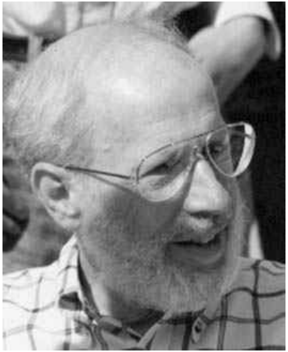
Grafos

Algoritmo de Kruskal

Prof. Edson Alves

Faculdade UnB Gama

Proponente



Joseph Bernard Kruskal, Jr.
(1962)

Características do algoritmo de Kruskal

Características do algoritmo de Kruskal

- O algoritmo de Kruskal encontra uma MST usando uma abordagem gulosa

Características do algoritmo de Kruskal

- ⋆ O algoritmo de Kruskal encontra uma MST usando uma abordagem gulosa
- ⋆ As arestas são ordenadas, ascendentemente, por peso

Características do algoritmo de Kruskal

- O algoritmo de Kruskal encontra uma MST usando uma abordagem gulosa
- As arestas são ordenadas, ascendentemente, por peso
- Inicialmente os vértices formam uma floresta de vértices isolados

Características do algoritmo de Kruskal

⋆ O algoritmo de Kruskal encontra uma MST usando uma abordagem gulosa

⋆ As arestas são ordenadas, ascendentemente, por peso

⋆ Inicialmente os vértices formam uma floresta de vértices isolados

⋆ Na ordem estipulada, cada aresta que una dois componentes disjuntos fará parte da MST e unirá estes componentes distintos

Características do algoritmo de Kruskal

- ⋆ O algoritmo de Kruskal encontra uma MST usando uma abordagem gulosa
- ⋆ As arestas são ordenadas, ascendentemente, por peso
- ⋆ Inicialmente os vértices formam uma floresta de vértices isolados
- ⋆ Na ordem estipulada, cada aresta que una dois componentes disjuntos fará parte da MST e unirá estes componentes distintos
- ⋆ **Complexidade:** $O(E \log V)$

Pseudocódigo

Pseudocódigo

Entrada: um grafo ponderado $G(V, E)$

Saída: uma MST de G

Pseudocódigo

Entrada: um grafo ponderado $G(V, E)$

Saída: uma MST de G

1. Faça $M = \emptyset$ e seja $F(V, \emptyset)$ uma floresta de vértices isolados

Pseudocódigo

Entrada: um grafo ponderado $G(V, E)$

Saída: uma MST de G

1. Faça $M = \emptyset$ e seja $F(V, \emptyset)$ uma floresta de vértices isolados
2. Ordene E ascendentemente, por peso

Pseudocódigo

Entrada: um grafo ponderado $G(V, E)$

Saída: uma MST de G

1. Faça $M = \emptyset$ e seja $F(V, \emptyset)$ uma floresta de vértices isolados
2. Ordene E ascendentemente, por peso
3. Para cada $(u, v, w) \in E$, se u e v estão em componentes distintos de F:
   (a) una estes componentes em F
   (b) inclua (u, v, w) no conjunto M

Pseudocódigo

Entrada: um grafo ponderado $G(V, E)$

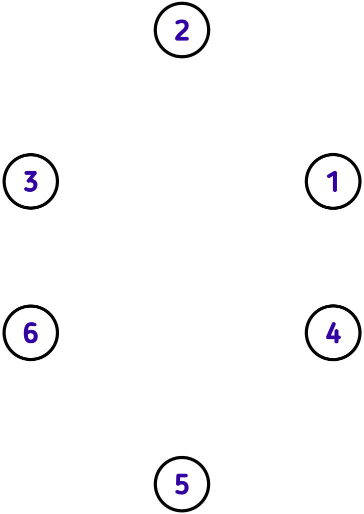
Saída: uma MST de G

1. Faça $M = \emptyset$ e seja $F(V, \emptyset)$ uma floresta de vértices isolados

2. Ordene E ascendentemente, por peso

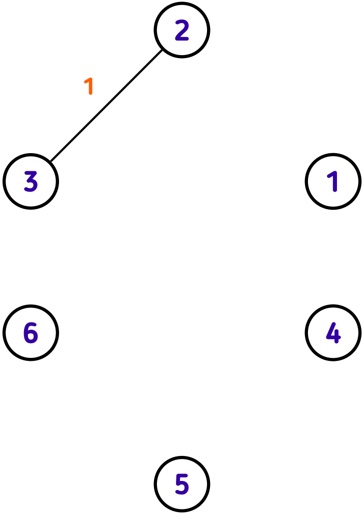
3. Para cada $(u, v, w) \in E$, se u e v estão em componentes distintos de F:
   (a) una estes componentes em F
   (b) inclua (u, v, w) no conjunto M

4. Retorne M



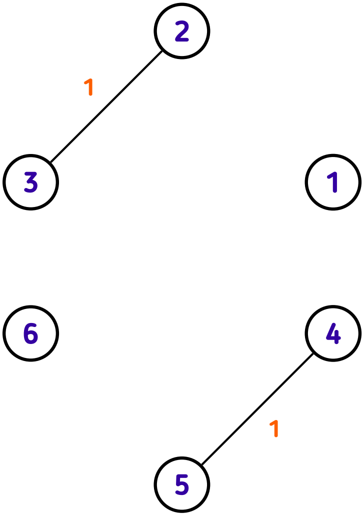
E

1	2	3
1	4	5
2	4	1
2	1	5
3	3	4
4	2	1
5	3	1
7	3	6
8	6	5



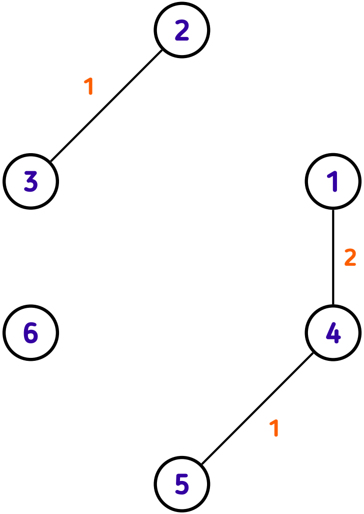
E

1	2	3	✓
1	4	5	
2	4	1	
2	1	5	
3	3	4	
4	2	1	
5	3	1	
7	3	6	
8	6	5	



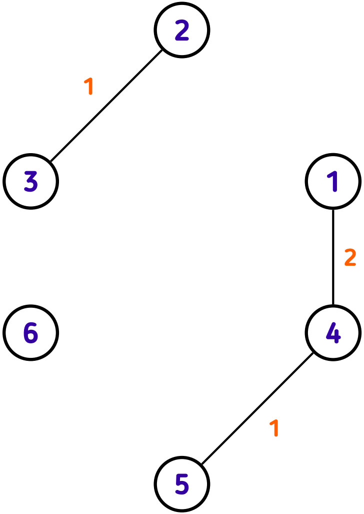
E

1	2	3	✓
1	4	5	✓
2	4	1	
2	1	5	
3	3	4	
4	2	1	
5	3	1	
7	3	6	
8	6	5	



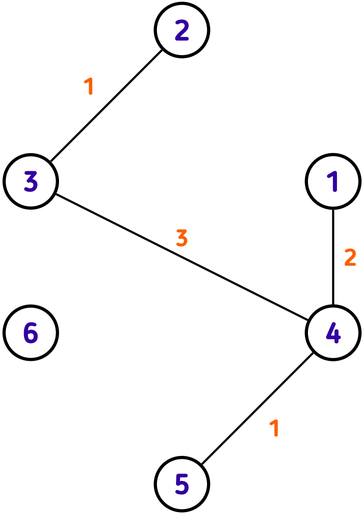
E

1	2	3	✓
1	4	5	✓
2	4	1	✓
2	1	5	
3	3	4	
4	2	1	
5	3	1	
7	3	6	
8	6	5	



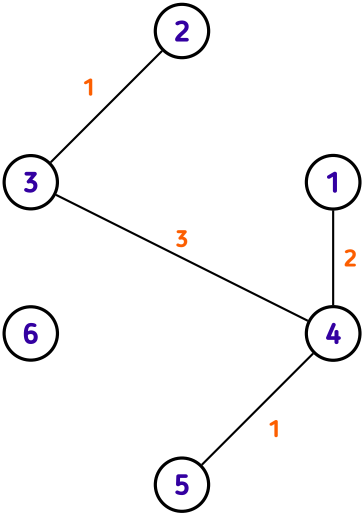
E

1	2	3	✓
1	4	5	✓
2	4	1	✓
2	1	5	✗
3	3	4	
4	2	1	
5	3	1	
7	3	6	
8	6	5	



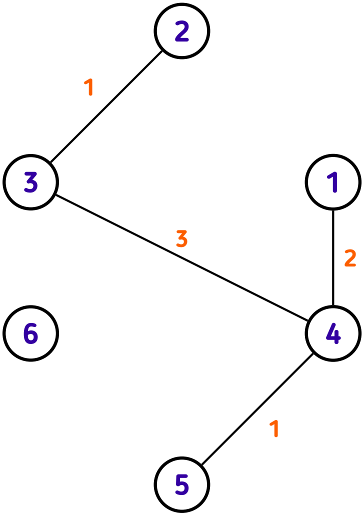
E

1	2	3	✓
1	4	5	✓
2	4	1	✓
2	1	5	✗
3	3	4	✓
4	2	1	
5	3	1	
7	3	6	
8	6	5	



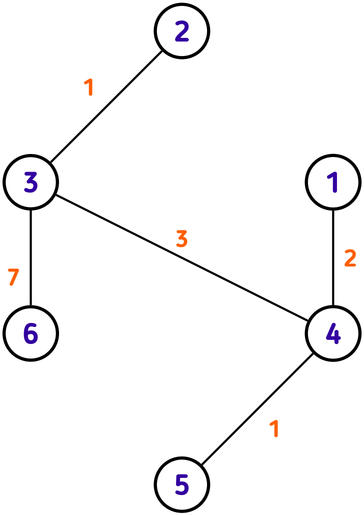
E

1	2	3	✓
1	4	5	✓
2	4	1	✓
2	1	5	✗
3	3	4	✓
4	2	1	✗
5	3	1	
7	3	6	
8	6	5	



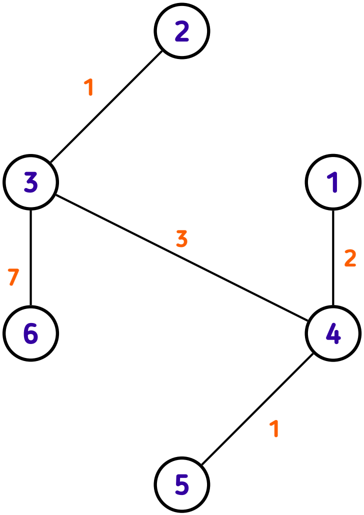
E

1	2	3	✓
1	4	5	✓
2	4	1	✓
2	1	5	✗
3	3	4	✓
4	2	1	✗
5	3	1	✗
7	3	6	
8	6	5	



E

1	2	3	✓
1	4	5	✓
2	4	1	✓
2	1	5	✗
3	3	4	✓
4	2	1	✗
5	3	1	✗
7	3	6	✓
8	6	5	



E

1	2	3	✓
1	4	5	✓
2	4	1	✓
2	1	5	✗
3	3	4	✓
4	2	1	✗
5	3	1	✗
7	3	6	✓
8	6	5	✗

Identificação e união dos componentes conectados

Identificação e união dos componentes conectados

- ⋆ A complexidade do algoritmo de Kruskal depende da identificação e união eficiente dos componentes conectados

Identificação e união dos componentes conectados

- ⋆ A complexidade do algoritmo de Kruskal depende da identificação e união eficiente dos componentes conectados

- ⋆ A *union-find disjoint sets* (UFDS) (também conhecida como *disjoint set union* – DSU) é uma estrutura de dados que atende a esta demanda

Identificação e união dos componentes conectados

- $\star$ A complexidade do algoritmo de Kruskal depende da identificação e união eficiente dos componentes conectados

- $\star$ A *union-find disjoint sets* (UFDS) (também conhecida como *disjoint set union* – DSU) é uma estrutura de dados que atende a esta demanda

- $\star$ A operação `same_set`(u, v) retorna verdadeiro se ambos u e v pertencem ao mesmo componente conectado, em $O(\log V)$

Identificação e união dos componentes conectados

$\star$ A complexidade do algoritmo de Kruskal depende da identificação e união eficiente dos componentes conectados

$\star$ A *union-find disjoint sets* (UFDS) (também conhecida como *disjoint set union* – DSU) é uma estrutura de dados que atende a esta demanda

$\star$ A operação `same_set(`u`, `v`)` retorna verdadeiro se ambos u e v pertencem ao mesmo componente conectado, em $O(\log V)$

$\star$ A operação `union_set(`u`, `v`)` une os componentes distintos onde estão localizados u e v, também em $O(\log V)$

```cpp
int kruskal(int N, vector<edge>& es)
{
    sort(es.begin(), es.end());

    int cost = 0;
    UnionFind ufds(N);

    for (auto [w, u, v] : es)
    {
        if (not ufds.same_set(u, v))
        {
            cost += w;
            ufds.union_set(u, v);
        }
    }

    return cost;
}
```

Aplicação: Floresta mínima geradora

Aplicação: Floresta mínima geradora

⋆ Uma floresta mínima geradora F_k pode ser identificada por meio de uma modificação simples no algoritmo de Kruskal

Aplicação: Floresta mínima geradora

- $\star$ Uma floresta mínima geradora F_k pode ser identificada por meio de uma modificação simples no algoritmo de Kruskal

- $\star$ Inicialmente, a floresta de vértices isolados contém V componentes

Aplicação: Floresta mínima geradora

- $\star$ Uma floresta mínima geradora F_k pode ser identificada por meio de uma modificação simples no algoritmo de Kruskal
- $\star$ Inicialmente, a floresta de vértices isolados contém V componentes
- $\star$ A cada união de componentes, o total é reduzido em uma unidade

Aplicação: Floresta mínima geradora

- ⋆ Uma floresta mínima geradora F_k pode ser identificada por meio de uma modificação simples no algoritmo de Kruskal

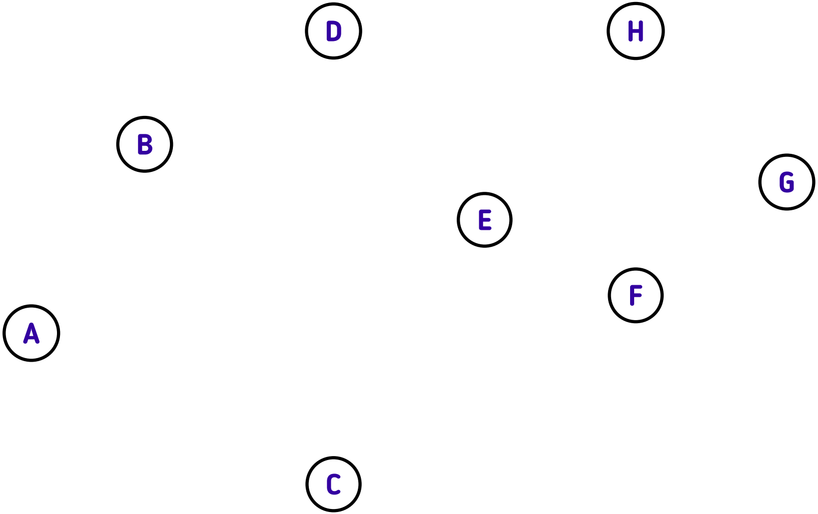
- ⋆ Inicialmente, a floresta de vértices isolados contém V componentes

- ⋆ A cada união de componentes, o total é reduzido em uma unidade

- ⋆ Quando a contagem de componentes for igual a k, o algoritmo deve ser encerrado

$k = 4$

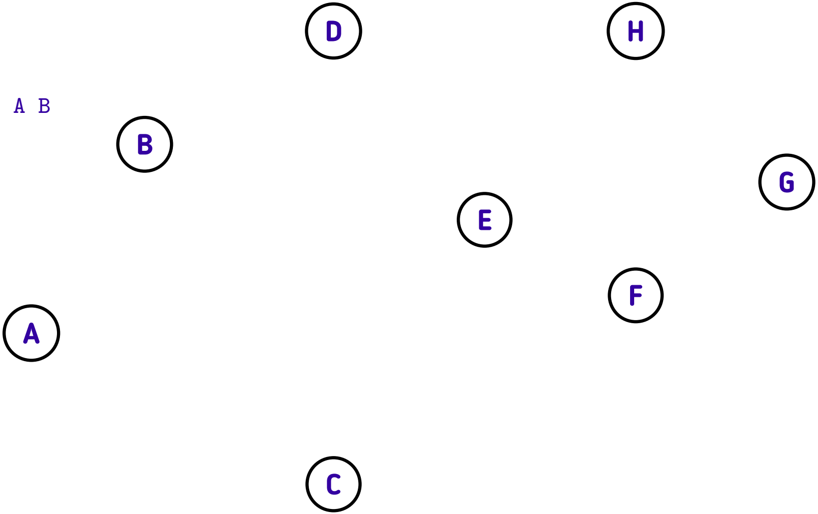
componentes: 8



$k = 4$

componentes: 8

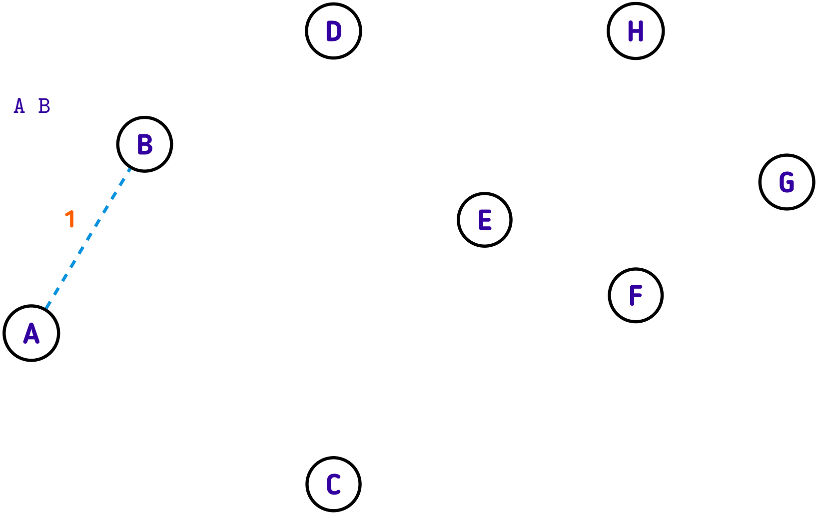
próxima aresta: `1 A B`



$k = 4$

componentes: **7**

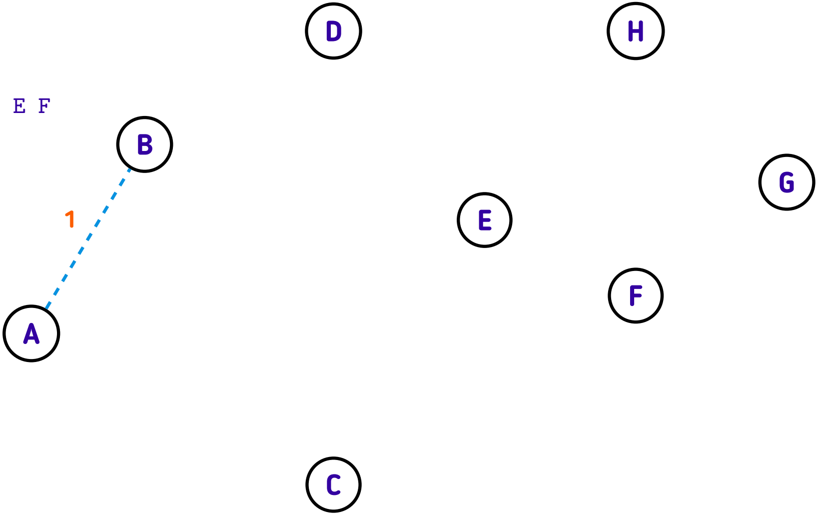
próxima aresta: `1 A B`



$k = 4$

componentes: 7

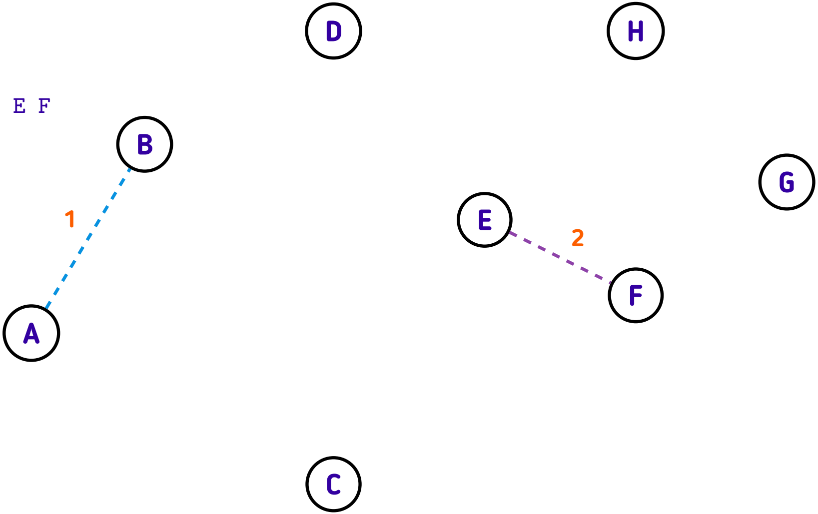
próxima aresta: `2 E F`



$k = 4$

componentes: 6

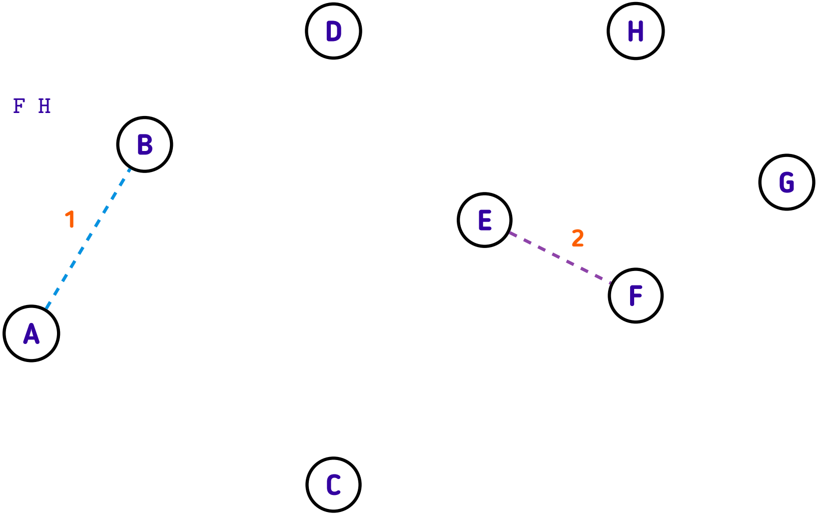
próxima aresta: `2 E F`



$k = 4$

componentes: 6

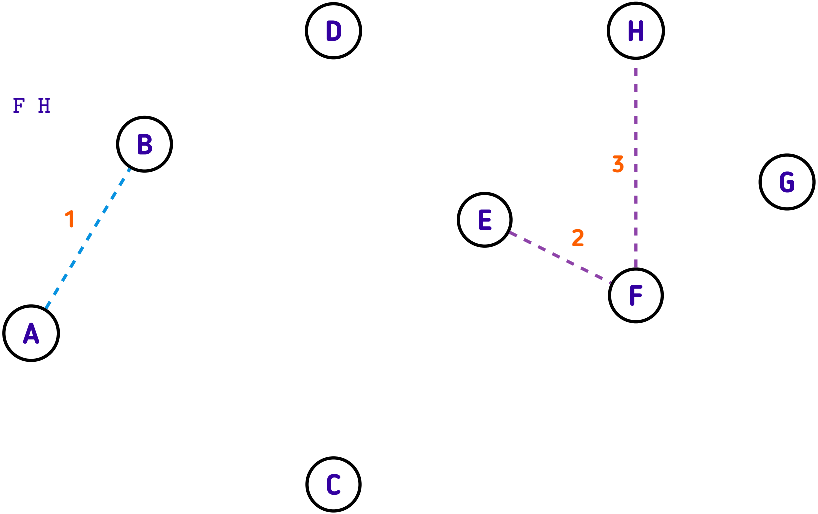
próxima aresta: `3 F H`



$k = 4$

componentes: 5

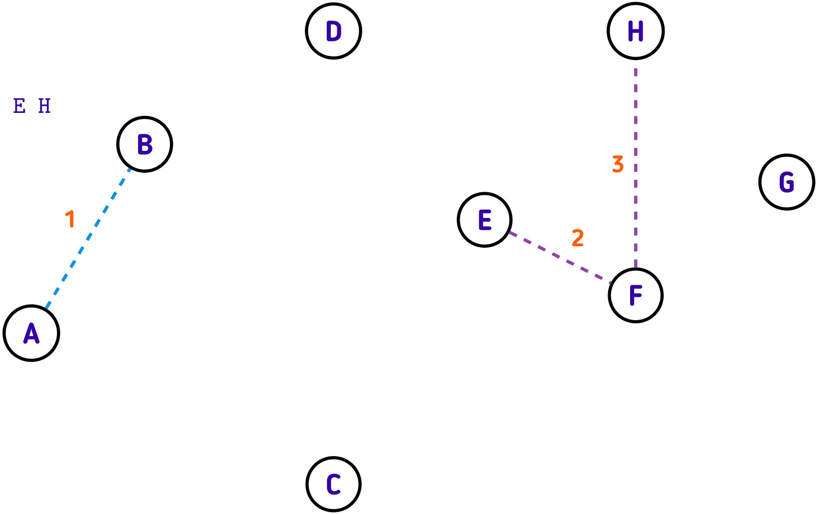
próxima aresta: `3 F H`



$k = 4$

componentes: 5

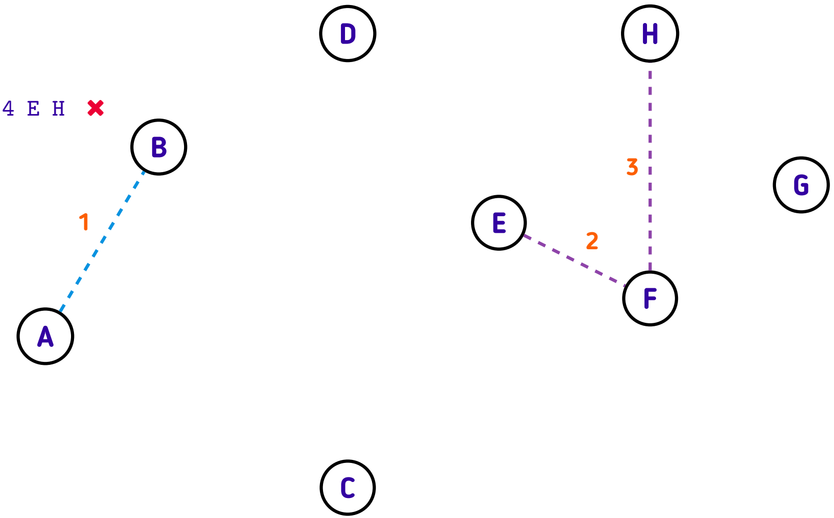
próxima aresta: `4 E H`



$k = 4$

componentes: 5

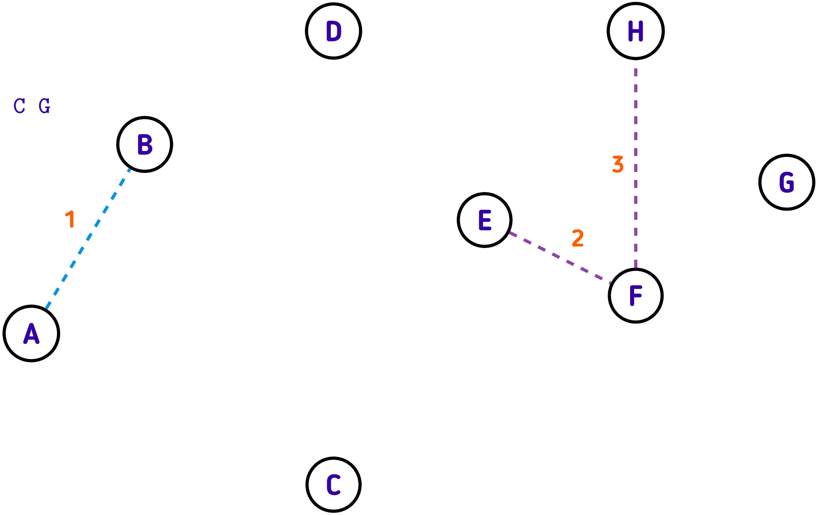
próxima aresta: 4 E H ✖



$k = 4$

componentes: 5

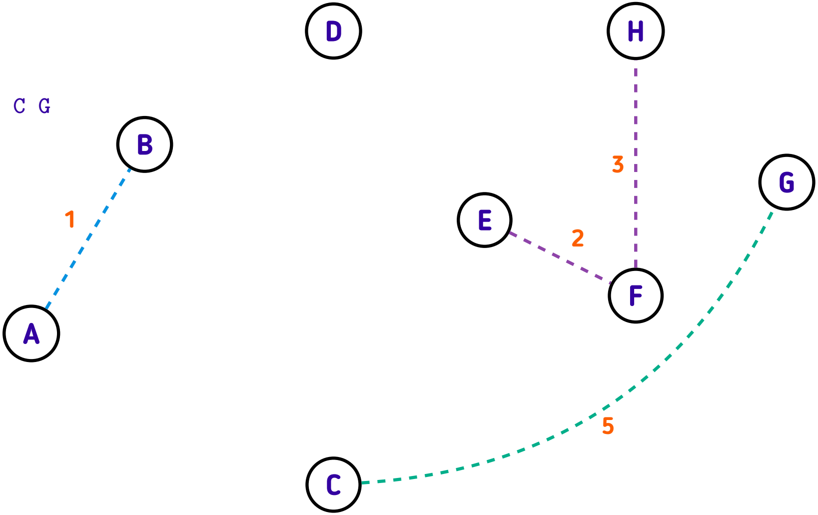
próxima aresta: 5 C G



$k = 4$

componentes: **4**

próxima aresta: 5 C G



```cpp
int msf(int k, int N, vector<edge>& es)
{
    sort(es.begin(), es.end());

    int cost = 0, cc = N;
    UnionFind ufds(N);

    for (auto [w, u, v] : es)
    {
        if (not ufds.same_set(u, v)) {
            cost += w;
            ufds.union_set(u, v);

            if (--cc == k)
                return cost;
        }
    }

    return cost;
}
```

Aplicação: Segunda melhor MST

Aplicação: Segunda melhor MST

- **Algumas aplicações demandam a identificação da segunda melhor MST**

Aplicação: Segunda melhor MST

- Algumas aplicações demandam a identificação da segunda melhor MST

- Esta segunda melhor MST, se existir, pode ser identificada por meio de uma nova modificação no algoritmo de Kruskal

Aplicação: Segunda melhor MST

- Algumas aplicações demandam a identificação da segunda melhor MST

- Esta segunda melhor MST, se existir, pode ser identificada por meio de uma nova modificação no algoritmo de Kruskal

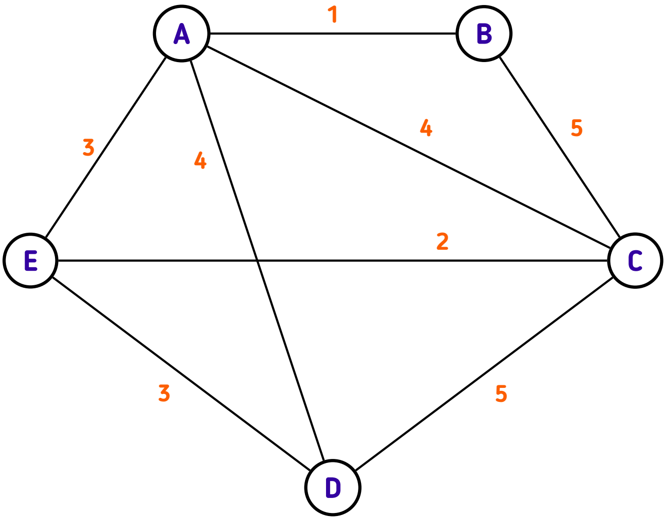
- Primeiramente, deve ser identificada a MST

Aplicação: Segunda melhor MST

- ⋆ Algumas aplicações demandam a identificação da segunda melhor MST
- ⋆ Esta segunda melhor MST, se existir, pode ser identificada por meio de uma nova modificação no algoritmo de Kruskal
- ⋆ Primeiramente, deve ser identificada a MST
- ⋆ Em seguida, cada uma das arestas da MST deve ser excluída e o algoritmo deve identificar a MST formada pelas arestas restantes

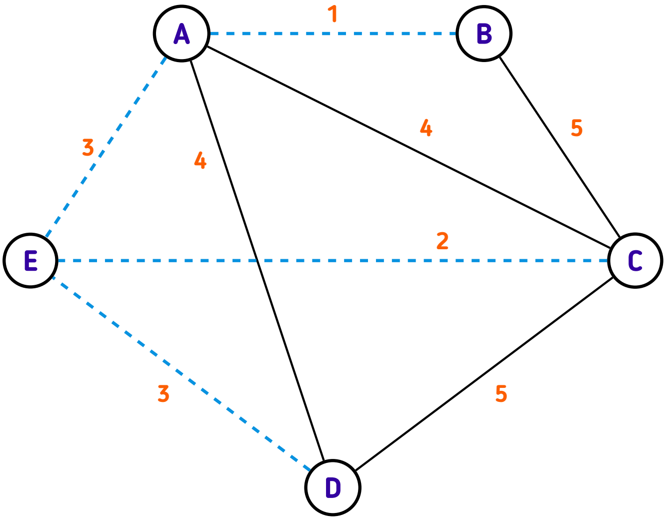
Aplicação: Segunda melhor MST

- ⋆ Algumas aplicações demandam a identificação da segunda melhor MST
- ⋆ Esta segunda melhor MST, se existir, pode ser identificada por meio de uma nova modificação no algoritmo de Kruskal
- ⋆ Primeiramente, deve ser identificada a MST
- ⋆ Em seguida, cada uma das arestas da MST deve ser excluída e o algoritmo deve identificar a MST formada pelas arestas restantes
- ⋆ **Complexidade:** $O(VE)$


A
B
C
D
E
1
3
4
4
5
2
3
5

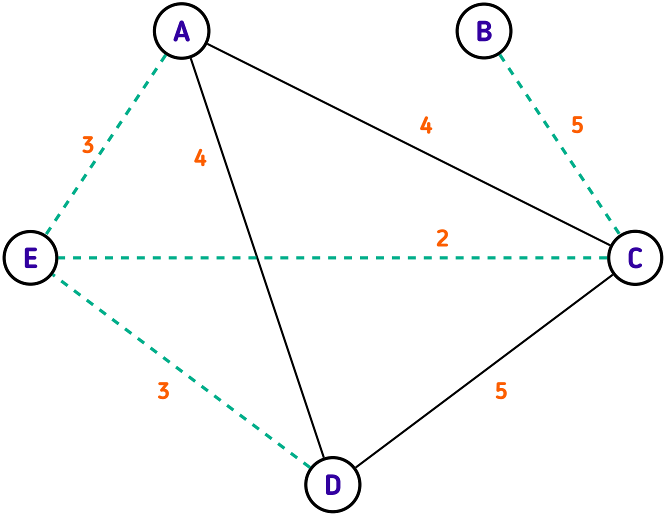
MST

$c(\textbf{MST}) = 9$



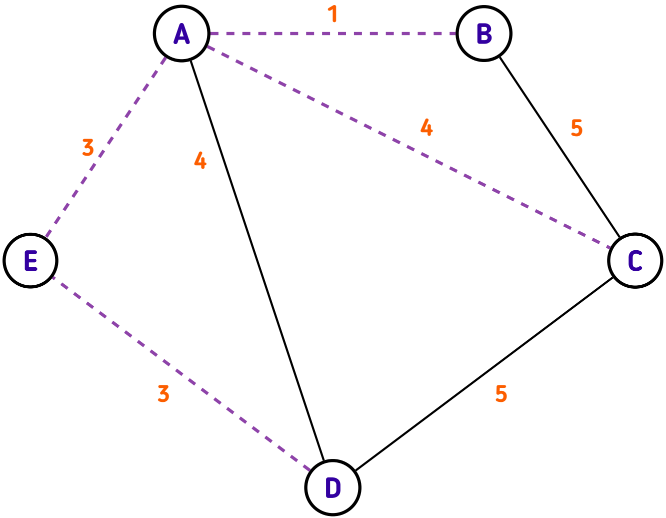
Árvore geradora T_1

$c(T_1) = 13$



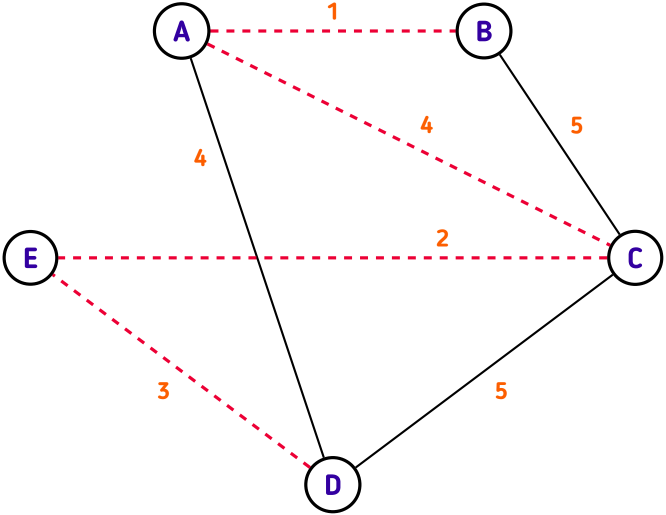
Árvore geradora T_2

$c(T_2) = 11$



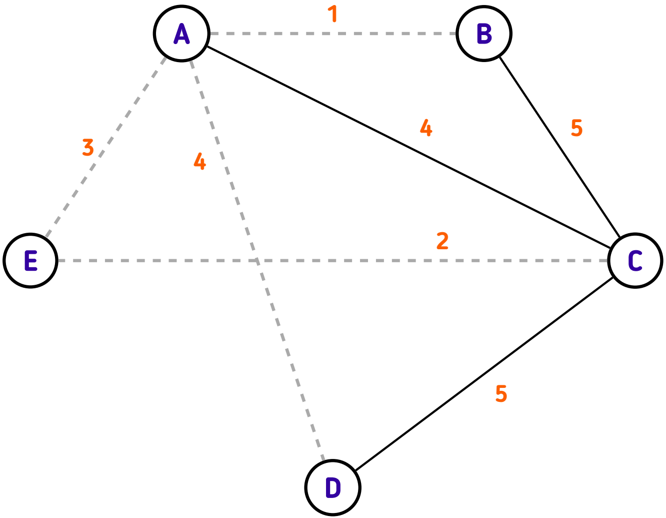
Árvore geradora T_3

$c(T_3) = 10$



Árvore geradora T_4

$c(T_4) = 10$



```
pair<int, vector<int>>
kruskal(int N, vector<edge>& es, int blocked = -1)
{
    vector<int> mst;
    UnionFind ufds(N);
    int cost = 0;

    for (int i = 0; i < (int) es.size(); ++i)
    {
        auto [w, u, v] = es[i];

        if (i != blocked and not ufds.same_set(u, v)) {
            cost += w;
            ufds.union_set(u, v);
            mst.emplace_back(i);
        }
    }

    return { (int) mst.size() == N - 1 ? cost : oo, mst };
}
```

```cpp
int second_best(int N, vector<edge>& es)
{
    sort(es.begin(), es.end());

    auto [_, mst] = kruskal(N, es);
    int best = oo;

    for (auto blocked : mst)
    {
        auto [cost, __] = kruskal(N, es, blocked);
        best = min(best, cost);
    }

    return best;
}
```

Problemas sugeridos

1. Codechef CHEFELEC – Chefland and Electricity
2. OJ 10369 – Artic Network
3. OJ 10600 – ACM Contest and Blackout
4. SPOJ EC_MODE – Modems

Referências

1. **CP-Algorithm**. *Minimum spanning tree - Kruskal's algorithm*, acesso em 24/08/2021.
2. **HALIM**, Felix; **HALIM**, Steve. *Competitive Programming 3*, 2010.
3. **LAAKSONEN**, Antti. *Competitive Programmer's Handbook*, 2018.
4. **Wikipédia**. *Joseph Kruskal*, acesso em 24/08/2021.
5. **Wikipédia**. *Kruskal's algorithm*, acesso em 24/08/2021.