

1 Теоретическая часть

Пусть на отрезке $[a, b]$ заданы точки $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Набор функций

$$\alpha_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x - x_j), \quad i = 0, \dots, n,$$

образует базис в пространстве $\mathcal{P}_n[a, b]$ многочленов степени n , заданных на отрезке $[a, b]$. Набор функций

$$\Phi_i(x) = \frac{\alpha_i(x)}{\alpha_i(x_i)}, \quad i = 0, \dots, n, \quad (\text{I})$$

также является базисом и удовлетворяет условиям

$$\Phi_i(x_j) = \begin{cases} 0, & j \neq i \\ 1, & j = i \end{cases}, \quad i = 0, \dots, n.$$

Пусть $g : \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \rightarrow \mathbb{R}$ — некоторая функция. Интерполяционным многочленом Лагранжа функции g называется линейная комбинация функций (I) следующего вида:

$$L_n(x) = g(x_0) \cdot \Phi_0(x) + g(x_1) \cdot \Phi_1(x) + \dots + g(x_n) \cdot \Phi_n(x) \quad (\text{II})$$

Функция $L_n(x)$ является полиномом степени n и $L_n(x_i) = g(x_i)$, $i = 0, \dots, n$. Точки x_0, x_1, \dots, x_n называются узлами интерполяции. Если $g = f|_{\{x_0, x_1, \dots, x_n\}}$, где $f \in C^{n+1}[a, b]$, то $L_n(x)$ имеет вид

$$L_n(x) = f(x_0) \cdot \Phi_0(x) + f(x_1) \cdot \Phi_1(x) + \dots + f(x_n) \cdot \Phi_n(x) \quad (\text{III})$$

— интерполяционная формула Лагранжа. Остаточный член интерполяционной формулы Лагранжа имеет вид:

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i), \quad (\text{III})$$

где ξ — некоторая точка отрезка $[a, b]$, и оценивается выражением

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max_{[a,b]} \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n \max_{[a,b]} |x - x_i|, \quad (\text{V})$$

где $M_{n+1} = \max_{[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$.

2 Задания

Задание 1. Построить интерполяционный многочлен для таблично заданной функции и составить таблицу его значений на $[a, b]$ с шагом $h = 0.1 (b - a)$.

1.

x	0	2	3	5
$f(x)$	2.1	3.3	4.5	1.4

2.

x	0	2	3	5
$f(x)$	1.9	6.6	4.3	6.5

3.

x	0	2	3	5
$f(x)$	2.1	3.3	4.5	1.4

4.

x	3	7	9	10
$f(x)$	1.9	6.6	4.3	6.5

5.

x	3	7	9	10
$f(x)$	5.5	6.7	7.9	9.1

6.

x	-3	-1	0	4
$f(x)$	2.1	3.3	4.5	1.4

7.

x	-3	-1	0	4
$f(x)$	1.9	6.6	4.3	6.5

8.

x	-3	-1	0	4
$f(x)$	5.5	6.7	7.9	9.1

9.

x	-2	0	1	4
$f(x)$	2.1	3.3	4.5	1.4

10.

x	-2	0	1	
$f(x)$	1.9	6.6	4.3	6.5

11.

x	0	2	3	5
$f(x)$	1.9	6.6	4.3	6.5

12.

x	0	2	3	5
$f(x)$	2.1	3.3	4.5	1.4

13.

x	0	2	3	5
$f(x)$	5.5	6.7	7.9	9.1

14.

x	3	7	9	10
$f(x)$	5.5	6.7	7.9	9.1

15.

x	3	7	9	10
$f(x)$	1.9	6.6	4.3	6.5

16.

x	-3	-1	0	4
$f(x)$	1.9	6.6	4.3	6.5

17.

x	-3	-1	0	4
$f(x)$	1.9	6.6	4.3	6.5

18.

x	-3	-1	0	4
$f(x)$	5.5	6.7	7.9	9.1

19.

x	-2	0	1	4
$f(x)$	1.9	6.6	4.3	6.5

20.

x	-2	0	1	4
$f(x)$	2.1	3.3	4.5	1.4

Задание 2. Для функции $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$:

- составить интерполяционный многочлен Лагранжа L_1 (полагая $x_0 = a$, $x_1 = b$) и L_2 (полагая $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = b$)
- составить таблицу значений функций f , L_1 , L_2 на $[a, b]$ с шагом $h = 0.1(b - a)$ следующего вида:

x	...
$f(x)$...
$L_1(x)$...
$L_2(x)$...

На основании данных в таблице получить значение $\max |f(x) - L_1(x)|$, $\max |f(x) - L_2(x)|$ и сравнить с оценкой (V).

	$f(x)$	$[a, b]$
1	$\sin x$	$[0, \pi/2]$
2	$\lg x$	$[1, 10]$
3	$\ln x$	$[1, e]$
4	$\operatorname{tg} x$	$[0, \pi/4]$
5	$\operatorname{arctg} x$	$[0, 1]$
6	$\operatorname{sh} x$	$[0, 1]$
7	$\sin x$	$[0, \pi/4]$
8	$\lg x$	$[1, 100]$
9	$\ln x$	$[1, e^2]$
10	$\operatorname{sh} x$	$[0, 5]$
11	$\cos x$	$[0, \pi/2]$
12	$\lg x$	$[1, 1000]$
13	$\operatorname{ch} x$	$[0, 1]$
14	$\operatorname{th} x$	$[0, 5]$
15	$\cos x$	$[0, \pi/4]$
16	$\lg x$	$[1, 10000]$
17	$\ln x$	$[1, e^4]$
18	$\operatorname{ch} x$	$[0, 5]$
19	$\operatorname{th} x$	$[0, 5]$
20	$\operatorname{sh} x$	$[0, 1]$