

MECCANICA RAZIONALE E ANALITICA (*Laurea in Fisica*)

Prova scritta online del 22-02-2021

ESERCIZIO 1 (6 punti)

In un piano verticale una circonferenza di raggio R , centro C e massa M oscilla intorno ad un suo punto O che è fisso in un sistema di riferimento inerziale [momento d'inerzia baricentrale della circonferenza MR^2]. Un' asta omogenea AB di lunghezza $\ell < 2R$ e massa m ha gli estremi A e B che scorrono senza attrito sulla circonferenza. Una molla di costante elastica $k > 0$ collega il punto medio dell'asta H con il punto fisso O [momento d'inerzia baricentrale dell'asta: $(1/12)m(\ell)^2$]. Si indichi con d il segmento CH .

1A) Verificare l'applicabilità del formalismo lagrangiano e scrivere la lagrangiana del sistema.

1B) Individuare eventuali costanti del moto e darne l'interpretazione fisica.

1C) Scrivere le equazioni di Eulero–Lagrange.

1D) Nell'ipotesi che gli estremi dell'asta si mantengano fermi rispetto alla circonferenza (vale a dire OCH coincidente con OH , $\forall t$) si ricavi la soluzione generale di una delle equazioni di E–L una volta linearizzata opportunamente.

ESERCIZIO 2 (6 punti)

In un piano verticale un'asta omogenea AB di lunghezza ℓ e massa M oscilla mantenendo l'estremo A fisso rispetto a un sistema di riferimento inerziale [momento d'inerzia baricentrale dell'asta $(1/12)m(\ell)^2$]. Un filo rigido CD (di massa trascurabile, e quindi da considerare come un vincolo) ha il punto mediano incardinato all'estremo B dell'asta in modo tale che $CB = BD = \ell/2$ e che AB e CD si mantengano perpendicolari tra loro. Un punto materiale P di massa m si muove senza attrito lungo il filo CD ed è collegato da una molla di costante elastica $k > 0$ al punto fisso A . **Non è richiesta la verifica dell'applicabilità del formalismo lagrangiano.**

2A) Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema e discutere la loro stabilità.

2B) Calcolare le frequenze proprie di oscillazione rispetto ad una configurazione di equilibrio stabile (arrivare a scrivere il polinomio caratteristico dall'espressione di $\mathbf{V} - \lambda\mathbf{T}$ senza risolvere l'equazione).

ESERCIZIO 3 (3 punti)

Data la trasformazione nello spazio delle fasi \mathbb{R}^4

$$Q_1 = p_1; \quad Q_2 = p_2$$

$$P_1 = \alpha q_1 + \beta p_1; \quad P_2 = \gamma q_2 + \delta p_2,$$

determinare i valori dei parametri reali $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in modo che risultino canonica.

Massimo punteggio negli esercizi 15/15; sufficienza 8 punti

