

## MECCANICA RAZIONALE E ANALITICA

Prova scritta del 19-2-2009

**ESERCIZIO 1.** In un piano verticale una lamina omogenea  $ABC$  (a forma di triangolo rettangolo) di massa  $M$  ha il cateto  $AB$  che scorre senza attrito lungo un asse orizzontale.

Due dischi omogenei uguali, di massa  $m$  e raggio  $R$ , sono collegati da un filo inestensibile di lunghezza  $\ell$  (e massa trascurabile) e rotolano senza strisciare lungo l'ipotenusa  $CB$ . Una forza elastica di costante  $k$  positiva attrae il centro  $D$  del disco superiore verso il punto  $D'$  posto sulla verticale per  $AC$  ( $CD' = \text{costante}$ ).

- a) Verificare l'applicabilità del formalismo lagrangiano.
- b) Scrivere la lagrangiana del sistema.
- c) Determinare eventuali costanti di moto e interpretarle da un punto di vista fisico.
- d)**(FACOLTATIVO)** Scrivere le equazioni di Lagrange e trovarne la soluzione generale.

**ESERCIZIO 2.** In un piano verticale due punti materiali  $(P_1, m_1)$  e  $(P_2, m_2)$  sono vincolati a muoversi rispettivamente su una circonferenza fissa di raggio  $R$  e lungo un asse orizzontale (entrambi i vincoli sono lisci e la distanza tra il centro della circonferenza e l'asse orizzontale è  $2R$ ).

Una molla di costante elastica  $k > 0$  collega i due punti.

- a) Determinare le configurazioni di equilibrio e discuterne la stabilità.
- b) Calcolare le frequenze proprie di oscillazione del sistema attorno alla posizione di equilibrio stabile.

**ESERCIZIO 3.** Mostrare che la trasformazione tra coordinate e momenti

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( q_1 + \frac{p_2}{m\omega} \right); & Q_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( q_1 - \frac{p_2}{m\omega} \right); \\ P_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (p_1 - m\omega q_2); & P_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (p_1 + m\omega q_2) \end{aligned}$$

è canonica.

**PER GLI STUDENTI ERASMUS**

**SVOLGERE, A SCELTA:  
ESERCIZIO 1. OPPURE ESERCIZIO 2.**

**RISPONDERE ALLE 2 DOMANDE SEGUENTI  
(NON USARE IL LIBRO O GLI APPUNTI):**

**A)** Scrivere le equazioni di Lagrange per un sistema a  $n$  gradi di libertà soggetto a forze attive di tipo conservativo.

Discutere le differenze tra le equazioni di Lagrange e le equazioni di Newton.

**B)** Scrivere la definizione di parentesi di Poisson per due funzioni canoniche  $u = u(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$  e  $v = v(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ .

Illustrare alcune proprietà delle parentesi di Poisson.