

## Esame di meccanica razionale

### Venerdì 28-06-2013

1. Nel piano cartesiano bidimensionale di coordinate  $(x, y)$  ed origine  $O$ , un punto materiale di massa  $m$  si muove lungo una circonferenza di centro  $O$  e raggio  $\rho$  fisso. Una seconda particella puntiforme di massa  $m$  si muove lungo il piano verticale di equazione  $x = a$  con  $|a| > \rho$ . Sul sistema agisce la forza peso, diretta lungo il verso negativo dell'asse delle  $y$  con accelerazione costante pari a  $g$ , ed una forza elastica fra le due particelle di costante elastica  $k$ .
  - si stabilisca se il sistema ammette descrizione lagrangiana e, nel caso, si costruisca la funzione lagrangiana
  - si stabilisca, quando la particella si trova nel punto  $(\frac{\sqrt{2}}{2}\rho, -\frac{\sqrt{2}}{2}\rho)$ , sotto quali condizioni sui parametri  $(\rho, a)$ , il sistema è in posizione di equilibrio stabile.
2. Nel piano  $\mathbb{R}^2$  di coordinate  $(x, y)$  ed origine  $O$  si consideri un'asta omogenea di lunghezza  $4R$  e massa  $M$ . Uno dei suoi estremi è incernierato all'origine. Sull'asta rotola senza strisciare un disco omogeneo di massa  $M$  e raggio  $R$ . Sul sistema agisce la forza peso, diretta lungo il verso negativo dell'asse delle  $y$  con accelerazione costante pari a  $g$ , ed una forza elastica di costante elastica  $k$  fra il centro del disco e l'origine. Si stabilisca
  - se il sistema ammette descrizione Lagrangiana e, nel caso, si costruisca la funzione lagrangiana,
  - se esistono costanti del moto e, nel caso, quale sia la loro interpretazione fisica.
  - se il sistema ammette descrizione Hamiltoniana e, nel caso, si costruisca la funzione di Hamilton.
3. Siano date nello spazio delle fasi  $\Gamma \simeq \mathbb{R}^2$  le coordinate  $(q, p)$  e la trasformazione di coordinate
$$\begin{cases} Q = \ln(q^\beta) \\ P = \alpha p q^\gamma \end{cases},$$
dove  $\alpha, \beta, \gamma$  sono parametri reali e positivi, soggetti al vincolo  $\alpha^2 + \beta^2 = 2$ . Si stabilisca
  - mediante le parentesi di Poisson per quali valori di  $\alpha, \beta, \gamma$  è canonica la trasformazione di coordinate,
  - una funzione generatrice  $F = F(q, P)$  della trasformazione canonica.

Valutazione:

*Esercizio 1)* 8 punti

*Esercizio 2)* 6 punti

*Esercizio 3)* 4 punti