Laboratório de Transformada Z

Consideremos o SLIT causal caracterizado pela equação de diferenças $y[n] - y[n-1] + 0.25y[n-2] = x[n]$, com condições iniciais $y[-1] = 1$ e $y[-2] = 1$ e sinal de entrada $x[n] = (1 - 0.25^n)u[n]$.

a) Determine a expressão da função de transferência do sistema.

A função de transferência do sistema é determinada independentemente do sinal de entrada e das condições iniciais. Aplicando a TZ a ambos os membros da equação de diferenças que caracteriza o sistema temos

$$Y(z) - z^{-1}Y(z) + 0.25z^{-2}Y(z) = X(z)$$
$$Y(z)(1 - z^{-1} + 0.25z^{-2}) = X(z)$$
$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - z^{-1} + 0.25z^{-2}}$$

Obtemos assim a função de transferência

$$H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1} + 0.25z^{-2}}$$

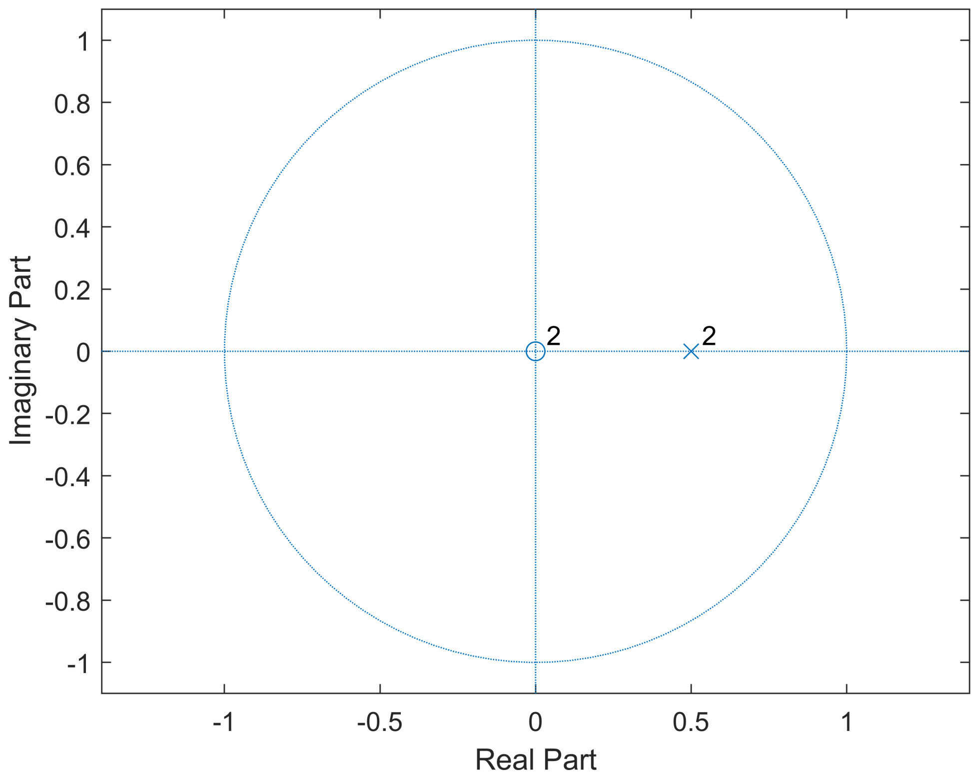
b) Represente o sistema no plano-z. Verifique se o sistema é estável.

A partir da função de transferência definimos facilmente os vetores dos coeficientes b e a

```
b=[1];
a=[1 -1 0.25];
```

Podemos fazer a representação do sistema no plano-z recorrendo à função

```
zplane(b,a)
```



conforme se mostra na figura acima. O sistema é estável dado que todos os pólos do sistema estão contidos dentro do círculo unitário.

c) Determine a expressão da resposta impulsiva do sistema.

Calculando o vetor r dos resíduos, o vetor p dos pólos respectivos, e o vector k dos coeficientes diretos

```
[r p k]=residuez(b,a)
```

```
r = 2×1
     0
     1
p = 2×1
    0.5000
    0.5000
k =

     []
```

Pelo que a expansão em frações simples resulta, tendo em atenção a existência de um pólo duplo

$$
\begin{aligned}
H(z) &= \frac{r_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{r_2}{(1 - p_2 z^{-1})^2} \\
&= \frac{1}{(1 - 0.5z^{-1})^2}
\end{aligned}
$$

Recorrendo à função iztrans

```
syms z
iztrans(1/(1-0.5*z^-1)^2)
```

```
ans =
```

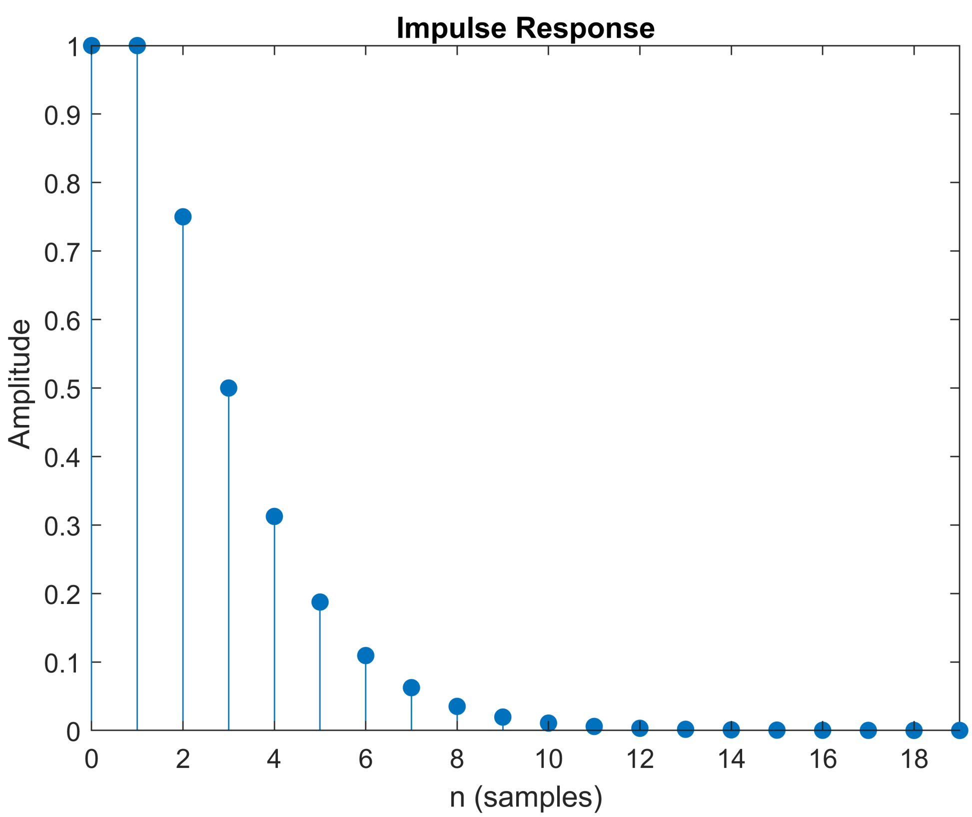
$$2\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n (n-1)$$

obtemos de imediato a resposta impulsiva

$$h[n] = (n+1)0.5^n u[n]$$

d) Represente a resposta impulsiva do sistema. Podemos fazer a representação da resposta impulsiva recorrendo à função impz(b, a, n)

```
impz(b,a,20)
```



conforme se mostra na figura a acima.

e) Determine a expressão da resposta em frequência do sistema.

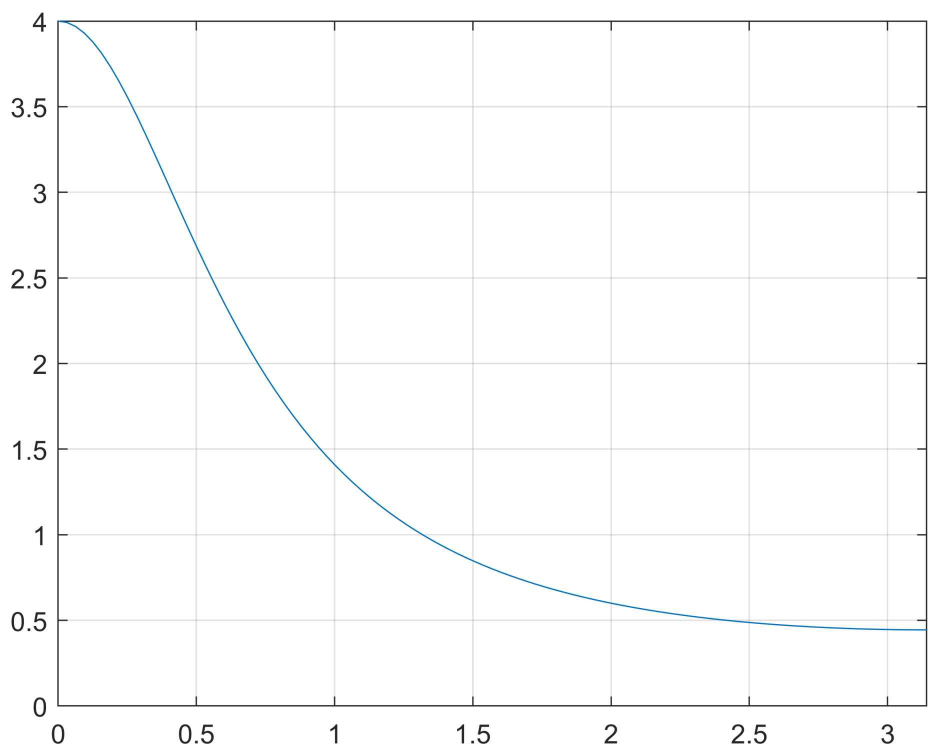
A expressão da resposta em frequência do sistema é imediata a partir do conhecimento da função de transferência.

$$H(\Omega) = H(z)\big|_{z=e^{j\Omega}} = \frac{1}{1 - e^{-j\Omega} + 0.25e^{-2j\Omega}}$$

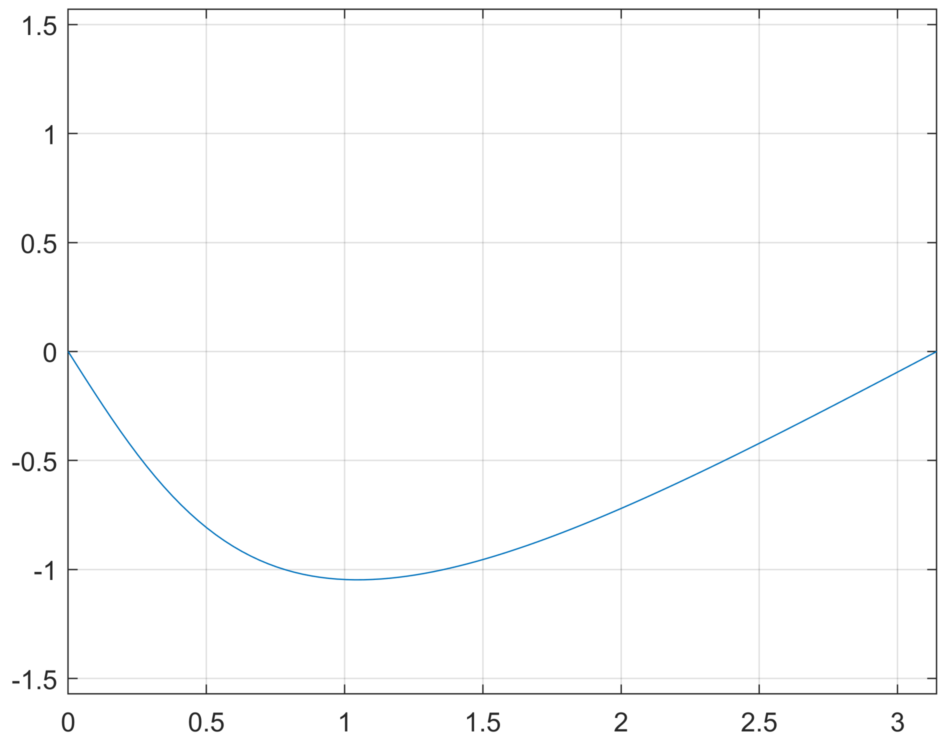
f) Represente graficamente a resposta em frequência do sistema.

Podemos fazer a representação da resposta em frequência recorrendo à função freqz(b, a, w)

```
w=0:pi/100:pi;
[H w]=freqz(b,a,w);
figure(3);plot(w,abs(H));grid on
axis([min(w) max(w) 0 max(abs(H))])
```




```
figure(4);plot(w,angle(H));grid on
axis([min(w) max(w) -pi/2 pi/2])
```



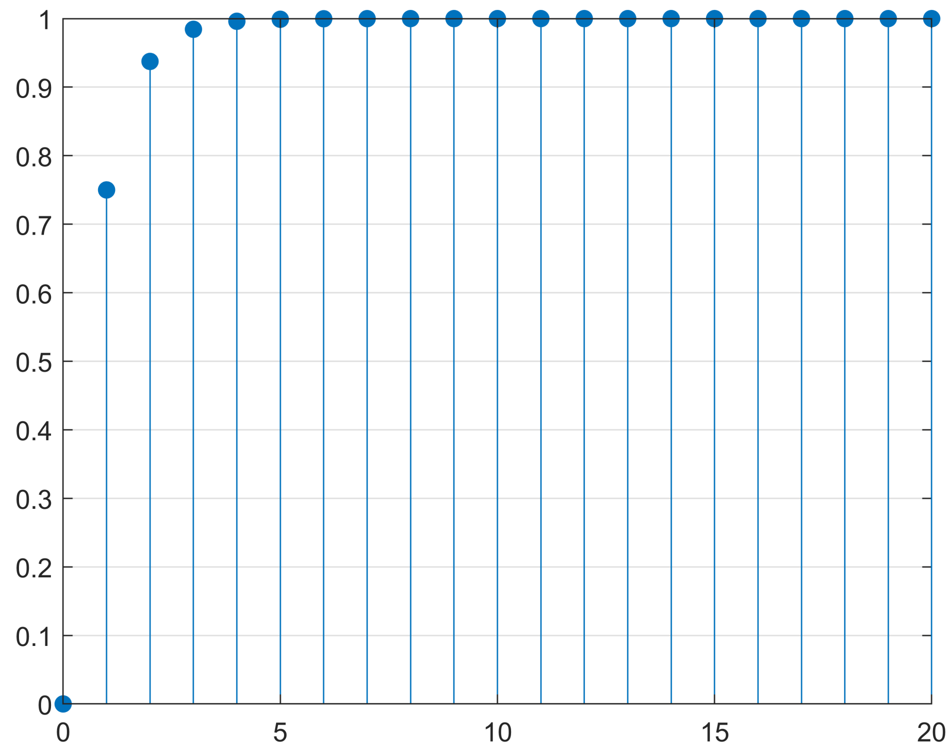
obtendo assim a resposta de amplitude e de fase que se mostra na figura acima.

g) Represente o sinal de entrada

$$x[n] = (1 - 0.25^{n})$$

Fazendo

```
n=0:20;
x=(1-0.25.^(n));
figure(5);
stem(n,x,'filled'); grid on
```



obtemos o gráfico da figura acima.

h) Calcule a TZ do sinal de entrada

Podemos calcular a TZ do sinal recorrendo à função ztrans

```
syms n
X= simplify(ztrans(1-0.25^n))
```

```
X =
```

$$\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-\frac{1}{4}}$$

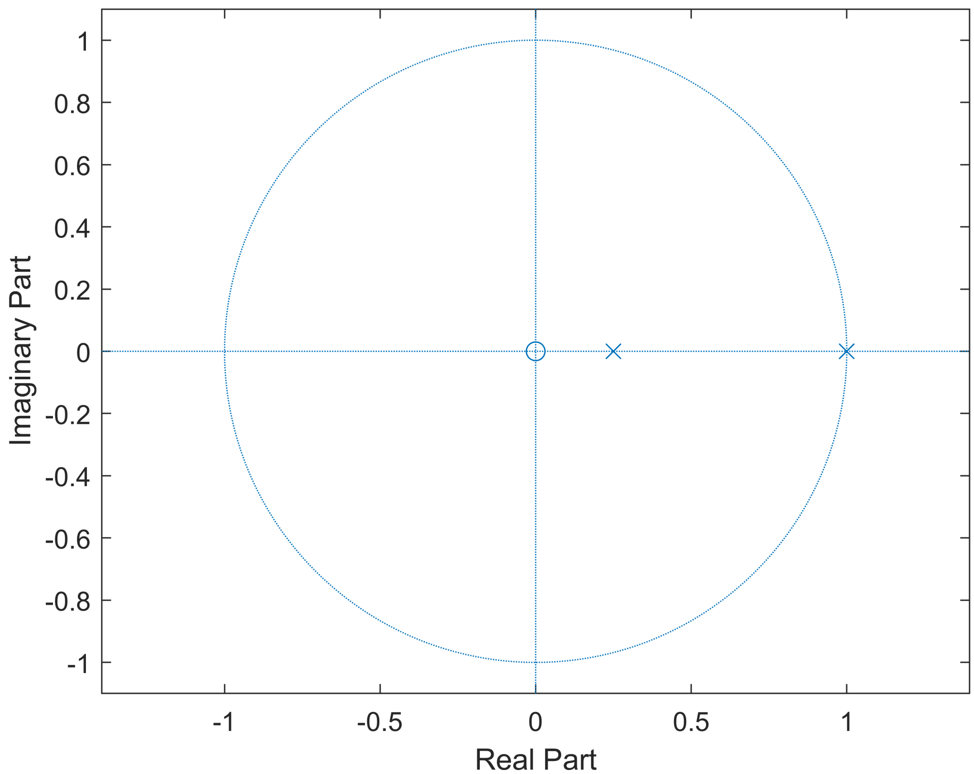
i) **Represente o sinal de entrada no plano-z**

Definindo os vectores dos coeficientes b e a

```
b=[0 0.75];
a=poly([1 0.25]);
```

Podemos fazer a representação do sistema no plano-z recorrendo à função zplane(b, a)

```
zplane(b,a)
```



conforme se mostra na figura acima.

j) Admitindo as condições iniciais nulas, determine a TZ da resposta do sistema ao sinal de entrada

$x[n] = 1 - 0.25^n$

Represente-a no plano-z.

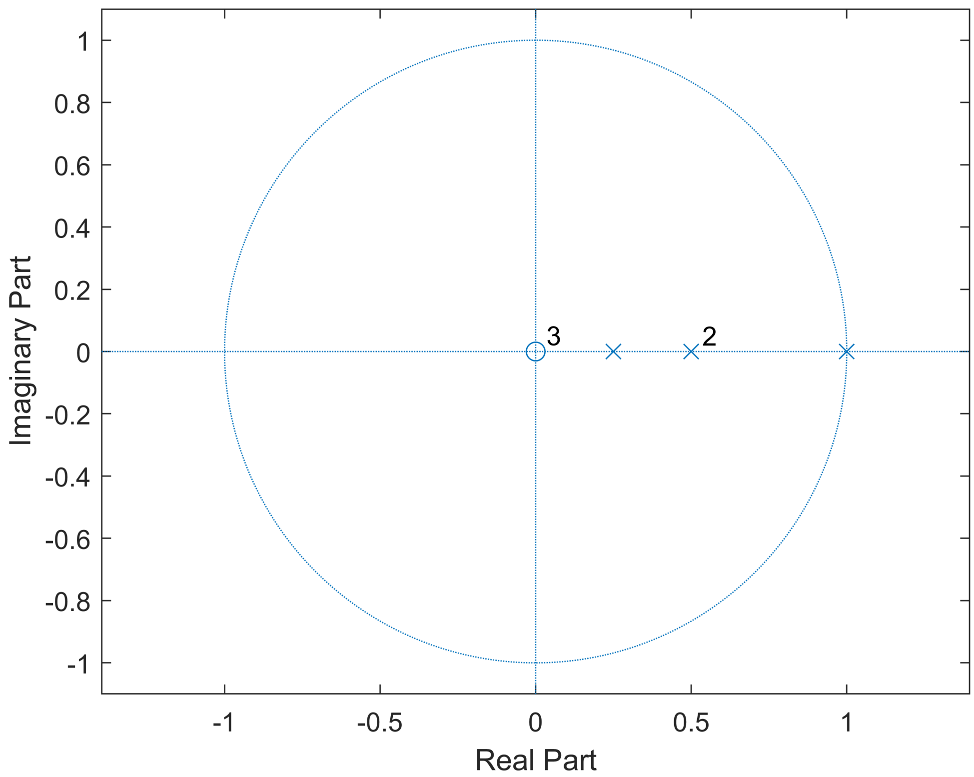
$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{X(z)}{1 - z^{-1} + 0.25z^{-2}} \\ &= \frac{0.75z^{-1}}{(1 - 0.5z^{-1})^2(1 - z^{-1})(1 - 0.25z^{-1})} \end{aligned}$$

Definindo os vetores dos coeficientes b e a, recorrendo à função poly,

```
b=[0 0.75];
a=poly([0.5 0.5 1 0.25]);
```

e fazendo a representação no plano-z recorrendo à função zplane(b, a)

```
zplane(b,a)
```



obtemos a figura acima.

k) Determine a expressão da resposta do sistema ao sinal de entrada.

Calculando o vetor r dos resíduos, o vetor p dos pólos respectivos, e o vector k dos coeficientes diretos

```
[r p k]=residuez(b,a)
```

```
r = 4×1 complex
   4.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i
  -3.0000 - 0.0000i
  -1.0000 + 0.0000i
p = 4×1 complex
   1.0000 + 0.0000i
   0.5000 + 0.0000i
   0.5000 - 0.0000i
   0.2500 + 0.0000i
k =

     []
```

resulta a expansão em frações simples

$$
\begin{aligned}
Y(z) &= \frac{r_1}{1-p_1 z^{-1}} + \frac{r_2}{1-p_2 z^{-1}} + \frac{r_3}{(1-p_3 z^{-1})^2} + \frac{r_4}{1-p_4 z^{-1}} \\
&= \frac{4}{1-z^{-1}} + \frac{-3}{(1-0.5z^{-1})^2} + \frac{-1}{1-0.25z^{-1}}
\end{aligned}
$$

Recorrendo à função iztrans

```
syms z
iztrans(4/(1-z^-1)-3/(1-0.5*z^-1)^2-1/(1-0.25*z^-1))
```

```
ans =
```

$$4 - \left(\frac{1}{4}\right)^n - 3\left(\frac{1}{2}\right)^n (n-1) - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

obtemos de imediato a resposta do sistema

$$y[n] = 4u[n] - 3(n+1)0.5^n u[n] - 0.25^n u[n]$$

l) Identifique a componente homogénea e a componente particular na expressão da resposta do sistema.

Estando a resposta homogénea associada aos pólos do sistema e a resposta particular associada, aos pólos do sinal de entrada temos

$$y[n] = \underbrace{-3(n+1)0.5^n u[n]}_{\text{Homógenea}} + \underbrace{(4-0.25^n)u[n]}_{\text{Particular}}$$

m) Identifique a componente transitória e a componente estacionária na expressão da resposta do sistema.

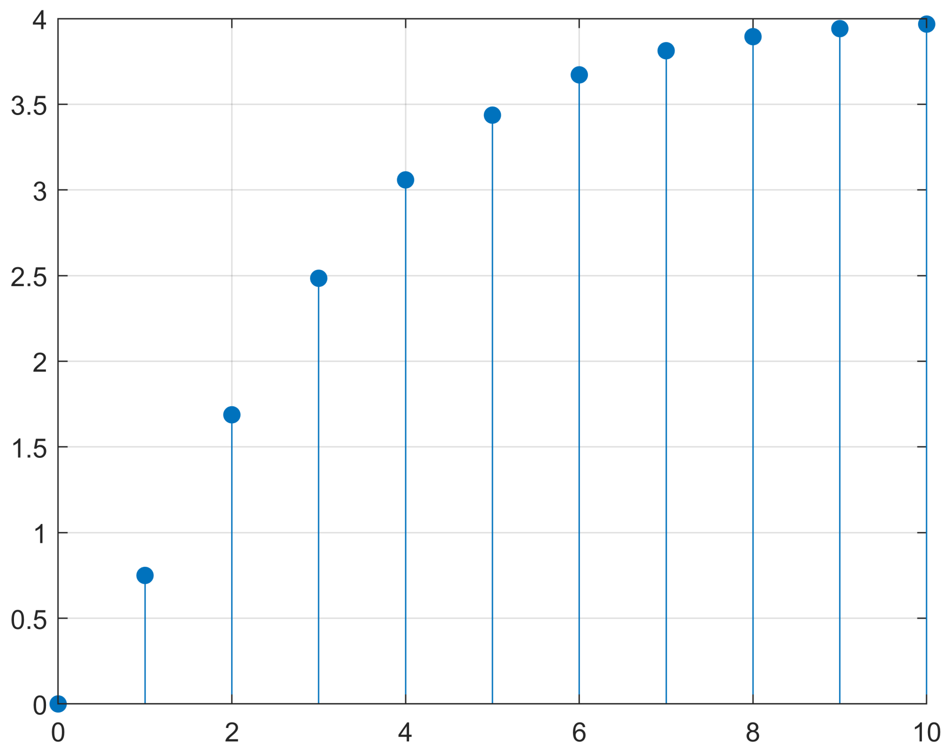
A componente transitória está associada aos pólos existentes dentro do círculo unitário, e a componente estacionária está associada aos pólos existentes sobre o círculo unitário

$$y[n] = \underbrace{(-3(n+1)0.5^n - 0.25^n)u[n]}_{\text{Transitória}} + \underbrace{4u[n]}_{\text{Estacionária}}$$

n) Represente a resposta do sistema ao sinal de entrada

Fazendo

```
n=0:10;
x=4-(3*(n+1)).*(0.5).^n-(0.25).^n;
figure(8);stem(n,x,'filled'); grid on;
```

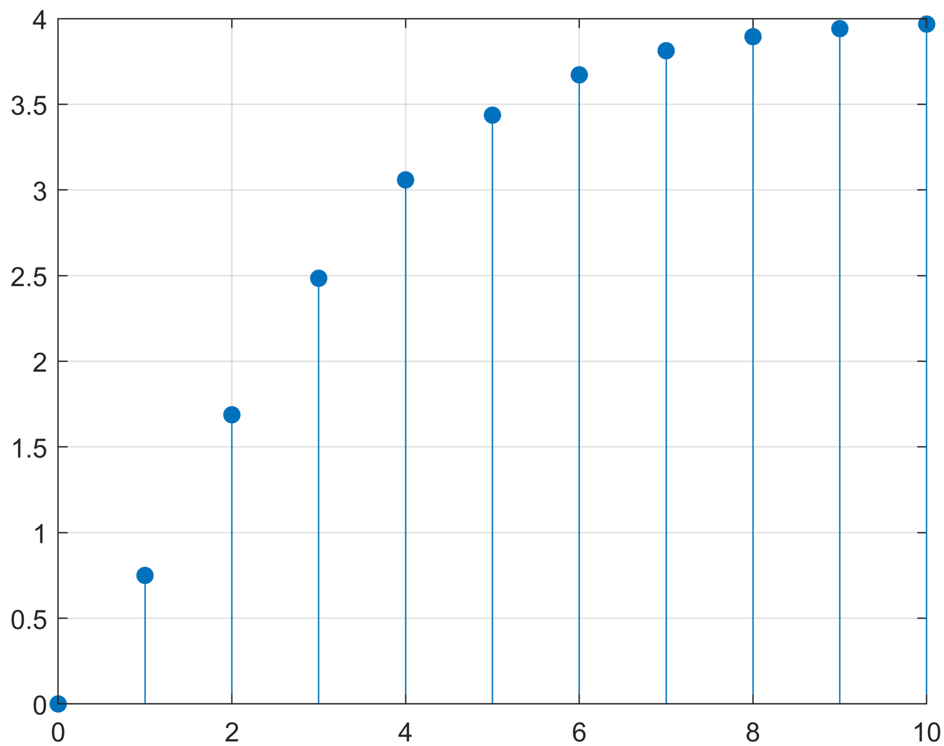


obtemos o gráfico da figura acima.

o) Represente a resposta do sistema ao sinal de entrada utilizando a função filter(b, a, x)

Se não estivermos interessados em conhecer a expressão analítica da resposta do sistema, e apenas nos interessar obter um esboço da resposta do sistema ao um dado sinal de entrada, podemos recorrer de imediato à função filter(b, a, x). No presente exemplo, fazendo

```
n=0:10;
x=1-0.25.^(n);
b=[1];
a=[1 -1 0.25];
y=filter(b,a,x);
figure(9);stem(n,y,'filled'); grid on;
```



obtemos um gráfico idêntico ao que se mostra na figura acima.

p) Admita agora as condições iniciais não nulas. Determine o sinal xCI[n] **que, colocado na entrada do sistema com condições iniciais nulas, provoca uma resposta equivalente à existência das condições iniciais.**

Admitindo as condições iniciais e calculando a TZ de ambos os membros da equação às diferenças resulta

$$Y(z) - (y(-1) + z^{-1}Y(z)) + 0.25((y(-2) + z^{-1}y(-1) + z^{-2}Y(z)) = X(z)$$

ou seja

$$Y(z)(1 - z^{-1} + 0.25z^{-2}) = X(z) + y(-1) - 0.25y(-2) - 0.25z^{-1}y(-1)$$

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{X(z)}{1 - z^{-1} + 0.25z^{-2}} + \frac{1 - 0.25 - 0.25z^{-1}}{1 - z^{-1} + 0.25z^{-2}} \\ &= \frac{X(z)}{1 - z^{-1} + 0.25z^{-2}} + \frac{0.75 - 0.25z^{-1}}{1 - z^{-1} + 0.25z^{-2}} \end{aligned}$$

pelo que

$$X_{CI}(z) = 0.75 - 0.25z^{-1}$$

logo

$$x_{CI}[n] = 0.75\delta[n] - 0.25\delta[n-1]$$

Agora recorrendo à função filtic(b, a, y, x),

```
y=[1 1];
xic=filtic(b,a,y)
```

```
xic = 1×2
    0.7500   -0.2500
```

verificando a dedução feita anteriormente.

q) Determine e TZ da resposta do sistema às condições iniciais

Imediatamente a partir das expressões acima

$$Y_{x_{CI}}(z) = \frac{0.75 - 0.25z^{-1}}{1 - z^{-1} + 0.25z^{-2}}$$

r) Determine a expressão da resposta do sistema às condições iniciais.

Definindo os vetores dos coeficientes b e a ,

```
b=[0.75 -0.25];
a=[1 -1 0.25];
```

Calculando o vector r dos resíduos, o vector p dos pólos respectivos, e o vector k dos coeficientes directos

```
[r p k]=residuez(b,a)
```

```
r = 2×1
    0.5000
    0.2500
p = 2×1
    0.5000
    0.5000
k =

     []
```

Pelo que a expansão em fracções simples resulta, atendendo à existência de um pólo duplo,

$$Y(z) = \frac{r_1}{1 - p_1z^{-1}} + \frac{r_2}{(1 - p_2z^{-1})^2} = \frac{0.5}{1 - 0.5z^{-1}} + \frac{0.25}{(1 - 0.5z^{-1})^2}$$

Recorrendo à função iztrans

```
syms z
```

```
iztrans(0.5/(1-0.5*z^-1)+0.25/(1-0.5*z^-1)^2)
```

```
ans =
```

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n (n-1)}{4}$$

obtemos de imediato a resposta do sistema para as condições iniciais

$$y[n] = (0.75 + 0.25n)\,0.5^n\,u[n]$$

s) Determine a resposta completa do sistema admitindo condições iniciais não nulas.

Atendendo aos resultados das alíneas k) e r) temos

$$y[n] = \underbrace{4u[n] - 3(n+1)0.5^n\,u[n] - 0.25^n\,u[n]}_{\text{Condições iniciais nulas}} + \underbrace{(0.75 + 0.25n)\,0.5^n\,u[n]}_{\text{Condições iniciais}}$$

pelo que a resposta completa resulta

$$y[n] = 4u[n] - (2.75n + 2.25)0.5^n\,u[n] - 0.25^n\,u[n]$$

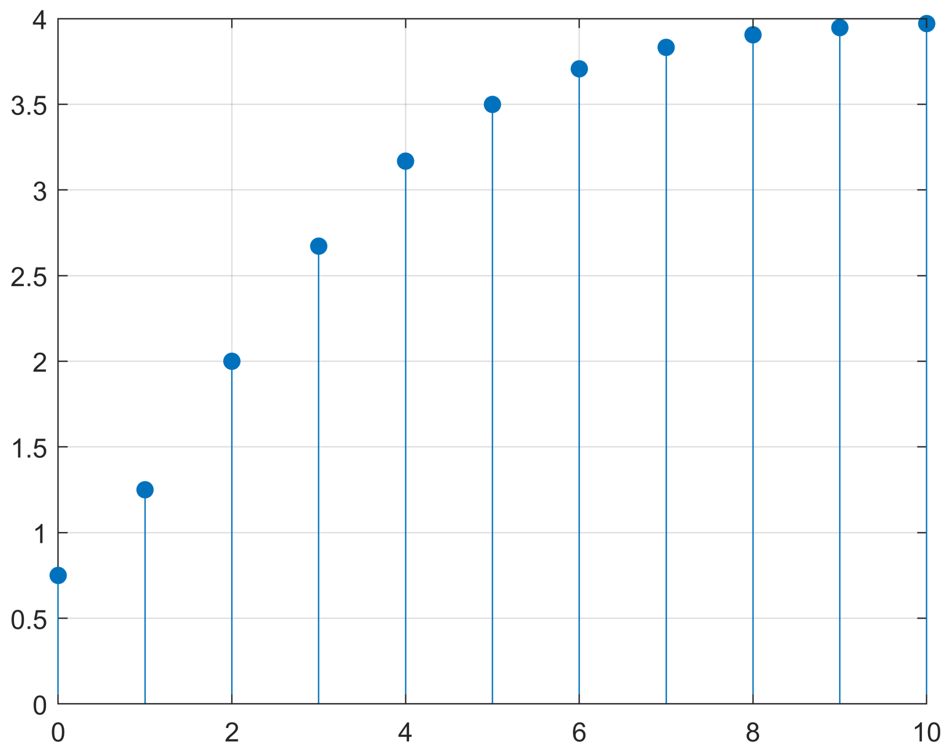
t) Represente a resposta do sistema ao sinal de entrada, admitindo condições iniciais não nulas.

Fazendo

```
n=0:10;
x=4-(2.75*n+2.25).*0.5.^n-0.25.^n
```

```
x = 1×11
    0.7500    1.2500    2.0000    2.6719    3.1680    3.4990    3.7068    3.8320 ⋯
```

```
figure(1);stem(n,x,'filled'); grid on;
```

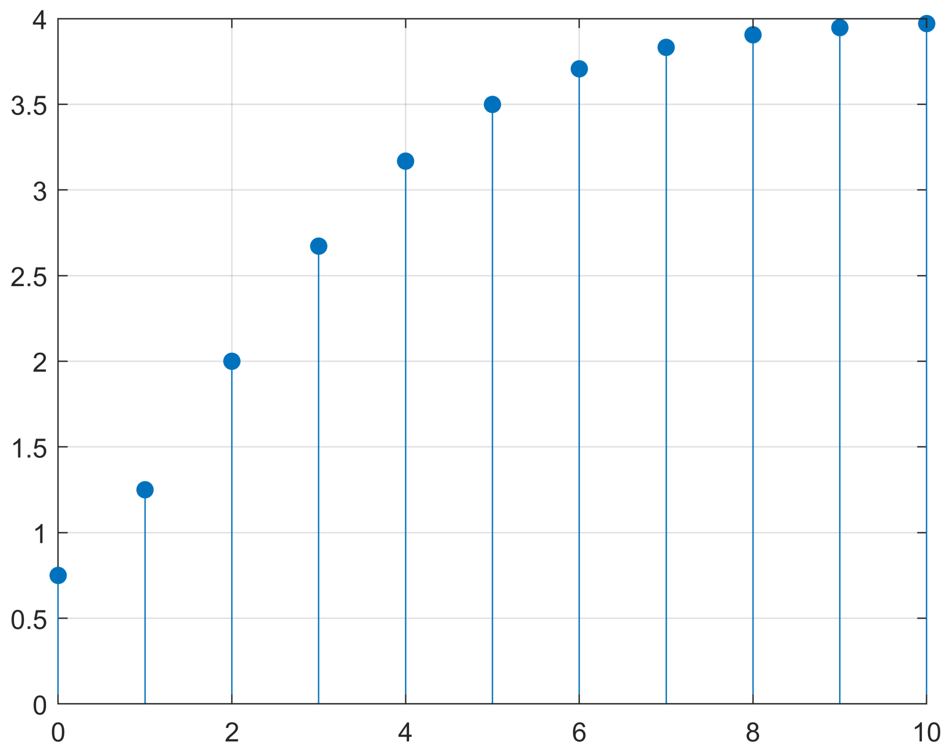


obtemos o gráfico da figura acima.

u) Represente a resposta do sistema ao sinal de entrada utilizando a função filter(b, a, x, xic)

A resposta de um sistema a um sinal de entrada dadas condições iniciais não nulas pode ser determinado utilizando a função filter(b, a, x, xic), em que xic (determinado na alínea p)) é o sinal de entrada equivalente às condições iniciais. Fazendo

```
n=0:10;
x=1-0.25.^(n);
b=[1];
a=[1 -1 0.25];
y=filter(b,a,x,xic);
figure(12);stem(n,y,'filled'); grid on;
```



obtemos um gráfico idêntico ao que se mostra na figura do item t.

Tarefa

Consideremos o SLIT causal caracterizado pela equação de diferenças

$$y[n] - 0.5y[n-1] - 0.25y[n-2] = x[n] + 0.5x[n-1]$$

condições iniciais

$$x(-1) = 0 \quad y(-1) = 1 \text{ e } y(-2) = -1$$

e sinal de entrada

$$x[n] = (1 - 0.9^n)u(n) .$$

a) Determine a expressão da função de transferência do sistema.

b) Represente o sistema no plano-z. Verifique se o sistema é estável.

c) Determine a expressão da resposta impulsiva do sistema.

d) Represente a resposta impulsiva do sistema.

e) Determine a expressão da resposta em frequência do sistema.

f) Represente graficamente a resposta em frequência do sistema.

g) Represente o sinal de entrada.

h) Calcule a TZ do sinal de entrada.

i) Represente o sinal de entrada no plano-z.

j) Determine a TZ da resposta do sistema ao sinal de entrada, admitido condições iniciais nulas. Represente-a no plano-z

k) Determine a expressão da resposta do sistema ao sinal de entrada.

l) Identifique a componente homogénea e a componente particular na expressão da resposta do sistema.

m) Identifique a componente transitória e a componente estacionária na expressão da resposta do sistema.

n) Represente a resposta do sistema ao sinal de entrada

o) Represente a resposta do sistema ao sinal de entrada utilizando a função filter(b, a, x)

p) Admita agora as condições iniciais não nulas. Determine o sinal xCI[n] que, colocado na entrada do sistema com condições iniciais nulas, provoca uma resposta equivalente à existência das condições iniciais.

q) Determine a TZ da resposta do sistema às condições iniciais.

r) Determine a expressão da resposta do sistema às condições iniciais.

s) Determine a resposta completa do sistema admitindo condições iniciais não nulas.

t) Represente a resposta do sistema ao sinal de entrada, admitindo condições iniciais não nulas.

u) Represente a resposta do sistema ao sinal de entrada utilizando a função filter(b, a, x, xic).