PROJET VELO

Le vélo : tour d'horizon

(sujet conçu et rédigé par Nathalie Jedrecy)

Chacun, chacune d'entre nous a déjà - au moins une fois dans sa vie - enfourché une bicyclette. Il est d'usage de parler de "petite reine" pour qualifier cette dernière, et plus communément de vélo. Que ce soit pour le loisir ou la compétition, le cyclisme est un sport universel qui peut être pratiqué par les personnes valides comme handicapées.

L'étude proposée décline quelques aspects liés à la pratique du vélo, avec un regard de physicien-ne. Elle s'est inspirée de l'excellent site consacré au vélo : http ://www.velomath.fr

Note : Les trois parties sont indépendantes; les parties I et II sont à traiter en priorité; prévoir au moins une séance pour la partie III. Les questions ** Pour aller plus loin ** sont optionnelles (i.e. non obligatoires); ne les traitez qu'en seconde intention. N'hésitez pas à raisonner sur une feuille de papier avant d'écrire les lignes de code du "notebook". **Les thèmes relatifs au cours sont : Forces et Moments.**

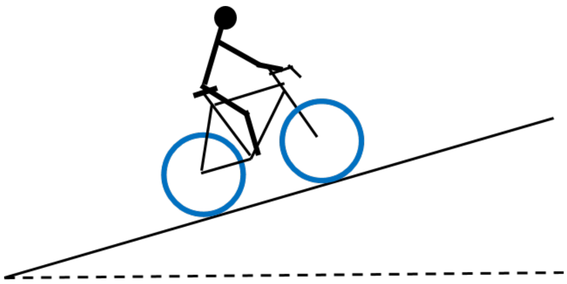

Figure 1 – Cycliste gravissant une côte.

I. Puissance dévelopée : analyse

Nous considérons le système {cycliste+vélo} (cf. Fig. 1), évoluant à vitesse constante sur une route de pente quelconque. Nous adoptons les notations suivantes :

M : la masse du système {cycliste+vélo} (en kg)
g : l'accéleration de la pesanteur (en ms^{-2})
$pente$: la pente de la route (exprimée ici en %)
v : la vitesse du système {cycliste+vélo} (exprimée ici en km/h)
P : la puissance développée par le cycliste (en unités S.I.)

Dans un modèle simplifié où interviennent la résistance de l'air et les frottements des pneus sur la route, la puissance P peut s'écrire :

$$P = (beta + pente)\ M\ g\ v\ /\ 360\ + (250/11664)\ alpha\ v^3 \quad (1)$$

avec

$beta$: un coefficient qui rend compte du frottement de la route sur les pneus (sans dimension)
$alpha$: coefficient de résistance de l'air (en unités S.I.)

1. Comment définit-on la pente "p" d'une route ? Que vaut "p" dans le cas d'une pente à 10 % ($pente = 10$ dans l'expression (1)) ? Préciser les unités S.I. de P et $alpha$.

2. Definir la fonction "Puissance(v, $beta$, $pente$, M, $alpha$)" puis tracer la courbe "Puissance(v)" pour M= 85 kg, $beta$= 1, $alpha$= 0.2 S.I. et $pente = 0$. On prendra $g = 10$ ms^{-2} et on considérera v variant entre 0 et 80 km/h, avec un pas de 4 km/h. Indiquer les unités sur le graphe et ajouter un titre précisant les valeurs des paramètres.

3. Dans la réalité, pour un effort de l'ordre de 15 à 20 min, les meilleurs cyclistes mondiaux ne peuvent développer une puissance supérieure à 450 S.I. et une vitesse sur le plat de plus 45 km/h. Tracer une nouvelle figure de la puissance avec ces limites et représenter sur cette même figure la part de puissance dévolue à vaincre les frottements dus à la route (1^{er} terme de (1), qui dépend du poids) et la part dévolue à vaincre la résistance due à l'air (2^{eme} terme de (1)). Déterminer la vitesse au delà de laquelle la résistance due à l'air devient prépondérante.

4. Faire un nouveau graphe de "Puissance(v)", considérant 3 valeurs possibles pour la pente : -6, 0, 6 %. On créera un tableau "Puissance(v, $pente$)". Commenter sur la signification d'une pente négative et sur les valeurs admissibles de la puissance dans ce cas.

5. On considère une pente négative et un cycliste descendant en roue libre (sans faire aucun effort). Déterminer la vitesse du cycliste en fonction de la valeur de la pente. Vérifier si le résultat pour une pente de - 6 % est conforme au graphe .

6. Créer un fichier "vitesse-fonction-pente négative.txt" donnant les différentes vitesses de descente (en km/h) pour des pentes allant de -1 à -12 % (par pas de -1 %).

7. Utilisant le fichier créé à la question précédente, tracer le graphe de la vitesse de descente (en km/h) en fonction de la valeur absolue de la pente négative (en %).

8. ** Pour aller plus loin ** Utilisant "numpy.interp", interpoler la courbe précédente en considérant 150 points entre 0 et 12 %, puis comparer le résultat de l'interpolation aux points du fichier de données et à la fonction théorique (i.e. vitesse de descente théorique). Commenter.

9. Des mesures de vitesse de descente ont été effectuées pour le même cycliste avec le même vélo (M=85 kg) mais dans des conditions différentes (les paramètres $beta$ et $alpha$ sont différents de ceux précédents). Le fichier "Nouvelle-vitesse-fonction-pente.txt" donne les valeurs de vitesse (en km/h) pour différentes pentes descendantes p (en %) de la route. Tracer le graphe de la vitesse au carré en fonction de p.

10. En utilisant "numpy.polyfit", déterminer les paramètres $beta$ et $alpha$ ayant conduit aux vitesses mesurées. Faire un nouveau graphe montrant l'ajustement aux données.

11. ** Pour aller plus loin ** Question à n'aborder qu'en toute fin de projet, si le coeur vous en dit ! Nous souhaitons connaître la vitesse v à laquelle doit évoluer le cycliste sur des routes de différentes pentes (de -12 à 12 %) pour conserver une puissance constante, par exemple $P = 100$ S.I. Nous reprenons les conditions $beta$=1, M=85 kg, $alpha$=0.2 S.I.

La question revient à déterminer les zéros, c'est-à-dire les racines d'un polynome d'ordre 3 ($ax^3+bx^2+cx+d=0$). Utilisant "fsolve" de "scipy.optimize", déterminer les différentes vitesses correspondant aux différentes pentes (par pas de 1 %), pour que la puissance développée soit toujours égale à 100 S.I.

Conseils : On procédera en quatre étapes.
(1) On tracera tout d'abord les courbes de la puissance en fonction de la vitesse pour les pentes -6, 0, et 6 % afin de déterminer visuellement les vitesses correspondant à une puissance de 100 S.I.
(2) On déterminera ensuite par "fsolve" dans le cas des pentes 0 et 6 % les vitesses exactes pour une puissance P de 100 S.I.
(3) Dans le cas d'une pente négative (- 6 %), la racine fournie par "fsolve" est négative (testez le!). Il faut donc écrire ici quelques lignes de code poussant à la recherche de la racine positive.
(4) Une fois que vous aurez déterminé la méthode pour extraire la bonne racine positive, vous pourrez écrire le code complet permettant de déterminer la vitesse correspondant à une puissance de 100 S.I., la pente variant entre -12 et 12 %. Vous pourrez ensuite visualiser le résultat en traçant la vitesse en fonction de la pente, pour $P = 100$ S.I.

12. ** Pour aller plus loin ** Question très utile pour réviser vos connaissances (cours et TDs) et qui pourra enrichir votre soutenance orale finale! (à traiter en dehors du "notebook")
Un physicien ou une physicienne écrirait plutôt la formule de la puissance selon :

$$P = (\mu + tan(\theta))\ cos(\theta)\ M\ g\ v + \alpha\ v^3 \tag{2}$$

avec v la vitesse en m/s.
μ est le coefficient de frottement dynamique (avec glissement) vu en cours et θ l'angle d'inclinaison de la route avec l'horizontale. α est un coefficient qui peut s'écrire en fonction du coefficient de trainée aérodynamique C_x.
Lister les différentes forces s'exerçant sur le système {cycliste+vélo} (faire un schéma de ces forces) et retrouver la formulation (2) de P.

II. Interlude : la montée "mythique" de l'Alpe d'Huez

Gravir l'Alpe d'Huez à vélo constitue pour les amoureux du cyclisme un objectif des plus enviables si ce n'est un « sine qua non » : 21 virages à négocier avec sur certains tronçons une pente allant jusqu'à 11.5 % (cf. Fig.2). Examinons le profil de la montée depuis Bourg-d'Oisans jusqu'au sommet, puis intéressons-nous aux temps d'ascension de coureurs professionnels lors d'un contre-la-montre du Tour de France.

FIGURE 2 – Les 21 lacets de l'Alpe d'Huez

1. Nous donnons ci-dessous la liste des pentes moyennes successives par kilomètre mesuré à l'horizontale, sauf la dernière valeur qui ne concerne que 800 m.
   Liste des pentes (en %) = [10.4, 10, 8.5, 9, 8, 7.5, 9.5, 8, 6.5, 11.5, 9,5, 5, 5.5]
   Distance correspondante à l'horizontale (en km) = [0-1, 1-2, 2-3, 3-4, 4-5, 5-6, 6-7, 7-8, 8-9, 9-10, 10-11, 11-12, 12-13, 13-13.8]
   Noter que le dernier tronçon à 5.5 % ne couvre que 800 m contre 1 km pour tous les autres tronçons. La figure 3 précise la situation pour les deux premiers km à l'horizontale.

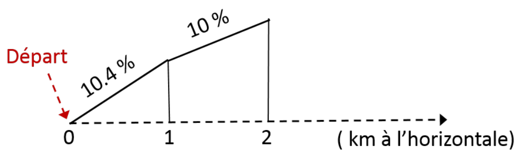

FIGURE 3 – Schéma de la route pour les deux premiers km pris à l'horizontale

2. 2-a). Supposant que la dernière valeur de pente concerne 1 km, calculer la pente moyenne de la montée de l'Alpe et l'écart-type (on définira auparavant ces deux entités). Comment donner la pente moyenne en écriture "condensée" ?

   2-b). Faire l'histogramme des pentes (mode automatique). Choisir ensuite un nombre de classes différent (par ex. 3), tracer l'histogramme correspondant et comparer au précédent. Trier les différentes valeurs de pente ; l'histogramme avec 3 classes est-il conforme à ce tri ?

   2-c). Etablir le profil de la montée de l'Alpe, c'est-à-dire l'évolution de l'altitude en fonction de la distance prise à l'horizontale depuis Bourg-d'Oisans (i.e. on donnera l'altitude pour chaque kilomètre à l'horizontale, depuis le kilomètre zéro). L'altitude de départ est 725 m. On précisera l'altitude atteinte au sommet.

   2-d). Tracer sur un même graphe le profil de la montée de l'Alpe, ainsi que le profil moyen.

3. Le fichier « Fichier-temps-coureurs-Alpe.txt » donne les 19 meilleurs temps (en min (') sec(")) réalisés par des cyclistes professionnels pour gravir l'Alpe d'Huez lors d'un contre-la-montre. La première colonne donne le classement, la deuxième le temps en min, la troisième le temps restant en sec.

   3-a). Lister à l'écran les temps d'ascension en sec. Faire un histogramme des temps d'ascension. On comparera ensuite l'histogramme obtenu par voie automatique à celui obtenu avec un choix manuel de largeur de classe égal à 100 sec. On donnera un titre aux axes et à l'histogramme.

   3-b). Calculer la moyenne des temps et l'écart-type ainsi que la vitesse moyenne en km/h des coureurs (prendre 13.8 km pour la distance parcourue). Déterminer également la puissance moyenne développée par les coureurs (utiliser l'équation (1) avec M=78 kg, $beta$= 1, $alpha$=0.08 SI).

4. ** Pour aller plus loin ** Comparer l'histogramme obtenu avec le profil de densité de probabilité donné par une loi log-normale de paramètres $\mu = 7.85$ et $\sigma = 0.051$, où μ est l'espérance et σ l'écart-type du logarithme de la variable temps :

$$f(t) = \frac{1}{t\sigma\sqrt{2\pi}} exp[-(ln(t) - \mu)^2/(2\sigma^2)] \tag{3}$$

III. La transmission à vélo : une histoire de couple

III. A. Le pédalage

Le mouvement de pédalage a fait l'objet d'un nombre considérable d'études. On se limite ici dans un premier temps à l'étude de la force exercée par le cycliste avec sa jambe droite au cours d'un demi-tour de pédale, et du moment résultant de cette force. On suppose que la force peut s'écrire selon :

$$\vec{F} = \pm\ H\ sin^{(n-1)}(\theta)\ \vec{i}\ + V\ cos^{(n-1)}(\theta)\ \vec{j} \tag{4}$$

où $\vec{i}$, $\vec{j}$ sont deux vecteurs unitaires portés respectivement par l'horizontale (vers la droite) et la verticale (vers le bas)

θ est l'angle que fait la manivelle par rapport à l'horizontale

H, V sont respectivement la valeur de la force à θ=$-\pi/2$ et à θ=0

n est un coefficient généralement compris entre 2 et 3.

le signe $\pm$ dépend de n et θ.

La longueur de la manivelle est notée L (L est la distance entre le centre O du plateau du pédalier et le centre de la pédale où la force s'applique). Au cours d'un demi-tour de pédale, l'angle theta varie entre -$\pi/2$ et $\pi/2$.

1. Définir le vecteur moment $\vec{M}$ de la force $\vec{F}$ par rapport au centre du pédalier, à l'angle θ. On prendra soin de définir auparavant le vecteur $\vec{OP}$ où P est le point d'application de la force ; il est recommandé de faire un schéma de $\vec{F}$ et $\vec{OP}$. Procéder ensuite au calcul du vecteur moment $\vec{M}$ et à celui de sa norme M=$||\vec{M}||$.

2. On considère dorénavant que :

$$\text{M}= ||\vec{M}|| = \ L\ H\ |sin^{(n)}(\theta)| \ \ + L\ V\ cos^{(n)}(\theta) \tag{5}$$

   Tracer le moment M - appelé communément couple - en fonction de l'angle θ, dans le cas où n est égal à 2. Spécifier les valeurs minimale et maximale de M (et les géométries correspondantes). On prendra H = 55 N et V = 300 N. La longueur L vaut 17 cm.
   Note : Pour la figure, on prendra le soin d'utiliser des degrés pour l'angle.

3. Faire une nouvelle figure, représentant le moment en fonction de l'angle, dans les trois situations (n = 2, 2.5, 3). Note : Pour la figure, on prendra le soin d'utiliser des degrés pour l'angle.

4. ** Pour aller plus loin ** Calculer le travail de la force au cours d'un demi-tour, dans le cas n = 2. On pourra utiliser "quad" de "scipy.integrate".

5. ** Pour aller plus loin * Que vaut le moment moyen dans le cas n=2 ? Que valent les moments moyens dans le cas n=2.5 et dans le cas n=3 ? Représenter les valeurs moyennes sur le graphe de la question 3. Quelle est la situation correspondant au pédalage le plus efficace ?

III. B. La transmission

(partie avec très peu de code, simple mathématiquement et très guidée, car conceptuellement difficile)

Le mouvement de rotation de la manivelle par le cycliste va entraîner le mouvement de rotation de la roue arrière du vélo via "la transmission", composée du plateau (solidaire de la manivelle), de la chaîne et du pignon arrière (solidaire de la roue). Le pédalier et la chaîne de transmission sont représentés en figure 4.
Lorsque le cycliste exerce une force F sur la pédale, il fait tourner la manivelle, ce qui entraîne la rotation du plateau. La rotation du plateau entraîne la translation de la chaîne, qui elle-même entraîne la rotation du pignon arrière. Enfin, la rotation du pignon entraîne la rotation de la roue.

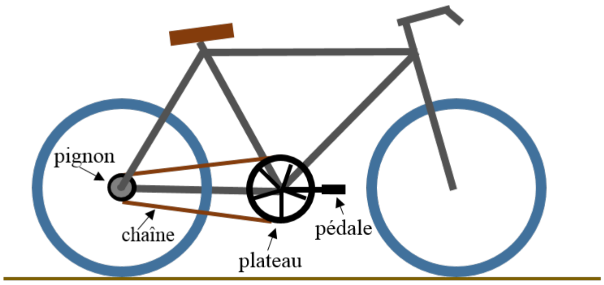

FIGURE 4 – Un vélo avec sa transmission

1. Considérant la situation de la figure 4, appelant F_{pedale} la force exercée sur la pédale, L la longueur de la manivelle, $R_{plateau}$ le rayon du plateau, déterminer la force F_{chaine} qui s'exerce sur la chaîne au contact avec le haut du plateau. On considèrera l'égalité des moments de F_{pedale} et F_{chaine} par rapport au centre du plateau. Il sera utile de faire un schéma des forces.

2. Supposant que la tension sur la chaîne est uniformément répartie, déterminer la force F_{roue} qui s'exerce sur la roue arrière. On appelera R_{roue} le rayon de la roue et R_{pignon} le rayon du pignon.

3. Donner l'expression de la force motrice $F_{motrice}$ nécessaire pour avancer à la vitesse v (on utilisera l'expression de la puissance donnée en (1) ou (2) ; le cycliste roule sur le plat).

4. Assimilant F_{roue} à $F_{motrice}$, donner l'expression du moment M_{moteur} de la force F_{pedale} par rapport au centre du plateau en fonction de la vitesse v du vélo (on appelle aussi ce moment le couple moteur).

5. Votre expression de M_{moteur} est-elle égale/similaire à l'expression du couple moteur C_{moteur} donnée ci-dessous, où N_1 est le nombre de dents du plateau et N_2 le nombre de dents du pignon ? (si oui, vous avez correctement raisonné !)
$$C_{moteur} = (N_1/N_2)\ R_{roue}\ ((\beta + p)Mg + \alpha\ \ v^2)$$

6. Calculer C_{moteur} et F_{pedale} pour une vitesse v = 33 km/h atteinte avec un braquet N_1/N_2=50/15, puis avec un braquet N_1/N_2=38/19. Commenter. On prendra β = 0.01, p = 0, M = 85 kg, α = 0.2 S.I., R_{roue} = 334 mm (ie roue de 26" avec son pneu)

7. ** Pour aller plus loin ** Calculer la fréquence de pédalage en tours par minute (t/min) dans les deux cas précédents. Commenter.