

MECCANICA RAZIONALE E ANALITICA

Prova scritta del 20-02-2012

ESERCIZIO 1

Una lamina a forma di triangolo isoscele, con semiangolo al vertice O pari a α e di massa trascurabile, ruota attorno al suo asse di simmetria con velocità angolare $\omega = \text{cost.}$ diretta verso l'alto. Due punti materiali P_1 e P_2 di uguale massa m sono vincolati a muoversi senza attrito lungo i lati obliqui del triangolo e sono collegati da un molla di costante elastica $k > 0$.

Scelto un sistema di riferimento per studiare il moto dei due punti (una terna inerziale con origine nel vertice O del triangolo e asse verticale lungo ω **oppure** il sistema solidale con il piano del triangolo che ruota):

- (a) Verificare l'applicabilità del formalismo lagrangiano.
- (b) Scrivere la lagrangiana del sistema.
- (c) L'hamiltoniana si conserva? L'energia totale coincide con l'hamiltoniana? L'energia totale si conserva? (**Motivare le risposte**).

ESERCIZIO 2

Una circonferenza omogenea di massa M e raggio R può ruotare in un piano verticale intorno a un suo punto fisso O . Un punto P di massa m si muove senza attrito sulla circonferenza. Dato per accertato che il sistema è lagrangiano, si determinino:

- (a) le configurazioni di equilibrio del sistema (circonferenza + punto materiale) discutendone la stabilità;
- (b) (**Facoltativo**) le frequenze proprie di oscillazione del sistema attorno a una posizione di equilibrio stabile e le coordinate normali.

ESERCIZIO 3

Data la trasformazione di sole coordinate

$$Q(q) = q^2 - \cos q$$

determinare una funzione $P = P(q, p)$ tale che la trasformazione

$$(q, p) \rightarrow (Q, P)$$

sia canonica in un dominio opportuno. Ricavare la relativa funzione generatrice di tipo F_2 .