

Esame di meccanica razionale

Venerdì 28-06-2013

1. Nel piano cartesiano bidimensionale di coordinate (x, y) ed origine O , un punto materiale di massa m si muove lungo una circonferenza di centro O e raggio ρ fisso. Una seconda particella puntiforme di massa m si muove lungo il piano verticale di equazione $x = a$ con $|a| > \rho$. Sul sistema agisce la forza peso, diretta lungo il verso negativo dell'asse delle y con accelerazione costante pari a g , ed una forza elastica fra le due particelle di costante elastica k .
 - si stabilisca se il sistema ammette descrizione lagrangiana e, nel caso, si costruisca la funzione lagrangiana
 - si stabilisca, quando la particella si trova nel punto $(\frac{\sqrt{2}}{2}\rho, -\frac{\sqrt{2}}{2}\rho)$, sotto quali condizioni sui parametri (ρ, a) , il sistema è in posizione di equilibrio stabile.
2. Nel piano \mathbb{R}^2 di coordinate (x, y) ed origine O si consideri un'asta omogenea di lunghezza $4R$ e massa M . Uno dei suoi estremi è incernierato all'origine. Sull'asta rotola senza strisciare un disco omogeneo di massa M e raggio R . Sul sistema agisce la forza peso, diretta lungo il verso negativo dell'asse delle y con accelerazione costante pari a g , ed una forza elastica di costante elastica k fra il centro del disco e l'origine. Si stabilisca
 - se il sistema ammette descrizione Lagrangiana e, nel caso, si costruisca la funzione lagrangiana,
 - se esistono costanti del moto e, nel caso, quale sia la loro interpretazione fisica.
 - se il sistema ammette descrizione Hamiltoniana e, nel caso, si costruisca la funzione di Hamilton.
3. Siano date nello spazio delle fasi $\Gamma \simeq \mathbb{R}^2$ le coordinate (q, p) e la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q = \ln(q^\beta) \\ P = \alpha p q^\gamma \end{cases},$$
 dove α, β, γ sono parametri reali e positivi, soggetti al vincolo $\alpha^2 + \beta^2 = 2$. Si stabilisca
 - mediante le parentesi di Poisson per quali valori di α, β, γ è canonica la trasformazione di coordinate,
 - una funzione generatrice $F = F(q, P)$ della trasformazione canonica.

Valutazione:

Esercizio 1) 8 punti

Esercizio 2) 6 punti

Esercizio 3) 4 punti