

MECCANICA RAZIONALE E ANALITICA

Prova scritta del 30-1-2009

ESERCIZIO 1. In un piano verticale una circonferenza omogenea di massa M e raggio R rotola senza strisciare lungo una guida orizzontale. Il suo centro C è sottoposto all'azione di una forza elastica di costante $k > 0$ con centro in un punto fisso C' , posto a distanza R dall'orizzontale.

Un'asta omogenea di massa m e lunghezza $l < 2R$ ha gli estremi vincolati a scorrere senza attrito sulla circonferenza.

- a) Verificare l'applicabilità del formalismo lagrangiano
- b) Scrivere la lagrangiana e individuare le costanti del moto, interpretandole da un punto di vista fisico
- c) Nel caso particolare in cui non sia presente la forza elastica (cioè $\mathbf{F}_{el} = 0$) esiste un'altra costante del moto? Ha un significato fisico in relazione alla natura della coordinata ciclica corrispondente?
- d) **(FACOLTATIVO)** Riprendere la lagrangiana del punto b) e considerare ora il caso in cui la forza peso non compia lavoro (cioè il piano del sistema sia orizzontale). Tra tutti i moti possibili del sistema, esiste almeno un caso in cui l'asta si mantiene costantemente a riposo rispetto alla circonferenza?

ESERCIZIO 2. Una circonferenza omogenea di massa M e raggio R ruota in un piano verticale intorno a un suo punto fisso O . Un punto di massa m si muove senza attrito sulla circonferenza.

Si determinino:

- (a) la configurazione di equilibrio stabile;
- (b) le frequenze proprie di oscillazione del sistema;
- (c) **(FACOLTATIVO)** le coordinate normali.

ESERCIZIO 3. Nello spazio delle fasi \mathbb{R}^6 di una particella libera, siano p_1, p_2, p_3 i momenti coniugati alle tre coordinate cartesiane e L_1, L_2, L_3 le tre componenti del momento angolare.

Calcolare le parentesi di Poisson $[p_i, L_j]$ per $i, j = 1, 2, 3$