

## MECCANICA RAZIONALE E ANALITICA (*Laurea in Fisica*)

Prova scritta del 01-02-2011

**ESERCIZIO 1.** Un punto materiale  $P$  di massa  $m$  si muove senza attrito all'interno di un paraboloide di rivoluzione di equazione  $r^2 = az$  (in coordinate cilindriche  $r, \phi, z$ ) con  $a > 0$ ). Sul punto agisce anche una forza elastica di costante  $k > 0$  diretta come la coordinata  $r$ .

- a) Verificare l'applicabilità del formalismo lagrangiano e scrivere la lagrangiana del sistema.
- b) Individuare eventuali costanti del moto e interpretarle fisicamente.
- c) Determinare se il punto  $P$  può muoversi in modo tale da mantenersi ad una quota costante sul paraboloide.

**ESERCIZIO 2.** In un piano verticale due punti materiali  $(P_1, m_1)$  e  $(P_2, m_2)$  sono vincolati a muoversi rispettivamente su una circonferenza fissa di raggio  $R$  e lungo un asse orizzontale (entrambi i vincoli sono lisci e la distanza tra il centro della circonferenza e l'asse orizzontale è  $2R$ ).

Una molla di costante elastica  $k > 0$  collega i due punti.

- a) Determinare le configurazioni di equilibrio e discuterne la stabilità.
- b) Calcolare le frequenze proprie di oscillazione del sistema attorno alla posizione di equilibrio stabile.
- c) **(Facoltativo)** Determinare i modi normali.

**ESERCIZIO 3.** Data la trasformazione

$$\begin{aligned} Q &= \ln(1 + \sqrt{q} \cos p) \\ P &= 2(1 + \sqrt{q} \cos p) \sqrt{q} \sin p \end{aligned}$$

determinare se è canonica.

**(Facoltativo)** Trovare una funzione generatrice di tipo  $F_3 = F_3(Q, p)$