**Université Ibn Zohr**
**Faculté des sciences, Agadir**
**Département de Mathématiques**

**Année universitaire 2020-2021**
**Session Normale**
**Durée : 1h30min**

# Examen d'Analyse 2 – Intégration – SMA

**Exercice 1** (Questions du cours 3 pts).

Montrer qu'une fonction bornée et croissante sur un intervalle fermé borné est Riemann intégrable.

**Exercice 2** (4 pts).

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue telle que, pour tout $x\in[a,b]$, on a $f(a+b-x)=f(x)$.

(1) Montrer que : (2 pts)

$$\int_a^b xf(x)dx=\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx.$$

(2) Déduire la valeur de : (2 pts)

$$\mathrm{I}=\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx.$$

**Exercice 3** (5 pts).

(1) Montrer la convergence de l'intégrale : (2 pts)

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{1+t^2}dt.$$

(2) Avec le changement de variables $u=1/t$, montrer que (1 pt)

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{1+t^2}dt=0.$$

(3) Soit $a>0$, calculer (2 pts)

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{a^2+t^2}dt.$$

**Exercice 4** (5pts).

Soit $a\in\mathbb{R}$ et $a^2\neq 1$.

(1) Montrer que $\forall\, t\in\mathbb{R};\ a^2+1>2a\cos(t)$. (1 pt)

(2) Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geq 2$, montrer que : (2 pts)

$$\prod_{k=1}^{n}\left(a^2-2a\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)+1\right)=\left(a^n-1\right)^2.$$

(3) En utilisant les sommes de Riemann, montrer que : (2 pts)

$$\int_0^{2\pi}\ln\left(a^2-2a\cos(t)+1\right)dt=\begin{cases}0 & ;\ |a|<1\\ 4\pi\ln|a| & ;\ |a|>1\end{cases}.$$

**Exercice 5** (3pts).

Résoudre l'équation différentielle suivante : (3 pts)

$$(x+1)y'+y=1+\ln(x+1),\ \ y(0)=1 \text{ sur } ]-1,+\infty[.$$