Probabilité

Probabilité Conditionnelle

Probabilité Conditionnelle

La probabilité qu'un événement B se produise quand on sait qu'un événement A s'est produit est appelée probabilité conditionnelle et est notée $P(B|A)$. Le symbole $P(B|A)$ est généralement lu *la probabilité que B se produise étant donné que A se produit* ou simplement *la probabilité de B, sachant A*.

Definition

La probabilité conditionnelle de B, étant donné A, notée $P(B|A)$, est définie par :

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{avec } P(A) > 0$$

Probabilité Conditionnelle

Exemple : Soit une population d'adultes d'une petite ville qui ont obtenus un diplôme d'études supérieur. Nous les classons en fonction du sexe et de la situation professionnelle.

Sexe	Employé	Chômeur	Total
Hommes	460	40	500
Femmes	140	260	400
Total	600	300	900

L'une de ces personnes doit être choisie au hasard pour faire connaître les avantages de la création de nouvelles industries dans la ville. On pose les événements suivant :

H : un homme est choisi

E : la personne choisi est employé

Quelle est la probabilité de choisir un homme sachant qu'il est employé ?

Probabilité Conditionnelle

On a :

$$P(H|E) = \frac{460}{600} = \frac{23}{30} \approx 0.77$$

Sexe	Employé	Chômeur	Total
Hommes	460	40	500
Femmes	140	260	400
Total	600	300	900

On peut trouver ce même résultat en utilisant la formule :

$$P(H|E) = \frac{P(E \cap M)}{P(E)}$$

On a :

$$P(E) = \frac{600}{900} = \frac{2}{3} \quad P(E \cap M) = \frac{460}{900} = \frac{23}{45}$$

D'où :

$$P(H|E) = \frac{P(E \cap M)}{P(E)} = \frac{23/45}{2/3} = \frac{23}{30} \approx 0.77$$

Probabilité Conditionnelle

Exemple : La probabilité qu'un vol régulier décolle à l'heure est $P(D) = 0.83$, la probabilité qu'il arrive à temps est $P(A) = 0.82$, et la probabilité qu'il part et arrive à l'heure est $P(D \cap A) = 0.78$. Trouvez la probabilité qu'un avion :

1. arrive à l'heure, étant donné qu'il est parti à l'heure.
2. est parti à l'heure, étant donné qu'il est arrivé à temps.

Ici, on applique la formule de probabilité conditionnel.

$$P(A|D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0.78}{0.83} = 0.83$$

Donc, la probabilité qu'un avion arrive à l'heure, étant donné qu'il est parti à l'heure est de 0.98.
On fait de même pour la deuxième question :

$$P(D|A) = \frac{P(A \cap D)}{P(A)} = \frac{0.78}{0.82} = 0.95$$

Donc, la probabilité qu'un avion est parti à l'heure, étant donné qu'il est arrivé à temps est de 0.95.

Exemple : un procédé industriel d'une usine de textile, dans lequel des bandes d'un type particulier de tissu sont produites. Ces bandes peuvent être défectueuses de deux manières, **longueur** et **nature de la texture**. Le processus d'identification est très compliqué. D'après les informations historiques sur le processus, 10% des bandes échouent au test de longueur, 5% échouent au test de texture et seulement 0,8% échouent aux deux tests.
Si une bande est sélectionnée au hasard dans le processus et qu'une mesure rapide l'identifie comme échouant au test de longueur, quelle est la probabilité qu'elle soit de texture défectueuse ?
On pose les événements suivant :

L : la longueur est défectueuse T : la nature de la texture est défectueuse

Probabilité Conditionnelle

D'après l'énoncé on a les informations suivantes :

$$P(L) = 0.1 \qquad P(T) = 0.05 \qquad P(L \cap T) = 0.008$$

Ainsi, en appliquant la formule de probabilité conditionnelle :

$$P(T|L) = \frac{P(L \cap T)}{P(L)} = \frac{0.008}{0.1} = 0.08$$

Donc, sachant qu'une bande a échoué au test de longueur la probabilité qu'elle soit de texture défectueuse est de 0.08.

Probabilité Conditionnelle

Definition

Deux événements A et B sont dits indépendants si et seulement si :

$$P(B|A) = P(B) \quad \text{ou} \quad P(A|B) = P(A)$$

En d'autres termes, la réalisation de l'événement B n'a aucun impact sur les probabilités de la réalisation de l'événement A. Le concept d'indépendance joue un rôle essentiel dans tous les domaines de la statistique appliquée.

Theorem

Si les événements A et B peuvent se produire tous les deux, alors :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) \quad \textit{à condition que } P(A) > 0$$

Ainsi, la probabilité que A et B se produisent est égale à la probabilité que A se produise multipliée par la probabilité conditionnelle que B se produise, étant donné que A se produit. Puisque les événements $A \cap B$ et $B \cap A$ sont équivalents, il s'ensuit que l'on peut aussi écrire :

$$P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(B) \times P(A|B)$$

Probabilité Conditionnelle

Exemple : supposons que nous ayons une boîte contenant 20 serrures, dont 5 sont défectueuses. Si 2 serrures sont sélectionnés au hasard et retirés successivement du boîtier sans remplacer le premier, quelle est la probabilité que les deux serrures soient défectueuses ?

On pose les événements suivants :

A : la première serrures est défectueuse

B : a deuxième serrures est défectueuse

On a :

$$P(A) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$
$$P(B|A) = \frac{4}{19}$$

Ainsi, on a :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) = \frac{1}{4} \times \frac{4}{19} = \frac{1}{19} = 0.0526$$

Probabilité Conditionnelle

Exemple : Un sac contient 4 boules blanches et 3 boules noires, et un deuxième sac contient 3 boules blanches et 5 boules noires. Une balle est tirée du premier sac et placée sans être vue dans le deuxième sac. *Quelle est la probabilité qu'une balle maintenant tirée du deuxième sac soit noire* ?

On pose les événements suivants :

$$B_1 \text{ : une boule blanche est tirée du sac 1}$$

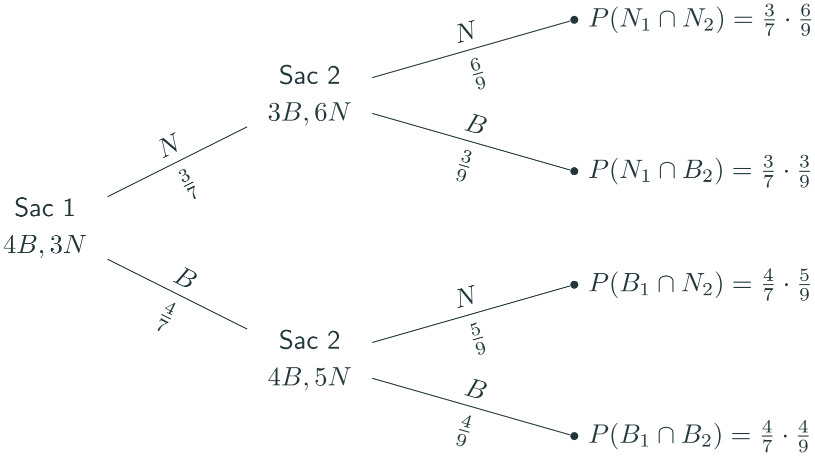
$$B_2 \text{ : une boule blanche est tirée du sac 2}$$

$$N_1 \text{ : une boule noire est tirée du sac 1}$$

$$N_2 \text{ : une boule noire est tirée du sac 2}$$

Nous nous intéressons à l'union des événements mutuellement exclusifs $N_1 \cap N_2$ et $B_1 \cap N_2$. Les différentes possibilités et leurs probabilités sont :

Probabilité Conditionnelle



On a ainsi :

$$
\begin{aligned}
P\left[(N_1 \cap N_2) \cup (B_1 \cap N_2)\right] &= P(N_1 \cap N_2) + P(B_1 \cap N_2) \\
&= P(N_1) \times P(N_2|N_1) + P(B_1) \times P(N_2|B_1) \\
&= \frac{3}{7} \times \frac{6}{9} + \frac{4}{7} \times \frac{5}{9} \\
&= \frac{38}{63} \approx 0.6
\end{aligned}
$$

Donc, la probabilité qu'une balle tirée du deuxième sac soit noire est d'environ 0.6.

Probabilité Conditionnelle

Theorem

Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Par conséquent, pour obtenir la probabilité que deux événements indépendants se produisent tous les deux, nous trouvons simplement le produit de leurs probabilités individuelles.

Exemple : Une petite ville a un camion de pompiers et une ambulance disponibles pour les urgences. La probabilité que le camion de pompiers soit disponible en cas de besoin est de 0.98, et la probabilité que l'ambulance soit disponible lorsqu'elle est appelée est de 0.92. En cas de blessure résultant d'un bâtiment en feu, déterminez la probabilité que l'ambulance et le camion de pompiers soient disponibles, en supposant qu'ils fonctionnent indépendamment :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0.98 \times 0.92 = 0.9016$$

Theorem

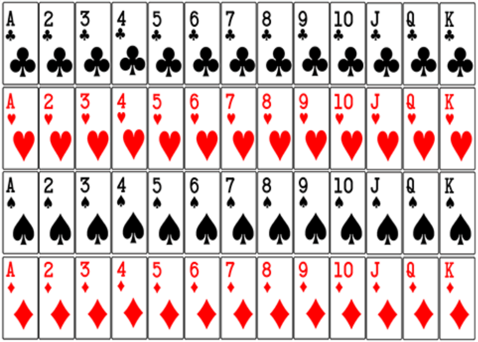
Si, dans une expérience, les événements $A_1, A_2, \ldots, A_k$ peuvent se produire, alors :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)\ldots P(A_k|A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1})$$

Si les événements $A_1, A_2, \ldots, A_k$ sont indépendants, alors :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k) = P(A_1) \times P(A_2) \times \cdots \times P(A_k)$$

Exemple : Trois cartes sont tirées successivement, sans remplacement, à partir d'un jeu de cartes ordinaire. Trouvez la probabilité que l'événement $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ se produise, où A_1 est l'événement que la première carte est un as rouge, A_2 est l'événement que la deuxième carte est un 10 ou un valet, et A_3 est l'événement que la troisième carte est supérieure à 3 mais inférieure à 7.



On a les événements suivants :

- A_1 : La première carte est un as rouge.
- A_2 : La deuxième carte est un 10 ou un valet.
- A_3 : La troisième carte est supérieure à 3 mais inférieure à 7

Ainsi, on a :

$$P(A_1) = \frac{2}{52}$$
$$P(A_2|A_1) = \frac{8}{51}$$
$$P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{12}{50}$$

Donc, on obtient :

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P(A_1) \times P(A_2|A_1) \times P(A_3|A_1 \cap A_2) \\ &= \frac{2}{52} \times \frac{8}{51} \times \frac{12}{50} \\ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= \frac{8}{5525} \approx 0.0014 \end{aligned}$$

Exercices

Exercice 1

Un échantillon aléatoire de 200 adultes est classé ci-dessous par sexe et leur niveau d'éducation atteint

Éducation	Homme	Femme
Primaire	38	45
Secondaire	28	50
Université	22	17

Si une personne est choisie au hasard dans ce groupe, trouvez la probabilité que :

1. La personne est un homme, étant donné qu'elle a une éducation secondaire ;
2. La personne n'a pas de diplôme d'études collégiales, étant donné qu'elle est une femme.

Correction Exercice 1

On pose les événements suivants :

- H la personne choisie est un homme
- S la personne a une éducation secondaire
- U la personne a un diplôme universitaire

Ainsi, la probabilité que a personne est un homme, étant donné qu'elle a une éducation secondaire est de :

$$P(H|S) = \frac{P(H \cap S)}{P(S)} = \frac{28}{28+50} = \frac{28}{78} = \frac{14}{39} \approx 0.36$$

De même, a personne n'a pas de diplôme d'études collégiales, étant donné qu'elle est une femme est de :

$$P(\overline{U}|\overline{H}) = \frac{P(\overline{U} \cap \overline{H})}{P(\overline{H})} = \frac{50+45}{45+50+17} = \frac{95}{112} \approx 0.85$$

Exercice 2

Dans une expérience visant à étudier la relation entre l'hypertension et les habitudes de fumer, les données suivantes sont collectées pour 180 personnes :

	Non-fumeurs	Fumeurs modérés	fumeurs fréquents
H	21	36	30
NH	48	26	19

où H et NH dans le tableau représentent respectivement l'hypertension et la non-hypertension. Si l'un de ces individus est sélectionné au hasard, trouvez la probabilité que la personne :

1. souffre d'hypertension, étant donné que la personne est un fumeur fréquent ;
2. est un non-fumeur, étant donné que la personne ne souffre pas d'hypertension.

Correction Exercice 2

Soient les événements suivants :

- A la personne souffre d'hypertension
- B la personne est un fumeur fréquent
- C la personne est un non-fumeur

Alors, la probabilité que la personne souffre d'hypertension, étant donné que la personne fume fréquemment est de :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{30}{30+19} = \frac{30}{49} \approx 0.61$$

De même, la probabilité que la personne est un non-fumeur, étant donné que la personne ne souffre pas d'hypertension :

$$P(C|\overline{A}) = \frac{P(C \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{21}{48+26+19} = \frac{21}{93} \approx 0.23$$

Exercice 3

Une entreprise propose deux types de comptes d'épargne à ses clients : « Tawfir » et « Damane ». Parmi l'ensemble de ses clients, 50% possèdent un compte « Tawfir », 40% possèdent un compte « Damane » et 30% possèdent les deux types de comptes.

1. Calculer la probabilité des événements suivants :
    1.1 « Un client possède au moins un des deux types de comptes ».
    1.2 « Un client ne possède aucun des deux types de comptes ».
    1.3 « Un client ne possède qu'un seul type de comptes ».
2. On considère un client possédant un compte « Tawfir ». Quelle est la probabilité qu'il possède aussi un compte « Damane » ?

Correction Exercice 3

On considère les événements suivants :

T : le client possède un compte *Tawfir*

D : le client possède un compte *Damane*

La probabilité qu'*un client possède au moins un des deux types de comptes* revient à calculer la probabilité de l'événement $T \cup D$:

$$P(T \cup D) = P(T) + P(D) - P(T \cap D)$$
$$P(T \cup D) = 0.5 + 0.4 - 0.3 = 0.6$$

Ainsi, il y a 60% de chance qu'un client possède au moins un des deux types de comptes.

Correction Exercice 3

La probabilité qu'*un client ne possède aucun des deux types de comptes*, c'est la probabilité qu'un client ne possède pas un compte Tawfir (l'événement $\overline{T}$) et qu'il ne possède pas un compte Damane (l'événement $\overline{D}$). D'où, on a :

$$P(\overline{T} \cap \overline{D}) = P(\overline{T \cup D}) = 1 - P(T \cup D)$$
$$P(\overline{T} \cap \overline{D}) = 1 - 0.6 = 0.4$$

Ainsi, il y a 40% de chance qu'un client ne possède aucun des deux types de comptes.

Pour calculer la probabilité qu'*un client ne possède qu'un seul type de comptes*, deux situations sont possibles : le client possède un compte Tawfir et ne possède pas un compte Damane $(T \cap \overline{D})$, ou le client possède un compte Damane et ne possède pas un compte Tawfir $(D \cap \overline{T})$.
Ainsi, on a :

$$P\left((T \cap \overline{D}) \cup (D \cap \overline{T})\right) = P(T \cap \overline{D}) + P(D \cap \overline{T}) - P(T \cap \overline{D} \cap D \cap \overline{T})$$

Or, $T \cap \overline{D} \cap D \cap \overline{T} = \emptyset$. D'où :

$$\begin{aligned} P\left((T \cap \overline{D}) \cup (D \cap \overline{T})\right) &= P(T \cap \overline{D}) + P(D \cap \overline{T}) - P(\emptyset) \\ &= P(T) - P(T \cap D) + P(D) - P(T \cap D) \\ P\left((T \cap \overline{D}) \cup (D \cap \overline{T})\right) &= 0.5 - 0.3 + 0.4 - 0.3 = 0.3 \end{aligned}$$

Ainsi, il y a 30% de change qu'un client ne possède qu'un seul type de comptes

Correction Exercice 3

2. On considère un client possédant un compte « Tawfir ». Quelle est la probabilité qu'il possède aussi un compte « Damane » ?

Ici, on cherche une probabilité conditionnelle, celle de l'événement $D|T$:

$$P(D|T) = \frac{P(D \cap T)}{P(T)} = \frac{0.3}{0.5} = \frac{3}{5} = 0.6$$

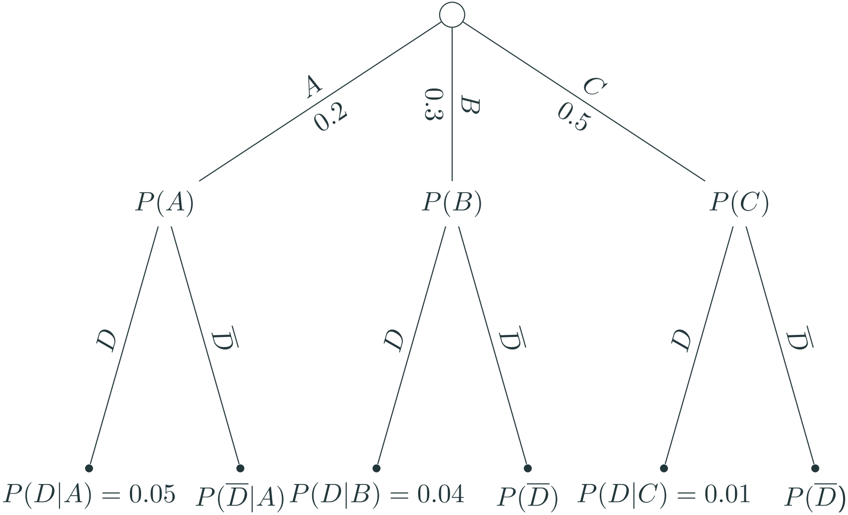
Exercice 4

Une usine d'ampoules dispose de trois machines A, B et C qui fabriquent respectivement 20, 30 et 50% de la production. La probabilité qu'une ampoule fabriquée par A (resp. B ou C) soit défectueuse est $P(D|A) = 0.05$ (resp. $P(D|B) = 0.04$ et $P(D|C) = 0.01$). Calculer alors :

1. La probabilité qu'une ampoule soit défectueuse.
2. La probabilité qu'une ampoule défectueuse provienne de A.
3. La probabilité qu'une ampoule non défectueuse provienne de C.

Correction Exercice 4

On peut représenter cette situation sur le diagramme suivant :



Correction Exercice 4

Trouver la probabilité qu'une ampoule soit défectueuse revient à cherche la probabilité de l'événement D :

$$\begin{aligned}
P(D) &= P(D \cap (A \cap B \cap C)) = P\left[(D \cap A) \cup (D \cap B) \cup (D \cap C)\right] \\
&= P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C) \\
&= P(D|A) \times P(A) + P(D|B) \times P(B) + P(D|C) \times P(C) \\
P(D) &= 0.05 \times 0.2 + 0.04 \times 0.3 + 0.01 \times 0.5 = 0.027
\end{aligned}$$

Ainsi, sur l'ensemble de production 2.7% des ampoules sont défectueuses.

2. La probabilité qu'une ampoule défectueuse provienne de A.

Ici, on cherche la probabilité de l'événement $A|D$:

$$P(A|D) = \frac{P(A \cap D}{P(D)} = \frac{P(D|A) \times P(A)}{P(D)} = \frac{0.05 \times 0.2}{0.027} = 0.37$$

Donc, parmi les ampoules défectueuses 37% proviennent de la machine A.

3. La probabilité qu'une ampoule non défectueuse provienne de C.

On cherche la probabilité de l'événement $C|\overline{D}$:

$$P(C|\overline{D}) = \frac{P(c \cap \overline{D}}{P(\overline{D}} = \frac{P(\overline{D}|C) \times P(C)}{1 - P(D)}$$
$$= \frac{(1 - P(D|C)) \times P(C)}{1 - P(D)} = \frac{(1 - 0.01) \times 0.5}{1 - 0.027}$$
$$P(C|\overline{D}) = 0.5087$$

Donc, parmi les ampoules non défectueuses 50.87% proviennent de la machine C.

Exercice 5

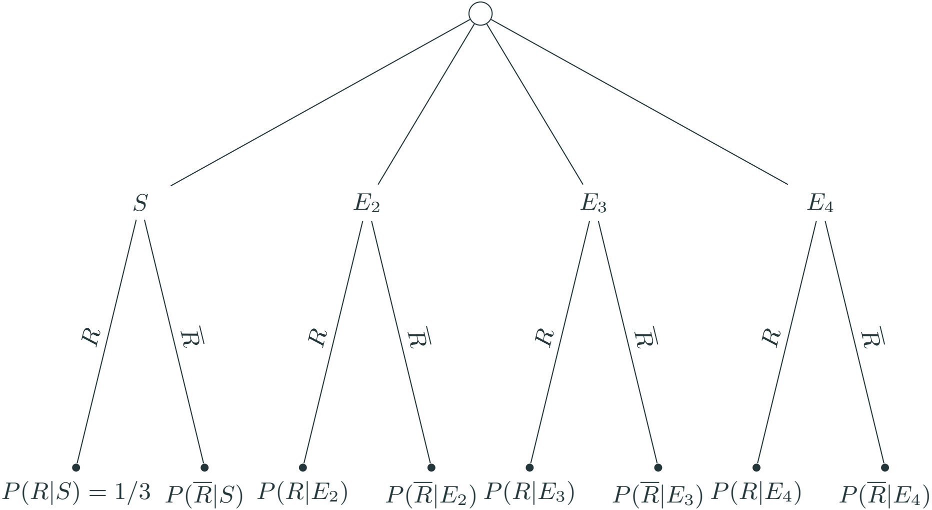
Un candidat se présente à un concours comportant une épreuve de choix. Celle-ci doit être tirée au hasard parmi quatre disciplines dont la statistique.

La probabilité qu'il réussisse s'il tire la statistique est de $\frac{1}{3}$, alors que s'il tire une autre discipline, il a une chance sur cinq de réussir.

Sachant que ce candidat a réussi à ce concours, quelle est la probabilité qu'il ait tiré une épreuve autre que la statistique ?

Correction Exercice 5

On peut représenter cette situation dans le diagramme suivant, avec les événements S : Le candidat tire l'épreuve de statistique et R : Le candidat réussit le concours.



Correction Exercice 5

On a :

$$P(S) = \frac{1}{4},\ P(R|S) = \frac{1}{3} \text{ et } P(R|S) = \frac{1}{5}$$

. Ici, on cherche la probabilité de l'événement $\overline{S}|R$:

$$P(\overline{S}|R) = \frac{P(\overline{S} \cap R)}{P(R)} = \frac{P(R|\overline{S}) \times P(\overline{S})}{P(R)}$$

Or, on a :

$$\begin{aligned} P(R) &= P(R \cap (S \cup \overline{S})) = P\left[(R \cap S) \cup (R \cap \overline{S})\right] \\ &= P(R \cap S) + P(R \cap \overline{S}) - P(R \cap S \cap R \cap \overline{S}) \\ P(R) &= P(R|S) \times P(S) + P(R|\overline{S}) \times P(\overline{S}) \end{aligned}$$

D'où, on obtient :

$$\begin{aligned} P(\overline{S}|R) = \frac{P(R|\overline{S}) \times P(\overline{S})}{P(R|S) \times P(S) + P(R|\overline{S}) \times P(\overline{S})} = \frac{1/5 \times 3/4}{1/3 \times 1/4 + 1/5 \times 3/4} \\ = \frac{9}{14} = 0.64 \end{aligned}$$

Donc, sachant que le candidat a réussi à ce concours il a une probabilité de 64% qu'il ait tiré une épreuve autre que la statistique.

Exercice 6

On considère deux événements B et C tels que : $P(B) = 0.3,\ P(C) = 0.4,$ et $P(B|C) = \frac{1}{3}$.
Calculer les probabilités suivantes :

$$P(B \cap C),\ P(C|B),\ P(\overline{C}|B),\ P(\overline{B}|C),\ P(C|\overline{B}),\ P(\overline{C}|\overline{B})$$

$$P(\overline{B} \cap \overline{C}),\ P(\overline{B}|\overline{C}),\ P(B|\overline{C})$$

Correction Exercice 6

- Calcul de $P(B \cap C)$, on a :

$$P(B \cap C) = P(B|C) \times P(C) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{15} = 0.13$$

- Calcul de $P(C|B)$, on a :

$$P(C|B) = \frac{P(C \cap B)}{P(B)} = \frac{2/15}{3/10} = \frac{4}{9} = 0.44$$

- Calcul de $P(\overline{C}|B)$, on a :

$$P(\overline{C}|B) = 1 - P(C|B) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} = 0.56$$

Correction Exercice 6

- Calcul de $P(\overline{B}|C)$, on a :

$$P(\overline{B}|C) = 1 - P(B|C) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = 0.67$$

- Calcul de $P(C|\overline{B})$, on a :

$$\begin{aligned} P(C|\overline{B}) &= \frac{P(C \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(\overline{B}|C) \times P(C)}{1 - P(B)} \\ &= \frac{(1 - P(B|C)) \times P(C)}{1 - P(B)} = \frac{(1 - 1/3) \times 2/5}{7/10} \\ P(C|\overline{B}) &= \frac{8}{21} = 0.38 \end{aligned}$$

- Calcul de $P(\overline{C}|\overline{B})$, on a :

$$P(\overline{C}|\overline{B}) = 1 - P(C|\overline{B}) = 1 - \frac{8}{21} = \frac{13}{21} = 0.62$$

Correction Exercice 6

- Calcul de $P(\overline{B} \cap \overline{C})$, on a :

$$P(\overline{B} \cap \overline{C}) = P(\overline{C}|\overline{B}) \times P(\overline{B})$$
$$= P(\overline{C}|\overline{B}) \times (1 - P(B)) = \frac{13}{21} \times (1 - \frac{3}{10})$$
$$P(\overline{B} \cap \overline{C}) = \frac{13}{30} = 0.43$$

- Calcul de $P(\overline{B}|\overline{C})$, on a :

$$P(\overline{B}|\overline{C}) = \frac{P(\overline{B} \cap \overline{C})}{P(\overline{C})} = \frac{P(\overline{B} \cap \overline{C})}{1 - P(C)}$$
$$P(\overline{B}|\overline{C}) = \frac{13/30}{1 - 2/5} = \frac{13}{18} = 0.72$$

- Calcul de $P(B|\overline{C})$, on a :

$$P(B|\overline{C}) = 1 - P(\overline{B}|\overline{C}) = 1 - \frac{13}{18} = \frac{5}{18} = 0.28$$

Exercice 7

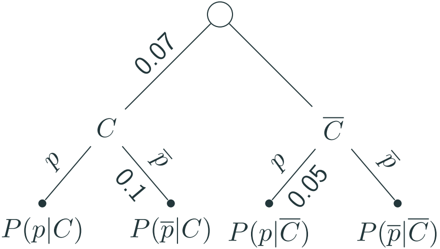
Une certaine forme de cancer est connue chez les femmes de plus de 60 ans avec une probabilité de 0.07. Un test sanguin existe pour la détection de la maladie, mais le test n'est pas infaillible.

En fait, on sait que 10% du temps le test donne un faux négatif (c'est-à-dire que le test donne incorrectement un résultat négatif) et 5% du temps le test donne un faux positif (c'est-à-dire qu'il donne incorrectement un résultat positif) .

Si l'on sait qu'une femme de plus de 60 ans a passé le test et a obtenu un résultat favorable (c'est-à-dire négatif), quelle est la probabilité qu'elle soit atteinte de la maladie ?

Correction Exercice 7

Soient les événements C *une femme de plus de 60 ans a le cancer* et p *le test donne un résultat positif*. On peut représenter la situation comme suit :



Ainsi, on a :

$$P(C|\overline{p}) = \frac{P(\overline{p}|C) \times P(C)}{P(\overline{p}|C) \times P(C) + P(\overline{p}|\overline{C}) \times P(\overline{C})}$$

$$P(C|\overline{p}) = \frac{0.1 \times 0.07}{0.1 \times 0.07 + (1 - 0.05) \times (1 - 0.07)} = \frac{0.007}{0.8905}$$

$$P(C|\overline{p}) \approx 0.00786$$

Merci. Des questions ?