

**MECCANICA RAZIONALE E ANALITICA** (*Laurea in Fisica*)

**Prova scritta del 06-11-2015 (appello straordinario)**

**ESERCIZIO 1.** In un piano verticale una semicirconferenza di massa  $3m$  e raggio  $R$  è vincolata a scorrere su una guida liscia orizzontale. Un' asta omogenea  $AB$ , di massa  $2m$  e lunghezza  $R$ , ha l'estremo  $A$  vincolato a muoversi senza attrito sulla semicirconferenza, e rimane sempre ortogonale rispetto alla tangente. L' estremo  $B$  dell' asta è collegato tramite due molle, entrambe di costante  $k > 0$ , ai punti  $O$  e  $Q$  fissi sulla guida e posti a distanza  $4R$ .

- a) Verificare l'applicabilità del formalismo lagrangiano e scrivere la lagrangiana del sistema.
- b) Verificare se è possibile costruire la funzione di Hamilton e determinarla. Si conserva? Coincide con l'energia totale del sistema?
- c) Individuare, tra le soluzioni ammissibili delle equazioni di Lagrange, i moti per i quali l' asta si mantenga in posizione verticale  $\forall t$ .

**ESERCIZIO 2.** In un piano verticale una lamina rettangolare  $ABCD$ , di lati  $\ell$  e  $\ell/4$  e di massa  $m$ , ha il lato  $AD$  vincolato a muoversi su una guida verticale liscia. Il vertice  $A$  della lamina è collegato tramite una molla di costante elastica  $k > 0$  a un punto fisso  $O$  sulla guida. Un' asta omogenea, di massa  $m$  e lunghezza  $\ell$ , ha un estremo incernierato nel vertice  $B$  della lamina mentre l' altro estremo  $E$  è collegato al vertice  $C$  da una seconda molla di costante elastica  $k$ .

- a) Determinare le configurazioni di equilibrio per il sistema selezionandone una di equilibrio stabile.
- b) Calcolare le frequenze proprie di oscillazione del sistema rispetto a tale posizione di equilibrio stabile.
- (c) (facoltativo) Determinare i modi normali.

**ESERCIZIO 3.**

Data la trasformazione di coordinate in  $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} Q = \alpha^3 \ln(q) - \alpha^2 \ln(p), \\ P = (\alpha - 1)pq \end{cases},$$

con  $\alpha$  parametro reale. Si stabilisca se esiste e quale il valore minimo di  $\alpha$  affinché la trasformazione sia canonica.

Es. 1) 8 punti;  
Es. 2) 7 punti;  
Es. 3) 3 punti.  
Sufficienza: 9 punti