

Esame di Meccanica Razionale

Venerdì 20-02-2015

1. Nel piano cartesiano, verticale, bidimensionale di coordinate (x, y) ed origine O , si consideri un punto materiale di massa m , vincolato a muoversi lungo l'ellisse di equazione $\frac{(y-1)^2}{16} + \frac{x^2}{4} = 1$. Oltre alla forza peso, sul sistema, fra il punto materiale ed O , agisce una forza elastica, di costante elastica positiva k . Si determini
 - se il sistema ammette descrizione lagrangiana e quale sia la funzione di Lagrange,
 - le soluzioni delle equazioni del moto,
 - le posizioni di equilibrio e se ne identifichi una di equilibrio stabile.
2. Nel piano verticale \mathbb{R}^2 di coordinate (x, y) ed origine O si consideri un'asta omogenea \overline{AB} di lunghezza L e massa M incernierata in O ad un punto P tale che il segmento \overline{PA} sia lungo $\frac{L}{3}$. Una seconda asta omogenea \overline{CD} di lunghezza L e massa M è incernierata al baricentro G della prima asta in modo tale che il segmento \overline{GC} sia lungo $\frac{L}{3}$. Oltre alla forza peso sul sistema agisce fra il baricentro dell'asta \overline{CD} ed O una forza elastica di costante elastica positiva k . Si stabilisca
 - se il sistema ammette descrizione lagrangiana e, nel caso, si costruisca la funzione lagrangiana,
 - se il sistema ammette descrizione hamiltoniana e, nel caso, si costruisca la funzione di Hamilton,
 - se esiste una posizione di equilibrio per cui l'asta \overline{AB} è inclinata di $\frac{\pi}{4}$ rispetto l'asse delle ascisse.
3. Siano date nello spazio delle fasi $\Gamma \simeq (0, \infty) \times \mathbb{R}$ le coordinate (q, p) e la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q = \frac{e^q + e^{-q}}{e^q - e^{-q}} p \\ P = P(q) \end{cases}.$$

Si stabilisca

- mediante le parentesi di Poisson per quali funzioni $P(q)$ è canonica la trasformazione di coordinate,
- le funzioni generatrici delle trasformazioni canoniche.

Valutazione:

Esercizio 1) 7 punti

Esercizio 2) 8 punti

Esercizio 3) 3 punti