LABYRINTHES

- Journée Régionale 2010
- APMEP-Lorraine

- Sylvie BAUD-STEF (Ecole élémentaire Jean Moulin, Champigneulles (la prof)
- André STEF (Faculté des Sciences UHP) (le mathématicien)

- Travail en classe de CM1/CM2 (2007/2008, 2008/2009)
- Travail en licence pluridisciplinaire (L3)
- Exposés d’étudiants en licence pluridisciplinaire

Travail en cycle 3: des maths autrement

- Rencontres entre une classe et un mathématicien
- Faire chercher les élèves avec un chercheur
  - Jeux de Nim (ex: Fort Boyard)
  - Les tours de Hanoï
  - Les ponts de Königsberg (chemins eulériens)
  - Manipulation des objets mathématiques de l’APMEP
  - Les labyrinthes

Plan

- 1. Parcourir un labyrinthe
- 2. Trouver la sortie d’un labyrinthe
- 3. Construire un labyrinthe

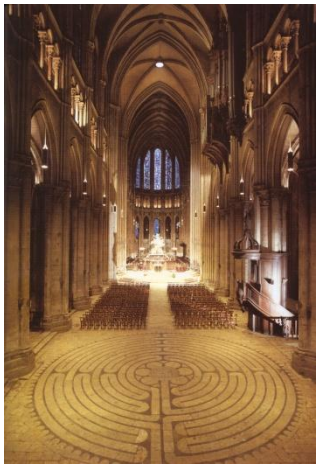
0. Qu’est ce qu’un labyrinthe ?

- Question posée à des élèves de cycle 3:
- De nombreuses réponses
- …..

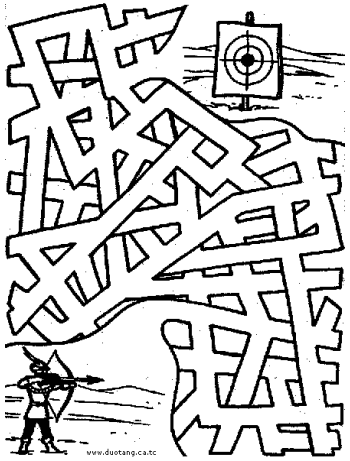
Des réponses des élèves

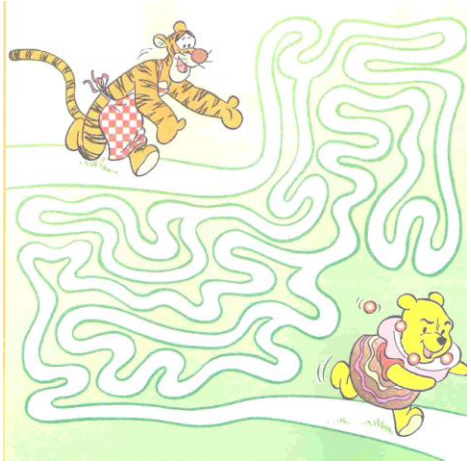
- Murs, bois , haie, miroirs (fête foraine),…
- Tunnel
- Impasse, intersections
- Jeux, labyrinthes géants, labyrinthe d’Alice
- Monstres
- Minotaure, fil d’Ariane

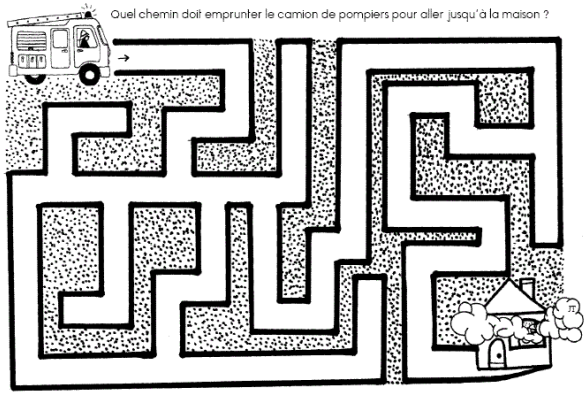
Exemples

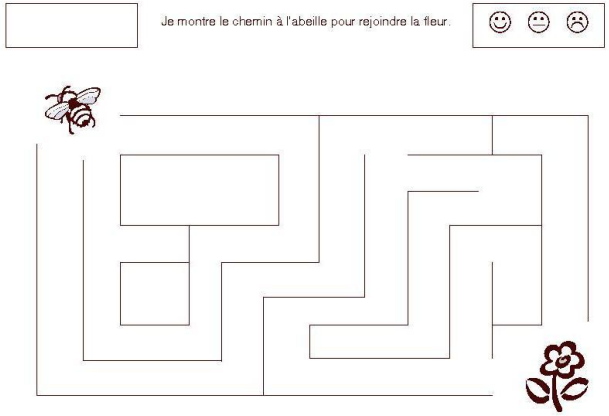


Autres exemples





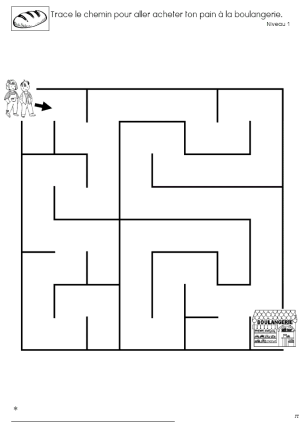




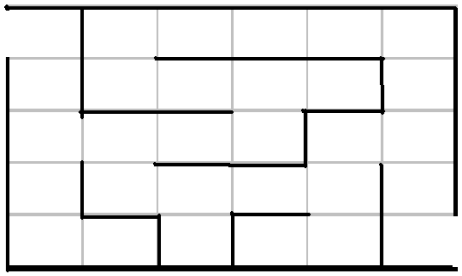
Autres types

- Mythologique (LE Labyrinthe)
- Plan d’une ville, plan des lignes de bus, métro,…
- La marelle
- Des lignes sur le sol

Complexité d’un labyrinthe

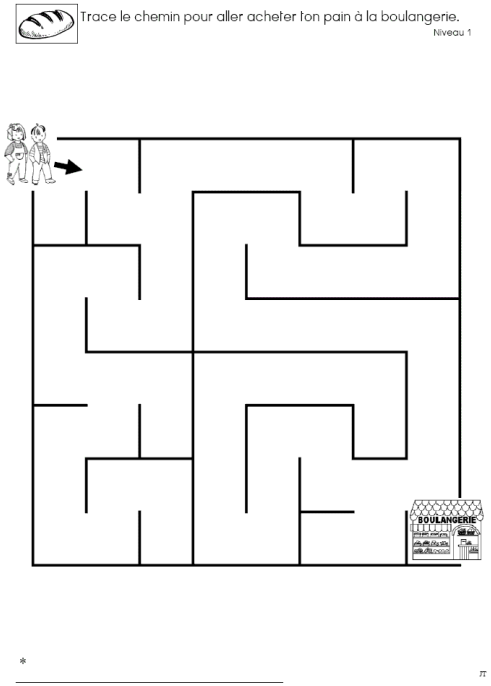


- Un chemin unique,
- Quitte à revenir sur ses pas
- labyrinthe simplement connexe



- Chemins multiples pour arriver à la sortie
- On peut s’y perdre !

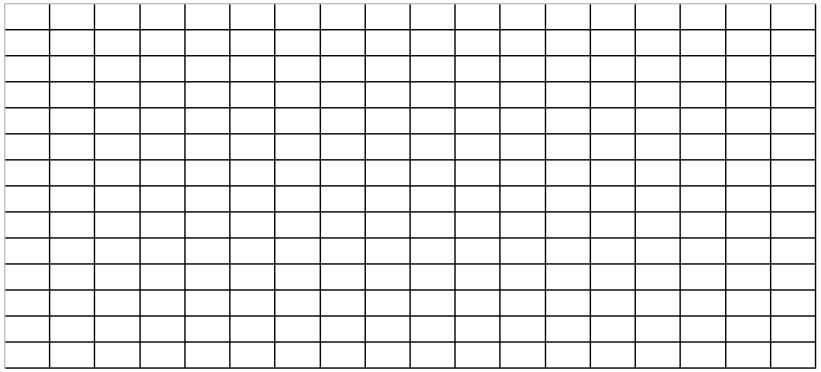
Travail en classe: des labyrinthes sympathiques



- Un rectangle
- Des murs à angle droit (deux directions de mur) et sans épaisseur
- Tout le rectangle est utilisé
- Une entrée
- Une sortie

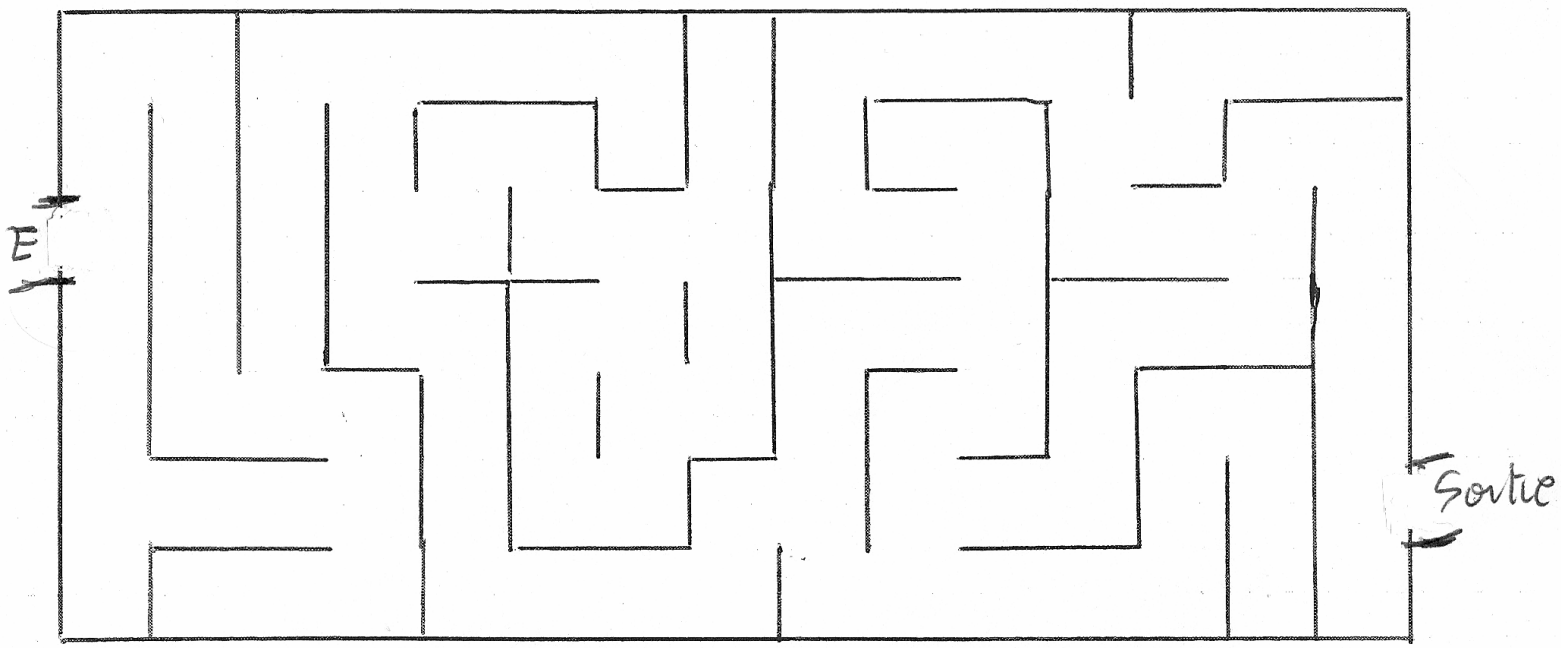
Les élèves sont invités à dessiner des labyrinthes (première tentative)

Travail en classe: une simplification



- Une feuille quadrillée
- Un réseau de points
- Les murs sont choisis parmi les segments reliant les points du réseau

1. Soit donc un labyrinthe !



Description d’un parcours, sur feuille

- Chaque élève possède un plan du labyrinthe
- Question posée aux élèves: décrire le chemin vers la sortie au moyen des 3 lettres suivantes:
- T avancer d’une « case » tout droit
- G tourner d’un quart de tour sur la gauche et avancer d’une « case »
- D tourner d’un quart de tour sur la droite et avancer d’une « case »
- La description du parcours est une suite de ces 3 lettres

Le Codage

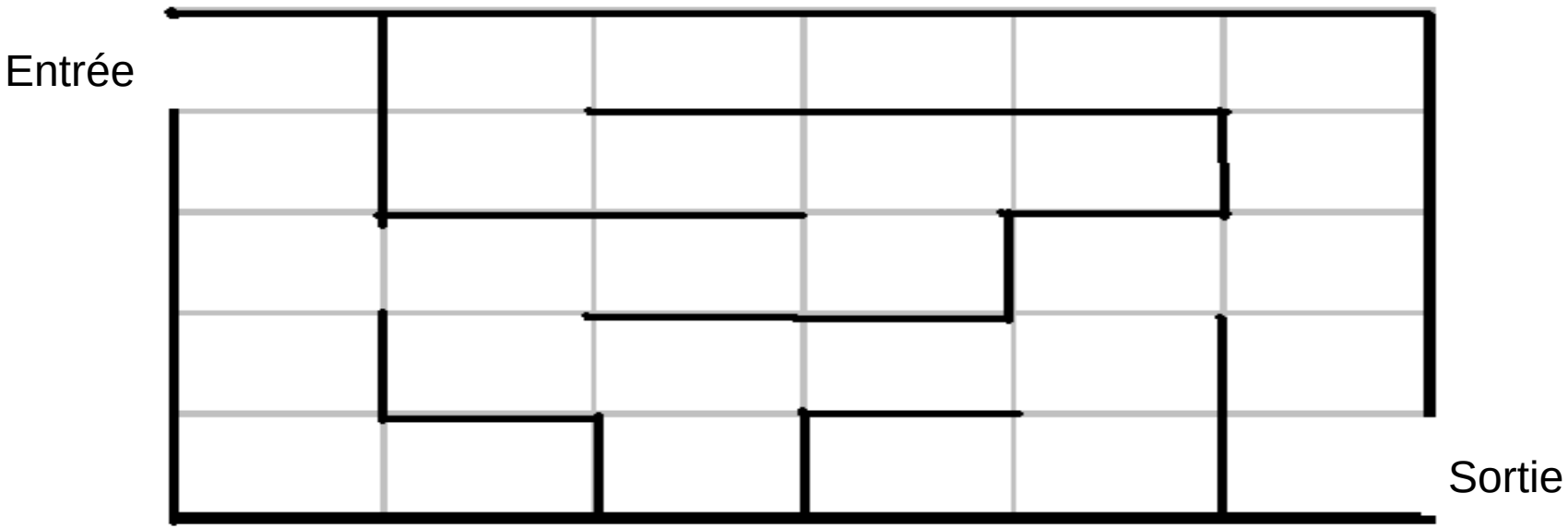
Le codage (suite)

- Pour valider le codage, testons le …
- … EN GRAND !

- Chaque élève prend son code et se rend sous le préau

La vérification du code

A vous de coder !



On commence par T: on entre dans le labyrinthe tout droit passant de la ligne entrée à la première case en haut à gauche du labyrinthe

Remarque

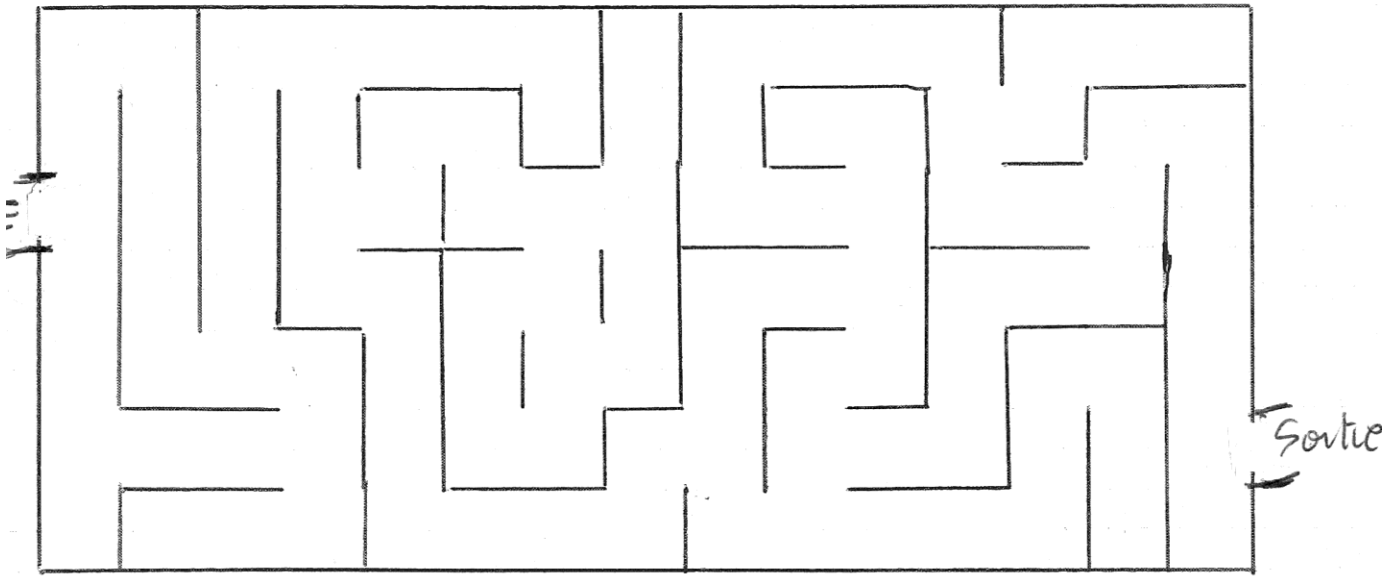
- Les directions ne sont pas fixes.
- Il est plus difficile de se repérer ainsi que d’indiquer comme référence les bords de la feuille (haut, bas, droite, gauche)

Autres expérimentations

- Testé avec les étudiants de licence pluridisciplinaire scientifique
  - Guider un étudiant (obéissant) dans le labyrinthe avec les référence T,D,G (ses références), en regardant l'étudiant
  - Idem mais celui qui guide le fait en lisant le plan, sans regarder le labyrinthe (problème de représentation de la position, semblable à la situation du codage)

2. Trouver la sortie d’un labyrinthe (quand on vient d’y entrer)

- Algorithme de la main droite
  - On colle sa main droite sur le mur à droite
  - On avance sans lâcher le mur
  - On arrive « forcément » à la sortie !



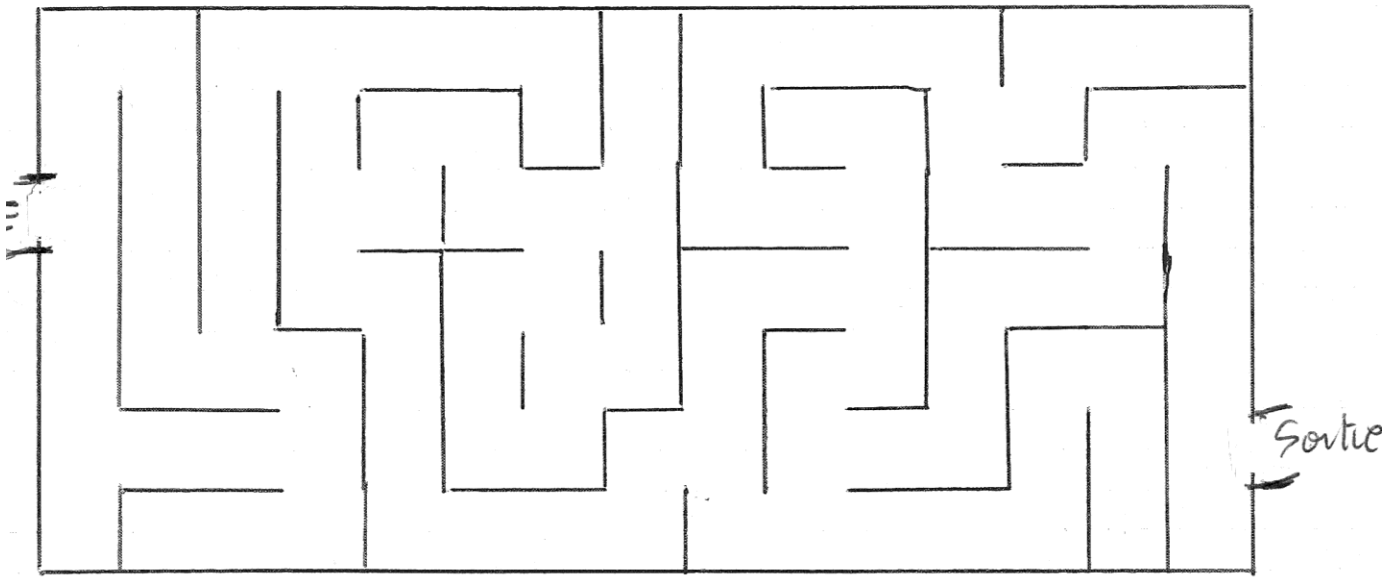
Explication

- Le mur que l’on suit à la main est le mur extérieur !
- On le parcourt certes de l’intérieur du labyrinthe,
- mais en le longeant, on va trouver le côté extérieur du mur ! (cqfd)

- Variation: algorithme de la main gauche!
- MAIS ne pas alterner les mains !

Trouver la sortie quand on est déjà « au milieu » du labyrinthe

- Problème: le mur à côté de soi est-il le mur extérieur ? Si ce n’est pas le cas on peut tourner « en rond » !



Trouver la sortie (suite)

- Trouver la sortie quand on est à l’intérieur du labyrinthe revient à être en mesure d’explorer tout le labyrinthe. En effet la sortie peut être n’importe où !
- Savoir trouver un trésor dans un labyrinthe revient à être en mesure d’explorer tout le labyrinthe

COROLLAIRE

- Le fil d'Ariane seul ne permet pas de trouver le minotaure!
- Il faut (de plus) un algorithme de parcours du labyrinthe!
- SAUF QUE: on peut faire l'hypothèse que c'est le minotaure qui a trouvé Thésée. Une fois le monstre tué, il lui suffisait de suivre le fil pour sortir.

Algorithmes de sortie

- Il existe des méthodes pour sortir d'un labyrinthe, même si on y est *a priori* perdu.
- Ces méthodes peuvent à la rigueur être décrites en cycle 3, mais il n'est pas question de les justifier

Algorithme de Gaston Tarry (1895)

- On parcourt chaque couloir exactement deux fois dans chaque sens, en mettant une marque à l’entrée dans le couloir et à la sortie
- A chaque carrefour, on s’impose de ne reprendre le couloir de découverte du carrefour qu’en dernier recours

Algorithme de Trémeaux

- Comme pour l’algorithme de Tarry, on marquera de même le couloir à l’entrée et à la sortie chaque fois qu’on l’emprunte.
- On emprunte une voie quelconque. Si on aboutit à une impasse on revient sur ses pas.
- Si on arrive à un carrefour déjà exploré par une voie nouvelle, on revient sur ses pas (ce qui revient à condamner cette voie)
- Si on arrive à un carrefour déjà exploré par une voie déjà parcourue dans l’autre sens on choisit en priorité une voie nouvelle, sinon une voie parcourue dans un seul sens.

Méthode d’Oystein Ore

Il s’agit de parcourir le labyrinthe en profondeur

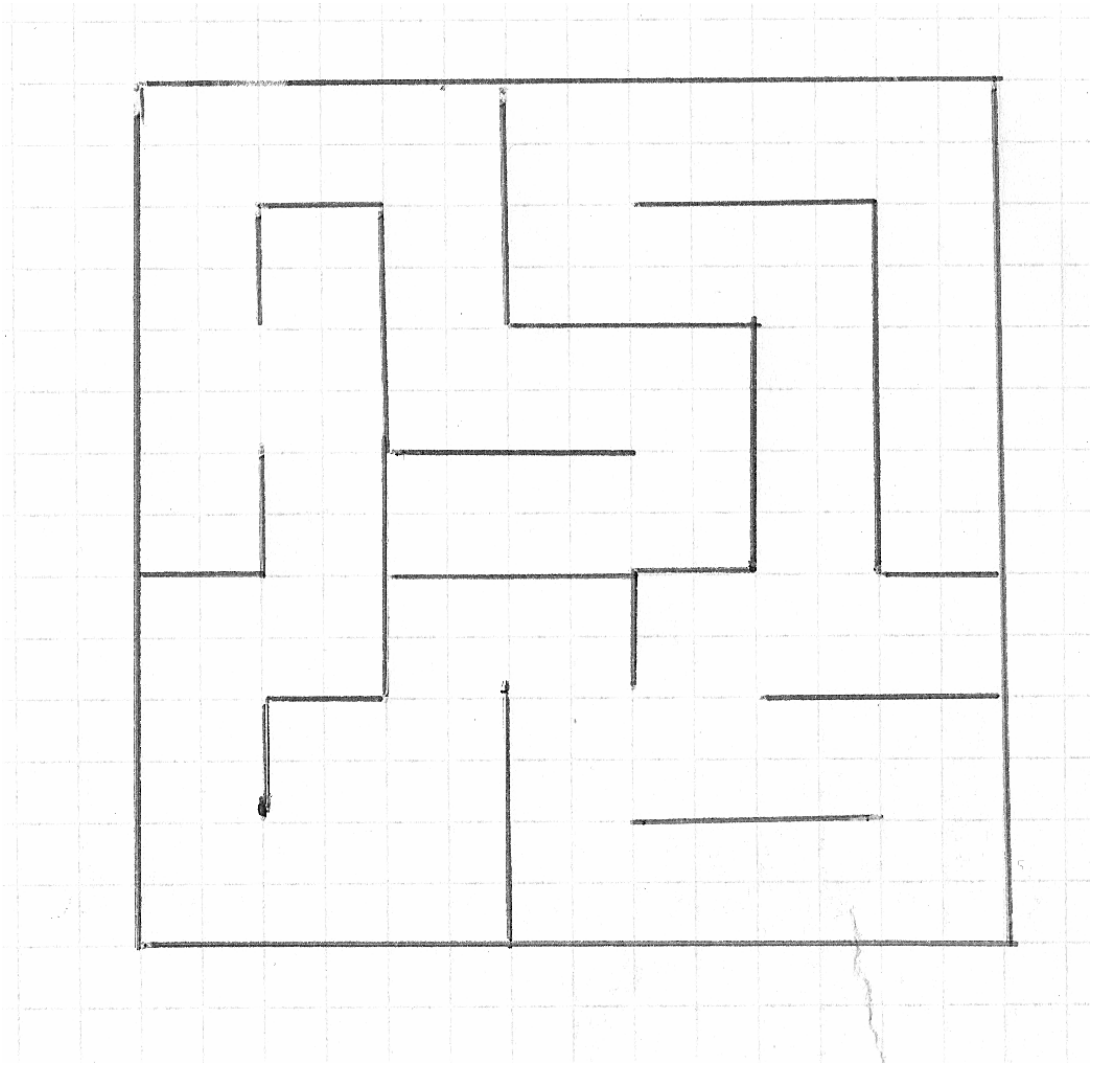
On code 1 les carrefours situé à un couloir du point de départ

On code 2 les carrefours situé à un couloir du d’un carrefour codé 1 (donc à deux couloirs du point de départ)

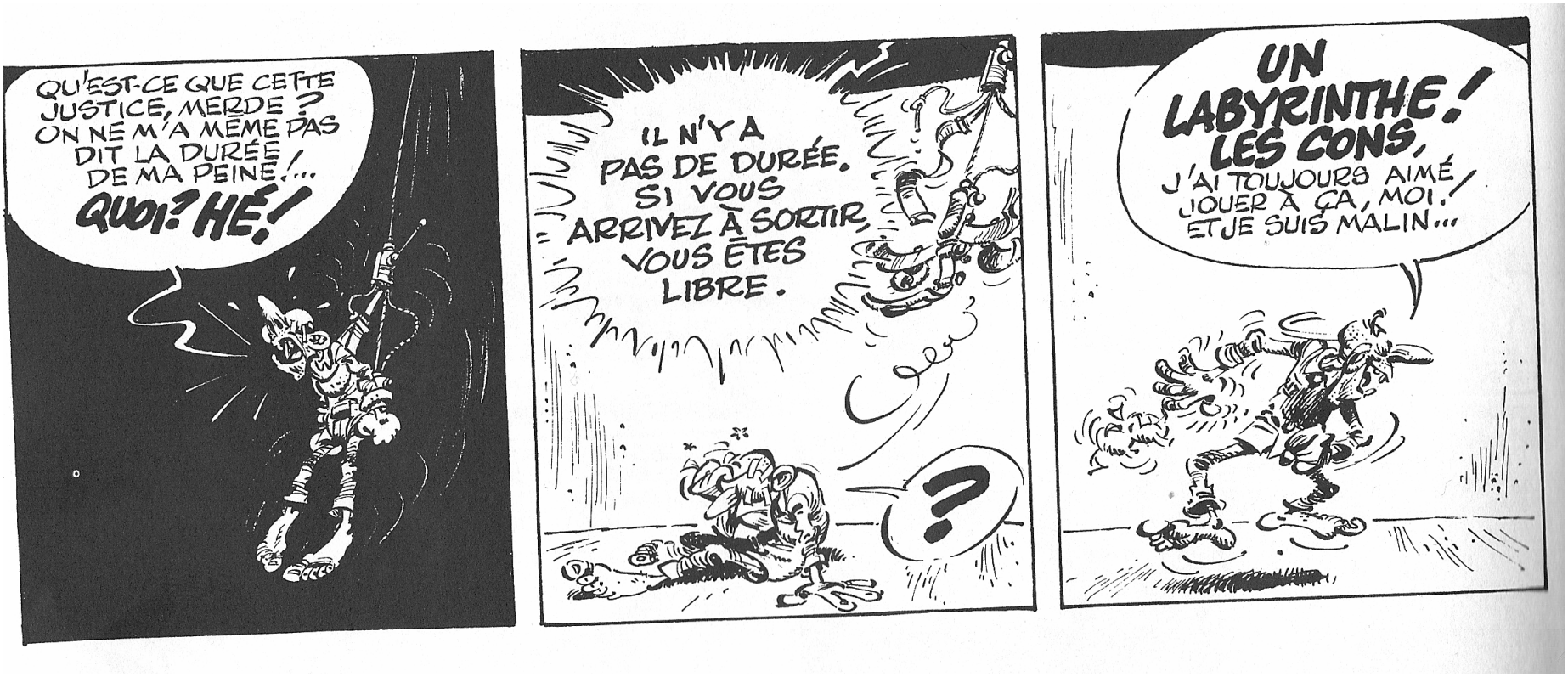
Etc …

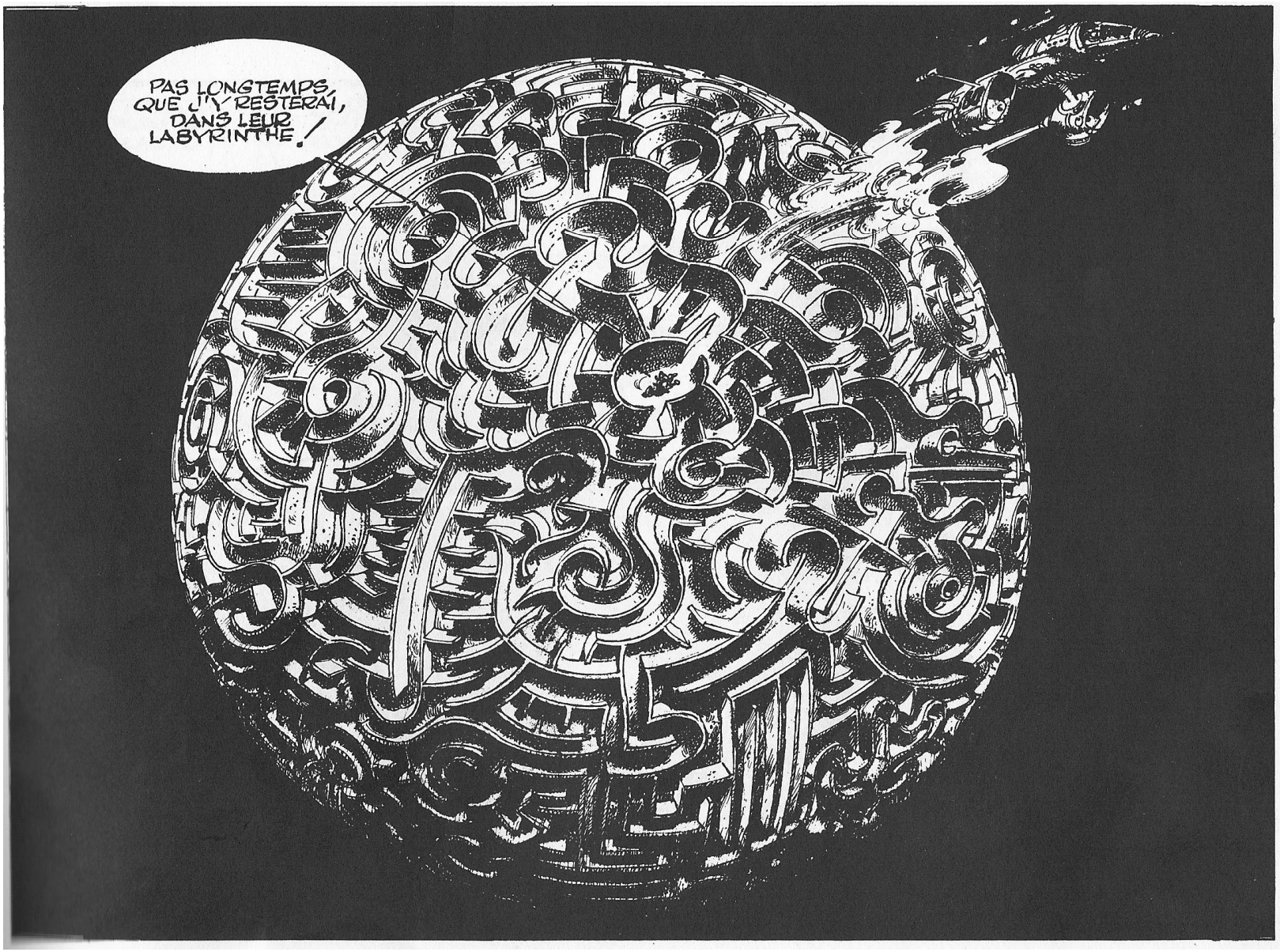
De cette manière tout est parcouru et codé.

Méthode d’Oystein Ore (exemple)



APPLICATION ?

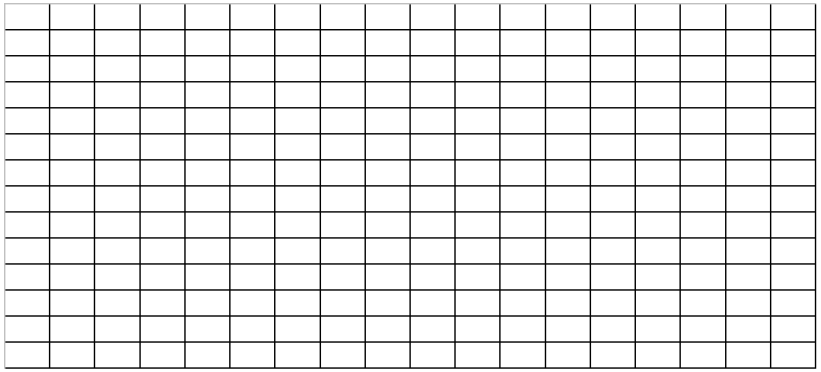



PAS LONGTEMPS, QUE J'Y RESTERAI, DANS LEUR LABYRINTHE !

3. Construction d’un labyrinthe

- Le premier labyrinthe construit sous le préau a été utilisé par les élèves pour apprivoiser les notions de parcours, de taille d’un labyrinthe.
- Il a alors été proposé aux élèves de construire leur propre labyrinthe (celui de toute la classe)

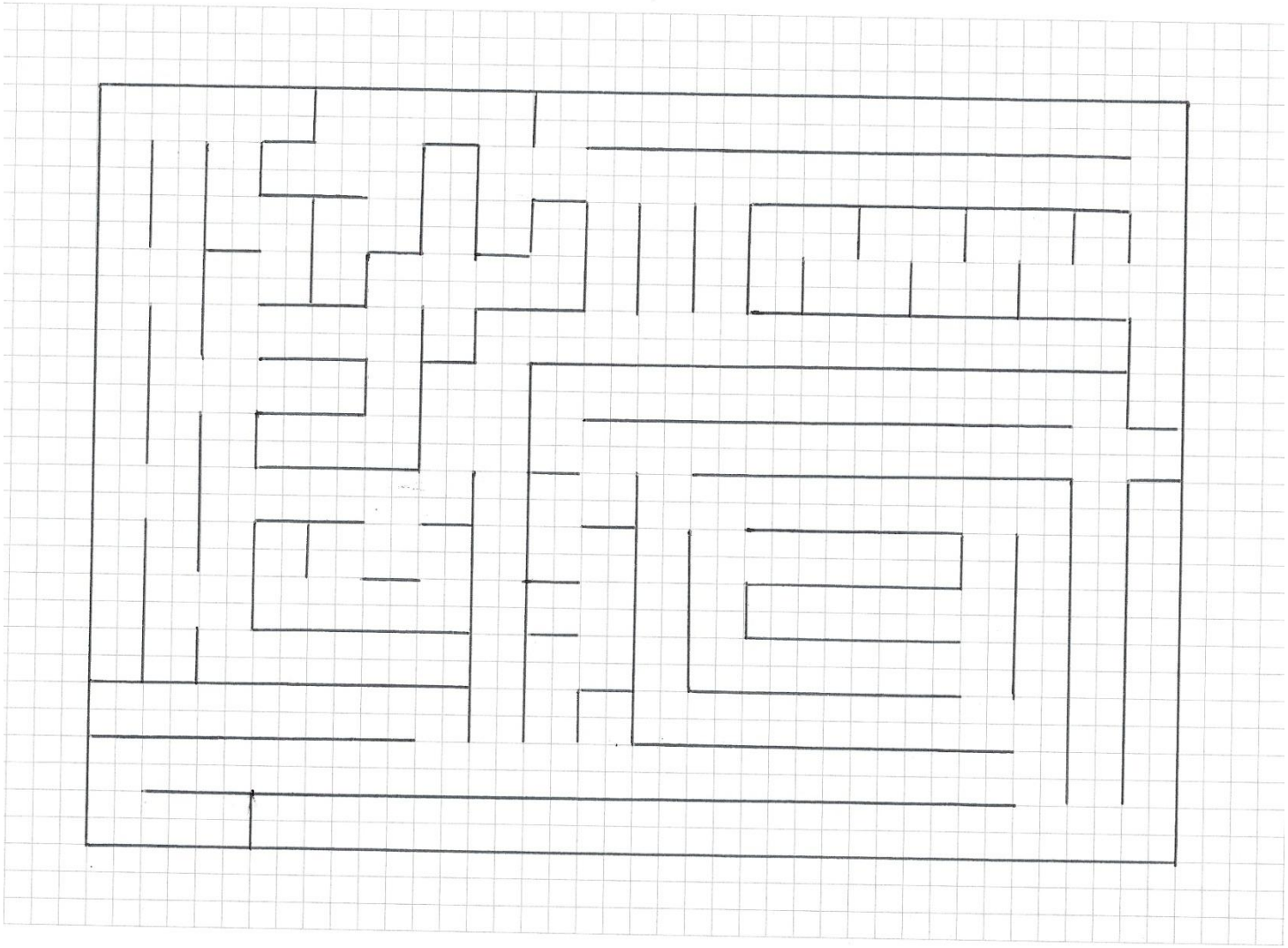
Travail des élèves:



- Une feuille quadrillée
- Un réseau
- Les murs sont choisis parmi les segments reliant les points du réseau

Les élèves sont chargés de réaliser un labyrinthe de 20x14 cases sur une feuille quadrillée.
NB: une case « fait » 2x2 carrés.
Un « jury » composé de l’enseignante et du chercheur sélectionnent un labyrinthe

Le labyrinthe choisi



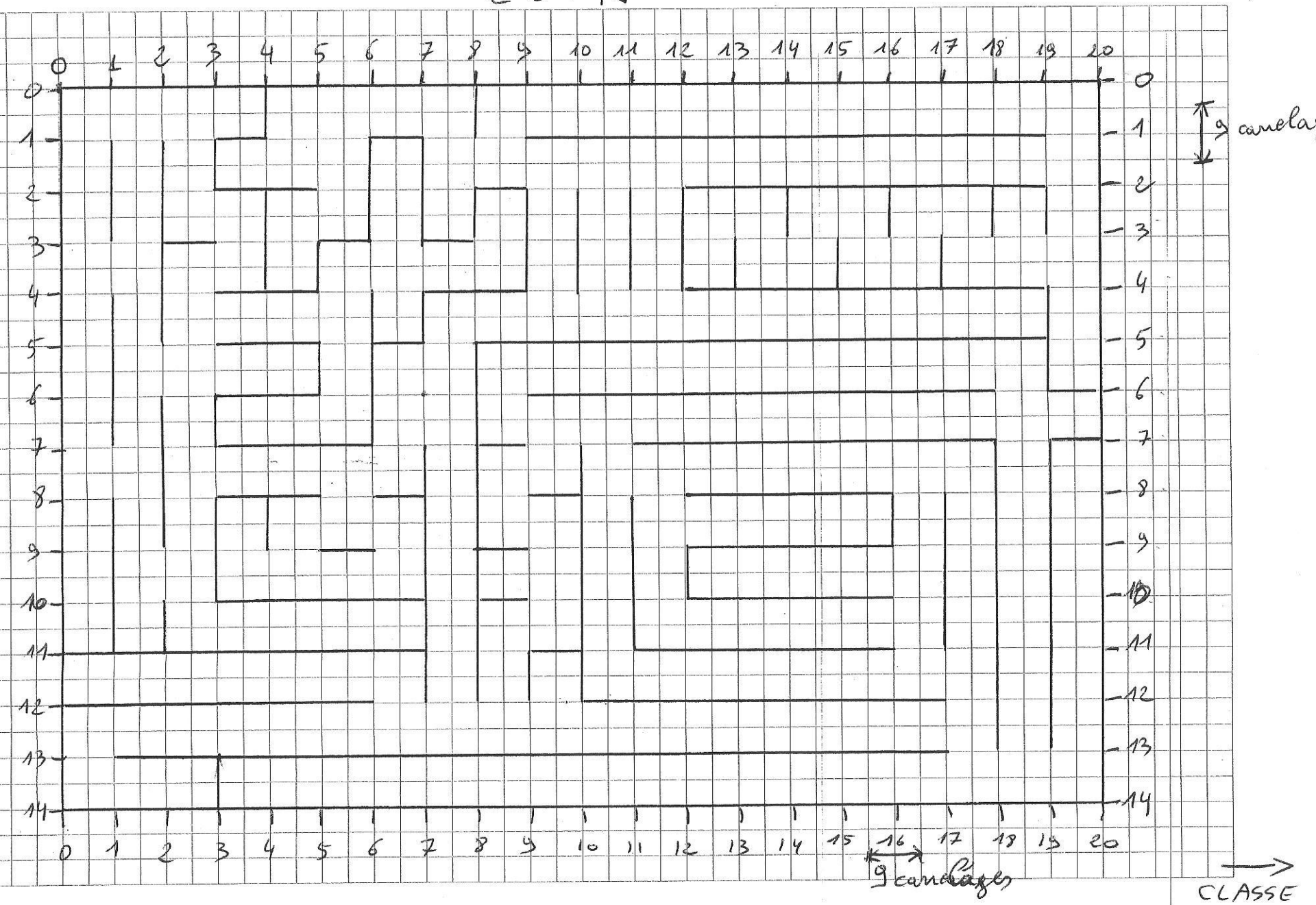
Taille du labyrinthe

- Deux types de tailles
  - Le nombre de « cases » pour le plan
    - Choix 20 sur 14 (380 cases)
  - La taille sur le sol
    - Longueur 10 m
    - Donc largeur= ? (réponse 7m)

Le Sol:

- Le sol du préau est carrelé (petits carreaux)
- Avantage: Des angles droits marqués !
- 50 cm = environ 9 carreaux (un peu moins)
- Choix en classe: on va donc considérer que les cases du labyrinthe font 9x9 carreaux sur le sol
- Notions mathématiques en jeu: plan, échelle, agrandissement, la division

COUR


0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
9 carreaux
9 carreaux
CLASSE

Travail de préparation

- Les élèves réalisent un réseau de « points » (matérialisés par des bouchons) éloignés les uns des autres de 9 carreaux de carrelage
- Comme il manque des bouchons, on réutilisera des bouchons libérés par la construction
- Prévoir des rouleaux adhésifs

C’est parti !

Premier tracé: le contour

Construction des autres murs

- Les points du réseaux servent à délimiter les extrémités des murs
- Il faut en permanence se référer au plan

- Les élèves proposent l’emplacement d’un mur
- L’enseignant valide

Pour mieux comprendre: travail des étudiants de licence

Les monstres (et les gentils)

- Lorsque l’on passe devant une feuille cachée, on la retourne.
- Si la feuille retournée est un monstre, on retourne au départ.
- Si la feuille retournée montre un personnage gentil, on peut continuer.

Durée de Vie

- Le labyrinthe est resté exposé dans le préau une semaine, à l’usage des élèves de l’école et du périscolaire.
- L’adhésif est décollé très facilement.
- Au milieu de la semaine, quelques murs ont été déplacés (volontairement et vicieusement par le matheux), ce qui a grandement modifié les parcours.

Objectif nouveau pour juin 2010

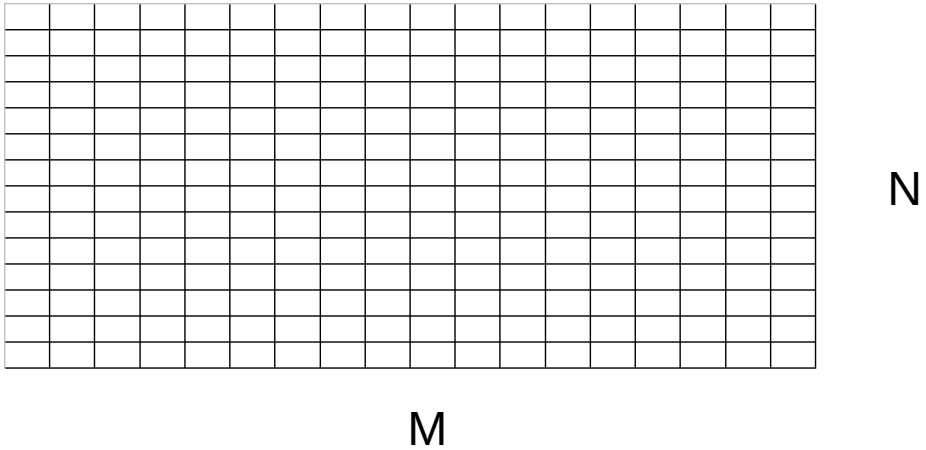
- Réaliser le labyrinthe sur un ancien terrain de foot
- Contraintes:
  - trouver un nouveau mode de tracé (marquage blanc de terrain ? Piquets ?)
  - Trouver la manière de se repérer pour tracer les murs et construire des angles droits
- Solutions: à discuter avec un nouvel acteur: les services techniques de la ville

N’avons-nous pas oublié quelque chose ?

- Ben oui, quelle est la longueur d’adhésif nécessaire ? (la question a été posée avant la réalisation, mais on la garde pour la fin car il y a des formules de math)

Soit donc un labyrinthe MxN

- C ’est à dire un réseau le longueur M (unités) et de largeur N (unités) (donc avec MN cases)



Quelle est la longueur des murs avant qu’on les « casse » pour construire un labyrinthe ?

Calcul de la longueur totale

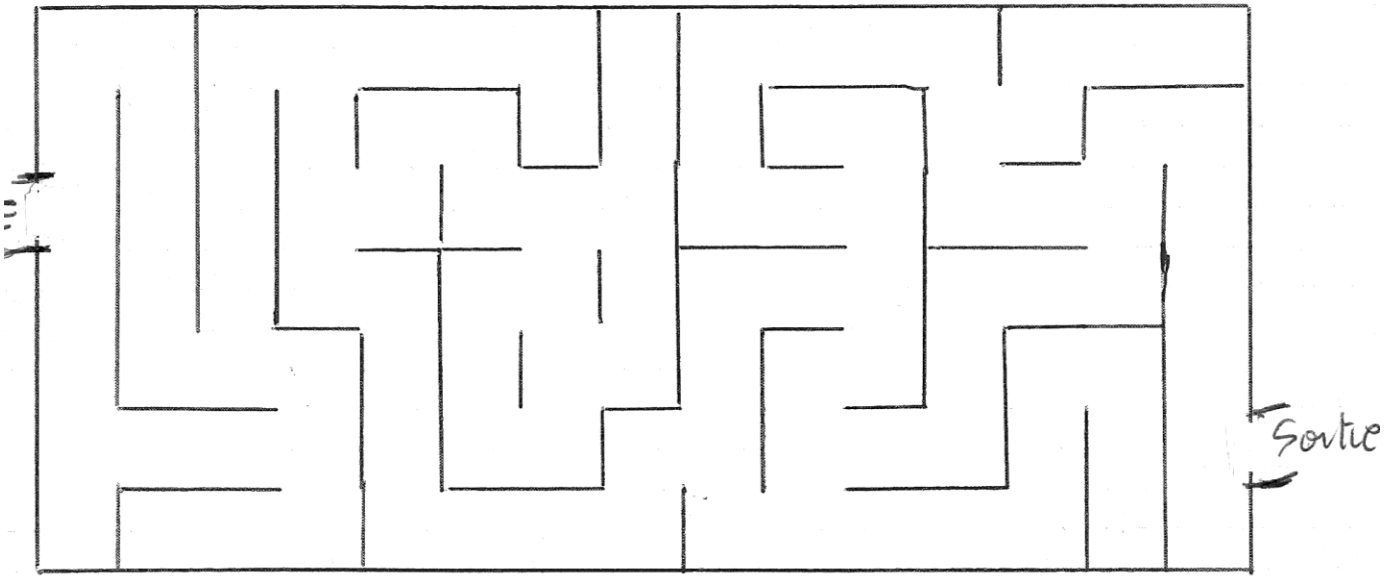
- Longueur d’un ligne horizontale: M
- Nombre de lignes horizontales: N+1
- Longueur des lignes horizontales: M(N+1)= MN+M
- Longueur d’un ligne verticale: N
- Nombre de lignes verticales: M+1
- Longueur des lignes verticales: NM+N=
- Longueur totale (somme): 2NM+M+N

Calcul (suite)

- Raisonnons: chaque case a, au moins, une ouverture vers le labyrinthe. Et il y a MN cases
- Donc la longueur totale des murs du labyrinthe est au plus MN+M+N unités

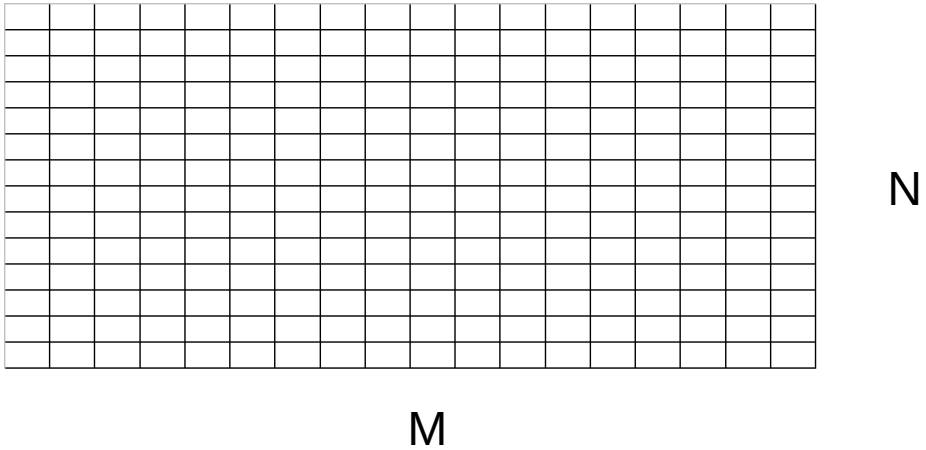
Mais le raisonnement est faux

- Comment identifier le mur supprimé associé à telle ou telle case? (un mur étant mitoyen, doit-on associer un mur différent à chaque case ?)



Reprenons

- On part d’un réseau complet avec MN zones isolées (il y a des murs partout)

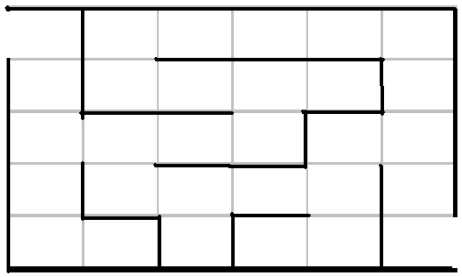


- Chaque fois qu’on enlève un mur, on fusionne éventuellement deux zones pour n’en former plus qu’une.
- Donc si on veut n’avoir qu’une seule zone (car tout communique dans un labyrinthe), il faut casser au moins MN-1 murs
- Il faut de plus casser un mur pour l’entrée et un pour la sortie
- La longueur restante de murs est donc au plus 2MN+M+N-(MN-1+2)= MN+M+N-1

Application

- Pour un labyrinthe 20x14, il faut au plus 313 unités de longueur, soit 156,5 m d’adhésif au plus si la longueur de référence est 50cm (cas du grand labyrinthe du préau)
- En réalité il y avait quelques murs détruits en plus car le labyrinthe n’est pas simplement connexe (il en restait plus de 300 unités tout de même).

Comparaison

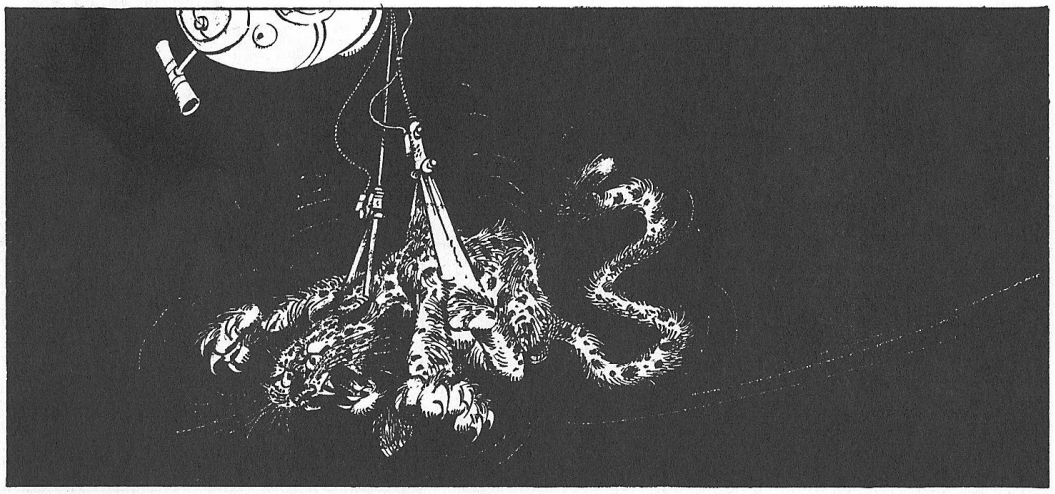


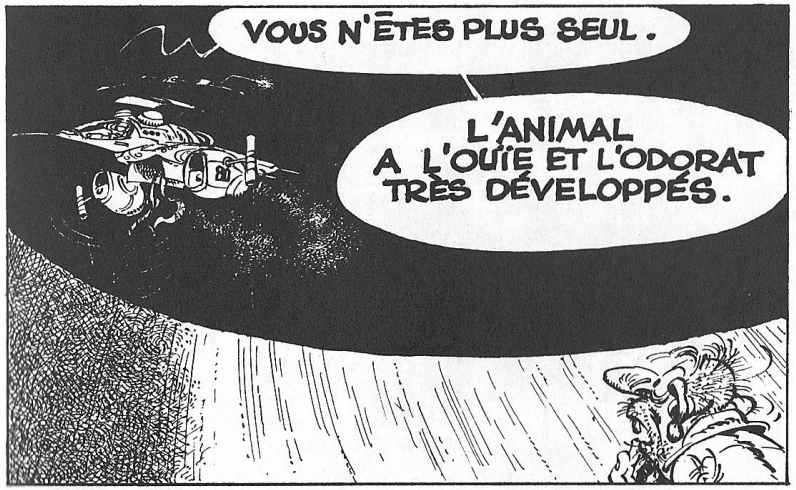
- M=6, N=5
- La majoration fournit
- MN+M+N-1=40 murs au plus

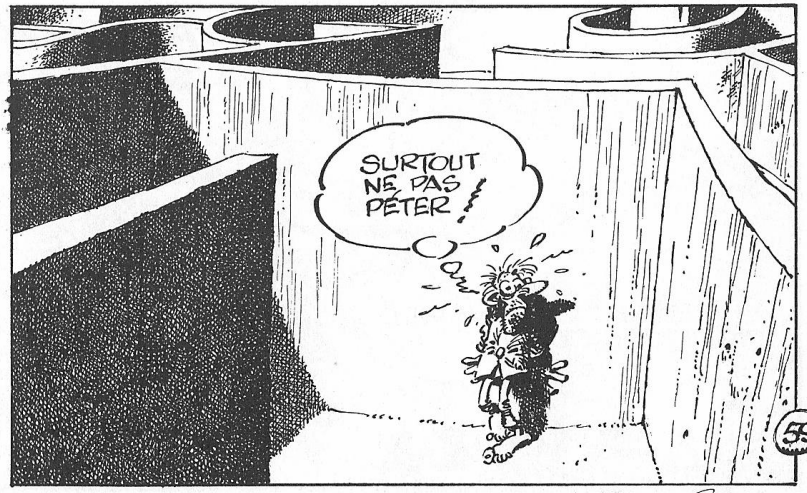
- Le décompte (exact) du nombre de murs fournit 39 murs

Retour sur notre prisonnier

AVIS ! ON A RÉEXAMINÉ VOTRE CAS : LA PEINE A ÉTÉ AGGRAVÉE.
QUOI ? QUOI ?




VOUS N'ÊTES PLUS SEUL.
L'ANIMAL A L'OUÏE ET L'ODORAT TRÈS DÉVELOPPÉS.


SURTOUT NE PAS PÉTER !

Références

- Magazine TANGENTE HS12 Les graphes
- Wikipedia (labyrinthes)
- *Shining* de S. Kubrick pour la version moderne du fil d'Ariane.
- *Idées Noires* de Franquin pour la B.D.
- Du calcul algébrique pour la longueur des murs
- Grande surface pour l'adhésif (pas cher)