

Esame di meccanica razionale

Venerdì 23-01-2015

1. In uno spazio cartesiano tridimensionale \mathbb{R}^3 , con asse z ascendente, una particella puntiforme è vincolata a muoversi sulla curva liscia $(\cos(2\pi z), \sin(2\pi z), z)$ ed è soggetta sia alla forza peso sia alla forza $\vec{F} = \frac{\lambda}{3}z^3\vec{e}_z$ dove $\lambda > 0$, mentre \vec{e}_z è il versore diretto lungo l'asse z . Si determini
 - se il sistema ammette descrizione lagrangiana e quale sia la funzione di Lagrange,
 - la soluzione delle equazioni del moto
 - se esiste un punto di equilibrio stabile del sistema.
2. Nel piano verticale \mathbb{R}^2 di coordinate (x, y) ed origine O un disco omogeneo di massa M e raggio R ha un punto del suo bordo incernierato ad O . Un'asta omogenea di massa M e lunghezza $2L$ è incernierata invece al baricentro del disco. Sul sistema agisce la forza peso. Si stabilisca
 - se il sistema ammette descrizione lagrangiana e, nel caso, si costruisca la funzione lagrangiana,
 - se esistono costanti del moto e la loro interpretazione fisica,
 - se il sistema ammette descrizione hamiltoniana e, nel caso, si costruisca la funzione di Hamilton,
 - se esiste almeno un punto di equilibrio stabile per il sistema.
3. Siano date nello spazio delle fasi $\Gamma \simeq (0, \infty) \times (0, \infty) \subset \mathbb{R}^2$ le coordinate (q, p) . Si determini quali sono le funzioni f ed h per cui è canonica la seguente trasformazione di coordinate
$$\begin{cases} Q = q \tanh(p) + h(p) + f(q) \\ P = f(q) + h(p) \end{cases}$$

Valutazione:

Esercizio 1) 6 punti

Esercizio 2) 8 punti

Esercizio 3) 4 punti