

2.2 数值计算方法

针对溃坝洪水数值模拟具有复杂计算域和强不规则地形等特点，采用边界拟合能力强和易于局部网格加密的三角形网格剖分计算域，提出了基于水位-体积关系的斜底三角单元模型，有效解决了小尺度线状地形模拟难题；以能够有效捕获激波的 Godunov 型有限体积法为框架，运用在时间上和空间上均具有二阶精度的 MUSCL-Hancock 预测-校正格式离散溃坝洪水控制方程，采用 HLLC 近似 Riemann 算子计算对流数值通量，采用直接近似方法计算扩散数值通量，并结合斜率限制器以保证模型的高分辨率特性，避免在间断或大梯度解附近产生非物理虚假振荡；提出了单元中心型底坡项近似方法，证明了在不使用任何额外动量通量校正项的前提下模型能保持通量梯度与底坡项之间的平衡，即模型具有和谐性质；从理论上分析并证明了强不规则地形条件下摩阻项可能引起的刚性问题，进而采用半隐式格式处理摩阻项，该半隐式格式既能保证不改变流速分量的方向，也能避免小水深引起的非物理大流速问题，有利于计算稳定性；分析并给出了固壁、水位、流量等边界条件的实现方式；结合 CFL 稳定条件提出了数值模型的自适应时间步长技术。

2.2.1 计算网格

鉴于三角形单元具有复杂边界拟合能力强、便于网格生成和局部加密等特点，本文采用非结构三角形单元作为计算网格，如图 2-3 所示。其中， C_i 为待计算单元，其顶点 1-顶点 2-顶点 3 排序服从逆时针方向；与顶点 k 相对的边为 $\Gamma_{i,k}$ ，其外法向单位向量为 $\mathbf{n}_{i,k}$ ；单元 C_i 的邻接单元中，与顶点 k 相对的单元为 $C_{i,k}$ 。

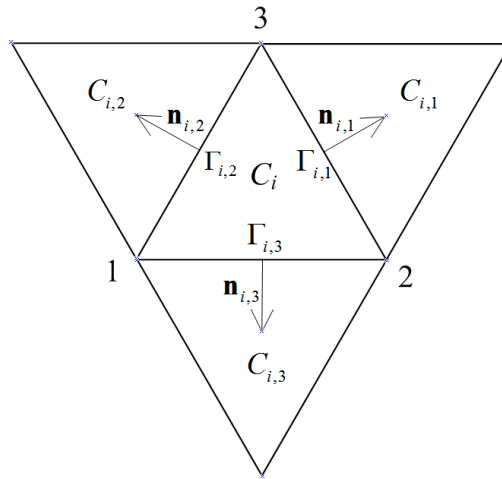


图 2-3 非结构三角形单元拓扑结构示意图

对于每一个节点而言，其网格拓扑信息包括：节点序号，节点坐标，节点周围的单元；对于每一条边而言，其网格拓扑信息包括：边序号，边的左、右单元，边的始、末节点；对于每一个单元而言，其网格拓扑信息包括：单元序号，单元的三个顶点，单元的三条边，单元的三个邻接单元。在模型开始计算之前，需要根据网格文件构造包含上述拓扑信息的计算网格系统，部分关键构造步骤可参考文献错误!未找到引用源。。

2.2.2 斜底三角单元模型

在三角形网格结构中，有两种底高程的定义方式：（1）将底高程定义于单元形心处，单元内的底高程为均一值；（2）将底高程定义于单元顶点处，单元内的底高程服从线性分布。在地形表达精度方面，第一种方式仅为一阶精度，而第二种方式具有二阶精度错误!未找到引用源。。此外，在溃坝洪水数值模拟的实际工程中，往往包含由生产堤和公路等线状建筑物组成的奇异地形^[97-99]。该类奇异地形具有低水位干出、高水位淹没的性质，必须在模型中予以准确表达错误!未找到引用源。。然而，如果采取第一种底高程定义方式，由于此类奇异地形的空间尺度要远小于满足计算效率要求的网格尺度，因此需要采用局部网格加密方法以表达此类奇异地形，此时不仅网格数量剧增，而且由于稳定条件的限制（见 2.2.10 节），小尺度网格将导致模型的计算时间步长大幅度减小，严重影响模拟效率。另一方面，如果采取第二种底高程定义方式，在网格划分之前，将一系列节点预先布置在生产堤和公路等线状建筑物上，进而使该类奇异地形在网格系统中以“边”的形式得以表达。高水位时，奇异地形所在网格边被淹没过水；低水位时，奇异地形所在网格边的物质通量为零，起到阻水作用，故第二种底高程定义方式可以实现该类奇异地形的准确模拟错误!未找到引用源。。综合上述两方面的原因，

本文采用第二种底高程定义方式，即斜底三角单元模型。

在斜底三角单元模型中，守恒变量 h 代表单元的平均水深，单元的水量为 $h\Omega$ ，其中 Ω 为单元面积；水位 η 代表单元内含水部分的水面高程，且假设单元内含水部分的水面为一平面，如图 2-4 所示，其中，斜线阴影面为水面，三角形 $\Delta 123$ 为单元底面，图 (a) 中三个顶点的水深均大于零，图 (b) 和图 (c) 存在水深为零的顶点。

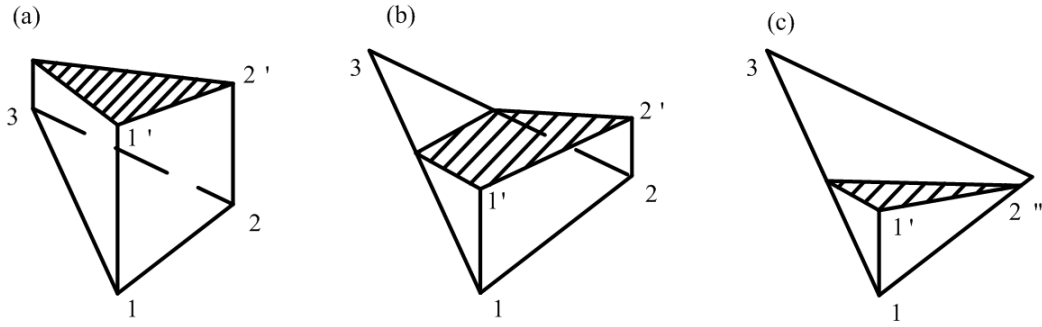


图 2-4 三种不同水位条件下的斜底单元示意图

不失一般性，假设单元 C_i 三个顶点的底高程 $b_{i,1}$ 、 $b_{i,2}$ 和 $b_{i,3}$ 满足关系：

$b_{i,1} \leq b_{i,2} \leq b_{i,3}$ 。由 Begnudelli 和 Sanders 提出的水位-体积关系 错误!未找到引用源。

(volume/freesurface relationships, VFRs) 给出了单元水深与单元水位之间的转换计算式：

(1) 已知水深，计算水位：

$$\eta_i = \begin{cases} \eta_i^1 = b_{i,1} + \sqrt[3]{3h_i(b_{i,2} - b_{i,1})(b_{i,3} - b_{i,1})} & \text{if } b_{i,1} < \eta_i^1 \leq b_{i,2} \\ \eta_i^2 = \frac{1}{2}(-\gamma_1 + \sqrt{\gamma_1^2 - 4\gamma_2}) & \text{if } b_{i,2} < \eta_i^2 \leq b_{i,3} \\ \eta_i^3 = h_i + (b_{i,1} + b_{i,2} + b_{i,3})/3 & \text{if } \eta_i^3 > b_{i,3} \end{cases} \quad (2-55)$$

式中， $\gamma_1 = b_{i,3} - 3b_{i,1}$ ， $\gamma_2 = 3h_i b_{i,1} - 3h_i b_{i,3} - b_{i,2} b_{i,3} + b_{i,1} b_{i,2} + b_{i,1}^2$ 。

(2) 已知水位，计算水深：

$$h_i = \begin{cases} \frac{(\eta_i - b_{i,1})^3}{2(b_{i,2} - b_{i,1})(b_{i,3} - b_{i,1})} & \text{if } b_{i,1} < \eta_i \leq b_{i,2} \\ \frac{\eta_i^2 + \eta_i b_{i,3} - 3\eta_i b_{i,1} - b_{i,3} b_{i,2} + b_{i,1} b_{i,2} + b_{i,1}^2}{3(b_{i,3} - b_{i,1})} & \text{if } b_{i,2} < \eta_i \leq b_{i,3} \\ \eta_i - \frac{b_{i,1} + b_{i,2} + b_{i,3}}{3} & \text{if } \eta_i > b_{i,3} \end{cases} \quad (2-56)$$

对式（2-55）进行求解时存在三种情况（如图 2-4 所示），而各种情况又与未知解 η_i 有关，因此，需要结合试错法进行求解^{错误!未找到引用源。}。

若将底高程定义于单元形心处，且假设单元内的底高程为均一值，则单元水位的最小值为单元形心处的底高程值，在干湿界面计算时需要重构单元底高程^[69, 74]。然而，由式（2-55）可知，斜底三角单元模型的引入，使单元水位的最小值降低为单元三个顶点底高程的最小值，避免了干湿界面计算时重构单元底高程，提高了模型干湿界面处理能力，有利于设计具有和谐性的计算格式。此外，在斜底三角单元模型中，单元具有全淹没、局部淹没和全干三种状态。本文采用如下状态判别方法：

$$\begin{aligned} \eta_i \leq b_{i,1} & \Rightarrow \text{全干} \\ b_{i,1} < \eta_i \leq b_{i,3} & \Rightarrow \text{局部淹没} \\ \eta_i > b_{i,3} & \Rightarrow \text{全淹没} \end{aligned}$$

由于底高程定义于单元顶点处，根据不共线三点决定一个平面的原理可计算出单元底高程的平面方程，继而可得到该平面在 x 和 y 方向的斜率，即单元的底坡斜率：

$$\frac{\partial b_i(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{2\Omega_i} [(y_{i,2} - y_{i,3})b_{i,1} + (y_{i,3} - y_{i,1})b_{i,2} + (y_{i,1} - y_{i,2})b_{i,3}] \quad (2-57)$$

$$\frac{\partial b_i(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{2\Omega_i} [(x_{i,3} - x_{i,2})b_{i,1} + (x_{i,1} - x_{i,3})b_{i,2} + (x_{i,2} - x_{i,1})b_{i,3}] \quad (2-58)$$

式中， $x_{i,k}$ 、 $y_{i,k}$ 、 $b_{i,k}$ 分别为单元 C_i 第 k 个顶点的 x 方向坐标、 y 方向坐标和底高程（ $k=1,2,3$ ）； Ω_i 为单元 C_i 的面积：

$$\Omega_i = \frac{1}{2} [(x_{i,1} - x_{i,2})(y_{i,1} + y_{i,2}) + (x_{i,2} - x_{i,3})(y_{i,2} + y_{i,3}) + (x_{i,3} - x_{i,1})(y_{i,3} + y_{i,1})]$$

(2-59)

若单元 C_i 的顶点 1-顶点 2-顶点 3 排序服从逆时针方向（如图 2-3 所示），则式（2-59）的计算结果大于零；否则，式（2-59）的计算结果小于零，需要调整单元 C_i 的顶点排序以服从逆时针方向。

2.2.3 有限体积离散

在任意控制体 Ω 上对式（2-51）所示的控制方程进行积分得：

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \mathbf{U} d\Omega + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathbf{E}^{\text{adv}}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}^{\text{adv}}}{\partial y} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathbf{E}^{\text{diff}}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}^{\text{diff}}}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{S} d\Omega \quad (2-60)$$

对式（2-60）运用 Green 公式将体积分转化为沿其边界的线积分，可得：

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \mathbf{U} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \mathbf{F}^{\text{adv}} \cdot \mathbf{n} dl = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{F}^{\text{diff}} \cdot \mathbf{n} dl + \int_{\Omega} \mathbf{S} d\Omega \quad (2-61)$$

式中， $\partial\Omega$ 为控制体 Ω 的边界； \mathbf{n} 为边界 $\partial\Omega$ 的外法向单位向量； $d\Omega$ 、 dl 分别为面积微元和弧微元； $\mathbf{F}^{\text{adv}} = [\mathbf{E}^{\text{adv}}, \mathbf{G}^{\text{adv}}]^T$ ； $\mathbf{F}^{\text{diff}} = [\mathbf{E}^{\text{diff}}, \mathbf{G}^{\text{diff}}]^T$ 。

在平面二维三角形网格中，式（2-61）中第二、三项所示的线积分可分别由下式（2-62）和（2-63）计算：

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{F}^{\text{adv}} \cdot \mathbf{n} dl = \sum_{k=1}^3 \mathbf{F}_k^{\text{adv}} \cdot \mathbf{n}_k L_k \quad (2-62)$$

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{F}^{\text{diff}} \cdot \mathbf{n} dl = \sum_{k=1}^3 \mathbf{F}_k^{\text{diff}} \cdot \mathbf{n}_k L_k \quad (2-63)$$

假设 \mathbf{U}_i 为 \mathbf{U} 在单元 C_i 内的平均值，即：

$$\mathbf{U}_i = \frac{1}{\Omega_i} \int_{C_i} \mathbf{U} d\Omega \quad (2-64)$$

由式（2-61）~（2-64）有：

$$\Omega_i \frac{d\mathbf{U}_i}{dt} = - \sum_{k=1}^3 \mathbf{F}_{i,k}^{\text{adv}} \cdot \mathbf{n}_{i,k} L_{i,k} + \sum_{k=1}^3 \mathbf{F}_{i,k}^{\text{diff}} \cdot \mathbf{n}_{i,k} L_{i,k} + \mathbf{S}_i \quad (2-65)$$

式中， Ω_i 为单元 C_i 的面积； $\mathbf{F}_{i,k}^{\text{adv}}$ 、 $\mathbf{F}_{i,k}^{\text{diff}}$ 、 $\mathbf{n}_{i,k}$ 、 $L_{i,k}$ 分别代表单元 C_i 第 k 条边的对流数值通量、扩散数值通量、外法向单位向量和长度； \mathbf{S}_i 为源项近似。

由式（2-65）可知，浅水方程的数值求解主要包括数值通量计算、源项处理和时间积分等主要步骤，后续小节将分别给出各步骤的详细实现过程。

2.2.4 数值通量计算

由于积分平均，物理变量在每个单元内部为常数，在整个计算域内形成阶梯状分布，因此在单元界面处物理量存在间断，即界面左、右两侧的物理量不相等，故而在界面处构成了一个局部 Riemann 问题^[101, 102]。通过 Riemann 问题的求解可得到界面处的对流数值通量，即：

$$\mathbf{F}_{i,k}^{\text{adv}} \cdot \mathbf{n}_{i,k} = \mathbf{F}_{i,k}^{\text{adv}}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R) \cdot \mathbf{n}_{i,k} \quad (2-66)$$

式中， \mathbf{U}_L 、 \mathbf{U}_R 分别为界面左侧和右侧的守恒向量。

Godunov 于 1959 年首次提出了通过构造 Riemann 问题求解空气动力学中非线性欧拉（Euler）方程的格式^{错误!未找到引用源。}，为计算流体动力学领域带来了革命性突破。该格式通过运用 Riemann 解中的波结构，使激波以合适的迎风方式进行处理，克服了早期数值方法在模拟可压缩流体时面临的诸多难题^{错误!未找到引用源。}。因此我们把这类利用 Riemann 解求解双曲型偏微分方程的格式统称为 Godunov 型格式。

由浅水方程的旋转不变性^{错误!未找到引用源。}可得：

$$\mathbf{F}_{i,k}^{\text{adv}}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R) \cdot \mathbf{n}_{i,k} = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{n}_{i,k}) \cdot \mathbf{E}_{i,k}^{\text{adv}}(\mathbf{T}(\mathbf{n}_{i,k}) \cdot \mathbf{U}_L, \mathbf{T}(\mathbf{n}_{i,k}) \cdot \mathbf{U}_R) \quad (2-67)$$

式中， \mathbf{T} 和 \mathbf{T}^{-1} 分别为旋转矩阵及其逆矩阵：

$$\mathbf{T}(\mathbf{n}_{i,k}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & n_{i,k}^x & n_{i,k}^y \\ 0 & -n_{i,k}^y & n_{i,k}^x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{n}_{i,k}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & n_{i,k}^x & -n_{i,k}^y \\ 0 & n_{i,k}^y & n_{i,k}^x \end{bmatrix} \quad (2-68)$$

定义：

$$\hat{\mathbf{U}} = \mathbf{T}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{U} = \begin{bmatrix} h \\ h(un_x + vn_y) \\ h(-un_y + vn_x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h \\ hu_{\perp} \\ hu_{\parallel} \end{bmatrix} \quad (2-69)$$

式中， u_{\perp} 、 u_{\parallel} 分别为与界面垂直和平行的流速分量：

$$\begin{aligned} u_{\perp} &= un_x + vn_y \\ u_{\parallel} &= -un_y + vn_x \end{aligned} \quad (2-70)$$

则由式 (2-52)、(2-67) 和 (2-69) 有：

$$\mathbf{F}^{\text{adv}}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{E}^{\text{adv}}(\hat{\mathbf{U}}) = \begin{bmatrix} hu_{\perp} \\ huu_{\perp} + \frac{1}{2}g(h^2 - b^2)n_x \\ hvu_{\perp} + \frac{1}{2}g(h^2 - b^2)n_y \end{bmatrix} \quad (2-71)$$

由式 (2-67) 可知，二维浅水方程的对流数值通量计算可转化为界面处一维 Riemann 问题求解。

Riemann 问题的求解方法可分为精确求解和近似求解两大类^{错误!未找到引用源。}。如图 2-5 所示，在 $\xi-t$ 平面上，二维浅水方程 Riemann 解中存在三个波，分为三类：激波 (shock wave)、稀疏波(rarefaction wave)和接触波 (contact wave)。三个波将初始的两个常状态区分割为四个常状态区，其中左、右两个区域的状态分别为初始的左、右状态值，中间两个区域的状态则由 Riemann 解的结构确定。

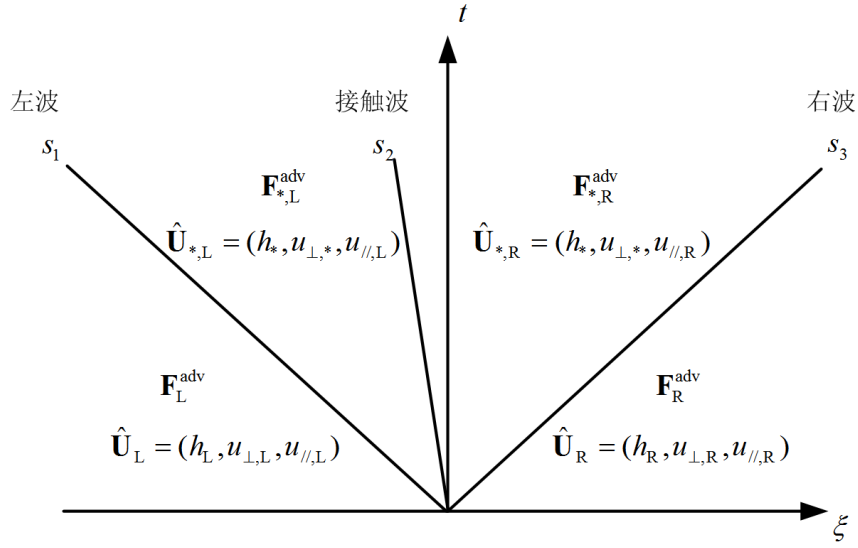


图 2-5 二维浅水方程的 Riemann 解结构

由浅水方程特征线理论^{错误!未找到引用源。}可知，通过激波、稀疏波或接触波相连接的两个区域之间的状态存在如下关系：

(1) 假设 $\hat{\mathbf{U}}_{*,L}$ 与 $\hat{\mathbf{U}}_L$ 通过稀疏波连接，即左波为稀疏波，则：

$$u_{\perp,*} = u_{\perp,L} + 2(\sqrt{gh_L} - \sqrt{gh_*}) \quad (2-72)$$

$$h_* \leq h_L \quad (2-73)$$

(2) 假设 $\hat{\mathbf{U}}_{*,L}$ 与 $\hat{\mathbf{U}}_L$ 通过激波连接，即左波为激波，则：

$$u_{\perp,*} = u_{\perp,L} - (h_* - h_L) \sqrt{\frac{g}{2} \left(\frac{1}{h_*} + \frac{1}{h_L} \right)} \quad (2-74)$$

$$h_* > h_L \quad (2-75)$$

(3) 假设 $\hat{\mathbf{U}}_{*,R}$ 与 $\hat{\mathbf{U}}_R$ 通过稀疏波连接，即右波为稀疏波，则：

$$u_{\perp,*} = u_{\perp,R} - 2(\sqrt{gh_R} - \sqrt{gh_*}) \quad (2-76)$$

$$h_* \leq h_R \quad (2-77)$$

(4) 假设 $\hat{\mathbf{U}}_{*,R}$ 与 $\hat{\mathbf{U}}_R$ 通过激波连接，即右波为激波，则：

$$u_{\perp,*} = u_{\perp,R} + (h_* - h_R) \sqrt{\frac{g}{2} \left(\frac{1}{h_*} + \frac{1}{h_R} \right)} \quad (2-78)$$

$$h_* > h_R \quad (2-79)$$

(5) $\hat{\mathbf{U}}_{*,L}$ 与 $\hat{\mathbf{U}}_{*,R}$ 通过接触波连接。如图 2-5 所示，接触波两侧，水深和与界面垂直的流速分量连续，而与界面平行的流速分量存在间断。

定义：

$$\varphi(h, H) = \begin{cases} 2(\sqrt{gh} - \sqrt{gH}) & \text{if } h \leq H \\ (h - H) \sqrt{\frac{g}{2} \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{H} \right)} & \text{if } h > H \end{cases} \quad (2-80)$$

式中， $H = h_L$ 或者 h_R 。

定义关于 h 的函数：

$$f(h) = \varphi(h, h_L) + \varphi(h, h_R) + u_R - u_L \quad (2-81)$$

由于 $f(h)$ 为关于 h 的单调递增函数^[74, 101]，因此可由如下三种情况之一确定 Riemann 解的结构：

(1) 如果 $f(\min(h_L, h_R)) \leq f(\max(h_L, h_R)) \leq 0$ ，则左、右波均为激波；

(2) 如果 $f(\min(h_L, h_R)) \leq 0 \leq f(\max(h_L, h_R))$ ，则左、右波一个为激波，另一个为稀疏波；其中，如果 $h_L < h_R$ 则左波为激波、右波为稀疏波；如果 $h_L > h_R$ 则左波为稀疏波、右波为激波；

(3) 如果 $0 \leq f(\min(h_L, h_R)) \leq f(\max(h_L, h_R))$ ，则左、右波均为稀疏波。

此外，由式 (2-72) ~ (2-81) 可知下式成立：

$$f(h_*) = 0 \quad (2-82)$$

因此，由初始值 h_L 和 h_R 可确定 Riemann 解中左、右波的波型，继而可得到

关于 h_* 和 $u_{\perp,*}$ 的两个方程，从而最终可以求解出 h_* 和 $u_{\perp,*}$ ，即获得了 Riemann 问题的精确解。 h_* 和 $u_{\perp,*}$ 的求解过程可通过 Newton-Raphson 法实现，其迭代计算的初值可通过双稀疏波假设获得，即：

$$\begin{cases} u_{\perp,*} = u_{\perp,L} + 2(\sqrt{gh_L} - \sqrt{gh_*}) \\ u_{\perp,*} = u_{\perp,R} - 2(\sqrt{gh_R} - \sqrt{gh_*}) \end{cases} \quad (2-83)$$

由式 (2-83) 可得：

$$h_* = \frac{1}{g} \left[\frac{1}{2} (\sqrt{gh_L} + \sqrt{gh_R}) + \frac{1}{4} (u_{\perp,L} - u_{\perp,R}) \right]^2 \quad (2-84)$$

$$u_{\perp,*} = \frac{u_{\perp,L} + u_{\perp,R}}{2} + \sqrt{gh_L} - \sqrt{gh_R} \quad (2-85)$$

精确 Riemann 求解器即通过上述过程精确确定 Riemann 解的结构，进而计算出界面处（ $\xi=0$ ）的状态值，并将其代入通量函数以求得数值通量。由上述过程可知，精确求解 Riemann 的计算效率较低，且求解过程较为繁琐。

另一方面，由于近似求解 Riemann 问题的效率较高，且精度完全满足模拟计算的要求，因此近似 Riemann 求解器获得了广泛的研究和应用。目前较常用的 Riemann 求解器主要有：FVS 格式、FDS 格式、Osher 格式、Roe 格式、HLL 格式、HLLC 格式等。关于 Riemann 求解器的详细介绍可参考教材错误!未找到引用源。和错误!未找到引用源。。

由于 HLLC 格式满足熵条件，且在合理计算波速的情况下适应干湿界面计算错误!未找到引用源。，因此本文采用该格式计算二维浅水方程的对流数值通量：

$$\mathbf{F}^{\text{adv}}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R) \cdot \mathbf{n} = \begin{cases} \mathbf{F}_L^{\text{adv}} & \text{if } s_1 \geq 0 \\ \mathbf{F}_{*,L}^{\text{adv}} & \text{if } s_1 < 0 \leq s_2 \\ \mathbf{F}_{*,R}^{\text{adv}} & \text{if } s_2 < 0 < s_3 \\ \mathbf{F}_R^{\text{adv}} & \text{if } s_3 \leq 0 \end{cases} \quad (2-86)$$

式中， $\mathbf{F}_L^{\text{adv}} = \mathbf{F}^{\text{adv}}(\mathbf{U}_L) \cdot \mathbf{n}$ ， $\mathbf{F}_R^{\text{adv}} = \mathbf{F}^{\text{adv}}(\mathbf{U}_R) \cdot \mathbf{n}$ ，均由式 (2-71) 计算； \mathbf{U}_L 、 \mathbf{U}_R 分别为局部 Riemann 问题所在界面左侧和右侧的守恒向量； $\mathbf{F}_{*,L}^{\text{adv}}$ 、 $\mathbf{F}_{*,R}^{\text{adv}}$ 分别为 Riemann 解中间区域接触波左、右侧的数值通量； s_1 、 s_2 、 s_3 分别为左波、接

触波和右波的波速（如图 2-5 所示）。

接触波左、右侧的数值通量 $\mathbf{F}_{*,L}^{\text{adv}}$ 、 $\mathbf{F}_{*,R}^{\text{adv}}$ 分别由下式（2-87）和（2-88）计算：

$$\mathbf{F}_{*,L}^{\text{adv}} = \begin{bmatrix} (\mathbf{E}_{\text{HLL}}^{\text{adv}})^1 \\ (\mathbf{E}_{\text{HLL}}^{\text{adv}})^2 n_x - u_{//,L} (\mathbf{E}_{\text{HLL}}^{\text{adv}})^1 n_y \\ (\mathbf{E}_{\text{HLL}}^{\text{adv}})^2 n_y + u_{//,L} (\mathbf{E}_{\text{HLL}}^{\text{adv}})^1 n_x \end{bmatrix} \quad (2-87)$$

$$\mathbf{F}_{*,R}^{\text{adv}} = \begin{bmatrix} (\mathbf{E}_{\text{HLL}}^{\text{adv}})^1 \\ (\mathbf{E}_{\text{HLL}}^{\text{adv}})^2 n_x - u_{//,R} (\mathbf{E}_{\text{HLL}}^{\text{adv}})^1 n_y \\ (\mathbf{E}_{\text{HLL}}^{\text{adv}})^2 n_y + u_{//,R} (\mathbf{E}_{\text{HLL}}^{\text{adv}})^1 n_x \end{bmatrix} \quad (2-88)$$

式中， $(\mathbf{E}_{\text{HLL}}^{\text{adv}})^1$ 、 $(\mathbf{E}_{\text{HLL}}^{\text{adv}})^2$ 分别为运用 HLL 格式^{错误!未找到引用源。}计算得到的法向数值通量的第一、二个分量：

$$\mathbf{E}_{\text{HLL}}^{\text{adv}} = \frac{s_3 \mathbf{E}^{\text{adv}}(\hat{\mathbf{U}}_L) - s_1 \mathbf{E}^{\text{adv}}(\hat{\mathbf{U}}_R) + s_1 s_3 (\hat{\mathbf{U}}_R - \hat{\mathbf{U}}_L)}{s_3 - s_1} \quad (2-89)$$

由式（2-86）和（2-89）可知，运用 HLLC 求解器计算数值通量的关键在于波速近似。在已有文献中，存在多种波速估计方法。Fraccarollo 和 Toro^{错误!未找到引用源。}以及 Liang 和 Borthwick^{错误!未找到引用源。}采用双稀疏波假设并考虑干底情况的方法以计算波速近似值。Zia 和 Banihashenmi^{错误!未找到引用源。}则采用综合考虑激波、稀疏波和干底情况的方法以计算波速估计值。本文采用双稀疏波假设并考虑干底情况的方法计算左、右波速值，但中间状态近似值采用 Roe 平均代替 Fraccarollo 和 Toro^{错误!未找到引用源。}以及 Liang 和 Borthwick^{错误!未找到引用源。}所采用的如式（2-84）和（2-85）所示基于双稀疏波假设的中间状态近似值。该波速估计方法即为 Einfeldt 波速计算式^[74, 105, 106]：

$$s_1 = \begin{cases} \min(u_{\perp,L} - \sqrt{gh_L}, u_{\perp,*} - \sqrt{gh_*}) & \text{if } h_L > 0 \\ u_{\perp,R} - 2\sqrt{gh_R} & \text{if } h_L = 0 \end{cases} \quad (2-90)$$

$$s_3 = \begin{cases} \max(u_{\perp,R} + \sqrt{gh_R}, u_{\perp,*} + \sqrt{gh_*}) & \text{if } h_R > 0 \\ u_{\perp,L} + 2\sqrt{gh_L} & \text{if } h_R = 0 \end{cases} \quad (2-91)$$

式中， h_* 和 $u_{\perp,*}$ 为 Roe 平均：

$$h_* = \frac{1}{2}(h_L + h_R) \quad (2-92)$$

$$u_{\perp,*} = \frac{\sqrt{h_L} u_{\perp,L} + \sqrt{h_R} u_{\perp,R}}{\sqrt{h_L} + \sqrt{h_R}} \quad (2-93)$$

由于激波的波速小于激波后面区域的特征速度，此时 Einfeldt 波速即为激波波速的 Roe 近似，因此使用 Einfeldt 波速可获得在激波附近更加准确的数值解。
错误!未找到引用源。

由下式计算接触波的波速。
错误!未找到引用源。

$$s_2 = \frac{s_1 h_R (u_{\perp,R} - s_3) - s_3 h_L (u_{\perp,L} - s_1)}{h_R (u_{\perp,R} - s_3) - h_L (u_{\perp,L} - s_1)} \quad (2-94)$$

式 (2-86) ~ (2-94) 即为对流数值通量的计算方法。而扩散数值通量的计算过程较为简单，即：

$$\mathbf{F}_{i,k}^{\text{diff}} \cdot \mathbf{n}_{i,k} = \mathbf{E}_{i,k}^{\text{diff}} n_{i,k}^x + \mathbf{G}_{i,k}^{\text{diff}} n_{i,k}^y = \begin{bmatrix} 0 \\ h_{i,k} \nu_t [2 \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,k} n_{i,k}^x + (\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) \Big|_{i,k} n_{i,k}^y] \\ h_{i,k} \nu_t [(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) \Big|_{i,k} n_{i,k}^x + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{i,k} n_{i,k}^y] \end{bmatrix} \quad (2-95)$$

式中， $h_{i,k}$ 为单元 C_i 第 k 条边所在界面处的水深； $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,k}$ 、 $\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{i,k}$ 、 $\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{i,k}$ 、 $\frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{i,k}$

为流速分量在单元 C_i 第 k 条边所在界面处的斜率。

在计算扩散数值通量时，界面处的水深值取界面两侧单元水深重构值的平均：

$$h_{i,k} = \frac{h_{i,k}^{\text{Rec,L}} + h_{i,k}^{\text{Rec,R}}}{2} \quad (2-96)$$

式中， $h_{i,k}^{\text{Rec,L}}$ 、 $h_{i,k}^{\text{Rec,R}}$ 分别为单元 C_i 第 k 条边所在界面左、右侧的水深重构值，其详细计算方法见 2.2.5 节。

界面处的流速梯度取界面两侧单元流速梯度的面积加权平均：

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,k} = \frac{\Omega_{i,k}^L u_x|_{i,k}^L + \Omega_{i,k}^R u_x|_{i,k}^R}{\Omega_{i,k}^L + \Omega_{i,k}^R} \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i,k} = \frac{\Omega_{i,k}^L u_y|_{i,k}^L + \Omega_{i,k}^R u_y|_{i,k}^R}{\Omega_{i,k}^L + \Omega_{i,k}^R} \quad (2-97)$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{i,k} = \frac{\Omega_{i,k}^L v_x|_{i,k}^L + \Omega_{i,k}^R v_x|_{i,k}^R}{\Omega_{i,k}^L + \Omega_{i,k}^R} \quad \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{i,k} = \frac{\Omega_{i,k}^L v_y|_{i,k}^L + \Omega_{i,k}^R v_y|_{i,k}^R}{\Omega_{i,k}^L + \Omega_{i,k}^R} \quad (2-98)$$

式中， $\Omega_{i,k}^L$ 、 $\Omega_{i,k}^R$ 分别为单元 C_i 第 k 条边所在界面左、右侧单元的面积； $u_x|_{i,k}^L$ 、 $u_y|_{i,k}^L$ 、 $v_x|_{i,k}^L$ 、 $v_y|_{i,k}^L$ 为界面左侧单元的流速分量斜率； $u_x|_{i,k}^R$ 、 $u_y|_{i,k}^R$ 、 $v_x|_{i,k}^R$ 、 $v_y|_{i,k}^R$ 为界面右侧单元的流速分量斜率。单元流速梯度的详细计算方法见下节。

2.2.5 变量重构和斜率限制函数

如果物理量在单元内近似为常数分布，并且以各单元形心处的值作为界面处局部 **Riemann** 问题的初始间断条件，则相应的计算格式在空间上仅具有一阶精度，存在较大的数值耗散。对水流模拟而言，一阶精度的计算格式能基本满足工程应用的要求。然而，对泥沙运动或者污染物扩散模拟而言，一阶格式的过度数值耗散往往导致计算结果失真。为了提高格式的空间精度，在构造界面处局部 **Riemann** 问题时，需要采用比分片常数近似函数更高精度的重构方法对界面左、右两侧的变量进行重构^[79, 82, 83, 107-113]，并基于重构变量求解界面处的数值通量。

若界面某侧的单元为局部淹没状态，则界面该侧的流速重构值为该侧单元形心处的值：

$$u_{i,k}^{\text{Rec}} = u_i \quad v_{i,k}^{\text{Rec}} = v_i \quad (k = 1, 2, 3) \quad (2-99)$$

式中， $u_{i,k}^{\text{Rec}}$ 、 $v_{i,k}^{\text{Rec}}$ 为界面重构值； u_i 、 v_i 为单元形心处的值。

同时，界面该侧的水深重构值按下式（2-100）计算：

$$h_{i,k}^{\text{Rec}} = \begin{cases} 0 & \text{if } \eta_i \leq b_{i,k}^{\min} \\ \frac{(\eta_i - b_{i,k}^{\min})^2}{2(b_{i,k}^{\max} - b_{i,k}^{\min})} & \text{if } b_{i,k}^{\min} < \eta_i \leq b_{i,k}^{\max} \\ \eta_i - \frac{b_{i,k}^{\min} + b_{i,k}^{\max}}{2} & \text{if } \eta_i > b_{i,k}^{\max} \end{cases} \quad (k=1, 2, 3) \quad (2-$$

100)

式中, $h_{i,k}^{\text{Rec}}$ 为界面重构值; η_i 为单元的水位值; $b_{i,k}^{\min}$ 、 $b_{i,k}^{\max}$ 分别为单元 C_i 第 k 条边首尾两个节点底高程的最小值和最大值。

若界面某侧的单元为全淹没状态, 则通过线性重构并结合限制函数计算界面该侧的水位、流速重构值:

$$p(x, y) = p_i + \overline{\nabla p_i} \cdot \mathbf{r} \quad (2-101)$$

式中, p 为重构变量, 如 η 、 u 或 v ; (x, y) 为界面中点处的坐标; \mathbf{r} 为界面中点相对于单元形心的位置矢量; $\overline{\nabla p_i}$ 为限制梯度:

$$\overline{\nabla p_i} = \varphi_i \nabla p_i \quad (2-102)$$

式中, $\nabla p_i = (\frac{\partial p}{\partial x}|_i, \frac{\partial p}{\partial y}|_i)^T$ 为原始梯度; φ_i 为限制函数:

$$\varphi_i = \min_{k=1,2,3}(\varphi_k), \quad \varphi_k = \begin{cases} \min[1, \frac{\max(0, p_{i,k}^{\text{nc}} - p_i)}{p_{i,k}^{\text{Rec}} - p_i}] & \text{if } p_{i,k}^{\text{Rec}} - p_i > 0 \\ \min[1, \frac{\min(0, p_{i,k}^{\text{nc}} - p_i)}{p_{i,k}^{\text{Rec}} - p_i}] & \text{if } p_{i,k}^{\text{Rec}} - p_i < 0 \\ 1 & \text{if } p_{i,k}^{\text{Rec}} - p_i = 0 \end{cases} \quad (2-$$

103)

式中, $p_{i,k}^{\text{Rec}} = p_i + \nabla p_i \cdot \mathbf{r}_{i,k}$ 为界面中心处未受限制的重构值; $p_{i,k}^{\text{nc}}$ 为单元 C_i 第 k 条边邻接单元形心处的变量值; p_i 为单元 C_i 形心处的变量值。

假设 $p_{i,1}$ 、 $p_{i,2}$ 、 $p_{i,3}$ 分别为变量 p 在单元 C_i 三个顶点 $(x_{i,1}, y_{i,1})$ 、 $(x_{i,2}, y_{i,2})$ 和 $(x_{i,3}, y_{i,3})$ 处的值，则变量 p 在单元 C_i 的梯度计算式为^{错误!未找到引用源。}：

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_i = \frac{(y_{i,3} - y_{i,1})(p_{i,2} - p_{i,1}) + (y_{i,1} - y_{i,2})(p_{i,3} - p_{i,1})}{(x_{i,2} - x_{i,1})(y_{i,3} - y_{i,1}) - (x_{i,3} - x_{i,1})(y_{i,2} - y_{i,1})} \quad (2-104)$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_i = \frac{(x_{i,1} - x_{i,3})(p_{i,2} - p_{i,1}) + (x_{i,2} - x_{i,1})(p_{i,3} - p_{i,1})}{(x_{i,2} - x_{i,1})(y_{i,3} - y_{i,1}) - (x_{i,3} - x_{i,1})(y_{i,2} - y_{i,1})} \quad (2-105)$$

水深重构值等于水位重构值减去底高程：

$$h_{i,k}^{\text{Rec}} = \eta_{i,k}^{\text{Rec}} - \frac{b_{i,k}^{\text{min}} + b_{i,k}^{\text{max}}}{2} \quad (2-106)$$

2.2.6 底坡项近似

二维浅水方程的源项分为底坡项和摩阻项。本文采用单元中心型近似方法处理底坡项：

$$S_{i,0x} = - \int_{C_i} g(h+b) \frac{\partial b}{\partial x} d\Omega = -g(h_i + b_i) \Omega_i \left. \frac{\partial b}{\partial x} \right|_i \quad (2-107)$$

$$S_{i,0y} = - \int_{C_i} g(h+b) \frac{\partial b}{\partial y} d\Omega = -g(h_i + b_i) \Omega_i \left. \frac{\partial b}{\partial y} \right|_i \quad (2-108)$$

为了保证模型的和谐性，Liang 和 Marche^{错误!未找到引用源。} 提出了底坡项近似校正项；Begnudelli 和 Sanders^{错误!未找到引用源。} 提出了动量通量校正项。然而，基于本文提出的二维浅水方程改进形式，建立的和谐模型不需要任何额外校正项。现证明如下^{错误!未找到引用源。}。

考虑静水条件，即流速为零、水深为常数。由于界面两侧的水深相等、流速为零，所以所有界面的物质通量为零。若单元 C_i 为全淹没状态，则其三条边的外法向对流数值通量为：

$$\sum_{k=1}^3 \mathbf{F}_{i,k}^{\text{adv}} \cdot \mathbf{n}_{i,k} L_{i,k} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sum_{k=1}^3 \frac{1}{2} g(h_{i,k}^2 - z_{i,k}^2) L_{i,k} n_{i,k}^x \\ \sum_{k=1}^3 \frac{1}{2} g(h_{i,k}^2 - z_{i,k}^2) L_{i,k} n_{i,k}^y \end{bmatrix} \quad (2-109)$$

式中， i 、 k 分别为单元序号和边序号； $\mathbf{n}_{i,k} = (n_{i,k}^x, n_{i,k}^y)^T$ ； h 、 z 分别为边中点处的水深重构值和底高程。由于单元 C_i 为全淹没状态，则：

$$h_{i,k} = \eta - z_{i,k} \quad (k=1, 2, 3) \quad (2-110)$$

式中， η 为静水条件下的水位统一值。

将式 (2-110) 代入式 (2-109)，可得：

$$\sum_{k=1}^3 \mathbf{F}_{i,k}^{\text{adv}} \cdot \mathbf{n}_{i,k} L_{i,k} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sum_{k=1}^3 \frac{1}{2} g(\eta^2 - 2\eta z_{i,k}) L_{i,k} n_{i,k}^x \\ \sum_{k=1}^3 \frac{1}{2} g(\eta^2 - 2\eta z_{i,k}) L_{i,k} n_{i,k}^y \end{bmatrix} = \frac{1}{2} g \eta^2 \begin{bmatrix} 0 \\ \sum_{k=1}^3 L_{i,k} n_{i,k}^x \\ \sum_{k=1}^3 L_{i,k} n_{i,k}^y \end{bmatrix} - g \eta \begin{bmatrix} 0 \\ \sum_{k=1}^3 z_{i,k} L_{i,k} n_{i,k}^x \\ \sum_{k=1}^3 z_{i,k} L_{i,k} n_{i,k}^y \end{bmatrix}$$

假设单元 C_i 第 k 个顶点的坐标及底高程分别为 $x_{i,j}$ 、 $y_{i,j}$ 和 $b_{i,j}$ ，顶点 1-顶点 2-顶点 3 排序服从逆时针方向，与顶点 k 相对的边为单元 C_i 第 k 条边（见 2.2.1 节），则有如下关系成立：

$$\begin{cases} L_{i,1} n_{i,1}^x = y_{i,3} - y_{i,2} \\ L_{i,2} n_{i,2}^x = y_{i,1} - y_{i,3} \\ L_{i,3} n_{i,3}^x = y_{i,2} - y_{i,1} \\ L_{i,1} n_{i,1}^y = x_{i,2} - x_{i,3} \\ L_{i,2} n_{i,2}^y = x_{i,3} - x_{i,1} \\ L_{i,3} n_{i,3}^y = x_{i,1} - x_{i,2} \end{cases} \quad (2-111)$$

$$\begin{cases} z_{i,1} = \frac{b_{i,2} + b_{i,3}}{2} \\ z_{i,2} = \frac{b_{i,1} + b_{i,3}}{2} \\ z_{i,3} = \frac{b_{i,1} + b_{i,2}}{2} \end{cases} \quad (2-112)$$

由式 (2-111) 有：

$$\sum_{k=1}^3 L_{i,k} n_{i,k}^x = 0, \quad \sum_{k=1}^3 L_{i,k} n_{i,k}^y = 0 \quad (2-113)$$

由式 (2-57)、(2-58)、(2-111) 和 (2-112) 有：

$$\sum_{k=1}^3 z_{i,k} L_{i,k} n_{i,k}^x = \Omega_i \left. \frac{\partial b}{\partial x} \right|_i, \quad \sum_{k=1}^3 z_{i,k} L_{i,k} n_{i,k}^y = \Omega_i \left. \frac{\partial b}{\partial y} \right|_i \quad (2-114)$$

因此，单元 C_i 三条边的外法向对流数值通量可化简为：

$$\sum_{k=1}^3 \mathbf{F}_{i,k}^{\text{adv}} \cdot \mathbf{n}_{i,k} L_{i,k} = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \eta \Omega_i \left. \frac{\partial b}{\partial x} \right|_i \\ -g \eta \Omega_i \left. \frac{\partial b}{\partial y} \right|_i \end{bmatrix} \quad (2-115)$$

同时，由于静水条件下流速为零，故扩散数值通量和摩阻项为零。因此，结合式 (2-65) 有：

$$\Omega_i \frac{d\mathbf{U}_i}{dt} = - \sum_{k=1}^3 \mathbf{F}_{i,k}^{\text{adv}} \cdot \mathbf{n}_{i,k} L_{i,k} + \mathbf{S}_i = \mathbf{0} \quad (2-116)$$

由式 (2-116) 可知，模型能完全保持水流的静止状态，即在不使用任何额外校正项的前提下，本文建立的模型具有和谐性。

2.2.7 摩阻项处理

一般地，摩阻项通过算子分裂法^{错误!未找到引用源。}进行处理：

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{S}_f(\mathbf{U}) \Rightarrow \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -gn^2 hu \sqrt{u^2 + v^2} / h^{4/3} \\ -gn^2 hv \sqrt{u^2 + v^2} / h^{4/3} \end{bmatrix} \quad (2-117)$$

由于在摩阻项处理过程中，单元水深保持不变，即 $\frac{dh}{dt} = 0$ ，因此，式（2-117）可简化为：

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -gn^2 h^{-4/3} u \sqrt{u^2 + v^2} \\ -gn^2 h^{-4/3} v \sqrt{u^2 + v^2} \end{bmatrix} = -gn^2 h^{-4/3} \begin{bmatrix} u \sqrt{u^2 + v^2} \\ v \sqrt{u^2 + v^2} \end{bmatrix} \quad (2-118)$$

令 $\mathbf{u} = [u, v]^T$ ， $\mathbf{R}(\mathbf{u}) = -gn^2 h^{-4/3} [u \sqrt{u^2 + v^2}, v \sqrt{u^2 + v^2}]^T$ ，则 $\mathbf{R}(\mathbf{u})$ 的雅可比矩阵为：

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} = -gn^2 h^{-4/3} \begin{bmatrix} \sqrt{u^2 + v^2} + \frac{u^2}{\sqrt{u^2 + v^2}} & \frac{uv}{\sqrt{u^2 + v^2}} \\ \frac{uv}{\sqrt{u^2 + v^2}} & \sqrt{u^2 + v^2} + \frac{v^2}{\sqrt{u^2 + v^2}} \end{bmatrix} \quad (2-119)$$

式（2-119）所示 $\mathbf{R}(\mathbf{u})$ 的雅可比矩阵的特征值为：

$$\begin{cases} \lambda_1 = -gn^2 h^{-4/3} \sqrt{u^2 + v^2} \\ \lambda_2 = -2gn^2 h^{-4/3} \sqrt{u^2 + v^2} \end{cases} \quad (2-120)$$

若采用两步 Runge-Kutta 法计算式（2-118），结合模型方程 $y' = \lambda y$ 进行绝对稳定性分析^{错误!未找到引用源。}，可得：

$$|E(\lambda \Delta t)| = \left| 1 + \lambda \Delta t + \frac{1}{2} (\lambda \Delta t)^2 \right| < 1 \quad (2-121)$$

由式（2-121）有：

$$-2 < \lambda \Delta t < 0 \quad (2-122)$$

复杂地形的陡峭坡面，使局部区域的水深较小、流速较大，由式（2-120）可知，特征值 $|\lambda_{1,2}|$ 将很大，即式（2-118）对应的常微分方程系统的 Lipschitz 常数很大^{错误!未找到引用源。}，因此，摩阻项可能引起刚性问题。此时，若采用一般的显式数值方法处理摩阻项，将显著影响数值计算的稳定性，或将极大减小全局

时间步长，从而严重降低计算效率。为解决上述问题，需要采用隐式或半隐式格式处理摩阻项。然而，由于水深变量位于摩阻项的分母，一般的隐式或半隐式计算格式仍面临一些问题，如产生错误的大流速、改变流速分量的方向等。Liang 和 Marche^{错误!未找到引用源。}采用隐式格式处理摩阻项，同时引入摩阻项近似的最大值条件限制，以保证摩阻项处理过程中流速分量的方向不被改变。综合考虑摩阻项处理的稳定性和计算效率，本文采用 Wylie 和 Streeter^{错误!未找到引用源。}提出的半隐式格式处理摩阻项。

定义：

$$\hat{\tau} = -gn^2 \sqrt{u^2 + v^2} h^{-4/3} \quad (2-123)$$

则由式（2-118）可得：

$$\frac{du}{dt} = \hat{\tau} u \quad (2-124)$$

利用半隐式格式求解式（2-124），可得：

$$\frac{u^{n+1} - \hat{u}^n}{\Delta t} = \hat{\tau}^n u^{n+1} \quad (2-125)$$

即：

$$u^{n+1} = \frac{1}{1 - \Delta t \hat{\tau}^n} \hat{u}^n \quad (2-126)$$

同理可得：

$$v^{n+1} = \frac{1}{1 - \Delta t \hat{\tau}^n} \hat{v}^n \quad (2-127)$$

式中， $\hat{\tau}^n = -gn^2 \sqrt{(\hat{u}^n)^2 + (\hat{v}^n)^2} (\hat{h}^n)^{-4/3}$ ； \hat{h}^n 、 \hat{u}^n 、 \hat{v}^n 为利用数值通量对 n 时刻已知量进行更新得到的值。由式（2-126）和（2-127）可知，本文采用的半隐式格式能保证不改变流速分量的方向，有利于计算稳定性。

由 2.1.3 节可知，因式（2-47）和（2-48）所示动量通量校正项引起的非物理大流速问题往往与小水深单元有关。虽然 Sanders et al.建立的模型^[58, 82, 84]采用了该校正项，但由于同时采用了式（2-126）和（2-127）所示半隐式格式处理摩阻项，可使与小水深有关的大流速降低至合理范围^{错误!未找到引用源。}，因此，Sanders et al.建立的模型在诸多实际工程中获得了成功的应用^[116, 117]。

2.2.8 时间二阶积分

在二维浅水方程数值求解过程中，时间上离散可采用 Runge-Kutta^[57, 70]、Hancock 预测-校正^[58, 69]等多步格式，以提高模型的时间精度。从计算效率看，在一个时间步长内，两步 Runge-Kutta 法分别对所有单元界面计算两次黎曼问题，而 Hancock 预测-校正法只需要计算一次黎曼问题，因此，Hancock 预测-校正法的计算效率相对较高；从格式稳定性看，Runge-Kutta 法可满足 TVD 性质，而 MUSCL-Hancock 法在合理选择时间步长的前提下满足 L¹ 稳定^{错误!未找到引用源。}。本文采用 Hancock 预测-校正格式实现二维浅水方程数值求解的时间二阶积分。

(1) 预测步

在预测步，计算域的水流状态由 t 时刻更新至 $t + \Delta t / 2$ 时刻，其中 Δt 为计算时间步长。 Δt 可以设定为常数，也可以根据稳定条件进行自适应调整，见 2.2.10 节。一般情况下，紊动扩散项对溃坝水流的影响较小，考虑到模型的计算效率，预测步不考虑紊动扩散项。

若单元为全干或局部淹没状态，则以当前时刻的水位、流速作为预测步的结果：

$$\begin{cases} \eta_i^{t+\Delta t/2} = \eta_i^t \\ u_i^{t+\Delta t/2} = u_i^t \\ v_i^{t+\Delta t/2} = v_i^t \end{cases} \quad (2-128)$$

式中， η_i^t 、 u_i^t 、 v_i^t 分别为 t 时刻的水位、流速； $\eta_i^{t+\Delta t/2}$ 、 $u_i^{t+\Delta t/2}$ 、 $v_i^{t+\Delta t/2}$ 为预测步结果。

若单元为全淹没状态，则以水位、流速作为预测变量^{错误!未找到引用源。}：

$$\eta_i^{t+\Delta t/2} = \eta_i^t - \frac{\Delta t}{2} (h \bar{\partial}_x u + h \bar{\partial}_y v + u \bar{\partial}_x h + v \bar{\partial}_y h) \Big|_i^t \quad (2-129)$$

$$u_i^{t+\Delta t/2} = \frac{1}{1 + g n^2 h^{-4/3} \sqrt{u^2 + v^2} \Delta t / 2} \left[u - \frac{\Delta t}{2} (u \bar{\partial}_x u + g \bar{\partial}_x \eta + v \bar{\partial}_y u) \right] \Big|_i^t \quad (2-130)$$

$$v_i^{t+\Delta t/2} = \frac{1}{1 + g n^2 h^{-4/3} \sqrt{u^2 + v^2} \Delta t / 2} \left[v - \frac{\Delta t}{2} (u \bar{\partial}_x v + g \bar{\partial}_y \eta + v \bar{\partial}_y v) \right] \Big|_i^t \quad (2-131)$$

由于静水条件下流速为零、水位为常数，因此，由式 (2-128) ~ (2-131)

可知，预测步的水流静止状态得以维持。

(2) 校正步

在校正步，计算域的水流状态由 t 时刻更新至 $t + \Delta t$ 时刻。基于守恒形式浅水方程，由下式对单元值进行更新：

$$\mathbf{U}_i^{t+\Delta t} = \mathbf{U}_i^t + \frac{\Delta t}{\Omega_i} \left[-\sum_{k=1}^3 (\mathbf{F}_{i,k}^{\text{adv}} + \mathbf{F}_{i,k}^{\text{diff}}) \cdot \mathbf{n}_{i,k} l_{i,k} + \mathbf{S}_i \right]^{t+\Delta t/2} \quad (2-132)$$

式中， \mathbf{U}_i^t 、 $\mathbf{U}_i^{t+\Delta t}$ 分别为单元 C_i 在 t 和 $t + \Delta t$ 时刻的单元平均守恒向量；

$(\mathbf{F}_{i,k}^{\text{adv}})^{t+\Delta t/2}$ 、 $(\mathbf{F}_{i,k}^{\text{diff}})^{t+\Delta t/2}$ 分别为基于预测步结果的对流数值通量和扩散数值通量；

\mathbf{S}_i 为源项近似。

2.2.9 边界条件

一般情况下，数学模型的边界条件实现方式有两种：镜像单元法和直接计算数值通量法。其中，前者在基于结构网格的数学模型中应用较广，而后者被广泛运用于基于非结构网格的数值模型。本文采用直接计算数值通量的方式实现边界条件。

由式（2-71）可得边界处的对流数值通量为：

$$\mathbf{F}^{\text{adv}} \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} h_* u_{\perp,*} \\ h_* u_* u_{\perp,*} + \frac{1}{2} g (h_*^2 - b^2) n_x \\ h_* v_* u_{\perp,*} + \frac{1}{2} g (h_*^2 - b^2) n_y \end{bmatrix} \quad (2-133)$$

式中， h_* 、 u_* 、 $u_{\perp,*}$ 分别代表边界边中点处的水深、 x 方向流速分量、界面外法向方向流速分量； b 为边界边中点处的底高程值； n_x 、 n_y 为分别为边界边的外法向单位向量在 x 和 y 方向分量。

由式（2-133）可知，计算边界边对流数值通量的关键在于估算边界边中点处的水深、流速等物理量。

(1) 急流开边界条件

由浅水方程特征理论可知，水流为急流状态时信息沿下游传播，因此急流出口边界的扰动不会对计算域内的水流状态产生影响。故急流边界处的水深、流速等水力要素值采用边界边所在内单元的水力要素值：

$$h_* = h_L \quad (2-134)$$

$$u_* = u_L, \quad v_* = v_L \quad (2-135)$$

在数值模拟中，常采用自由出流边界条件，其实现方式与急流开边界条件相同。

(2) 缓流开边界条件

假设边界边的左侧位于计算域之内、右侧位于计算域之外，基于浅水方程特征理论，由一维浅水方程的 Riemann 不变量可得 错误!未找到引用源。：

$$u_{\perp,*} + 2\sqrt{gh_*} = u_{\perp,L} + 2\sqrt{gh_L} \quad (2-136)$$

式中， $h_{\perp,L}$ 、 $u_{\perp,L}$ 分别为边界边所在内单元形心处的水深和界面外法向方向流速分量。

式 (2-136) 中存在两个未知变量，因此需要结合边界条件建立关于 h_* 和 $u_{\perp,*}$ 的等式，进而通过求解方程组计算 h_* 和 $u_{\perp,*}$ 。

1) 水位边界条件

在边界上给定水位 $\eta = \eta(t)$ ，则边界上水深为 $h_* = \eta(t) - b$ 。由式 (2-136) 可得：

$$u_{\perp,*} = u_{\perp,L} + 2\sqrt{gh_L} - 2\sqrt{gh_*} \quad (2-137)$$

2) 流速边界条件

在边界上给定边界边外法向方向的流速分量 $u_{\perp,*}$ ，由式 (2-136) 可得：

$$h_* = \frac{1}{4g} (u_{\perp,L} + 2\sqrt{gh_L} - u_{\perp,*})^2 \quad (2-138)$$

3) 单宽流量边界条件

在边界上给定边界边的外法向方向单宽流量 $q_{\perp,*} = q(t)$:

$$q_{\perp,*} = h_* u_{\perp,*} \quad (2-139)$$

由式 (2-139) 有:

$$u_{\perp,*} = \frac{q_{\perp,*}}{h_*} \quad (2-140)$$

将式 (2-140) 代入式 (2-136) 可得:

$$f(c_*) = c_*^3 - \frac{a_L}{2} c_*^2 + \frac{1}{2} g q_{\perp,*} = 0 \quad (2-141)$$

式中, $c_* = \sqrt{gh_*} \geq 0$; $a_L = u_{\perp,L} + 2\sqrt{gh_L}$ 。

当 $q_{\perp,*} < 0$ 时, 为入流边界条件。通过对函数 $f(c_*) = c_*^3 - 1/2 a_L c_*^2 + 1/2 g q_{\perp,*}$ 进行分析可知, 如图 2-6 所示, $f(0) = 1/2 g q_{\perp,*} < 0$; 当 $a_L < 0$ 时, $f(c_*)$ 为单调递增函数; 当 $a_L > 0$ 时, 在区间 $(0, a_L/3]$ 内为单调递减函数, 在区间 $[a_L/3, +\infty]$ 内为单调递增函数。因此, 入流边界条件时, 方程 $f(c_*) = 0$ 存在唯一的实数根, 可通过 Newton-Raphson 法进行求解, 并选取 $c_* = 2a_L/3$ 作为迭代计算的初始值。

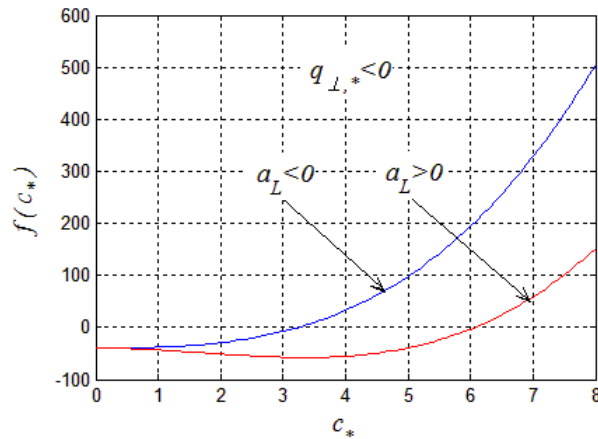


图 2-6 入流边界条件时, 函数 $f(c_*)$ 示意图

当 $q_{\perp,*} > 0$ 时, 为出流边界条件。通过对函数 $f(c_*) = c_*^3 - 1/2 a_L c_*^2 + 1/2 g q_{\perp,*}$ 进行分析可知, 如图 2-7 所示, $f(0) = 1/2 g q_{\perp,*} > 0$; 当 $a_L < 0$ 时, $f(c_*)$ 为单调

递增函数， $f(c_*)=0$ 无实数根；当 $0 < a_L < 3(gq_{L,*})^{1/3}$ 时， $f(c_*)$ 的最小值大于零， $f(c_*)=0$ 无实数根；当 $a_L = 3(gq_{L,*})^{1/3}$ 时， $f(c_*)$ 的最小值等于零， $f(c_*)=0$ 有且仅有一个实数根；当 $a_L > 3(gq_{L,*})^{1/3}$ 时， $f(c_*)=0$ 有两个互不相等的实数根。

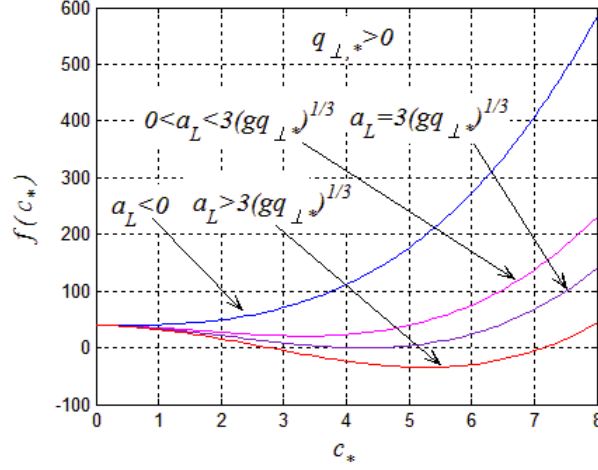


图 2-7 出流边界条件时，函数 $f(c_*)$ 示意图

值得注意的是，出流边界条件时，图 2-7 所示四种情况并非全部成立。由于出流边界处于缓流状态，即：

$$0 < u_{\perp,*} < \sqrt{gh_*} \quad (2-142)$$

定义：

$$\begin{aligned} \varphi(h_*) &= u_{\perp,*} + 2\sqrt{gh_*} - 3(gq_{\perp,*})^{1/3} \\ &= \frac{q_{\perp,*}}{h_*} + 2\sqrt{gh_*} - 3(gq_{\perp,*})^{1/3} \end{aligned} \quad (2-143)$$

则 $\varphi(h_*)$ 的导数为：

$$\varphi'(h_*) = -\frac{q_{\perp,*}}{h_*^2} + \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{h_*}} \quad (2-144)$$

将式 (2-139) 代入式 (2-144)，结合式 (2-142)，可得：

$$\varphi'(h_*) = -\frac{u_{\perp,*}}{h_*} + \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{h_*}} > \frac{-\sqrt{gh_*}}{h_*} + \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{h_*}} = 0 \quad (2-145)$$

由式 (2-139) 和 (2-142) 可得 h_* 的取值范围为:

$$\frac{q_{\perp,*}}{h_*} < \sqrt{gh_*} \quad \Rightarrow \quad h_* > \left(\frac{q_{\perp,*}^2}{g}\right)^{1/3} \quad (2-146)$$

将 $h_* = \left(\frac{q_{\perp,*}^2}{g}\right)^{1/3}$ 代入式 (2-143) 可得:

$$\varphi\left(\left(\frac{q_{\perp,*}^2}{g}\right)^{1/3}\right) = 0 \quad (2-147)$$

由式 (2-145) ~ (2-147) 可知:

$$\varphi(h_*) > 0, \quad h_* > \left(\frac{q_{\perp,*}^2}{g}\right)^{1/3} \quad (2-148)$$

因此, 由式 (2-143) 可知:

$$u_{\perp,*} + 2\sqrt{gh_*} > 3(gq_{\perp,*})^{1/3} \quad (2-149)$$

结合式 (2-136), 可得:

$$a_L = u_{\perp,L} + 2\sqrt{gh_L} > 3(gq_{\perp,*})^{1/3} \quad (2-150)$$

因此, 出流边界条件时, 图 2-7 所示四种情况中, 仅有 $a_L > 3(gq_{\perp,*})^{1/3}$ 情况成立。虽然此时 $f(c_*) = 0$ 有两个互不相等的实数根, 但仅有一个实数根满足式 (2-142) 所示缓流条件。此时, 选取 $c_* = 2(gq_{\perp,*})^{1/3}$ 作为 Newton-Raphson 迭代计算的初始值进行方程求解。

4) 断面流量边界条件

当模拟实际河道上的洪水演进时, 往往给定上游断面的流量过程。由于上游断面被淹部分较宽, 水流存在一定的横比降, 因此不能简单地通过将上游断面的流量除以断面被淹部分宽度实现单宽流量计算。

根据曼宁公式, 流速与水深的 $2/3$ 次方成正比, 即流量边界处第 1 至 M 条边有:

$$\left(\frac{u_{\perp,*}}{h_*^{2/3}}\right)^1 = \left(\frac{u_{\perp,*}}{h_*^{2/3}}\right)^2 = \dots = \left(\frac{u_{\perp,*}}{h_*^{2/3}}\right)^M \quad (2-151)$$

假设给定断面流量为 Q ，则：

$$Q = \sum_{k=1}^M (h_* u_{\perp,*} l)^k \quad (2-152)$$

式中， l 为边的长度。由式（2-151）和（2-152）有：

$$Q = \sum_{k=1}^M (h_* u_{\perp,*} l)^k = \sum_{k=1}^M \left(\frac{u_{\perp,*}}{h_*^{2/3}}\right)^i (h_*^{5/3} l)^k = \left(\frac{u_{\perp,*}}{h_*^{2/3}}\right)^i \sum_{k=1}^M (h_*^{5/3} l)^k \quad (2-153)$$

因此，第 i 条边的流量为：

$$Q^i = (h_* u_{\perp,*} l)^i = \frac{Q (h_*^{5/3} l)^i}{\sum_{k=1}^M (h_*^{5/3} l)^k} \quad (2-154)$$

故第 i 条边的单宽流量为：

$$q_{\perp,*}^i = \frac{Q^i}{l^i} = \frac{Q (h_*^{5/3})^i}{\sum_{k=1}^M (h_*^{5/3} l)^k} \quad (2-155)$$

通过式（2-155）计算得到各条边的单宽流量，进而结合单宽流量边界条件实现方法，进行相应的边界条件计算。

为获取边界处的 x 和 y 方向流速分量，还需要计算边界处的切向流速。本文假设边界处的切向流速等于边界边所在内单元形心处的切向流速，即：

$$u_{//,*} = u_{//,L} \quad (2-156)$$

通过下式（2-157）将局部坐标系下的流速值转换为笛卡尔坐标系下的流速值：

$$\begin{aligned} u_* &= u_{\perp,*} n_x - u_{//,*} n_y \\ v_* &= u_{\perp,*} n_y + u_{//,*} n_x \end{aligned} \quad (2-157)$$

基于 h_* 、 $u_{\perp,*}$ 、 u_* 和 v_* 计算结果，通过式（2-133）计算边界边的对流数值通量。

（3）固壁边界条件

在固壁边界处，边界上的法向流速为零，且假设边界上的水深值等于边界边所在内单元形心处的水深值，即：

$$u_{\perp,*} = 0, \quad h_* = h_L \quad (2-158)$$

结合式（2-133），边界边的对流数值通量为：

$$\mathbf{F}^{\text{adv}} \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} g(h_*^2 - b^2) n_x \\ \frac{1}{2} g(h_*^2 - b^2) n_y \end{bmatrix} \quad (2-159)$$

2.2.10 稳定条件

由于采用显式格式求解浅水方程，为保持格式的稳定性，时间步长 Δt 受 CFL 稳定条件的限制：

$$\Delta t = C_r \cdot \min_{i,k} \left[\left(\frac{\Omega}{(|u_{\perp}| + \sqrt{gh})_k L_k} \right)_i \right] \quad i = 1, 2, \dots, N; k = 1, 2, 3 \quad (2-160)$$

式中， Δt 为时间步长； C_r 为克朗（Courant）数， $0 < C_r \leq 1$ ，一般情况下取 $C_r = 0.8$ ； u_{\perp} 和 h 为界面的 Roe 平均^{错误!未找到引用源。}； N 为计算网格的单元总数。