记一个长度为N的标准基带OFDM信号(无CP)时域表达式：

$$s(t)=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j2\pi k\Delta f t},\quad 0<t<T$$

采用 $\frac{1}{\sqrt{N}}$ 的归一化写法.(详见下文)

$s(t)$ 中的 $\begin{cases} X_k \text{ 为第k个子载波上的复符号(如QPSK、16-QAM)} \\ T \text{ 为符号周期} \\ \Delta f = 1/T \text{ 为子载波间隔.} \end{cases}$

瞬时功率为信号幅值平方：$p(t)=|s(t)|^2=s(t)\,s^*(t)$.

展开：$p(t)=\frac{1}{N}\left(\sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j2\pi k\Delta f t}\right)\left(\sum_{m=0}^{N-1} X_m^* e^{-j2\pi m\Delta f t}\right)$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} X_k X_m^* e^{j2\pi(k-m)\Delta f t}$$

对 $p(t)$ 求一个周期的时域平均得 $\bar{P}=\frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt$

t为积分变量.

展开：$\bar{P}=\frac{1}{T}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} X_k X_m^* \int_0^T e^{j2\pi(k-m)\left(\frac{1}{T}\right)t}\,dt$

$\Delta f=\frac{1}{T}$

由正交性：

OFDM特性

$$\frac{1}{T}\int_0^T e^{j2\pi(k-m)\frac{t}{T}}\,dt=\begin{cases}1, & k=m\\ 0, & k\neq m.\end{cases}$$

∴只有当 $k=m$ 时. $\bar{P}$ 存活，且

复信号

$$\bar{P} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|X_k|^2 \rightarrow X_k \cdot X_m \xrightarrow{k=m} \underbrace{X_k \cdot X_k^*}_{=|X_k|^2}$$

若各子载波符号独立同分布，

则：$E[|X_k|^2] = \underbrace{E[|X|^2]}_{\text{单个符号的平均能量}}$，即 $E[\bar{P}] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} E[|X_k|^2] = E[|X|^2]$

采用前归一化，则能保持"输入平均能量=输出平均能量"

峰值功率即 $\max|s(t)|^2 = \max p(t)$.

由 $s(t)$ 可知其上界 $|s(t)| = \frac{1}{\sqrt{N}}\left|\sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j2\pi k \Delta f t}\right| \le \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1}|X_k|$

此时所有符号振幅相等记 $|X_k| = A$. 且在某个时刻加能让所有相位一致.

则 $|s(t_0)| = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1} A = \sqrt{N}A$.

$P_{max} = |s(t_0)|^2 = NA^2$

又∵ $\bar{P} = \frac{1}{N}\sum_k |X_k|^2 = \frac{1}{N}\cdot NA^2 = A^2$

∴ 在理论最坏情况下. $PAPR_{max} = \frac{P_{max}}{\bar{P}} = \frac{NA^2}{A^2} = N$.

在随机符号情况下"N倍"极其罕见.

当 $N=64$. 理论 $PAPR_{max} = 64 \rightarrow 10\lg 64 \approx 18.06\,dB$.

对于离散OFDM时域表达式：

$$s[n]=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1}X_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$X_k=I_k+jQ_k.$$

$$\therefore s[n]=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1}(I_k+jQ_k)\left[\cos(\tfrac{2\pi}{N}kn)+j\sin(\tfrac{2\pi}{N}kn)\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{N}}\left\{\underbrace{\sum_{k=0}^{N-1}I_k\cos(\tfrac{2\pi}{N}kn)-\sum_{k=0}^{N-1}Q_k\sin(\tfrac{2\pi}{N}kn)}_{\text{实部 }A[n]}+j\underbrace{\left[\sum_{k=0}^{N-1}I_k\sin(\tfrac{2\pi}{N}kn)+\sum_{k=0}^{N-1}Q_k\cos(\tfrac{2\pi}{N}kn)\right]}_{\text{虚部 }B[n]}\right\}$$

$$\therefore s[n]=\frac{1}{\sqrt{N}}\left(A[n]+jB[n]\right)$$

即 $|s[n]|^2=\frac{1}{N}\left(A[n]^2+B[n]^2\right)$

对于 BPSK $I_k=\pm1$ $Q_k=0$.（纯实信号）

$$A[n]=\sum_{k=0}^{N-1}I_k\cos\tfrac{2\pi}{N}kn,\quad B[n]=\sum_{k=0}^{N-1}I_k\sin\tfrac{2\pi}{N}kn$$

$$\therefore N|s[n]|^2=\left(\sum_{k=0}^{N-1}I_k\cos\tfrac{2\pi}{N}kn\right)^2+\left(\sum_{k=0}^{N-1}I_k\sin\tfrac{2\pi}{N}kn\right)^2$$

① 取 $n=0$. 对于所有 k. $A[0]=\sum_{k=0}^{N-1}I_k$ $B[0]=0$

幅值上界 功率上界

若所有 $I_k=+1$，则有 $A[0]=N$ 此时 $s[0]=\underline{\sqrt{N}}$ $|s[0]|^2=\underline{N}$

② 对任意 n，若存在对 k 的符号选择使得对每个 k 的向量 $X_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$ 都

朝向一个复平面方向，则同样可线性叠加得到同级别的峰值。

对于 $\frac{\pi}{2}$-BPSK. $x_k = a_k e^{j\frac{\pi}{2}k}$ $a_k = \pm 1$ (复信号)

$I_k = a_k \cos(\frac{\pi}{2}k)$ $Q_k = a_k \sin(\frac{\pi}{2}k)$

$$\therefore A[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cos(\frac{\pi}{2}k)\cdot\cos(\frac{2\pi}{N}kn) - \sum_{k=0}^{N-1} a_k \sin(\frac{\pi}{2}k)\sin(\frac{2\pi}{N}kn)$$

$$B[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cos(\frac{\pi}{2}k)\sin(\frac{2\pi}{N}kn) + \sum_{k=0}^{N-1} a_k \sin(\frac{\pi}{2}k)\cdot\cos(\frac{2\pi}{N}kn)$$

取：

k	$\cos(\frac{\pi}{2}k)$	$\sin(\frac{\pi}{2}k)$	$e^{j\frac{\pi}{2}k}$	x_k
0	1	0	+1	a_0
1	0	1	+j	$j\cdot a_1$
2	-1	0	-1	$-a_2$
3	0	-1	-j	$-ja_3$

由上表可知 $\frac{\pi}{2}$-BPSK 的每项分布在复平面的四个方向。

即使幅度最大化 ($a_0=1$, $a_1=1$ $a_2=-1$ $a_3=-1$)

$$S[0] = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1} x_k = \frac{1}{\sqrt{N}}(\underbrace{1+j+1+j+1+j+\cdots}_{N\text{次}})$$

又∵ FFT 点数 N 常取偶数.

$$\therefore S[0] = \frac{1}{\sqrt{N}}(\frac{N}{2}+j\frac{N}{2}) = \frac{\sqrt{N}}{2}+j\frac{\sqrt{N}}{2}$$

$$|S[0]|^2 = \frac{N}{4}+\frac{N}{4} = \frac{N}{2} \quad |S[0]| = \sqrt{\frac{N}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{N}.$$

对比 BPSK 与 $\frac{\pi}{2}$-BPSK，理论最恶劣 PAPR 情况.

	$\lvert s(n)\rvert$	$\lvert s(n)\rvert^2$	$PAPR_{max}$ (均值为1)
BPSK	$\sqrt{N}$	N	N
$\frac{\pi}{2}$-BPSK	$\sqrt{N}/\sqrt{2}$	$N/2$	$N/2$

分析:

① BPSK 信号只有 ±1 两种选择，而 $\frac{\pi}{2}$-BPSK 信号有四种选择，在相同数量的随机符号情况下，前者更有可能在某一种符号出现"扎堆"的情况。此时尽管不如理论中，能同相叠加到最高峰值，但和 $\frac{\pi}{2}$-BPSK 相比，后者出现这一"扎堆"情况时不会太过严重.

② $\frac{\pi}{2}$-BPSK 引入"$e^{j\frac{\pi}{2}k}$"这一旋转因子，使同相叠加的能力下降。

因此，理论上分析 $\frac{\pi}{2}$-BPSK 的最大峰值功率比 BPSK 小一半 ($-3dB$)，这也说明了 $\frac{\pi}{2}$-BPSK 有降低 PAPR (或者说 $\frac{\pi}{2}$-BPSK PAPR 更低) 的效果。