

MECCANICA RAZIONALE E ANALITICA (*Laurea in Fisica*)

Prova scritta del 19/06/2018

ESERCIZIO 1. In un piano cartesiano verticale di origine O , due punti materiali A (di massa $2m$) e B (di massa m), sono vincolati a una guida circolare fissa con centro in O , raggio R e massa trascurabile. Oltre alla forza peso, i due punti materiali sono soggetti a una mutua attrazione proporzionale al cubo della distanza, con costante di proporzionalità c .

- a) Verificare l'applicabilità del formalismo lagrangiano e scrivere la lagrangiana del sistema.
- b) Scrivere, senza risolvere, le equazioni di Eulero-Lagrange.
- c) Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità.

ESERCIZIO 2. In un piano cartesiano orizzontale di origine O , due aste omogenee AB e $A'B'$ di lunghezza $3L$ e massa M sono incernierate all'origine O in modo che si abbia $OB \cong OB' \cong L$. Tra i due punti B e B' agisce inoltre una forza elastica di costante k .

- (a) Verificare l'applicabilità del formalismo lagrangiano e scrivere la lagrangiana del sistema, scegliendo come coordinate libere gli angoli α e β che le due aste formano con l'orizzontale.
- (b) Scrivere nuovamente la lagrangiana dopo il cambio di coordinate $\alpha + \beta = \phi$, $\alpha - \beta = \theta$.
- (c) Specificare la natura delle quattro coordinate considerate (rotazione o traslazione) e trovare tutte le costanti del moto.

ESERCIZIO 3. Data la trasformazione di coordinate

$$Q = p \left(\frac{\partial f(q)}{\partial q} + f(q) + 1 \right)$$
$$P = \ln p - q ,$$

- (a) Stabilire la relazione che $f(q)$ e le sue derivate devono soddisfare affinché la trasformazione sia canonica;
- (b) Esaminare il caso particolare $f(q) = e^{\lambda q}$ e trovare il valore di λ necessario affinché la trasformazione sia canonica.