Probabilité

Lois Continues

Loi continue uniforme

Definition

Une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans un intervalle $[a, b] (a \neq b)$ suit une loi uniforme si sa densité est définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ f(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque

Une variable aléatoire continue X qui suit une loi uniforme continue est notée:

$$X \hookrightarrow U(a, b)$$

Loi continue uniforme

Propriété

Si $X \hookrightarrow U(a,b)$, alors on a :

- $E(X) = \frac{b+a}{2}$
- $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

Propriété

Si $X \hookrightarrow U(a,b)$, alors sa fonction de répartition est donnée par la formule suivante :

$$F(x) = P(X < x) = \frac{x-a}{b-a}, \quad x \in [a,b]$$

Exemple : Supposons qu'une salle de conférence dans une certaine entreprise puisse être réservée pour un maximum de 4 heures. Des conférences longues et courtes ont lieu assez souvent. En fait, on suppose que la longueur X d'une conférence a une distribution uniforme sur l'intervalle $[0, 4]$.

1. Quelle est la fonction de densité de probabilité?
2. Quelle est la probabilité qu'une conférence donnée dure au moins 3 heures?

Loi continue uniforme

1. Quelle est la fonction de densité de probabilité?

La fonction de densité pour la variable aléatoire uniformément distribuée X est

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{4} & \text{si } x \in [0, 4] \\ f(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Quelle est la probabilité qu'une conférence donnée dure au moins 3 heures?

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= \int_3^4 f(x)\, dx \\ &= \int_3^4 \frac{1}{4}\, dx \\ P(X \geq 3) &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Definition

Une variable aléatoire X, prenant toutes ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$, suit une loi exponentielles de paramètre $\lambda > 0$ si sa densité est définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque

Une variable aléatoire continue X qui suit une loi exponentielle est notée:

$$X \hookrightarrow E(\lambda)$$

Loi exponentielle

Propriété

Si $X \hookrightarrow E(\lambda)$, alors on a :

- $E(X) = \frac{1}{\lambda}$
- $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

Propriété

Si $X \hookrightarrow E(\lambda)$, alors sa fonction de répartition est donnée par la formule suivante :

$$F(x) = P(X < x) = \int_0^x f(t)\,dt = 1 - e^{-\lambda x}, \quad \text{pour } x \geq 0$$

Exemple : La durée de vie, en heures, d'un composant électronique est modélisée par la loi exponentielle de paramètre 0.005.

1. Quelle est la probabilité que l'un des composants pris au hasard:
   - ait une durée de vie inférieur à 100h ?
   - soit encore en état de marche au bout de 250h ?
2. Calculer la durée de vie moyenne de l'un de ces composants ?

1. Quelle est la probabilité que l'un des composants pris au hasard, ait une durée de vie inférieur à 100h ?

On a :

$$
\begin{aligned}
P(0 \leq X \leq 100) &= \int_0^{100} 0.005e^{-0.005t}\,dt \\
&= \left[-e^{-0.005t}\right]_0^{100} \\
&= -e^{-0.005\times 100} + e^{-0.005\times 0} \\
&= 1 - e^{-0.5}
\end{aligned}
$$

$$P(0 \leq X \leq 100) \approx 0.39$$

2. Quelle est la probabilité que l'un des composants pris au hasard, soit encore en état de marche au bout de 250h ?

Ce qui revient à déterminer:

$$\begin{aligned}
P(X \geq 250) &= 1 - P(X < 250) \\
&= 1 - \int_0^{250} 0.005e^{-0.005t}\,dt \\
&= 1 - \left[-e^{-0.005t}\right]_0^{250} \\
&= 1 - \left(-e^{-0.005\times 250t} + e^{-0.005\times 0}\right) \\
&= 1 + e^{-1.25} - 1 \\
P(X \geq 250) &= e^{-1.25} \approx 0.29
\end{aligned}$$

3. Calculer la durée de vie moyenne de l'un de ces composants ?

On doit déterminer l'espérance de la variable aléatoire X:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0.005}$$
$$E(X) = 200$$

La loi normale est certainement la loi la plus importante pour les applications statistiques. Beaucoup de phénomènes peuvent être modélisés par une loi normale, ou comme étant très proches de celle-ci :

- Température moyenne en hiver
- Le poids des oranges
- ...

Loi normale

Definition

Une variable aléatoire X, prenant toutes ses valeurs dans $\mathbb{R}$, suit une loi normale si sa fonction de densité est définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

avec $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$.

Remarque

Une variable aléatoire continue X qui suit une loi continue est notée:

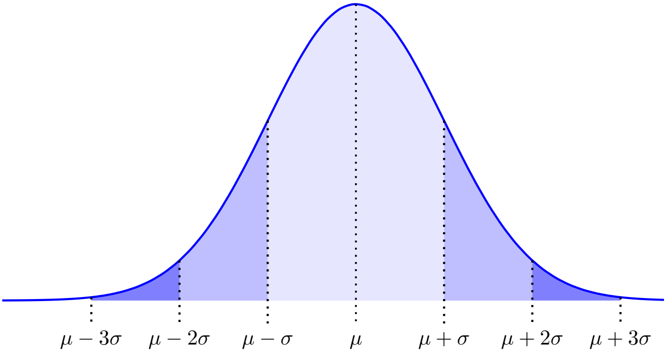
$$X \hookrightarrow N(\mu, \sigma)$$

Dans certains ouvrages anglo-saxonnes, on trouve la notation $X \hookrightarrow N(m, \sigma^2)$ tel que σ^2 représente la variance.

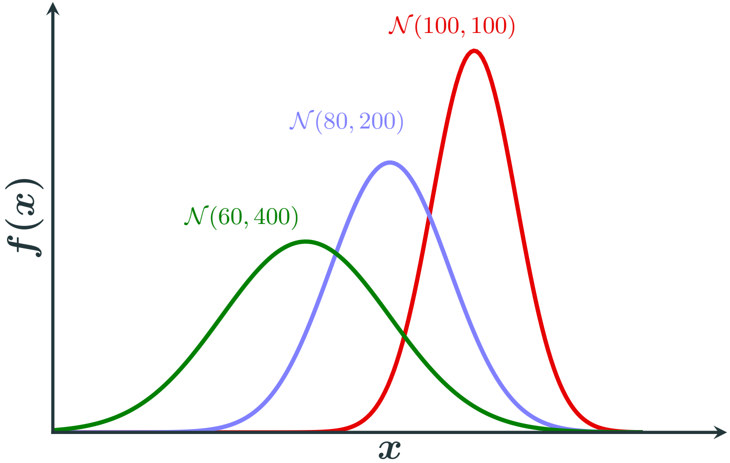
Une étude de fonction de f nous permet de montrer que :

- la courbe de f est symétrique par rapport à la verticale en μ:
$$f(\mu - x) = f(\mu + x)$$
- La valeur maximale de f est . Cette valeur est d'autant plus grande que l' écart type σ est petit.
- La fonction f possède deux points d'inflexion en $x = \mu - \sigma$ et $x = \mu + \sigma$.
- On a également :
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

Figure 1: Densité de la loi normale $N(\mu, \sigma)$



La figure ci-dessous représente la fonction de densité de la loi normale pour différente valeur des paramètres (μ, σ).



Loi normale centrée réduite

Propriété

Si $X \hookrightarrow N(\mu, \sigma)$, alors :

- $E(X) = \mu$
- $V(X) = \sigma^2$

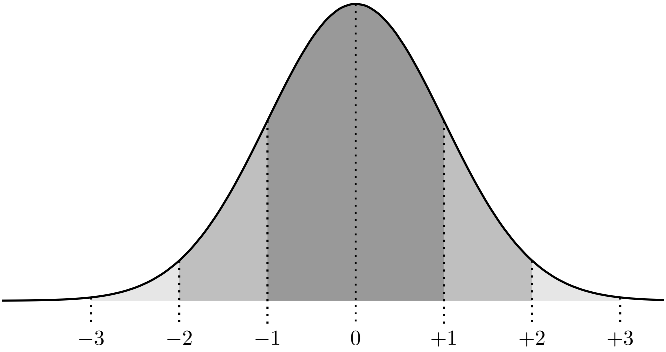
Definition

Parmi les lois normales, il y en a une qui est particulièrement importante, car d'une certaine manière les autres s'y ramènent: c'est **la loi normale centrée réduite** qui a une espérance nulle et un écart type égale à 1

Remarque

En général, on note cette variable Z et on a $Z \hookrightarrow N(0, 1)$.

Figure 2: Loi normale centrée réduite $(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$



Propriété

- Notons que la loi normale étant continue, on a $P(Z = z) = 0$ et donc:
$$\Phi(z) = P(Z < z) = P(Z \leq z)$$
- On peut calculer la probabilité de n'importe quel intervalle $[a, b]$ à l'aide de la relation suivante :
$$P(a < Z < b) = \Phi(b) - \Phi(a)$$
- Lorsque l'intervalle est centré en 0, on a:
$$\begin{aligned} P(-a < Z < a) &= \Phi(a) - \Phi(-a) \\ &= \Phi(a) - (1 - \Phi(a)) \\ P(-a < Z < a) &= 2\Phi(a) - 1 \end{aligned}$$

Definition

Le quantile d'ordre $1 - \alpha$ de la loi normale centré réduite $N(0, 1)$ est la quantité $z_{1-\alpha}$ telle que :

$$\Phi(z_{1-\alpha}) = P(Z < z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$$

Exemple:

On veut chercher la valeur de z telle que $\Phi(z) = 0.95$.

On trouve $z = 1.645$. Cette valeur est appelée quantile d'ordre 95% ou percentile 95.

Loi normale centrée réduite

Remarques

- A tout α, on associé ainsi le quantile d'ordre $1-\alpha$ de la loi normale centrée réduite.
- Le quantile d'ordre 0.5 n'est rien d'autre que la médiane (c.à.d 0) : c'est la valeur $z_{0.5}$ telles que :

$$\Phi(z_{0.5}) = P(Z < z_{0.5}) = P(Z > z_{0.5}) = 0.5$$
$$\rightarrow z_{0.5} = 0$$

- Il existe une table statistique assez commode qui donne une valeur permettant de construire un intervalle centré en 0 et de probabilité $1-\alpha$. Cette valeur, noté ξ_α, est telle que:

$$P(-\xi_\alpha < Z < \xi_\alpha) = 1-\alpha$$

Remarques

$$P(-\xi_\alpha < Z < \xi_\alpha) = 1 - \alpha$$

et

$$P(Z < -\xi_\alpha) = P(Z > \xi_\alpha) = \frac{\alpha}{2}$$

On a donc

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= P(-\xi_\alpha < Z < \xi_\alpha) \\ &= 2\Phi(\xi_\alpha) - 1 \end{aligned}$$

où $\Phi(\xi_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$

Loi normale centrée réduite

Propriété

Si $X \hookrightarrow N(\mu, \sigma^2)$, alors:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \hookrightarrow N(0, 1)$$

Quelques résultats

- $P(X < x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$
- $P(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$

Exemple : On prélève des roches dans une zone du Maroc et on mesure leur poids. On suppose que notre échantillon est distribué suivant une loi normale de moyenne $\mu = 2.03$ et d'écart-type $\sigma = 0.44$.
Quels est la probabilité d'obtenir une roche ayant un poids d'au moins 2.5?

$$\begin{aligned}
P\left[X \geq 2.5\right] &= P\left[\frac{X-2.03}{0.44} \geq \frac{2.5-2.03}{0.44}\right] \\
&= P\left[Z \geq 1.07\right] = 1 - P\left[Z \leq 1.07\right] \\
&= 1 - F(1.07) \\
&= 1 - 0.8577 \\
&= 0.1423
\end{aligned}$$

Table 1: Table des probabilités pour la loi $N(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916

Propriété

Soient $X_1 \hookrightarrow N(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $X_2 \hookrightarrow N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Si X_1 et X_2 sont indépendantes et si a, b et c sont trois nombres quelconques, alors :

$$X_1 + X_2 \hookrightarrow N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

$$X_1 - X_2 \hookrightarrow N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

$$a \times X_1 + b \times X_2 + c \hookrightarrow N(a \times \mu_1 + b \times \mu_2 + c, a \times \sigma_1^2 + b \times \sigma_2^2)$$

Propriété (Loi de Poisson, loi Binomiale)

- Lorsque λ est grand ($\lambda \geq 15$), une loi de Poisson $P(\lambda)$ est très proche d'une loi normale :

$$P(\lambda) \approx N(\lambda, \lambda)$$

Les deux lois ont même espérance et même écart-type.

- Lorsque n est grand et que p n'est pas trop petit ou trop grand ($n \geq 30$, $np \geq 5$,$nq \geq 5$), une loi binomiale $B(n, p)$ est très proche d'une loi normale:

$$B(n, p) \approx N(np, npq)$$

Exemple: On suppose que la probabilité qu'un étudiant réussisse un examen est de 0.8. Quelle est la probabilité qu'au moins 75 étudiants parmi 100 étudiants réussissent l'examen?

Soit X le nombre d'étudiants qui réussissent l'examen.

X est une variable discrète qui prend les valeurs entières de 0 à 100. Elle suit une loi binomiales de paramètres 100 et 0.8, $X \hookrightarrow B\left(100; 0.8\right)$.

Loi normale

Les produits np et nq respectivement $100 \times 0.8 = 80$ et $100 \times 0.2 = 20$.

On peut donc approché la loi binomiale par une loi normale de paramètre $np = 80$ et $\sqrt{npq} = 4$:

$$X \hookrightarrow B(100; 0.8) \approx N(80; 4)$$

Ainsi, la probabilité qu'au moins 75 étudiants parmi 100 étudiants est:

$$\begin{aligned} P\left[X \geq 75\right] &= 1 - \left[X < 75\right] \\ 1 - P\left[X < 75\right] &= 1 - P\left[\frac{X-80}{4} < \frac{75-80}{4}\right] \\ &= 1 - P\left[Z < -1.25\right] \\ &= P\left[Z \leq 1.25\right] \\ P\left[X \geq 75\right] &= 0.8944 \end{aligned}$$

Propriété (La loi normale et loi de χ^2)

Soit une variable aléatoire $Z \hookrightarrow N(0,1)$ et soit une suite $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ de variables aléatoire telle que $X_n \hookrightarrow \chi_n^2$ (loi de Chi-deux). La suite des variables du χ^2 centrées réduites converge en loi vers la variable aléatoire normale Z:

$$\frac{X_n - n}{\sqrt{2n}} \xrightarrow{L} Z \hookrightarrow N(0,1)$$

On dit qu'une loi du χ^2 dont le nombre de degrés de liberté n tend vers l'infini est asymptotiquement normale.

Loi normale

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables indépendantes de même loi de probabilité. On pose :

$$\overline{X}_{(n)} = \frac{1}{n}\left(X_1 + X_2 + \cdots + X_n\right)$$

Théorème (formulation 1)

Si les n variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes de même loi de probabilité, alors:

$$\frac{\overline{X}_{(n)} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\overline{X}_{(n)} - \mu\right) \xrightarrow{\text{en loi}} N(0,1)$$

où $\mu = E(X_i)$ et $\sigma^2 = V(X_i) \;\; \forall i = 1, \ldots, n$

Exemple:

Des tubes fluorescents fabriqués par une entreprise ont une durée de vie moyenne de 800 heures. L'écart-type de la durée de vie est évalué à 60. On prélève un échantillon aléatoire simple de 50 tubes dans la production d'une journée et on mesure la durée de vie des tubes.

Quelle est la probabilité d'obtenir une durée de vie moyenne comprise entre 790 et 810 heures ?

Loi normale

On note $\overline{X}_n$ la durée de vie moyenne des tubes fluorescents.
Notre échantillon à une taille de 50, supérieur à 30. Donc, notre échantillon suit une loi normale $N(\mu, \sigma^2)$, avec $\mu = 800$ et $\sigma = 60$.
On cherche à déterminer la probabilité d'obtenir une durée de vie moyenne comprise entre 790 et 810 heurs, c'est à dire $P\left(790 \leq \overline{X}_n \leq 810\right)$.
Or, d'après le théorème central limite $Z_n = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\overline{X}_n - \mu\right) \xrightarrow{\ell} \mathcal{N}(0,1)$.
D'où:

$$P\left[790 \leq \overline{X}_n \leq 810\right] \Rightarrow P\left[790 - 800 \leq \overline{X}_n - 800 \leq 810 - 800\right]$$

$$\Rightarrow P\left[\frac{60}{\sqrt{50}}(790-800) \leq \frac{\sqrt{50}}{60}\left(\overline{X}_n - 800\right) \leq \frac{\sqrt{50}}{60}(810-800)\right]$$

$$\Rightarrow P\left[-1.17 \leq Z_n \leq 1.17\right]$$

Par conséquent, on a:

$$\begin{aligned}
P\left[-1.17 \leq Z_n \leq 1.17\right] &= F(1.17) - F(-1.17) \\
&= F(1.17) - (1 - F(1.17)) \\
&= F(1.17) - 1 + F(1.17) \\
&= 2 \times F(1.17) - 1 \\
&= 2 \times 0.8790 - 1 \\
P\left[-1.17 \leq Z_n \leq 1.17\right] &= 0.758
\end{aligned}$$

Donc, la probabilité d'obtenir une durée de vie moyenne comprise entre 790 et 810 heures est de 75.8%.

Loi normale

Table 2: Table des probabilités pour la loi $N(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916

Quelle est la probabilité d'obtenir une durée de vie moyenne comprise entre 795 et 805 heures?

Quelle est la probabilité d'obtenir une durée de vie moyenne comprise entre 795 et 805 heures?

$$P\left[795 \leq \overline{X}_n \leq 805\right] \Rightarrow P\left[795 - 800 \leq \overline{X}_n - 800 \leq 805 - 800\right]$$

$$\Rightarrow P\left[\frac{60}{\sqrt{50}}(795 - 800) \leq \frac{\sqrt{50}}{60}\left(\overline{X}_n - 800\right) \leq \frac{\sqrt{50}}{60}(805 - 800)\right]$$

$$\Rightarrow P\left[-0.58 \leq Z_n \leq 0.58\right]$$

Par conséquent, on a:

$$\begin{aligned} P\left[-0.58 \le Z_n \le 0.58\right] &= F(0.58) - F(-0.58) \\ &= F(0.58) - (1 - F(0.58)) \\ &= F(0.58) - 1 + F(0.58) \\ &= 2 \times F(0.58) - 1 \\ &= 2 \times 0.7190 - 1 \end{aligned}$$

$$P\left[-1.17 \le Z_n \le 1.17\right] = 0.438$$

Donc, la probabilité d'obtenir une durée de vie moyenne comprise entre 796 et 805 heures est de 43.8%.

Théorème (formulation 2)

Si les n variables $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes de même loi de probabilité, alors **pour n assez grand**:

$$\overline{X}_{(n)} \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

où $\mu = E(X_i)$ et $\sigma^2 = V(X_i) \;\; \forall i = 1, \dots, n$.

Ce résultat est vrai quelle que soit la loi des variables (X_i). En pratique, ce résultat est utilisé pour $n \geq 30$.

Applications du TCL

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables indépendantes de loi de Bernoulli $B(p)$. On pose:

$$F_{(n)} = \frac{1}{n}\left(X_1 + X_2 + \cdots + X_n\right)$$

Corollaire

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables indépendantes de loi de Bernoulli $B(p)$. On a la convergence:

$$\frac{F_{(n)} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \xrightarrow{\text{en loi}} N(0,1)$$

Corollaire

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables indépendantes de loi de Bernoulli $B(p)$. Pour $n \geq 30$ et p tel que:

$$np \geq 5$$
$$nq \geq 5$$

On a

$$F_{(n)} \approx N\left(p, \frac{pq}{n}\right)$$

Exercices

Exercice 1

Un tube électronique, fabriqué selon un certain procédé, a une durée de vie qui, exprimée en heures, est une variable aléatoire de loi approximativement $\mathcal{N}(160, 302)$.

1. Calculer:

$$p_1 = P(X \leq 140); \quad p_2 = P(X \geq 200); \quad p_3 = P(130 \leq X \leq 190);$$

2. Déterminer les nombres a et b tels que

$$P(X \leq a) = 0.9 \text{ et } P(X \leq b) = 0.8$$

3. Soit $q = P(X \leq 200 | X > 160)$, calculer q et comparer avec p_2

Correction Exercice 1

1. Calculer:

$$p_1 = P(X \leq 140); \quad p_2 = P(X \geq 200); \quad p_3 = P(130 \leq X \leq 190);$$

Soit X la variable aléatoire qui mesure la durée de vie d'un tube électronique, $X \hookrightarrow \mathcal{N}(160, 302)$. On doit donc se ramener à la loi normale centrée réduite. Soit la variable aléatoire $Z = \frac{X-160}{\sqrt{302}}$, alors Z suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$, et on a :

$$\begin{aligned}
p_1 &= P(X \leq 140) \\
&= P\left(\frac{X-160}{\sqrt{302}} \leq \frac{140-160}{\sqrt{302}}\right) = P(Z \leq -1.15) \\
&= 1 - \Phi(1.15) = 1 - 0.8749 \\
p_1 &= 0.1251
\end{aligned}$$

Correction Exercice 1

Table 3: Table des probabilités pour la loi $N(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916

Correction Exercice 1

$$
\begin{aligned}
p_2 &= P(X \geq 200) \\
&= P\left(\frac{X-160}{\sqrt{302}} \geq \frac{200-160}{\sqrt{302}}\right) = P(Z \geq 2.30) \\
&= 1 - \Phi(2.30) = 1 - 0.9893 \\
p_2 &= 0.0107
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_3 &= P(130 \leq X \leq 190) \\
&= P\left(\frac{130-160}{\sqrt{302}} \leq \frac{X-160}{\sqrt{302}} \leq \frac{190-160}{\sqrt{302}}\right) \\
&= P(-1.73 \leq Z \leq 1.73) \\
&= \Phi(1.73) - (1 - \Phi(1.73)) = 2 \times \Phi(1.73) - 1 \\
p_3 &= 2 \times 0.9582 - 1 = 0.9164
\end{aligned}
$$

2. Déterminer les nombres a et b tels que

$$P(X \leq a) = 0.9 \text{ et } P(X \leq b) = 0.8$$

On a :

$$\begin{aligned} P(X \leq a) = 0.9 &\iff P\left(\frac{X-160}{\sqrt{302}} \leq \frac{a-160}{\sqrt{302}}\right) = 0.9 \\ &\iff P(Z \leq \frac{a-160}{\sqrt{302}}) = 0.9 \\ &\iff \Phi\left(\frac{a-160}{\sqrt{302}}\right) = 0.9 \end{aligned}$$

D'après la table de valeurs de la loi normale centré réduite, on trouve que $P(Z \leq 1.29) \approx 0.9$. On doit donc avoir:

$$\frac{a-160}{\sqrt{302}} \approx 1.29 \iff a \approx 1.29 \times \sqrt{302} + 160 \approx 182.42$$

De même on a:

$$
\begin{aligned}
P(X \leq b) = 0.8 &\iff P\left(\frac{X-160}{\sqrt{302}} \leq \frac{b-160}{\sqrt{302}}\right) = 0.8 \\
&\iff P(Z \leq \frac{b-160}{\sqrt{302}}) = 0.8 \\
&\iff \Phi\left(\frac{b-160}{\sqrt{302}}\right) = 0.8
\end{aligned}
$$

D'après la table de valeurs de la loi normale centré réduite, on trouve que $P(Z \leq 0.85) \approx 0.8$. On doit donc avoir:

$$
\frac{b-160}{\sqrt{302}} \approx 0.85 \iff b \approx 0.85 \times \sqrt{302} + 160 \approx 174.77
$$

3. Soit $q = P(X \leq 200|X > 160)$, calculer q.

On a :

$$P(X < 200|X > 160) = \frac{P\Big((X < 200) \cap (X > 160)\Big)}{P(X > 160)}$$
$$= \frac{P(160 < X < 200)}{P(X > 160)}$$

avec:

$$P(160 < X < 200) = P\left(\frac{160 - 160}{\sqrt{302}} \leq \frac{X - 160}{\sqrt{302}} \leq \frac{200 - 160}{\sqrt{302}}\right)$$
$$= P(0 \leq Z \leq 2.30)$$
$$= \Phi(2.3) - \Phi(0) = 0.9893 - 0.5$$
$$P(160 < X < 200) = 0.4893$$

Correction Exercice 1

Et

$$P(X > 160) = P(Z > 0) = 1 - \Phi(0) = 0.5$$

D'où:

$$\begin{aligned} P(X < 200 | X > 160) &= \frac{P(160 < X < 200)}{P(X > 160)} \\ &= \frac{0.4893}{0.5} \\ &= 0.9786 \end{aligned}$$

Exercice 2

Soit Z une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite, $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.
Calculer les probabilités suivantes:

1. $P(Z < 1.2)$
2. $P(0.8 < Z < 1.2)$
3. $P(Z < -1.2)$
4. $P(-0.4 < Z < 1.5)$
5. $P(|Z| < 0.92)$

Correction Exercice 2

1. $P(Z < 1.2)$

$$P(Z < 1.2) = \Phi(1.2)$$
$$P(Z < 1.2) = 0.8849$$

2. $P(0.8 < Z < 1.2)$

$$\begin{aligned} P(0.8 < Z < 1.2) &= \Phi(1.2) - \Phi(0.8) \\ &= 0.8849 - 0.7881 \\ P(0.8 < Z < 1.2) &= 0.0968 \end{aligned}$$

Correction Exercice 2

3. $P(-0.4 < Z < 1.5)$

$$\begin{aligned} P(-0.4 < Z < 1.5) &= \Phi(1.5) - \Phi(-0.4) \\ &= \Phi(1.5) - (1 - \Phi(0.4)) \\ &= 0.9332 - (1 - 0.6554) \\ P(-0.4 < Z < 1.5) &= 0.5886 \end{aligned}$$

4. $P(|Z| < 0.92)$

$$\begin{aligned} P(|Z| < 0.92) &= P(-0.92 < Z < 0.92) \\ &= \Phi(0.92) - (1 - \Phi(-0.92)) \\ &= 2\Phi(0.92) - 1 \\ &= 2 \times 0.8212 - 1 \\ P(|Z| < 0.92) &= 0.6424 \end{aligned}$$

Exercice 3

La durée de vie, en années, d'un certain type de composante électrique a une distribution exponentielle avec une durée de vie moyenne de 2 ans.
Si 100 de ces interrupteurs sont installés dans des systèmes différents, quelle est la probabilité que 30 au plus tombent en panne au cours de la première année?

Soit X la variable qui mesure la durée de vie de cette composante électrique. On a $X \hookrightarrow E(\lambda)$ et d'après l'énoncer on a la moyenne de X est de 2 ans. Ainsi, on peut déterminer la valeur de λ:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow 2 = \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

D'abord, on calcule la probabilité qu'au plus une machine tombe en panne:

$$\begin{aligned} P(X \leq 1) &= \int_0^1 f_X(x)\, dx = \int_0^1 \frac{1}{2} e^{-x/2}\, dx \\ &= \left[-e^{-x/2}\right]_0^1 \\ &= -e^{-1/2} + e^{-0/2} \end{aligned}$$

$$P(X \leq 1) = 1 - e^{-1/2} = 0.3935$$

Ensuite, on pose Y comme étant la variable qui compte le nombre de composante électrique qui tombe en panne durant la première année. Cette situation correspond à une épreuve de Bernoulli que l'on répète 100 fois de manière indépendante, avec une probabilité de succès (*une pièce tombe en panne*) de $p = 0.3935$. Donc, $Y \hookrightarrow \textbf{Bin}(100, 0.3935)$.

Comme $n = 100 > 30$, $np = 39.35 > 5$ et $nq = 60.65 > 5$. On peut donc approché la loi binomiale par une loi normale de paramètre $np = 39.35$ et $\sqrt{npq} = 4.885$:

$$X \hookrightarrow B(100; 0.3935) \approx N(39.35; 4.885)$$

Ainsi, la probabilité que 30 au plus tombent en panne au cours de la première année est de :

$$
\begin{aligned}
P(Y \leq 30) &= P\left(\frac{Y - 39.35}{4.885} \leq \frac{30 - 39.35}{4.885}\right) \\
&= P(Z \leq -1.81) \\
&= \Phi(-1.81) = 1 - \Phi(1.81) \\
&= 1 - 0.9649 \\
P(Y \leq 30) &= 0.0351
\end{aligned}
$$

Donc, la probabilité que 30 au plus tombent en panne au cours de la première année est de 3.4%.

Table 4: Table des probabilités pour la loi $N(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916

Exercice 4

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu = 120, \sigma^2)$.

1. Déterminer l'écart-type σ tel que:

$$P(100 \leq X \leq 140) = 0.92$$

.

2. Déterminer le réel $\beta > 0$ tel que:

$$P(120 - 2\beta \leq X \leq 120 + 2\beta) = 0.75$$

Correction Exercice 4

1. Déterminer l'écart-type σ tel que:

$$P(100 \leq X \leq 140) = 0.92$$

On se ramène à la loi normale centrée réduite: soit la variable aléatoire $Z = \frac{X-120}{\sigma}$ qui suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Ainsi:

$$\begin{aligned}
P(100 \leq X \leq 140) = 0.92 &\Leftrightarrow P\left(\frac{100-120}{\sigma} \leq \frac{X-120}{\sigma} \leq \frac{140-120}{\sigma}\right) = 0.92 \\
&\Leftrightarrow P\left(\frac{-20}{\sigma} \leq Z \leq \frac{20}{\sigma}\right) = 0.92 \\
&\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{20}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-20}{\sigma}\right) = 0.92 \\
&\Leftrightarrow 2\left(\frac{20}{\sigma}\right) - 1 = 0.92 \\
&\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{20}{\sigma}\right) = 0.96
\end{aligned}$$

Correction Exercice 4

D'après la table des valeurs de la loi normale centrée réduite, on trouve que $P(Z \leq 1.76) = 0.96$. Donc on a:

$$\frac{20}{\sigma} \approx 1.76 \Leftrightarrow \sigma \approx \frac{20}{1.76} \approx 11.36$$

Donc, on peut dire que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(120, 11.36)$

2. Déterminer le réel $\beta > 0$ tel que:

$$P(120 - 2\beta \leq X \leq 120 + 2\beta) = 0.75$$

On a $X \hookrightarrow \mathcal{N}(120, 11.36)$, on se ramène à la loi centrée réduite:

$$\begin{aligned}
&P(120 - 2\beta \leq X \leq 120 + 2\beta) = 0.75 \\
\Leftrightarrow &P\left(\frac{120 - 2\beta - 120}{11.36} \leq \frac{X - 120}{11.36} \leq \frac{120 + 2\beta - 120}{11.36}\right) = 0.75 \\
\Leftrightarrow &P\left(\frac{-2\beta}{11.36} \leq Z \leq \frac{2\beta}{11.36}\right) = 0.75 \\
\Leftrightarrow &\Phi\left(\frac{2\beta}{11.36}\right) - \Phi\left(\frac{-2\beta}{11.36}\right) = 0.75 \\
\Leftrightarrow &2 \times \Phi\left(\frac{2\beta}{11.36}\right) - 1 = 0.75 \\
\Leftrightarrow &\Phi\left(\frac{2\beta}{11.36}\right) = 0.875
\end{aligned}$$

Correction Exercice 4

D'après la table de valeurs de la loi normale centrée réduite, on trouve que $P(Z \leq 1.15) = 0.875$. Donc on a:

$$\frac{2\beta}{11.36} \approx 1.15 \Leftrightarrow \beta \approx \frac{1.15 \times 11.36}{2}$$
$$\Leftrightarrow \beta \approx 6.532$$

Donc, pour $\beta = 6.532$, on a :

$$P(120 - 2\beta \leq X \leq 120 + 2\beta) = 0.75$$

Exercice 5

Supposons que le temps entre les appels d'urgence (en jour) à une caserne de pompiers suit une distribution exponentielle de paramètre $\lambda = 1.8$.

1. Yassine le pompier vient d'arriver. Quelle est la probabilité d'un appel dans les 15 prochaines minutes?
2. Yassine a presque terminé un quart de sa journée travail: il reste 15 minutes. Il n'y a eu aucun appel pendant son quart de travail jusqu'à présent. Quelle est la probabilité d'un appel dans les 15 prochaines minutes?
3. Manal travaille 10 heures par jour, du lundi au jeudi. Quelle est la probabilité qu'elle n'ait aucun appel ?
4. Manal affirme que : "*Dans 10% des quarts de travail, il y a un appel dans les x premières heures*". Déterminer la valeur de x?

Correction Exercice 5

1. Yassine le pompier vient d'arriver. Quelle est la probabilité d'un appel dans les 15 prochaines minutes?

Soit X le temps d'attente (en jours) jusqu'au premier appel d'urgence. On a $X \hookrightarrow E(1.8)$, en utilisant la définition de la fonction de répartition on sait que :

$$F(x) = P(X < x) = \int_0^x f(t)\,dt = 1 - e^{-\lambda x}$$

Ainsi, la probabilité d'un appel dans les 15 prochaines minutes est de :

$$\begin{aligned} F\left(\frac{15}{24 \times 60}\right) &= F(0.01042) = 1 - e^{-1.8.01042} \\ &= 0.0186 \end{aligned}$$

Donc, la probabilité d'un appel dans les 15 prochaines minutes est d'environ 2%.

2. Yassine a presque terminé le quart de sa journée travail: il reste 15 minutes. Il n'y a eu aucun appel pendant son quart de travail jusqu'à présent. Quelle est la probabilité d'un appel dans les 15 prochaines minutes?

Ici, on va utilisé le fait que la loi exponentielle est une *loi sans mémoire*. On sait que $P(X < x) = F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, ainsi:

$$P(X \geq x) = 1 - F_X(x) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda x}\right) = e^{-\lambda x}$$

D'où:

$$P(X > x + y | X > y) = \frac{P(X > x + y)}{P(X > y)} = \frac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda y}} = e^{-\lambda x}$$

$$P(X > x + y | X > y) = P(X > x)$$

On dit que la loi exponentielle est une loi sans mémoire.

Correction Exercice 5

Donc, la probabilité d'avoir un appel durant les dernières 15 minutes est la même que la probabilité d'avoir un appel dans les premières 15 minutes, 0.0186.

3. Manal travaille 10 heures par jour, du lundi au jeudi. Quelle est la probabilité qu'elle n'ait aucun appel?
   10 heures est équivalant à $\frac{10}{24} = 0.41667$ jours. Donc, la probabilité d'avoir aucun appel durant les 10 heures est de :

$$\begin{aligned} P(X > 0.41667) &= 1 - P(X \leq 0.41667) = 1 - F(0.41667) \\ &= 1 - \left(1 - e^{-1.8 \times 0.41667}\right) = e^{-1.8 \times 0.41667} \end{aligned}$$

$$P(X > 0.41667) = 0.4724$$

Ainsi, la probabilité que Manal n'ait aucun appel est de 47%.

4. Manal affirme que : "*Dans 10% des jours de travail, il y a un appel dans les x premières heures*". Déterminer la valeur de x?

$$
\begin{aligned}
&P(X \leq x) = 0.1 \\
\Rightarrow &F_X(x) = 0.1 \\
\Rightarrow &1 - e^{-1.8 \times x} = 0.1 \\
\Rightarrow &e^{-1.8 \times x} = 0.9 \\
\Rightarrow &-1.8 \times x = \ln(0.9) \\
\Rightarrow &x = 0.0585 \text{ jours}
\end{aligned}
$$

Donc, x vaut 1.4 heures c'est à dire 1 heure 24 minutes

Exercice: Un chercheur scientifique rapporte que les souris vivront en moyenne 40 mois lorsque leur alimentation sera fortement restreinte puis enrichie en vitamines et protéines. En supposant que les durées de vie de ces souris sont normalement distribuées avec un écart type de 6,3 mois, trouvez la probabilité qu'une souris donnée vive:

1. plus de 32 mois
2. moins de 28 mois
3. entre 37 et 49 mois

1. la probabilité qu'une souris donnée vive plus de 32 mois

On a $X \hookrightarrow N(40, 6.3)$. Or on a la propriété suivante :

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \hookrightarrow N(0, 1)$$

D'où, la probabilité qu'une souris donnée vive plus de 32 mois:

$$\begin{aligned} P(X > 32) &= P\left(\frac{X - 40}{6.3} > \frac{32 - 40}{6.3}\right) \\ &= P(Z > -1.27) = 1 - P(Z \leq -1.27) \\ &= 1 - (1 - \Phi(1.27)) \\ P(X > 32) &= 0.8980 \end{aligned}$$

Correction Exercice 6

Table 5: Table des probabilités pour la loi $N(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916

2. La probabilité qu'une souris donnée vive moins de 28 mois

$$\begin{aligned} P(X < 28) &= P\left(\frac{X-40}{6.3} < \frac{28-40}{6.3}\right) \\ &= P(Z < -1.9) \\ &= 1 - \Phi(1.9) = 1 - 0.9713 \\ P(X < 28) &= 0.0287 \end{aligned}$$

3. La probabilité qu'une souris donnée vive entre 37 et 49 mois

$$
\begin{aligned}
P(37 < X < 49) &= P\left(\frac{37-40}{6.3} < \frac{X-40}{6.3} < \frac{49-40}{6.3}\right) \\
&= P(-0.48 < Z < 1.43) \\
&= \Phi(1.43) - \Phi(-0.48) \\
&= \Phi(1.43) - (1 - \Phi(0.48)) \\
&= 0.9236 - (1 - 0.6844) \\
P(37 < X < 49) &= 0.608
\end{aligned}
$$

Exercice 7

L'ONCF utilise des trains ayant une capacité de 390 passagers. Une enquête montre que 6 passagers sur 100 ayant réservé des billets en ligne ne se présente pas à l'embarquement. Ainsi, on considère que la probabilité qu'un passager ayant réservé en ligne ne se présente pas est de 0.06.
La gare de Rabat Agdal accepte 397 réservations pour un train, soit X la variable aléatoire indiquant le nombre de passagers se présentant à l'embarquement.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par X?
2. Par quelle loi normale peut-on approcher la loi de X?
3. En utilisant l'approximation par la loi normale, calculer $P(X \leq 390)$.
4. Serait-il raisonnable pour la compagnie d'accepter sur ce même train 410 réservations?
5. La gare accepte 397 réservation sur un train d'une capacité de 390 passagers. 370 personnes sont déjà présentes à l'embarquement. Quelle est la probabilité que moins de 390 personnes se présentent en tout pour ce train?

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par X?

X étant la variable qui compte le nombre de passagers se présentant à l'embarquement. Cette situation correspond à une épreuve de Bernoulli que l'on répète $n = 397$ fois de manière indépendante ((on suppose que chaque personne se présente ou non à l'embarquement indépendamment du choix des autres passagers), avec une probabilité de succès (*"le passager se présente à l'embarquement*) de $p = 1 - 0.06 = 0.94$. Donc, $Y \hookrightarrow Bin(397, 0.94)$.

2. Par quelle loi normale peut-on approcher la loi de X?

Comme $n = 397 \geq 30$, $np = 397 \times 0.94 = 373.18 \geq 5$ et $nq = n(1-p) = 397 \times 0.06 = 23.82 \geq 5$. Donc, on peut approcher la loi binomiale par la loi normale de paramètre $\mu = n \times p = 373.18$ et $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{397 \times 0.94 \times 0.06} = 4.62$.

$$X \hookrightarrow B(390, 0.94) \approx N(373.18, 4.62)$$

Correction Exercice 7

3. En utilisant l'approximation par la loi normale, calculer $P(X \leq 390)$.

En utilisant l'approximation par la loi normale on a:

$$\begin{aligned} P(X \leq 390) &= P\left(\frac{X - 373.18}{4.62} \leq \frac{390 - 373.18}{4.62}\right) \\ &= P(Z \leq 3.64) \\ &= \Phi(3.64) \\ P(X \leq 390) &= 0.999 \end{aligned}$$

Donc, la probabilité que plus de passager se présente que de place disponible est d'environ 1%, un risque très faible.

Correction Exercice 7

4. Serait-il raisonnable pour la compagnie d'accepter sur ce même train 410 réservations?

Dans ce cas le $n_1 = 410$, don l'approximation par la loi normale change. Ainsi, on a: $\mu = n_1 \times p = 385.4$ et $\sigma = \sqrt{10 \times 0.94 \times 0.06} = 4.8$. D'où:

$$\begin{aligned}
P(x \leq 390) &= P\left(\frac{X - 385.4}{4.8} \leq \frac{390 - 385.4}{4.8}\right) \\
&= P(Z \leq 0.96) \\
&= \Phi(0.96) \\
P(X \leq 390) &= 0.8315
\end{aligned}$$

Ainsi, avec 410 réservations le risque qu'il ait plus de passagers que de place disponible est d'environ 17%. Donc, ce nombre de réservation peut être un choix non raisonnable pour cette gare.

5. La gare accepte 397 réservation sur un train d'une capacité de 390 passagers. 370 personnes sont déjà présentes à l'embarquement. Quelle est la probabilité que moins de 390 personnes se présentent en tout pour ce train?

Pour $n_2 = 397$, don l'approximation par la loi normale change. Ainsi, on a: $\mu = n_2 \times p = 373.18$ et $\sigma = \sqrt{397 \times 0.94 \times 0.06} = 4.73$. D'où:

$$
\begin{aligned}
P(X \leq 390 | X \geq 370) &= \frac{P\Big((X \geq 370) \cap (X \leq 390) \Big)}{P(X \geq 370)} \\
&= \frac{P(370 \leq X \leq 390)}{P(X \geq 370)}
\end{aligned}
$$

Correction Exercice 7

Avec:

$$
\begin{aligned}
P(370 \leq X \leq 390) &= P\left(\frac{370 - 373.18}{4.73} \leq \frac{X - 373.18}{4.73} \leq \frac{390 - 373.18}{4.73}\right) \\
&= P(-0.67 \leq Z \leq 3.56) \\
&= \Phi(3.56) - \Phi(-0.67) \\
&= \Phi(3.56) - (1 - \Phi(0.67)) \\
&= 0.9998 - (1 - 0.7486) \\
P(370 \leq X \leq 390) &= 0.7484
\end{aligned}
$$

Et :

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 370) &= P\left(\frac{X - 373.18}{4.73} \geq \frac{370 - 373.18}{4.73}\right) \\
&= P(Z \geq -0.67) = 1 - \Phi(-0.67) \\
&= 1 - (1 - \Phi(0.67)) = \Phi(0.67) \\
P(X \geq 370) &= 0.7486
\end{aligned}
$$

Donc, on obtient:

$$
\begin{aligned}
P(X \leq 390 | X \geq 370) &= \frac{P(370 \leq X \leq 390)}{P(X \geq 370)} \\
&= \frac{0.7484}{0.7486} \\
P(X \leq 390 | X \geq 370) &= 0.99
\end{aligned}
$$

Merci. Des questions?