurs champs sera portée par l'axe Oz. Il en est ainsi pour tout autre élément dS du disque.



7. Donner l'expression de l'élément de surface ds en coordonnées polaires. En déduire sa charge dq .

$$dS = r d\theta dr$$

$$dq = \sigma r d\theta dr$$

8. Donner l'expression vectorielle du champ élémentaire $\overrightarrow{dE_z}(M)$ créé par ds au point M en fonction de $\sigma, r, dr, d\theta, \epsilon_0$ et z .

$$\overrightarrow{dE_z} = \frac{\sigma ds \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0 \rho^2} \vec{e}_z$$

or $\cos \alpha = \frac{z}{\rho}$, $\rho = \sqrt{r^2 + z^2}$ et $dS = r d\theta dr$ alors

$$\overrightarrow{dE_z} = \frac{\sigma r dr d\theta}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z$$

9. Trouver l'expression vectorielle du champ électrostatique $\vec{E}_z(M)$ créé en un point M de l'axe de révolution du disque ($z > 0$ et $z < 0$) ?

$$E_z = \iint_S dE_z = \iint_S \frac{\sigma z}{4\pi\epsilon_0} \frac{rdr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} d\theta = \frac{\sigma z}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{rdr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$\text{d'où} \quad \vec{E}(z > 0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \vec{e}_z \quad \text{et}$$

$$\vec{E}(z < 0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[-1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \vec{e}_z$$

10. En déduire le champ produit par un plan infini chargé avec la même densité surfacique σ .

On tend R vers l'infini et on obtient :

$$E(z > 0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z \quad \quad E(z < 0) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z$$

II- On considère une plaque conductrice assimilée à un plan infini uniformément chargé en surface avec une densité positive σ . La plaque est sur le plan (xOy) .

4. Montrer par des raisons de symétrie que le champ produit par cette distribution est porté par l'axe Oz

Tout plan passant par M et perpendiculaire au plan chargé est un plan de symétrie électrostatique. Pour pouvoir appartenir à tous ces plans de symétrie, la direction du champ électrostatique doit nécessairement être la droite perpendiculaire au plan chargé passant par M.

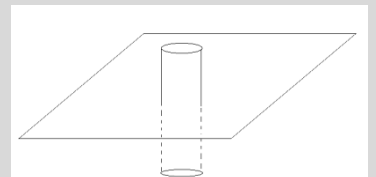
5. En appliquant le théorème de Gauss, calculer le **vecteur** champ \vec{E} produit par la plaque en tout point de l'espace.

On choisit comme surface de Gauss un cylindre C perpendiculaire à la plaque et de bases B_1 et B_2 .

$$\iint_C \vec{E} \cdot \vec{ds} = \iint_{B_1} \vec{E} \cdot \vec{ds} + \iint_{B_2} \vec{E} \cdot \vec{ds} + \iint_{L_{at}} \vec{E} \cdot \vec{ds}$$

or le champ est porté par Oz alors :

$$\iint_C \vec{E} \cdot \vec{ds} = 2 \iint_{B_1} E \cdot ds = 2ES_B = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma S_B}{\epsilon_0}$$



$$\vec{E}(z > 0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{E}(z < 0) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z$$

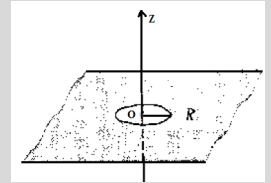
6. On pratique une ouverture circulaire, de rayon R , sur la plaque chargée (Figure 2). En utilisant les résultats des questions **I.4** et **II.2** et en appliquant le principe de superposition, déterminer le champ électrostatique \vec{E}_{Trou} créé en un point $M(z > 0)$ de l'axe du trou.

Le champ produit par la plaque infinie $\vec{E}_{\text{plaq}}(z > 0)$ au point M est la somme des champs créés à la fois par un disque de rayon R , \vec{E}_{Disq} et par la plaque avec ouverture \vec{E}_{Trou} :

$$\vec{E}_{\text{plaq}}(z > 0) = \vec{E}_{\text{Disq}} + \vec{E}_{\text{Trou}}$$

D'après **I.4** : $\vec{E}_{\text{Disq}}(z > 0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \vec{e}_z$

D'après **II.2** : $\vec{E}_{\text{plaq}}(z > 0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z$ alors $\vec{E}_{\text{Trou}} = \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \vec{e}_z$



III- On considère maintenant deux plaques infinies parallèles : **A** dans le plan (xOy) uniformément chargée en surface avec la densité surfacique de charges $\sigma > 0$ et **B**, dans le plan d'équation $z = e$, chargée avec la densité surfacique de charges $-\sigma$.

5. En utilisant le principe de superposition, exprimer le **vecteur** champ $\vec{E}(M)$ en tout point de l'espace.

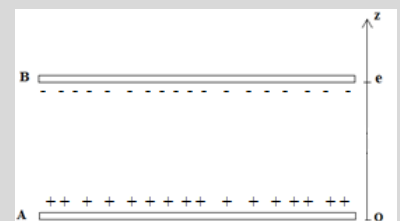
D'après la question II.2 :

$$\vec{E}_A(z > 0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{E}_A(z < 0) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z$$

$$\vec{E}_B(z > e) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{E}_B(z < e) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z$$

Ainsi le champ créé par le condensateur en tout point de l'espace sera :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_A(M) + \vec{E}_B(M) = \begin{cases} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z & \text{si } z \in]0, e[\\ 0 & \text{si }]-\infty, 0[\cup]e, +\infty[\end{cases}$$



6. Si V_A est le potentielle de la plaque A et V_B est celui de la plaque B, exprimer $\Delta V = V_A - V_B$

On utilise la circulation du champ le long de l'axe Oz :

$$\text{On a } dV = -\vec{E}(M) \cdot \vec{dz} \quad \text{d'où} \quad \int_A^B dV = \int_A^B -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z \cdot \vec{dz} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \int_0^e dz = -\frac{\sigma e}{\epsilon_0} = V_B - V_A$$

$$\Delta V = V_A - V_B = \frac{\sigma e}{\epsilon_0}$$

7. Sur chacune des plaques, isolons deux régions identiques en regard de surface S et de charge Q . Exprimer la capacité C du condensateur ainsi formé en fonction de ϵ_0 , S et e .

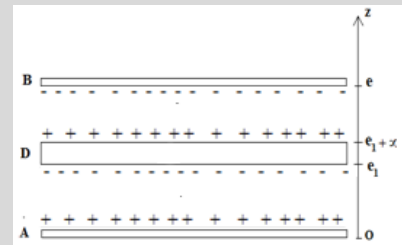
$$\text{On a } \sigma = \frac{Q}{S} \text{ alors } \Delta V = \frac{\sigma e}{\epsilon_0} = \frac{Q e}{S \epsilon_0} \quad \text{or } C = \frac{Q}{\Delta V} \text{ alors } C = \frac{S \epsilon_0}{e}$$

8. On isole le condensateur et on introduit entre ses armatures une plaque métallique D initialement neutre d'épaisseur x parallèle aux armatures A et B . On appelle e_1 et e_2 les distances de ses faces aux armatures.

- f. Décrire les phénomènes électriques qui se produisent lorsqu'on introduit cette plaque.

En plaçant le disque D entre les armatures A et B , il se produit une influence des armatures sur les deux faces du conducteur D et en conséquence :

- La face supérieure de D en regard avec B se charge $+Q$
- La face inférieure de D en regard avec A se charge $-Q$



Le condensateur conserve la même charge $+Q$ vu qu'il est isolé

- g. En utilisant le principe de superposition déterminer le vecteur champ dans les trois zones 1, 2 et 3 de l'espace inter-armatures.

- Zone 1 : $z \in]0, e[$

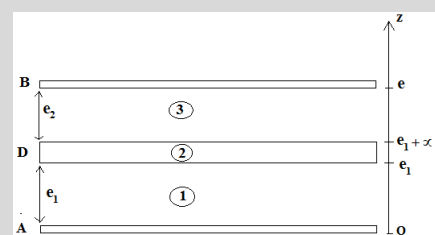
$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z$$

- Zone 2 : $z \in [e_1, e_1 + x]$

Il s'agit d'un conducteur en équilibre alors $\vec{E}_2 = 0$

- Zone 3 : $z \in]e_1 + x, e[$

$$\vec{E}_3 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z$$



- h. Calculer la nouvelle différence de potentielle $\Delta V' = V_A - V_B$ en fonction de Q , e_1 , e_2 , ϵ_0 et S .

$$\Delta V' = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_0^{e_1} E_1 dz + \int_{e_1}^{e_1+x} E_2 dz + \int_{e_1+x}^e E_3 dz$$

et $\overrightarrow{dl} = dz \vec{e}_z$

$$\Delta V' = \int_0^{e_1} E_1 dz + 0 + \int_{e_1+x}^e E_3 dz = \frac{\sigma}{\epsilon_0} e_1 + \frac{\sigma}{\epsilon_0} e_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (e_1 + e_2) = \frac{Q}{S\epsilon_0} (e_1 + e_2)$$

$$\Delta V' = \frac{Q}{S\epsilon_0} (e_1 + e_2)$$

- i. Calculer la nouvelle capacité C' du condensateur en fonction de e_1, e_2, ϵ_0 et S .

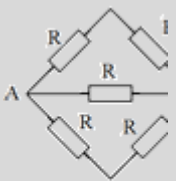
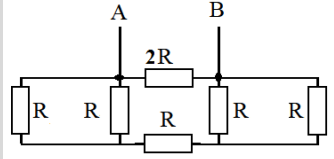
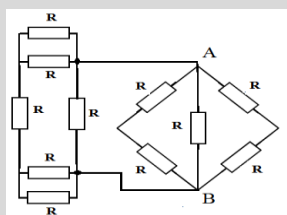
$$C' = \frac{Q}{\Delta V'} \quad \text{alors} \quad C' = \frac{S\epsilon_0}{(e_1 + e_2)}$$

- j. La capacité dépend-elle de la position de la plaque D ? Justifier.

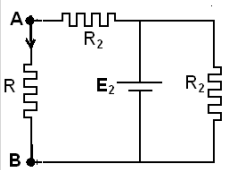
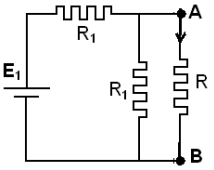
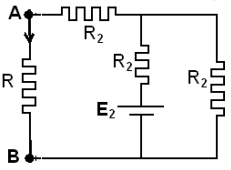
La capacité C' ne dépend pas de la position de la plaque D. Quelque soit la position de D la distance $(e_1 + e_2)$ reste constante.

Electrocinétique

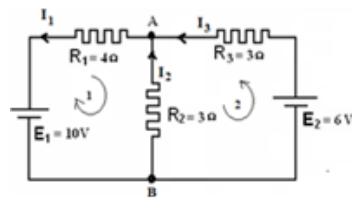
4. Déterminer la résistance équivalente au dipôle AB suivant :

	 <p>$R_{\text{equiv}} = R$</p>	 <p>$R_{\text{equiv}} = \frac{R}{3}$</p>
---	--	--

5. En appliquant le théorème de Thévenin calculer la résistance et la tension de Thévenin entre les bornes A et B des circuits suivants :

		
$R_{Th} = R_2$	$R_{Th} = \frac{R_1}{2}$	$R_{Th} = \frac{3R_2}{2}$
$E_{Th} = E_2$	$E_{Th} = \frac{E_1}{2}$	$E_{Th} = \frac{E_2}{2}$

6. On se propose de calculer les valeurs des courants circulant dans les branches du circuit suivant :



a. Etablir la loi des nœuds et la loi des mailles relative aux mailles 1 et 2

$I_1 = I_2 + I_3,$	$4I_1 + 3I_2 = -10,$	$I_2 - I_3 = -2,$
--------------------	----------------------	-------------------

b. Donner le système d'équations à deux inconnus I_1 et I_2 .

$-I_1 + 2I_2 = -2,$	$4I_1 + 3I_2 = -10,$
---------------------	----------------------

c. Calculer les valeurs algébriques des intensités des courants I_1 , I_2 et I_3 .

$I_1 = -1,27 \text{ A}$	$I_2 = -1,63 \text{ A}$	$I_3 = 0,36 \text{ A}$
-------------------------	-------------------------	------------------------

Examen d'Électricité 1
(SMP₂, SMC₂, SMAI₂)
Session normale 2018

N° d'examen :

CNE :

Nom & Prénom :

CIN :

Problème

I- Soit un corps creux hémisphérique de centre O et de rayon R_1 chargé uniformément avec une densité de charge surfacique $\sigma > 0$ (Figure 1).

a- Montrer par des considérations de symétrie que le champ électrostatique \vec{E}_1 produit par l'hémisphère au point O est porté par l'axe Ox .

b- Montrer que la surface de la couronne de rayon HP s'écrit

$$ds = 2\pi R_1^2 \sin\theta d\theta. \text{ En déduire sa charge électrique.}$$

c- Donner l'expression du champ élémentaire $d\vec{E}_1$ produit par la couronne au point O .

d- Calculer le champ total produit par l'hémisphère au point O . En déduire le champ au centre d'une sphère chargée en surface.

e- Déterminer par un calcul direct le potentiel $V(O)$ au point O . En déduire le potentiel au centre d'une sphère chargée en surface.

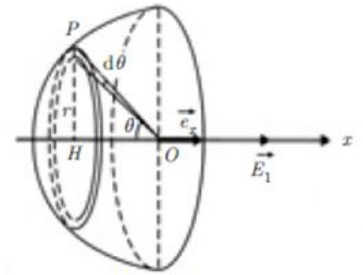


Figure 1

II- On considère maintenant une distribution de charge en volume ayant la forme de l'hémisphère de rayon R_2 et portant une charge volumique uniforme ρ .

a- Donner l'expression d'un élément de volume $d\tau$ en coordonnées sphériques.

b- En déduire l'expression du volume τ_c d'une demi-coquille de rayon r et d'épaisseur dr .

c- En considérant que la charge portée par la distribution surfacique de la figure 1 est maintenant portée par la demi-coquille, trouver la correspondance entre les densités de charge surfacique et volumique.

d- Déterminer le champ élémentaire $d\vec{E}_2$ produit au point O par la demi-coquille. En déduire le champ total \vec{E}_2 .

e- Retrouver l'expression de \vec{E}_2 par un calcul direct.

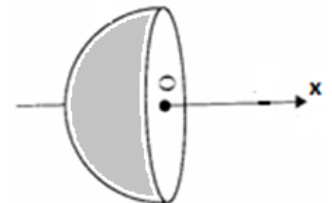


Figure 2

III- Une sphère conductrice A de rayon R_1 , portant une charge positive Q et de potentiel V_A est entourée par une sphère conductrice C concentrique creuse, neutre, de rayon intérieur R_4 et de rayon extérieur R_5 (Figure 3).

a- Donner la répartition des charges.

b- En utilisant le théorème de Gauss calculer le champ électrostatique \vec{E} entre les deux sphères ($R_1 < r < R_4$).

- c- En utilisant la propriété de discontinuité du champ électrostatique à l'interface $r = R_1$, déterminer le champ à l'intérieur de la sphère A ($r < R_1$).
- d- Calculer la circulation du champ \vec{E} entre les deux sphères ($R_1 < r < R_4$). En déduire la différence de potentiel $\Delta V = V_A - V_C$ où V_C est le potentiel de la sphère creuse.
- e- Calculer la capacité C_{AC} du condensateur constitué par les conducteurs A et C.
- f- On introduit entre les deux conducteurs, une coquille sphérique B concentrique conductrice neutre, de potentiel V_B , de rayon intérieur R_2 et de rayon extérieur R_3 (Figure 4).
 - 1- Donner la nouvelle répartition des charges.
 - 2- Déterminer sans calcul le champ \vec{E} en tout point de l'espace.
 - 3- Calculer $1/C'_{AC}$ où C'_{AC} est la nouvelle capacité du condensateur constitué par les trois conducteurs sphériques.
 - 4- En utilisant la question (III.d) donner sans calcul la capacité C_{AB} du condensateur formé par les conducteurs A et B d'une part et celle, C_{BC} , du condensateur formé par les conducteurs B et C d'autre part.
 - 5- Exprimer $1/C'_{AC}$ en fonction de C_{AB} et C_{BC} . Conclure.

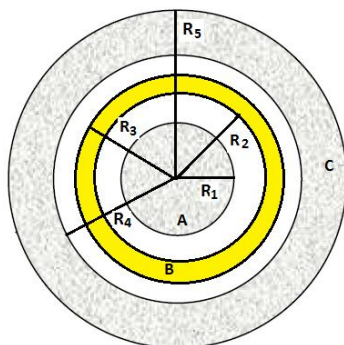


Figure 4

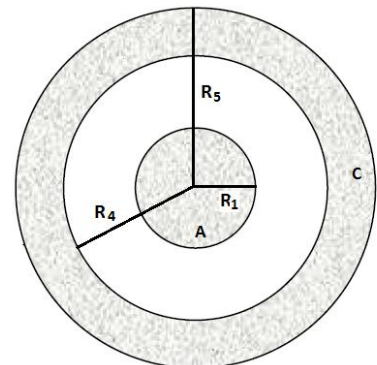


Figure 3

Correction de l'examen d'électricité (SN 2018)

Problème

I-

- a- Les plans yox et zox sont des plans de symétries de l'hémisphère alors le champ est porté par Ox
 b- L'élément de surface ds en coordonnées sphériques :

$$ds' = R_1^2 \sin\theta d\theta d\varphi \rightarrow ds = R_1^2 \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi R_1^2 \sin\theta d\theta$$

- c- La charge élémentaire σds , prise sur la couronne de rayon HP , contribue au champ total par :

$$\begin{aligned} dE_1 &= K \frac{\sigma dS}{R^2} \cos\theta \quad \text{avec} \quad dS = 2\pi R \sin\theta R d\theta \\ dE_1 &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi R^2}{R^2} \sin\theta \cos\theta d\theta \\ &= \frac{\sigma}{4\epsilon_0} 2 \sin\theta \cos\theta d\theta = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \sin 2\theta d\theta \end{aligned}$$

d-

$$E_1 = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta d\theta = \frac{\sigma}{8\epsilon_0} [-\cos 2\theta]_0^{\pi/2}$$

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \vec{e}_x$$

Par symétrie le champ total au centre d'une sphère chargée en surface est nul car l'autre hémisphère produira un champ de même module mais de sens opposé.

e-

La couronne produit un potentiel dV au point O :

$$\begin{aligned} dV &= \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{\sigma ds}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{\sigma 2\pi R_1^2 \sin\theta d\theta}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{\sigma R_1 \sin\theta d\theta}{2\epsilon_0} \\ V &= \frac{\sigma R_1}{2\epsilon_0} \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta = \frac{\sigma R_1}{2\epsilon_0} \end{aligned}$$

Le potentiel total au point O est par symétrie : $2V = \frac{\sigma R_1}{\epsilon_0}$

II-

- a- L'élément de volume en coordonnées sphériques : $d\tau = r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi$
 b- Le volume de la demi-coquille est :

$$\tau_c = r^2 dr \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi r^2 dr$$

- c- Pour trouver la correspondance entre les densités de charge surfacique et volumique, on écrit que la charge $2\pi r^2 \sigma$ portée par la distribution surfacique précédente est

maintenant portée par la demi-coquille de rayon r , d'épaisseur dr , donc de volume $d\tau = 2\pi r^2 dr$.

Soit $2\pi r^2 \sigma \rightarrow 2\pi r^2 dr \rho$ et $\sigma = \rho dr$

d-

Champ créé par cette coquille au point O : $\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \vec{e}_x \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \vec{E}_2 = \frac{\rho dr}{4\epsilon_0} \vec{e}_x$

On en déduit pour le champ total : $\vec{E}_2 = \frac{\rho}{4\epsilon_0} \int_0^{R_2} dr \vec{e}_x = \frac{\rho R_2}{4\epsilon_0} \vec{e}_x$

e- Calcul direct :

$$\vec{dE} = K \frac{dq}{r^2} \vec{u}_{OM} \Rightarrow dE_x = \frac{R dq \cos \theta}{r^2}$$

$d\tau$ étant l'élément de volume autour de M , on a :

$$dq = \rho d\tau$$

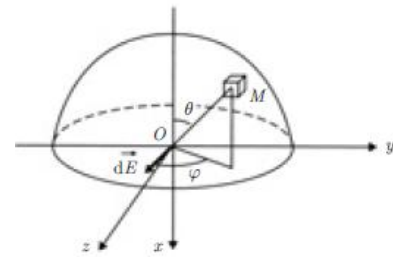
$$\text{avec } d\tau = r \sin \theta d\varphi r d\theta dr$$

$$dq = \rho r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

$$E_x = K \rho \int_0^R dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= K \rho R 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin 2\theta d\theta$$

$$= K \rho R \pi \left[-\frac{1}{2} \cos 2\theta \right]_0^{\pi/2} = K \rho R \pi$$

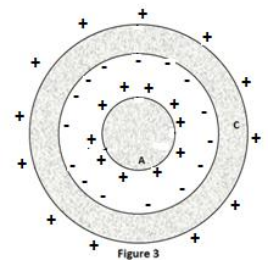


Par raison de symétrie, \vec{E} est dirigé suivant \vec{Ox} . En effet, tout plan contenant Ox est un plan de symétrie pour la distribution de charge :

$$\vec{E} = \frac{\rho}{4\epsilon_0} R 2 \vec{e}_x$$

III-

- a- Les charges positives sur la face extérieure de la sphère A (conducteur en équilibre), les charges négatives sur la face intérieure de C (par influence totale) et des charges positives sur la face extérieure de C.



- b- Comme la distribution sphérique de la charge est uniforme au niveau de la surface, on peut dire que tout plan passant au centre de la sphère est un plan de symétrie. Il y a une infinité de plan. Leur intersection nous donne la direction du champ $\vec{E}(M)$. On dit qu'il est radial. $\vec{E}(M) = E(r, \theta, \varphi) \vec{e}_r$.

Il est invariant par rotation autour de l'angle θ et autour de l'angle φ .

Il dépend uniquement de la variable r . Soit : $\vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r$.

Théorème de Gauss :

La symétrie existe, la surface de Gauss Σ ne peut être que sphérique.

Pour $R_1 < r < R_4$:

$$\oint_{\Sigma} \vec{E}(r) \cdot d\vec{S} = \frac{\sum Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad \text{Soit : } E(r) \oint_{\Sigma} dS = E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

c- $\vec{E}(r \rightarrow R_1) - \vec{E}_{\text{int}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_r \quad \text{or} \quad \vec{E}(r \rightarrow R_1) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \vec{e}_r = \frac{\sigma 4\pi R_1^2}{4\pi \epsilon_0 R_1^2} \vec{e}_r = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_r$

Alors $\vec{E}_{\text{int}} = 0$

d- La circulation entre les deux sphères s'écrit :

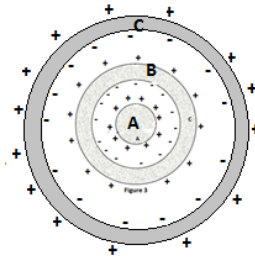
$$\mathbb{C} = \int_{R_1}^{R_4} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \int_{R_1}^{R_4} \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_4} \right) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{(R_4 - R_1)}{R_4 R_1}$$

Or $d\mathbb{C} = -dV \rightarrow \rightarrow \rightarrow \mathbb{C} = -(V_C - V_A) \rightarrow \rightarrow \rightarrow \Delta V = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{(R_4 - R_1)}{R_4 R_1}$

e- $\Delta V = \frac{Q}{C_{AC}} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{(R_4 - R_1)}{R_4 R_1} \quad d'où \quad C_{AC} = \frac{4\pi \epsilon_0 R_4 R_1}{(R_4 - R_1)}$

f-

1-



2- $r < R_1$: le champ est nul car la sphère A est un conducteur en équilibre.

$R_1 < r < R_2$: c'est le champ calculé dans la question (b) : $\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$.

$R_2 < r < R_3$: le champ est nul car la sphère B est un conducteur en équilibre.

$R_3 < r < R_4$: B est neutre alors le champ est celui produit par A :

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

$R_4 < r < R_5$: le champ est nul car la sphère C est un conducteur en équilibre.

$R_5 < r$: B et C sont neutres alors le champ est toujours celui produit par A :

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

- 3- La circulation du champ entre la sphère A et la face interne de la sphère C est égale à la variation de potentiel $\Delta V = V_A - V_C$.

$$\begin{aligned}
 \Delta V = \mathbb{C} &= \int_{R_1}^{R_4} \vec{E} \cdot \vec{dr} = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot \vec{dr} + \int_{R_2}^{R_3} \vec{E} \cdot \vec{dr} + \int_{R_3}^{R_4} \vec{E} \cdot \vec{dr} \\
 &= \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot \vec{dr} + \int_{R_3}^{R_4} \vec{E} \cdot \vec{dr} \\
 &= \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot \vec{dr} \\
 &\quad + \int_{R_3}^{R_4} \vec{E} \cdot \vec{dr} \\
 &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr + \int_{R_3}^{R_4} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(R_2 - R_1)}{R_2 R_1} + \\
 &\quad \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(R_4 - R_3)}{R_4 R_3} \\
 &= Q \left(\frac{(R_2 - R_1)}{4\pi\epsilon_0 R_2 R_1} + \frac{(R_4 - R_3)}{4\pi\epsilon_0 R_4 R_3} \right)
 \end{aligned}$$

Or $\Delta V = \frac{Q}{C'_{AC}}$ d'où $\frac{1}{C'_{AC}} = \left(\frac{(R_2 - R_1)}{4\pi\epsilon_0 R_2 R_1} + \frac{(R_4 - R_3)}{4\pi\epsilon_0 R_4 R_3} \right)$

4-

$$C_{AB} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_2 R_1}{(R_2 - R_1)} \quad \text{et} \quad C_{BC} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_4 R_3}{(R_4 - R_3)}$$

- 5- $\frac{1}{C'_{AC}} = \left(\frac{(R_2 - R_1)}{4\pi\epsilon_0 R_2 R_1} + \frac{(R_4 - R_3)}{4\pi\epsilon_0 R_4 R_3} \right) = \frac{1}{C_{AB}} + \frac{1}{C_{BC}}$, les deux condensateurs C_{AB} et C_{BC} sont en séries

Examen d'Électricité 1
(SMP₂, SMC₂, SMAI₂)
Session de rattrapage

Exercice 1

On place quatre charges ponctuelles aux sommets $ABCD$ d'un carré de côté $a = 1$ m, et de centre O , origine d'un repère orthonormé $R(O, x, y, z)$ (Figure1). On donne :

$q_1 = q, q_2 = -2q, q_3 = 2q$ et $q_4 = -q$

1. Déterminer le champ électrique \vec{E} au centre O du carré en précisant sa direction, son sens et sa norme
2. Exprimer le potentiel total V créé en O par les quatre charges.
3. Exprimer le potentiel sur les parties des axes x ' x et y ' y intérieures au carré.

Exercice 2

Soit une charge ponctuelle q positive placée au point O et M un point situé à la distance r du point O

1. Donner les expressions du vecteur champ \vec{E}_q et du potentiel V_q produits par la charge q au point M .
2. En considérant que la charge q a une symétrie sphérique, retrouver l'expression du vecteur champ au point M en utilisant le théorème de Gauss.
3. Soit une sphère de rayon R et de centre O chargée en surface avec une charge totale Q répartie de façon uniforme.
 - a- Sachant que le champ produit par Q est de la forme $\vec{E}_Q(M) = E_Q(r)\vec{e}_r$ déterminer son expression en tout point de l'espace en appliquant le théorème de Gauss.
 - b- On place la charge ponctuelle q au centre de la sphère. En utilisant le principe de superposition déterminer le champ \vec{E} en tout point de l'espace.

Exercice 3

On considère un plan infini parallèle au plan XOY , chargé avec une densité de charges surfacique uniforme et positive σ .

1. Montrer par des considérations de symétrie et d'invariances que le champ produit par le plan s'écrit $\vec{E}(M) = E(z)\vec{e}_z$.
2. En utilisant le théorème de Gauss, déterminer le champ $\vec{E}(M)$
3. On se propose de calculer le champ par la méthode directe. Soit un élément de surface dS du plan chargé centré sur un point P (Figure 2).
 - a- Donner l'expression de l'élément de surface dS en coordonnées polaires. En déduire sa charge dq .

- b- Déterminer le champ élémentaire $d\vec{E}_z$ produit par dq au point M en fonction de $\rho, r, \sigma, \alpha, \epsilon_0$ et θ
- c- Calculer le champ total produit par le plan infini au point M .

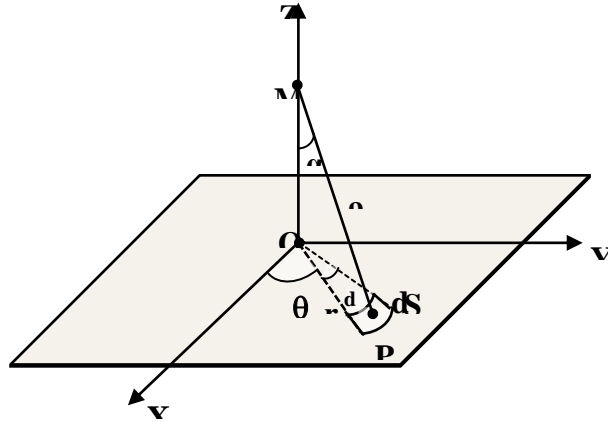


Figure 1

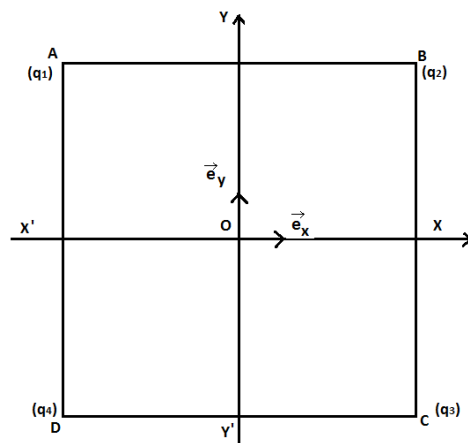


Figure 2



Correction

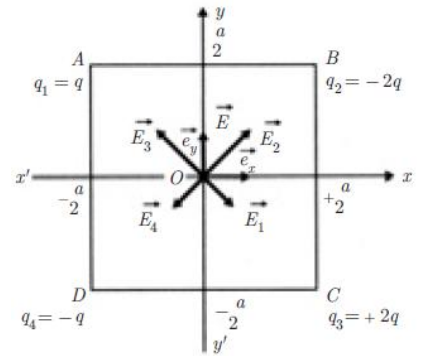
Exercice 1

1. Détermination du champ \vec{E} en O .

Soit $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3$ et \vec{E}_4 les champs créés en O respectivement par les charges q_1, q_2, q_3 et q_4 On a :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4$$

Par raison de symétrie :



On a de même :

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 + \vec{E}_4 &= -2E_1 \cos \frac{\pi}{4} \vec{e}_y \\ &= -2K \cdot \frac{2q}{a^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_y \\ &= -\frac{2Kq}{a^2} \sqrt{2} \vec{e}_y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{E}_2 + \vec{E}_3 &= 2E_2 \cos \frac{\pi}{4} \vec{e}_y = 2K \frac{4q}{a^2} \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_y \\ &= 4K \frac{q}{a^2} \sqrt{2} \vec{e}_y \text{ soit :}\end{aligned}$$

Le champ résultant \vec{E} est donc :

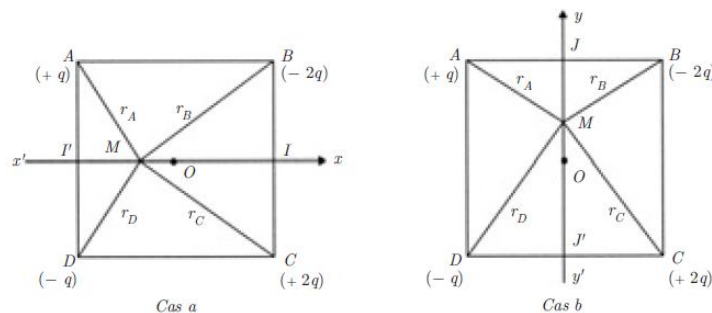
$$\vec{E} = \frac{2Kq}{a^2} \sqrt{2} \vec{e}_y$$

Dirigé suivant l'axe $y'Oy$, dans le sens positif de l'axe $y'Oy$ et de norme : $E = \frac{2Kq}{a^2} \sqrt{2}$.

2. Soient V_1, V_2, V_3 et V_4 les potentiels créés par les charges q_1, q_2, q_3 et q_4 en O .

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = \frac{2Kq}{a\sqrt{2}} [1 - 2 + 2 - 1] = 0$$

3. Variation du potentiel sur les axes $x'Ox$ et $y'Oy$



a) Sur l'axe $x'Ox$, on a : $MA = MD$ et $MB = MC$

$$V = Kq \left[\frac{1}{MA} - \frac{2}{MB} + \frac{2}{MC} - \frac{1}{MD} \right] \text{ d'où } V = 0$$

b) Sur l'axe $y'Oy$, on a : $MA = MB$ et $MC = MD$

$$V = Kq \left[\frac{1}{MC} - \frac{1}{MA} \right]$$

$$V(y) = Kq \left\{ \left[\left(y + \frac{a}{2} \right)^2 + \frac{a^2}{4} \right]^{-1/2} - \left[\left(y - \frac{a}{2} \right)^2 + \frac{a^2}{4} \right]^{-1/2} \right\}$$

Exercice 2

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u} \quad \text{où } \vec{u} = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM}, \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + k$$

1. La surface de Gauss Σ est une sphérique de rayon r.

$$\oint_{\Sigma} \vec{E}(r) \cdot d\vec{S} = \frac{\sum Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

$$E(r) \oint_{\Sigma} dS = E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

2.

- a- La surface de Gauss Σ est une sphérique de rayon r.

$$\oint_{\Sigma} \vec{E}(r) \cdot d\vec{S} = \frac{\sum Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

$$\text{Pour } r < R : \oint_{\Sigma} \vec{E}(r) \cdot d\vec{S} = 0 \quad \text{alors } \vec{E}(r) = 0$$

$$\text{Pour } r > R : E(r) \oint_{\Sigma} dS = E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

b-

Pour $r < R$:

$$\vec{E} = \vec{E}_q + \vec{E}_Q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{e}_r$$

Pour $r > R$:

$$\vec{E} = \vec{E}_q + \vec{E}_Q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{e}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(Q+q)}{r^2} \vec{e}_r$$

Exercice 3

1. Les plans zOx et zOy sont des plans de symétries alors $\vec{E} = E(x, y, z) \vec{e}_z$
Toute translation suivant l'axe Ox ou Oy laisse la distribution inchangée alors

$$\vec{E} = E(z) \vec{e}_z$$

2. La surface de Gauss est un cylindre C coupant verticalement le plan chargé.

$$\iint_C \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \iint_{B_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{B_1} + \iint_{B_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{B_2} + \iint_{L_{\text{lat}}} \vec{E} \cdot d\vec{S}_L$$

$$\iint_C \vec{E} \cdot \vec{ds} = 2 \iint_{B_1} \vec{E} \cdot \vec{ds}_{B_1} = 2 E S_B = \frac{\sigma S_B}{\varepsilon_0} \quad \text{alors} \quad \vec{E}(z) = \frac{z}{|z|} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{e}_z ,$$

a- $ds = r dr d\theta$ et $dq = \sigma ds = \sigma r dr d\theta$

b- $\vec{dE}_z = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\cos(\alpha)}{\rho^2} \vec{e}_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sigma r dr d\theta \cos(\alpha)}{\rho^2} \vec{e}_z$

c-

- Première méthode :

$$\cos(\alpha) = \frac{z}{\rho} \quad \text{et} \quad \rho^2 = z^2 + r^2$$

$$\vec{dE}_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sigma r dr d\theta \cos(\alpha)}{\rho^2} \vec{e}_z = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \frac{z r dr d\theta}{(z^2 + r^2)^{3/2}}$$

$$\vec{E}_z = \iint \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \frac{z r dr d\theta}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \vec{e}_z = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty \frac{z r dr}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \vec{e}_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{e}_z$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_z &= \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty \frac{z r dr}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \vec{e}_z = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} [\theta]_0^{2\pi} \left[-\frac{z}{(z^2 + r^2)^{1/2}} \right]_0^\infty \vec{e}_z \\ &= \frac{z}{|z|} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{e}_z \end{aligned}$$

- Deuxième méthode

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{r}{z}, \quad \cos(\alpha) = \frac{z}{\rho} \quad \text{et} \quad \frac{d\alpha}{\cos(\alpha)^2} = \frac{dr}{\rho} \quad \text{alors} \quad dr = \frac{\rho d\alpha}{\cos(\alpha)^2}$$

$$\vec{dE}_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sigma r dr d\theta \cos(\alpha)}{\rho^2} \vec{e}_z = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \frac{r \rho d\alpha d\theta \cos(\alpha)}{\cos(\alpha)^2 \rho^2} \vec{e}_z = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \frac{r d\alpha d\theta}{\cos(\alpha)} \vec{e}_z$$

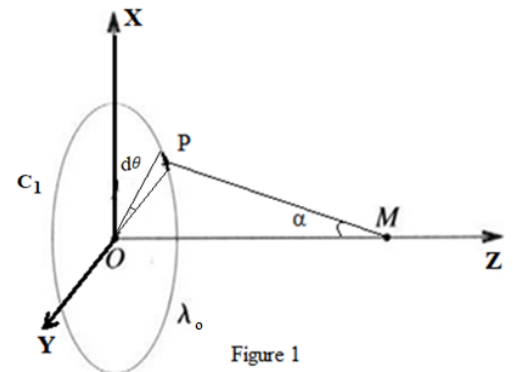
$$= \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\operatorname{tg}(\alpha) d\alpha d\theta}{\cos(\alpha)} \vec{e}_z = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \sin(\alpha) d\alpha d\theta \vec{e}_z$$

$$\vec{E}_z = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} [-\cos(\alpha)]_0^{\pi/2} [\theta]_0^{2\pi} \vec{e}_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{e}_z$$

Examen d'Électricité 1
(SMP₂, SMC₂, SMAI₂)
Session Normale

Electrostatique

On considère une spire C_1 circulaire de rayon R , de centre O , incluse dans le plan xOy et d'axe de symétrie de révolution Oz (Figure.1). Cette spire porte une charge positive Q répartie uniformément avec la densité linéique de charges λ_0 . On se propose d'étudier le champ électrostatique produit par cette spire.

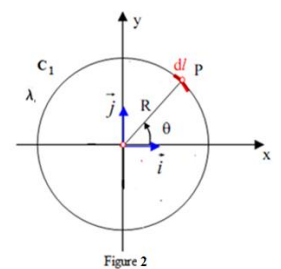


Partie A

1. Montrer qu'en un point de l'axe Oz le champ électrostatique \vec{E} est porté par cet axe.
2. Soit $d\ell$ un élément de longueur de la spire centré en un point P et délimité par l'angle $d\theta$. Déterminer la charge élémentaire dq contenue dans $d\ell$ en fonction de R, λ_0 et θ . En déduire la charge totale Q totale.
3. Donner l'expression du champ élémentaire $d\vec{E}$ produit par $d\ell$ au point M ($OM = z$) en fonction de $R, \lambda_0, \theta, z, \pi$ et ϵ_0 . En déduire sa composante $d\vec{E}_z = dE_z \vec{k}$ où \vec{k} est le vecteur unitaire de l'axe Oz .
4. Calculer le champ électrostatique total $\vec{E} = E_z \vec{k}$ produit par la spire C_1 au point M . En déduire le champ au point O .
5. Soient C_2 et C_3 deux spires circulaires de rayon R , chargées avec la même densité de charge que C_1 et ayant le même axe de révolution Oz . Leurs centres coïncident respectivement avec les points $M(z)$ et $N(-z)$. En utilisant le principe de superposition et le résultat de la question 4, déterminer sans calcul le module du champ électrostatique aux points O, M et N .

Partie B

On charge cette fois-ci la spire C_1 par une densité linéique de charges λ qui varie en fonction de l'angle θ selon la loi $\lambda = \lambda_0 \sin \theta$ où λ_0 est une constante positive. On se propose de calculer le champ électrostatique au centre O de la spire.



6. Donner la charge élémentaire dq contenue dans un élément $d\ell$ de la spire de la figure.2 en fonction de R, λ_0 et θ . . En déduire la charge totale de la spire.
7. Représenter sur un schéma, la répartition des charges négatives et positives sur la spire.
8. Montrer par des raisons de symétrie que le champ électrostatique \vec{E} produit par C_1 au point O est porté par l'axe Oy .
9. Donner l'expression du champ élémentaire $d\vec{E}$ produit par un élément $d\ell$ de la spire au point O en fonction de $R, \lambda_0, \theta, \pi$ et ϵ_0 . En déduire sa composante $d\vec{E}_y = dE_y \vec{j}$ où \vec{j} est le vecteur unitaire de l'axe Oy .
10. Calculer le champ électrostatique total au point O . On donne $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$

Electrocinétique

On se propose de déterminer les différents courants circulant dans le circuit de la figure 3. Pour la facilité des calculs on commence par remplacer les résistances vue entre les bornes AB et CD par leurs résistances équivalentes R_{AB} et R_{CD} respectivement (Figure 4).

1. Etablir la loi des nœuds relative au nœud O du circuit de la figure 4.
2. Appliquer la loi des mailles aux mailles ONDCO et OABNO.
3. Donner le système d'équations à deux inconnus I_1 et I_3 .
4. Calculer les résistances équivalentes R_{AB} et R_{CD} entre les bornes AB et CD.
5. En remplaçant les résistances R_{AB} et R_{CD} par leurs valeurs dans le système d'équation de la question 3, calculer les courants I_1 et I_3 en fonction de R et E . En déduire I_2
6. Représenter sur un schéma les sens réels des courants.
7. En appliquant le diviseur de courant calculer I_4 et I_5

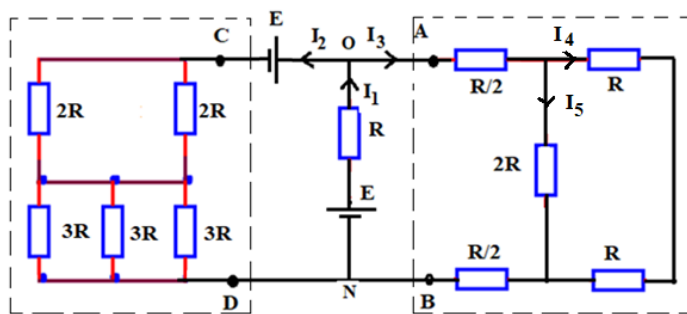


Figure 3

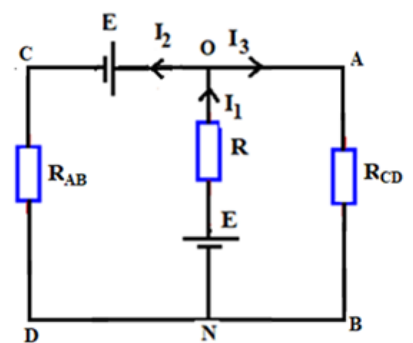


Figure 4



Correction

Electrostatique

Partie A

1.

- À chaque élément $d\ell$ du fil, on peut faire correspondre un élément $d\ell'$ symétrique par rapport à O. Par raison de symétrie, seule la composante de \vec{dE}_Z sur l'axe OZ intervient : \vec{E} est porté par \vec{e}_Z

Ou

- Tout plan contenant l'axe Oz est un plan de symétrie de la spire donc le champ en tout point de cet axe est contenu dans la droite intersection des ces plans de symétrie qui l'axe Oz .

2. $dq = \lambda_0 d\ell = \lambda_0 R d\theta$ alors $Q = \int_0^{2\pi} dq = \lambda_0 R \int_0^{2\pi} d\theta = 2\lambda_0 R \pi$

3. $\vec{dE} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{PM^2} \vec{u} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_0 R d\theta}{(R^2 + Z^2)} \vec{u}$ où $\vec{u} = \frac{\vec{PM}}{PM}$

$$\vec{dE}_Z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_0 R d\theta \cos\alpha}{(R^2 + Z^2)} \vec{k} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z\lambda_0 R d\theta}{(R^2 + Z^2)^{3/2}} \vec{k}$$

4. $\vec{E} = \int \vec{dE}_Z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z\lambda_0 R}{(R^2 + Z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\theta \vec{k} = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{Z\lambda_0 R}{(R^2 + Z^2)^{3/2}} \vec{k}$, au point o on a $\vec{E} = 0$ car $z = 0$

5. $\vec{E}(o) = \vec{E}_{C1}(o) + \vec{E}_{C2}(o) + \vec{E}_{C3}(o)$

- $\vec{E}_{C1}(o) = 0$, $\vec{E}_{C2}(o) = -\frac{1}{2\epsilon_0} \frac{Z\lambda_0 R}{(R^2 + Z^2)^{3/2}} \vec{k}$, $\vec{E}_{C3}(o) = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{Z\lambda_0 R}{(R^2 + Z^2)^{3/2}} \vec{k}$ alors $\vec{E}(o) = 0$

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_{C1}(M) + \vec{E}_{C2}(M) + \vec{E}_{C3}(M)$$

- $\vec{E}_{C2}(M) = 0$, $\vec{E}_{C1}(M) = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{Z\lambda_0 R}{(R^2 + Z^2)^{3/2}} \vec{k}$, $\vec{E}_{C3}(M) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Z\lambda_0 R}{(R^2 + 4Z^2)^{3/2}} \vec{k}$ car $NM = 2Z$

$$\vec{E}(M) = \left(\frac{1}{2\epsilon_0} \frac{Z\lambda_0 R}{(R^2 + Z^2)^{3/2}} + \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Z\lambda_0 R}{(R^2 + 4Z^2)^{3/2}} \right) \vec{k}$$

$$\vec{E}(N) = \vec{E}_{C1}(N) + \vec{E}_{C2}(N) + \vec{E}_{C3}(N)$$

$$\bullet \vec{E}_{C3}(N) = 0, \vec{E}_{C1}(N) = -\frac{1}{2\epsilon_0} \frac{Z\lambda_0 R}{(R^2 + Z^2)^{3/2}} \vec{k}, \vec{E}_{C3}(N) = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{Z\lambda_0 R}{(R^2 + 4Z^2)^{3/2}} \vec{k} \text{ car}$$

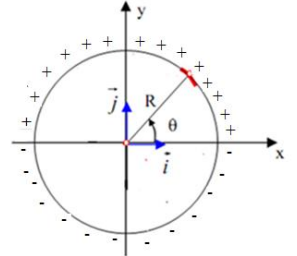
$$MN = -2Z$$

$$\vec{E}(N) = -\left(\frac{1}{2\epsilon_0} \frac{Z\lambda_0 R}{(R^2 + Z^2)^{3/2}} + \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Z\lambda_0 R}{(R^2 + 4Z^2)^{3/2}}\right) \vec{k}$$

Partie B

$$6. dq = \lambda d\ell = \lambda_0 R \sin\theta d\theta \text{ alors} \\ Q = \int_0^{2\pi} dq = \lambda_0 R \int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta = 0$$

7. Voir schéma avec des maximums et des minimums respectivement sur $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$



8. Le plan (ZoX) est un plan d'antisymétrie alors le champ en un point de ce plan est normal au plan alors il est porté par l'axe Oy

$$9. \vec{dE} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{PO^2} \vec{u} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_0 R \sin\theta d\theta}{R^2} \vec{u} \quad \text{où } \vec{u} = \frac{\vec{PO}}{PO} \quad \vec{dE}_z = \\ -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_0 \sin\theta^2 d\theta}{R} \vec{j}$$

$$10. \vec{E} = \int \vec{dE}_z = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_0}{R} \int_0^{2\pi} \sin\theta^2 d\theta \vec{j} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_0}{R} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta \vec{j} = -\frac{\lambda_0}{4\epsilon_0 R} \vec{j}$$

Electrocinétique

$$1. I_1 = I_2 + I_3$$

$$2. R_{AB} I_2 + R I_1 = 0 \text{ et } R_{CD} I_3 + R I_1 = E$$

$$3. (R_{AB} + R) I_1 - R_{AB} I_3 = 0 \text{ et } R_{CD} I_3 + R I_1 = E$$

$$4. R_{AB} = R_{CD} = 2R$$

$$5. I_1 = \frac{E}{4R} \quad * \quad I_3 = \frac{3E}{8R} \quad * \quad I_2 = \frac{-E}{8R}$$

$$6. I_2 < 0 \text{ on change le sens de } I_2$$

$$7. I_4 = I_5 = \frac{I_3}{2} = \frac{3E}{16R}$$

Examen d'Électricité 1
(SMP₂, SMC₂, SMAI₂)
Session de Rattrapage

Electrostatique

Soient deux sphères concentriques de centre O et de rayons respectifs R_1 et R_2 ($R_1 < R_2$). L'espace entre les deux sphères est chargé en volume avec une densité uniforme ρ positive.

1. Par des raisons de symétrie, montrer que le champ électrostatique \vec{E} produit par ces deux sphères s'écrit sous la forme $\vec{E} = E(r, \theta, \varphi)\vec{e}_r$.
2. En utilisant les invariances, montrer que le champ s'écrit sous la forme $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$.
3. En utilisant le théorème de Gauss, calculer le champ \vec{E} créé en tout point de l'espace. Regrouper les résultats obtenus sur un tableau selon les valeurs de r .
4. Calculer le potentiel V en en tout point de l'espace. Regrouper les résultats obtenus sur un tableau selon les valeurs de r .
5. Tracer les courbes $E(r)$ et $V(r)$ en fonction de r . Ces fonctions sont-elles continues en tout point de l'espace ?
6. Si R_1 tend vers R_2 , donner les nouvelles valeurs de $E(r)$ et $V(r)$.

Electrocinétique

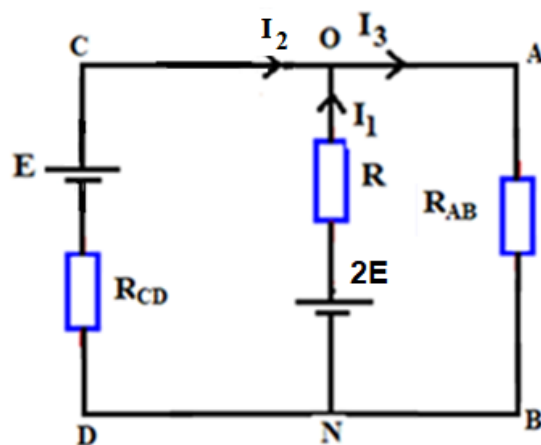
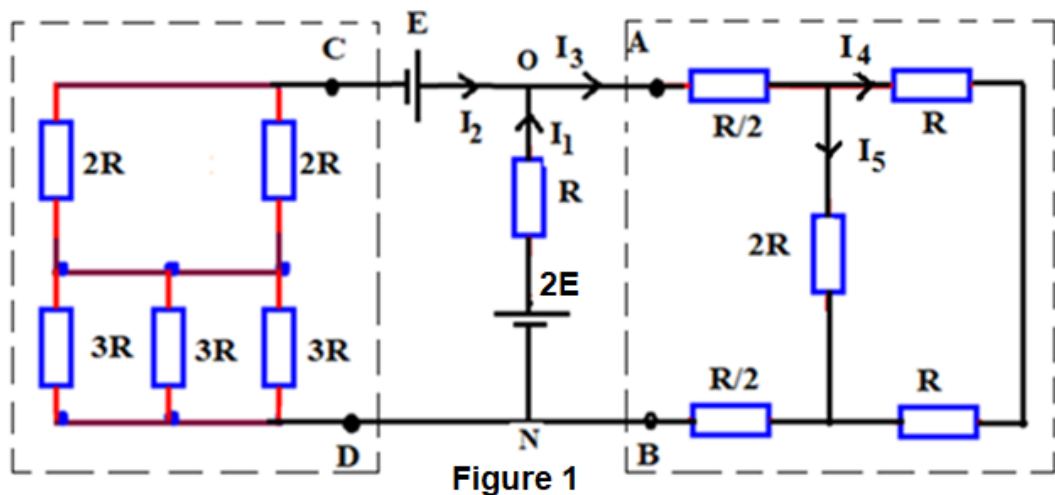
On se propose de déterminer les différents courants circulant dans le circuit de la figure.1 par deux méthodes différentes. Pour la facilité des calculs on commence par remplacer les résistances vues entre les bornes AB et CD par leurs résistances équivalentes R_{AB} et R_{CD} respectivement (Figure.2).

• Loi de kirchhoff

1. Etablir la loi des nœuds relative au nœud O du circuit de la figure.2
2. Appliquer la loi des mailles aux mailles ONDCO et OABNO.
3. Donner le système d'équations à deux inconnus I_1 et I_3 .
4. Calculer les résistances équivalentes R_{AB} et R_{CD} entre les bornes AB et CD.
5. En remplaçant les résistances R_{AB} et R_{CD} par leurs valeurs dans le système d'équations de la question 3, calculer les courants I_1 et I_3 en fonction de R et E . En déduire I_2
6. En appliquant le diviseur de courant calculer I_4 et I_5

• **Théorème de Thévenin**

1. Donner le générateur de thévenin (E_{Th}, R_{Th}) vu entre les bores A et B du circuit de la figure.2
2. Calculer le courant I_3 en fonction de E et R.
3. En appliquant le diviseur de courant déterminer les courants I_4 et I_5 .
4. Donner le générateur de thévenin (E'_{Th}, R'_{Th}) vu entre les bores C et D du circuit de la figure.2
5. Calculer le courant I_2 en fonction de E et R.
6. En déduire la valeur du courant I_1 en fonction de E et R.



Correction

Electrostatique

1. Soit M un point de l'espace. Tout plan passant par O et M est un plan de symétrie de la sphère alors le champ est porté par la droite OM intersection de ces plans de symétrie. Le champ est porté par OM : $\vec{E} = E(r, \theta, \varphi) \vec{e}_r$.
2. Toute rotation autour du point O (suivant θ ou φ) laisse la distribution inchangée alors le champ ne dépend que de r : $\vec{E} = E(r) \vec{e}_r$
3. On utilise une sphère comme surface de Gauss :

- $OM = r < R_1$:

$$\oiint \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad Q_{\text{int}} = 0 \quad \text{alors} \quad E = 0$$

- $R_1 < r < R_2$

$$\oiint \vec{E} \cdot \vec{ds} = \oiint E \, ds = E 4\pi r^2 = \frac{\rho 4\pi(r^3 - R_1^3)}{3\epsilon_0} \quad \text{alors} \quad E = \frac{\rho(r^3 - R_1^3)}{3\epsilon_0 r^2}$$

- $r > R_2$

$$\oiint \vec{E} \cdot \vec{ds} = \oiint E \, ds = E 4\pi r^2 = \frac{\rho 4\pi(R_2^3 - R_1^3)}{3\epsilon_0} \quad \text{alors} \quad E = \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\epsilon_0 r^2}$$

$r < R_1$	$R_1 < r < R_2$	$r > R_2$
$E = 0$	$E = \frac{\rho(r^3 - R_1^3)}{3\epsilon_0 r^2}$	$E = \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\epsilon_0 r^2}$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}V} \quad \rightarrow \quad V = - \int E \, dr$$

4.

- $r < R_1$ $E = 0$ alors $V = C^{\text{ste}} = A$

- $R_1 < r < R_2$

$$V = - \int E \, dr = - \int \frac{\rho(r^3 - R_1^3)}{3\epsilon_0 r^2} \, dr = - \frac{\rho}{3\epsilon_0} \int (r - \frac{R_1^3}{r^2}) \, dr = - \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\frac{r^2}{2} + \frac{R_1^3}{r} \right) + B$$

- $r > R_2$

$$V = - \int E \, dr = - \int \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\epsilon_0 r^2} \, dr = - \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\epsilon_0} \int \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\epsilon_0 r} + C$$

$V(\infty) = 0$ alors $C = 0$

Calcul de A et B :

$$\lim_{r \rightarrow R_1^+} V(r) = \lim_{r \rightarrow R_1^-} V(r) \quad \Leftrightarrow \quad - \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\frac{R_1^2}{2} + \frac{R_1^3}{R_1} \right) + B = A$$

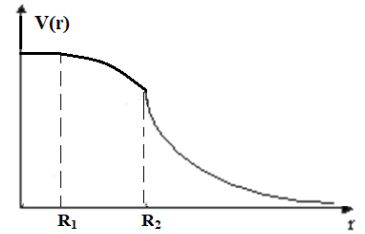
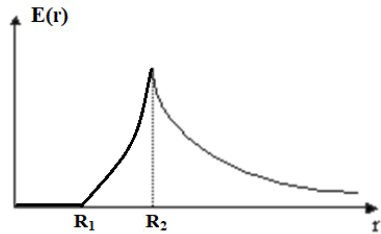
$$\lim_{r \rightarrow R_2^+} V(r) = \lim_{r \rightarrow R_2^-} V(r) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\epsilon_0 R_2} = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\frac{R_2^2}{2} + \frac{R_1^3}{R_2} \right) + \mathbf{B}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\epsilon_0 R_2} + \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\frac{R_2^2}{2} + \frac{R_1^3}{R_2} \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{R_2^2}{2}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\frac{R_1^2}{2} + \frac{R_1^3}{R_1} \right) + \mathbf{B} = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\frac{R_1^2}{2} + \frac{R_1^2}{1} \right) + \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{R_2^2}{2} = -\frac{\rho R_1^2}{2\epsilon_0} + \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{R_2^2}{2} \\ &= \frac{\rho}{2\epsilon_0} (R_2^2 - R_1^2) \end{aligned}$$

$r < R_1$	$R_1 < r < R_2$	$r > R_2$
$V = \frac{\rho}{2\epsilon_0} (R_2^2 - R_1^2)$	$V = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\frac{3R_2^2}{2} - \frac{r^3 + 2R_1^3}{2r} \right)$	$V = \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\epsilon_0 r}$

5.



\mathbf{E} et \mathbf{V} sont continus à la traversée du volume chargé

6. R_1 tend vers R_2 on obtient une seule sphère chargée en surface avec $\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$

$r > R$	$E = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2}$	$V = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r}$
$r < R$	$E = 0$	$V = \frac{\sigma R}{\epsilon_0}$

Electrocinétique

• Loi de Kirchhoff

8. $I_3 = I_2 + I_1$

9. $RI_1 - R_{CD} I_2 = E$ et $R_{AB} I_3 + RI_1 = 2E$

10. $(R_{CD} + R)I_1 - R_{CD} I_3 = E$ et $R_{AB} I_3 + RI_1 = 2E$

11. $R_{AB} = R_{CD} = 2R$

12. $I_1 = \frac{3E}{4R} \quad * \quad I_3 = \frac{5E}{8R} \quad * \quad I_2 = \frac{-E}{8R}$

13. $I_4 = I_5 = \frac{I_3}{2} = \frac{5E}{16R}$

• Théorème de Thévenin

1. $R_{TH} = \frac{2R}{3}, \quad * \quad E_{TH} = \frac{5E}{3}$

$$2. I_3 = \frac{5E}{8R}$$

$$3. I_4 = I_5 = \frac{I_3}{2} = \frac{5E}{16R}$$

$$4. R_{TH} = \frac{2R}{3}, \quad * \quad E_{TH} = \frac{4E}{3}$$

$$5. I_2 = \frac{-E}{8R} \quad * \quad I_1 = \frac{3E}{4R}$$