

MECCANICA RAZIONALE E ANALITICA (*Laurea in Fisica*)

Prova scritta del 28/02/2018

ESERCIZIO 1. In un piano verticale una lamina omogenea ABC (a forma di triangolo rettangolo) di massa M ha il cateto AB che scorre senza attrito lungo un asse orizzontale. Due dischi omogenei uguali, di massa m e raggio R , sono collegati da un filo inestensibile di lunghezza ℓ (e massa trascurabile) e rotolano senza strisciare lungo l'ipotenusa CB . Una forza elastica di costante k positiva attrae il centro D del disco superiore verso il punto D' posto sulla verticale per AC ($CD' = \text{costante}$).

- a) Verificare l'applicabilità del formalismo lagrangiano.
- b) Scrivere la lagrangiana del sistema.
- c) Determinare eventuali costanti di moto e interpretarle da un punto di vista fisico.
- d)**(FACOLTATIVO)** Scrivere le equazioni di Lagrange e trovarne la soluzione generale.

ESERCIZIO 2. In un piano verticale un disco di massa m e raggio R rotola senza strisciare su una guida orizzontale. Un'asta di massa M e lunghezza $2L$ ha il punto C , distante $L/2$ dal suo estremo A , vincolato al centro del disco mediante una cerniera. Una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla collega l'altro estremo B dell'asta a un asse verticale (la molla si mantiene sempre orizzontale).

- (a) Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema, discutendone la stabilità;
- (b) Nelle ipotesi $m = 2M/3$ e $k = 2Mg/L$, calcolare le frequenze proprie di oscillazione del sistema attorno a una posizione di equilibrio stabile;
- (c) (facoltativo) Determinare i modi normali.

ESERCIZIO 3. Data la trasformazione

$$P = ape^q$$
$$Q = be^{-q},$$

- (a) stabilire sotto quali condizioni su a e b la trasformazione è canonica;
- (b) determinare le funzioni generatrici del tipo $F_2(q, P)$ e $F_3(p, Q)$.