

MECCANICA RAZIONALE E ANALITICA (*Laurea in Fisica*)

Prova scritta online del 21-7-2020

ESERCIZIO 1 – PARTE A (7 punti)

In un piano verticale un disco omogeneo di raggio R e massa $M = 2m$ rotola senza strisciare su una guida orizzontale (momento d'inerzia baricentrale $MR^2/2$). Un'asta omogenea AB di lunghezza ℓ e massa $3m$ ha l'estremo A incernierato al centro del disco (momento d'inerzia baricentrale dell'asta $(1/12)(3m)\ell^2$). L'estremo B dell'asta è attratto verso il punto fisso O da una forza elastica di costante $k > 0$ con $k = 5mg/R$ (la molla OB ha lunghezza a riposo nulla).

A1) Verificare l'applicabilità del formalismo lagrangiano e scrivere la lagrangiana del sistema (disco + asta).

A2) Individuare eventuali costanti del moto e interpretarle fisicamente.

A3) Determinare per ciascuna delle coordinate lagrangiane scelte se risulta essere di traslazione, di rotazione, o di nessuno di questi casi.

ESERCIZIO 1 – PARTE B (7 punti)

B1) Usando la lagrangiana della parte **A** determinare le configurazioni di equilibrio del sistema e discutere la loro stabilità.

B2) Calcolare le frequenze proprie di oscillazione rispetto ad una configurazione di equilibrio stabile (arrivare a scrivere il polinomio caratteristico dall'espressione di $\mathbf{V} - \lambda\mathbf{T}$ senza risolvere l'equazione).

ESERCIZIO 2 (4 punti)

Considerare la trasformazione

$$Q = \ln\left(\frac{p}{q}\right); \quad P = -\left(\frac{q^2}{2} + 1\right) \frac{p}{q}$$

- a) Dimostrare che la trasformazione è canonica con il criterio di Lie.
- b) Trovare la funzione generatrice $F_1(q, Q)$ le cui relazioni definenti sono:

$$p = \partial F_1 / \partial q; \quad P = -\partial F_1 / \partial Q$$

TEORIA 1) Meccanica lagrangiana: scrivere il Principio di Hamilton nello spazio delle configurazioni specificando le ipotesi sulla lagrangiana e quelle sui cammini; dedurre le equazioni di Eulero–Lagrange dal Principio.

TEORIA 2 Meccanica hamiltoniana: dimostrare la condizione necessaria e sufficiente affinché la hamiltoniana si conservi

PUNTEGGI

Esercizio 1 - parte A : A1) 4 punti; A2) 2 punti; A3) 1 punto

Esercizio 1 - parte B : B1) 5 punti; B2) 2 punti.

Esercizio 2 : a) 2 punti; b) 2 punti.

Massimo punteggio negli esercizi 18/18; sufficienza 9 punti.

**SIETE PREGATI DI SVOLGERE IL COMPITO
SUDDIVIDENDO LE RISPOSTE E DENOTANDOLE
CON LE LORO ETICHETTE PER FACILITARE
LA CORREZIONE. NUMERATE LE PAGINE**

**Non scrivete cose che non sono esplicitamente richieste:
non saranno valutate**