Esame di meccanica razionale
Venerdì 20-01-2012

1. Nel piano cartesiano bidimensionale di coordinate (x, y) ed origine O, un disco omogeneo di massa $3M > 0$, baricentro G e raggio $R > 0$ rotola senza strisciare lungo l'asse delle ascisse. Al disco è collegata un'asta omogenea di massa $2M$, lunghezza $2R$ i cui estremi sono G ed A, quest'ultimo vincolato a muoversi lungo l'asse delle ordinate. Infine un punto materiale P di massa M è vincolato a muoversi lungo l'asse delle ordinate. Sul sistema agisce la forza peso di accelerazione costante $g > 0$ diretta con verso negativo lungo l'asse delle ordinate ed una molla di costante elastica $k > \frac{mg}{2R}$, lunghezza a riposo nulla che connette G a P. Si determini
   - se il sistema ammette descrizione lagrangiana,
   - le costanti del moto del sistema,
   - le posizioni di equilibrio stabile del sistema.

2. Nel piano cartesiano bidimensionale di coordinate (x, y) ed origine O due punti materiali P e Q entrambi di massa $m > 0$ sono vincolati a muoversi l'uno lungo l'asse delle ascisse, l'altro lungo l'asse delle ordinate. Sul sistema agisce la forza peso di accelerazione costante $g > 0$ diretta con verso negativo lungo l'asse delle ordinate e sono presenti 3 molle di costante elastica $k > 0$, lunghezza a riposo nulla, la prima che connette P a Q mentre la seconda e la terza connettono P e Q al punto O di coodinate (x_0, y_0) dove sia x_0 sia y_0 sono indipendenti dal tempo. Si determini
   - se il sistema ammette descrizione lagrangiana e se possiede quantità conservate,
   - la soluzione esplicita delle equazioni del moto sapendo che al tempo $t = 0$ il punto P ha velocità nulla e si trova in $(2x_0, 0)$ mentre Q si trova in $\left(0, \frac{y_0}{2}\right)$ anche esso con velocità nulla,
   - se il sistema ammette descrizione Hamiltoniana e, nel caso, si calcoli la funzione di Hamilton.

3. Si consideri nello spazio delle fasi $\Gamma \equiv \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ il sistema di coordinate (q, p). Con $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ si intendono che le p possono assumere solo valori reali strettamente positivi. Si determini se
   a) la trasformazione di coordinate $Q = \arctan(q)$ e $P = p(1 + q^2)$ è canonica,
   b) la trasformazione di coordinate $Q = \frac{1}{2p^2}$ e $P = qp^3$ è canonica,
   c) esiste una funzione $Q = Q(q, p)$ per cui la trasformazione $(q, p) \mapsto (Q, P)$ con $P = pe^q$ è canonica.

   Un bonus verrà accordato a chi spiega esaustivamente perché i valori negativi delle p sono stati eliminati dallo spazio delle fasi.