Chapitre 2
Conducteurs en équilibre électrostatique

1. Définitions
1.1. Conducteurs
Un conducteur est un corps dans lequel il existe des charges électriques qui sont susceptibles de se déplacer librement. Ces charges libres peuvent être des électrons libres (cas des métaux), des ions (cas des électrolytes) et des électrons et des ions (cas des plasmas).

1.2 Condition d'équilibre
L'équilibre électrostatique d'un conducteur est atteint lorsqu'aucune charge libre ne se déplace à l'intérieur du conducteur. Cela signifie que le champ électrostatique total auquel elle est soumise est nul.

2. Propriétés d'un conducteur homogène et isotherme en équilibre
2.1 Définition
Un conducteur homogène et isotherme est dit en équilibre si les charges libres qu'il contient sont au repos.

<u>Conséquences</u> :

- Le champ électrique $\vec{\mathbf{E}}$ est nul en tout point d'un conducteur en équilibre :

  $\vec{\mathbf{F}} = \mathbf{q}\vec{\mathbf{E}}$; or les charges sont au repos alors $\vec{\mathbf{F}}=\vec{\mathbf{0}}$ et par conséquent $\vec{\mathbf{E}}=\vec{\mathbf{0}}$.

- La densité volumique des charges est nulle en tout point intérieur au conducteur :

  $\boldsymbol{div}\overrightarrow{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})} = \frac{\boldsymbol{\rho(r)}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}}$; or $\vec{E} = \vec{0}$ alors $\rho(r) = 0$ (un conducteur ne peut être chargé qu'en surface).

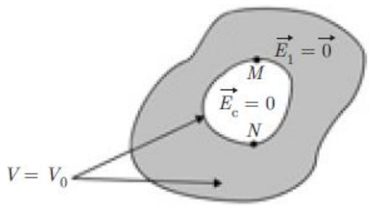
- Le potentiel est constant à l'intérieur et sur la surface d'un conducteur en équilibre :

$$\vec{\boldsymbol{E}} = -\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}\,\boldsymbol{V}; \quad \text{or} \quad \vec{E} = \vec{0} \text{ alors } \boldsymbol{V} = \boldsymbol{C^{ste}}$$

<u>Remarque</u> :
La surface d'un conducteur est une surface équipotentielle, donc les lignes de champs sont normales à la surface du conducteur. Il en résulte qu'en un point très voisin d'un conducteur le champ $\vec{E}$ est normal à la surface du conducteur.

2.2 Propriétés d'une cavité à l'intérieur d'un conducteur en équilibre
Considérons une cavité, creusée dans un conducteur en équilibre, ne contenant pas de charges.

- Le potentiel est constant et égal à celui du conducteur dans la cavité :



La surface (externe et interne) est une equipotentielle $V = V_0$. On en déduit que les points M et N pris sur la surface interne sont au même potentiel $V_M = V_N$.
Considérons une courbe joignant M et N. Le potentiel ne peut varier le long de MN qu'en présence d'extrémums.

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

L'existence d'extrémums :

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

L'existence des maximums

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} < 0 \quad \Rightarrow \quad \rho > 0$$

L'existence des minimums

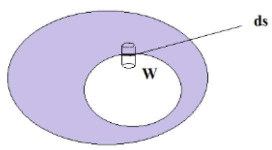
$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} > 0 \quad \Rightarrow \quad \rho < 0$$

Or dans la cavité $\rho = 0$ alors il ne peut y avoir d'extrémums ce qui implique que le potentiel est constant et égal à celui du conducteur dans la cavité.

- Le champ est nul en tout point de la cavité :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V; \text{ or } V = C^{ste} \quad \text{alors} \quad \vec{E} = \vec{0}$$

- La surface de la cavité ne porte pas de charges :

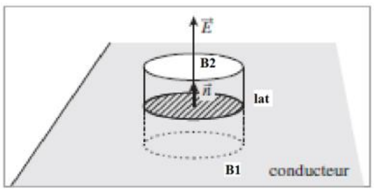


On considère comme surface de Gauss le cylindre W s'appuyant sur l'élément de surface ds de la cavité. Le flux du champ $\vec{E}$ à travers la surface du cylindre W est : $\emptyset = \oiint_W \vec{E}\,.\overrightarrow{ds} = 0$ car le champ est nul dans la cavité et dans le conducteur.
Soit $\boldsymbol{Q_{int}}$ la charge contenue dans le cylindre W et $\boldsymbol{\sigma_{int}}$ la densité surfacique de la surface de la cavité alors :

$$\emptyset = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_{int} ds}{\varepsilon_0} = 0 \;\Rightarrow\; Q_{int} = 0 \quad alors \quad \sigma_{int} = 0$$

2.3 Champ créé par un conducteur en équilibre

Considérons un cylindre $d\Sigma$ de base infinitésimale, d'axe normal à la surface d'un conducteur et situé de part et d'autre de la surface du conducteur. Le champ étant normal à la surface :



$$d\emptyset = \oiint_{d\Sigma} \vec{E}.\overrightarrow{ds} = d\phi_{S_{B1}} + d\phi_{S_{B2}} + d\phi_{S_{lat}}$$

$$d\emptyset = \iint_{S_{B1}} \vec{E}.\overrightarrow{dS}_{B_1} + \iint_{S_{B2}} \vec{E}.\overrightarrow{dS}_{B_2} + \iint_{S_{lat}} \vec{E}.\overrightarrow{dS}_{lat}$$

Où $d\phi_{S_{B1}}, d\phi_{S_{B2}}$ et $d\phi_{S_{lat}}$ sont respectivement les flux à travers les bases B_1, B_2 et la surface latérale

Or :

$d\phi_{S_{B1}} = 0$ car le champ $\vec{E}$ est nul dans le conducteur

$d\phi_{S_{lat}} = 0$ car le champ $\vec{E}$ est orthogonal à $\overrightarrow{dS}_{lat}$

$$d\emptyset = \oiint_{d\Sigma} \vec{E}.\overrightarrow{ds} = d\phi_{S_{B2}} = \iint_{S_{B2}} \vec{E}.\overrightarrow{dS}_{B_2} = E \iint_{S_{B2}} dS_{B_2} = E\, S_{B2} = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma\, S_{B2}}{\varepsilon_0}$$

Alors :

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad et \quad \vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}}$$

<u>Théorème de Coulomb</u>:

L'intensité du champ électrostatique au voisinage d'un conducteur en équilibre dans le vide est $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$. Si $\vec{n}$ est le vecteur unitaire, normal à la surface du conducteur et dirigé de l'intérieur vers l'extérieur alors $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$

<u>Remarque</u> :

Le champ au voisinage du conducteur est la résultante des champs créés, non seulement par toutes les charges portées par le conducteur mais aussi par les charges réparties dans l'espace.

2.4 Pression électrostatique

Considérons un élément de surface ds d'un conducteur en équilibre de charge **Q.** L'élément ds porte une charge $dq = \sigma ds$.

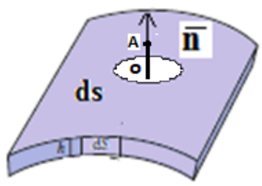
dq est soumise au champ $\vec{E}_2$ créé par l'ensemble des charges du conducteur extérieurs à ds : $(Q - \sigma ds)$, et par toutes les charges réparties dans l'espace s'elles existent. La charge dq est donc soumise à une force $\overrightarrow{dF}$ exercée sur elle par les autres charges :

$$\overrightarrow{dF} = dq\vec{E}_2 = \sigma ds\, \vec{E}_2$$

<u>Calcul de</u> $\vec{E}_2$:

On définit l'élément de surface par un contour circulaire de centre O et de rayon dr très faible. ds est assimilable à un disque plan.

Considérons un point A situé sur la normale en O à ce disque à l'extérieur du conducteur et tel que $OA \ll dr$; on peut donc considérer le disque comme étant un plan infini.



En A les charges $\boldsymbol{\sigma ds}$ du disque assimilé à un plan infini créent le champ $\vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{1}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{2\varepsilon_0}}\vec{\boldsymbol{n}}$ (voir TD).
$\vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{2}}$ étant le champ créé en A par toutes les charges autres que ($\boldsymbol{\sigma ds}$) alors :

$\vec{\boldsymbol{E}} = \vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{1}} + \vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{2}}$ où $\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}}\vec{\boldsymbol{n}}$ est le champ au voisinage du conducteur.

$$\vec{\boldsymbol{E}}_{2} = \vec{\boldsymbol{E}} - \vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{1}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}}\vec{\boldsymbol{n}} - \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{2\varepsilon_0}}\vec{\boldsymbol{n}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{2\varepsilon_0}}\vec{\boldsymbol{n}}$$

Or $\overrightarrow{\boldsymbol{dF}} = \boldsymbol{\sigma}\overrightarrow{\boldsymbol{ds}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{2}}$ alors

$$\overrightarrow{\boldsymbol{dF}} =\cdot \frac{\boldsymbol{ds\,\sigma^2}}{\boldsymbol{2\varepsilon_0}}\vec{\boldsymbol{n}}$$

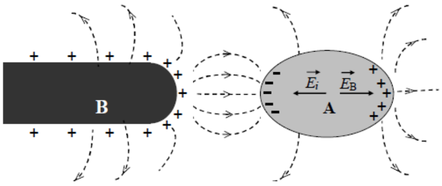
- $\overrightarrow{\boldsymbol{dF}}$ est normale à la surface du conducteur
- $\overrightarrow{\boldsymbol{dF}}$ est toujours de l'intérieur vers l'extérieur du conducteur indépendamment du signe des charges du conducteur (σ) $\Rightarrow$ $\overrightarrow{\boldsymbol{dF}}$ est une force d'expansion.

On peut définir une pression électrostatique en un point du conducteur par :

$$\boldsymbol{P} = \frac{\left\|\overrightarrow{\boldsymbol{dF}}\right\|}{\boldsymbol{ds}} = \frac{\boldsymbol{\sigma^2}}{\boldsymbol{2\varepsilon_0}}$$

3. Etude d'un système de conducteurs en équilibres
3.1 Influence partielle

Considérons un conducteur en équilibre B portant une charge positive Q. Approchons de B un autre conducteur A isolé et neutre (en équilibre) :



- <u>Interprétation</u>

Le conducteur B crée dans l'espace et en particulier dans le conducteur A un champ électrique $\vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{B}}$. Les électrons libres du conducteur A vont, sous l'action de ce champ, se déplacer dans le sens inverse de $\vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{B}}$. Ces électrons s'accumulent progressivement sur la face en regard de B et forment à l'équilibre des charges négatives dont la résultante est -Q. A l'inverse, des charges positives, dont la résultante est +Q, vont apparaître sur l'autre face par défaut d'électrons. Ces charges, qui résultent d'une électrisation par influence créent un champ induit $\vec{\mathbf{E}}_{\mathbf{i}}$ qui vient s'opposer au champ inducteur $\vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{B}}$ et réduire ainsi le champ électrique total. A l'intérieur du conducteur A les électrons libres ne cessent leur mouvement que lorsque le champ électrique total s'annule. Le système formé par les deux conducteurs atteint alors un état d'équilibre.

<u>**Remarque**</u> **:**

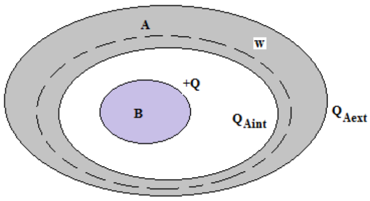
Lors de l'évolution de ce phénomène, les charges -Q, induites ou créées par influence, interviennent en augmentant la densité surfacique des charges sur la face de B en regard de A. Il se produit une influence retour de A sur B. On dit qu'il y'a influence mutuelle.

3.2 Influence totale

Définition :

On dit qu'il y a influence totale lorsque le conducteur influencé entoure complètement le conducteur influençant.

Soit A un conducteur en équilibre creux à l'intérieur duquel est placé un conducteur B de charge Q_B positive.
On applique le théorème de Gauss en considérant une surface fermée W à l'intérieur du conducteur A. Sachant que le champ est nul à l'intérieur du conducteur A (équilibre électrostatique) on a :



$$\boldsymbol{\Phi = \oiint_W \vec{E}\,.\,\overrightarrow{ds} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{Q_B + Q_{A\,int}}{\varepsilon_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_{A\,int} = -Q_B}$$

Où $\boldsymbol{Q_{A\,int}}$ est la charge portée par la surface de la cavité A.

- Cas où le conducteur A est initialement neutre

  $$\boldsymbol{Q_{A\,int} + Q_{A\,ext} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_{A\,ext} = -\,Q_{A\,int} = Q_B}$$

- Cas où le conducteur A porte initialement une charge q

  $$\boldsymbol{Q_{A\,int} + Q_{A\,ext} = q \quad \Rightarrow \quad Q_{A\,ext} = q - \; Q_{A\,int} \;\Rightarrow\; Q_{A\,ext} = q + \; Q_B}$$

3.3 Ecran électrique (effet écran)

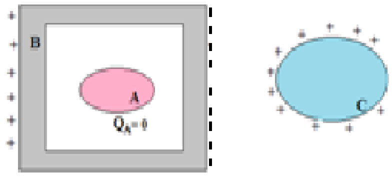
Définition

On appelle écran électrique une surface conductrice ayant la propriété d'annuler de l'un des côtés de sa surface l'effet que peuvent produire des corps chargés placés de l'autre côté.

Soient trois conducteurs B (creux), A et C. On étudie les cas suivants :

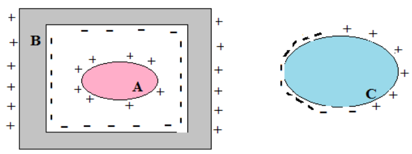
- **état initiale 1** : ***A neutre*** $(\boldsymbol{Q_A = 0})$, ***B isolé et C porte une charge positive*** $(\boldsymbol{Q_C} > 0)$:

B est à l'équilibre alors $\boldsymbol{Q_{B\,int} = 0}$. Malgré la charge portée par la face extérieur de B, la cavité intérieur possède un champ nul. Alors A. est protégé de toute influence provenant de l'extérieur :
« B est écran de l'extérieur vers l'intérieur »



- **état initiale 2** : $\boldsymbol{Q_C = 0}$, $\boldsymbol{Q_A} > 0$ *et B isolé* :

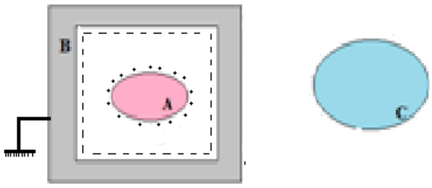
Par influence la surface interne de B se charge négativement.
Puisque B est isolé, la surface externe de B se charge positivement et la face de C en regard de B se charge négativement par influence et puisque $Q_C = 0$ l'autre face de C se charge positivement : « **B ne fait pas écran de l'intérieur vers l'extérieur ».**



<u>Conclusion</u> : Un conducteur creux isolé est un écran imparfait.

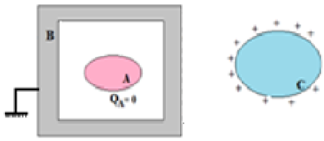
- **état initiale 1** : $\boldsymbol{Q_C = 0},\ \boldsymbol{Q_A} > 0\ et\ B\ lié\ au\ sol$

B lié au sol alors $\boldsymbol{Q_{B\,ext} = 0}$ mais $\boldsymbol{Q_{B\,int} = -Q_A}$ et C reste sans charge ; les charges se trouvant sur la surface extérieure de B s'écoulent dans le sol : **« L'espace extérieur à B est protégé de toute influence provenant de la cavité »**



- **état initiale 2** : $\boldsymbol{Q_C} > 0, \boldsymbol{Q_A = 0\ et\ B\ lié\ au\ sol}$

Malgré la charge positive portée par le conducteur C , le conducteur A reste sans charge car les charges se trouvant sur la surface extérieure de B s'écoulent dans le sol.



<u>Conclusion</u> : Un conducteur creux maintenu à un potentiel constant est un écran parfait.

3.4 Capacité d'un conducteur

Considérons un conducteur isolé en équilibre portant une charge Q répartie sur sa surface externe S avec une densité surfacique σ . Le conducteur et porté au potentiel V en tout point M de sa surface :

$$\boldsymbol{V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_S \frac{\sigma(P)ds}{PM}}$$

P étant un point quelconque de sa surface. Par ailleurs la charge électrique totale portée par ce conducteur s'écrit :

$$\boldsymbol{Q = \iint_S \sigma ds}$$

Si l'on multiplie σ par un coefficient k, le potentiel V et la charge totale Q sont multipliés par k mais le rapport $\frac{Q}{V}$ reste inchangé.

<u>Définition :</u>

La capacité électrostatique d'un conducteur à l'équilibre est définie par $C = Q/V$ où Q est la charge électrique totale du conducteur au potentiel V. La capacité C d'un conducteur est une grandeur toujours positive, elle ne dépend que des caractéristiques physiques et géométriques du matériau dont il est fait le conducteur. L'unité de la capacité est : $[C] = Farday\ (F)$. Les unités couramment utilisées sont $nF\ (nanoFarad) et\ \ pF\ (picoFarad)$.

3.5 Condensateur

3.5.1 Définition :

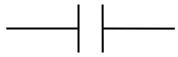
On appelle condensateur tout système de deux conducteurs en influence électrostatique. Il y a deux sortes de condensateurs :

- Condensateur à armatures rapprochées
- Condensateur à influence totale

<u>Remarques</u>

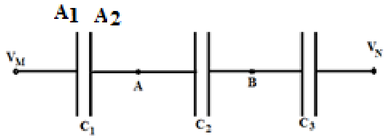
En général les deux armatures sont séparées par un matériau isolant ce qui a pour effet d'augmenter la capacité du condensateur. La charge Q est appelée la charge du condensateur, le rapport $\frac{Q}{V_1 - V_2}$ est constant. Cette constante est appelée capacité du condensateur $C = \frac{Q}{V_1 - V_2}$

Symbole :



3.5.2 Groupement de condensateurs

a- En série



Sous la différence de potentiel $(V_M - V_N)$, l'armature A_1 prend la charge $+Q$ et par influence l'armature A_2 se charge de $-Q$, de même pour les autres armatures :

$$V_M - V_N = (V_M - V_A) + (V_A - V_B) + (V_B - V_N)$$

$$V_M - V_N = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right) = \frac{Q}{C_{équiv}}$$

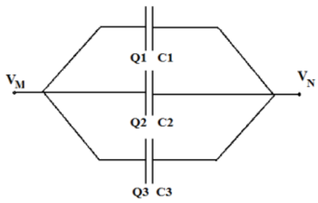
Avec $\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right) = \frac{1}{C_{équiv}}$ d'où :

$$\boxed{C_{équivalente} = \sum \frac{1}{C_i}}$$

b- En parallèle

On a $Q_1 = C_1 V,\ Q_2 = C_2 V\ \ et\ Q_3 = C_3 V$ où $V = V_M - V_N$

Le groupement des capacités porte la charge :



$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = (C_1 + C_2 + C_3)V = C_{équiv}V$$

où $C_{équiv} = (C_1 + C_2 + C_3)$

En général

$$\boxed{C_{équiv} = \sum_i C_i}$$