

MECCANICA RAZIONALE E ANALITICA

Prova scritta del 19-2-2009

ESERCIZIO 1. In un piano verticale una lamina omogenea ABC (a forma di triangolo rettangolo) di massa M ha il cateto AB che scorre senza attrito lungo un asse orizzontale.

Due dischi omogenei uguali, di massa m e raggio R , sono collegati da un filo inestensibile di lunghezza ℓ (e massa trascurabile) e rotolano senza strisciare lungo l'ipotenusa CB . Una forza elastica di costante k positiva attrae il centro D del disco superiore verso il punto D' posto sulla verticale per AC ($CD' = \text{costante}$).

a) Verificare l'applicabilità del formalismo lagrangiano.

b) Scrivere la lagrangiana del sistema.

c) Determinare eventuali costanti di moto e interpretarle da un punto di vista fisico.

d)(FACOLTATIVO) Scrivere le equazioni di Lagrange e trovarne la soluzione generale.

ESERCIZIO 2. In un piano verticale due punti materiali (P_1, m_1) e (P_2, m_2) sono vincolati a muoversi rispettivamente su una circonferenza fissa di raggio R e lungo un asse orizzontale (entrambi i vincoli sono lisci e la distanza tra il centro della circonferenza e l'asse orizzontale è $2R$).

Una molla di costante elastica $k > 0$ collega i due punti.

a) Determinare le configurazioni di equilibrio e discuterne la stabilità.

b) Calcolare le frequenze proprie di oscillazione del sistema attorno alla posizione di equilibrio stabile.

ESERCIZIO 3. Mostrare che la trasformazione tra coordinate e momenti

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(q_1 + \frac{p_2}{m\omega} \right); & Q_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(q_1 - \frac{p_2}{m\omega} \right); \\ P_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (p_1 - m\omega q_2); & P_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (p_1 + m\omega q_2) \end{aligned}$$

è canonica.

PER GLI STUDENTI ERASMUS

**SVOLGERE, A SCELTA:
ESERCIZIO 1. OPPURE ESERCIZIO 2.**

**RISPONDERE ALLE 2 DOMANDE SEGUENTI
(NON USARE IL LIBRO O GLI APPUNTI):**

A) Scrivere le equazioni di Lagrange per un sistema a n gradi di libertà soggetto a forze attive di tipo conservativo.
Discutere le differenze tra le equazioni di Lagrange e le equazioni di Newton.

B) Scrivere la definizione di parentesi di Poisson per due funzioni canoniche $u = u(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ e $v = v(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$.
Illustrare alcune proprietà delle parentesi di Poisson.