Esame di meccanica razionale
Venerdì 25-01-2013

1. Nel piano cartesiano bidimensionale di coordinate (x, y) ed origine O, due punti materiali P e Q entrambi di massa m si muovono sotto azione della forza peso di accelerazione costante pari a $g > 0$, diretta verso la direzione negativa dell'asse delle y. Inoltre sul sistema agiscono le seguenti forze elastiche tutte di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla: *1)* fra il punto P e l'orgine, *2)* fra il punto P ed il punto di coordinate $(a, 0)$ con $a \in \mathbb{R}$ fisso, *3)* fra il punto Q e l'orgine, *4)* fra il punto Q ed il punto di coordinate $(a, 0)$, *5)* fra i punti P e Q. Una volta trovata la funzione lagrangiana si stabilisca
    - se il sistema ha posizioni di equilibrio stabile,
    - quali sono le frequenze normali di vibrazione rispetto alle eventuali posizioni di equilibrio stabile,
    - (Facoltativo) quali sono i modi normali di vibrazione.

2. Nel piano $\mathbb{R}^2$ di coordinate (x, y) ed origine O si considerino due aste omogenee, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ di lunghezza $2l > 0$ e massa M. Il punto A è vincolato a muoversi sull'asse delle ordinate, mentre C è incardinato all'origine. Sul sistema agiscono la forza peso di accelerazione costante pari a $g > 0$, diretta verso la direzione negativa dell'asse delle y e due forze elastiche, entrambe di costante elastica $k > 0$, lunghezza a riposo nulla che connettono A a C e B a D. Si stabilisca
    - se il sistema ammette descrizione Lagrangiana e, nel caso, si costruisca la funzione lagrangiana,
    - se esistono costanti del moto e, nel caso, quale sia la loro interpretazione fisica. Si indichi anche la natura delle coordinate scelte, *i.e.*, di traslazione, di rotazione ...,
    - se il sistema ammette descrizione Hamiltoniana e, nel caso, si costruisca la funzione di Hamilton,

3. Siano date nello spazio delle fasi $\Gamma \simeq \mathbb{R}^4$ le coordinate (q_1, p_1, q_2, p_2).
    - mediante le parentesi di Poisson si determini per quali valori di $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$ è canonica la trasformazione di coordinate
    $$\begin{cases} Q_1 = p_1, & P_1 = -q_1 \\ Q_2 = p_2^\alpha e^{q_2}, & P_2 = e^{\lambda q_2} \end{cases}$$
    - mediante la condizione di Lie si costruisca una funzione generatrice per la trasformazione quando essa è canonica.

Valutazione:

Esercizio 1) 8 punti
Esercizio 2) 7 punti
Esercizio 3) 3 punti