

Probabilité

(Théorie des Ensembles)

Saïd Maanan

Institut Supérieur des Professions d'Infirmierie et Techniques de Santé
Guelmim

Année académique : 2024-2025

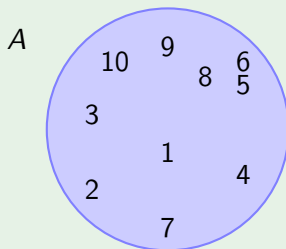
Théories des ensembles

Un ensemble est une collection d'objets. Ces objets sont appelés *éléments* de l'ensemble. Pour dire que x est un élément de l'ensemble E , on écrit $x \in E$. Pour dire que x n'est pas un élément de E , on écrit $x \notin E$.

Exemple

Soit l'ensemble A contenant des entiers allant de 1 à 10. Cet ensemble peut être décrit de deux manières :

$$A = \{n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 10\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

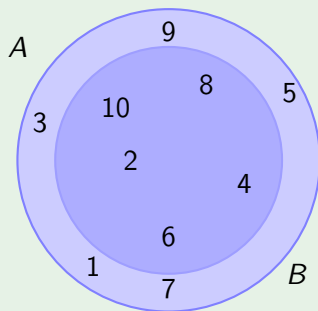


Théories des ensembles

On dit qu'un ensemble E est inclus dans un ensemble F si tout élément de E est un élément de F . Dans ce cas on écrit $E \subset F$. Qui se lit E est inclus dans F .

Exemple

Soit l'ensemble A précédent, et soit B l'ensemble des entiers pairs compris entre 1 et 10. Ainsi, $B \subset A$. On peut représenter ces deux ensembles comme suit :

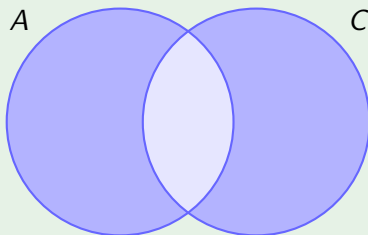


Théories des ensembles

Soient E et F deux ensembles. On appelle **réunion** de E et F , l'ensemble noté $\mathbf{E} \cup \mathbf{F}$ et dont les éléments appartiennent à E **ou** à F .

Exemple

Soient A l'ensemble précédent et C l'ensemble des entiers allant de 6 à 12. Ainsi, $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 11, 12\}$.

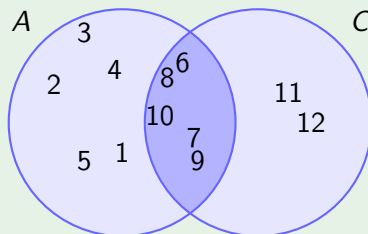


Théories des ensembles

Soient E et F deux ensembles. On appelle **intersection** de E et F , l'ensemble noté $E \cap F$ et dont les éléments appartiennent à E et à F .

Exemple

Soient les deux ensembles A et C précédents. Ainsi, $A \cap C = \{6, 7, 8, 9, 10\}$.

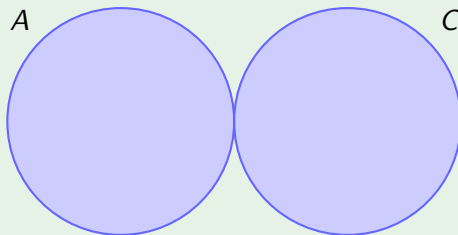


Théories des ensembles

Deux ensembles E et F sont dits disjoints si : $E \cap F = \emptyset$.

Exemple

Soient deux ensembles A et B , telque $A = \{1, 2, 3, 4\}$ et $C = \{6, 7, 8, 9\}$.
On a, $A \cap C = \emptyset$.



Exercices

Exercice 1

Trois machines A , B et C fabriquent respectivement 30, 45 et 25 pièces.

- 1 Quelle est la probabilité qu'une pièce de la production soit fabriquée par la machine A ? par B ? par C ?
- 2 Quelle est la probabilité qu'une pièce soit fabriquée par la machine A ou par la machine B ? (on donnera deux méthodes).

Correction Exercise 1

Trois machines *A*, *B* et *C* fabriquent respectivement 30, 45 et 25 des pièces.

Machine A
30 pièces

Machine B
45 pièces

Machine C
25 pièces

$$\text{Total} = 30 + 45 + 25 = 100 \text{ pièces}$$

Correction Exercice 1

Soient les événements suivant :

A : L'événement : "*la pièce a été fabriquée par la machine A*"

B : L'événement : "*la pièce a été fabriquée par la machine B*"

C : L'événement : "*la pièce a été fabriquée par la machine C*"

Correction Exercice 1

- ① Quelle est *la probabilité* qu'une pièce de la production *soit fabriquée* par la machine *A*? par *B*? par *C*?

La probabilité qu'une pièce de la production soit fabriquée par une machine *K* est donnée par la formule :

$$P(K) = \frac{\text{Nombre de pièce fabriqué par la machine } K}{\text{nombre de pièce totale}}$$

Correction Exercice 1

Ainsi, pour l'événement A :

$$P(A) = \frac{\text{Nombre de pièce fabriqué par la machine } A}{\text{nombre de pièce totale}} = \frac{30}{100} = 0.3$$

On procède de la même manière pour les événements B et C :

$$P(B) = \frac{\text{Nombre de pièce fabriqué par la machine } B}{\text{nombre de pièce totale}} = \frac{45}{100} = 0.45$$

$$P(C) = \frac{\text{Nombre de pièce fabriqué par la machine } C}{\text{nombre de pièce totale}} = \frac{25}{100} = 0.25$$

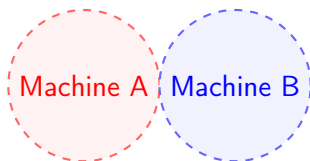
Correction Exercice 1

- ② Quelle est la probabilité qu'une pièce soit fabriquée par *la machine A* **ou** par *la machine B*? (on donnera deux méthodes).

La probabilité qu'une pièce soit fabriquée par la machine *A* **ou** par la machine *B* revient à déterminer la probabilité de **l'événement** $A \cup B$.

Méthode 1 : On a, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Or, $P(A \cap B) = 0$ car $A \cap B = \emptyset$.



Correction Exercice 1

Ainsi, on obtient :

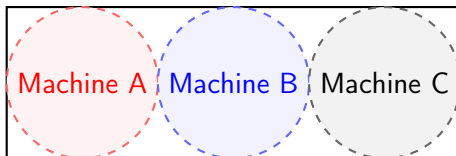
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.3 + 0.45$$

$$P(A \cup B) = 0.75$$

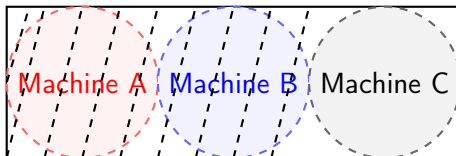
Méthode 2 : Si la pièce n'a été fabriquée *ni par la machine A, ni par la machine B*, alors la seule possibilité qui reste est *qu'elle soit fabriquée par la machine C*.

Correction Exercice 1

L'univers de possibilité dans notre cas est le suivant



Ainsi, si on suppose que la pièce n'a été fabriquée *ni par la machine A, ni par la machine B*,



Il est claire de la figure que la seule possibilité qui reste est *qu'elle soit fabriquée par la machine C*.

Correction Exercice 1

Ce résultat va nous aider à calculer la probabilité de *l'événement* $A \cup B$, en passant à *l'événement contraire*.

On a :

$$P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B})$$

Or, on trouve que $P(\overline{A \cup B}) = P(C)$. Donc :

$$P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B})$$

$$= 1 - P(C)$$

$$= 1 - 0.25$$

$$P(A \cup B) = 0.75$$

Exercice 2

Soient A et B étant deux événements, les situations suivantes sont-elles *possibles* ?

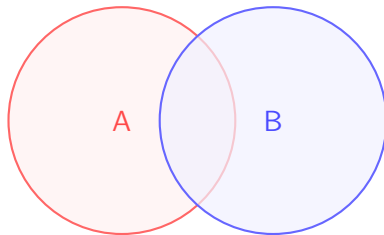
- ❶ $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.4$ et $P(A \cap B) = 0.3$
- ❷ $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.6$ et $P(A \cap B) = 0.05$

Correction Exercise 2

❶ $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.4$ et $P(A \cap B) = 0.3$.

On a :

$$A \cap B \subset A \Rightarrow P(A \cap B) \leq P(A)$$



Donc, on ne peut pas avoir $P(A) = 0.2$ et $P(A \cap B) = 0.3$.

Correction Exercice 2

② $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.6$ et $P(A \cap B) = 0.05$.

On sait que :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = 0.5 + 0.6 - 0.05$$

$$P(A \cup B) = 1.05$$

On trouve *une probabilité supérieur à 1*, un résultat qui est absurde.
Donc, *cette situation est impossible*.

Exercice 3

On considère trois événements A , B et C tels que :

$$P(A) = 0.4, \quad P(B) = 2.0, \quad P(C) = 6.0$$

$$P(A \cap B) = 2.0, P(A \cap C) = 1.0, \quad P(B \cap C) = 0.05$$

$$P(A \cap B \cap C) = 0.01$$

Calculer $P(A \cup B \cup C)$, $P(A \cap (B \cup C))$ et $P(A \cup (B \cap C))$.

Correction Exercice 3

① Calcul de $P(A \cup B \cup C)$

On utilise la formule suivante : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. On a :

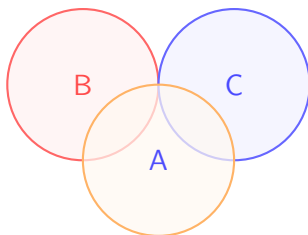
$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) \\ &\quad - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

$$P(A \cup B \cup C) = 0.4 + 0.2 + 0.6 - 0.2 - 0.1 - 0.05 + 0.01$$

$$P(A \cup B \cup C) = 0.86$$

Correction Exercise 3

2 Calcul de $P(A \cap (B \cup C))$



$$P[A \cap (B \cup C)] = P[(A \cap B) \cup (A \cap C)]$$

$$P[(A \cap B) \cup (A \cap C)] = P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)$$

$$P[A \cap (B \cup C)] = P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)$$

$$P[A \cap (B \cup C)] = 0.2 + 0.1 - 0.01 = 0.29$$

Correction Exercise 3

③ Calcul de $P(A \cup (B \cap C))$.

$$P[A \cup (B \cap C)] = P(A) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)$$

$$[P[A \cup (B \cap C)] = 0.4 + 0.05 - 0.01$$

$$P[A \cup (B \cap C)] = 0.44$$

Exercice 4

Soient deux événements A et B tels que $P(A) = 0.3$ $P(B) = 0.6$ et $P(A \cap B) = 0.1$ Calculer la probabilité des événements suivants :

- 1 au moins un des deux événements se réalise.
- 2 A seulement se réalise.
- 3 ni A ni B ne se réalise.
- 4 A ou B , mais un des deux seulement, se réalise.

Correction Exercice 4

① Au moins un des deux événements se réalise.

Ceci revient à calculer la probabilité de l'événement $A \cup B$:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = 0.3 + 0.6 - 0.1 = 0.8$$

Correction Exercice 4

② A seulement se réalise.

Ici, on cherche la probabilité que A se réalise et B ne se réalise pas. Ce qui revient à déterminer la probabilité de l'événement $A \cap \overline{B}$:

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap \overline{B}) = 0.3 - 0.1 = 0.2$$

Correction Exercice 4

- ④ A ou B , mais un des deux seulement, se réalise.

$$P[(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)] = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) - P(A \cap \bar{B} \cap \bar{A} \cap B)$$

$$P[(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)] = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P[(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)] = 0.3 - 0.1 + 0.6 - 0.1 = 0.7$$

Exercice 5

A, B et C étant trois événements mutuellement-indépendants, calculer, en fonction de $P(A)$, $P(B)$ et $P(C)$, la probabilité des événements suivants :

① $E_1 = \overline{A} \cap \overline{B}$.

② $E_2 = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$.

③ $E_3 = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

④ $E_4 = \overline{A \cup B \cup C}$.

⑤ $E_5 = A \cap (\overline{B \cap C})$.

⑥ $E_6 = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (A \cap \overline{B})$.

Correction Exercice 5

$$\textcircled{1} E_1 = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Comme A et B sont indépendants, alors \overline{A} et \overline{B} sont aussi indépendants.
D'où :

$$P(E_1) = P(\overline{A} \cap \overline{B})$$

$$P(E_1) = P(\overline{A}) \times P(\overline{B})$$

$$P(E_1) = [1 - P(A)] \times [1 - P(B)]$$

Correction Exercice 5

On peut répondre à cette question par une autre manière, en utilisant l'indépendance entre A et B :

$$P(E_1) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$$

$$P(E_1) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$$

$$P(E_1) = 1 - P(A) - P(B) + P(A) \times P(B)$$

$$P(E_1) = [1 - P(A)] \times [1 - P(B)]$$

Correction Exercise 5

$$② E_2 = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}).$$

$$P(E_2) = P[(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})]$$

$$P(E_2) = P[A \cup (B \cap \overline{B})] \quad (\text{Car } B \cap \overline{B} = \emptyset)$$

$$P(E_2) = P(A \cup \emptyset) = P(A)$$

Correction Exercise 5

$$\textcircled{3} E_3 = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

$$P(E_3) = P[(A \cup B) \cap (A \cup C)] = P[A \cup (B \cap C)]$$

$$P(E_3) = P(A) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)$$

En utilisant l'indépendance mutuelle des événements :

$$P(E_3) = P(A) + P(B) \times P(C) - P(A) \times P(B) \times P(C)$$

Correction Exercise 5

$$④ E_4 = \overline{A \cup B \cup C}.$$

$$P(E_4) = P(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - P(A \cup B \cup C)$$

$$\begin{aligned} P(E_4) = & 1 - P(A) - P(B) - P(C) + P(A \cap B) \\ & + P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

Comme on a une indépendance mutuelle entre les trois événements :

$$\begin{aligned} P(E_4) = & 1 - P(A) - P(B) - P(C) \\ & + P(A) \times P(B) + P(A) \times P(C) + P(B) \times P(C) \\ & - P(A) \times P(B) \times P(C) \end{aligned}$$

Correction Exercise 5

$$5 \quad E_5 = A \cap (\overline{B \cap C}).$$

$$P(E_5) = P[A \cap (\overline{B \cap C})]$$

$$P(E_5) = P(A) - P(A \cap B \cap C)$$

Par indépendance des événements, on obtient :

$$P(E_5) = P(A) - P(A) \times P(B) \times P(C)$$

Correction Exercise 5

$$⑤ E_6 = (A \cup B) \cap (\bar{A} \cup B) \cap (A \cap \bar{B}).$$

On remarque que :

$$E_6 = [(A \cup B) \cap (\bar{A} \cup B)] \cap (A \cap \bar{B})$$

$$E_6 = [B \cup (A \cap \bar{A})] \cap (A \cap \bar{B})$$

Ainsi :

$$E_6 = [B \cap \emptyset] \cap (A \cap \bar{B})$$

$$= B \cap A \cap \bar{B}$$

$$E_6 = A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$\text{D'où, } P(E_6) = P(\emptyset) = 0$$