

MECCANICA RAZIONALE E ANALITICA (*Laurea in Fisica*)

Prova scritta del 17-02-2014

**ESERCIZIO 1 – Max. punti 6.** In un piano verticale due semicirconferenze lisce di raggio  $R$  e massa trascurabile, i cui centri rimangono a distanza fissa  $d$ , si muovono sull'asse orizzontale con legge oraria  $x(t) = x(0) + vt$ ,  $v = \text{cost.}$  Due punti materiali  $P_1$  e  $P_2$  di uguale massa  $m$  si muovono rispettivamente sulla semicirconferenza 1 e sulla semicirconferenza 2. Una molla di costante elastica  $k > 0$  e lunghezza a riposo  $d > 0$  congiunge i due punti. *Scelto un sistema di riferimento:*

- a) Verificare l'applicabilità del formalismo lagrangiano e scrivere la lagrangiana del sistema.
- b) Stabilire se il formalismo Hamiltoniano applicabile e, nel caso, costruire la funzione di Hamilton
- c) Determinare eventuali costanti di moto e interpretarle da un punto di vista fisico.

**ESERCIZIO 2. – Max. punti 8.** In un piano orizzontale un'asta omogenea  $OA$  di massa  $m$  e lunghezza  $\ell$  ha l'estremo  $O$  fisso mentre nell'estremo  $A$  è incernierata una seconda asta omogenea  $AB$  di massa  $2m$  e lunghezza  $2\ell$ . Il sistema è soggetto a due forze elastiche (entrambe di costante  $k > 0$ ) che agiscono rispettivamente sui punti  $A$  e  $B$  mantenendosi parallele alla verticale. Le molle hanno lunghezza a riposo nulla.

- a) Determinare le possibili configurazioni di equilibrio ed identificare fra esse una configurazione di equilibrio stabile.
- b) Calcolare le frequenze proprie di oscillazione del sistema attorno a tale configurazione.
- c) (**facoltativo**) Determinare i modi normali.

**ESERCIZIO 3 – Max. punti 4.** Nello spazio delle fasi  $\Gamma = (0, \infty) \times \mathbb{R} \ni (q, p)$ , si consideri la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q(q, p) = h(q) + p^\alpha \\ P(q, p) = \frac{p}{\ln(q)} \end{cases},$$

dove  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Si determini per quali  $\alpha$  e  $h(q)$  canonica la trasformazione data e si calcoli una funzione generatrice.