Tests d'hypothèses

Inférence à deux échantillons

Exemple

Les reptiles actuels proviennent de lignées reptiliennes émergeant de l'extinction du Mésozoïque. Parmi eux, le tuatara, *Sphenodon punctatus*, originaire de Nouvelle-Zélande, est le seul survivant d'un groupe disparu il y a 100 millions d'années. La masse (en g) d'échantillons aléatoires de tuatara mâles adultes de deux îlots du détroit de Cook est présentée ci-dessous. La variabilité de la masse des mâles adultes diffère-t-elle entre les deux îlots?

Comparaison de deux variances

Location A		Location B
510	790	650
773	440	600
836	435	600
505	815	575
765	460	452
780	690	320
235		660

La question peut être formulée sous la forme de la paire d'hypothèses suivante :

$$H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_B^2$$
$$H_1 : \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$$

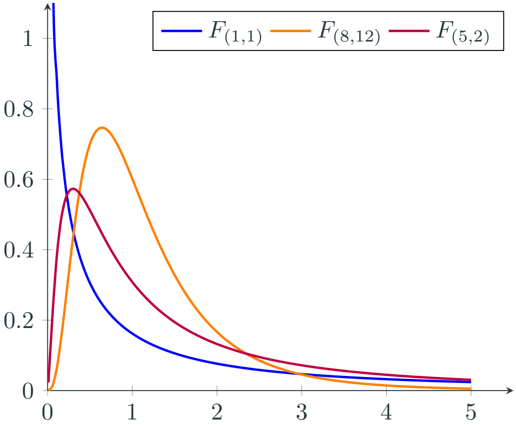


Figure 1: Distribution de Fisher pour différentes paires de degrés de liberté

Les degrés de liberté sont $v_A = n_A - 1 = 13 - 1 = 12$ et $v_B = n_B - 1 = 7 - 1 = 6$. Avec $\alpha = 0.05$ on trouve les degrés de liberté de ce test:

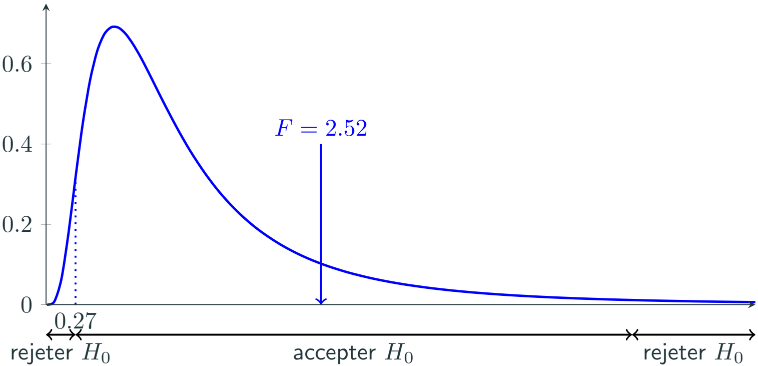
- Queue droite: $F_{0.975(12,6)} = 5.37$
- Queue gauche:

$$F_{0.025(12,6)} = \frac{1}{F_{0.975(12,6)}} = \frac{1}{3.73} = 0.27$$

Nous pouvons maintenant terminer l'analyse. Puisque $s_A^2 = 37,853.17$ et $s_B^2 = 15,037.00$:

$$F = \frac{s_A^2}{s_B^2} = \frac{37,853.17}{15,037.00} = 2.52$$

Puisque $0.27 < 2.52 < 5.37$, nous acceptons H_0.


0.6
0.4
0.2
0
$F = 2.52$
0.27
rejeter H_0
accepter H_0
rejeter H_0

Exemple

Dans une usine de transformation des fruits, la machine habituelle produit des paquets de fraises congelées avec une moyenne de 250 g/boîte. Une nouvelle machine, plus rapide mais potentiellement plus variable, est envisagée. Le responsable du contrôle de la qualité a mesuré le contenu de 50 boîtes de chaque machine, obtenant des résultats de $s_O^2 = 25 \text{ g}^2$ pour l'ancienne et $s_N^2 = 64 \text{ g}^2$ pour la nouvelle. Ces résultats confirment-ils ses soupçons?

Comparaison de deux variances

Les hypothèses sont:

$$H_0 : \sigma_N^2 \leq \sigma_O^2 \quad E(F) \leq 1$$
$$H_1 : \sigma_N^2 > \sigma_O^2 \quad E(F) > 1$$

$$F_{0.95}(49, 49) \approx F_{0.95}(40, 40) = 1.69$$

Si la variance de l'échantillon de la nouvelle machine est au moins 1.69 fois plus grande que la variance de l'échantillon de l'ancienne machine, nous rejetons H_0.

$$F = \frac{s_N^2}{s_O^2} = \frac{64}{25} = 2.56$$

Puisque $2.56 > 1.69$, nous rejetons H_0.

Comparaison de deux moyennes

Exemple

Pour en revenir à l'exemple des tuataras, nous posons maintenant la question : La masse moyenne des mâles adultes est-elle différente entre le site A et le site B?

$$H_0 : \mu_A = \mu_B$$

$$H_1 : \mu_A \neq \mu_B$$

Autrement, nous pouvons écrire $H_0 : \mu - \mu = 0$ et $H_1 : \mu - \mu \neq 0$.

Comparaison de deux moyennes

Les statistiques descriptives des deux lieux sont comme suit:

Location A	**Location B**
$n_A = 13$	$n_B = 7$
$X_A = 618$	$X_B = 551$
$s_A^2 = 37,853.17$	$s_B^2 = 15,037.00$

Comparaison de deux moyennes

La variance de $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ est égale à:

$$\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

$$t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\mathrm{SE}_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}}$$

Puisque s_1^2 et s_2^2 sont des estimations de σ_1^2 et σ_2^2, une possibilité est d'utiliser

$$\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}$$

comme estimation de la variance. Nous assumons que les variances sont égales, et nous calculons la variance groupée comme suit:

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

Comparaison de deux moyennes

Definition

Définition Sous H_0, $(\mu_1 - \mu_2) = 0$, le test statistique pour la différence des moyennes d'échantillons indépendants avec variances égales:

$$t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{s_p^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

avec $v = n_1 + n_2 - 2$ degrés de liberté.

Comparaison de deux moyennes

La variance d'échantillons groupée est

$$\begin{aligned} s_p^2 &= \frac{(n_A - 1)s_A^2 + (n_B - 1)s_B^2}{n_A + n_B - 2} \\ &= \frac{(13-1)37,853.17 + (7-1)15,037.00}{13+7-2} \\ &= 30,247.78 \end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons

$$t = \frac{(618 - 551) - 0}{\sqrt{30,247.78\left(\frac{1}{13} + \frac{1}{7}\right)}} = \frac{67}{\sqrt{6,647.86}} = 0.822$$

pour $\alpha = 0.05$ et $v = 18$, les valeurs critiques sont ± 2.101. Puisque $-2.101 < 0.822 < 2.101$, on ne peut pas rejeter H_0.

Exemple

Une ornithologue étudiant diverses populations de pies australiennes, Gymnorhina tibicen, a capturé au filet japonais 25 adultes dans une zone rurale isolée et 36 dans une zone de pique-nique urbaine. Elle a mesuré les longueurs totales du corps en centimètres et a rapporté les statistiques récapitulatives suivantes :

	Rural	**Urbain**
$\bar{X}$	38 cm	35 cm
s	4 cm	3 cm

Comparaison de deux moyennes

Il est clair que les échantillons sont indépendants, mais proviennent-ils de populations ayant la même variance?

$$H_0 : \sigma_r^2 = \sigma_u^2$$
$$H_1 : \sigma_r^2 \neq \sigma_u^2$$

avec $\alpha = 0.05$, $v_r = 25 - 1 = 24$, $v_u = 36 - 1 = 35$, alors

$$F = \frac{s_r^2}{s_u^2} = \frac{16}{9} = 1.78$$

les intervalles de confiance sont

$$F_{0.975(24,35)} \approx F_{0.975(24,30)} = 2.14$$

et

$$F_{0.025(24,35)} \approx \frac{1}{F_{0.975(30,24)}} = \frac{1}{2.21} = 0.45$$

Comparaison de deux moyennes

Les pies sont-elles plus petites dans les zones urbaines que dans les zones rurales?

$$H_0 : \mu_r \leq \mu_u$$
$$H_1 : \mu_r > \mu_u$$

Il s'agit d'un test unilatéral

$$s_p^2 = \frac{(25-1)16 + (36-1)9}{25+36-2} = \frac{(38-35)-0}{59} = 11.85$$

donc

$$t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{s_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{(38-35)-0}{\sqrt{11.85\left(\frac{1}{25} + \frac{1}{36}\right)}} = 3.347$$

$v = 25+36-2 = 59$. L'intervalle de confiance est 1.671. $3.347 > 1.671$, nous rejetons H_0.

Variances inégales

le test t pour $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ quand les variances sont inégales est

$$t = \frac{\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)}}$$

avec

$$v = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}$$

Exemple

Dans le cadre d'une étude plus large sur les effets des amphétamines, une pharmacologue a souhaité examiner l'affirmation selon laquelle les amphétamines réduisent la consommation globale d'eau. Elle a injecté à 15 rats de laboratoire standard une dose appropriée d'amphétamine et à 10 autres une solution saline en guise de contrôle. Au cours des 24 heures suivantes, elle a mesuré la quantité d'eau consommée par chaque rat et a exprimé les résultats en ml/kg de poids corporel:

	Amphetamine	**Saline**
n	15	10
$\bar{X}$	115	135
s	40	15

Comparaison de deux moyennes

L'amphétamine supprime-t-elle significativement la consommation d'eau? Nous effectuons d'abord un test F préliminaire pour les variances.

$$H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_S^2$$
$$H_1 : \sigma_A^2 \neq \sigma_S^2$$

$s_A^2 = 1600$ (ml/kg)^2 et $s_S^2 = 225$ (ml/kg)^2:

$$F = \frac{s_A^2}{s_S^2} = \frac{1600}{225} = 7.11$$

$v_A = 15 - 1 = 14$ et $v_S = 10 - 1 = 9$:

$$F_{0.975(14,9)} \approx F_{0.975(12,9)} = 3.87$$

$$F_{0.025(14,9)} = \frac{1}{F_{0.025(9,14)}} = \frac{1}{3.21} = 0.31$$

Puisque $7.11 >> 3.87$ on rejette H_0, on ne peut pas assumer l'égalité des variances.

Les hypothèses pour les moyennes sont:

$$H_0 : \mu_A \geq \mu_S$$
$$H_1 : \mu_A < \mu_S$$

$$t = \frac{(\bar{X}_A - \bar{X}_S) - (\mu_A - \mu_S)}{\sqrt{\left(\frac{s_A^2}{n_A} + \frac{s_S^2}{n_S}\right)}} = \frac{(115 - 135) - 0}{\sqrt{\frac{1600}{15} + \frac{225}{10}}} = -1.760$$

$$v = \frac{\left(\frac{s_A^2}{n_A} + \frac{s_S^2}{n_S}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_A^2}{n_A}\right)^2}{n_A - 1} + \frac{\left(\frac{s_S^2}{n_S}\right)^2}{n_S - 1}} = \frac{\left(\frac{1600}{15} + \frac{225}{10}\right)^2}{\frac{\left(\frac{1600}{15}\right)^2}{15-1} + \frac{\left(\frac{225}{10}\right)^2}{10-1}} = \frac{16684.03}{868.95} = 19.2$$

qui est arrondie à 19. La valeur critique est $t_{0.05(19)} = -1.729$. Puisque $-1.760 < -1.729$, nous rejetons H_0, les amphétamines réduisent considérablement la consommation d'eau.

Definition

En supposant des variances égales, l'intervalle de confiance pour $\mu_1 - \mu_2$ au niveau de confiance de $(1-\alpha)100\%$ est donnée par

$$C\left[\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) - t_0 s_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) + t_0 s_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}\right] = 1 - \alpha$$

où

$$s_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{s_p^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$

et $t_0 = t_{1-\frac{\alpha}{2},v}$, avec degrés de liberté $v = n_1 + n_2 - 2$

Intervalles de confiance pour $\mu_1 - \mu_2$

Exemple

La longueur du corps de la pie pour la population rurale a été jugée significativement plus longue que la longueur du corps pour la population urbaine. Calculez un intervalle de confiance de 95% pour la différence de taille.

$$\bar{X}_r - \bar{X}_u = 38 - 35 = 3 \text{ cm}$$

$$s_{\bar{X}_r - \bar{X}_u} = \sqrt{11.85\left(\frac{1}{25} + \frac{1}{36}\right)} = \sqrt{0.80} = 0.89$$

$$L_1 = \left(\bar{X}_r - \bar{X}_u\right) - 2.001(s_{\bar{X}_r - \bar{X}_u}) = 3 - 2.001(0.89) = 1.219 \text{ cm}$$
$$L_2 = \left(\bar{X}_r - \bar{X}_u\right) + 2.001(s_{\bar{X}_r - \bar{X}_u}) = 3 + 2.001(0.89) = 4.781 \text{ cm}$$

L'intervalle de confiance à 95% pour la différence de longueur du corps entre les pies rurales et urbaines est de $[1.219, 4.781]$ cm.

Definition

Lorsqu'on ne peut pas supposer des variances égales, l'intervalle de confiance pour $\mu_1 - \mu_2$ au niveau de confiance $(1-\alpha)100\%$ est donnée par

$$C\left[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - t_0\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + t_0\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}\right] = 1-\alpha,$$

où $t_0 = t_{1-\frac{\alpha}{2},v}$, avec

$$v = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}}$$

Exemple

Calculez l'intervalle de confiance à 95% pour le réduction de la consommation d'eau chez les rats de laboratoire lorsqu'ils sont traités aux amphétamines.

$$\bar{X}_A - \bar{X}_S = 115 - 135 = -20 \text{ ml/kg}$$

$$\sqrt{\frac{s_A^2}{n_A} + \frac{s_S^2}{n_S}} = \sqrt{\frac{1600}{15} + \frac{225}{10}} = 11.37$$

$$v = \frac{\left(\frac{1660}{15} + \frac{225}{10}\right)^2}{\frac{(\frac{1600}{15})^2}{15-1} + \frac{\frac{225}{10}}{10-1}} = 19.2$$

$$L_1 = (115 - 135) - 2.093(11.37) = -43.797 \text{ ml/kg}$$

$$L_2 = (115 - 135) + 2.093(11.37) = 3.797 \text{ ml/kg}$$

Nous sommes sûrs à 95% que la réduction de la quantité d'eau consommée se situe dans l'intervalle $[-43.797; 3.797]$ ml/kg.

Exemple

En regardant un publi-reportage à la télévision, vous entendez l'affirmation selon laquelle un extrait de plante pris quotidiennement, sans changer vos habitudes alimentaires, permettrait de perdre 5 livres en 5 jours. Pour tester cela, vous invitez 12 camarades de classe à participer à une expérience. Vous mesurez chaque sujet, leur demandez d'utiliser l'extrait de plante pendant 5 jours, puis les mesurez à nouveau. À partir des résultats enregistrés ci-dessous, testez l'affirmation de l'infopublicité concernant la perte de 5 livres en 5 jours.

Comparaison des données appariées

Sujet	Poids avant	Poids après
1	128	120
2	131	123
3	165	163
4	140	141
5	178	170
6	121	118
7	190	188
8	135	136
9	118	121
10	146	140
11	212	207
12	135	126

Comparaison des données appariées

Pour les données appariées ici, nous souhaitons étudier les différences, ou d_i, où

$$X_{11} - X_{21} = d_1, \quad X_{12} - X_{22} = d_2, \quad \cdots, \quad X_{1n} - X_{2n} = d_n.$$

Sujet	d_i
1	8
2	8
3	2
4	-1
5	8
6	3
7	2
8	-1
9	-3
10	6
11	5
12	9

Comparaison des données appariées

La perte de 5 kilos en 5 jours pourrait être écrite comme suit:

$$H_0 : \mu_d \geq 5 \text{ lb}$$
$$H_1 : \mu_d < 5 \text{ lb}$$

Definition

Le test statistique t pour échantillons appariées est

$$t = \frac{\bar{X}_d - \mu_d}{\frac{s_d}{\sqrt{n_d}}}$$

$$t = \frac{3.8 - 5}{\frac{4.1}{\sqrt{12}}} = -1.013$$

avec $v = n_d - 1 = 12 - 1 = 11$ et une valeur critique $t_{0.05(11)} = -1.796$.
Puisque $-1.796 < -1.031$, on ne rejette pas H_0.

Exemple

Une expérience a été menée pour comparer les performances de deux variétés de blé, A et B. Sept fermes ont été choisies au hasard pour l'expérience et les rendements en tonnes métriques par hectare pour chaque variété de chaque ferme étaient les suivants:

Ferme	Rendement de la variété A	Rendement de la variété B
1	4.6	4.1
2	4.8	4.0
3	3.2	3.5
4	4.7	4.1
5	4.3	4.5
6	3.7	3.3
7	4.1	3.8

Comparaison des données appariées

Ferme	1	2	3	4	5	6	7
Différence $(\mathbf{A}-\mathbf{B})$	0.5	0.8	-0.3	0.6	-0.2	0.4	0.3

Les hypothèses sont

$$H_0 : \mu_A = \mu_B \quad \text{ou} \quad \mu_d = 0$$
$$H_1 : \mu_d \neq 0$$

Soit $\alpha = 0.05$, $n = 7$, $\bar{X}_d = 0.30$ tonne/h et $s_d = 0.41$ tonne/h. Alors

$$t = \frac{0.30 - 0}{\frac{0.41}{\sqrt{7}}} = 1.936$$

avec $v = 7 - 1 = 6$, les valeurs critiques sont $t_{0.025(6)} = -2.447$ et $t_{0.025(6)} = 2.447$. Puisque $-2.447 < 1.936 < 2.447$, on ne peut pas conclure que les deux rendements diffèrent significativement.

Exercices

Exercice 1

La pollution des lacs et rivières par les phosphates, provoquant des proliférations algales et une eutrophisation, a conduit à l'instauration de lois strictes pour protéger les écosystèmes. Les niveaux de phosphates en aval d'une usine chimique ont été mesurés avant et après l'application de ces lois. Des mesures en μg/l ont été enregistrées. Y a-t-il eu une diminution significative des niveaux de phosphates post-lois, en supposant une distribution normale des valeurs?

	Avant	Après
n	10	12
$\bar{X}$	650	500
$\sum \left(X_i - \bar{X}\right)^2$	5,760	19,008
s^2	640	1,728

Exercice 2

Un physiologiste de la reproduction a mesuré les largeurs des glandes cloacales de mâles cailles exposés pendant 2 semaines à des photopériodes différentes. Les jours longs avaient 16 heures de lumière, les jours courts, 8 heures. En supposant une distribution normale des largeurs des glandes cloacales, sont-elles significativement plus larges pendant les jours longs?

Jours longs	Jours courts
$\bar{X}_1 = 12.0$ mm	$\bar{X}_2 = 8.5$ mm
$s_1 = 2.5$ mm	$s_2 = 2.0$ mm
$n_1 = 16$	$n_2 = 16$

Exercice 3

Une petite étude a été menée pour tester l'effet de la lumière vive et de la mélatonine sur l'humeur, les patterns de sommeil et le bien-être global de patientes atteintes de démence. Le groupe de patientes recevait une dose quotidienne de 2.5 mg de mélatonine (une hormone qui régule le rythme circadien) et était exposé à la lumière naturelle du soleil ainsi qu'à des lumières fluorescentes vives pendant les heures normales de la journée.

Mélatonine	16	18	8	10	16	16	14	8	21
Sans mélatonine	15	11	12	10	13	14	7	13	12

Exercice 4

L'utilisation de contraceptifs oraux peut potentiellement entraîner une augmentation de la pression artérielle. Les pressions artérielles systoliques de 10 femmes ont été mesurées avant et après une période de 6 mois sous contraceptifs oraux. En supposant une distribution normale, indiquent-elles une augmentation significative de la pression systolique? Quel type d'erreur (I ou II) pourrait avoir été commis ici? Expliquez.

Femme	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Avant	113	117	111	107	115	134	121	108	106	125
Durant	118	123	114	115	122	140	120	105	111	129

Exercice 5

Réexaminez les données du problème précédent. Supposons que vous croyiez à tort que les ensembles de données étaient des échantillons indépendants pris auprès de deux populations différentes : des femmes ne prenant pas de contraceptifs et des femmes prenant des contraceptifs différents. Quel type de test t serait maintenant approprié ? Effectuez ce test et déterminez si vous auriez trouvé que les femmes prenant des contraceptifs ont une pression systolique significativement plus élevée. Expliquez la cause de toute différence par rapport au problème précédent.

Exercice 6

Pour évaluer les risques pour la santé liés à la fumée secondaire, les niveaux de cotinine (un métabolite de la nicotine) ont été mesurés en mmol/l dans l'urine de sept sujets avant l'exposition à la fumée secondaire, puis peu de temps après une exposition de deux heures à la fumée secondaire de cigarette. L'exposition a-t-elle augmenté de manière significative le niveau de cotinine?

Sujet	1	2	3	4	5	6	7
Avant	13	17	10	21	15	9	32
Après	19	23	19	25	20	15	60

Merci. Des questions?