Pertemuan ke-15

PERKALIAN SILANG vektor

Oleh:

Santi Arum Puspita Lestari, M.Pd.

Universitas Buana Perjuangan Karawang

PERKALIAN SILANG VEKTOR

Definisi

- Jika $\mathrm{u} = (u_1, u_2, u_3)$ dan $\mathrm{v} = (v_1, v_2, v_3)$ adalah vektor-vektor ruang dimensi 3, maka ***perkalian silang*** $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ adalah vektor yang didefinisikan sebagai

$$\mathrm{u} \times \mathrm{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

atau dalam notasi determinan

$$u \times v = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

- Ada perbedaan penting antara perkalian silang dan perkalian titik.
- Hasil perkalian titik berupa suatu skalar sedangkan hasil perkalian silang berupa suatu vekor.

CONTOH 1

- Carilah $u \times v$ dengan $u = (1, 2, -2)$ dan $v = (3, 0, 1)$

Penyelesaian:

Vektor u dan v diubah ke dalam matriks ;

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$u \times v = \left(\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \right)$$

$$u \times v = \big((2 \cdot 1 - (-2) \cdot 0), -(1 \cdot 1 - (-2) \cdot 3), (1 \cdot 0 - 2 \cdot 3) \big)$$

$$u \times v = (2 + 0, -(1 + 6), 0 - 6)$$

$$u \times v = (2, -7, -6)$$

PERKALIAN SILANG VEKTOR

- **Teorema 3.4.1.**

Jika u, v dan w adalah vektor-vektor dalam ruang dimensi 3, maka:

1. $u \cdot (u \times v) = 0,$ (u × v ortogonal terhadap u)
2. $v \cdot (u \times v) = 0,$ (u × v ortogonal terhadap v)
3. $\|u \times v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 - (u \cdot v)^2$

   (Identitas Lagrange)
4. $u \times (v \times w) = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w$

   (hubungan antara perkalian silang dan titik)
5. $(u \times v) \times w = (u \cdot w)v - (v \cdot w)u$

   (hubungan antara perkalian silang dan titik)

CONTOH 2

- Tinjau vektor-vektor u = (1, 2, –2) dan v = (3, 0, 1). Pada Contoh 1, menunjukkan bahwa

$$\mathrm{u} \times \mathrm{v} = (2, -7, -6)$$

maka:

$$\mathrm{u} \cdot (\mathrm{u} \times \mathrm{v}) = (1)(2) + (2)(-7) + (-2)(-6) = 0$$

dan

$$\mathrm{v} \cdot (\mathrm{u} \times \mathrm{v}) = (3)(2) + (0)(-7) + (1)(-6) = 0$$

PERKALIAN SILANG VEKTOR

- **Teorema 3.4.2.**

Jika u, v, dan w adalah sembarang vektor dalam ruang dimensi 3 dan k adalah sembarang skalar, maka:

1. $\mathrm{u} \times \mathrm{v} = -(\mathrm{v} \times \mathrm{u})$
2. $\mathrm{u} \times (\mathrm{v} + \mathrm{w}) = (\mathrm{u} \times \mathrm{v}) + (\mathrm{u} \times \mathrm{w})$
3. $(\mathrm{u} + \mathrm{v}) \times \mathrm{w} = (\mathrm{u} \times \mathrm{w}) + (\mathrm{v} \times \mathrm{w})$
4. $k(\mathrm{u} \times \mathrm{v}) = (k\mathrm{u}) \times \mathrm{v} = \mathrm{u} \times (k\mathrm{v})$
5. $\mathrm{u} \times 0 = 0 \times \mathrm{u} = 0$
6. $\mathrm{u} \times \mathrm{u} = 0$

CONTOH 3

- Tinjau vektor $\mathrm{i} = (1, 0, 0), \mathrm{j} = (0, 1, 0), \mathrm{k} = (0, 0, 1)$. Vektor-vektor ini mempunyai panjang 1 dan terletak di sumbu koordinat x, y dan z.
- Vektor-vektor ini disebut ***vektor satuan standar*** dalam ruang dimensi 3.
- Setiap vektor $\mathrm{v} = (v_1, v_2, v_3)$ dalam ruang dimensi 3 dapat dinyatakan dalam bentuk $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \text{dan } \mathbf{k}$, dapat dituliskan seagai berikut;

  $\mathrm{v} = (v_1, v_2, v_3)$

  $\mathrm{v} = v_1(1,0,0) + v_2(0,1,0) + v_3(0,0,1)$

  $\mathrm{v} = v_1\mathrm{i} + v_2\mathrm{j} + v_3\mathrm{k}$
- Misalnya: $(2, -3, 4) = 2\mathrm{i} - 3\mathrm{j} + 4\mathrm{k}$

PERKALIAN SILANG VEKTOR

$$i = (1,0,0)$$

$$j = (0,1,0)$$

$\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- Berdasarkan definisi perkalian silang sebelumnya, maka dapat diperoleh

$$i \times j = \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (0,0,1) = k$$

- Kita juga bisa menentuk perkalian yang lainnya seperti di bawah ini:

$$i \times i = j \times j = k \times k = 0$$

$$i \times j = k, \quad j \times k = i, \quad k \times i = j$$

$$j \times i = -k, \; k \times j = -i, \quad i \times k = -j$$

RUMUS DETERMINAN UNTUK PERKALIAN SILANG

- Suatu perkalian silang vektor dapat disajikan dalam bentuk determinan 3×3, sebagai berikut:

$$\mathrm{u} \times \mathrm{v} = \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ u_i & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathrm{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \mathrm{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathrm{k}$$

- Misal, u = (1, 2, –2) dan v = (3, 0, 1) maka,

$$\mathrm{u} \times \mathrm{v} = \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \mathrm{i} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \mathrm{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \mathrm{k}$$

$$= (2 - 0)\mathrm{i} - (1 + 6)\mathrm{j} + (0 - 6)\mathrm{k} = 2\mathrm{i} - 7\mathrm{j} - 6\mathrm{k}$$

INTERPRETASI GEOMETRIK DARI PERKALIAN SILANG

- Identitas Lagrange (Teorema 3.4.1) menyatakan bahwa

$$\|\mathrm{u} \times \mathrm{v}\|^2 = \|\mathrm{u}\|^2\|\mathrm{v}\|^2 - (\mathrm{u} \cdot \mathrm{v})^2$$

- Jika θ menyatakan sudut antara u dan v, maka $\mathrm{u} \cdot \mathrm{v} = \|\mathrm{u}\|\|\mathrm{v}\| \cos\theta$, sedemikin sehingga Identitas Lagrange dapat ditulis ulang sebagai

$$\|\mathrm{u} \times \mathrm{v}\|^2 = \|\mathrm{u}\|^2\|\mathrm{v}\|^2 - \|u\|^2\|v\|^2 cos^2\theta$$

$$= \|\mathrm{u}\|^2\|\mathrm{v}\|^2(1 - cos^2\theta)$$

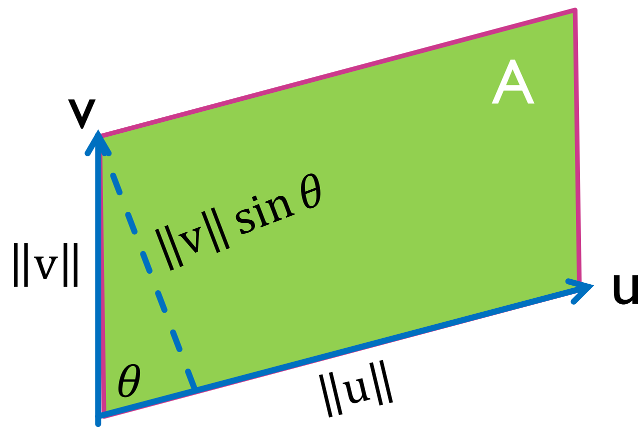
$$= \|\mathrm{u}\|^2\|\mathrm{v}\|^2 sin^2\theta$$

INTERPRETASI GEOMETRIK DARI PERKALIAN SILANG

- Karena $0 \leq \theta \leq \pi$, maka $\sin\theta \geq 0$ sehingga dapat ditulis menjadi;

$$\|\mathrm{u} \times \mathrm{v}\| = \|\mathrm{u}\|\|\mathrm{v}\| \sin\theta$$

- Akan tetapi, $\|\mathrm{v}\| \sin\theta$ adalah tinggi jajar genjang yang ditentukan oleh u dan v, jadi



INTERPRETASI GEOMETRIK DARI PERKALIAN SILANG

- Maka luas jajaran genjang menjadi:

  Luas jajar genjang = alas × tinggi

  $$\text{Luas} = \|\mathrm{u}\|\|\mathrm{v}\| \sin\theta$$

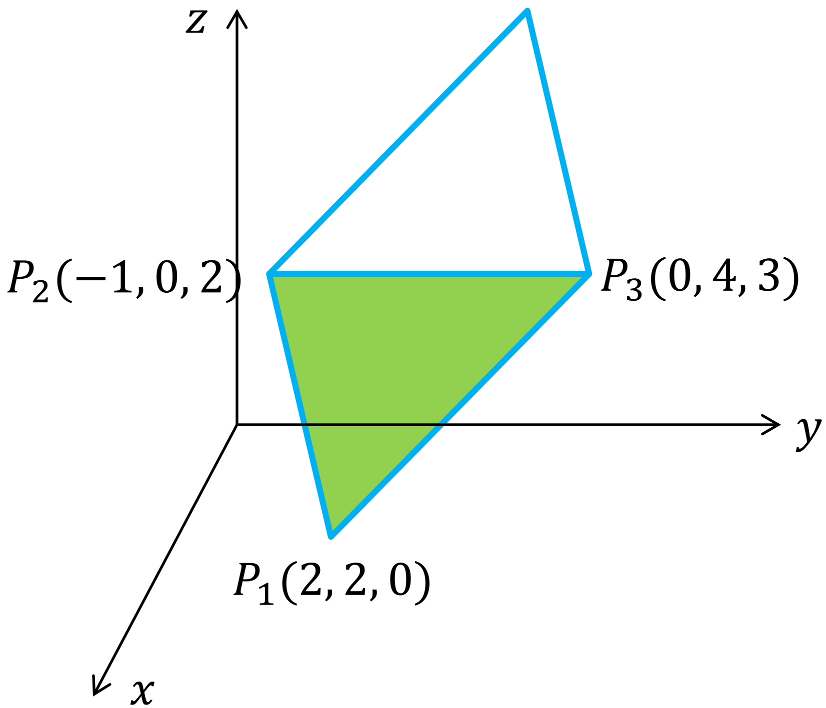
- **Teorema 3.4.3**

Jika u dan v adalah vektor-vektor dalam ruang dimensi 3, maka $\|\mathrm{u} \times \mathrm{v}\|$ sama dengan jajaran genjang yang ditentukan oleh u dan v.

CONTOH 4

- Hitunglah luas segitiga yang dibentuk oleh titik-titik $P_1(2, 2, 0), P_2(-1, 0, 2)$, dan $P_3(0, 4, 3)$.

<u>Penyelesaian:</u>



LANJUTAN CONTOH 4:

- Luas segitiga adalah ½ luas jajargenjang yang dibentuk oleh $\overrightarrow{P_1P_2}$ dan $\overrightarrow{P_1P_3}$.

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (-1-2, 0-2, 2-0) = (-3, -2, 2)$$
$$\overrightarrow{P_1P_3} = (0-2, 4-2, 3-0) = (-2, 2, 3)$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = \left(\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \right)$$
$$= (-6-4, -(-9+4), -6-4)$$
$$= (-10, 5, -10)$$

$$L = \frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} \right\| = \frac{1}{2}\sqrt{(-10)^2 + 5^2 + (-10)^2}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{225} = \frac{1}{2}(15) = \frac{15}{2}$$

Jadi, luas jajar genjang adalah $\frac{15}{2}$ satuan luas.

PERKALIAN SKALAR GANDA TIGA

- **Definisi**

Jika u, v, dan w adalah vektor-vektor dalam ruang dimensi 3, maka

$$\mathrm{u} \cdot (\mathrm{v} \times \mathrm{w})$$

disebut ***perkalian skalar ganda tiga*** dari u, v, dan w.

- Misalkan $\mathrm{u} = (u_1, u_2, u_3), \mathrm{v} = (v_1, v_2, v_3)$,dan $\mathrm{w} = (w_1, w_2, w_3)$. Maka,

$$\mathrm{u} \cdot (\mathrm{v} \times \mathrm{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

PERKALIAN SKALAR GANDA TIGA

$$\mathrm{u} \cdot (\mathrm{v} \times \mathrm{w}) = \mathrm{u} \cdot \left(\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} \mathrm{i} - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} \mathrm{j} + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \mathrm{k} \right)$$

$$= \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} u_1 - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} u_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} u_3$$

$$= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

CONTOH 5

- Hitung perkalian skalar ganda tiga $u \cdot (v \times w)$ dari vektor-vektor u = 3i – 2j -5k, v = i + 4j – 4k,

  w = 3j +2k

Penyelesaian:

$$u \cdot (v \times w) = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 1 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (-5)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3(8 + 12) + 2(2 - 0) - 5(3 - 0)$$

$$= 60 + 4 - 15$$

$$= 49$$

LATIHAN

1. Jika diketahui $\mathrm{u} = (3,2,-1), \mathrm{v} = (0,2,-3)$ dan $\mathrm{w} = (2,6,7)$ maka hitunglah:

a) $\mathrm{v} \times \mathrm{w}$

b) $\mathrm{u} \times (\mathrm{v} \times \mathrm{w})$

c) $\mathrm{u} \cdot (\mathrm{v} \times \mathrm{w})$

2. Tentukan luas jajar genjang yang dibentuk oleh $\mathrm{u} = (1,-1,2)$ dan $\mathrm{v} = (0,3,1)$.

3. Hitunglah luas segitiga yang mempunyai titik-titik $P(2,6,-1), Q(1,1,1)$, dan $R(4,6,2)$.

4. Andaikan $\mathrm{u} \cdot (\mathrm{v} \times \mathrm{w}) = 3$, maka tentukanlah $\mathrm{u} \cdot (\mathrm{w} \times \mathrm{v})$

SEKIAN
DAN
TERIMA KASIH