

MECCANICA RAZIONALE E ANALITICA (*Laurea in Fisica*)

Prova scritta online del 25-01-2021

ESERCIZIO 1 (6 punti)

In un piano verticale due aste omogenee AC e CB di uguale lunghezza ℓ e massa m , sono incardinate in C (considerare questo vincolo come olonomo e a lavoro virtuale totale nullo). I due estremi A e B delle aste sono vincolati a muoversi lungo una guida orizzontale liscia e sono collegati tra loro da una molla di costante elastica $k > 0$ (momento d'inerzia baricentrale di ogni asta: $(1/12)m\ell^2$).

1A) Verificare l'applicabilità del formalismo lagrangiano e scrivere la lagrangiana del sistema .

2B) Individuare eventuali costanti del moto e interpretarle fisicamente.

3C) Scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange e trovarne la soluzione generale nell'ipotesi che l'angolo formato dalle due aste sia piccolo e la forza elastica prevalga sulla forza peso.

ESERCIZIO 2 (6 punti)

In un piano orizzontale sono poste ad una stessa quota due circonferenze fisse di raggio R e di centri O e Q rispettivamente, con $OQ = 4R$. Due punti P_1 e P_2 , entrambi di massa m , si muovono (senza attrito) sulle circonferenze e sono collegati da una molla di costante elastica $k > 0$. **Non è richiesta la verifica dell'applicabilità del formalismo lagrangiano.**

2A) Determinare tutte le configurazioni di equilibrio del sistema e discutere la loro stabilità.

2B) Calcolare le frequenze proprie di oscillazione rispetto ad una configurazione di equilibrio stabile (arrivare a scrivere il polinomio caratteristico dall'espressione di $\mathbf{V} - \lambda \mathbf{T}$ senza risolvere l'equazione).

ESERCIZIO 3 (3 punti)

3A) Data la trasformazione di sole coordinate nello spazio delle fasi \mathbb{R}^2

$$Q(q) = q^2 - \cos q,$$

determinare se esiste una trasformazione $P = P(q, p)$ in modo tale che la trasformazione $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ risulti canonica (in un opportuno dominio).

3B) Determinare la funzione generatrice di tipo $F_2 = F_2(q, P)$ ricordando che $\frac{\partial F_2}{\partial q} = p$; $\frac{\partial F_2}{\partial P} = Q$.

Massimo punteggio negli esercizi 15/15; sufficienza 8 punti.

