Esame scritto, 19.01.2026

Testo in Italiano

Problema 1. *Si considerino tre particelle puntiformi di massa m. La prima particella è vincolata a muoversi lungo la circonferenza di raggio unitario, centrata nell'origine. La seconda particella è vincolata a muoversi lunogo la retta di equazione $y = x$. La terza particella è vincolata a muoversi lungo la retta di equazione $y = -x$. Le particelle sono connesse da un potenziale armonico a coppie (i.e. particella 1 con 2, 2 con 3 e 3 con 1, tutte con la stessa costante di accoppiamento k). Il sistema è sotto l'influenza della gravità, diretta nel verso negativo dell'asse y.*
Si determini:

- *(3 punti) la Lagrangiana del sistema*
- *(2 punti) le equazioni del moto*
- *(1 punto) l'Hamiltoniana del sistema*
- *(2 punti) i punti di equilibrio*
- *(2 punti) i modi normali attorno ai punti di equilibrio stabili.*

Problema 2. *Si prenda il cubo di lato 2 e massa M, centrato nell'origine, con vertici in*

$$(-1,-1,-1),(-1,+1,-1),(+1,+1,-1),(+1,-1,-1),$$
$$(-1,-1,+1),(-1,+1,+1),(+1,+1,+1),(+1,-1,+1)$$

e di densità $\propto \|\boldsymbol{r}\|_1 = |x| + |y| + |z|$.
Si determini:

- *(4 punti) Il tensore di inerzia nel sistema assegnato.*

Si tratti ora il cubo come una lamina quadrata nel piano (x, y), i.e. si assuma che il cubo è vincolato a muoversi nel piano, potendo ruotare solamente attorno all'asse z. Un vertice della lamina è vincolato a muoversi lungo la circonferenza di raggio $\sqrt{2}$ centrata nell'origine, il vertice opposto è collegato con un potenziale armonico all'origine. Il centro di massa della lamina è collegato da due potenziali armonici ai punti di coordinate $(\pm\sqrt{2}, 0)$. Tutti i potenziali armonici hanno la stessa costante di accoppiamento k. Il sistema è sotto l'influenza della gravità, diretta nel verso negativo dell'asse y.
Si determini:

- *(3 punti) la Lagrangiana del sistema*
- *(2 punti) le equazioni del moto*
- *(1 punto) l'Hamiltoniana del sistema*
- *(2 punti) i punti di equilibrio*
- *(2 punti) i modi normali attorno ai punti di equilibrio stabili.*

(Nota: se non si è risolto il primo punto dell'esercizio, si esprima nella soluzione il momento di inerzia come $I = M\mathcal{I}$ e si assuma il centro di massa coincidente col centro geometrico della lamina.)

Problema 3. *Sia data la trasformazione*

$$Q = -\frac{q}{p}\sqrt{\ell}, \quad P = \sqrt{\ell}, \qquad \text{con} \quad \ell = \ln\left(\frac{2pe^{-p^2}}{q}\right)$$

Determinare:

- *(3 punti) se la trasformazione è canonica verificando direttamente che $\{Q, P\} = 1$*
- *(3 punti) la funzione generatrice del quarto tipo $G_4(p, P)$*

(Si ricorda che $q = -\partial_p G_4, Q = \partial_P G_4$).

Written exam, 19.01.2026

English text

Problem 1. *Consider three point-like particles of mass m. The first particle is constrained to move along the circumference of unit radius, centered at the origin. The second particle is constrained to move along the line of equation $y = x$. The third particle is constrained to move along the line of equation $y = -x$. The particles are pair-wise connected with an harmonic potential (i.e. particles 1 with 2, 2 with 3 and 3 with 1, all with the same coupling constant k). The system is under the influence of gravity, which points in the negative y direction.*
Determine

- *(3 points) the Lagrangian of the system*
- *(2 points) the equations of motion*
- *(1 point) the Hamiltonian of the system*
- *(2 points) the equilibrium points*
- *(2 points) the normal modes around the stable equilibria.*

Problem 2. *Consider the cube of side length 2 and mass M, centered in the origin, with vertices in*

$$(-1,-1,-1), (-1,+1,-1), (+1,+1,-1), (+1,-1,-1),$$
$$(-1,-1,+1), (-1,+1,+1), (+1,+1,+1), (+1,-1,+1)$$

and density $\propto \|\boldsymbol{r}\|_1 = |x| + |y| + |z|$.
Determine:

- *(4 points) The tensor of inertia in the given coordinate system.*

Treat now the cube as a flat square in the (x, y) plane, i.e. assume that the cube is constrained to move in the plane, with only rotations about the z axis allowed. One vertex of the square is constrained to move on the circumference of radius $\sqrt{2}$ centered at the origin, the opposite vertex is connected with an harmonic potential to the origin. The center of mass of the square is connected with harmonic potentials to the points of coordinates $(\pm\sqrt{2}, 0)$. All harmonic potentials have the same coupling constant k. The system is under the influence of gravity, which points in the negative y direction.
Determine

- *(3 points) the Lagrangian of the system*
- *(2 points) the equations of motion*
- *(1 point) the Hamiltonian of the system*
- *(2 points) the equilibrium points*
- *(2 points) the normal modes around the stable equilibria.*

(Note: if the first point of the exercise was not solved, express in the solution the moment of inertia as $I = M\mathcal{I}$ and assume that the center of mass coincides with the geometrical center of the square.)

Problem 3. *Assume the transformation*

$$Q = -\frac{q}{p}\sqrt{\ell}, \quad P = \sqrt{\ell}, \qquad \textit{with} \quad \ell = \ln\left(\frac{2pe^{-p^2}}{q}\right)$$

Determine:

- *(3 points) if the transformation in canonical by directly verify that $\{Q, P\} = 1$*
- *(3 points) the type-four generating function $G_4(p, P)$*

(We remind that $q = -\partial_p G_4, Q = \partial_P G_4$).