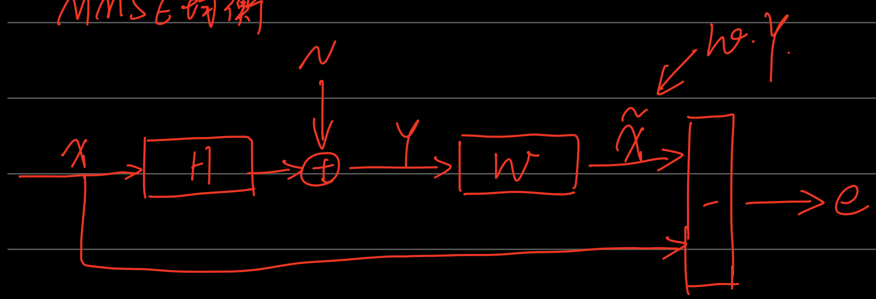
MMSE均衡



$$\begin{cases} e = x - \tilde{x} = x - wY \\ Y = Hx + N \end{cases}$$

法一：矩阵微分法.

建立目标函数 $f(w) = E\{e^H e\}$ = MSE 均方误差

∴ 求 w_0 使 $f(w_0) = \min f(w)$

$$f(w) = E\{(x - wY)^H (x - wY)\} = E\{[x^H - (wY)^H](x - wY)\}$$

$$= E\{\underbrace{x^H x}_{①} - \underbrace{(wY)^H x}_{②} - \underbrace{[(wY)^H \cdot x]^H}_{③} + \underbrace{(wY)^H wY}_{④}\}$$

$N \sim N(0, \sigma_n^2)$

根据已有假设 $Y = Hx + N$，x与N统计独立. $Ex = EN = 0$

$E|x|^2 = \sigma_x^2 = 1$，H已估计 为已知常数.

$$\underbrace{E\{(wY)^H x\}}_{②} = w^H E\{(H^H x^H + N^H) x\} = w^H \cdot E\{H^H |x|^2 + N \cdot x\}$$

$$= w^H (H^H \underbrace{E|x|^2}_{=1} + \underbrace{EN}_{=0} \cdot \underbrace{Ex}_{=0}) = w^H H^H$$

$$\underbrace{E\{[(wY)^H \cdot x]^H\}}_{③} = [E\{(wY)^H \cdot x\}]^H = [w^H \cdot H^H]^H$$

$$\underbrace{E\{(wY)^H (wY)\}}_{④} = E\{Y^H w^H \cdot w Y\} = |w|^2 \cdot E\{(H^H x^H + N^H)(Hx + N)\}$$

$$=|w|^2\cdot E\{H^H\cdot x^H\cdot Hx+H^H x^H\cdot N+N^H\cdot Hx+N^2\}$$

$$=|w|^2\cdot[|H|^2\cdot\underbrace{E|x|^2}_{=1}+H^H\cdot\underbrace{(Ex)^H}_{=0}\cdot EN+H\cdot\underbrace{(EN)^H}_{=0}\cdot Ex+\underbrace{EN^2}_{\downarrow}\}$$

$$=|w|^2\cdot(|H|^2+\sigma_n^2)$$

$$DN=EN^2-\underbrace{(EN)^2}_{=0}=\sigma_n^2$$

$$\therefore f(w)=E|x|^2-w^H\cdot H^H-[w^H\cdot H^H]^H+|w|^2(|H|^2+\sigma_n^2)$$

$$=1-w^H\cdot H^H-H\cdot w+\underline{w^2|H|^2}+w^2\cdot\sigma_n^2$$

$\because$ 为何Wirtinger导数结果长这样

$$\frac{\partial f}{\partial w^H}=-H^H+\underline{w(|H|^2+\sigma_n^2)}=0\quad\Rightarrow\quad w=\frac{H^H}{|H|^2+\sigma_n^2}.$$ 为最优权重

$$\tilde{x}=w\cdot Y=\frac{H^H}{|H|^2+\sigma_n^2}\cdot Y.$$ 为最佳估计的发送符号在接收端的值.

如上所述 $e=x-\tilde{x}=x-wY.$

为使 $\tilde{x}$ 足够接近 x 的真实值. 即 $e\to 0.$　　法二：正交性原理.

$\therefore E\{e\}=E\{x-\tilde{x}\}=0$

即 $E\{e\cdot Y^H\}=0$ 或 $E\{Y\cdot e^H\}=0$

此时 $E\{(x-\tilde{x})\cdot Y^H\}=E\{\underbrace{xY^H}_{①}-\underbrace{wY\cdot Y^H}_{②}\}=0.$

$$\underbrace{E\{xY^H\}}_{①}=E\{x(Hx)^H+x\cdot N^H\}=E\{x\,x^H H^H\}+E\{x\,N^H\}=\underbrace{E|x|^2}_{=1}\cdot H^H+\underbrace{Ex}_{=0}\cdot\underbrace{EN^H}_{=0}=H^H$$

$$\underbrace{E\{wY\cdot Y^H\}}_{②}=w\cdot E\{(Hx+N)\cdot(x^H H^H+N^H)\}$$

$$=w[E\{Hx\,x^H H^H\}+E\{Hx\,N^H\}+E\{N\cdot x^H\cdot H^H\}+E\{N\cdot N^H\}]$$

$$= W\left[H\cdot \underbrace{E|X|^2}_{=1}\cdot H^H + H\cdot \underbrace{EX\,EN^H}_{=0} + \underbrace{EN\cdot EX^H}_{=0}\cdot H^H + \sigma_n^2\cdot I\right]$$

$$= W\left[H\cdot H^H + \sigma_n^2\cdot I\right]$$

$$\therefore ① - ② = H^H - W\left[|H|^2 + \sigma_n^2\cdot I\right] = 0$$

$$\therefore W = \frac{H^H}{|H|^2 + \sigma_n^2\cdot I}$$ 为最优权重.

分析与理解.

① MMSE均衡将噪声考虑在内，当SNR较高($\sigma_n^2 \to 0$)，$W_{mmse} \approx \frac{H^H}{|H|^2} = \frac{1}{H}$ 此时，MMSE均衡器退化为迫零均衡（此时噪声功率被忽略）。当SNR较低(σ_n^2很大)，$W_{mmse} \approx \frac{H^H}{\sigma_n^2}$，均衡器的增益变得很小，有效地抑制噪声。

② 拆开看W_{mmse}，H^H对信道引入的相位旋转进行补偿，$\frac{1}{|H|^2+\sigma_n^2}$可以近似看作一个缩放因子，其根据不同信道增益$|H|^2$和噪声水平$\sigma_n^2$对接收信号$Y$的幅度进行调整。

③ 单独看W_{mmse}，在两种推导的过程，我们都假设H确定已知，N的噪声水平已知，但实际中，H和σ_n^2都需要依靠精确的信道估计，换句话说，MMSE均衡是建立在精确的信道估计上的，当H和σ_n^2足够准确时，估计的结果$\tilde{X}$才有足够的可靠性。