Université Ibn Zohr Agadir
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année universitaire 2022-2023
Filière SMI + SMA (S2)

Série 3 : Calcul matriciel

Exercice 1 1. *Chercher les rangs des matrices suivantes :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ et } \begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 & -7 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. *Calculer les déterminants suivants :*

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & -5 \\ 2 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & 0 & 4 \end{vmatrix}, \text{ et } \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ -1 & 3-\lambda & -1 \\ -2 & -1 & -3-\lambda \end{vmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

3. *Calculer(s'il existe)l'inverse des matrices :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 *Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On considère l'endomorphisme f de E dont la matrice A dans la base $\mathscr{B}$ est*

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

1. *Déterminer f.*
2. *On considère la famille $\mathscr{B}' = (e_1', e_2', e_3')$ avec*

$$e_1' = e_1 + e_2 + e_3, \; e_2' = e_2 - e_3 \text{ et } e_3' = e_1 - e_3.$$

   a) *Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de E.*
   b) *Ecrire la matrice A' de f par rapport à la base $\mathscr{B}'$.*
   c) *Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$, et calculer son inverse.*
   d) *A est-elle inversible? si oui donner son inverse.*
   e) *Calculer A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*
   f) *On considère les suites récurrentes (a_n), (b_n) et (c_n) de nombres réels définies par les égalités :*

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1} \\ b_n = a_{n-1} + 4b_{n-1} + c_{n-1} \\ c_n = a_{n-1} + b_{n-1} + 4c_{n-1} \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

   et $a_0 = 0, b_0 = 1$ et $c_0 = -1$. Donner les expressions des suites (a_n), (b_n) et (c_n) en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 *On considère l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ défini par :*

$$f(x, y, z) = (-x - 3y + 4z, -2x - 2y + 4z, -2x - 3y + 5z).$$

1. *Déterminer la matrice A de f dans la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.*
2. *On pose $u_1 = e_1 + e_2 + e_3, u_2 = f(e_2), u_3 = f(e_3)$, et on considère la famille $\mathscr{C} = (u_1, u_2, u_3)$.*
   Montrer que $\mathscr{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. *Déterminer la matrice de passage P de la base canonique $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{C}$ et la matrice de passage inverse P^{-1}.*
4. *Déterminer la matrice B de l'endomorphisme f dans la base $\mathscr{C}$.*
5. *A est-elle inversible?*
6. *Calculer A^n pour tout entier naturel n.*

Exercice 4 *Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit f l'application linéaire qui a un vecteur $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ associe le vecteur*

$$f(x, y, z) = (-3x + y + 4z, 2x - y - 2z, -4x + 2y + 5z)$$

1. *Déterminer la matrice A de f dans la base canonique.*
2. *Montrer que $E = \{x \in \mathbb{R}^3, f(x) = x\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Montrer que la dimension de est 1 et donner un vecteur non nul a de E.*
3. *Montrer que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, -2x + 2y + 3z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Donner une base (b, c) de F.*
4. *Montrer que $\mathscr{B}' = (a, b, f(b))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.*
5. *Montrer que $E \oplus F = \mathbb{R}^3$*
6. *Déterminer la matrice R de f dans la base $\mathscr{B}'$.*
7. *Calculer R^1, R^2, R^3, R^4 et déduire R^n et A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Exercice 5 *On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par :*

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P \mapsto P - (X-2)P' \end{array}.$$

Soit $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. *Déterminer Ker(f). Donner une base de Ker(f).*
2. *Déterminer Im(f). Donner une base de Im(f).*
3. *Écrire la matrice A de f dans $\mathscr{B}$.*
4. *On note P_0, P_1 et P_2 les vecteurs de $\mathbb{R}_2[X]$ donnés par :*

   $$P_0 = 1, P_1 = X - 2, \text{ et } P_2 = (X-2)^2.$$

   Montrer que $\mathscr{B}_0 = (P_0, P_1, P_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
5. *Déterminer la matrice de passage P de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}_0$. Calculer P^{-1}.*
6. *Écrire la matrice B de f dans $\mathscr{B}_0$.*
7. *Calculer A^n pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$.*

Exercice 6 *On considère l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :* B

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *Déterminer f.*
2. *Vérifier que f est un automorphisme.*
3. *On considère la famille $\mathscr{B}' = (e_1', e_2', e_3')$ avec*

   $$e_1' = (1, -1, -1), \; e_2' = (-2, 1, 2) \text{ et } e_3' = (1, 0, 0).$$
4. *Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de E.*
5. *Ecrire la matrice A' de f par rapport à la base $\mathscr{B}'$.*
6. *Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$, et calculer son inverse.*
7. *Calculer A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*

Exercice 7 *Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$ dont on désigne par B la base (a_1, a_2, a_3). On considère l'endomorphisme f de E dont la matrice dans la base B est :*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

1. *Montrer que $f \circ f = 5f - 4id_E$ où id_E désigne l'application identique de E.*
2. *En déduire que f est un automorphisme de E et exprimer f^{-1} en fonction de f et id_E.*
3. *Montrer que $\mathrm{Ker}(A - I_3)$ et $\mathrm{Ker}(A - 4I_3)$ sont supplémentaires dans E.*
4. *On pose :*

   $$b_1 = a_1 - a_2, b_2 = a_2 - a_3, b_3 = a_1 + a_2 - a_3$$

   Montrer que la famille (b_1, b_2, b_3) est une base de E, base que l'on notera B'.
5. *Déterminer la matrice A' de f dans la base B'.*
6. *Ecrire la matrice de passage P de la base B à la base B'. Calculer P^{-1}.*
7. *Calculer A^n pour tout entier n de $\mathbb{Z}$.*