

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

II-ой семестр

sltKaguya

Группа М3104

8 февраля 2022 г. — 8 февраля 2022 г.

Что добавить

1. Более общее (мне пофиг, пишу как хочу) определение графа, и добавить снизу главу про неориентированные;
2. Поправить обозначения отдельных вершин и рёбер.

Введение в теорию графов

Определение. *Граф* $G(V, E)$ – множество вершин V и рёбер E , такое, что E является подмножеством множества двухэлементных подмножеств множества V (для неориентированного графа).

Определение. *Ребро* – неупорядоченная пара $\{u, v\}$, где $u, v \in V$ и $u \neq v$ (для неориентированного графа).

Если x – ребро с концами u и v , то x **инцидентен** u и v , u и v **инцидентны** x .

Вершины u и v называются смежными, если являются концами одного ребра.

Рёбра x и y называются смежными, если имеют общую вершину.

Определение. *Взвешенный граф* – граф с весами на рёбрах, то есть каждое ребро графа имеет числовое значение. Пример: расстояние, цена и так далее.

Определение. *Тривиальный граф* – граф из одной вершины: $G(V, \emptyset)$, $|V| = 1$.

Определение. *Пустой граф* или *нуль граф* – граф без рёбер: $G(V, \emptyset)$.

Примечание. В некоторых источниках в пустом графе нет даже вершин: $G(\emptyset, \emptyset)$.

Ориентированный граф

Определение. *Ориентированный граф* – множество вершин V и ориентированных рёбер E .

Определение. *Ориентированное ребро* – упорядоченная пара (u, v) , где $u, v \in V$.

Определение. *Направленный граф* – граф без симметричных пар ориентированных рёбер, то есть такой пары рёбер x и y , что если $x(u, v)$, то $y(v, u)$.

Определение. *Кратные (параллельные) рёбра* $x(u, v)$ и $y(u, v)$ – рёбра, соединяющие одни и те же вершины.

Определение. *Петля* $x = (a, a)$ – ребро, соединяющее вершину саму с собой.

Примечание. Для ориентированных графов эти понятия более естественны, так как не противоречат определению.

Определение. *Висячая вершина* – вершина, в которую ведёт только одно ребро. Это ребро тоже называется **висячим**.

Определение. *Изолированная вершина* – вершина, в которую не ведёт ни одно ребро (петля).

Определение. *Простой граф* – граф без параллельных рёбер и петель.

Определение. *Псевдограф* – граф с параллельными рёбрами и петлями.

Определение. *Мультиграф* – псевдограф без петель.

Степень вершины

Определение. *Степень* вершины в неориентированном графе $G(V, E)$ v_i – число рёбер, инцидентных с ней.

Определение. *Степень входа* вершины $\deg^+ v_i$ – число рёбер, входящих в вершину.

Определение. *Степень исхода* вершины $\deg^- v_i$ – число рёбер, исходящих из вершины.

Лемма. (о рукопожатиях).

1. Для неориентированных графов:

Сумма степеней всех вершин графа – чётное число, равное удвоенному числу рёбер графа: $\sum_{v \in V(G)} \deg v = 2|E(G)|$

Доказательство:

Для пустого графа сумма степеней всех вершин равна 0.

При добавлении нового ребра у двух вершин степень увеличивается на 1, то есть суммарно на 2.

При добавлении n новых рёбер сумма степеней увеличится на $2n$, что и требовалось доказать.

Следствие. Произвольный граф содержит чётное число вершин нечётной степени.

Доказательство:

$V_0(G)$ – множество вершин чётной степени, $V_1(G)$ – множество вершин нечётной степени.

$\sum_{v \in V_0(G)} \deg v + \sum_{u \in V_1(G)} \deg u = 2|E(G)|$. Первое слагаемое – чётное число, потому что сумма чётных чисел всегда будет чётной. Результат тоже будет чётным. Слагаемое u и сумма чётны, значит, $\sum_{u \in V_1(G)} \deg u$ – тоже чётное число. Значит, ко-

личество нечётных $\deg u$ должно быть чётным, то есть $|V_1(G)|$ – чётно, что и требовалось доказать.

2. Для ориентированных графов:

Сумма входящих и исходящих степеней всех вершин графа – чётное число, равное удвоенному числу рёбер графа: $\sum_{v \in V} \deg^+ v + \sum_{v \in V} \deg^- v = 2|E|$

Доказательство.

Для пустого графа сумма входящих и исходящих степеней всех вершин равна 0.

При добавлении нового ребра у одной вершины степень исхода увеличится на 1, а у другой – степень входа на 1, то есть суммарно на 2.

При добавлении n рёбер сумма входящих и исходящих степеней увеличится на $2n$, что и требовалось доказать.

Способы представления графа

1. Диаграмма – схематичный рисунок графа, где вершины – точки, рёбра – соединяющие их отрезки или дуги.

2. Список смежности – удобен для разреженных графов, у которых мало рёбер.

(а) Неориентированный граф будет представлять из себя список (массив), каждый элемент которого – вершина графа, содержащая ссылки на каждую смежную с ней вершину. Сумма длин всех списков равна удвоенному числу рёбер. Объём используемой памяти – $\theta(|E| + |V|)$.

- (b) Ориентированный граф будет представлять собой примерно то же, что и неориентированный, но только в нём не будут дублироваться ссылки на смежные вершины, а будут присутствовать в единственном варианте. Сумма длин всех списков равна числу рёбер. Объем используемой памяти – $\theta(|E| + |V|)$.
3. Матрица смежности – удобна для плотных графов, у которых много рёбер. Представляет из себя матрицу $A_{|V| \times |V|}$, в каждой ячейке которой записано количество рёбер, соединяющих вершины.
- (a) В неориентированном графе петля учитывается дважды. Матрица будет симметрична. Значит, объём используемой памяти $\theta(|V|^2)$ можно уменьшить до $\theta\left(\frac{|V|^2}{2}\right)$, оставив только главную диагональ и всё, что выше неё. Сумма значений в столбце или строке будет степенью вершины.
- (b) В ориентированном графе петля учитывается единожды. Объём используемой памяти – $\theta(|V|^2)$. Сумма значений в строке будет степенью исхода вершины, а в столбце – степенью входа.

Свойства:

- (a) В простом графе – бинарна;
- (b) В простом графе – главная диагональ состоит из нулей;
- (c) В неориентированном графе – симметрична относительно главной диагонали;
- (d) В ориентированном графе – сумма элементов в строке равна степени входа вершины, в столбце – исхода вершины.

Во взвешенном графе вместо 1 хранится вес ребра, вместо 1 – nil.

4. Матрица инцидентности – удобна для графов с кратными рёбрами и петлями. Представляет из себя матрицу $I_{|V| \times |E|}$
- (a)