Pertemuan 9

EKSPANSI KOFAKTOR

Oleh:

Santi Arum Puspita Lestari, M.Pd

Universitas Buana Perjuangan Karawang

MINOR DAN KOFAKTOR

- **DEFINISI**

Jika A adalah suatu matriks bujur sangkar, maka ***minor entri*** $\boldsymbol{a_{ij}}$ dinyatakan oleh $\boldsymbol{M_{ij}}$ dan didefinisikan sebagai determinan submatriks yang masih tersisa setelah baris ke-i dan kolom ke-j dihilangkan dari A. Bilangan $(-1)^{i+j}M_{ij}$ dinyatakan oleh $\boldsymbol{C_{ij}}$ dan disebut ***kofaktor entri*** $\boldsymbol{a_{ij}}$.

- Jika $i + j =$ genap → $\boldsymbol{C_{ij} = M_{ij}}$
- Jika $i + j =$ ganjil → $\boldsymbol{C_{ij} = -M_{ij}}$

MINOR

- Yang dimaksud dengan **Minor** unsur a_{ij} adalah determinan yang berasal dari determinan orde ke-n tadi dikurangi dengan baris ke-i dan kolom ke-j.
- Dinotasikan dengan M_{ij}
- Contoh Minor dari elemen a_{11}

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \rightarrow M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \rightarrow M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

MINOR

- Berikut adalah minor dari matriks berorde 3 × 3;

$$|M_{11}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad |M_{21}| = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad |M_{31}| = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$|M_{12}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad |M_{22}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad |M_{32}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$|M_{13}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad |M_{23}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad |M_{33}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Contoh 1

Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$, tentukanlah minor dan kofaktor entrinya.

<u>Penyelesaian:</u>

- Minor entri a_{11}

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = (5 \cdot 8) - (6 \cdot 4) = 16$$

- Kofaktor entri a_{11}

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2 M_{11} = M_{11}$$

Sehingga $C_{11} = M_{11}$, maka $C_{11} = 16$

Lanjutan Contoh 1

- Minor entri a_{32}

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = (3 \cdot 6) - ((-4) \cdot 2) = 26$$

- Kofaktor entri a_{32}

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = (-1)^5 M_{32} = -M_{11}$$

Sehingga $C_{32} = M_{32}$, maka $C_{32} = -26$

Dan seterusnya …

MINOR DAN KOFAKTOR

- Berdasarkan Contoh 1, bisa disimpulkan bahwa kofaktor dan minor dari entri a_{ij} hanya berbeda tanda, yaitu $C_{ij} = \pm M_{ij}$.
- Jika diperiksa seluruh entri matriks maka tanda yang menghubungkan C_{ij} dan M_{ij} adalah baris ke-i dan kolom ke-j dari susunan papan periksa, seperti berikut:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

Misalnya:

$C_{11} = M_{11}$

$C_{12} = -M_{12}$

$C_{22} = M_{22}$

$C_{23} = -M_{23}$

EKSPANSI KOFAKTOR

- Determinan dari suatu matriks sama dengan jumlah perkalian elemen-elemen dari sembarang baris atau kolom dengan kofaktor-kofaktornya.
- Ekspansi kofaktor digunakan untuk menghitung determinan suatu matriks.
- Ekspansi kofaktor dibagi menjadi dua macam, yaitu:

1) Ekspansi kofaktor baris suatu matriks.
2) Ekspansi kofaktor kolom suatu matriks.

EKSPANSI KOFAKTOR

- Tinjau matriks 3 × 3 berikut;

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- Menghitung det(A) menggunakan ekspansi kofaktor maka harus menjumlahkan perkalian entri yang menjadi pertemuan garis dengan kofaktornya sepanjang baris atau kolom yang ditentukan.

EKSPANSI KOFAKTOR

- Tinjau matriks 3 × 3 berikut;

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31})$$
$$+a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{32})$$

$$\det(A) = a_{11}C_{11} - a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

- Cara menghitung det(A) tersebut dinamakan **ekspansi kofaktor sepanjang baris pertama A**

EKSPANSI KOFAKTOR

- Sedangkan cara menghitung det(A) dengan menggunakan **ekspansi kofaktor sepanjang kolom pertama A** sebagai berikut:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32})$$
$$+a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})$$

$$\det(A) = a_{11}C_{11} - a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31}$$

EKSPANSI KOFAKTOR

- Jika disimpulkan maka determinan suatu matriks dengan menggunakan ekspansi kofaktor menjadi sebagai berikut,

$$\begin{aligned}\det(A) &= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} \\ &= a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31} \\ &= a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + a_{23}C_{23} \\ &= a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32} \\ &= a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33} \\ &= a_{13}C_{13} + a_{23}C_{23} + a_{33}C_{33}\end{aligned}$$

Contoh 2

- Terdapat matriks $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, hitunglah determinan matriks dengan ekspansi kofaktor disepanjang baris dan kolom.

Penyeleaian:

- Ekspansi kofaktor disepanjang baris kedua P

$$\det(P) = -(-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + (-4)\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\det(P) = -\big(-2 \cdot (-2 - 0)\big) + \big(-4 \cdot (-6 - 0)\big) - \big(3 \cdot (12 - 5)\big)$$

$$\det(P) = -4 + 24 - 21 = -1$$

Lanjutan Contoh 1

- Ekspansi kofaktor disepanjang kolom pertama P

$$\det(P) = 3\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\det(P) = \big(3 \cdot (8 - 12)\big) - \big(-2 \cdot (-2 - 0)\big) + \big(5 \cdot (3 - 0)\big)$$

$$\det(P) = -12 - 4 + 15 = -1$$

Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa hasil ekspansi kofaktor baris akan sama dengan ekspansi kofaktor kolom.

Contoh 3

- Hitunglah determinan matriks $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

<u>Penyelesaian:</u>

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} -3B_2 + B_1 \\ \\ -2B_2 + B_3 \\ -3B_2 + B_4 \end{matrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

Perluasan kofaktor di sepanjang kolom pertama

Lanjutan Contoh 3

$$\det(A) = -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} \; 1B_1 + B_3$$

$$\det(A) = -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 9 & 3 \end{vmatrix}$$

Perluasan kofaktor di sepanjang kolom pertama

$$\det(A) = -(-1)\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = 1(9 - 27)$$

$$\det(A) = -18$$

ATURAN CREAMER

- **Teorema 2.4.3 (Aturan Creamer)**

Jika $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ merupakan suatu sistem n persamaan linear dalam n peubah sedemikian sehingga $(A) \neq 0$, maka sistem tersebut mempunyai suatu penyelesaian yang unik. Penyelesaian ini adalah:

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \qquad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \qquad \cdots\ x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

Dengan A_j adalah matriks yang diperoleh dengan menggantikan entri-entri pada kolom ke-j dari A dengan entri-entri pada matriks

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Contoh 4

- Gunakan aturan Creamer untuk menyelesaikan sistem berikut.

$$x_1 + 2x_3 = 6$$
$$-3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 30$$
$$-x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 8$$

<u>Penyelesaian:</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A_1 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

Lanjutan Contoh 4

- Setelah menghitung determinan dari setiap matriks maka diperoleh;

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-40}{44} = \frac{-10}{11}$$

$$x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{72}{44} = \frac{18}{11}$$

$$x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{152}{44} = \frac{38}{11}$$

Jadi penyelesaian sistem tersebut adalah

$$x_1 = \frac{-10}{11}, \qquad x_2 = \frac{18}{11}, \qquad x_3 = \frac{38}{11}$$

LATIHAN

- Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Hitunglah det(A) dengan menggunakan ekspansi kofaktor!

- Selesaikan sistem berikut dengan metode Creamer.

$$4x + 5y = 2$$
$$11x + y + 2z = 3$$
$$x + 5y + 2z = 1$$

SEKIAN

DAN

TERIMA KASIH