Chapitre 1
Loi de coulomb et champ électrostatique

Introduction
Rappelons qu'un atome est formé par noyau central autour duquel circulent des électrons qui sont chargés négativement. Ces électrons peuvent être arrachés de leur atome par différents moyens :

- Frottement
- Contact avec un autre corps déjà électrisé.
- Par compression (piézo-électricité)
- Chauffage (rayon cathodique).

Quand on frotte un corps A sur un autre B il y a transfert d'électricité de l'un vers l'autre, celui qui reçoit des électrons se charge d'électricité négative alors que celui qui en perd se charge d'électricité positive.
Puisque l'électrisation est un transfert d'électrons on peut la caractériser quantitativement par le nombre d'électrons perdus ou gagnés. Ce nombre mesure la charge électrique du corps électrisé.
L'unité SI de la charge est le coulomb (C), $e = 1{,}6\,10^{-19}\,C$ est la charge élémentaire.

Particules	**Symbole**	**Masse (kg)**	**Charge électrique (C)**
Électron	e^-	$9{,}1.10^{-31}$	$-1{,}6.10^{-19}$
Proton	p	$1{,}672.10^{-27}$	$1{,}6.10^{-19}$
Neutron	n	$1{,}674.10^{-27}$	0

Les propriétés de la charge électrique

1. **Quantification** : toute charge électrique est un multiple entier de la charge élémentaire **e**.
2. **Conservation** : la charge électrique totale d'un système isolé, c.-à-d. la somme algébrique des charges positives et négatives présentent à un instant quelconque reste toujours constante.

1. Loi de coulomb et champ électrostatique
1.1 Loi de coulomb
Considérons dans le vide deux charges électriques ponctuelles q_1 et q_2 au repos, par rapport à un référentiel R, placées respectivement en A et B et séparées d'une distance $r = \|\overrightarrow{AB}\|$.
Pour un observateur lié à R l'interaction électrostatique entre ces deux charges est donnée par :

$$\overrightarrow{F_{1/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2 q_1}{r^2}\vec{u} \text{ Où}$$

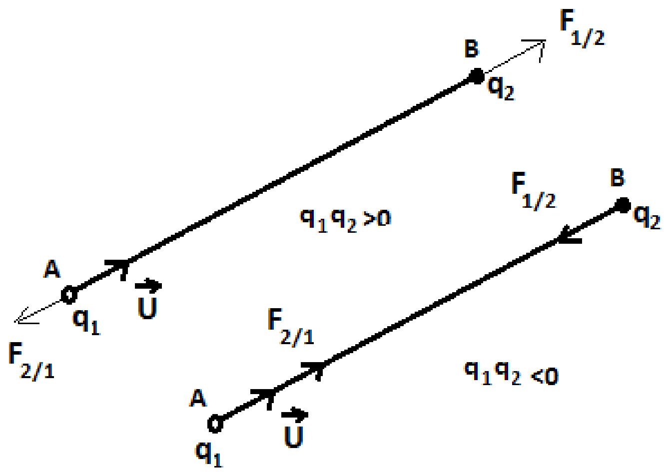
$\overrightarrow{F_{1/2}}$ est la force agissante sur la charge q_2 en B, $\vec{u}$ est le vecteur unitaire dirigé de q_1 vers q_2 et ε_0 est le coefficient caractéristique du milieu qui est le vide : la permittivité du vide

$$\varepsilon_0 = 8{,}854\,187\,812\,8 \times 10^{-12}\ \mathrm{A^2\ s^4\ kg^{-1}\ m^{-3}}.$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\,10^9\ \mathrm{S.I}$$

Cette équation exprime que :

- La force est radiale : dirigée selon la droite qui joint les deux charges
- Proportionnelle au produit des deux charges : répulsives s'elles sont de même signes ($q_1q_2>0$) et attractives s'elles sont de signes opposés ($q_1q_2<0$)
- La force obéit au principe d'action et de réaction de la mécanique classique (caractère newtonien) : $\overrightarrow{\boldsymbol{F_{1/2}}} = -\overrightarrow{\boldsymbol{F_{2/1}}}$



1.1.1 Enoncé de la loi de coulomb

Deux charges électriques ponctuelles exercent l'une sur l'autre une force dirigée suivant la droite qui les joint, proportionnelle à chacune des deux charges électriques et inversement proportionnelle au carré de leur distance **r**.

1.1.2 Principe de superposition

a- Distribution discrète de charges

Enoncé :

La force exercée par l'ensemble des charges $q_1, q_2 \ldots\ldots q_n$ sur la charge q_0 est la somme vectorielle des forces exercées par ces charges comme si chacune d'elles existait seule.

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{q1/q0}} + \vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{q2/q0}} + \vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{q3/q0}} + \cdots + \vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{qn/q0}} = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{i=n}} \vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{qi/q0}}$$

Où $\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{qi/q0}}$ est la force qu'exerce q_i sur q_0

b- Distribution continue de charges

La loi de coulomb est relative aux forces qui s'exercent entre charges ponctuelles. Nous étendrons son domaine d'application en adoptant l'hypothèse suivant qui complète la loi de Coulomb :

Hypothèse

Dans le vide, les forces exercées par deux corps électrisés l'un sur l'autre sont les résultantes de toutes les forces élémentaires exercées les unes sur les autres par les charges électriques réparties sur ces deux corps.

- **Distribution linéique de charges ($\boldsymbol{\lambda}$)**

La distribution linéique de charges est définie par une densité linéique de charges $\lambda = \frac{dq}{d\ell}$ où $d\ell$ est un élément de longueur élémentaire contenant la charge $\boldsymbol{dq = \lambda d\ell}$ et la charge totale est $Q = \int dq = \int \lambda d\ell$. L'unité de $\boldsymbol{\lambda}$ est $\boldsymbol{C/m}$.

- Calculons la force exercée par cette distribution sur la charge ponctuelle **q**' ?

1- On découpe le fil de longueur $\boldsymbol{\lambda}$ en éléments de longueur assez petits $\boldsymbol{d\ell}$ pour que la charge de chaque élément $\boldsymbol{dq = \lambda d\ell}$ puisse être considérée comme ponctuelle.
2- Nous faisons la somme vectorielle des forces exercées par ces éléments de longueurs $\boldsymbol{d\ell}$ sur la charge **q** :

$$\vec{F} = \int \overrightarrow{dF} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{q'dq}{r^2}\vec{u} = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\lambda\, d\ell}{r^2}\vec{u}$$

- **Distribution surfacique de charges (σ)**

La distribution surfacique de charges est définie par une densité surfacique de charges: $\boldsymbol{\sigma(x,y) = \frac{dq}{ds}}$ où $\boldsymbol{ds}$ est un élément de surface élémentaire d'une surface S ($ds = dxdy$). La charge contenue dans ds est donnée par $\boldsymbol{dq = \sigma\, ds}$ et la charge totale $\boldsymbol{Q = \iint_S \sigma\, ds}$. L'unité de $\boldsymbol{\sigma}$ est $\boldsymbol{C/m^2}$.

- Calculons la force exercée par cette distribution sur une charge ponctuelle $\boldsymbol{q'}$?

1- On découpe la surface S en éléments de surface assez petits $\boldsymbol{ds}$ pour que la charge de chaque élément de surface $\boldsymbol{dq = \sigma\, ds}$ puisse être considérée comme ponctuelle.
2- Nous faisons la somme vectorielle des forces exercées par ces éléments de surfaces $\boldsymbol{ds}$ sur la charge **q** :

$$\vec{F} = \int \overrightarrow{dF} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{q'\,dq}{r^2}\vec{u} = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0}\iint_S \frac{\sigma ds}{r^2}\vec{u}$$

- **Distribution volumique de charges (ρ)**

Elle est définie par une densité volumique de charges :
$\boldsymbol{\rho(x,y) = \frac{dq}{d\tau}}$ où $\boldsymbol{d\tau}$ est un élément de volume élémentaire d'un volume V ($d\tau = dxdydz$). La charge contenue dans $\boldsymbol{d\tau}$ est donnée par $\boldsymbol{dq = \rho\, d\tau}$ et la charge totale $Q = \iiint_V \rho\, dxdydz$. L'unité de $\boldsymbol{\rho\ est\ C/m^3}$.

- Calculons la force exercée par cette distribution sur la charge ponctuelle $\boldsymbol{q'}$?

1- On découpe le volume V en éléments de volume assez petits $\boldsymbol{d\tau}$ pour que la charge de chaque élément de volume $\boldsymbol{dq = \rho\, d\tau}$ puisse être considérée comme ponctuelle
2- Nous faisons la somme vectorielle des forces exercées par ces éléments de volumes $\boldsymbol{d\tau}$ sur la charge **q** :

$$\vec{F} = \int \overrightarrow{dF} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{q'\,dq}{r^2}\vec{u} = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V \frac{\rho d\tau}{r^2}\vec{u}$$

2. Champ électrostatique

La présence d'une distribution de charges dans l'espace change les propriétés de cet espace en créant, à chaque point, un champ électrostatique. Alors au lieu de dire qu'une distribution de charges exerce une force sur une charge q, on dit que la charge q interagit avec le champ électrostatique produit par la distribution de charges.

Il en résulte de ce qui précède que toute charge q placée en un point où le champ électrostatique est $\vec{E}$, se trouve soumise à une force $\vec{F}$ donnée par $\vec{F} = q\vec{E}$:

- Si $q > 0$ la force $\vec{F}$ a le même sens que $\vec{E}$
- Si $q < 0$ la force $\vec{F}$ a le sens opposé de $\vec{E}$

$\boldsymbol{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}}$ $[\boldsymbol{N/C}]$, le champ électrostatique est par définition la force par unité de charges.

2.1 Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle

Dans un référentiel R, en tout point M situé à la distance r d'une charge ponctuelle q immobile placée en O, il existe un champ électrostatique $\vec{E}$ tel que : $\boldsymbol{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}}$

2.2 Champ créé par plusieurs charges ponctuelles

On applique le principe de superposition :

Enoncé :

Le champ électrostatique produit au point M par un ensemble de N charges $\boldsymbol{q_i}$ est la somme vectorielle des champs électrostatiques produits par chacune des charges prises isolément.

Le champ créé par la charge $\boldsymbol{q_i}$ au point M est : $\boldsymbol{\vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i^2}\overrightarrow{u_i}}$

Le champ électrostatique résultant est :

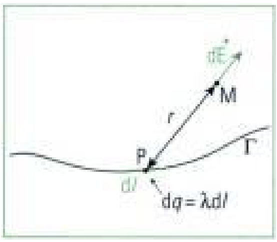
$$\boldsymbol{\vec{E} = \sum_{i=1}^{i=N}\vec{E}_i = \sum_{i=1}^{i=N}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i^2}\overrightarrow{u_i}}$$

Si l'on place une charge **q** au point M, elle sera soumise donc à la force :

$$\boldsymbol{\vec{F} = q\vec{E} = \sum_{i=1}^{i=N}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_i}{r_i^2}\overrightarrow{u_i}}$$

2.3 Champ créé par une distribution de charges continue

- **Distribution linéique de charges**



Les charges sont disposées sur une ligne $\boldsymbol{\Gamma}$ avec la densité linéique $\boldsymbol{\lambda}$. Chaque élément $\boldsymbol{d\ell}$ de la ligne, de centre P et quasi-ponctuel, porte la charge $\boldsymbol{dq = \lambda d\ell}$ et crée le champ élémentaire $\boldsymbol{\overrightarrow{dE}}$ en M :

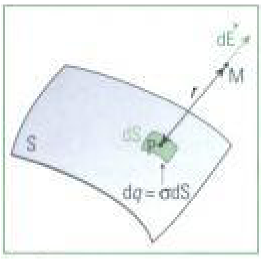
$$\boldsymbol{\overrightarrow{dE} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, d\ell}{r^2}\vec{u}}$$

Le champ total en M est la somme (intégrale pour une sommation continue) de tous les champs élémentaires créés par les éléments $\boldsymbol{d\ell}$ formant la ligne $\boldsymbol{\Gamma}$.

$$\boldsymbol{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_L \frac{\lambda\, d\ell}{r^2}\vec{u}}$$

- **Distribution surfacique de charges**

Les charges sont disposées sur une surface S avec la densité surfacique $\boldsymbol{\sigma}$. Chaque élément $\boldsymbol{ds}$ de la surface, de centre P et quasi-ponctuel, porte la charge $\boldsymbol{dq = \sigma ds}$ et crée le champ élémentaire $\overrightarrow{\boldsymbol{dE}}$ en M :



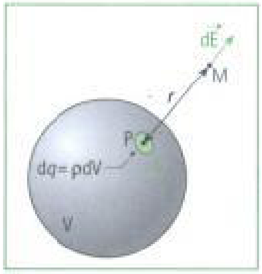
$$\overrightarrow{\boldsymbol{dE}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\, ds}{r^2}\vec{u}$$

Le champ total en M est la somme (intégrale pour une sommation continue) de tous les champs élémentaires créés par les éléments $\boldsymbol{ds}$ formant la surface $\boldsymbol{S}$.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_S \frac{\sigma\, ds}{r^2}\vec{u}$$

- **Distribution volumique de charges**

Les charges sont disposées sur un volume V avec la densité volumique $\boldsymbol{\rho}$. Chaque élément $\boldsymbol{d\tau}$ du volume, de centre P et quasi-ponctuel, porte la charge $\boldsymbol{dq = \rho d\tau}$ et crée le champ élémentaire $\overrightarrow{dE}$ en M :



$$\overrightarrow{\boldsymbol{dE}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho\, d\tau}{r^2}\vec{u}$$

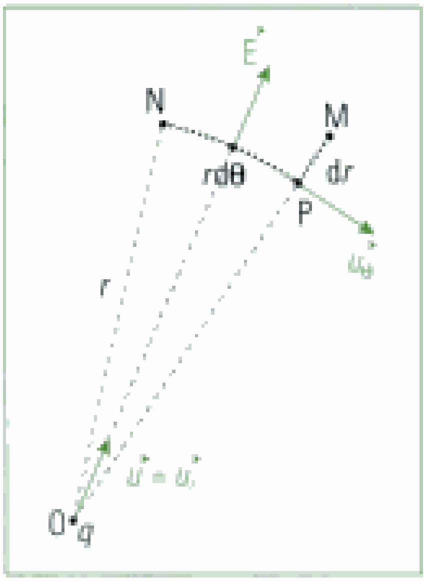
Le champ total en M est la somme (intégrale pour une sommation continue) de tous les champs élémentaires créés par les éléments $\boldsymbol{d\tau}$ formant le volume V.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V \frac{\rho\, d\tau}{r^2}\vec{u}$$

2.4 Circulation du vecteur champ électrique

Soit $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ une courbe d'extrémités A et B. N et M sont deux points très voisins de cette courbe.

- Calculons la circulation élémentaire $\boldsymbol{dC}$ de $\vec{\boldsymbol{E}}$, créé par une charge ponctuelle placée au point O, dans un déplacement élémentaire NM



On adopte les coordonnées polaires d'origine O et le vecteur déplacement élémentaire de N vers M s'écrit :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{NM}} = \overrightarrow{\boldsymbol{NP}} + \overrightarrow{\boldsymbol{PM}} = dr\overrightarrow{u_r} + rd\theta\vec{u}_\theta$$

On considère le champ comme uniforme entre N et M :

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{q}}{\mathbf{r}^2}\vec{\mathbf{u}} \quad \textbf{avec } \vec{\mathbf{u}} = \overrightarrow{\mathbf{u_r}}$$

La circulation élémentaire $\boldsymbol{dC}$ du champ $\vec{\boldsymbol{E}}$ est calculée à partir du déplacement infinitésimal depuis N vers M :

$$dC = \vec{E}.\overrightarrow{NM} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{u_r}.(dr\overrightarrow{u_r} + rd\theta\vec{u}_\theta)$$

$$dC = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr = -d\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)$$

Pour exprimer la circulation totale C du champ $\vec{E}$ entre A et B, on ajoute toutes les circulations élémentaires dCdu champ $\vec{E}$:

$$\boldsymbol{C = \int_A^B dC = \int_A^B -d\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_A} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_B} = \varphi(r_A) - \varphi(r_B)}$$

$$\text{Où } \boldsymbol{\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

Remarque :
La circulation de $\vec{E}$ pour aller de A à B est indépendante du chemin suivi. Elle est égale à la différence des valeurs prises par la fonction $\varphi(r)$ pour les valeurs r_A et r_B correspondantes aux extrémités du déplacement.

2.5 Considérations de symétrie et d'invariance du champ électrostatique

2.5.1 Principe de Curie :

« Un phénomène physique possède au moins les éléments de symétrie de ses causes. »

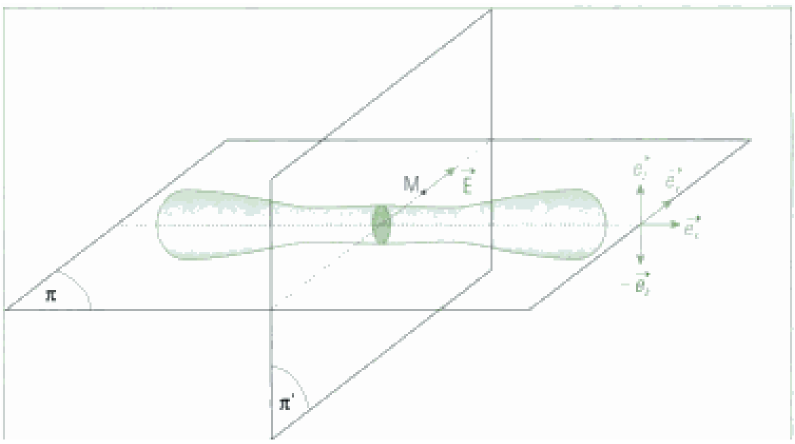
Du fait que le champ soit créé par une distribution de charges, il contient des informations sur les causes qui lui ont donné naissance. Ainsi, si l'on connaît les propriétés de symétrie d'une distribution de charges, on pourra connaître celles du champ électrostatique associé. Ces propriétés sont fondamentales car elles permettent de simplifier considérablement le calcul du champ électrostatique.

2.5.2 Considérations de symétrie

a. Plans de symétrie

- Si la distribution de charges admet un plan de symétrie $\boldsymbol{\Pi}$, alors en tout point de ce plan, le champ électrostatique est contenu dans ce plan.

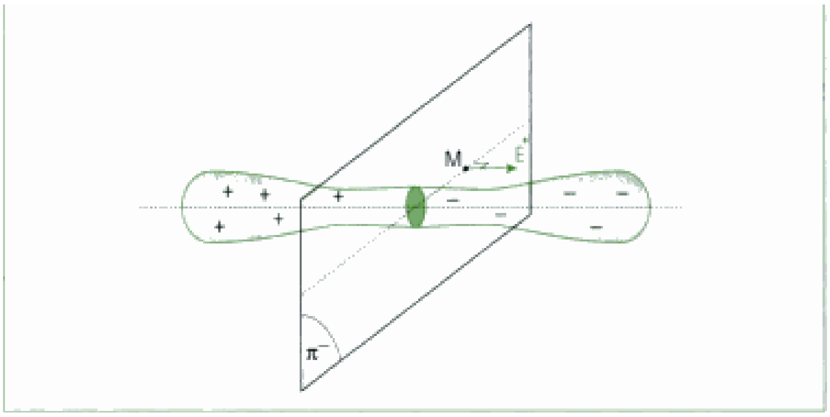
- Si la distribution de charges admet deux plans de symétrie $\boldsymbol{\Pi}$ et $\boldsymbol{\Pi'}$ contenant le point M, alors la direction du champ électrostatique en M est celle de la droite d'intersection de ces deux plans.



Distribution de charges ayant deux plans de symétrie

b. Plan d'antisymétrie

- Si, par symétrie par rapport à un plan $\mathbf{\Pi'}$, la distribution de charges change de signe, alors en tout point de ce plan, le champ électrostatique est perpendiculaire à $\mathbf{\Pi'}$

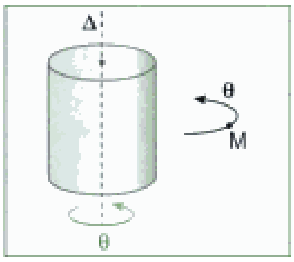


Distribution de charges ayant un plan d'antisymétrie

2.5.3 Considérations d'invariance

a. Rotation autour d'un axe

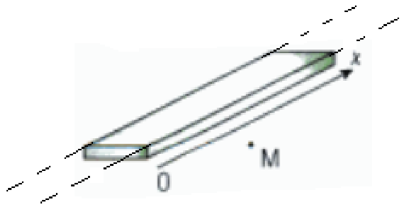
- Considérons une distribution de charges et un point M de l'espace où le champ $\vec{\mathbf{E}}$ est défini. S'il existe un axe Δ tel qu'une rotation d'angle θ quelconque autour de Δ laisse la distribution de charges inchangée, alors la valeur de $\boldsymbol{E} = \|\vec{\boldsymbol{E}}\|$ en M ne dépend pas de l'angle θ.



Distribution cylindrique de charges et rotation

b. Translation selon une direction

- S'il existe une droite Δ telle que toute translation selon cette droite laisse la distribution de charge inchangée, alors le module de $\vec{\mathbf{E}}$ en M ne dépend pas de la coordonnée d'espace associée à cette translation.



Distribution illimitée et translation

3. Potentiel électrostatique

- **Potentiel électrostatique créé par une charge ponctuelle**

Soit un point P et r sa distance à une charge q qui crée le champ électrostatique $\overrightarrow{\mathbf{E}}$. Posons :

$$\boldsymbol{V(P) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + K} \qquad \text{où } K \text{ est une constante}$$

$V(P)$ est appelé potentiel électrostatique créé par la charge q au point P.

Remarques :

- La constante K peut être choisie arbitrairement car seule une différence de potentiel est mesurable.
- S'il n'y a pas de charges à l'infini, on pose $\boldsymbol{V(\infty) = 0}$ alors K=0. Cela signifie que l'effet des charges tend vers 0 lorsque $\boldsymbol{r} \to \infty$

- **Potentiel créé par une distribution discrète de charges**

En appliquant le principe de superposition, il vient que le potentiel créé par un ensemble de charges ponctuelles vaut la somme des potentiels créés par chacune des charges ponctuelles.

Le potentiel électrostatique V créé en un point M par un ensemble de n charges ponctuelles $\boldsymbol{q_i}$ placées en $\boldsymbol{O_i}$ (avec $\boldsymbol{r_i = O_iM}$) vaut :

$$\boldsymbol{V(M) = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i} + K}$$

- **Potentiel créé par une distribution linéique de charges**

Les charges sont disposées sur une ligne $\boldsymbol{\Gamma}$ avec la densité linéique $\boldsymbol{\lambda}$. Chaque élément $\boldsymbol{d\ell}$ de la ligne, de centre P et quasi-ponctuel, porte la charge $\boldsymbol{dq = \lambda d\ell}$ et crée un potentiel élémentaire $\boldsymbol{dV}$ en un point M.

$$\boldsymbol{dV(M) = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r} + k = \frac{\lambda d\ell}{4\pi\varepsilon_0 r} + k}$$

Le potentiel total en M est la somme (intégrale pour une sommation qui, ici, est continue) de tous les potentiels élémentaires $\boldsymbol{dV}$ créés par les éléments $\boldsymbol{d\ell}$ de la ligne $\boldsymbol{\Gamma}$.

$$\boldsymbol{V(M) = \int_\Gamma dV = \int_\Gamma \frac{\lambda d\ell}{4\pi\varepsilon_0 r} + K}$$

- **Potentiel créé par une distribution surfacique de charges**
  Les charges sont disposées sur une surface S avec la densité surfacique $\boldsymbol{\sigma}$. Chaque élément $\boldsymbol{ds}$ de la surface, de centre P et quasi-ponctuel, porte la charge $\boldsymbol{dq = \sigma ds}$ et crée un potentiel élémentaire $\boldsymbol{dV}$ en M :

$$\boldsymbol{dV(M) = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r} + k = \frac{\sigma ds}{4\pi\varepsilon_0 r} + k}$$

  Le potentiel total en M est la somme (intégrale pour une sommation continue) de tous les potentiels élémentaires :

$$\boldsymbol{V(M) = \iint_S dV = \iint_S \frac{\sigma ds}{4\pi\varepsilon_0 r} + K}$$

- **Potentiel créé par une distribution volumique de charges**
  Les charges sont disposées sur un volume V avec la densité volumique $\boldsymbol{\rho}$. Chaque élément $\boldsymbol{d\tau}$ du volume, de centre P et quasi-ponctuel, porte la charge $\boldsymbol{dq = \rho d\tau}$ et crée un potentiel élémentaire $\boldsymbol{dV}$ en M :

$$\boldsymbol{dV(M) = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r} + k = \frac{\rho\, d\tau}{4\pi\varepsilon_0 r} + k}$$

  Le champ total en M est la somme (intégrale pour une sommation continue) de tous les potentiels élémentaires.

$$\boldsymbol{V(M) = \iiint_V dV = \iiint_V \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r} + K = \iiint_V \frac{\rho\, d\tau}{4\pi\varepsilon_0 r} + K}$$

<u>Conclusion</u> : La fonction **Potentiel** définit un champ de scalaires qui permet de décrire l'espace électrique.

3.1 Circulation et différence de potentiel

Il résulte des définitions précédentes que la circulation du champ électrostatique peut s'écrire :

$$\boldsymbol{C = \int_A^B \vec{E}.\overrightarrow{d\ell} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_A} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_B} = V(A) - V(B)}$$

La circulation élémentaire : $\boldsymbol{dC = \vec{E}.\overrightarrow{d\ell} = V - (V + dV) = -dV}$

3.2 Travail de la force électrostatique appliquée à une charge ponctuelle

Soit une charge placée dans un champ électrostatique $\boldsymbol{\vec{E}}$. La charge q est soumise à la force $\mathbf{\vec{F} = q\vec{E}}$. Soit W le travail de cette force lorsque la charge se déplace de A à B :

$$\boldsymbol{W} = \int_{AB} \vec{\boldsymbol{F}}.\overrightarrow{\boldsymbol{d\ell}} = \boldsymbol{q}\int_{AB} \vec{\boldsymbol{E}}.\overrightarrow{\boldsymbol{d\ell}}$$

Or $\int_{AB} \vec{E}.\overrightarrow{d\ell} = V(A) - V(B)$ $\quad$ *et par suite* $\boldsymbol{W = q(V(A) - V(B))}$

Remarque
Le travail de la force électrostatique ne dépend pas du chemin suivi.

<u>**Cas particulier**</u> **:** Une charge unité placée au point A et déplaçons là à l'infini ; le travail de la force électrostatique est : $W = V_A - V_B = V_A - V_\infty = V_A$
Le potentiel en A est le travail fait par la force électrostatique sur une unité de charge positive qui se déplace de A vers l'infini.

3.3 Relation entre champ électrostatique et potentiel électrostatique

Passons d'un point N où le champ est $\vec{\boldsymbol{E}}$ et le potentiel est V au point M où le potentiel est $V = V + dV$ par un déplacement $\overrightarrow{\boldsymbol{d\ell}} = \overrightarrow{\boldsymbol{NM}}$ de coordonnées (dx, dy, dz). La circulation de $\vec{E}$ de N à M peut s'écrire de deux façons :

$$dC = \vec{E}.\overrightarrow{d\ell} = E_x dx + E_y dy + E_z dz \qquad (1)$$
$$dC = V(N) - V(M) = V - (V + dV) = -dV$$

Or dV est la différentielle totale de la fonction $V(x, y, z)$ d'où :

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz \qquad (2)$$

Des équations (1) et (2) on a :

$$\boldsymbol{E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}dy, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}dz}$$

Cela s'exprime par : $\quad \vec{\boldsymbol{E}} = -\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}\,\boldsymbol{V} = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{V}$

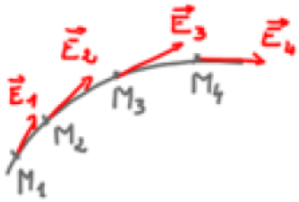
Rappels :

Coordonnées cylindriques : $f = f(r, \theta, z)$	Coordonnées sphériques : $f = f(r, \theta, \varphi)$
$\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{\partial f}{r\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_z \end{matrix}$	$\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{\partial f}{r\partial \theta} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_\varphi \end{matrix}$

3.4 Ligne de champ et surface équipotentielle

a- Ligne de champ

On appelle ligne de champ toute ligne ayant la propriété d'être tangente en chacun de ses points à la direction du vecteur champ en ce point.



- Le sens d'une ligne de champ est celui de $\vec{E}$ en chacun de ses points
- La circulation de $\vec{E}$ calculée en suivant le sens de la ligne de champ est toujours positive :

$dC = \vec{E}.\overrightarrow{d\ell} = \|\vec{E}\|.\|\overrightarrow{d\ell}\| > 0$ car les deux vecteurs son tangents et de même sens.

Par ailleurs $\boldsymbol{dC = -dV}$ donc :

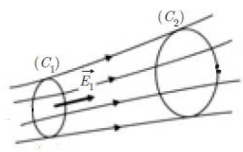
« Le long d'une ligne de champ, le champ $\vec{E}$ est dirigé vers les potentiels décroissants »

Conclusion :

- Une ligne de champ ne peut être fermée sur elle-même
- Une ligne de champ a un maximum de potentiel pour origine et un minimum pour extrémité

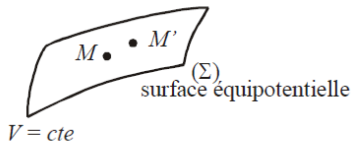
b- Tube de champ

On appelle tube de champ le canal formé par l'ensemble des lignes de champ passant par chacun des points d'un contour fermé.

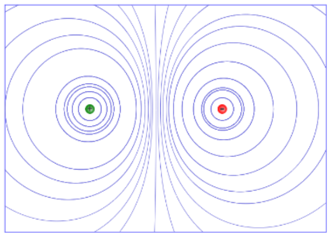


c- Surface équipotentielle

Une surface équipotentielle est une surface (Σ) pour laquelle le potentiel V est le même en chacun de ses points. Elle est définie par l'équation :



$$\boldsymbol{V(x, y, z) = C^{ste}}$$

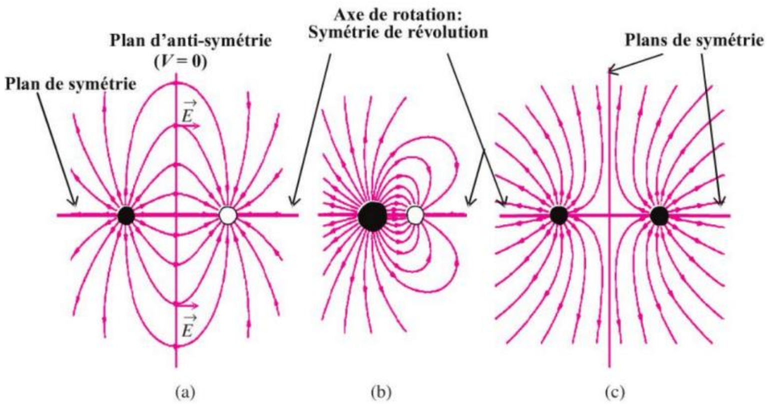


Soit M un point d'une surface équipotentielle et **M** un point très proche de **M'** appartenant à S.

On a : $V(\mathrm{M'}) = V(M)$

La circulation $dC = \vec{E}.\overrightarrow{M\mathrm{M'}} = -dV = 0$ alors : $\vec{E}$ est orthogonal à $\overrightarrow{M\mathrm{M'}}$ par conséquent :

- Le champ $\vec{E}$ est orthogonal aux surfaces équipotentielles.
- Les lignes de champ sont en tous points orthogonales aux surfaces équipotentielles.



Lignes de champ pour deux charges : (a) $(+q, -q)$; (b) $(2q, -q)$; (c) $(+q, +q)$. Tout plan contenant les charges est plan de symétrie.

4. Dipôle électrostatique

Définitions

a- Dipôle électrostatique

On appelle dipôle électrostatique, l'ensemble de deux charges opposées (-q) et (+q) ponctuelles, respectivement situées en A et B, la distance AB étant infiniment petite par rapport à la distance au point où l'on observe leurs effets ou l'on agit sur elles.

b- Moment électrique dipolaire

On appelle moment dipolaire le vecteur :

$$\vec{P} = q\overrightarrow{AB}$$

c- Dipôle rigide (permanent)

Nous appellerons dipôle rigide, un dipôle dont le moment dipolaire $\vec{P}$ est de module indépendant du champ dans lequel il se trouve (AB est invariable).

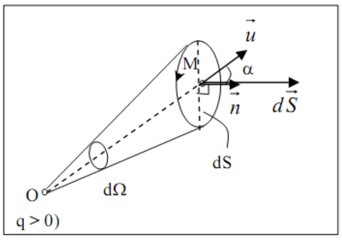
d- dipôle induit

Soit un système de charges ne présentant pas de moment dipolaire en l'absence de champ électrique. Sous l'action d'un champ extérieur il y a création d'un dipôle par influence, son moment dipolaire est appelé moment dipolaire induit.

5. Flux d'un champ électrostatique à travers une surface

5.1 Flux à travers une surface élémentaire

Soit ds un élément de surface infinitésimal centré sur un point M et q une charge ponctuelle placée au point O à la distance r du point M. La charge q crée au point M le champ :



$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}$$

Le champ peut être considéré comme uniforme sur la très faible étendue de l'élément de surface ds. Le vecteur surface est $\overrightarrow{ds} = ds\,\vec{n}$ où $\vec{n}$ est le vecteur unitaire de la normale à l'élément de surface ds.

Le flux de $\vec{E}$ à travers ds est :

$$d\emptyset = \vec{E}.\overrightarrow{ds} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}.\overrightarrow{ds}}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\alpha\, ds}{r^2}$$

Par définition :

$$d\Omega = \frac{\vec{u}.\overrightarrow{ds}}{r^2} = \frac{\cos\alpha\, ds}{r^2}$$

est l'angle solide sous lequel on voit depuis O l'élément de surface ds.

D'où

$$d\emptyset = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega$$

Le flux de $\vec{E}$ à travers toute la surface S est :

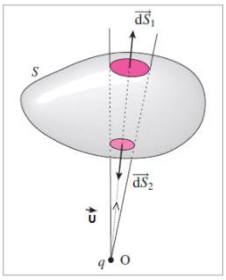
$$\emptyset = \int_S d\emptyset = \iint_S \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega$$

5.2 Flux à travers une surface fermée

On découpe l'espace autour de (q) en cônes élémentaires ayant même sommet au point O :

- **La charge q est à l'extérieur de la surface fermée**

Le cône de sommet O intersecte la surface S et définit deux surfaces élémentaires $\mathbf{ds_1}$ et $\mathbf{ds_2}$.
Calculons le flux à travers ces deux éléments de surfaces :



à travers ds_1:

$$d\emptyset_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{u}.\overrightarrow{ds_1}}{r_1^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega$$

à travers ds_2:

$$d\emptyset_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{u}.\overrightarrow{ds_2}}{r_2^2} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega$$

Ces deux flux sont de même intensité mais de signe opposé car les vecteurs surfaces sont orientés de l'intérieur vers l'extérieur et $\vec{u}$ est alternativement entrant et sortant. Ainsi le flux total :

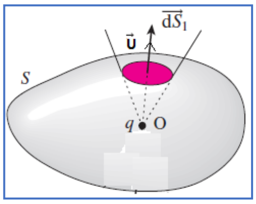
$$d\emptyset_t = d\emptyset_1 + d\emptyset_2 = 0$$

Toute la surface fermée S peut être décomposée de cette façon. Le flux total traversant cette surface S est alors nul.

Conclusion : Le flux total du champ électrostatique créé par une charge, à travers une surface fermée ne la contenant pas, est nul.

- **La charge q est à l'intérieur de la surface fermée**

Considérons maintenant une surface fermée qui enveloppe la charge q. Chaque cône de sommet O intersecte la surface S en définissant une seule surface élémentaire ds . Calculons le flux à travers la surface ds :



$$d\emptyset = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{u}.\overrightarrow{ds}}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega$$

Le flux total à travers la surface S est la somme des contributions apportées par chaque élément d'angle solide $\boldsymbol{d\Omega}$; l'angle solide correspondant à toute la surface S est égal à 4π.

$$\emptyset = \int_S d\emptyset = \iint_S \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \iint_S d\Omega = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Conclusion : Le flux du champ électrostatique créé par une charge ponctuelle à travers une surface fermée la contenant est égal à : $\emptyset = \frac{q}{\varepsilon_0}$

Théorème de Gauss : Le flux électrique sortant d'une surface fermée est égal au produit par $\frac{1}{\varepsilon_0}$ de la somme algébrique des charges intérieures :

$$\boldsymbol{\phi} = \oiint_S \vec{E}.\overrightarrow{ds} = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0} \quad (1)$$

Remarques :

- Le flux est indépendant de la position des charges
- Le flux est indépendant des charges extérieures

5.3 Expression locale du théorème de Gauss

L'expression précédente du théorème de Gauss qui nécessite la connaissance du champ électrostatique en tout point de la surface fermée, caractérise donc une propriété non locale du champ. Toutefois, nous allons voir maintenant que cette propriété a son équivalent à l'échelle locale. Pour établir cette nouvelle formulation du théorème de Gauss, nous appliquerons à cette expression le théorème de **Green-Ostrogradsky** :

$$\emptyset = \iint_S \vec{E}.\overrightarrow{ds} = \iiint_V div\vec{E}\, d\tau \qquad (2)$$

Dans cette expression V est le volume contenu dans la surface fermée S et $d\tau$ un élément infinitésimal de ce volume contenant la charge élémentaire $q_i = \rho d\tau$. La charge totale contenue dans le volume V est $Q = \iiint_V \rho d\tau$.

Alors le flux sortant de S est :

$$\emptyset = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho d\tau = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad (3)$$

Nous obtenons par identification des équations (2) et (3) :

$$\iiint_V div\vec{E}\, d\tau = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho d\tau$$

On peut donc en déduire la relation :

$$\boxed{div\,\overrightarrow{E(r)} = \frac{\rho(r)}{\varepsilon_0} \quad (4)}$$

L'équation (4) correspond à la formulation locale du théorème de Gauss. En chaque point de l'espace, la divergence du champ électrostatique ne dépend que de la densité de charge en ce même point.

5.4 Equation de Poisson et de Laplace

Au paragraphe précédent, nous avons établi la relation liant la divergence du champ électrostatique à la densité locale de charges et obtenu ainsi la forme locale du théorème de Gauss donnée par l'expression (4) :

$$div\overrightarrow{E(r)} = \frac{\rho(r)}{\varepsilon_0}$$

Par ailleurs, nous avons montré que le champ électrostatique dérive d'un potentiel électrostatique : $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$ **(5)**

En éliminant le champ électrostatique $\vec{E}$ entre ces deux relations, on obtient une nouvelle relation, dite « **équation de Poisson** » :

$$-div\,\overrightarrow{grad}\,V = \frac{\rho(r)}{\varepsilon_0}$$

$$-\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}V) = \frac{\rho(r)}{\varepsilon_0}$$

$$-\vec{\nabla}^2 V = \frac{\rho(r)}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\Delta V = -\frac{\rho(r)}{\varepsilon_0} \qquad \text{(équation de Poisson)}}$$

L'expression $\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}V)$ porte le nom de « laplacien de V » et se représente symboliquement par ΔV ou par $\vec{\nabla}^2 V$. En coordonnées cartésiennes par exemple, cette équation s'écrira :

$$\boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho(r)}{\varepsilon_0}}$$

Remarque : C'est une équation aux dérivés partielles dont la résolution permet, théoriquement de calculer le potentiel et par suite le champ en tout point de l'espace lorsque l'on connaît la répartition $\rho(x, y, z)$ des charges électriques dans l'espace.

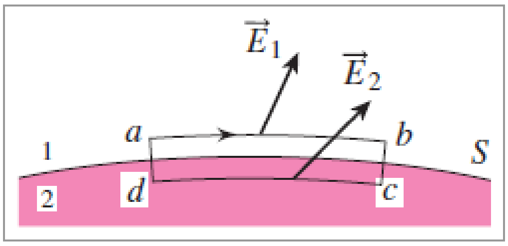
Dans les régions de l'espace présentant une densité de charges nulle, l'équation de Poisson se réduit à :

$$\Delta V = 0 \qquad \textbf{(Equation de Laplace)}$$

6. Propriétés de continuité du champ électrostatique

6.1 Continuité de la composante tangentielle

Considérons le contour C présenté sur la figure suivante. Il est formé de deux segments de longueur finie (ab) et (cd) situés de part et d'autre de la surface, très près de celle-ci et de deux autres segments (ad) et (bc) pouvant être rendus aussi petits que l'on veut.



$$\oint_C \vec{E}.\vec{dl} = \int_a^b \vec{E}.\vec{dl} + \int_b^c \vec{E}.\vec{dl} + \int_c^d \vec{E}.\vec{dl} + \int_d^a \vec{E}.\vec{dl} = 0$$

Les longueurs des segments (ad) et (bc) étant aussi petites que l'on veut ; les contributions de ces segments tendent vers 0. Sur les trajets (ab) et (cd), de même longueur mais parcourus en sens inverse, seule la composante tangentielle $\vec{E}_t$ du champ contribue à la circulation :

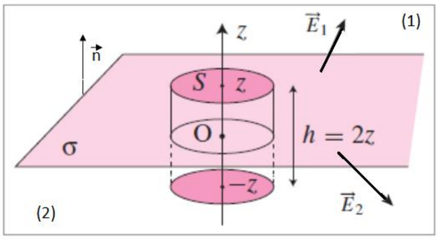
$$\int_a^b \vec{E}_1 . \overrightarrow{dl} + \int_c^d \vec{E}_2 . \overrightarrow{dl} = \int_a^b \vec{E}_1 . \overrightarrow{dl} - \int_a^b \vec{E}_2 . \overrightarrow{dl} = 0$$

$$\int_a^b \overrightarrow{E_t(1)} . \overrightarrow{dl} - \int_a^b \overrightarrow{E_t(2)} . \overrightarrow{dl} = \int_a^b \left[\overrightarrow{E_t(1)} - \overrightarrow{E_t(2)}\right] . \overrightarrow{dl} = 0$$

$$\overrightarrow{E_t(1)} = \overrightarrow{E_t(2)}$$

6.2 Discontinuité de la composante normale du champ

Considérons la surface enveloppe d'un cylindre plat dont les faces parallèles sont situées de part et d'autre de la surface plane chargée de la figure suivante :



Calculons le flux de $\vec{E}$ à travers cette surface S. La hauteur du cylindre pouvant être arbitrairement petite, le flux à travers la surface latérale peut être rendu aussi petit que l'on veut et tendra vers 0 avec la hauteur. Les seules contributions au flux proviennent donc des surfaces du cylindre parallèles à la surface chargée. En appliquant le théorème de Gauss, nous obtenons :

$$\iint_{S_1} E_n(1)\vec{n}.\overrightarrow{ds} + \iint_{S_2} E_n(2)\vec{n}.\overrightarrow{ds} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_o}$$

$$\iint_{S_1} (E_n(1) - E_n(2))\, ds = \frac{1}{\varepsilon_o} \iint_{S_2} \sigma\, ds$$

alors

$$\boxed{E_n(1) - E_n(2) = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}}$$

Ainsi, à la traversée de la surface chargée, la composante normale du champ subit une discontinuité, proportionnelle à la densité surfacique de charges.

Synthèse :

On peut résumer les lois locales dans le vide de la manière suivante :

- $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V$
- $\overrightarrow{rot}\, \vec{E} = \vec{0}$
- Théorème de GAUSS : $div\, \vec{E} = \rho/\varepsilon_o$
- Equation de POISSON : $\Delta V = -\rho/\varepsilon_o$
- Equation de LAPLACE en absence de charge $\Delta V = 0$
- Conditions de passage entre deux distributions de charge:

$$\begin{cases} E_{1_t} - E_{2_t} = 0 \\ E_{1_n} - E_{2_n} = \sigma/\varepsilon_o \end{cases}$$

Chapitre 2
Conducteurs en équilibre électrostatique

1. Définitions
1.1. Conducteurs
Un conducteur est un corps dans lequel il existe des charges électriques qui sont susceptibles de se déplacer librement. Ces charges libres peuvent être des électrons libres (cas des métaux), des ions (cas des électrolytes) et des électrons et des ions (cas des plasmas).

1.2 Condition d'équilibre
L'équilibre électrostatique d'un conducteur est atteint lorsqu'aucune charge libre ne se déplace à l'intérieur du conducteur. Cela signifie que le champ électrostatique total auquel elle est soumise est nul.

2. Propriétés d'un conducteur homogène et isotherme en équilibre
2.1 Définition
Un conducteur homogène et isotherme est dit en équilibre si les charges libres qu'il contient sont au repos.

<u>Conséquences</u> :

- Le champ électrique $\vec{\mathbf{E}}$ est nul en tout point d'un conducteur en équilibre :

  $\vec{\mathbf{F}} = \mathbf{q}\vec{\mathbf{E}}$; or les charges sont au repos alors $\vec{\mathbf{F}}=\vec{\mathbf{0}}$ et par conséquent $\vec{\mathbf{E}}=\vec{\mathbf{0}}$.

- La densité volumique des charges est nulle en tout point intérieur au conducteur :

  $\boldsymbol{div}\overrightarrow{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})} = \frac{\boldsymbol{\rho(r)}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}}$; or $\vec{\mathrm{E}} = \vec{0}$ alors $\rho(r) = 0$ (un conducteur ne peut être chargé qu'en surface).

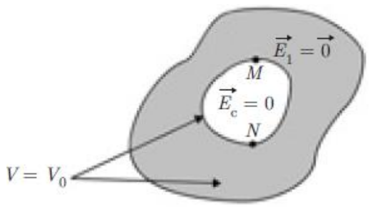
- Le potentiel est constant à l'intérieur et sur la surface d'un conducteur en équilibre :

$$\vec{\boldsymbol{E}} = -\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}\,\boldsymbol{V}; \quad \text{or} \quad \vec{\mathrm{E}} = \vec{0} \text{ alors } \quad \boldsymbol{V} = \boldsymbol{C^{ste}}$$

<u>Remarque</u> :
La surface d'un conducteur est une surface équipotentielle, donc les lignes de champs sont normales à la surface du conducteur. Il en résulte qu'en un point très voisin d'un conducteur le champ $\vec{\mathrm{E}}$ est normal à la surface du conducteur.

2.2 Propriétés d'une cavité à l'intérieur d'un conducteur en équilibre
Considérons une cavité, creusée dans un conducteur en équilibre, ne contenant pas de charges.

- Le potentiel est constant et égal à celui du conducteur dans la cavité :



La surface (externe et interne) est une equipotentielle $V = V_0$. On en déduit que les points M et N pris sur la surface interne sont au même potentiel $V_M = V_N$.
Considérons une courbe joignant M et N. Le potentiel ne peut varier le long de MN qu'en présence d'extrémums.

$$\Delta \boldsymbol{V} = -\frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\boldsymbol{\partial^2 V}}{\boldsymbol{\partial x^2}} + \frac{\boldsymbol{\partial^2 V}}{\boldsymbol{\partial y^2}} + \frac{\boldsymbol{\partial^2 V}}{\boldsymbol{\partial z^2}} = -\frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}}$$

L'existence d'extrémums :

$$\Rightarrow \quad \frac{\boldsymbol{\partial V}}{\boldsymbol{\partial x}} = \frac{\boldsymbol{\partial V}}{\boldsymbol{\partial y}} = \frac{\boldsymbol{\partial V}}{\boldsymbol{\partial z}} = \boldsymbol{0}$$

L'existence des maximums

$$\Rightarrow \quad \frac{\boldsymbol{\partial^2 V}}{\boldsymbol{\partial x^2}} < 0, \quad \frac{\boldsymbol{\partial^2 V}}{\boldsymbol{\partial y^2}} < 0, \quad \frac{\boldsymbol{\partial^2 V}}{\boldsymbol{\partial z^2}} < 0 \quad \Rightarrow \quad \rho > 0$$

L'existence des minimums

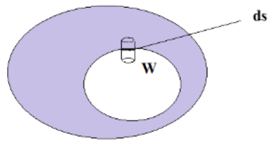
$$\Rightarrow \quad \frac{\boldsymbol{\partial^2 V}}{\boldsymbol{\partial x^2}} > 0, \quad \frac{\boldsymbol{\partial^2 V}}{\boldsymbol{\partial y^2}} > 0, \quad \frac{\boldsymbol{\partial^2 V}}{\boldsymbol{\partial z^2}} > 0 \quad \Rightarrow \quad \rho < 0$$

Or dans la cavité $\rho = 0$ alors il ne peut y avoir d'extrémums ce qui implique que le potentiel est constant et égal à celui du conducteur dans la cavité.

- Le champ est nul en tout point de la cavité :

$$\vec{\boldsymbol{E}} = -\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}\,\boldsymbol{V}; \text{ or } \quad \boldsymbol{V} = \boldsymbol{C^{ste}} \quad \text{alors} \quad \vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{0}}$$

- La surface de la cavité ne porte pas de charges :

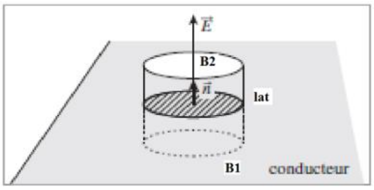


On considère comme surface de Gauss le cylindre W s'appuyant sur l'élément de surface ds de la cavité. Le flux du champ $\vec{E}$ à travers la surface du cylindre W est : $\emptyset = \oiint_W \vec{E}\,.\overrightarrow{ds} = 0$ car le champ est nul dans la cavité et dans le conducteur.
Soit $\boldsymbol{Q_{int}}$ la charge contenue dans le cylindre W et $\boldsymbol{\sigma_{int}}$ la densité surfacique de la surface de la cavité alors :

$$\emptyset = \frac{\boldsymbol{Q_{int}}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}} = \frac{\boldsymbol{\sigma_{int} ds}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}} = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{Q_{int}} = \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{alors} \quad \boldsymbol{\sigma_{int}} = \boldsymbol{0}$$

2.3 Champ créé par un conducteur en équilibre

Considérons un cylindre $d\Sigma$ de base infinitésimale, d'axe normal à la surface d'un conducteur et situé de part et d'autre de la surface du conducteur. Le champ étant normal à la surface :



$$d\emptyset = \oiint_{\mathbf{d\Sigma}} \vec{\mathbf{E}}.\overrightarrow{\mathbf{ds}} = \mathbf{d\phi_{S_{B1}}} + \mathbf{d\phi_{S_{B2}}} + \mathbf{d\phi_{S_{lat}}}$$

$$\boldsymbol{d\emptyset} = \iint_{S_{B1}} \vec{E}.\overrightarrow{dS}_{B_1} + \iint_{S_{B2}} \vec{E}.\overrightarrow{dS}_{B_2} + \iint_{S_{lat}} \vec{E}.\overrightarrow{dS}_{lat}$$

Où $\boldsymbol{d\phi_{S_{B1}}, d\phi_{S_{B2}} et\ d\phi_{S_{lat}}}$ sont respectivement les flux à travers les bases B_1, B_2 et la surface latérale

Or :

$\boldsymbol{d\phi_{S_{B1}} = 0}$ car le champ $\vec{E}$ est nul dans le conducteur

$\boldsymbol{d\phi_{S_{lat}} = 0}$ car le champ $\vec{E}$ est orthogonal à $\overrightarrow{dS}_{lat}$

$$\mathbf{d\emptyset} = \oiint_{\mathbf{d\Sigma}} \vec{\mathbf{E}}.\overrightarrow{\mathbf{ds}} = \mathbf{d\phi_{S_{B2}}} = \iint_{\mathbf{S_{B2}}} \vec{\mathbf{E}}.\overrightarrow{\mathbf{dS}}_{\mathbf{B_2}} = \mathbf{E} \iint_{\mathbf{S_{B2}}} \mathbf{dS_{B_2}} = \mathbf{E\ S_{B2}} = \frac{\sum \mathbf{q_i}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}\ \mathbf{S_{B2}}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}}$$

Alors :

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad et \quad \vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}}$$

<u>Théorème de Coulomb</u>:

L'intensité du champ électrostatique au voisinage d'un conducteur en équilibre dans le vide est $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$. Si $\vec{n}$ est le vecteur unitaire, normal à la surface du conducteur et dirigé de l'intérieur vers l'extérieur alors $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$

<u>Remarque</u> :

Le champ au voisinage du conducteur est la résultante des champs créés, non seulement par toutes les charges portées par le conducteur mais aussi par les charges réparties dans l'espace.

2.4 Pression électrostatique

Considérons un élément de surface $\boldsymbol{ds}$ d'un conducteur en équilibre de charge **Q.** L'élément $\boldsymbol{ds}$ porte une charge $\boldsymbol{dq = \sigma ds}$.

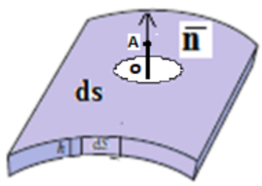
$\boldsymbol{dq}$ est soumise au champ $\vec{E}_2$ créé par l'ensemble des charges du conducteur extérieurs à ds : $(\boldsymbol{Q - \sigma ds})$, et par toutes les charges réparties dans l'espace s'elles existent. La charge $\boldsymbol{dq}$ est donc soumise à une force $\overrightarrow{dF}$ exercée sur elle par les autres charges :

$$\overrightarrow{dF} = dq\vec{E}_2 = \sigma ds\,\vec{E}_2$$

<u>Calcul de</u> $\vec{E}_2$:

On définit l'élément de surface par un contour circulaire de centre O et de rayon $\boldsymbol{dr}$ très faible. $\boldsymbol{ds}$ est assimilable à un disque plan.

Considérons un point A situé sur la normale en O à ce disque à l'extérieur du conducteur et tel que $\boldsymbol{OA \ll dr}$; on peut donc considérer le disque comme étant un plan infini.



En A les charges $\boldsymbol{\sigma ds}$ du disque assimilé à un plan infini créent le champ $\vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{1}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{2\varepsilon_0}}\vec{\boldsymbol{n}}$ (voir TD).
$\vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{2}}$ étant le champ créé en A par toutes les charges autres que $(\boldsymbol{\sigma ds})$ alors :

$\vec{\boldsymbol{E}} = \vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{1}} + \vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{2}}$ où $\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}}\vec{\boldsymbol{n}}$ est le champ au voisinage du conducteur.

$$\vec{\boldsymbol{E}}_2 = \vec{\boldsymbol{E}} - \vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{1}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}}\vec{\boldsymbol{n}} - \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{2\varepsilon_0}}\vec{\boldsymbol{n}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{2\varepsilon_0}}\vec{\boldsymbol{n}}$$

Or $\overrightarrow{\boldsymbol{dF}} = \boldsymbol{\sigma}\overrightarrow{\boldsymbol{ds}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{2}}$ alors

$$\overrightarrow{\boldsymbol{dF}} = \cdot \frac{\boldsymbol{ds\,\sigma^2}}{\boldsymbol{2\varepsilon_0}}\vec{\boldsymbol{n}}$$

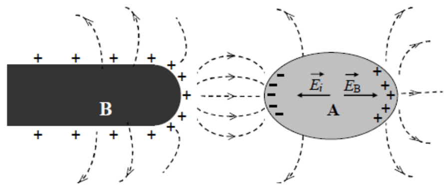
- $\overrightarrow{\boldsymbol{dF}}$ est normale à la surface du conducteur
- $\overrightarrow{\boldsymbol{dF}}$ est toujours de l'intérieur vers l'extérieur du conducteur indépendamment du signe des charges du conducteur (σ) $\Rightarrow$ $\overrightarrow{\boldsymbol{dF}}$ est une force d'expansion.

On peut définir une pression électrostatique en un point du conducteur par :

$$\boldsymbol{P} = \frac{\|\overrightarrow{\boldsymbol{dF}}\|}{\boldsymbol{ds}} = \frac{\boldsymbol{\sigma^2}}{\boldsymbol{2\varepsilon_0}}$$

3. Etude d'un système de conducteurs en équilibres
3.1 Influence partielle

Considérons un conducteur en équilibre B portant une charge positive Q. Approchons de B un autre conducteur A isolé et neutre (en équilibre) :



- <u>Interprétation</u>

Le conducteur B crée dans l'espace et en particulier dans le conducteur A un champ électrique $\vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{B}}$. Les électrons libres du conducteur A vont, sous l'action de ce champ, se déplacer dans le sens inverse de $\vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{B}}$. Ces électrons s'accumulent progressivement sur la face en regard de B et forment à l'équilibre des charges négatives dont la résultante est -Q. A l'inverse, des charges positives, dont la résultante est +Q, vont apparaître sur l'autre face par défaut d'électrons. Ces charges, qui résultent d'une électrisation par influence créent un champ induit $\vec{\mathbf{E}}_{\mathbf{i}}$ qui vient s'opposer au champ inducteur $\vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{B}}$ et réduire ainsi le champ électrique total. A l'intérieur du conducteur A les électrons libres ne cessent leur mouvement que lorsque le champ électrique total s'annule. Le système formé par les deux conducteurs atteint alors un état d'équilibre.

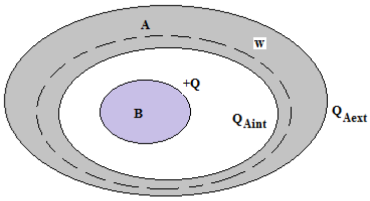
<u>Remarque</u> :
Lors de l'évolution de ce phénomène, les charges -Q, induites ou créées par influence, interviennent en augmentant la densité surfacique des charges sur la face de B en regard de A. Il se produit une influence retour de A sur B. On dit qu'il y'a influence mutuelle.

3.2 Influence totale

Définition :

On dit qu'il y a influence totale lorsque le conducteur influencé entoure complètement le conducteur influençant.

Soit A un conducteur en équilibre creux à l'intérieur duquel est placé un conducteur B de charge Q_B positive.
On applique le théorème de Gauss en considérant une surface fermée W à l'intérieur du conducteur A. Sachant que le champ est nul à l'intérieur du conducteur A (équilibre électrostatique) on a :



$$\boldsymbol{\Phi = \oiint_{W} \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{Q_B + Q_{A\,int}}{\varepsilon_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_{A\,int} = -Q_B}$$

Où $\boldsymbol{Q_{A\,int}}$ est la charge portée par la surface de la cavité A.

- Cas où le conducteur A est initialement neutre

  $$\boldsymbol{Q_{A\,int} + Q_{A\,ext} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_{A\,ext} = -\,Q_{A\,int} = Q_B}$$

- Cas où le conducteur A porte initialement une charge q

  $$\boldsymbol{Q_{A\,int} + Q_{A\,ext} = q \quad \Rightarrow \quad Q_{A\,ext} = q - \; Q_{A\,int} \;\Rightarrow\; Q_{A\,ext} = q + \; Q_B}$$

3.3 Ecran électrique (effet écran)

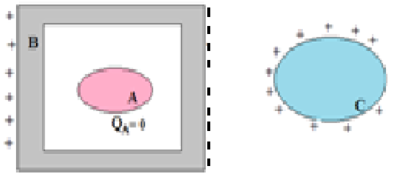
Définition

On appelle écran électrique une surface conductrice ayant la propriété d'annuler de l'un des côtés de sa surface l'effet que peuvent produire des corps chargés placés de l'autre côté.

Soient trois conducteurs B (creux), A et C. On étudie les cas suivants :

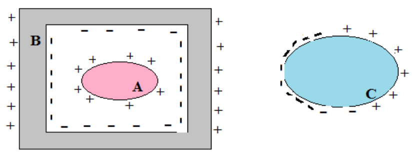
- **état initiale 1** : ***A neutre*** $(\boldsymbol{Q_A = 0})$**,** ***B isolé et C porte une charge positive*** $(\boldsymbol{Q_C} > 0)$:

B est à l'équilibre alors $\boldsymbol{Q_{B\,int} = 0}$. Malgré la charge portée par la face extérieur de B, la cavité intérieur possède un champ nul. Alors A. est protégé de toute influence provenant de l'extérieur :
« **B est écran de l'extérieur vers l'intérieur** »



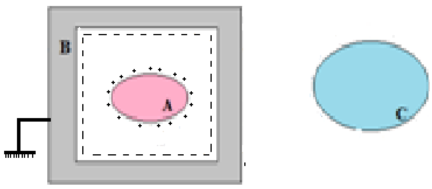
- **état initiale 2** : $\boldsymbol{Q_C = 0},\ \boldsymbol{Q_A} > 0\ et\ B\ isol$é :

Par influence la surface interne de B se charge négativement. Puisque B est isolé, la surface externe de B se charge positivement et la face de C en regard de B se charge négativement par influence et puisque $Q_C = 0$ l'autre face de C se charge positivement : « **B ne fait pas écran de l'intérieur vers l'extérieur ».**



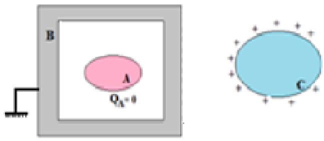
<u>Conclusion</u> : Un conducteur creux isolé est un écran imparfait.

- **état initiale 1** : $\boldsymbol{Q_C = 0},\ \boldsymbol{Q_A} > 0\ et\ B\ lié\ au\ sol$



B lié au sol alors $\boldsymbol{Q_{B\,ext} = 0}$ mais $\boldsymbol{Q_{B\,int} = -Q_A}$ et C reste sans charge ; les charges se trouvant sur la surface extérieure de B s'écoulent dans le sol : **« L'espace extérieur à B est protégé de toute influence provenant de la cavité »**

- **état initiale 2** : $\boldsymbol{Q_C} > 0, \boldsymbol{Q_A = 0\ et\ B\ lié\ au\ sol}$



Malgré la charge positive portée par le conducteur C , le conducteur A reste sans charge car les charges se trouvant sur la surface extérieure de B s'écoulent dans le sol.

<u>**Conclusion**</u> : Un conducteur creux maintenu à un potentiel constant est un écran parfait.

3.4 Capacité d'un conducteur

Considérons un conducteur isolé en équilibre portant une charge Q répartie sur sa surface externe S avec une densité surfacique σ . Le conducteur et porté au potentiel V en tout point M de sa surface :

$$\boldsymbol{V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_S \frac{\sigma(P)ds}{PM}}$$

P étant un point quelconque de sa surface. Par ailleurs la charge électrique totale portée par ce conducteur s'écrit :

$$\boldsymbol{Q = \iint_S \sigma ds}$$

Si l'on multiplie σ par un coefficient k, le potentiel V et la charge totale Q sont multipliés par k mais le rapport $\frac{Q}{V}$ reste inchangé.

<u>**Définition :**</u>

La capacité électrostatique d'un conducteur à l'équilibre est définie par $C = {}^{Q}\!/_{V}$ où Q est la charge électrique totale du conducteur au potentiel V. La capacité C d'un conducteur est une grandeur toujours positive, elle ne dépend que des caractéristiques physiques et géométriques du matériau dont il est fait le conducteur. L'unité de la capacité est : $[C] = Farday\ (F)$. Les unités couramment utilisées sont $nF\ (nanoFarad) et\ \ pF\ (picoFarad)$.

3.5 Condensateur

3.5.1 Définition :

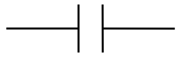
On appelle condensateur tout système de deux conducteurs en influence électrostatique. Il y a deux sortes de condensateurs :

- Condensateur à armatures rapprochées
- Condensateur à influence totale

<u>Remarques</u>

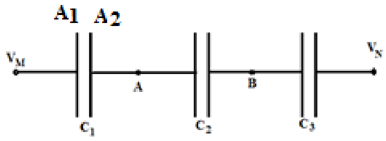
En général les deux armatures sont séparées par un matériau isolant ce qui a pour effet d'augmenter la capacité du condensateur. La charge Q est appelée la charge du condensateur, le rapport $\frac{Q}{V_1 - V_2}$ est constant. Cette constante est appelée capacité du condensateur $C = \frac{Q}{V_1 - V_2}$

Symbole :



3.5.2 Groupement de condensateurs

a- En série



Sous la différence de potentiel $(V_M - V_N)$, l'armature A_1 prend la charge $+Q$ et par influence l'armature A_2 se charge de $-Q$, de même pour les autres armatures :

$$V_M - V_N = (V_M - V_A) + (V_A - V_B) + (V_B - V_N)$$

$$V_M - V_N = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right) = \frac{Q}{C_{équiv}}$$

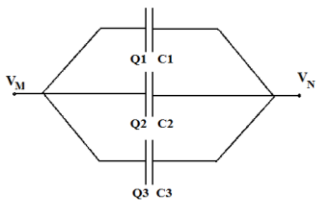
Avec $\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right) = \frac{1}{C_{équiv}}$ d'où :

$$\boxed{C_{équivalente} = \sum \frac{1}{C_i}}$$

b- En parallèle

On a $Q_1 = C_1 V,\ Q_2 = C_2 V\ \ et\ Q_3 = C_3 V$ où $V = V_M - V_N$

Le groupement des capacités porte la charge :



$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = (C_1 + C_2 + C_3)V = C_{équiv}V$$

où $C_{équiv} = (C_1 + C_2 + C_3)$

En général

$$\boxed{C_{équiv} = \sum_i C_i}$$

Chapitre 3
Energie électrostatique

1. Energie potentielle électrostatique
1.1 Energie potentielle d'une charge ponctuelle

Définition
L'énergie potentielle électrostatique d'une particule chargée placée dans un champ électrostatique est égale au travail qu'il faut fournir pour amener de façon quasi-statique cette particule de l'infini à sa position initiale.

Soit une charge ponctuelle $\boldsymbol{q}$ placée dans un champ $\vec{\boldsymbol{E}}$. Pour la déplacer de l'infini au point M on doit exercer une force $\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{ext}}$ qui s'oppose à la force de coulomb $\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{c}}$:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{ext}} = -\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{c}} = -\boldsymbol{q}\vec{\boldsymbol{E}}.$$

Si ce déplacement est fait suffisamment lentement, la charge n'acquiert aucune énergie cinétique (assimilable à une suite d'états stationnaires).
Le travail fournit est :

$$\boldsymbol{W_e} = \int_{\infty}^{M} \boldsymbol{dw} = \int_{\infty}^{M} \vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{ext}}\,.\overrightarrow{\boldsymbol{dr}} = -\int_{\infty}^{M} \boldsymbol{q}\,\vec{\boldsymbol{E}}.\overrightarrow{\boldsymbol{dr}} = \boldsymbol{q}(\boldsymbol{V_M} - \boldsymbol{V}(\infty))$$

Or $\boldsymbol{V}(\infty) = \boldsymbol{0}$ alors l'énergie électrostatique d'une charge ponctuelle placée au point M est :

$$\boldsymbol{W_e} = \boldsymbol{qV_M}$$

1.2 Energie potentielle d'une distribution de charges
1.2.1 Distribution discrète de charges
Dans le cas d'une seule charge nous avons négligé le champ créé par la charge elle-même. Mais lorsqu'on a affaire à N charges, chacune d'elles va créer sur les autres un champ $\vec{E}$ et mettre ainsi en jeu son énergie.

Soit un ensemble de N charges ponctuelles $\boldsymbol{q_i}(\boldsymbol{i} = \boldsymbol{1},..\boldsymbol{N})$ placées respectivement en $\boldsymbol{P_i}(\boldsymbol{i} = \boldsymbol{1},..\boldsymbol{N})$. Pour calculer l'énergie électrostatique de cet ensemble, déterminons l'énergie mise en jeu pour amener depuis l'infini chacune de ces charges.

- Soit q_1 placée en P_1 qui ne demande aucun travail car il n'existe aucun champ puisque les autres charges sont à l'infini.
$$\boldsymbol{W_1} = \boldsymbol{0}$$
- On amène q_2 en P_2 . On fournit le travail $W_2 = q_2V_1(P_2) = q_1V_2(P_1) = W_1$ où $V_1(P_2)$ est le potentiel créé au point P_2 par la chargeq_1.

$$\boldsymbol{W_2} = \boldsymbol{q}_2\left(\frac{\boldsymbol{q_1}}{\boldsymbol{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}}\right)$$

- On amène q_3 de l'infini en P_3 ($q_1$et q_2 étant fixes), le travail fourni :

$$\boldsymbol{W_3 = q_3 V_{1+2}(P_3) = q_3(V_1(P_3) + V_2(P_3)) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}})}$$

Le système de 3 charges possède l'énergie : $\boldsymbol{W_e = W_1 + W_2 + W_3}$

$$\boldsymbol{W_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} + \frac{q_1 q_2}{r_{12}})}$$

$$2W_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} + \frac{q_1 q_2}{r_{12}}\right) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} + \frac{q_1 q_2}{r_{12}}\right)$$

$$2W_e = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_3}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{12}}\right) + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_3}{r_{23}} + \frac{q_1}{r_{12}}\right) + \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}})$$

$$2W_e = q_1 V_1 + q_2 V_2 + q_3 V_3 = \sum_{i=1}^{i=3} q_i V_i$$

$$\boldsymbol{W_e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=3} q_i V_i}$$

Pour le système de N charges on aura l'énergie électrostatique :

$$\boxed{\boldsymbol{W_e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=N} q_i V_i}}$$

Où V_i est le potentiel créé en P_i par les charges à l'exclusion de la charge q_i :

$$\boldsymbol{V_i(P_i) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j\neq i}\frac{q_j}{r_{ij}}}$$

1.2.2 Distribution continue de charges

On peut étendre la sommation discontinue précédente à une sommation intégrale. En désignant par dq la charge élémentaire et par V le potentiel auquel est soumise cette charge, on obtient :

$$\boxed{\boldsymbol{W_e = \frac{1}{2}\int_{distri} V dq}}$$

- Distribution linéique : $dq = \lambda d\ell$ $W_e = \frac{1}{2}\int_L V\lambda d\ell$
- Distribution surfacique : $dq = \sigma ds$ $W_e = \frac{1}{2}\iint_S V\sigma ds$
- Distribution volumique : $dq = \rho d\tau$ $W_e = \frac{1}{2}\iiint_v V\rho d\tau$

1.3 Energie électrostatique d'un conducteur en équilibre

Soit un conducteur isolé de potentiel V et de charge Q distribuée sur sa surface S. L'énergie électrostatique de ce conducteur est alors :

$$W_e = \frac{1}{2}\int dq\, V = \frac{V}{2}\int dq = \frac{QV}{2}$$

$$\boxed{\boldsymbol{W_e = \frac{QV}{2} = \frac{CV^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}}}$$

C'est l'énergie nécessaire pour amener un conducteur de capacité **C** au potentiel **V**.

1.4 Energie électrostatique d'un système de conducteurs en équilibres

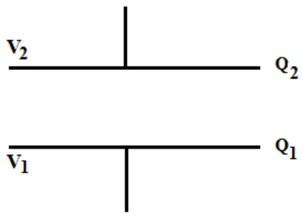
Soit un ensemble de N conducteurs chargés. A l'équilibre les conducteurs ont la charge Q_i et le potentiel V_i. L'énergie électrostatique de ce système est :

$$\boxed{\boldsymbol{W_e = \frac{1}{2}Q_1V_1 + \frac{1}{2}Q_2V_2 + \cdots + \frac{1}{2}Q_NV_N = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} Q_i\,V_i}}$$

1.5 Energie électrostatique d'un condensateur

L'influence entre les armatures étant totale. On a : $\boldsymbol{Q_1 = -Q_2}$

$$\boldsymbol{W_e = \frac{1}{2}(Q_1V_1 + Q_2V_2) = \frac{Q_1}{2}(V_1 - V_2)}$$



Ou encore, en posant : $\boldsymbol{V_1 - V_2 = U}$:

$$\boxed{\boldsymbol{W_e = \frac{1}{2}Q_1U^2 = \frac{1}{2}C\,U^2 = \frac{1}{2}\frac{{Q_1}^2}{C}}}$$