ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА
II-ой семестр

sltKaguya
Группа M3104

8 февраля 2022 г. — 9 февраля 2022 г.

Что добавить

1. Более общее (мне пофиг, пишу как хочу) определение графа, и добавить снизу главу про неориентированные;
2. Поправить обозначения отдельных вершин и рёбер.

Введение в теорию графов

Определение. ***Граф*** $G(V, E)$ *– множество вершин* V *и рёбер* E*, такое, что* E *является подмножеством множества двухэлементных подмножеств множества* V *(для неориентированного графа).*

Определение. ***Ребро*** *– неупорядоченная пара* $\{u, v\}$*, где* $u, v \in V$ *и* $u \neq v$ *(для неориентированного графа).*

Если x – ребро с концами u и v, то x **инцедентен** u и v, u и v **инцедентны** x.
Вершины u и v называются смежными, если являются концами одного ребра.
Рёбра x и y называются смежными, если имеют общую вершину.

Определение. ***Взвешенный*** *граф – граф с весами на рёбрах, то есть каждое ребро графа имеет числовое значение. Пример: расстояние, цена и так далее.*

Определение. ***Тривиальный*** *граф – граф из одной вершины:* $G(V, \varnothing),\ |V| = 1$.

Определение. ***Пустой*** *граф или нуль граф – граф без рёбер:* $G(V, \varnothing)$.

Примечание. В некоторых источниках в пустом графе нет даже вершин: $G(\varnothing, \varnothing)$.

Ориентированный граф

Определение. ***Ориентированный*** *граф – множество вершин* V *и ориентированных рёбер* E.

Определение. ***Ориентированное*** *ребро – упорядоченная пара* (u, v)*, где* $u, v \in V$.

Определение. ***Направленный*** *граф – граф без симметричных пар ориентированных рёбер, то есть такой пары рёбер* x *и* y*, что если* $x(u, v)$*, то* $y(v, u)$.

Определение. ***Кратные*** *(параллельные) рёбра* $x(u, v)$ *и* $y(u, v)$ *– рёбра, соединяющие одни и те же вершины.*

Определение. ***Петля*** $x = (a, a)$ *– ребро, соединяющее вершину саму с собой.*

Примечание. Для ориентированных графов эти понятия более естественны, так как не противоречат определению.

Определение. ***Висячая*** *вершина – вершина, в которую ведёт только одно ребро. Это ребро тоже называется* ***висячим****.*

Определение. ***Изолированная*** *вершина – вершина, в которую не ведёт ни одно ребро (петля).*

Определение. ***Простой*** *граф – граф без параллельных рёбер и петель.*

Определение. ***Псевдограф*** *– граф с параллельными рёбрами и петлями.*

Определение. ***Мультиграф*** *– псевдограф без петель.*

Степень вершины

Определение. ***Степень*** *вершины в неориентированном графе $G(V, E)$ v_i – число рёбер, инцидентных с ней.*

Определение. ***Степень входа*** *вершины $\deg^+ v_i$ – чило рёбер, входящих в вершину.*

Определение. ***Степень исхода*** *вершины $\deg^- v_i$ – число рёбер, исходящих из вершины.*

Лемма. ***(о рукопожатиях).***

1. *Для неориентированных графов:*
   Сумма степеней всех вершин графа – чётное число, равное удвоенному числу рёбер графа: $\sum\limits_{v \in V(G)} \deg v = 2|E(G)|$
   Доказательство:
   Для пустого графа сумма степеней всех вершин равна 0.
   При добавлении нового ребра у двух вершин степень увеличивается на 1, то есть суммарно на 2.
   При добавлении n новых рёбер сумма степеней увеличится на $2n$, что и требовалось доказать.
   Следствие. Произвольный граф содержит чётное число вершин нечётной степени.
   Доказательство:
   $V_0(G)$ - множество вершин чётной степени, $V_1(G)$ – множество вершин нечётной степени.
   $\sum\limits_{v \in V_0(G)} \deg v + \sum\limits_{u \in V_1(G)} \deg u = 2|E(G)|$. *Первое слагаемое – чётное число, потому что сумма чётных чисел всегда будет чётной. Результат тоже будет чётным. Слагаемое и сумма чётны, значит,* $\sum\limits_{u \in V_1(G)} \deg u$ *– тоже чётное число. Значит, количество нечётных $\deg u$ должно быть чётным, то есть $|V_1(G)|$ – чётно, что и требовалось доказать.*

2. *Для ориентированных графов:*
   Сумма входящих и исходящих степеней всех вершин графа – чётное число, равное удвоенному числу рёбер графа: $\sum\limits_{v \in V} \deg^+ v + \sum\limits_{v \in V} \deg^- v = 2|E|$
   Доказательство.
   Для пустого графа сумма входящих и исходящих степеней всех вершин равна 0.
   При добавлении нового ребра у одной вершины степень исхода увеличится на 1, а у другой – степень входа на 1, то есть суммарно на 2.
   При добавлении n рёбер сумма входящих и исхидящих степеней увеличится на $2n$, что и требовалось доказать.

Способы представления графа

1. Диаграмма – схематичный рисунок графа, где вершины – точки, рёбра – соединяющие их отрезки или дуги.

2. Список смежности – удобен для разреженных графов, у которых мало рёбер.

   (a) Неориентированный граф будет представлять из себя список (массив), каждый элемент которого – вершина графа, содержащая ссылки на каждую смежную с ней вершину. Сумма длин всех списков равна удвоенному числу рёбер. Объём используемой памяти – $\Theta(|E| + |V|)$.

(b) Ориентированный граф будет представлять собой примерно то же, что и неориентированный, но только в нём не будут дублироваться ссылки на смежные вершины, а будут присутствовать в единственном варианте. Сумма длин всех списков равна числу рёбер. Объем используемой памяти – $\Theta(|E| + |V|)$.

3. Матрица смежности – удобна для плотных графов, у которых много рёбер. Представляет из себя матрицу $A_{|V|\times|V|}$, в каждой ячейке которой записано количество рёбер, соединяющих вершины.

   (a) В неориентированном графе петля учитывается дважды. Матрица будет симметрична. Значит, объём используемой памяти $\Theta(|V|^2)$ можно уменьшить до $\Theta\left(\frac{|V|^2}{2}\right)$, оставив только главную диагональ и всё, что выше неё. Сумма значений в столбце или строке будет степенью вершины.

   (b) В ориентированном графе петля учитывается единожды. Объём используемой памяти – $\Theta(|V|^2)$. Сумма значений в строке будет степенью исхода вершины, а в столбце – степенью входа.

   Свойства:

   (a) В простом графе – бинарна;

   (b) В простом графе – главная диагональ состоит из нулей;

   (c) В неориентированном графе – симметрична относительно главной диагонали;

   (d) В ориентированном графе – сумма элементов в строке равна степени входа вершины, в столбце – исхода вершины.

   Во взвешенном графе вместо 1 хранится вес ребра, вместо 1 – nil.

4. Матрица инцедентности – удобна для графов с кратными рёбрами и петлями. Представляет из себя матрицу $I_{|V|\times|E|}$

   (a)