Note de l'enseignant :

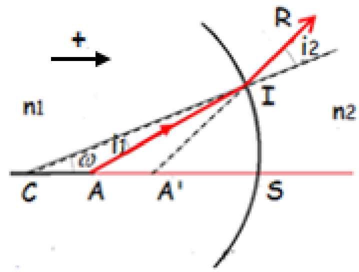
N° Exam : …………….	**Nom Prénom :** ………………………………………………
CNE : ……………………………….	**Filière :** …………………………..

Epreuve d'optique géométrique
Durée : 1h30

23 Mai 2019

Exercice *(5 points)*

On considère un dioptre sphérique **Σ** de sommet ***S*** de centre ***C*** et de rayon de courbure ***R*** **= -** $\overline{SC}$, qui sépare deux milieux transparents d'indices de réfraction n_1 et n_2. Soit un rayon incident quelconque ***AI*** issu d'un point objet ***A***, le rayon réfracté ***IR*** *lui* correspondant coupe l'axe optique en ***A'*** image du point objet ***A***. On pose l'angle $\widehat{ICA} = \omega$ et on note par i_1 et i_2, les angles d'incidence et de réfraction au point ***I***, tels que $i_1 < i_2$.



1- Quelle est la concavité de ce dioptre, convexe ou concave ? Justifier votre réponse.

Dioptre est **concave** ***0,25*** car $\overline{SC} < 0$ ***0,25***

2- Ecrire au point d'incidence I, la relation de Snell Descartes ou de la 2ème loi de la réfraction. Comparer alors n_1 et n_2.

$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$. ***0,25*** On a $i_1 < i_2$. $\Rightarrow$ $n_1 > n_2$. ***0,25***

3- Quelle est alors la nature de ce dioptre, convergent ou divergent ? Justifier votre réponse.

le dioptre est convergent car $\overline{SC}$ et $(n_2 - n_1)$ sont de même signe ou le centre du dioptre est dans le milieu le plus réfringent. ***0,50***

4- En appliquant la relation des sinus aux angles des triangles ***CAI et CA'I***, établir la relation de l'invariant du dioptre pour le couple de points conjugués (***A, A'***).

En appliquant la relation des sinus aux deux triangles *CAI et CA'I*.

$$\frac{\overline{CA}}{\sin i_1} = \frac{\overline{IA}}{\sin\omega} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{CA'}}{\sin i_2} = \frac{\overline{IA'}}{\sin\omega} \quad \Rightarrow \frac{\overline{CA}}{\overline{IA}\sin i_1} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{IA'}\sin i_2}$$ ***0,75***

En tenant compte de $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ $\Rightarrow n_1 \frac{\overline{CA}}{\overline{IA}} = n_2 \frac{\overline{CA'}}{\overline{IA'}}$ qu'on appelle invariant du dioptre

5- Le dioptre est éclairé maintenant dans les conditions de l'approximation de Gauss.

a- Qu'appelle-t-on d'abord les conditions de l'approximation de Gauss.

Rayons faiblement inclinées à l'axe optique ou rayons paraxiaux ***0,25***

b- Ecrire l'invariant du dioptre dans ces conditions.

Les points d'incidence I sont très proches ou très voisins du sommet S (I ≡ S) $\Rightarrow n_1 \dfrac{\overline{CA}}{\overline{SA}} = n_2 \dfrac{\overline{CA'}}{\overline{SA'}}$ **0,25**

c- En déduire la formule de conjugaison du dioptre sphérique origine au sommet *S*.

$$n_1 \frac{\overline{CA}}{\overline{SA}} = n_2 \frac{\overline{CA'}}{\overline{SA'}} \Rightarrow n_1 \frac{\overline{CS}+\overline{SA}}{\overline{SA}} = n_2 \frac{\overline{CS}+\overline{SA'}}{\overline{SA'}} \text{ d'où } n_1\left(1+\frac{\overline{CS}}{\overline{SA}}\right) = n_2\left(1+\frac{\overline{CS}}{\overline{SA'}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{n_1}{\overline{SA}} - \frac{n_2}{\overline{SA'}} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{SC}}$$ **0,50**

d- On désigne par ***F*** et ***F'*** les foyers objet et image de ce dioptre sphérique **Σ**, déterminer alors en fonction de n_1, n_2 et ***R*** ses distances focales objet ***f*** et image ***f'***.

$$f = \overline{SF} = \frac{n_1 R}{n_2 - n_1}$$ **0,25** et $$f' = \overline{SF'} = \frac{-n_2 R}{n_2 - n_1}$$ **0,25**

6- On fait maintenant tendre le rayon de courbure ***R*** du dioptre **Σ** vers l'infini.

a- Quel est le système optique simple ainsi obtenu et que peut-t-on dire de son stigmatisme.

Dioptre plan **0,25** qui n'est pas rigoureusement stigmatique **0,25**

b- Quelles sont alors les nouvelles positions des foyers ***F*** et ***F'***. Qu'appelle-t-on alors ce type de système optique.

Les foyers sont rejetés à l'infini **0,25** le système optique ainsi obtenu (dioptre plan) est afocal. **0,25**

c- Ecrire dans les conditions de l'approximation de Gauss la relation de conjugaison de ce nouveau système optique.

$$\frac{n_1}{\overline{SA}} - \frac{n_2}{\overline{SA'}} = 0 \Rightarrow \frac{n_1}{\overline{SA}} = \frac{n_2}{\overline{SA'}}$$ **0,25**

Problème *(16 points)*

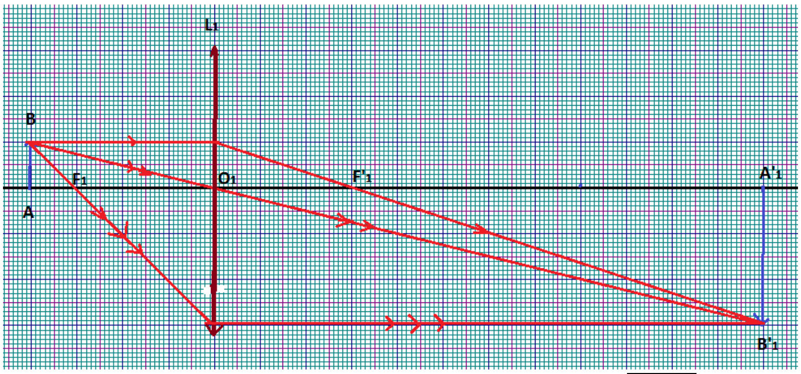
N.B: **Les deux parties *A) et B)* peuvent être traitées indépendamment.**

A)- Une lentille mince convergente L_1, baignée par l'air d'indice **1**, donne d'un objet ***AB*** réel de hauteur 1cm, une image $A'_1B'_1$ **réelle, renversée et trois fois plus grande que l'objet**, située à la distance **d** = $\overline{AA'_1}$ **= 32 cm** de ce dernier.

1- Représenter graphiquement à l'échelle **1cm** sur le papier pour **2 cm** horizontalement et **1cm** sur le papier pour **1 cm** verticalement, l'objet ***AB*** et l'image $A'_1B'_1$ à la distance considérée.

a- En traçant des rayons particuliers, chercher les positions du centre optique O_1 de la lentille et de ses foyers objet et image F_1 et F'_1 et les placer.

0,50



b- Que valent alors les positions de l'objet et de l'image $\overline{O_1A}$ et $\overline{O_1A'_1}$ et les distances focales objet et image $f_1 = \overline{O_1F_1}$ et $f'_1 = \overline{O_1F'_1}$ de cette lentille?

On lit : $\boxed{\overline{O_1A} = -8\text{cm}}$ **0,25** ; $\boxed{\overline{O_1A'_1} = 24\text{ cm}}$ **0,25** ; $\boxed{f_1 = \overline{O_1F_1} = -6\text{ cm}}$ **0,25** ; $\boxed{f'_1 = \overline{O_1F'_1} = 6\text{ cm}}$ **0,25**

2- On se propose maintenant de **retrouver** par calcul les résultats de la question ***1) -b*** tout en s'appuyant sur les données initiales.

a- Rappeler la définition du grandissement noté γ_1. Dans quelles conditions avons-nous $\gamma_1 < 0$ et $|\gamma_1| > 1$?

Le grandissement noté γ_1 : $\boxed{\gamma_1 = \frac{\overline{A'_1B'_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{O_1A'_1}}{\overline{O_1A}}}$ **0,25**

- Si $\gamma_1 < 0$: l'image est **renversée** par rapport à l'objet. **0,25**

- Si $|\gamma_1| > 1$: l'image est **plus grande** que l'objet. **0,25**

b- Calculer le grandissement, puis déduire que $\overline{O_1A}$ a pour expression : $\overline{O_1A} = \frac{\overline{AA'_1}}{\gamma - 1}$. Une démonstration claire est attendue. Calculer ensuite $\overline{O_1A}$.

Le grandissement vaut : $\gamma_1 = -3$

$\gamma_1 = \frac{\overline{O_1A'_1}}{\overline{O_1A}} \Leftrightarrow \frac{\overline{O_1A} + \overline{AA'_1}}{\overline{O_1A}} \Leftrightarrow \gamma_1 \times \overline{O_1A} = \overline{O_1A} + \overline{AA'_1} \Rightarrow (\gamma_1 - 1)\,\overline{O_1A} = \overline{AA'_1} \Rightarrow \boxed{\overline{O_1A} = \frac{\overline{AA'_1}}{\gamma - 1}}$ **1,00**

$\boxed{\overline{O_1A} = -8\text{ cm}}$ **0,25**

c- En déduire la valeur de la distance lentille-image $\overline{O_1A'_1}$.

$\overline{AA'_1} = \overline{AO_1} + \overline{O_1A'_1} = \overline{O_1A'_1} - \overline{O_1A} \Rightarrow \boxed{\overline{O_1A'_1} = \overline{AA'_1} + \overline{O_1A}}$ **0,50** $\boxed{\overline{O_1A'_1} = 24\text{ cm}}$ **0,25**

d- Rappeler la relation de conjugaison d'une lentille mince convergente. Que valent alors par calcul les distances focales objet et image f_1 et f'_1 de cette lentille ?

Formule de conjugaison d'une lentille mince : $\frac{1}{\overline{O_1A'_1}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{f'_1} \Rightarrow f'_1 = \frac{\overline{O_1A} \times \overline{O_1A'_1}}{\overline{O_1A} - \overline{O_1A'_1}} = \frac{-8 \times 24}{-8 - 24} = 6cm$ **0,50**

Les indices des milieux extrêmes sont égaux ce qui implique $\boxed{f_1 = -f'_1 = -6\text{ cm}}$ **0,25**

e- En déduire sa vergence V_1 (expression et sa valeur numérique).

La vergence de la lentille L_1 est $V_1 = \dfrac{1}{f'_1}$ **0,50** **AN :** $V_1 = \dfrac{1}{6.10^{-2}} = 16{,}7\delta$ **0,25**

3-Comparer les résultats obtenus graphiquement et par calcul pour $\overline{O_1A}$, $\overline{O_1A'_1}$, f_1 et f'_1. Dans le cas où vous avez obtenu des écarts, expliquez leurs origines (sources d'erreurs).

Les résultats obtenus par les deux méthodes doivent être égaux ; Si jamais n'il y a des écarts, les sources d'erreurs sont : arrondis de calcul, précision des tracés, épaisseur des traits de crayon. **0,50**

B)- On associe à la lentille L_1 une deuxième lentille mince convergente L_2 de foyers objet et image F_2 et F'_2, de distances focales objet et image f_2 et f'_2 et de centre optique O_2 telle que la distance $\overline{O_1O_2}$ = **e**. L'ensemble du doublet ainsi formé est baigné par l'air d'indice **1** et on désignera par $\Delta = \overline{F'_1F_2}$ l'intervalle optique du doublet. Ce doublet est donc équivalent à un système centré de foyers principaux objet et image F et F', de points principaux objet et image H et H', de points nodaux objet et image N et N' et de distances focales objet et image $f = \overline{HF}$ et $f' = \overline{H'F'}$.

NB: **Dans tout le problème on exprimera f_1 en fonction de f'_1 et f_2 en fonction de f'_2.**

1- Exprimer Δ en fonction de e, f'_1 et f'_2.

$\Delta = \overline{F'_1F_2} = \overline{F'_1O_1} + \overline{O_1O_2} + \overline{O_2F_2} = -f'_1 + e + f_2 = -f'_1 + e - f'_2 \Rightarrow \boxed{\Delta = -f'_1 + e - f'_2}$ **0,50**

2- Déterminer en fonction de Δ et f'_1 la position $\overline{F_1F}$ du foyer principal objet F du système centré équivalent au doublet par rapport à F_1. En déduire l'expression de $\overline{O_1F}$ en fonction de Δ et f'_1

Pour le point focal objet F du doublet, nous considérons le schéma synoptique suivant :

$$F \xrightarrow{L_1} F_2 \xrightarrow{L_2} \text{image à l'infini}$$

F est l'objet qui donne, à travers la première lentille, une image au point focal objet F_2 de la seconde lentille. En utilisant la relation de conjugaison de Newton pour les points F_2 et F, conjugués par L_1 :

$$\overline{F_1F}\;\overline{F'_1F_2} = f_1 \times f'_1 = -f'^2_1 \Rightarrow \boxed{\overline{F_1F} = \frac{f_1 \times f'_1}{\Delta} = \frac{-f'^2_1}{\Delta}}$$ **0,50**

$$\overline{F_1F} = \overline{F_1O_1} + \overline{O_1F} = \frac{-f'^2_1}{\Delta} \Rightarrow \boxed{\overline{O_1F} = -\left(f'_1 + \frac{f'^2_1}{\Delta}\right)}$$ **0,50**

3- Déterminer en fonction de Δ et f'_2 la position $\overline{F'_2F'}$ du foyer principal image F' du système centré équivalent au doublet par rapport à F'_2. En déduire l'expression de $\overline{O_2F'}$ en fonction de Δ et f'_2 .

Pour le point focal image F' du doublet, nous considérons le schéma synoptique suivant :

$$\text{Objet à l'infini} \xrightarrow{L_1} F'_1 \xrightarrow{L_2} F'$$

N° Exam : ....

$\boldsymbol{F'}$ est l'image à travers la seconde lentille du point focal image $\boldsymbol{F'_1}$ de la première lentille. En appliquant la relation de conjugaison de Newton aux points $\boldsymbol{F'_1}$ et $\boldsymbol{F'}$, conjugués par $\boldsymbol{L_2}$:

$$\overline{F_2F'_1}\;\overline{F'_2F'} = f_2 \times f'_2 = -f_2'^2 \Rightarrow \boxed{\overline{F'_2F'} = -\frac{f_2 \times f'_2}{\Delta} = \frac{f_2'^2}{\Delta}}$$ **0,50**

$$\overline{F'_2F'} = \overline{F'_2O_2} + \overline{O_2F'} = \frac{f_2'^2}{\Delta} \Rightarrow \boxed{\overline{O_2F'} = f'_2 + \frac{f_2'^2}{\Delta}}$$ **0,50**

4- Donner les distances focales principales objet et image $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{f'}$ du système centré équivalent au doublet en fonction de $\boldsymbol{f'_1, f'_2}$ et $\boldsymbol{\Delta}$. Conclusion

$$\boxed{f = \frac{f_1 \times f_2}{\Delta} = \frac{f'_1 \times f'_2}{\Delta}}$$ **0,50** et $$\boxed{f' = -\frac{f'_1 \times f'_2}{\Delta}}$$ **0,50**

Conclusion : $\boxed{f' = -f}$ **0,50**

5- Déterminer en fonction de $\boldsymbol{f'_1, f'_2}$ et $\boldsymbol{\Delta}$, la distance $\boldsymbol{\overline{F_1H}}$ donnant la position du point principal objet $\boldsymbol{H}$ du système centré équivalent au doublet par rapport à $\boldsymbol{F_1}$. En déduire l'expression de $\boldsymbol{\overline{O_1H}}$ en fonction de $\boldsymbol{f'_1, f'_2}$ et $\boldsymbol{\Delta}$.

$$\overline{F_1H} = \overline{F_1F} + \overline{FH} = \overline{F_1F} - \overline{HF} = \frac{-f_1'^2}{\Delta} - \frac{f'_1 \times f'_2}{\Delta} = -\frac{f'_1}{\Delta}(f'_1 + f'_2) \Rightarrow \boxed{\overline{F_1H} = -\frac{f'_1}{\Delta}(f'_1 + f'_2)}$$ **0,50**

$$\overline{F_1H} = \overline{F_1O_1} + \overline{O_1H} \Rightarrow \overline{O_1H} = \overline{F_1H} - \overline{F_1O_1} = -\frac{f'_1}{\Delta}(f'_1 + f'_2) + f_1 \Rightarrow \boxed{\overline{O_1H} = -\frac{f'_1}{\Delta}(f'_1 + f'_2) - f'_1}$$ **0,50**

6- Déterminer en fonction de $\boldsymbol{f'_1, f'_2}$ et $\boldsymbol{\Delta}$, la distance $\boldsymbol{\overline{F_2H'}}$ donnant la position du point principal image $\boldsymbol{H'}$ du système centré équivalent au doublet par rapport à $\boldsymbol{F'_2}$. En déduire l'expression $\boldsymbol{\overline{O_2H'}}$ en fonction de $\boldsymbol{f'_1, f'_2}$ et $\boldsymbol{\Delta}$.

$$\overline{F'_2H'} = \overline{F'_2F'} + \overline{F'H'} = \frac{f_2'^2}{\Delta} + \frac{f'_1 \times f'_2}{\Delta} = \frac{f'_2}{\Delta}(f'_1 + f'_2) \Rightarrow \boxed{\overline{F'_2H'} = \frac{f'_2}{\Delta}(f'_1 + f'_2)}$$ **0,50**

$$\overline{F'_2H'} = \overline{F'_2O_2} + \overline{O_2H'} \Rightarrow \overline{O_2H'} = \overline{F'_2H'} - \overline{F'_2O_2} = \frac{f'_2}{\Delta}(f'_1 + f'_2) + f'_2 \Rightarrow \boxed{\overline{O_2H'} = \frac{f'_2}{\Delta}(f'_1 + f'_2) + f'_2}$$ **0,50**

7- En déduire en fonction de $\boldsymbol{f'_1, f'_2}$ et $\boldsymbol{\Delta}$, les distances $\boldsymbol{\overline{O_1N}}$ et $\boldsymbol{\overline{O_2N'}}$ donnant les positions des points nodaux objet $\boldsymbol{N}$ et image $\boldsymbol{N'}$ du système centré équivalent au doublet, respectivement par rapport à $\boldsymbol{O_1}$ et $\boldsymbol{O_2}$.

Les indices des milieux extrêmes sont identiques ⇒ Les points nodaux sont confondus avec les points principaux : $N \equiv H$ et $N' \equiv H'$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{O_1N} = \overline{O_1H} = -\frac{f'_1}{\Delta}(f'_1 + f'_2) - f'_1}$$ **0,50** et $$\boxed{\overline{O_2N'} = \overline{O_2H'} = \frac{f'_2}{\Delta}(f'_1 + f'_2) + f'_2}$$ **0,50**

8- Applications numériques : On considère que le doublet ainsi formé est de symbole ***(3, 2, 3)*** et on donne $\boldsymbol{f'_2}$ **= 6 cm**.

a- Calculer en cm les valeurs de Δ, $\overline{O_1F}$, $\overline{O_2F'}$, $\overline{O_1H}$ et $\overline{O_2H'}$.

$\Delta = -f'_1 + e - f'_2 = -6 + 4 - 6 = -8$ cm $\Rightarrow$ $\boxed{\Delta = -8 \text{ cm}}$ **0,25**

$\overline{O_1F} = -\left(f'_1 + \frac{f'^2_1}{\Delta}\right) = -\left(6 + \frac{36}{-8}\right) = -1,5$ cm $\Rightarrow$ $\boxed{\overline{O_1F} = -1,5 \text{ cm}}$ **0,25**

$\overline{O_2F'} = f'_2 + \frac{f'^2_2}{\Delta} = 6 + \frac{36}{-8} = 1,5$ cm $\Rightarrow$ $\boxed{\overline{O_2F'} = 1,5 \text{ cm}}$ **0,25**

$\overline{O_1H} = -\frac{f'_1}{\Delta}(f'_1 + f'_2) - f'_1 = \frac{6}{8} \times 12 - 6 = 3$ cm $\Rightarrow$ $\boxed{\overline{O_1H} = 3 \text{ cm}}$ **0,25**

$\overline{O_2H'} = \frac{f'_2}{\Delta}(f'_1 + f'_2) + f'_2 = -\frac{6}{8} \times 12 + 6 = -3$m $\Rightarrow$ $\boxed{\overline{O_2H'} = -3 \text{ cm}}$ **0,25**

a- Quelles sont la hauteur et la position par rapport ***O₂***, de l'image définitive $\boldsymbol{A'_2B'_2}$ de l'objet ***AB***, ainsi obtenue par le doublet.

$$\boldsymbol{AB} \xrightarrow{L_1(O_1)} \boldsymbol{A'_1B'_1} \xrightarrow{L_2(O_2)} \boldsymbol{A'_2B'_2}$$

Nous avons donc calculé : $\overline{O_1A} = -8$ cm et $\overline{O_1A'_1} = 24$ cm

Avec $\overline{O_2A'_1} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1A'_1} = -4 + 24 = 20$ cm, il vient pour les points A'_1, A'_2 conjugués à travers L₂ :

$$\frac{1}{\overline{O_2A'_2}} - \frac{1}{\overline{O_2A'_1}} = \frac{1}{f'_2}$$

Soit : $\overline{O_2A'_2} = \frac{f'_2 \times \overline{O_2A'_1}}{f'_2 + \overline{O_2A'_1}} = \frac{6 \times 20}{6 + 20} = 4,615$ cm $\Rightarrow$ $\boxed{\overline{O_2A'_2} = 4,615 \text{ cm}}$ **0,50**

$\gamma = \frac{\overline{A'_2B'_2}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{O_1A'_1}}{\overline{O_1A}} \times \frac{\overline{O_2A'_2}}{\overline{O_2A'_1}} = \frac{24 \times 4,615}{(-8) \times 20} = 0,692$ $\Rightarrow \overline{A'_2B'_2} = 0,692 \times \overline{AB} = 0,692$ cm. $\boxed{\overline{A'_2B'_2} = 0,692 \text{ cm}}$ **0,50**

9- Tracer le rayon émergent correspondant à un rayon incident parallèle à l'axe optique et retrouver graphiquement, à l'échelle unité (**1cm → 1cm**), les positions du foyer principal image ***F'*** et du point principal image ***H'*** du système centré équivalent au doublet.

0,50