

## MECCANICA RAZIONALE E ANALITICA (*Laurea in Fisica*)

Prova scritta del 27-01-2017

### ESERCIZIO 1 (7 punti)

In un piano verticale inerziale una lamina di massa  $M$  a forma di quadrato -di lato  $2R$  e vertici  $A, B, D, E$ - privata di due semicerchi di raggio  $R$  di centri equidistanti da  $AB$  e  $DE$ , si muove senza attrito su una guida orizzontale. Un' asta omogenea, di lunghezza  $R$  e massa  $m$  ha gli estremi  $P, Q$  vincolati a muoversi senza attrito sulla semicirconferenza superiore.

- a) Verificare l'applicabilità del formalismo lagrangiano e scrivere la lagrangiana del sistema.
- b) Individuare eventuali costanti del moto e interpretarle da un punto di vista fisico in relazione alle sottostanti proprietà di simmetria.
- c) Scrivere le equazioni di Lagrange.

### ESERCIZIO 2 (7 punti)

In un piano verticale una retta liscia (e di massa trascurabile) può ruotare attorno all' origine di un sistema di coordinate cartesiane ortogonali. Un punto  $P_1$ , di massa  $m_1$ , è fisso a distanza  $a > 0$  dall' origine  $O$  come indicato in figura. Un secondo punto  $P_2$ , di massa  $m_2$ , si muove sulla retta ed è richiamato verso  $P_1$  da una forza elastica di costante  $k > 0$ .

- a) Determinare tutte le configurazioni di equilibrio e discuterne la stabilità.
- b) Calcolare le frequenze proprie di oscillazione rispetto a una delle configurazioni di equilibrio stabile.
- c) (**facoltativo**) Determinare i modi normali.

### ESERCIZIO 3 (4 punti) Data la trasformazione

$$P = 2a \log p + \log q$$

$$Q = -p^b q \log q$$

- a) determinare per quali valori dei parametri reali  $a$  e  $b$  risulti essere canonica;
- b) considerata l' hamiltoniana  $H = \frac{1}{2}p^2 q^2 (\log q)^2$ , scrivere la nuova hamiltoniana  $K(Q, P)$  e risolvere le associate equazioni di Hamilton.