Univérsité Ibn Zohr
Faculté des Sciences - Agadir
Département de Mathématiques
Année Univérsitaire 19-20
Filière: SMA & SMI (S2)

Examen d'Algèbre 3

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire définie par

$$f(x, y, z) = (x - y + 2z, -2x + y - 3z, -x + y - 2z),$$

1. Donner la matrice A de f relativement à la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $u = (1, 1, 0)$. Calculer $f(u), f^2(u)$ et $f^3(u)$ (rappel : $f^2 = f \circ f, f^3 = f \circ f \circ f$).
3. Montrer que $\mathcal{B}_0 = (u, f(u), f^2(u))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Écrire la matrice A_0 de f dans une base $\mathcal{B}_0$.
5. Donner la matrice P de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}_0$ puis calculer P^{-1}.
6. Donner la relation entre A, A_0 et P. Utiliser celle-ci pour vérifier la réponse à la question 4.
7. Échelonner la matrice A et en déduire le rang de f.
8. Donner les dimensions du noyau et de l'image de f puis déterminer une base de $Kerf$ et une base de Imf.
9. A-t-on $\mathbb{R}^3 = Kerf \oplus Imf$?

Solution 1

1. Soit $\mathcal{B} = (e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1))$, la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{cases} f(e_1) = f(1,0,0) = (1,-2,-1) = 1(1,0,0) - 2(0,1,0) - 1(0,0,1) = 1e_1 - 2e_2 - 1e_3 \\ f(e_2) = f(0,1,0) = (-1,1,1) = -1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 1(0,0,1) = -1e_1 + 1e_2 + 1e_3 \\ f(e_3) = f(0,0,1) = (2,-3,-2) = 2(1,0,0) - 3(0,1,0) - 20(0,0,1) = 2e_1 - 3e_2 - 2e_3 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow A = M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

2. On a

$$\begin{cases} f(u) = f(1,1,0) = (0,-1,0) \\ f^2(u) = f(f(u)) = f(0,-1,0) = (1,-1,-1) \\ f^3(u) = f(f^2(u)) = f(1,-1,-1) = (0,0,0) \end{cases}$$

3. Soit

$$\begin{cases} e_1^{'} = u = (1,1,0) \\ e_2^{'} = f(u) = (0,-1,0) \\ e_3^{'} = f^2(u) = (1,-1,-1) \end{cases}$$

Montrons que $\mathcal{B}_0 = (e_1^{'}, e_2^{'}, e_3^{'})$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Comme $(e_1^{'}, e_2^{'}, e_3^{'})$ est une famille de 3 éléments de $\mathbb{R}^3$. Puisque $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, pour montrer que $(e_1^{'}, e_2^{'}, e_3^{'})$ est une base de $\mathbb{R}^3$, il suffit de vérifier que la famille $(e_1^{'}, e_2^{'}, e_3^{'})$ est libre ou $\det(e_1^{'}, e_2^{'}, e_3^{'}) \neq 0$. On a (on choisit de développer par rapport à la 3ème ligne)

$$\det(e_1^{'}, e_2^{'}, e_3^{'}) == \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Alors $\mathcal{B}_0$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

4. On a

$$\begin{cases} f(e_1') = f(u) = e_2' = 0e_1' + 1e_2' + 0e_3' \\ f(e_2') = f(f(u)) = f^2(u) = e_3' = 0e_1' + 0e_2' + 1e_3' \\ f(e_3') = f(f^2(u)) = f^3(u) = (0,0,0) = 0e_1' + 0e_2' + 0e_3' \end{cases} \Longrightarrow A_0 = M_{\mathcal{B}_0}(f) = \begin{array}{c} \\ e_1' \\ e_2' \\ e_3' \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1') & f(e_2') & f(e_3') \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

5. On a

$$\begin{cases} e_1' = u = (1,1,0) = 1e_1 + 1e_2 + 0e_3 \\ e_2' = f(u) = (0,-1,0) = 0e_1 - 1e_2 + 0e_3 \\ e_3' = f^2(u) = (1,-1,-1) = 1e_1 - 1e_2 - 1e_3 \end{cases} \Longrightarrow P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_0} = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1' & e_2' & e_3' \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Calculons P^{-1}.
On a $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_0}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_0$, alors P est inversible et $P^{-1} = P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}}$, la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$. On a

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 & (L_1) \\ e_2' = -e_2 & (L_2) \\ e_3' = e_1 - e_2 - e_3 & (L_3) \end{cases}.$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (L_2) \Longrightarrow e_2 = -e_2' \\ (L_1) \Longrightarrow e_1 = e_1' - e_2 = e_1' + e_2' \\ (L_3) \Longrightarrow e_3 = e_1 - e_2 - e_3' = e_1' + 2e_2' - e_3' \end{cases},$$

alors

$$\begin{cases} e_1 = 1e_1' + 1e_2' + 0e_3' \\ e_2 = 0e_1' - 1e_2' + 0e_3' \\ e_3 = 1e_1' + 2e_1' - 1e_3' \end{cases} \Longrightarrow P^{-1} = P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}} = \begin{array}{c} \\ e_1' \\ e_2' \\ e_3' \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

6. On a P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_0$, A la matrice de f dans $\mathcal{B}$ et A_0 la matrice de f dans $\mathcal{B}_0$ alors $A_0 = P^{-1}AP$. On a

$$\begin{aligned} A_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

7. On peut choisir comme premier pivot le 1 de la ligne 1 pour opérer sur les deux premières lignes :

$$A \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{lcl} \\ L_2 & \longleftarrow & L_2 + 2L_1 \\ L_3 & \longleftarrow & L_3 + L_1 \end{array}$$

alors $\text{rang}(A) = 2$.

8. (a) On a A la matrice de f alors $\dim(\text{Im}(f)) = \text{rang}(f) = \text{rang}(A) = 2$. D'après le théorème du rang $\dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$, alors $\dim(\text{Ker}(f)) = 3 - \dim(\text{Im}(f)) = 3 - 2 = 1$.
   (b) Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$(x,y,z) \in \text{Ker}(f) \Longleftrightarrow f((x,y,z)) = (0,0,0) \Longleftrightarrow \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ -2x + y - 3z = 0 \\ -x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y - 2z \\ -2y + 4z + y - 3z = 0 \\ -y + 2z + y - 2z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = y - 2z \\ z - y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = y \end{cases}$$

alors $(x, y, z) = (-y, y, y) = y(-1, 1, 1)$. Donc, $\text{Ker}(f) = \text{vect}(u)$, avec $u = (-1, 1, 1)$. On en déduit $\{u\}$ est génératrice de $\text{Ker}(f)$. Par suite, $\text{card}(\{u\}) = 1 = \dim(\text{Ker}(f))$ finalement la famille $\{u\}$ est une base de $\text{Ker}(f)$.

(c) On a A la matrice de f alors $\text{Im}(f) = \text{Im}(A) = \text{vect}(C_1, C_2, C_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$.
alors $\text{Im}(f) = \text{vect}(u_1, u_2, u_3)$, avec $u_1 = (1, -2, -1), u_2 = (-1, 1, 1), u_3 = (2, -3, -2)$. On a $u_1 = u_2 + u_3 \implies \text{Im}(f) = \text{vect}(u_2, u_3)$. Comme $\text{card}(u_2, u_3) = 2 = \dim(\text{Im}(f))$, alors (u_2, u_3) est une base de $\text{Im}(f)$.

9. **Première méthode**
On a $\dim(\mathbb{R}^3 = 3 < +\infty$, et (u_2, u_3) base de $\text{Im}(f)$, $\{u\}$ base de $\text{Ker}(f)$. Comme

$$\det(u, u_2, u_3) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0.(\text{car les deux colonnes premiers sont égales.})$$

Alors la famille (u, u_1, u_3) n'est pas une base $\mathbb{R}^3$. Finalement on n'a pas
$\text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f) = \mathbb{R}^3$.
deuxième méthode
On a $\text{Ker}(f) = \text{vect}(u)$, et $\text{Im}(f) = \text{vect}(u_2, u_3)$. Comme $u = u_2$ alors $u \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$. Par suite $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) \neq \{0\}$, finalement on n'a pas $\text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f) = \mathbb{R}^3$.

Exercice 2
On se place dans $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 2. On rappelle que la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est la famille de polynômes $(1, X, X^2)$. Soient f et g les applications définies sur $\mathbb{R}_2[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad f(P) = P(X + 1) \ \text{ et } \ g(P) = P(X - 1).$$

1. Soit $P = a + bX + cX^2$ un polynôme quelconque de $\mathbb{R}_2[X]$. Montrer que $f(P) = a+b+c+(b+2c)X+cX^2$ et calculer $g(P)$.
2. Montrer que f est linéaire, on admettra que g l'est aussi.
3. Montrer que les applications f et g sont inverses l'une de l'autre.
4. Donner U et V, matrices respectivement de f et g dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$
5. Vérifier que U et V sont inverses l'une de l'autre.

Solution 2

1. • On a

$$f(P) = P(X+1) = a+b(X+1)+c(X+1)^2 = a+bX+b+cX^2+2cX+c = a+b+c+(b+2c)X+cX^2.$$

• On a

$$g(P) = P(X-1) = a+b(X-1)+c(X-1)^2 = a+bX-b+cX^2-2cX+c = a-b+c+(b-2c)X+cX^2.$$

2. Soient $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(\lambda P + Q) &= (\lambda P + Q)(X + 1) \\ &= \lambda P(X + 1) + Q(X + 1) \\ &= \lambda f(P) + f(Q). \end{aligned}$$

Donc, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$.

3. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. On a

$$\begin{aligned} f \circ g(P) = f(g(P)) &= f(a + b(X - 1) + c(X - 1)^2) = af(1) + bf(X - 1) + f((X - 1)^2) \\ &= a + b(X + 1 - 1) + c(X + 1 - 1)^2 = a + bX + cX^2 = P \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g\circ f(P)=g(f(P)) &= g(a+b(X+1)+c(X+1)^2)=ag(1)+bg(X+1)+g((X+1)^2)\\ &= a+b(X-1+1)+c(X-1+1)^2=a+bX+cX^2=P \end{aligned}$$

alors $g\circ f(P)=P$ et $g\circ f(P)=P$ c'est-à-dire $g\circ f=Id_{\mathbb{R}_2[X]}$ et $g\circ f=Id_{\mathbb{R}_2[X]}$ alors f est bijective et son inverse est $f^{-1}=g$.

4. Soit $\mathcal{B}=(1,X,X^2)$, la base canonique de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$.

   - On a

$$\begin{cases} f(1)=1=1=1\times 1+0X+0X^2\\ f(X)=(X+1)=X+1=1\times 1+1X+0X^2\\ f(X^2)=(X+1)^2=X^2+2X+1=1\times 1+2X+1X^2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow U=M_{\mathcal{B}}(f)=\begin{array}{c} \\ 1\\ X\\ X^2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(1) & f(X) & f(X^2) \end{array}\\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

   - On a

$$\begin{cases} g(1)=1=1=1\times 1+0X+0X^2\\ g(X)=(X-1)=X-1=-1\times 1+1X+0X^2\\ f(X^2)=(X-1)^2=X^2-2X+1=1\times 1-2X+1X^2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow V=M_{\mathcal{B}}(g)=\begin{array}{c} \\ 1\\ X\\ X^2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(1) & f(X) & f(X^2) \end{array}\\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

5. On a

$$UV=\begin{pmatrix} 1&1&1\\0&1&2\\0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&-1&1\\0&1&-2\\0&0&1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\times 1+1\times 0+1\times 0 & 1\times -1+1\times 1+1\times 0 & 1\times 1+1\times -2+1\times 1\\ 0\times 1+1\times 0+2\times 0 & 0\times -1+1\times 1+0\times 0 & 0\times 1+1\times -2+2\times 1\\ 0\times 1+0\times 0+1\times 0 & 0\times -1+0\times 1+1\times 0 & 0\times 1+0\times -2+1\times 1 \end{pmatrix}.$$

$$=\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix}=I_3.$$

De plus

$$VU=\begin{pmatrix} 1&-1&1\\0&1&-2\\0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&1&1\\0&1&2\\0&0&1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+0+0 & -1+1+0 & 1-2+1\\ 0+0+0 & 0+1+0 & 0+2-2\\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix}=I_3.$$

Il s'ensuit que $UV=VU=I_3$, ce qui implique que U est inversible et $V=U^{-1}$.

Exercice 3

1. Résoudre le système linéaire en utilisant la méthode de Gramer:

$$\begin{cases} -x+y+z=1\\ x-y+z=1\\ x+y-z=1 \end{cases}$$

2. Résoudre le système linéaire en utilisant la méthode de Gauss:

$$\begin{cases} x+3y+2z=1\\ 2x-2y=2\\ x+y+z=2 \end{cases}$$

Exercice 4
Soit E un espace vectoriel de dimension finie, f une application linéaire de E dans E ; montrer que

1. $$\ker(f) = \ker(f^2) \iff \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$$

2. $$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2) \iff E = \ker(f) + \mathrm{Im}(f)$$

Solution 3

1. Supposons que $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$ et montrons que $\ker(f) = \ker(f^2)$

   Si $x \in \ker(f)$ alors $f(x) = 0$ alors $f(f(x)) = f(0) = 0$ alors $x \in \ker(f \circ f) = \ker(f^2)$. Cela montre que $\ker(f) \subset \ker(f^2)$.

   Si $x \in \ker(f^2) = \ker(f \circ f)$ alors $f(f(x)) = 0$, on pose $y = f(x) \in \mathrm{Im}(f)$ et comme $f(y) = 0$, $y \in \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$, donc $y = 0$ et donc $f(x) = 0$ ce qui signifie que $x \in \ker(f)$. Cela montre que $\ker(f^2) \subset \ker(f)$ et finalement $\ker(f) = \ker(f^2)$.

   Supposons que $\ker(f) = \ker(f^2)$ et montrons que $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$. Soit $y \in \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ et $f(y) = 0$, cela entraîne que $f(f(x)) = 0$, autrement dit $x \in \ker(f \circ f) = \ker(f^2) = \ker(f)$ donc $y = f(x) = 0$, cela montre bien que $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.

2. Supposons que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$ et montrons que $E = \ker(f) + \mathrm{Im}(f)$

   Si $x \in E$ alors $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$, comme $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$ alors $f(x) \in \mathrm{Im}(f^2)$, ainsi il existe $y \in E$ tel que $f(x) = f^2(y)$. On a

   $$\begin{aligned} f(x) = f^2(y) &\implies f(x) - f^2(y) = 0 \\ &\implies f(x) - f(f(y)) = 0 \\ &\implies f(x - f(y)) = 0 \\ &\implies x - f(y) \in \ker(f). \end{aligned}$$

   On obtient alors
   $$x = \underbrace{x - f(y)}_{\in \ker(f)} + \underbrace{f(y)}_{\in \mathrm{Im}(f)}.$$

   Cela montre bien que $E = \ker(f) + \mathrm{Im}(f)$.

   Supposons que $E = \ker(f) + \mathrm{Im}(f)$ et montrons que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$

   Si $y \in \mathrm{Im}(f^2)$ alors il existe $x \in E$ tel que $y = f^2(x)$, d'où $y = f(f(x))$ ainsi $y \in \mathrm{Im}(f)$. Cela montre que $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f^2)$.

   Si $y \in \mathrm{Im}(f)$ alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, or $E = \ker(f) + \mathrm{Im}(f)$ donc $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \ker(f)$ et $x_2 \in \mathrm{Im}(f)$.Comme $x_2 \in \mathrm{Im}(f)$ alors il existe $z \in E$ tel que $x_2 = f(z)$. On alors

   $$\begin{aligned} x = x_1 + x_2 &\implies x = x_1 + f(z) \\ &\implies f(x) = f(x_1 + f(z)) \\ &\implies f(x) = f(x_1) + f(f(z)) \\ &\implies y = f(x) = f^2(z) \quad (\text{car } \ x_1 \in \ker(f)) \\ &\implies y = f^2(z) \\ &\implies y \in \mathrm{Im}(f^2). \end{aligned}$$

   Cela montre que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(f^2)$ et finalement $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$.