

## MECCANICA RAZIONALE E ANALITICA (*Laurea in Fisica*)

Prova scritta del 28/02/2018

**ESERCIZIO 1.** In un piano verticale una lamina omogenea  $ABC$  (a forma di triangolo rettangolo) di massa  $M$  ha il cateto  $AB$  che scorre senza attrito lungo un asse orizzontale. Due dischi omogenei uguali, di massa  $m$  e raggio  $R$ , sono collegati da un filo inestensibile di lunghezza  $\ell$  (e massa trascurabile) e rotolano senza strisciare lungo l'ipotenusa  $CB$ . Una forza elastica di costante  $k$  positiva attrae il centro  $D$  del disco superiore verso il punto  $D'$  posto sulla verticale per  $AC$  ( $CD' = \text{costante}$ ).

- a) Verificare l'applicabilità del formalismo lagrangiano.
- b) Scrivere la lagrangiana del sistema.
- c) Determinare eventuali costanti di moto e interpretarle da un punto di vista fisico.
- d)(FACOLTATIVO) Scrivere le equazioni di Lagrange e trovarne la soluzione generale.

**ESERCIZIO 2.** In un piano verticale un disco di massa  $m$  e raggio  $R$  rotola senza strisciare su una guida orizzontale. Un'asta di massa  $M$  e lunghezza  $2L$  ha il punto  $C$ , distante  $L/2$  dal suo estremo  $A$ , vincolato al centro del disco mediante una cerniera. Una molla di costante elastica  $k$  e lunghezza a riposo nulla collega l'altro estremo  $B$  dell'asta a un asse verticale (la molla si mantiene sempre orizzontale).

- (a) Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema, discutendone la stabilità;
- (b) Nelle ipotesi  $m = 2M/3$  e  $k = 2Mg/L$ , calcolare le frequenze proprie di oscillazione del sistema attorno a una posizione di equilibrio stabile;
- (c) (facoltativo) Determinare i modi normali.

**ESERCIZIO 3.** Data la trasformazione

$$\begin{aligned}P &= ape^q \\ Q &= be^{-q},\end{aligned}$$

- (a) stabilire sotto quali condizioni su  $a$  e  $b$  la trasformazione è canonica;
- (b) determinare le funzioni generatrici del tipo  $F_2(q, P)$  e  $F_3(p, Q)$ .