Probabilité

Analyse Combinatoire

Analyse Combinatoire

L'analyse combinatoire est l'étude des ensembles finis du point de vue du nombre de leurs éléments. Elle porte sur le dénombrement de configurations d'objets satisfaisant des conditions données. La combinatoire sert d'outil dans plusieurs problèmes élémentaires en théorie des probabilités.

Definition (Le principe de multiplication)

permet de compter le nombre de résultats d'expériences qui peuvent se décomposer en une succession de sous-expériences. Si une expérience est la succession de m sous-expériences. Si la i ème expérience a n_i résultats possibles pour $i = 1, \ldots, n$, alors le nombre total de résultats possibles de l'expérience globale est :

$$n = \prod_{i=1}^{m} n_i = n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_m$$

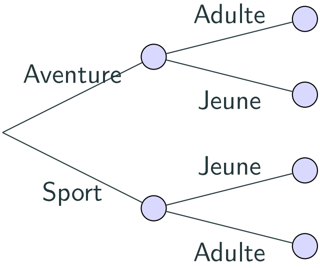
Exemple : On achète une valise à code 4 chiffres. Combien de possibilités avez-vous de choisir un code ? Cette "*expérience*" peut être divisée en 4 sous-expériences, ainsi $m = 4$:

$$\begin{array}{cccc} \underline{n_1} & \underline{n_2} & \underline{n_3} & \underline{n_4} \\ \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 7 & 7 & 7 & 7 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \\ 9 & 9 & 9 & 9 \end{array}$$

On a $n_1 = 10, n_2 = 10, n_3 = 10$ et $n_4 = 10$. Donc, le nombre total de code possible est $n = n_1 \times n_2 \times n_3 \times n_4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10$.

Ainsi, il y a 10^4 possibilités de choisir un code.

Exemple : Un développeur de jeux mobiles souhaite créer deux jeux différents, un jeu de sport et un jeu d'aventure. Pour chaque jeu, il envisage d'en faire un jeu destiné aux adultes et un autre aux jeunes. Combien de jeu doit-il créer ?



On a $n_1 = 2$ et $n_2 = 2$. Ainsi le nombre de jeu à créer est de :

$$n = n_1 \times n_2 = 2 \times 2 = 4$$

Permutations sans répétition et avec répétitions

Definition (Permutations sans répétition)

Étant donné un ensemble E de n objets, on appelle permutations de n objets distincts toutes suites ordonnées de n objets ou tout arrangement n à n de ces objets. Le nombre de permutations de n objets est noté : $P_n = n!$

Exemple : Le nombre de manières de placer 8 chaises autour d'une table est : $P_8 = 8!$=40320 possibilités.

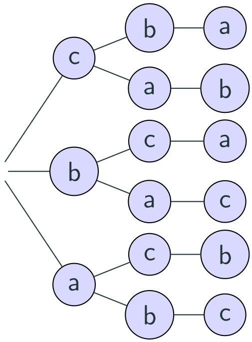
Definition (Permutations avec répétition)

Dans le cas où il existerait plusieurs répétitions k d'un même objet parmi les n objets, le nombre de permutations possibles des n objets doit être rapporté aux nombres de permutations des k objets identiques. Le nombre de permutations de n objets est alors : $P_n = \frac{n!}{k!}$

Exemple : Considérons le mot « CELLULE ». Le nombre de mots possibles (avec ou sans signification) que l'on peut écrire en permutant ces 7 lettres est : $P_7 = \frac{7!}{2!3!} =$ 420 mots possibles.

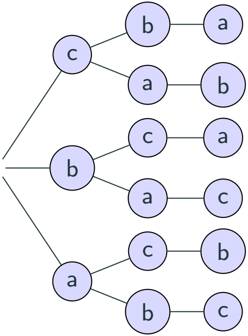
Exemple

Considérez les trois lettres a, b et c. Les permutations possibles sont abc, acb, bac, bca, cab et cba. Ainsi, nous voyons qu'il existe 6 permutations distincts.



le nombre de permutations des quatre lettres a, b, c et d est égale à $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

Exemple



Nous pourrions arriver à la réponse 6 sans lister les différents combinaisons de lettre : il y a $n_1 = 3$ choix pour la première position. Quelle que soit la lettre choisie, il y a toujours $n_2 = 2$ choix pour la deuxième position. Quelles que soient les deux lettres choisies pour les deux premières positions, il n'y a que $n_3 = 1$ choix pour la dernière position. Ainsi, en utilisant **le principe de multiplication** :

$$n = n_1 \times n_2 \times n_3 = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Arrangements avec répétitions et sans répétitions

Definition

Étant donné un ensemble E de n objets, on appelle arrangements de p objets toutes suites ordonnées de p objets pris parmi les n objets. Le nombre d'arrangements de p objets pris parmi n est noté : A_n^p.

Definition (Arrangements sans répétitions)

Lorsqu'un objet peut être observé qu'une seule fois dans un arrangement, le nombre d'arrangement sans répétitionde p objets pris parmi n, est alors :

$$A_n^k = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Exemple : Combien de nombres de 3 chiffres distincts peut-on former avec les chiffres de 1 á 4 ? :

$$A_3^4 = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$$

Arrangements avec répétitions et sans répétitions

Definition (Arrangements avec répétitions)

Lorsqu'un objet peut être observé plusieurs fois dans un arrangement, le nombre d'arrangement avec répétitionde p objets pris parmi n, est alors : $A_n^p = n^p$

Exemple : même question en acceptant de prendre plusieurs fois le même chiffre donc Combien de nombres de 3 chiffres distincts peut-on former avec les chiffres de 1 á 4 ? : $A_3^4 = 4^3 = 64$

Exemple

trois prix (*recherche, enseignement* et *service*) seront décernés à une classe de 25 étudiants diplômés d'un département de statistiques. Si chaque étudiant peut recevoir au plus un prix, combien y a-t-il de sélections possibles ?

Puisque les récompenses se distinguent (l'ordre est important), c'est un problème de permutation. Le nombre total de sélections possibles est :

$$A_{25}^{3} = \frac{25!}{(25-3)!} = \frac{25!}{22!} = 25 \times 24 \times 23 = 13\ 800$$

Combinaisons avec et sans remise

Definition (Combinaisons sans remise)

Étant donné un ensemble E de n objets, on appelle combinaisons de p objets tout ensemble de p objets pris parmi les n objets sans remise. Le nombre de combinaisons de p objets pris parmi n et sans remise est : $C_n^p = \frac{n!}{(n-k)!}$

Exemple : sélection d'un 5 coureurs dans un club de 20 cycliste : $C_{20}^5 = \frac{20!}{(20-5)!} = 15504$

Definition (Combinaisons avec remise)

Le nombre de combinaisons de p objet parmi n avec remise est : $C_{n+p-1}^p = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$

Exemple : une urne contient des boules de 5 couleurs et contient au moins 4 boules de chaque couleurs. on tire 4 boules de cette urnes. Combien de possibilité de regroupements a-t-on ? : $C_{5+4-1}^4 = C_8^4 = \frac{(5+4-1)!}{4!(5-1)!} = 70$

A retenir !

Ordonné ?

Oui

Arrangement

Non

Combinaison

Avec remise ?

Oui

$A_n^p = n^p$

Non

$A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$

Si n=p
Permutation

$P_n = n!$

Oui

$\boxed{\boldsymbol{C_n^p = \dfrac{(n+p-1)!}{p! \times (n-1)!}}}$

Non

$C_n^p = \dfrac{n!}{p! \times (n-p)!}$

Exercices

Exercice 1 :

Un groupe de *3 mathématiciens* et de *7 économistes* veut élire un comité représentatif formé d'un mathématicien et de 2 économistes. De combien de façons peut-on choisir ce comité dans les cas suivants ?

1. Les 10 personnes sont éligibles.
2. Un économiste est choisi d'office.
3. Un mathématicien n'est pas éligible

Correction Exercice 1 :

1. Les 10 personnes sont éligibles.

" La combinaison d'un ensemble d'éléments est une disposition non ordonnée d'un certain nombre d'éléments de cet ensemble."= Tirage une quantité sans ordre

A partir d'un groupe de 3 mathématiciens et de 7 économistes, on veut élire un comité representatifs formé d'un mathématicien et 2 économistes.

1 mathématicien

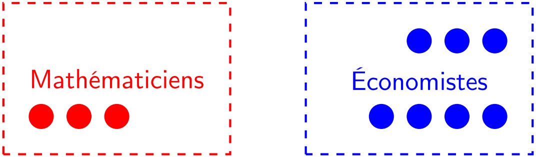
la comité qu'on veut élire :

deux économistes

Correction Exercice 1 :

1. Les 10 personnes sont éligibles.

Puisque toutes les personnes sont éligibles, donc on va choisir un mathématicien et 2 économistes parmi 10 personnes :



$$C_3^1 \times C_7^2 = \frac{3!}{1!(3-1)!} \times \frac{7!}{2!(7-2)!}$$

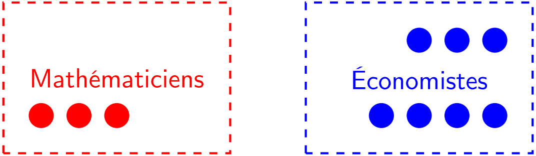
$$C_3^1 \times C_7^2 = 63$$

Donc, on peut choisir ce comité de 63 façons .

Correction Exercice 1 :

2. Un économiste est choisi d'office.

Ainsi, on a seulement un économiste qu'on va choisir parmi les 6 économistes qui restent :



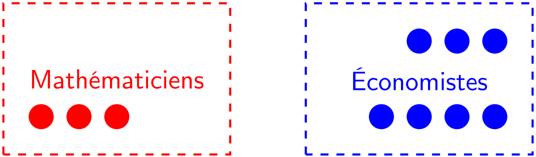
$$C_3^1 \times C_6^{\,1} = \frac{3!}{1!(3-1)!} \times \frac{6!}{1!(6-1)!}$$

$$C_3^1 \times C_6^1 = 18$$

Donc, on peut choisir ce comité de 18 façons .

3. Un mathématicien n'est pas éligible.

Dans ce cas, il reste seulement 2 mathématiciens :



$$C_{2}{}^{1} \times C_7^2 = \frac{2!}{1!(2-1)!} \times \frac{7!}{2!(7-1=2)!}$$

$$C_2^1 \times C_7^2 = 42$$

Donc, on peut choisir ce comité de 42 façons .

Exercice 2 :

1. Combien de plaques d'immatriculation de véhicules peut-on former si chaque plaque comporte 3 lettres distinctes deux à deux, suivies de 5 chiffres non nécessairement distincts, du type XDS90796 ?

2. Combien peut-on former d'immatriculations commençant par AZ ? commençant par A ? contenant A ? contenant A et Z ? commençant par A et finissant par 123 ?

Correction Exercice 2 :

1. Combien de plaques d'immatriculation de véhicules peut-on former si chaque plaque comporte 3 lettres distinctes deux à deux, suivies de 5 chiffres non nécessairement distincts, du type XDS90796 ?

Il y a A_{26}^{3} façons de former les 3 lettres, c'est **un arrangement sans répétition** de 3 lettres parmi les 26 lettres de l'alphabet latin :

$$A_{26}^{3} = \frac{26!}{(26-3)!} = 15600$$

On a 10^5 façon de former les 5 chiffres, c'est **un arrangement avec répétition** de 5 chiffres parmi les 10 chiffres de 0 à 9. Ainsi, le nombre de plaque qu'on peut former est donné par :

$$A_{26}^{3} \times 10^5 = 15600 \times 10^5$$

Donc, on a 156×10^9 façons de former les plaques d'immatriculation de véhicules.

Correction Exercice 2 :

2. Combien peut-on former d'immatriculations commençant par AZ ?

Si l'immatriculation commence par AZ, il reste 24 façons pour former la dernière lettre et on a 10^5 possibilités pour les chiffres. Par conséquent, **il y a** 24×10^5 **possibilités d'immatriculation commençant par AZ**.

$$\underline{A}\,\underline{Z}\,\underline{-}\,\underline{*}\,\underline{*}\,\underline{*}\,\underline{*}\,\underline{*}$$

2. Combien peut-on former d'immatriculations commençant par A ?

Si l'immatriculation commence par A, on a A_{25}^2 façon de former les deux dernières lettres (*c'est un arrangement sans répétition de 2 lettres parmi les 25 lettres de l'alphabet qui reste*) et on a toujours 10^5 possibilités pour les chiffres, ainsi :

$$A_{25}^2 \times 10^5 = \frac{25!}{(25-2)!} \times 10^5$$

$$A_{25}^2 \times 10^5 = 600 \times 10^5$$

Donc, on obtient 6×10^7 **possibilités d'immatriculation commençant par A**.

Correction Exercice 2 :

2. Combien peut-on former d'immatriculations contenant A ?

Si l'immatriculation contient A. On a C_{25}^2 possibilités de choisir les deux autres lettres, $3!$ permutations possibles pour les trois lettres et 10^5 possibilités pour les chiffres. D'où, on obtient :

$$3! \times C_{25}^2 \times 10^5 = 3! \frac{25!}{25! \times 23!} \times C_{25}^2 \times 10^5$$
$$3! \times C_{25}^2 \times 10^5 = 1800 \times 10^5$$

Donc, on obtient 18×10^7 possibilités d'immatriculation contenant A.

2. Combien peut-on former d'immatriculations contenant A et Z ?

Si l'immatriculation contient A et Z. Dans ce cas, on a 24 choix possibles pour la troisième lettre, $3!$ permutations possibles pour les trois lettres et 10^5 possibilités pour les chiffres. D'où, on obtient :

$$3! \times 24 \times 10^5 = 144 \times 10^5$$

Donc, on a 144×10^5 possibilités d'immatriculation contenant A et Z.

Correction Exercice 2 :

2. Combien peut-on former d'immatriculations commençant par A et finissant par 123 ?

Si l'immatriculation commence par A et se termine par 123. Il y a A_{25}^{2} façons de former les deux dernières lettres et 10^2 façons de former les deux premiers chiffres. D'où, on obtient :

$$A - - * * 1\,2\,3$$

$$A_{25}^{2} \times 10^2 = \frac{25!}{23!} \times 10^2 = 600 \times 10^2$$

Donc, on a 6×10^4 possibilités d'immatriculation commençant par A et se terminant par 123.

Exercice 3 :

Combien de nombres peut-on former avec les chiffres de 0 à 7, chaque chiffre n'étant présent qu'une fois, de manière à ce que chaque nombre commence par 7 et soit divisible par 5, dans les deux cas suivants :

1. Les nombres sont de 8 chiffres ?
2. Les nombres sont de 6 chiffres ?

Correction Exercice 3 :

1. Les nombres sont de 8 chiffres ?

Si le nombre est divisible par 5, alors il se termine par 0 ou par 5. Dans le cas ou les nombres sont de 8 chiffres on a deux situations :

$$7\underset{\sqcup}{*}\underset{\sqcup}{*}\underset{\sqcup}{*}\underset{\sqcup}{*}\underset{\sqcup}{*}\underset{\sqcup}{*}0$$

$$7\underset{\sqcup}{*}\underset{\sqcup}{*}\underset{\sqcup}{*}\underset{\sqcup}{*}\underset{\sqcup}{*}\underset{\sqcup}{*}5$$

Donc, on peut former $2 \times 6! = 1440$ **nombres de 8 chiffres de ce type**.

Correction Exercice 3 :

2. Les nombres sont de 6 chiffres ?

Dans ce cas, on a 2 possibilités pour que le nombre se termine par 0 ou 5. On a aussi un arrangement sans répétition de 4 chiffres parmi les chiffres 1,2,3,4,5,6 si le nombre se termine par 0, ou parmi les chiffres 0,1,2,3,4,6 si le nombre se termine par 5.

$$7\,\underset{\sqcup}{*}\underset{\sqcup}{*}\underset{\sqcup}{*}\underset{\sqcup}{*}\,0$$

$$7\,\underset{\sqcup}{*}\underset{\sqcup}{*}\underset{\sqcup}{*}\underset{\sqcup}{*}\,5$$

Donc, on peut former $2 \times A_6^4 = 720$ **nombres de 6 chiffres de ce type**.

Exercice 4 :

Déterminer le nombre de mots formés de :

1. 3 lettres quelconques de l'Alphabet latin.
2. 3 lettres différentes de l'Alphabet latin.
3. 3 lettres contenant une seule fois la lettre A.

Correction Exercice 4 :

1. 3 lettres quelconques de l'Alphabet latin.

$$\overset{*}{\sqcup}\overset{*}{\sqcup}\overset{*}{\sqcup}$$

Cette situation est un arrangement avec répétition de 3 lettres parmi les 26 lettres de l'alphabet latin. Ainsi, **on peut former** $26^3 = 17576$ **mots de lettres quelconques de l'alphabet latin**.

2. 3 lettres différentes de l'Alphabet latin.

$$\overset{*}{\sqcup}\overset{+}{\sqcup}\overset{-}{\sqcup}$$

Si les 3 lettres sont différentes, alors on a un arrangement sans répétition de 3 lettres parmi 26. D'où, **on peut former** $A_{26}^3 = 15600$ **mots de 3 lettres différentes de l'alphabet latin**.

3. 3 lettres contenant une seule fois la lettre A.

$$\overset{A}{\sqcup}\overset{*}{\sqcup}\overset{*}{\sqcup} \quad \overset{*}{\sqcup}\overset{A}{\sqcup}\overset{*}{\sqcup} \quad \overset{*}{\sqcup}\overset{*}{\sqcup}\overset{A}{\sqcup}$$

Si le mot contient une seule fois la lettre A, il y a donc 25^2 façons de choisir les deux autres lettres et 3 places possibles pour la lettre A (*au début, au milieu ou à la fin*). Ainsi, **on peut former** $3 \times 25^2 = 1875$ **mots de 3 lettres contenant une seule fois la lettre** A.

Exercice 5 :

Un club est composé de 8 hommes d'affaires et de 12 fonctionnaires. Quel est le nombre de comités de 5 personnes qu'on peut former :

1. S'il n'y a aucune restriction.
2. Si les deux catégories doivent y être représentées.
3. Si on veut une représentation proportionnelle.

Correction Exercice 5 :

1. S'il n'y a aucune restriction.

Dans ce cas, on a :

$$C_{20}^{5} = \frac{20!}{5! \times 15!} = 15504$$

Ainsi, on a 15504 comités possibles.

2. Si les deux catégories doivent y être représentées.

Notons par HA les hommes d'affaires et F les fonctionnaires. Ainsi, les différentes possibilités sont :

$$\begin{pmatrix}\text{Nombre de}\\ \text{comité possible}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Nombre de comité}\\ \text{avec 1HA et 4F}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Nombre de comité}\\ \text{avec 2HA et 3F}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Nombre de comité}\\ \text{avec 3HA et 2F}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Nombre de comité}\\ \text{avec 4HA et 1F}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\text{Nombre de}\\ \text{comité possible}\end{pmatrix} = C_8^1 \times C_{12}^4 + C_8^2 \times C_{12}^3 + C_8^3 \times C_{12}^2 + C_8^4 \times C_{12}^1$$

$$= 14656$$

Donc, on a dans cette situation 14656 comités possibles.

Correction Exercice 5 :

3. Si on veut une représentation proportionnelle.

D'après l'énoncer les hommes d'affaires représentent 40% du club et les fonctionnaires représentent 60% du club. Pour respecter ces proportions le comité doit comporter $2HA$ et $3F$. Donc, il y a $C_8^2 \times C_{12}^3 = 6160$ comités possibles.

Exercice 6 :

D'un jeu de 40 Cartes (10 numéros et 4 couleurs), on tire au hasard une main de 10 cartes. Déterminer le nombre de mains possibles.

1. Quelconques.
2. Composées de cartes ayant la même couleur.
3. Composées de cartes ayant des numéros tous différents.

Correction Exercice 6 :

1. Quelconques.

Dans ce cas, on a $C_{40}^{10} = \frac{40!}{10! \times 30!} = 847660528$ mains possible.

2. Composées de cartes ayant la même couleur.

Si les cartes sont de la même couleur, il y a $C_{10}^{10} = 1$ façon de choisir 10 cartes. Et comme il y a 4 couleurs différentes, on a $4 \times C_{10}^{10} = 4$ mains possibles contenant 10 cartes de la même couleur.

3. Composées de cartes ayant des numéros tous différents.

On a $C_4^1 = 4$ façon de choisir un numéro déterminé. Donc, le nombre de mains ayant des numéros tous différents est de :

$$C_4^1 \times \cdots \times C_4^1 = \left(C_4^1\right)^{10} = 4^{10} = 1048576$$

Merci. Des questions ?