

Esame di meccanica razionale

Venerdì 29-01-2016

1. In uno spazio cartesiano tridimensionale \mathbb{R}^3 , una particella puntiforme di massa m è vincolata a muoversi sulla superficie laterale di un cono verticale, liscio, di base circolare, altezza h ed angolo solido $\alpha \in (0, \pi)$. Sul sistema agisce la forza peso ed una forza elastica tra la particella ed il vertice del cono, di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Si stabilisca
 - se il sistema ammette descrizione lagrangiana e quale sia la funzione di Lagrange,
 - se esistono quantità conservate e la loro interpretazione fisica,
 - le soluzioni esatte delle equazioni del moto.
2. Nel piano verticale \mathbb{R}^2 di coordinate (x, y) ed origine O un'asta omogenea \overline{AB} di lunghezza L e massa M ha un punto P vincolato a muoversi lungo l'asse delle ordinate. Il segmento \overline{PA} è lungo $\frac{L}{3}$. Sul sistema agisce la forza peso e fra il punto B ed il punto O una forza elastica di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Si stabilisca
 - se il sistema ammette descrizione lagrangiana e, nel caso, si costruisca la funzione lagrangiana,
 - se esistono costanti del moto e la loro interpretazione fisica,
 - se il sistema ammette descrizione hamiltoniana e, nel caso, si costruisca la funzione di Hamilton,
 - i punti di equilibrio del sistema. Supponendo, inoltre che $kL > 3mg$, stabilire se uno dei punti di equilibrio è stabile e calcolare le relative frequenze normali di vibrazione.
3. Siano date nello spazio delle fasi $\Gamma \simeq (0, \pi) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ le coordinate (q, p) . Si determini quali sono le funzioni f per cui è canonica la seguente trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q = -\frac{p}{e^q \sin(q)} \\ P = f(q) \end{cases}$$

Infine si trovino le funzioni generatrici della trasformazione canonica.

Valutazione:

Esercizio 1) 6 punti

Esercizio 2) 8 punti

Esercizio 3) 4 punti