

Ultima esercitazione di meccanica razionale

Mercoledì 17-12-2014

1. Nel piano cartesiano bidimensionale di coordinate (x, y) ed origine O , si considerino due punti materiali. Il primo di massa $\frac{m}{2}$ è vincolato a muoversi sulla circonferenza liscia di raggio unitario centrata in O e l'altro, di massa m sulla circonferenza liscia di raggio $a \in (0, 1)$ centrata in O . Sul sistema agisce la forza peso ed una forza elastica fra i due punti di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Si stabilisca
 - se il sistema ammette descrizione lagrangiana e quale sia la funzione di Lagrange,
 - per quale valore di a il sistema è in equilibrio se una particella si trova nel punto $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, mentre l'altra si trova nel punto $(-\frac{\sqrt{2}a}{2}, \frac{\sqrt{2}a}{2})$,
 - dire se tale configurazione è di equilibrio stabile od instabile.
2. Nel piano \mathbb{R}^2 di coordinate (x, y) ed origine O si consideri un'asta omogenea di lunghezza L e massa M incernierata ad un estremo in O . Il baricentro di un disco omogeneo di raggio R e massa M è incernierato all'altro estremo dell'asta. Sul sistema agisce la sola forza peso ed i vincoli sono tutti ideali. Si stabilisca
 - se il sistema ammette descrizione lagrangiana e, nel caso, si costruisca la funzione lagrangiana,
 - se esistono costanti del moto e, nel caso, quale sia la loro interpretazione fisica. Si indichi anche la natura delle coordinate scelte, *i.e.*, di traslazione, di rotazione ...,
 - se il sistema ammette descrizione hamiltoniana e, nel caso, si costruisca la funzione di Hamilton,
 - (facoltativo) Si risolvano le equazioni del moto del sistema.
3. Siano date nello spazio delle fasi $\Gamma \simeq \mathbb{R}^2$ le coordinate (q, p) e la trasformazione di coordinate
$$\begin{cases} Q = \ln(q^\beta) \\ P = \alpha p q^\gamma \end{cases},$$
dove α, β, γ sono parametri reali e positivi, soggetti al vincolo $\alpha^2 + \beta^2 = 2$. Si stabilisca
 - mediante le parentesi di Poisson per quali valori di α, β, γ è canonica la trasformazione di coordinate,
 - una funzione generatrice $F = F(q, P)$ della trasformazione canonica.

Valutazione:

Esercizio 1) 8 punti

Esercizio 2) 6 punti

Esercizio 3) 4 punti