Université Ibn Zohr
Faculté des Sciences
Département de mathématiques
Agadir

Année Universitaire 2022/2023

Travaux dirigés d'analyse 3 (SMA2/SMI2)

Série 2

Exercice 1

1. Démontrer que
$$\ln(1+x)+x^2 \underset{0}{\sim} x \text{ et } x^2+x^3 \underset{0}{\sim} x^2.$$
En déduire $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(1+x)+x^2}{x^2+x^3}$.
2. Démontrer que
$$\sin(2x) \underset{0}{\sim} 2x \text{ et } \tan(3x) \underset{0}{\sim} 3x,$$
En déduire $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin(2x)}{\tan(3x)}$.

Exercice 2

1. Supposons que $f(x) \underset{x_0}{=} o(g(x))$. Montrer que
   - si $g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$ alors $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$
   - si $|f(x)| \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} +\infty$ alors $|g(x)| \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} +\infty$
2. Montrer les assertions suivantes
   - ♦ En l'infini :
     - $x^\alpha \underset{+\infty}{=} o\left(x^\beta\right)$ ssi $0<\alpha<\beta$ et $\dfrac{1}{x^\alpha} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^\beta}:\right)$ ssi $0<\beta<\alpha$
     - $(\ln x)^\alpha \underset{+\infty}{=} o\left(x^\beta\right) \forall\alpha>0, \forall\beta>0.$
     - $x^\alpha \underset{+\infty}{=} o\left(e^{\beta x}\right) \quad \forall\alpha>0, \forall\beta>0$ et $e^{-\beta x} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right) \forall\alpha>0, \forall\beta>0$
   - ♦ En 0 :
     - $(\ln x)^\alpha \underset{0^+}{=} o\left(\dfrac{1}{x^\beta}\right) \quad \forall\alpha>0, \forall\beta>0$
     - $\ln(1+x) \underset{0}{=} x + o(x)$
     - $e^x \underset{0}{=} 1+x+o(x)$

Exercice 3

Donner les développements limités à l'ordre 4 , au voisinage de $0, (DL_0^4)$, des fonctions suivantes définies par:

1. $f_1(x) = \sqrt{1+\cos x}$
2. $f_2(x) = e^{\cos x}$
3. $f_3(x) = \log(1+\operatorname{sh}(x))$

4. $f_4(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$
5. $f_5(x) = \log(\sin(x))$

Exercice 4

Donner les (DL_1^3), des fonctions suivantes définies par:

1. $f_1(x) = \dfrac{\log(x)}{x}$
2. $f_2(x) = \mathrm{Arctan}(x)$

Exercice 5

Déterminer le développement limité à l'ordre 3 , au voisinage de $+\infty$, de $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \,\mathrm{Arctan}\, x$.

Exercice 6

Déterminer les nombres réels a et b de manière que la fonction f, définie par $f(x) = \cos x - \dfrac{1+ax^2}{1+bx^2}$, soit au voisinage de 0 un infiniment petit d'ordre aussi élevé que possible ; trouver alors sa partie principale.

Exercice 7

A l'aide des D.L. déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} \left(a^x + b^x - c^x\right)^{\frac{1}{x}}$$

avec $(a,b,c) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^3$.

Exercice 8

A l'aide des développements limités, étudier localement la fonction suivante, au voisinage de 1, $f(x) = \dfrac{x\log(x)}{x^2-1}$.

Exercice 9

Soit $f(x) = x \cdot \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} + ax + b + \dfrac{c}{x}$ avec a, b, c des nombres réels.

1. Déterminer le développement limité généralisé en $\dfrac{1}{x^2}$ de f en $+\infty$.
2. En déduire l'existence d'une asymptote oblique Δ à la courbe $\mathcal{C}$ de f en $+\infty$; et étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à Δ en $+\infty$.
3. Déterminer les réels a, b, c pour que $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$.