Univérsité Ibn Zohr
Faculté des Sciences - Agadir
Département de Mathématiques
Année Univérsitaire 19-20
Filière: SMA & SMI (S2)

Examen blanc 3 d'Algèbre 3

Exercice 1

Soit E le sous-espace vectoril de $\mathbb{R}^3$ défini par: $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y - z = 0\}$ et soient les vecteurs

$$a_1 = (1,2,0), \quad a_2 = (0,3,1) \; et \; a_3 = (1,-1,-1).$$

1. Montrer que $e_1 = (-2,1,0)$ et $e_2 = (1,0,1)$ forment une base de E et déduire $\dim E$.
2. On pose $F = \{a_1, a_2, a_3\}$.
   a) La famille F est-elle libre? liée? justifier.
   b) Former l'équation cartésienne de $G = \text{vect}(F)$.
3. Déterminer le sous-espace vectoriel $E \cap G$ et en donner une base.

Solution 1

1. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in E &\iff x + 2y - z = 0 \\ &\iff x = -2y + z \end{aligned}$$

$(x,y,z) = (-2y+z, y, z) = y(-2,1,0) + z(1,0,1)$. Comme $e_1 = (-2,1,0), e_2 = (1,0,1)$ donc, $E = \text{vect}(e_1, e_2)$ ce qui montre que $\{e_1, e_2\}$ est une famille génératrice de E, de plus e_1 et e_2 ne sont pas proportionnels, ils forment une famille libre de E. Ainsi $\{e_1, e_2\}$ est une base de E.

(a) On a $a_1 = a_2 + a_3$ alors $F = \{a_1, a_2, a_3\}$ est liée.

(b) On a $a_1 = a_2 + a_3$ alors $G = \text{Vect}(F) = \text{Vect}(a_1, a_2, a_3) = \text{Vect}(a_2, a_3)$, donc $(x,y,z) \in G$ si et seulement il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$(x,y,z) = \alpha a_2 + \beta a_3 \iff \begin{cases} x = \beta \\ y = 3\alpha - \beta \\ z = \alpha - \beta \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = x \\ \alpha = z + \beta \\ y = 3\alpha - \beta \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = x \\ \alpha = z + x \\ y = 2x + 3z \end{cases}$$

Cela implique que

$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 2x + 3z\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3z - y = 0\}.$$

2. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$(x,y,z) \in E \cap G \iff \begin{cases} (x,y,z) \in E \\ (x,y,z) \in G \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + 3z - y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z = x + 2y \\ 5x + 5y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = -x \\ y = -x \end{cases}$$

alors $(x,y,z) = (x,-x,-x) = x(1,-1,-1)$. Cela implique $E \cap G = \text{Vect}(1,-1,-1)$.

Exercice 2

Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par:

$$f:\ \begin{array}{l} \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow E \\ P \longmapsto (2X+1)P + (1-X^2)P'. \end{array}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer $\ker(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$.
3. Montrer que f est un automorphisme.
4. Soit $\mathcal{B} = (P_0 = 1, P_1 = X-1, P_2 = (x-1)^2)$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
5. Déterminer les coordonnées de $f(P_0), f(P_1),\ \text{ et }\ f(P_2)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Solution 2

1. Il est facile de vérifier que $f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$ pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$.
   Soient $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

   $$\begin{aligned} f(\lambda P + Q) &= (2X+1)(\lambda P + Q) + (1-X^2)(\lambda P' + Q') \\ &= \lambda((2X+1)P + (1-X^2)P') + (2X+1)Q + (1-X^2)Q' \\ &= \lambda f(P) + f(Q). \end{aligned}$$

   Donc, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$.

2.
   - Soit $P = a_2X^2 + a_1X + a_0 \in \mathbb{R}_2[X]$.

     $$P \in \operatorname{Ker}(f) \iff f(P) = 0 \iff (2X+1)P + (1-X^2)P' = 0$$

     $$\iff (2X+1)(a_2X^2 + a_1X + a_0) + (1-X^2)(2a_2X + a_1) = 0$$

     $$\iff (a_1+a_2)X^2 + (2a_0 + a_1 + 2a_2)X + a_0 + a_1 = 0 \iff \begin{cases} a_1 + a_2 = 0 \\ 2a_0 + a_1 + 2a_2 = 0 \\ a_0 + a_1 = 0 \end{cases}$$

     $$\iff \begin{cases} a_2 = -a_1 \\ 2a_0 - a_1 = 0 \\ a_0 = -a_1 \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_0 = 0 \end{cases}$$

     alors $P = 0$. On obtient $\operatorname{Ker}(f) = \{0\}$.
   - Notons $(1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Donc, $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{vect}(f(1), f(X), f(X^2))$. On a

     $$\begin{cases} f(1) = (2X+1)1 + (1-X^2)(1)' = 2X+1 \\ f(X) = (2X+1)X + (1-X^2)(X)' = 2X^2 + X + X - X^2 = X^2 + X + 1, \\ f(X^2) = (2X+1)X^2 + (1-X^2)(X^2)' = 2X^3 + X^2 + 2X - 2X^3 = X^2 + 2X \end{cases}$$

     alors $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{vect}(2X+1, X^2+X+1, X^2+2X)$. On a $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{vect}(2X+1, X^2+X+1, X^2+2X)$, alors $(2X+1, X^2+X+1, X^2+2X)$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im}(f)$. Comme $\operatorname{Ker}(f) = \{0\}$, alors $\dim(\operatorname{Ker}(f)) = 0$. D'après le théorème du rang $\dim(\operatorname{Ker}(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$, on obtient que $\dim(\operatorname{Im}(f)) = 3$, de plus $(2X+1, X^2+X+1, X^2+2X)$ est une famille du cardinal $3 = \dim(\operatorname{Im}(f))$ et génératrice de $\operatorname{Im}(f)$, alors $(2X+1, X^2+X+1, X^2+2X)$ est une base de $\operatorname{Im}(f)$.

3. On a $\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}_2[X]}\}$ alors f est injective et comme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X]$ c -a-d f est un endomorphisme (l'ensemble de départ c'est l'ensemble d'arrivé) alors f est une application bijective, d'où f est un automorphisme.

4. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$aP_0+bP_1+cP_2 = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \implies a+b(X-1)+c(X-1)^2 = 0 \implies cX^2+(b-2c)X+a-b+c = 0$$

$$\implies \begin{cases} c = 0 \\ b - 2c = 0 \\ a - b + c = 0 \end{cases}, \implies \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Par suite, la famille (P_0, P_1, P_2) est libre. Comme $\mathrm{card}(P_0, P_1, P_2) = \dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$, alors la famille (P_0, P_1, P_2) est une base $\mathbb{R}_2[X]$.

5. On a

$$\begin{cases} f(P_0) = (2X+1)P_0 + (1-X^2)P_0' = 2X+1 = 3+2(X-1) = 3P_0 - 2P_1 + 0P_2 \\ f(P_1) = (2X+1)P_1 + (1-X^2)P_1' = X^2 - X = 0 - (X-1) + (X^2-1) = 0P_0 - 1P_1 + 1P_2, \\ f(P_2) = (2X+1)P_2 + (1-X^2)P_2' = 3X^2 + 2X - 2 = 3 + 8(X-1) + 3(X-1)^2 = 3P_0 + 8P_1 + 3P_2 \end{cases}$$

Exercice 3

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On pose

$$u = e_1 + 2e_2 + 2e_2 \text{ et } v = e_2 + e_3.$$

Montrer que la famille $\{u, v\}$ est libre et completer celle-ci en une base de E.

Solution 3

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, on a $\alpha u + \beta v = 0_E \implies \alpha(e_1 + 2e_2 + 2e_3) + \beta(e_2 + e_3) = 0_E \implies \alpha e_1 + (2\alpha + \beta)e_2 + (2\alpha + \beta)e_3 = 0_E$ Comme (e_1, e_2, e_3) est une base de E alors (e_1, e_2, e_3) est une famille libre de E

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ 2\alpha + \beta = 0 \\ 2\alpha + \beta = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

Alors $\{u, v\}$ est une famille libre de E.
La famille (u, v) est libre. D'après le théorème de la base incomplète, on peut la compléter en une base de E. Ici, il suffit d'un seule vecteur (car la famille compte déjà 2 éléments, et on travaille dans un espace de dimension 3), et on va choisir un vecteur parmi les vecteurs de la base E . On prend par exemple ce vecteur c' est e_2 et voyons est ce que (u, v, e_2) est libre si non on prend e_3 ou e_1 (on doit choisir ce vecteur de telle sorte que la nouvelle famille est libre). Alors il faut montrer que (u, v, e_2) est une famille libre, en effet si $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$, tels que $\alpha u + \beta v + \gamma e_2 = 0_E \implies \alpha(e_1 + 2e_2 + 2e_3) + \beta(e_2 + e_3) + \gamma e_2 = 0_E \implies \alpha e_1 + (2\alpha + \beta + \gamma)e_2 + (2\alpha + \beta)e_3 = 0_E$
Comme (e_1, e_2, e_3) est une base de E alors (e_1, e_2, e_3) est une famille libre de E, donc

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ 2\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

cela implique que $\alpha = \beta = \gamma = 0$. On alors (u, v, e_2) est une famille libre. De plus on a $\mathrm{card}(\{u, v, e_2\}) = 3 = \dim(E) = 3$, ainsi $\{u, v, e_2\}$ est une base de E.