Faculté des Sciences
Département de physique

Agadir le 30/06/2021

Examen d'Électricité 1 ($SMAI_2$)
Session Normale

Electrostatique

Considérons une sphère S_1 de centre O_1 et de rayon R_1 uniformément chargée en volume avec une densité volumique uniforme $\rho > 0$.

1. On se propose de calculer le champ électrostatique en tout point de l'espace en utilisant le théorème de Gauss.

1.1 Par une analyse de symétrie et d'invariance, montrer que le champ électrostatique s'écrit sous la forme $\vec{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{M}) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\overrightarrow{\boldsymbol{e_r}}$ avec $\boldsymbol{r} = \|\overrightarrow{\boldsymbol{O_1M}}\|$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{e_r}} = \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{O_1M}}}{\boldsymbol{r}}$

....
...

1.2 Déterminer l'expression du vecteur champ électrostatique $\vec{E}(M)$ en fonction de $\rho, \varepsilon_0, r, R_1$ et $\overrightarrow{O_1M}$ dans les cas suivants :

a. $r < R_1$. En déduire le potentiel électrostatique.

....

b. $r > R_1$. En déduire le potentiel électrostatique.

....
....

c. En utilisant la propriété de continuité du potentiel électrostatique, donner les expressions finales du potentiel en tout point de l'espace. On prendra l'origine du potentiel à l'infini.

....
...

2. On creuse dans la sphère S_1une cavité sphérique S_2 de centre O_2 et de rayon R_2 (figure 1). Cette distribution, sans symétrie particulière, peut être vue comme la superposition de deux distributions à symétrie sphérique : la sphère S_1 de centre O_1 et de rayon R_1 portant la densité volumique de charge uniforme (ρ) et une deuxième sphère de centre O_2 et de rayon R_2 portant la densité volumique de charge uniforme ($-\rho$).

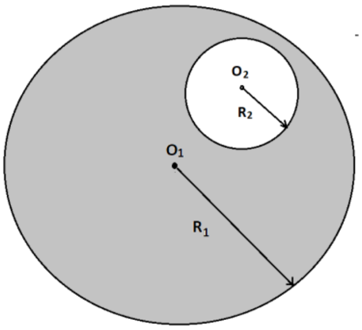


Figure 1

2.1 En appliquant le principe de superposition et en utilisant le résultat de la question **1.2.a** déterminer l'expression du vecteur $\vec{E}(M)$ en tout point de la cavité en fonction de ρ, ε_0 et $\overrightarrow{O_1O_2}$. En déduire l'évolution du champ dans la cavité ?

....
...

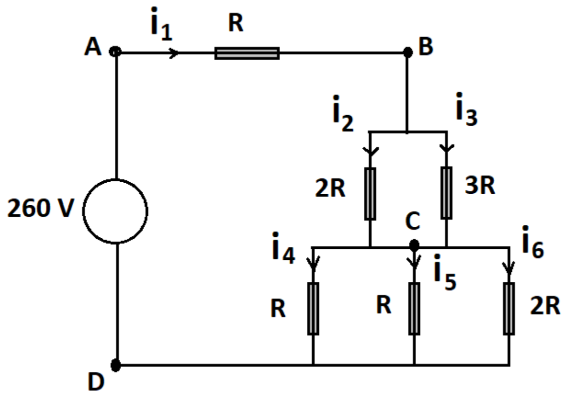
2.2 Dans quel cas le volume de la cavité est équipotentiel ?

....
...

Electrocinétique

Déterminez pour le circuit de la figure ci-contre la valeur de:

1. La résistance équivalente R_{AD} du circuit entre A et D.



2. En prenant $R = 5\ \Omega$, calculer :

2.1 Le courant total I_1.

………
………
…….
………
….

2.2 Le potentiel en A, B, C et D.

………
………
………
…….

2.3 Le courant dans chaque résistance.

………
………
………
………
………

Electrostatique

Considérons une sphère S_1 de centre O_1 et de rayon R_1 uniformément chargée en volume avec une densité volumique uniforme $\rho > 0$.

3. On se propose de calculer le champ électrostatique en tout point de l'espace en utilisant le théorème de Gauss.

3.1 Par une analyse de symétrie et d'invariance, montrer que le champ électrostatique s'écrit de la forme $\boldsymbol{\vec{E}(M) = E(r)\overrightarrow{e_r}}$ avec $\boldsymbol{r = \|\overrightarrow{O_1M}\|}$ et $\boldsymbol{\overrightarrow{e_r} = \frac{\overrightarrow{O_1M}}{r}}$

- Soit M un point de l'espace. Tout plan passant par O_1 et M est un plan de symétrie de la sphère alors le champ est porté par la droite O_1M intersection de ces plans de symétrie : $\vec{E} = E(r,\theta,\varphi)\vec{e}_r$.

- Toute rotation autour du point O (suivant θ *ou* φ) laisse la distribution inchangée alors le champ ne dépond que de r : $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$

3.2 Déterminer l'expression du vecteur champ électrostatique $\vec{E}(M)$ en fonction de $\rho, \varepsilon_0, r, R_1$ *et* $\overrightarrow{O_1M}$ dans les cas suivants :

d. $r < R_1$. En déduire le potentiel électrostatique.

$$\oint\!\!\oint \vec{E}.\overrightarrow{ds} = E4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_o} = \frac{\rho\, 4\pi r^3}{3\varepsilon_0}$$

$$alors \qquad \vec{E}_{r<R_1} = \frac{\rho\, r}{3\varepsilon_0}\,\overrightarrow{e_r} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\,\overrightarrow{O_1M}$$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V \quad \rightarrow \quad V_{r<R_1}(r) = -\int E\,dr = -\int \frac{\rho\, r}{3\varepsilon_0}\,dr = -\frac{\rho\, r^2}{6\varepsilon_0} + A$$

e. $r > R_1$**.** En déduire le potentiel électrostatique.

$$\oint\!\!\oint \vec{E}.\overrightarrow{ds} = E4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_o} = \frac{\rho\, 4\pi {R_1}^3}{3\varepsilon_0}$$

$$alors \qquad \vec{E}_{r>R_1} = \frac{\rho\, {R_1}^3}{3\varepsilon_0 r^2}\,\overrightarrow{e_r} = \frac{\rho\, {R_1}^3}{3\varepsilon_0 r^3}\,\overrightarrow{O_1M}$$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V \quad \rightarrow \quad V_{r>R_1}(r) = -\int E\,dr = -\int \frac{\rho\, {R_1}^3}{3\varepsilon_0 r^2}\,dr = \frac{\rho\, {R_1}^3}{3\varepsilon_0 r} + B$$

f. En utilisant la propriété de continuité du potentiel électrostatique, donner les expressions finales du potentiel en tout point de l'espace. On prendra l'origine du potentiel à l'infini.

L'origine du potentiel à l'infini :

$V_{r>R_1}(r=\infty)=0$ alors $B=0$ Et $\boxed{V_{r>R_1}(r)=\frac{\rho R_1{}^3}{3\varepsilon_0 r}}$

Continuité du champ :

$$V_{r>R_1}(r=R_1)=V_{r<R_1}(r=R_1)$$

$\frac{\rho R_1{}^2}{3\varepsilon_0}=-\frac{\rho R_1{}^2}{6\varepsilon_0}+A$ alors $A=\frac{\rho R_1{}^2}{2\varepsilon_0}$ et

$$\boxed{V_{r<R_1}(r)=-\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0}+\frac{\rho R_1{}^2}{2\varepsilon_0}=\frac{\rho}{6\varepsilon_0}(3R_1{}^2-r^2)}$$

4. On creuse dans la sphère S_1 une cavité sphérique S_2 de centre O_2 et de rayon R_2 (figure 1). Cette distribution, sans symétrie particulière, peut être vue comme la superposition de deux distributions à symétrie sphérique : la sphère S_1 de centre O_1 et de rayon R_1 portant la densité volumique de charge uniforme (ρ) et une deuxième sphère de centre O_2 et de rayon R_2 portant la densité volumique de charge uniforme ($-\rho$).

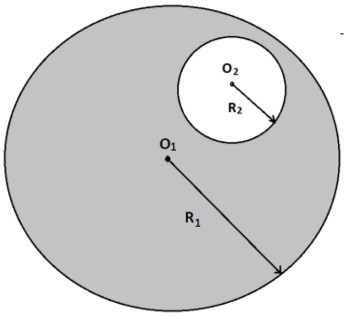


Figure 1

4.1 En appliquant le principe de superposition et en utilisant le résultat de la question **1.2.a** déterminer l'expression du vecteur $\vec{E}(M)$ en tout point de la cavité en fonction de ρ, ε_0 *et* $\overrightarrow{O_1O_2}$. En déduire l'évolution du champ dans la cavité ?

Soit M un point de la cavité :

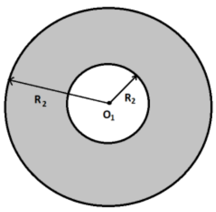
$\vec{E}(M)=\vec{E}_1(M)+\vec{E}_2(M)$ où $\vec{E}_1(M)$ et $\vec{E}_2(M)$ sont les champs créés dans la cavité par les sphères S_1 et S_2 respectivement.

$\vec{E}_1(M)=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{O_1M}$ et $\vec{E}_2(M)=-\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{O_2M}$ alors $\vec{E}(M)=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{O_1M}-\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{O_2M}$

$\vec{E}(M)=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{O_1O_2}$ Le champ est uniforme dans la cavité

4.2 Dans quel cas le potentiel électrostatique est constant dans la cavité ? Donner le schéma de la distribution correspondante.

Le potentiel sera constant dans la cavité si le champ est y nul c-à-d $O_1\equiv O_2$.



La nouvelle distribution correspond à celle de deux sphères concentriques

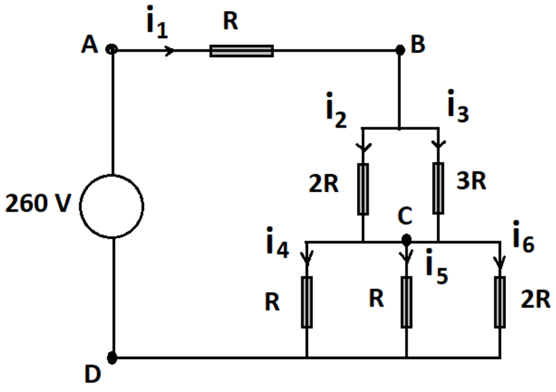
Electrocinétique

Déterminez pour le circuit de la figure ci-contre la valeur de:

3. La résistance équivalente R_{AD} du circuit entre A et D.

$$R_{AD} = R + 2R//3R + R//R//2R$$

$$R_{AD} = R + \frac{6R}{5} + \frac{2R}{5} = \frac{13R}{5}$$



4. En prenant $R = 5\ \Omega$, calculer :

4.1 Le courant total I_1.

$$R_{AD} = 13\ \Omega$$

$$I_1 = \frac{260}{R_{AD}} = 20\ A$$

4.2 Le potentiel en A, B, C et D.

- $V_A = 260\ V$
- $V_A - V_B = RI_1 \implies V_B = V_A - RI_1 \implies V_B = 160\ V$
- $V_B - V_C = (2R//3R)\ I_1 = \frac{6R}{5} I_1 \implies V_C = V_B - \frac{6R}{5} I_1 \implies V_C = 40\ V$
- $V_C - V_D = (R//R//2R)\ I_1 = \frac{2R}{5} I_1 \implies V_D = V_C - \frac{2R}{5} I_1 = 0\ V$

2.3 Le courant dans chaque résistance.

- $I_2 = \frac{V_B - V_C}{2R} = 12\ A$
- $I_3 = \frac{V_B - V_C}{3R} = 8\ A$
- $I_4 = \frac{V_C - V_D}{R} = 8\ A$
- $I_5 = \frac{V_C - V_D}{R} = 8\ A$
- $I_6 = \frac{V_C - V_D}{2R} = 4\ A$

Université Ibn Zohr   Agadir le 10/09/2020
Faculté des Sciences
Département de physique

Examen d'Électricité 1
(SMA$_2$, SMI$_2$) Session normale

N° d'examen :	CNE :
Nom & Prénom :	CIN :
Filière **:**	

Questions de cours

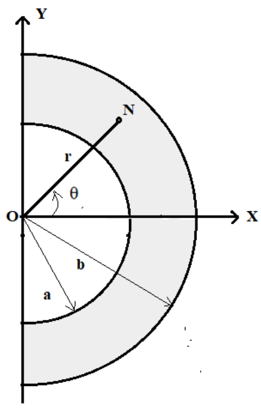
Cocher les 6 propositions justes (réponse juste = +0.5, réponse fausse = -0.25)

Lorsque deux lignes de champ se croisent en un point M : ☐ Le champ électrostatique n'est pas défini en M. ☐ Il y a une charge ponctuelle positive placée en M. ☐ Le champ électrostatique en M est nul En un point M d'un plan d'antisymétrie d'une distribution de charges, le champ créé par cette distribution est : ☐ Porté par le plan d'antisymétrie ☐ Nul ☐ Perpendiculaire au plan d'antisymétrie Quelles sont les affirmations correctes ? ☐ Un champ électrostatique nul se traduit par un flux nul. ☐ Si le champ est non nul, alors le flux ne peut pas être nul. ☐ Un flux nul suppose un champ nul.	Deux surfaces équipotentielles peuvent se couper. ☐ Oui ☐ Non ☐ Cela dépend En tout point d'une même équipotentielle : ☐ Le module du champ électrostatique est le même. ☐ Le champ électrostatique est tangent ☐ Le potentiel a la même valeur. Le potentiel électrostatique est défini à une constante près ☐ Par convention, pour toute distribution, le potentiel est pris nul à l'infini. ☐ Pour toute distribution finie, on peut choisir un potentiel nul à l'infini. ☐ Pour une distribution infinie, il est impossible de fixer le potentiel nul en un point

Problème

I. *Sur le plan OXY, on considère une distribution de charges de surface, à répartition uniforme (densité σ>0), comprise entre les deux demi-cercles de centre O et de rayons a et b (b>a)(figure 1).*

1. *Montrer par des arguments de symétrie que le champ produit au centre O est porté par l'axe Ox.*



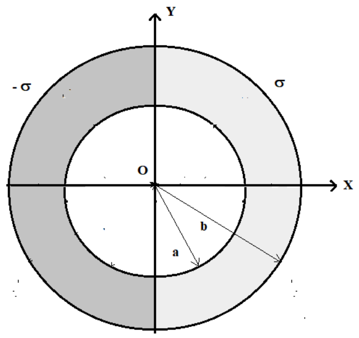
2. *Soit un élément de surface ds dont le centre N est repéré par ses coordonnées polaires r et θ (voir figure ci-dessus). Donner l'expression de ds en fonction de r et θ. En déduire la charge dq portée par l'élément ds en fonction de r, θ et σ.*

3. *Donner l'expression du champ élémentaire* $\overrightarrow{dE}_{+\sigma,N}(O)$ *créé au point O par la charge dq en fonction de* ε_0, θ, r, σ *et le vecteur unitaire* $\vec{u}$ ($\vec{u} = \frac{\overrightarrow{NO}}{NO} = \frac{\vec{r}}{r}$). *En déduire sa composante* $\overrightarrow{dE}_{+\sigma,Nx}(O)$ *suivant* $\vec{e}_x$.

4. *Donner l'expression du champ total* $\vec{E}_{+\sigma}(O)$ *créé par la distribution surfacique positive au centre O en fonction de* ε_0 , a, b *et* σ.

..
.

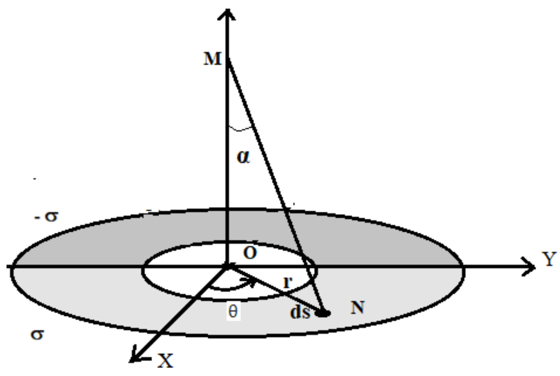
II. On considère la couronne de la figure ci-contre de rayon interne a et externe b chargée pour $x > 0$ *avec une densité surfacique* $\sigma > 0$ *et pour* $x < 0$ *avec une densité* $-\sigma$.



5. *En utilisant le résultat de la question (4) donner sans calcul l'expression du champ total* $\vec{E}_{-\sigma}(O)$ *produit par la distribution négative au point O. En déduire le champ total au point O.*

.

6. *On cherche à déterminer le champ électrostatique en tout point M de l'axe Oz tel que* $M(0,0,z)$ *Montrer par des arguments de symétrie que le champ* $\vec{E}(M)$ *est porté par l'axe* Ox : $\vec{E}(M) = \vec{E}_x(M)\vec{e}_x$.



7. *Soit ds un élément de surface de la distribution positive* σ *centré en un point N (figure ci-dessus).*

7.1 Donner l'expression du champ élémentaire $\overrightarrow{dE}_{+\sigma}(M)$ produit par ds au point M en fonction de $r, \sigma, \theta, z, \varepsilon_o$ et $\vec{n}$ (où $\vec{n} = \frac{\overrightarrow{NM}}{NM}$) . En déduire sa composante sur l'axe Ox : $\overrightarrow{dE}_{+\sigma,x} = dE_{+\sigma,x}\vec{e}_x$ en fonction de $r, \sigma, \theta, z, \varepsilon_o$. On donne $\vec{n} = -\sin\alpha\cos\theta\,\vec{e}_x - \sin\alpha\sin\theta\,\vec{e}_y + \cos\alpha\,\vec{e}_z$.

.

7.2 Calculer la composante $\vec{E}_{+\sigma,x}(M)$ suivant Ox du champ total produit par la distribution positive au point M en fonction de $a, b,\ \sigma\ ,\ z, \varepsilon_o$. On donne : $\int \frac{r^2 dr}{(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} = \ln\left(r + \sqrt{(z^2+r^2)}\right) - \frac{r}{(z^2+r^2)^{\frac{1}{2}}}$

.

7.3 En utilisant la question précédente donner sans calcul l'expression de la composante $\vec{E}_{-\sigma,x}(M)$ suivant Ox du champ total produit par la distribution négative au point M en fonction de $a, b,\ \sigma$, z, ε_o.

7.4 En déduire le champ total créé au point M par la couronne chargée.

.

7.5 Retrouver le résultat de la question 5.

..
.
.
.

Université Ibn Zohr
Faculté des Sciences
Département de physique

Agadir le 10/09/2020

Examen d'Électricité 1

(SMA$_2$, SMI$_2$) Session normale - Correction

Questions de cours

Cocher les 6 propositions justes (réponse juste = +0.5, réponse fausse = -0.25)

Lorsque deux lignes de champ se croisent en un point M :

- ☐ Le champ électrostatique n'est pas défini en M.
- ☐ Il y a une charge ponctuelle positive placée e
- ☒ Le champ électrostatique en M est nul

0.5

En un point M d'un plan d'antisymétrie d'une distribution de charges, le champ créé par cette distribution est :

- ☐ Porté par le plan d'antisymétrie
- ☐ Nul
- ☒ Perpendiculaire au plan d'antisymétrie

0.5

Quelles sont les affirmations correctes ?

- ☒ Un champ électrostatique nul se traduit par un flux nul.
- ☐ Si le champ est non nul, alors le flux ne peut p ul.
- ☐ Un flux nul suppose un champ nul.

0.5

Deux surfaces équipotentielles peuvent se couper.

- ☐ Oui
- ☒ Non
- ☐ Cela dépend

0.5

En tout point d'une même équipotentielle :

- ☐ Le module du champ électrostatique est le même.
- ☐ Le champ électrostatique est tangent
- ☒ Le potentiel a la même valeur.

0.5

Le potentiel électrostatique est défini à une constante près

- ☐ Par convention, pour toute distribution, le potentiel est pris nul à l'infini.
- ☒ Pour toute distribution finie, on peut choisir un potentiel nul à l'infini.
- ☐ Pour une distribution infinie, il est impossible r le potentiel nul en un point

0.5

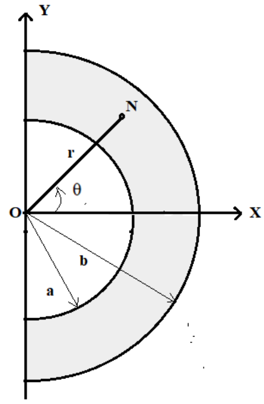
Problème

III. Sur le plan OXY, on considère une distribution de charges de surface, à répartition uniforme (densité $\sigma>0$), comprise entre les deux demi-cercles de centre O et de rayons a et b (b>a)(figure 1).

8. *Montrer par des arguments de symétrie que le champ produit au centre O est porté par l'axe Ox.*

Les yOx et zOx sont deux plans de symétrie alors le champ électrostatique au point O est porté par la droite intersection des deux plans c.à.d l'axe Ox.

2



9. *Soit un élément de surface ds dont le centre N est repéré par ses coordonnées polaires r et θ (voir figure ci-dessus). Donner l'expression de ds en fonction de r et θ. En déduire la charge dq portée par l'élément ds en fonction de r, θ et σ.*

1.5 $\quad ds = r dr d\theta \qquad dq = \sigma\, r dr d\theta$ 1.5

10. *Donner l'expression du champ élémentaire $\overrightarrow{dE}_{+\sigma,N}(O)$ créé au point O par la charge dq en fonction de ε_0, θ, r, σ et le vecteur unitaire $\vec{u}$ ($\vec{u} = \frac{\overrightarrow{NO}}{NO} = \frac{\vec{r}}{r}$). En déduire sa composante $\overrightarrow{dE}_{+\sigma,Nx}(O)$ suivant $\vec{e}_x$.*

$\overrightarrow{dE}_{+\sigma,N}(O) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\vec{u} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\, dr\, d\theta}{r}\vec{u}$, $\overrightarrow{dE}_{+\sigma,Nx}(O) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\, dr\, d\theta}{r}\cos\theta\ \vec{e}_x$

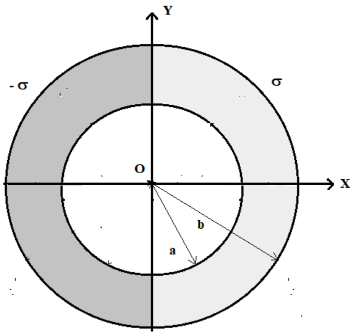
2 2

11. *Donner l'expression du champ total $\vec{E}_{+\sigma}(O)$ créé par la distribution surfacique positive au centre O en fonction de ε_0 , a, b et σ.*

$$\vec{E}_{+\sigma}(O) = \int \overrightarrow{dE}_{+\sigma,Nx}(O) = -\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^b \frac{dr}{r}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\, d\theta\ \vec{e}_x$$
$$= \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{a}{b}\vec{e}_x$$

2

IV. *On considère la couronne de la figure ci-contre de rayon interne a et externe b chargée pour $x > 0$ avec une densité surfacique $\sigma > 0$ et pour $x < 0$ avec une densité $-\sigma$.*



12. *En utilisant le résultat de la question (4) donner sans calcul l'expression du champ total $\vec{E}_{-\sigma}(O)$ produit par la distribution négative au point O. En déduire le champ total au point O.*

$$\vec{E}_{-\sigma}(O) = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{a}{b}\vec{e}_x$$

1

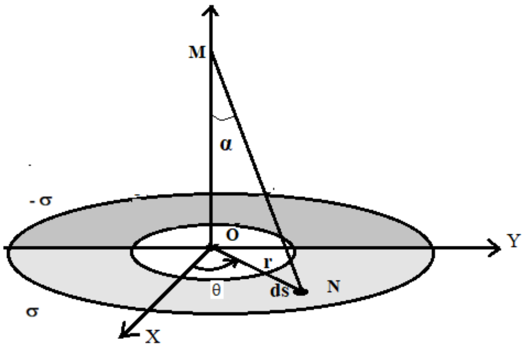
D'après le principe de superposition le champ au centre O est la somme des deux champs $\vec{E}_{+\sigma}(O)$ et $\vec{E}_{-\sigma}(O)$ créés respectivement par la distribution positive et celle chargée négativement :

$\vec{E}_{+\sigma}(O) = \vec{E}_{-\sigma}(O) = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{a}{b}\vec{e}_x$ alors $\vec{E}(O) = \frac{\sigma}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{a}{b}\vec{e}_x$

1

13. *On cherche à déterminer le champ électrostatique en tout point M de l'axe Oz tel que $M(0,0,z)$ Montrer par des arguments de symétrie que le champ $\vec{E}(M)$ est porté par l'axe Ox : $\vec{E}(M) = \vec{E}_x(M)\vec{e}_x$.*

Le plan yOz est un plan d'antisymétrie alors le champ en tout point de ce plan y compris l'axe Oz est normal à ce plan et par conséquent il est porté par l'axe Ox.



1.5

14. Soit ds un élément de surface de la distribution positive σ centré en un point N (figure ci-dessus).

7.1 Donner l'expression du champ élémentaire $\overrightarrow{dE}_{+\sigma}(M)$ produit par ds au point M en fonction de $r, \sigma, \theta, z, \varepsilon_0$ et $\vec{n}$ (où $\vec{n} = \frac{\overrightarrow{NM}}{NM}$). En déduire sa composante sur l'axe Ox : $\overrightarrow{dE}_{+\sigma,x} = dE_{+\sigma,x}\vec{e}_x$ en fonction de $r, \sigma, \theta, z, \varepsilon_0$. On donne $\vec{n} = -\sin\alpha\cos\theta\,\vec{e}_x - \sin\alpha\sin\theta\,\vec{e}_y + \cos\alpha\,\vec{e}_z$.

$$\overrightarrow{dE}_{+\sigma}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{NM^2}\vec{n} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r dr\, d\theta}{(r^2+z^2)}\vec{n}$$

0.5

$$\overrightarrow{dE}_{+\sigma,x}(M) = -\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r dr\, d\theta}{(r^2+z^2)}\sin\alpha\cos\theta\,\vec{e}_x$$

$\sin\alpha = \frac{r}{NM} = \frac{r}{(r^2+z^2)^{1/2}}$

$$\overrightarrow{dE}_{+\sigma,x}(M) = -\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r^2 dr\, d\theta}{(r^2+z^2)^{3/2}}\cos\theta\,\vec{e}_x$$

0.5

7.2 Calculer la composante $\vec{E}_{+\sigma,x}(M)$ suivant Ox du champ total produit par la distribution positive au point M en fonction de $a, b, \sigma, z, \varepsilon_0$. On donne : $\int \frac{r^2 dr}{(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} = \ln\left(r + \sqrt{(z^2+r^2)}\right) - \frac{r}{(z^2+r^2)^{\frac{1}{2}}}$

$$\vec{E}_{+\sigma,x}(M) = \int \overrightarrow{dE}_{+\sigma,x}(M)$$

$$\vec{E}_{+\sigma,x}(M) = -\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^b \frac{r^2 dr}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\, d\theta\ \vec{e}_x$$

0.5

$$= -\frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\int_a^b \frac{r^2}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,dr\,\vec{e}_x$$

$$= -\frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln\left(r+\sqrt{(z^2+r^2)}\right) - \frac{r}{(z^2+r^2)^{\frac{1}{2}}}\right]_a^b \vec{e}_x$$

$$= -\frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln\left(b+\sqrt{(z^2+b^2)}\right) - \frac{b}{(z^2+b^2)^{\frac{1}{2}}} - \ln\left(a+\sqrt{(z^2+a^2)}\right) + \frac{a}{(z^2+a^2)^{\frac{1}{2}}}\right]\vec{e}_x$$

$$= \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{b}{(z^2+b^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{a}{(z^2+a^2)^{\frac{1}{2}}} + \ln\left(\frac{a+\sqrt{(z^2+a^2)}}{b+\sqrt{(z^2+b^2)}}\right) + \right]\vec{e}_x$$

0.5

7.3 En utilisant la question précédente donner sans calcul l'expression de la composante $\vec{E}_{-\sigma,x}(M)$ suivant Ox du champ total produit par la distribution négative au point M en fonction de $a, b, \sigma, z, \varepsilon_0$.

$$\vec{E}_{-\sigma,x}(M) = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{b}{(z^2+b^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{a}{(z^2+a^2)^{\frac{1}{2}}} + \ln\left(\frac{a+\sqrt{(z^2+a^2)}}{b+\sqrt{(z^2+b^2)}}\right)\right]\vec{e}_x$$

0.5

14.4 En déduire le champ total créé au point M par la couronne chargée.

D'après le principe de superposition le champ au point M est la somme des deux champs $\vec{E}_{+\sigma}(M)$ et $\vec{E}_{-\sigma}(M)$ créés respectivement par la distribution positive et celle chargée négativement : 0.5

$\vec{E}_x(M) = \vec{E}_{+\sigma,x}(M) + \vec{E}_{-\sigma,x}(M)$ *on a* $\vec{E}_{+\sigma,x}(M) = \vec{E}_{-\sigma,x}(M)$ *alors*

$$\vec{E}_x(M) = 2\vec{E}_{+\sigma,x}(M) = \frac{\sigma}{\pi\varepsilon_0}\left[\frac{b}{(z^2+b^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{a}{(z^2+a^2)^{\frac{1}{2}}} + ln\left(\frac{a+\sqrt{(z^2+a^2)}}{b+\sqrt{(z^2+b^2)}}\right)\right]\vec{e}_x$$

0.5

14.5 Retrouver le résultat de la question 5.

Le champ au centre O est donné pour $z = 0$ *:*

$$\vec{E}_x(M) = \frac{\sigma}{\pi\varepsilon_0} ln\frac{a}{b}\vec{e}_x$$

0.5

Université Ibn Zohr
Faculté des Sciences
Département de physique

Agadir le 19/10/2020

Examen d'Électricité 1
($SMPC_2$, $SMAI_2$)
Session de rattrapage

N° d'examen :	CNE :
Nom & Prénom :	CIN :
Filière :	

Problème

I. *On considère un plan A infini parallèle au plan xoy d'équation $z = 0$, chargé avec une densité surfacique uniforme positive σ.*

1. *Montrer par des considérations de symétrie et d'invariances que le champ produit par le plan s'écrit $\vec{E}(M) = E(z)\overrightarrow{e_z}$.*

2. *En utilisant le théorème de Gauss, déterminer le champ $\vec{E}(M)$ en tout point M de l'espace.*

3. *Calculer le potentiel $V(z)$ en tout point de l'espace. On prend l'origine du potentiel au point O.*

4. *On considère un autre plan B d'équation $z = b, (b > 0)$ chargé avec la même densité surfacique σ. En utilisant le principe de superposition, déterminer le champ en tout point de l'espace.*

II. *On considère maintenant deux plans d'équations respectives $z = a$ et $z = -a$ entre lesquels il existe une distribution de charges volumique uniforme de densité positive ρ. Il n'y a pas de charge dans les régions $z > a$ et $z < -a$.*

5. *Déterminer par une analyse de symétrie la direction du champ électrostatique ainsi que les variables dont il dépend réellement.*

6. *En appliquant le théorème de Gauss, déterminer le champ électrostatique dans tout l'espace.*

7. *Calculer le potentiel électrostatique en tout point $z > 0$ en prenant comme référence de potentiel le plan d'équation $z = 0$.*

8. *Sachant que par symétrie $V(z) = V(-z)$, en déduire le potentiel en tout point $z < 0$.*

9. *Tracer le graphe représentant le potentiel et la norme du champ dans l'espace.*

Examen d'Électricité 1 - 2020
(SMPC2, SMAI2)
Correction - Session de rattrapage

Problème

III. On considère un plan A infini parallèle au plan xoy d'équation $z = 0$*, chargé avec une densité surfacique uniforme positive* σ.

10. Montrer par des considérations de symétrie et d'invariances que le champ produit par le plan s'écrit $\vec{E}(M) = E(z)\vec{e_z}$.

Les plans zOx et zOy sont des plans de symétries alors $\vec{E} = E(x, y, z)\vec{e}_z$

Toute translation suivant l'axe Ox ou Oy laisse la distribution inchangée alors $\vec{E} = E(z)\vec{e}_z$

1

11. En utilisant le théorème de Gauss, déterminer le champ $\vec{E}(M)$ *en tout point M de l'espace.*

La surface de Gauss est un cylindre C coupant verticalement le plan chargé.

$$\phi = \iint_C \vec{E}\,.\overrightarrow{ds} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \iint_{B1} \vec{E}\,.\overrightarrow{ds}_{B1} + \iint_{B2} \vec{E}\,.\overrightarrow{ds}_{B2} + \iint_{Lat} \vec{E}\,.\overrightarrow{ds}_L$$

1

$\iint_{Lat} \vec{E}\,.\overrightarrow{ds}_L = 0$ *car* $\vec{E}$ *est perpendiculaire à* $\overrightarrow{ds}_L$

Le plan xoy est un plan de symétrie de la distribution de charge alors $\vec{E}_A(-z) = -\vec{E}_A(z)$

$$\iint_C \vec{E}\,.\overrightarrow{ds} = 2\iint_{B1} \vec{E}_A\,(z).\overrightarrow{ds}_{B1} = 2\,E(z)\,S_{Base} = \frac{\sigma S_{Base}}{\varepsilon_0}$$

0.5

alors $\vec{E}_A(z) = \frac{z}{|z|}\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z$,

2

12. Calculer le potentiel $V(z)$ *en tout point de l'espace. On prend l'origine du potentiel au point O.*

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V = -\frac{dV}{dz}\vec{e}_z$$

0.5

$V(z) = -\int E(z)dz$ Alors $V(z) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}z + k_1 \; si\; z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}z + k_2 \; si\; z < 0 \end{cases}$

1

1

La continuité du potentiel :

$$E(o^+) = E(o^-) = 0 \quad alors\;\; k_1 = k_2 = 0$$

0.5

13. *On considère un autre plan B d'équation $z = b, (b > 0)$ chargé avec la même densité surfacique σ. En utilisant le principe de superposition, déterminer le champ et le potentiel en tout point de l'espace.*

$$\vec{E}_A(z > 0) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z \quad et\ \vec{E}_A(z < 0) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z$$

$$\vec{E}_B(z > b) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z \quad et\ \vec{E}_A(z < b) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z$$

$$\vec{E}_{Total}(M) = \vec{E}_A(M) + \vec{E}_B(M)$$

0.5

alors

1

$$\vec{E}_{Total}(M) = \begin{cases} 0 \quad z \in]0, a[\\ \frac{z}{|z|}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_z \quad z \in]-\infty, 0[\ U]a, +\infty[\end{cases}$$

1

IV. *On considère maintenant deux plans d'équations respectives $z = a\ et\ z = -a$ entre lesquelles il existe une distribution de charges volumique uniforme de densité positive ρ. Il n'y a pas de charge dans les régions $z > e\ et\ z < -a$.*

14. *Déterminer par une analyse de symétrie la direction du champ électrostatique ainsi que les variables dont il dépend réellement.*

Les plans zOx et zOy sont des plans de symétries alors $\vec{E} = E(x, y, z)\vec{e}_z$ 0.5 0.5

Toute translation suivant l'axe Ox ou Oy laisse la distribution inchangée alors $\vec{E} = E(z)\vec{e}_z$

15. *En appliquant le théorème de Gauss, déterminer le champ électrostatique dans tout l'espace.*

On choisit comme surface de Gauss un cylindre C coupant verticalement les deux plans.

$$\phi = \iint_C \vec{E}\,.\overrightarrow{ds} = 2\,E(z)\,S_{Base}$$

1

Si $|z| < a$ la charge à l'intérieur du cylindre (surface de Gauss) est : $Q_{int} = 2z\rho\, S_{Base}$

$$\vec{E}(-a < z < a) = \frac{\rho z}{\varepsilon_0}\vec{e}_z$$

1.5

Si $|z| > a$ la charge à l'intérieur du cylindre (surface de Gauss) est : $Q_{int} = 2a\rho\, S_{Base}$

$$\vec{E}(|z| > a\,) = \frac{z}{|z|}\frac{\rho a}{\varepsilon_0}\vec{e}_z$$

1.5

16. Calculer le potentiel électrostatique en tout point $z > 0$ en prenant comme référence de potentiel le plan d'équation $z = 0$.

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V = -\frac{dV}{dz}\vec{e}_z \quad \Rightarrow \quad V(z) = -\int E(z)dz$$

Pour $\boldsymbol{0 < z < a}$:

$V(z) = -\int E(z)dz = -\int \frac{\rho z}{\varepsilon_0} dz = -\frac{\rho z^2}{2\varepsilon_0} + k_1$ 1

Or $E(o) = 0$ $alors\ k_1 = 0$

$$V(z) = -\frac{\rho z^2}{2\varepsilon_0}$$ 0.5

Pour $\boldsymbol{z > a}$:

$V(z) = -\int E(z)dz = -\int \frac{\rho a}{\varepsilon_0} dz = -\frac{\rho a}{\varepsilon_0} z + k_2$ 1

0.5

Le potentiel est continu en a : $V(a^+) = V(a^-)$ alors $-\frac{\rho a^2}{\varepsilon_0} + k_2 = -\frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0} \Rightarrow k_2 = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}$

$$V(z) = -\frac{\rho a}{\varepsilon_0}\boldsymbol{z} + \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}$$

17. Sachant que par symétrie $V(z) = V(-z)$, en déduire le potentiel en tout point du reste de l'espace.

Pour $\boldsymbol{-a < z < 0}$:

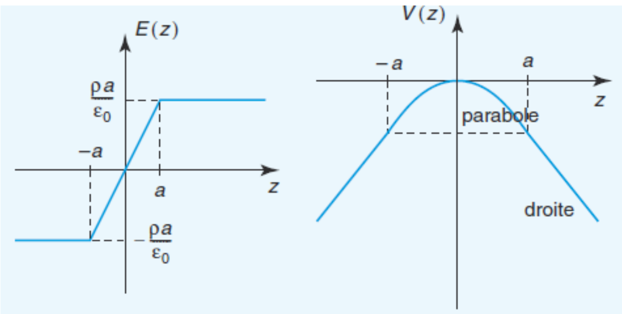
$$V(z) = -\frac{\rho z^2}{2\varepsilon_0}$$ 0.5

Pour $\boldsymbol{z < -a}$

$V(z) = \frac{\rho a}{\varepsilon_0}\boldsymbol{z} + \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}$ 0.5

18. Tracer le graphe représentant le potentiel et la norme du champ dans l'espace.

0.5



(a) Norme du champ (b) Potentiel

0.5