Université Ibn Zohr
Faculté des sciences, Agadir
Département de Mathématiques

Année Universitaire : 2018 - 2019
Prof. F. MARAGH
Filière : SMA

Correction d'Examen d'Analyse 2 - Session Normale (Durée : 1h30min)

Exercice 1 (Questions de cours sur 4 pts). **Barème**

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction Riemann intégrable.

(1) Montrer que la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est continue sur $[a, b]$. (2 pts)

Réponse: Soient $x, y \in [a, b]$ et $k = \sup\limits_{a<x<b} |f(x)|$ on a :

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &= \left| \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^y f(t)\,dt \right| \\ &= \left| \int_y^x f(t)\,dt \right| \\ &\le \left| \int_y^x |f(t)|\,dt \right| \\ &\le k\,|x - y|\,. \end{aligned}$$

D'où F est $k-$lipschitzienne, ce qui implique sa continuité sur $[a, b]$.

(2) Montrer que si $f \ge 0$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f(t)\,dt \ge 0$. (2 pts)

Réponse: Puisque f est positive sur $[a, b]$, la fonction nulle appartient à l'ensemble

$$\mathcal{E}_-(f) = \{g \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})\ ;\ g \le f \text{ sur } [a, b]\},$$

donc

$$0 \in A_-(f) = \left\{ \int_a^b g(x)\,dx\ ;\ g \in \mathcal{E}_-(f) \right\}$$

et on a

$$I_+(f) := \sup A_-(f) \ge 0,$$

d'où $\int_a^b f(t)\,dt = I_+(f) \ge 0$.

Exercice 2 (6 pts).

(1) Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n} \sqrt{k^2 - k}$ est convergente et calculer sa limite. (2 pts)

(**Indication** : Encadrer u_n par deux sommes de Riemann.)

Réponse: On a $u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n} \sqrt{k^2 - k} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k^2 - k}$

$$k - 1 \le \sqrt{k^2 - k} \le k$$

D'où

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} (k - 1) \le u_n \le \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k \\ \iff &\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} \le u_n \le \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \end{aligned}$$

et on a

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}\Longrightarrow\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{1}{2}.$$

(2) Calculer une primitive de la fonction f définie par : (2 pts)

$$f(x)=\frac{2x}{x^2-2x+5}.$$

Réponse: On a

$$f(x)=\frac{2x}{x^2-2x+5}=\frac{2x-2}{x^2-2x+5}+\frac{2}{x^2-2x+5}$$

Soit F une primitive de f alors

$$\begin{aligned}F(x)&=\int\left(\frac{2x-2}{x^2-2x+5}+\frac{2}{x^2-2x+5}\right)dx\\&=\ln\left|x^2-2x+5\right|+2\int\frac{1}{x^2-2x+5}dx+C\end{aligned}$$

Maintenant on calcule la primitive

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x^2-2x+5}dx&=\int\frac{1}{(x-1)^2+4}dx\\&=\frac{1}{4}\int\frac{1}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1}dx\end{aligned}$$

Par changement de variable $t=\frac{x-1}{2}$ on a

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1}dx&=\int\frac{1}{t^2+1}2dt\\&=2\arctan t+C\\&=2\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right)+C\end{aligned}$$

Donc

$$F(x)=\ln\left|x^2-2x+5\right|+\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right)+C$$

(3) Discuter suivant la valeur du paramètre $\alpha\in\mathbb{R}$, la convergence de l'intégrale : (2 pts)

$$\int_0^{+\infty}\frac{t-\sin t}{t^\alpha}dt.$$

Réponse: Il y a deux problème, un en 0 et un $+\infty$ pour $\int_0^{+\infty}\frac{t-\sin t}{t^\alpha}dt$:

— En 0, on a $\frac{t-\sin t}{t^\alpha}\sim\frac{1}{3!t^{\alpha-3}}$ et $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{t^{\alpha-3}}dt$ converge si $\alpha<4$ de même pour $\displaystyle\int_0^1\frac{t-\sin t}{t^\alpha}dt$.

— En $+\infty$, on a $\frac{t-\sin t}{t^\alpha}\sim\frac{1}{t^{\alpha-1}}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^{\alpha-1}}dt$ converge si $\alpha>2$ de même pour $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{t-\sin t}{t^\alpha}dt$.

— Conclusion : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t-\sin t}{t^\alpha}dt$ converge si $2<\alpha<4$.

Exercice 3 (5 pts)**.**

(1) Calculer (2 pts)

$$F(x)=\int_1^x\frac{1}{t\sqrt{t^2+1}}dt$$

à l'aide du changement de variable $u=\sqrt{t^2+1}$.

Réponse: on pose $u = \sqrt{t^2+1} \iff u^2 = t^2+1$, donc $udu = tdt$

$$\begin{aligned} F(x) = \int_1^x \frac{1}{t\sqrt{t^2+1}}dt &= \int_1^x \frac{t}{t^2\sqrt{t^2+1}}dt \\ &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{x^2+1}} \frac{1}{u^2-1}du \\ &= \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{x^2+1}} \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right) du \\ &= \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{u-1}{u+1}\right)\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}\right) - \ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)\right). \end{aligned}$$

(2) Montrer avec les règles de Riemann que $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t^2+1}}dt$ converge. (1 pt)

Réponse: la fonction $t \mapsto \frac{1}{t\sqrt{t^2+1}}$ est positive sur $[1, +\infty[$ et on a $\frac{1}{t\sqrt{t^2+1}} \sim \frac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$, donc I converge

(3) Calculer la valeur de I. (2 pts)

Réponse:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}\right) - \ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) = \ln\left(\sqrt{2}+1\right). \end{aligned}$$

En effet, c'est facile de voir que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1} = 1,$$

et ln est une fonction continue en 1.

Exercice 4 (5 pts)**.**

(1) Résoudre l'équation différentielle : (3 pts)

$$z''(t) + 2z'(t) - 3z(t) = te^t + \cos(t).$$

Réponse:

(a) Résoudre l'équation SSM : La solution générale de l'équation SSM est : $z(t) = Ae^{-3t} + Be^t \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2$.

(b) Cherchons la solution particulière de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_1)$: $z'' + 2z' - 3z = te^t$. Comme 1 est une racine simple de l'équation caractéristique on va chercher une solution particulière sous la forme $z_p = t(at+b)e^t = \left(at^2+bt\right)e^t$: Donc

$$z''_{p1} + 2z'_{p1} - 3z_{p1} = te^t \implies \begin{cases} a = \frac{1}{8} \\ b = \frac{-1}{12} \end{cases}.$$

Donc la solution particulière est : $z_{p1} = \left(\frac{1}{8}t^2 - \frac{1}{12}t\right)e^t$.

(c) Cherchons la solution particulière de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_2)$: $z'' + 2z' - 3z = \cos t$. Comme i n'est pas racine de l'équation caractéristique on va chercher une solution particulière sous la forme $z_{p2}(t) = \alpha\cos t + \beta\sin t$. Donc

$$z''_{p2} + 2z'_{p2} - 3z_{p2} = \cos t \implies \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{5} \\ \beta = \frac{1}{10} \end{cases}$$

Donc la solution particulière est : $z_{p2} = -\frac{1}{5}\cos t + \frac{1}{10}\sin t$. D'après la proposition de superposition des solutions, la solution générale de (E) est $z = z_{SSM} + z_{p1} + z_{p2}$. Donc

$$z(t) = Ae^{-3t} + Be^t + \left(\frac{1}{8}t^2 - \frac{1}{12}t\right)e^t - \frac{1}{5}\cos t + \frac{1}{10}\sin t \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

(2) Déduire la solution générale de l'équation différentielle (Euler) : (2 pts)

$$x^2y''(x) + 3xy'(x) - 3y(x) = |x|\ln|x| + \cos(\ln|x|).$$

Réponse:

$$\begin{array}{rl} \text{En posant} & y(x) = z(t) \text{ avec t=}\ln|x| \\ \text{on a} & y'(x) = \frac{1}{x} z'(t) \\ \text{et} & y''(x) = -\frac{1}{x^2} z'(t) + \frac{1}{x^2} z''(t) \end{array}$$

Donc l'équation d'Euler

$$x^2 y''(x) + 3xy'(x) - 3y(x) = |x| \ln|x| + \cos(\ln|x|)$$

se transforme à l'équation de second ordre à coefficients constants suivante :

$$z''(t) + 2z'(t) - 3z(t) = te^t + \cos(t),$$

et d'après la 1) question en déduit que

$$y(x) = z(\ln|x|) = Ae^{-3\ln|x|} + Be^{\ln|x|} + \left(\frac{1}{8}\ln^2|x| - \frac{1}{12}\ln|x|\right)e^{\ln|x|} - \frac{1}{5}\cos\ln|x| + \frac{1}{10}\sin\ln|x| \quad (A,B) \in \mathbb{R}^2.$$

Alors

$$y(x) = \frac{A}{|x|^3} + B|x| + |x|\left(\frac{1}{8}\ln^2|x| - \frac{1}{12}\ln|x|\right) - \frac{1}{5}\cos(\ln|x|) + \frac{1}{10}\sin(\ln|x|) \quad (A,B) \in \mathbb{R}^2.$$