Epreuve d'optique géométrique
Durée : 1h 30min

Exercice

Soit une lame à faces parallèles d'épaisseur *e*, taillée dans un verre d'indice *n* et baignée dans l'air d'indice1. On envoie d'une source lumineuse *S* sur la face (F_1) de cette lame en un point *I*, un rayon monochromatique *SI* sous un angle d'incidence *i* qui se réfracte ensuite sous un angle de réfraction *r* pour arriver en un point *J* de la face (F_2) de cette lame.

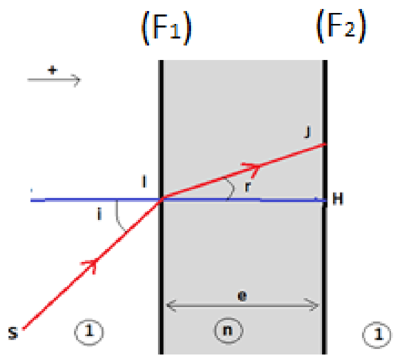
1)-Définir graphiquement les angles d'incidence et de réfraction au point *J* de la face (F_2) de cette lame.

2)- Montrer que le rayon après la traversée de la lame est déplacé latéralement par rapport à sa trajectoire initiale d'une distance *h* que l'on exprimera en fonction de *i*, *r* et *e*.

3)- Soit un point objet *A* placé à gauche de la face (F_1) à une distance *d* sur un axe optique traversant les deux faces (F_1) et (F_2) respectivement aux points H_1 et H_2. En désignant par *A'* l'image de cet objet *A* à travers cette lame et par A_1 son image intermédiaire, établir dans le cas des conditions de l'approximation de Gauss l'expression de la distance $\overline{AA'}$ qui sépare l'objet *A* de son image *A'* en fonction de *e* et *n*. Conclusion

4)- En déduire la position de l'image *A'* par rapport à la face (F_1) en fonction de *d*, *e* et *n*.

.



Problème

Soit une boule sphérique en verre plongée dans l'air (*Figure 1*) d'indice *n*, de rayon *R* et de centre *C*. Cette boule est ainsi formée par deux dioptres sphériques Σ_1 et Σ_2 respectivement de sommets S_1 et S_2, de centres C_1 et C_2 confondus avec *C*, de foyers objet et image (F_1, F'_1) et (F_2, F'_2) et de distances focales objet et image (f_1, f'_1) et (f_2, f'_2).

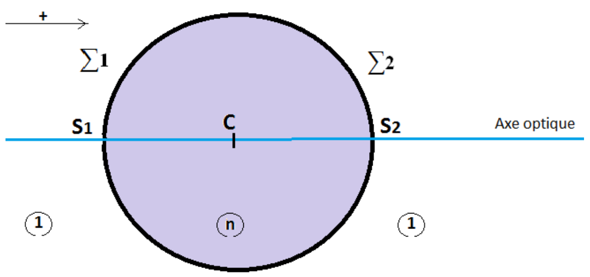


Figure 1

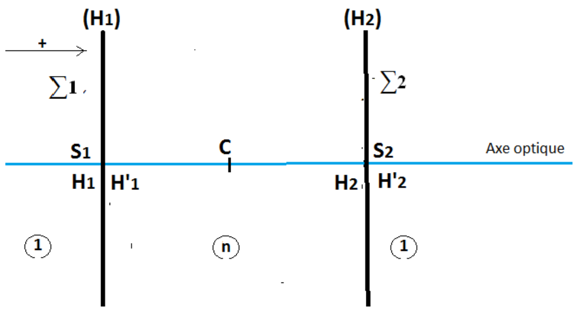


Figure 2

A-1)-Quelle est la concavité de chacun des ces deux dioptres sphériques Σ_1 et Σ_2. Justifiez votre réponse

2)- Les deux dioptres sphériques Σ_1 et Σ_2 sont-ils convergents et/ou convergents. Justifiez votre réponse sans aucun calcul.

3)- Soit AB un objet et $A'B'$ son image à travers la boule dans les conditions de l'approximation de Gauss. En notant par A_1B_1 l'image intermédiaire de l'objet entre les deux dioptres, et en prenant l'origine au sommet, écrire les formules de conjugaison de position de chacun des ces deux dioptres sphériques Σ_1 et Σ_2.

4)-En déduire en fonction de n et R les distances focales objet et image (f_1, f'_1) et (f_2, f'_2) respectivement pour les deux dioptres sphériques Σ_1 et Σ_2.

B- Dans les conditions de l'approximation de Gauss, les deux dioptres sphériques Σ_1 et Σ_2 peuvent être assimilés à deux systèmes centrés Σ_1 et Σ_2 (*Figure 2*) respectivement de points principaux objet et image (H_1, H'_1) et (H_2, H'_2) et qui sont confondus avec leurs sommets S_1 et S_2. Ainsi, on peut donc assimiler cette boule à l'association de ces deux systèmes centrés Σ_1 et Σ_2 qui sera équivalent à un système centré Σ de foyers principaux objet et image F et F', de points principaux objet et image H et H', de points nodaux objet et image N et N' et de distances focales principales objet et image $f = \overline{HF}$ et $f' = \overline{H'F'}$. On supposera par la suite que n = 1,5 et on notera par e la distance qui sépare les deux systèmes centrés Σ_1 et Σ_2 telle que $e = \overline{H'_1H_2} = \overline{S_1S_2}$.

1)- Exprimer l'intervalle optique $\Delta = \overline{F'_1F_2}$ en fonction de f'_1, f_2 et e puis en fonction de R.

2)- En appliquant la relation de Newton, exprimer $\overline{F_1F}$ en fonction de f_1, f'_1 et Δ puis en fonction de R.

3)- En appliquant la relation de Newton, exprimer $\overline{F'_2F'}$ en fonction de f_2, f'_2 et Δ puis en fonction de R.

4)- On note respectivement par V_1, V_2 et V, les vergences des deux dioptres Σ_1 et Σ_2 et du système centré Σ équivalent à la boule.

a- Ecrire la formule de Gullstrand dans ce cas.

b- Exprimer V_1, V_2 et V en fonction des distances focales objets correspondantes. En déduire la distance focale objet f du système centré Σ équivalent à la boule en fonction de f_1, f_2 et Δ puis en fonction de R.

c- Exprimer V_1, V_2 et V en fonction des distances focales images correspondantes. En déduire la distance focale image f' du système centré Σ équivalent à la boule en fonction de f'_1, f'_2 et Δ puis en fonction de R.

d-Le système centré Σ équivalent à la boule est-il alors convergent ou divergent ?

5- On cherche la position du point principal objet H du système centré Σ équivalent à la boule par rapport au sommet S_1 du dioptre sphérique Σ_1, exprimer d'abord $\overline{F_1H}$ en fonction de f_1, f'_1 et Δ puis en fonction de R. En déduire ensuite l'expression de $\overline{S_1H}$ et donner sa valeur en fonction de R.

6- On cherche la position du point principal image H' du système centré Σ équivalent à la boule par rapport au sommet S_2 du dioptre sphérique Σ_2, exprimer d'abord $\overline{F'_2H'}$ en fonction de f_2, f'_2 et Δ puis en fonction de R. En déduire ensuite l'expression de $\overline{S_2H'}$ et donner sa valeur en fonction de R.

7- On cherche les positions des points nodaux objet et image N et N' du système centré Σ équivalent à la boule.

a- Exprimer $\overline{HN}$ en fonction de f et f' et conclure. En déduire les expressions et les valeurs en fonction de R de $\overline{F_1N}$, $\overline{S_1N}$ et $\overline{CN}$. Conclusion.

b- Exprimer $\overline{H'N'}$ en fonction de f et f' et conclure. En déduire les expressions et les valeurs en fonction de R $\overline{F'_2N'}$, $\overline{S_2N'}$ et $\overline{CN'}$. Conclusion.

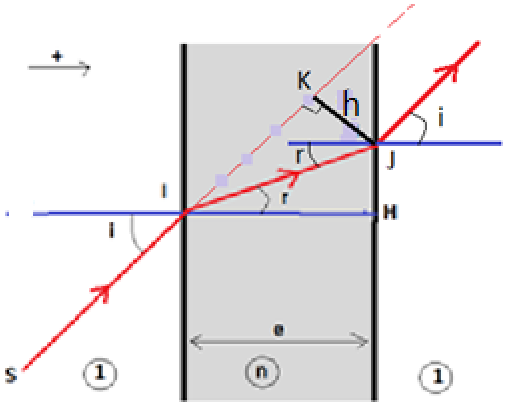
c- En déduire la position du centre optique O du système centré Σ équivalent à la boule.

●●●●●●●●●●●●●●●●●●

Corrigé de l'épreuve de l'optique géométrique

Exercice I (4 Points)

1- $\boxed{0,5}$

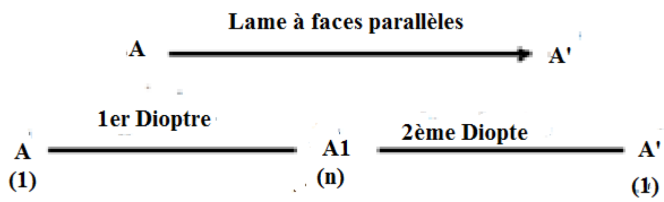


Les angles d'incidence et de réfraction au point *J sont r et i*

2-

$$h = JK = IJ\sin(i-r) \quad \text{or} \quad IJ = \frac{e}{\cos r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{h = JK = \frac{e}{\cos r}\sin(i-r)}$$

3--



Pour le premier dioptre on a :

$$\frac{1}{\overline{H_1A}} - \frac{n}{\overline{H_1A_1}} = 0 \quad \Rightarrow \qquad \overline{H_1A} = \frac{\overline{H_1A_1}}{n}$$

Pour le second dioptre on a :

$$\frac{n}{\overline{H_2A_1}} - \frac{1}{\overline{H_2A'}} = 0 \quad \Rightarrow \qquad \overline{H_2A'} = \frac{\overline{H_2A_1}}{n}$$

La distance ente l'objet est l'image finale est donc donnée

$$\overline{AA'} = \overline{AH_1} + \overline{H_1H_2} + \overline{H_2A'} = \frac{\overline{A_1H_1}}{n} + \overline{H_1H_2} + \frac{\overline{H_2A_1}}{n} = \overline{H_1H_2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$\boxed{\overline{AA'} = e\left(1 - \frac{1}{n}\right)}$$

Conclusion : La position de l'image se déduit de celle de l'objet par une translation normale aux faces, de grandeur constante**, indépendante de la position de l'objet**

4- $\overline{AA'} = \overline{AH_1} + \overline{H_1A'} \Rightarrow \overline{H_1A'} = \overline{AA'} - \overline{AH_1} = e\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ -d

Problème (16 Points)

A - 1-

● Dioptre sphérique Σ_1 est **convexe** car son rayon de courbure $\overline{S_1C_1} > 0$

● Dioptre sphérique Σ_2 est **concave** car son rayon de courbure $\overline{S_2C_2} < 0$

2

● Dioptre sphérique Σ_1 est **convergent** car son centre C_1 est dans un milieu plus réfringent

● Dioptre sphérique Σ_2 est **convergent** car son centre C_2 est dans un milieu plus réfringent

3-

$$\underset{(1)}{A} \xrightarrow{\text{1er Dioptre}} \underset{(n)}{A1} \xrightarrow{\text{2ème Diopte}} \underset{(1)}{A'}$$

$$\frac{1}{\overline{S_1A}} - \frac{n}{\overline{S_1A_1}} = \frac{1-n}{\overline{S_1C_1}} = \frac{1-n}{R} \quad \boxed{\textbf{0,50}}$$

$$\frac{n}{\overline{S_2A_1}} - \frac{1}{\overline{S_2A'}} = \frac{n-1}{\overline{S_2C_2}} = \frac{1-n}{R} \quad \boxed{\textbf{0,50}}$$

4- - $\dfrac{1}{\overline{S_1F_1}} - \dfrac{n}{\infty} = \dfrac{1-n}{R} \Rightarrow f_1 = \overline{S_1F_1} = \dfrac{R}{1-n}$

$$\frac{1}{\infty} - \frac{n}{\overline{S_1F'_1}} = \frac{1-n}{R} \Rightarrow f'_1 = \overline{S_1F'_1} = \frac{nR}{n-1}$$

$$\frac{n}{\overline{S_2F_2}} - \frac{1}{\infty} = \frac{1-n}{R} \Rightarrow f_2 = \overline{S_2F_2} = \frac{nR}{1-n}$$

$$\frac{n}{\infty} - \frac{1}{\overline{S_2F'_2}} = \frac{1-n}{R} \Rightarrow f'_2 = \overline{S_2F'_2} = \frac{R}{n-1}$$

B-

1)- $\Delta = \overline{F'_1F_2} = \overline{F'_1S_1} + \overline{S_1S_2} + \overline{S_2F_2} = -f'_1 + e + f_2 = \dfrac{-nR}{n-1} + 2R + \dfrac{nR}{n-1} = -3R + 2R - 3R = -4R$

2)- D'après le schéma synoptique suivant

$$F \xrightarrow{\sum 1} F_2 \xrightarrow{\sum 2} \infty$$

En appliquant la relation de Newton on a $\overline{F_1F} \times \overline{F'_1F_2} = f_1 . f'_1$

$\boxed{\Rightarrow \overline{F_1F} = \dfrac{f_1 . f'_1}{\Delta}}$ $\quad f_1 = \dfrac{R}{1-n} = -2R$ et $f'_1 = \dfrac{nR}{n-1} = 3R$ $\boxed{\Rightarrow \overline{F_1F} = 1{,}5R}$ $\boxed{\textbf{0,25}}$

$\overline{F_1F} = \overline{F_1S_1} + \overline{S_1F}$ $\quad \boxed{\Rightarrow \overline{S_1F} = \overline{F_1F} - \overline{FS_1} = \dfrac{f_1 . f'_1}{\Delta} + f_1}$ $\boxed{\textbf{0,25}}$ $\quad \boxed{\overline{S_1F} = -0{,}5R}$ $\boxed{\textbf{0,25}}$

3)- D'après le schéma synoptique suivant

$$\infty \xrightarrow{\sum 1} F'1 \xrightarrow{\sum 2} F'$$

En appliquant la formule de Newton on a $\overline{F_2F'_1} \times \overline{F'_2F'} = f_2 . f'_2$

$\boxed{\Rightarrow \overline{F'_2F'} = -\frac{f_2 . f'_2}{\Delta}}$ $\boxed{\textbf{0,5}}$ $f_2 == \frac{nR}{1-n} = -3R$ et $f'_2 = \frac{R}{n-1} = 2R$ $\boxed{\Rightarrow \overline{F'_2F'} = -1{,}5R}$ $\boxed{\textbf{0,25}}$

$\overline{F'_2F'} = \overline{F'_2S_2} + \overline{S_2F'}$

$\boxed{\overline{S_2F'} = \overline{F'_2F'} - \overline{F'S_2} = -\frac{f_2 . f'_2}{\Delta} + f'_2}$ $\boxed{\overline{S_2F'} = 0{,}5R}$

4)- a- $\boxed{V = V_1 + V_2 - \frac{e}{n} \times V_1 \times V_2}$

b- $\boxed{V_1 = \frac{-1}{f_1}}$ $\boxed{V_2 = \frac{-n}{f_2}}$ $\boxed{V = \frac{-1}{f}}$ $\boxed{\Rightarrow f = \frac{f_1 f_2}{\Delta}}$ $\boxed{f = -1{,}5R}$

c- $\boxed{V_1 = \frac{n}{f'_1}}$ $\boxed{V_2 = \frac{1}{f'_2}}$ $\boxed{V = \frac{1}{f'}}$ $\boxed{\Rightarrow f' = -\frac{f'_1 f'_2}{\Delta}}$ $\boxed{f' = 1{,}5R}$

$f' > 0 \Rightarrow$ le système centré équivalent à la boule est donc convergent

5)- $\overline{F_1H} = \overline{F_1F} + \overline{FH} = \frac{f_1 . f'_1}{\Delta} - \frac{f_1 f_2}{\Delta}$ $\boxed{\Rightarrow \overline{F_1H} = \frac{f_1}{\Delta}(f'_1 - f_2)}$ $\boxed{\overline{F_1H} = 3R}$

$\overline{F_1H} = \overline{F_1S_1} + \overline{S_1H} \Rightarrow \overline{S_1H} = \overline{F_1H} - \overline{F_1S_1}$ $\boxed{\Rightarrow \overline{S_1H} = \frac{f_1}{\Delta}(f'_1 - f_2) + f_1}$ $\boxed{\overline{S_1H_1} = R}$

6)- $\boxed{\textbf{1,5}}$ $\overline{F'_2H'} = \overline{F'_2F'} + \overline{F'H'} = -\frac{f_2 . f'_2}{\Delta} + \frac{f'_1 f'_2}{\Delta}$ $\boxed{\Rightarrow \overline{F'_2H'} = \frac{f'_2}{\Delta}(f'_1 - f_2)}$ $\boxed{\overline{F'_2H'} = -3R}$

$\overline{F_2H'} = \overline{F'_2S_2} + \overline{S_2H'} \Rightarrow \overline{S_2H'} = \overline{F'_2H'} - \overline{F'_2S_2}$ $\boxed{\Rightarrow \overline{S_2H'} = \frac{f'_2}{\Delta}(f'_1 - f_2) + f'_2}$ $\boxed{\overline{S_2H'} = -R}$

7)- a- $\boxed{\overline{HN} = \overline{HF} + \overline{FN} = f + f' = 0}$ $\boxed{\Rightarrow N \cong H}$

$\boxed{\overline{F_1N} = \overline{F_1H} = \frac{f_1}{\Delta}(f'_1 - f_2)_1 = 3R}$ $\boxed{\overline{S_1N} = \overline{S_1H} = \frac{f_1}{\Delta}(f'_1 - f_2) + f_1 = R}$ $\boxed{\Rightarrow N \equiv C}$

b- $\boxed{\overline{H'N'} = \overline{H'F'} + \overline{F'N'} = f' + f = 0}$ $\boxed{\Rightarrow N' \cong H'}$

$\boxed{\overline{F'_2N'} = \overline{F'_2H'} = \frac{f'_2}{\Delta}(f_1 + f_2) = -3R}$ $\boxed{\overline{S_2N'} = \overline{S_2H'} = \frac{f'_2}{\Delta}(f'_1 - f_2) + f'_2 = -R}$ $\boxed{\textbf{0}}$

$\boxed{\Rightarrow N' \equiv C}$ $\boxed{\textbf{0,25}}$

c-

$\underset{1}{N} \xrightarrow{\text{1er Dioptre sphérique}} \underset{n}{O} \xrightarrow{\text{2ème Dioptre sphérique}} \underset{1}{N'}$

$$\frac{1}{\overline{S_1N}} - \frac{n}{\overline{S_1O}} = \frac{1-n}{R} \Rightarrow \overline{S_1O} = R \Rightarrow O \equiv C$$