Probabilité

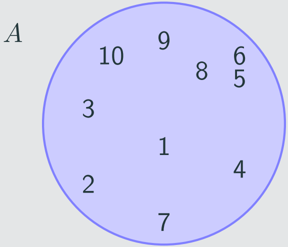
Théorie des Ensembles

Un ensemble est une collection d'objets. Ces objets sont appelés *éléments* de l'ensemble. Pour dire que x est un élément de l'ensemble E, on écrit $x \in E$. Pour dire que x n'est pas un élément de E, on écrit $x \notin E$.

Exemple

Soit l'ensemble A contenant des entiers allant de 1 à 10. Cet ensemble peut décrit de deux manières :

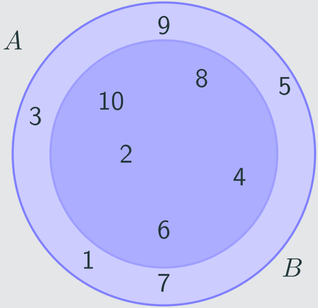
$$A = \{n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 10\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$



On dit qu'**un ensemble E est inclus dans un ensemble F si tout élément de E est un élément de F**. Dans ce cas on écrit $E \subset F$. *Qui se lit E est inclus dans F.*

Exemple

Soit l'ensemble A précédent, et soit B l'ensemble des entiers pairs compris entre 1 et 10. Ainsi, $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$. On peut représenter ces deux ensembles comme suit :

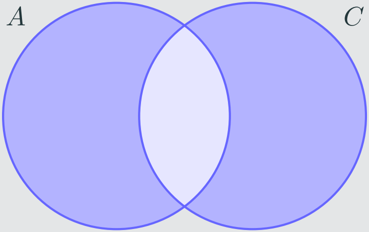


Théories des ensembles

Soient E et F deux ensembles. On appelle **réunion** de E et F, l'ensemble noté **E** $\cup$ **F** et dont les éléments appartiennent à E **ou** à F.

Exemple

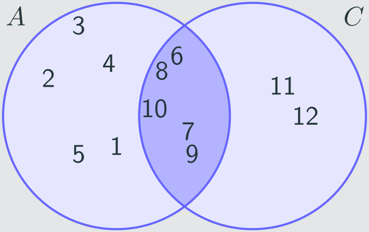
Soient A l'ensemble précédent et C l'ensemble des entiers allant de 6 à 12. Ainsi, $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 11, 12\}$.



Soient E et F deux ensembles. On appelle **intersection** de E et F, l'ensemble noté **E ∩ F** et dont les éléments appartiennent à E **et** à F.

Exemple

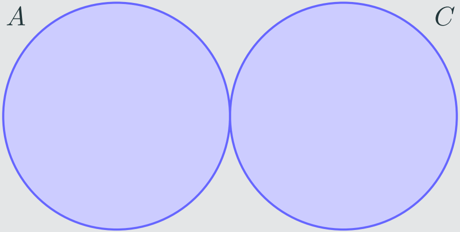
Soient les deux ensembles A et C précédents. Ainsi, $A \cap C = \{6, 7, 8, 9, 10\}$.



Deux ensembles E et F sont dits disjoints si : $\mathbf{E} \cap \mathbf{F} = \emptyset$.

Exemple

Soient deux ensembles A et B, telque $A = \{1, 2, 3, 4\}$ et $C = \{6, 7, 8, 9\}$.
On a, $A \cap C = \emptyset$.



Exercices

Exercice 1

Trois machines A, B et C fabriquent respectivement 30, 45 et 25 pièces.

1. Quelle est la probabilité qu'une pièce de la production soit fabriquée par la machine A ? par B ? par C ?
2. Quelle est la probabilité qu'une pièce soit fabriquée par la machine A ou par la machine B ? (on donnera deux méthodes).

Correction Exercice 1

Trois machines A, B et C fabriquent respectivement 30, 45 et 25 des pièces.

Machine A	Machine B	Machine C
30 pièces	*45 pièces*	*25 pièces*

Total $= 30 + 45 + 25 = 100$ **pièces**

Correction Exercice 1

Soient les événements suivant :

A :L'événement : "*la pièce a été fabriquée par la machine A*"

B :L'événement : "*la pièce a été fabriquée par la machine B*"

C : L'événement : "*la pièce a été fabriquée par la machine C*"

Correction Exercice 1

1. Quelle est *la probabilité* qu'une pièce de la production *soit fabriquée* par la machine A ? par B ? par C ?

La probabilité qu'une pièce de la production soit fabriquée par une machine K est donnée par la formule :

$$P(K) = \frac{\text{Nombre de pièce fabriqué par la machine } K}{\text{nombre de pièce totale}}$$

Correction Exercice 1

Ainsi, pour l'événement A :

$$P(A) = \frac{\text{Nombre de pièce fabriqué par la machine } A}{\text{nombre de pièce totale}} = \frac{30}{100} = 0.3$$

On procède de la même manière pour les événements B et C :

$$P(B) = \frac{\text{Nombre de pièce fabriqué par la machine } B}{\text{nombre de pièce totale}} = \frac{45}{100} = 0.45$$

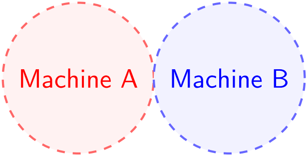
$$P(C) = \frac{\text{Nombre de pièce fabriqué par la machine } C}{\text{nombre de pièce totale}} = \frac{25}{100} = 0.25$$

2. Quelle est la probabilité qu'une pièce soit fabriquée par *la machine A **ou** par la machine B* ? (on donnera deux méthodes).

La probabilité qu'une pièce soit fabriquée par la machine A ***ou*** par la machine B revient à déterminer la probabilité de ***l'événement*** $A \cup B$.

Méthode 1 : On a, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Or, $P(A \cap B) = 0$ car $A \cap B = \emptyset$.



Correction Exercice 1

Ainsi, on obtient :

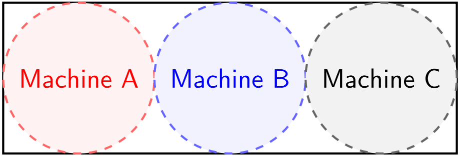
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.3 + 0.45$$

$$P(A \cup B) = 0.75$$

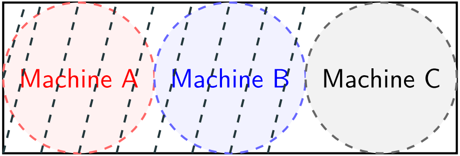
Méthode 2 : Si la pièce n'a été fabriquée *ni par la machine* A*, ni par la machine* B, alors la seule possibilité qui reste est *qu'elle soit fabriquée par la machine* C.

Correction Exercice 1

L'univers de possibilité dans notre cas est le suivant



Ainsi, si on suppose que la pièce n'a été fabriquée ***ni par la machine A, ni par la machine B***,



Il est claire de la figure que la seule possibilité qui reste est *qu'elle soit fabriquée par la machine C*.

Correction Exercice 1

Ce résultat va nous aider à calculer la probabilité de ***l'événement*** $A \cup B$, en passant à ***l'événement contraire***.

On a :

$$P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B})$$

Or, on trouvé que $P(\overline{A \cup B}) = P(C)$. Donc :

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= 1 - P(\overline{A \cup B}) \\ &= 1 - P(C) \\ &= 1 - 0.25 \\ P(A \cup B) &= 0.75 \end{aligned}$$

Exercice 2

Soient A et B étant deux événements, les situations suivantes sont-elles ***possibles*** ?

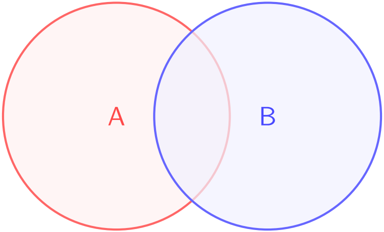
1. $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.4$ et $P(A \cap B) = 0.3$
2. $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.6$ et $P(A \cap B) = 0.05$

Correction Exercice 2

1. $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.4$ et $P(A \cap B) = 0.3$.

On a :

$$A \cap B \subset A \Rightarrow P(A \cap B) \leq P(A)$$



Donc, on ne peut pas avoir $P(A) = 0.2$ **et** $P(A \cap B) = 0.3$.

Correction Exercice 2

2. $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.6$ et $P(A \cap B) = 0.05$.

On sait que :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = 0.5 + 0.6 - 0.05$$

$$P(A \cup B) = 1.05$$

On trouve ***une probabilité supérieur à 1***, un résultat qui est absurde. Donc, ***cette situation est impossible***.

Exercice 3

On considère trois événements A, B et C tels que :

$$P(A) = 0.4, \quad P(B) = 2.0, \quad P(C) = 6.0$$

$$P(A \cap B) = 2.0, P(A \cap C) = 1.0, \quad P(B \cap C) = 0.05$$

$$P(A \cap B \cap C) = 0.01$$

Calculer $P(A \cup B \cup C)$, $P(A \cap (B \cup C))$ et $P(A \cup (B \cap C))$.

Correction Exercice 3

1. Calcul de $P(A \cup B \cup C)$

On utilise la formule suivante : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
On a :

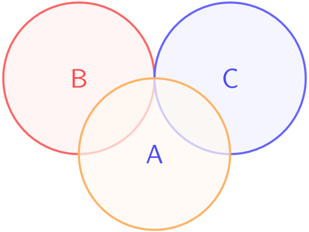
$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

$$P(A \cup B \cup C) = 0.4 + 0.2 + 0.6 - 0.2 - 0.1 - 0.05 + 0.01$$

$$P(A \cup B \cup C) = 0.86$$

Correction Exercice 3

2. Calcul de $P(A \cap (B \cup C))$



$$P\left[A \cap (B \cup C)\right] = P\left[(A \cap B) \cup (A \cap C)\right]$$

$$P\left[(A \cap B) \cup (A \cap C)\right] = P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap A \cap C)$$

$$P\left[A \cap (B \cup C)\right] = P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)$$

$$P\left[A \cap (B \cup C)\right] = 0.2 + 0.1 - 0.01 = 0.29$$

Correction Exercice 3

3. Calcul de $P(A \cup (B \cap C))$.

$$P\left[A \cup (B \cap C)\right] = P(A) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)$$

$$[P\left[A \cup (B \cap C)\right] = 0.4 + 0.05 - 0.01$$

$$P\left[A \cup (B \cap C)\right] = 0.44$$

Exercice 4

Soient deux événements A et B tels que $P(A) = 0.3 \quad P(B) = 0.6$ et $P(A \cap B) = 0.1$ Calculer la probabilité des événements suivants :

1. au moins un des deux événements se réalise.
2. A seulement se réalise.
3. ni A ni B ne se réalise.
4. A ou B , mais un des deux seulement, se réalise.

Correction Exercice 4

1. Au moins un des deux événements se réalise.

Ceci revient à calculer la probabilité de l'événement $A \cup B$:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = 0.3 + 0.6 - 0.1 = 0.8$$

Correction Exercice 4

2. A seulement se réalise.

Ici, on cherche la probabilité que A se réalise et B ne se réalise pas. Ce qui revient à déterminer la probabilité de l'événement $A \cap \overline{B}$:

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap \overline{B}) = 0.3 - 0.1 = 0.2$$

Correction Exercice 4

4. A ou B , mais un des deux seulement, se réalise.

$$P\left[(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)\right]=P(A\cap\overline{B})+P(\overline{A}\cap B)-P(A\cap\overline{B}\cap\overline{A}\cap B)$$

$$P\left[(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)\right]=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$P\left[(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)\right]=0.3-0.1+0.6-0.1=0.7$$

Exercice 5

A, B et C étant trois événements mutuellement-indépendants, calculer, en fonction de $P(A), P(B)$ et $P(C)$, la probabilité des événements suivants :

1. $E_1 = \overline{A} \cap \overline{B}$.
2. $E_2 = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$.
3. $E_3 = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
4. $E_4 = \overline{A \cup B \cup C}$.
5. $E_5 = A \cap (\overline{B \cap C})$.
6. $E_6 = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (A \cap \overline{B})$.

Correction Exercice 5

1. $E_1 = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Comme A et B sont indépendants, alors $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont aussi indépendants.
D'où :

$$
\begin{aligned}
P(E_1) =& P(\overline{A} \cap \overline{B}) \\
P(E_1) =& P(\overline{A}) \times P(\overline{B}) \\
P(E_1) =& [1 - P(A)] \times [1 - P(B)]
\end{aligned}
$$

Correction Exercice 5

On peut répondre à cette question par une autre manière, en utilisant l'indépendance entre A et B :

$$
\begin{aligned}
P(E_1) &= P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) \\
P(E_1) &= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) \\
P(E_1) &= 1 - P(A) - P(B) + P(A) \times P(B) \\
P(E_1) &= [1 - P(A)] \times [1 - P(B)]
\end{aligned}
$$

Correction Exercice 5

2. $E_2 = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$.

$$
\begin{aligned}
P(E_2) =& P\left[(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})\right] \\
P(E_2) =& P\left[A \cup (B \cap \overline{B})\right] \qquad \text{(Car } B \cap \overline{B} = \emptyset\text{)} \\
P(E_2) =& P(A \cup \emptyset) = P(A)
\end{aligned}
$$

Correction Exercice 5

3. $E_3 = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

$$P(E_3) = P\left[(A \cup B) \cap (A \cup C)\right] = P\left[A \cup (B \cap C)\right]$$
$$P(E_3) = P(A) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)$$

En utilisant l'indépendance mutuelle des événements :

$$P(E_3) = P(A) + P(B) \times P(C) - P(A) \times P(B) \times P(C)$$

Correction Exercice 5

4. $E_4 = \overline{A \cup B \cup C}$.

$$
\begin{aligned}
P(E_4) =& P(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - P(A \cup B \cup C) \\
P(E_4) =& 1 - P(A) - P(B) - P(C) + P(A \cap B) \\
& \quad + P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)
\end{aligned}
$$

Comme on a une indépendance mutuelle entre les trois événements :

$$
\begin{aligned}
P(E_4) = & \, 1 - P(A) - P(B) - P(C) \\
& + P(A) \times P(B) + P(A) \times P(C) + P(B) \times P(C) \\
& - P(A) \times P(B) \times P(C)
\end{aligned}
$$

Correction Exercice 5

5. $E_5 = A \cap (\overline{B \cap C})$.

$$P(E_5) = P\left[A \cap (\overline{B \cap C})\right]$$
$$P(E_5) = P(A) - P(A \cap B \cap C)$$

Par indépendance des événements, on obtient :

$$P(E_5) = P(A) - P(A) \times P(B) \times P(C)$$

Correction Exercice 5

5. $E_6 = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (A \cap \overline{B})$.

On remarque que :

$$E_6 = \left[(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B)\right] \cap (A \cap \overline{B})$$
$$E_6 = \left[B \cup (A \cap \overline{A})\right] \cap (A \cap \overline{B})$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} E_6 &= [B \cap \emptyset] \cap (A \cap \overline{B}) \\ &= B \cap A \cap \overline{B} \\ E_6 &= A \cap \emptyset = \emptyset \end{aligned}$$

D'où, $P(E_6) = P(\emptyset) = 0$

Merci. Des questions ?