Probabilité

Lois Discrètes

Lois discrètes usuelles

Souvent, les observations générées par différentes expériences statistiques ont le même type général de comportement. Par conséquent, les variables aléatoires discrètes associées à ces expériences peuvent être décrites essentiellement par la même distribution de probabilité et peuvent donc être représentées par une formule unique.
En fait, il suffit de connaître quelque distributions de probabilités importantes pour décrire plusieurs des variables aléatoires discrètes rencontrées dans la pratique.

Loi discrète uniforme

Definition

Une variable aléatoire X prenant un nombre fini k de valeurs $x_1, \ldots, x_k$ suit une loi uniforme, si :

$$P(X = x_i) = \frac{1}{k}, \qquad \forall i = 1, \ldots, k$$

Exemple : Une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, 6\}$.

1. Déterminer $P(X) = 2$ et $P(X \geq 4)$
2. Calculer l'espérance de X
3. Calculer la variance et l'écart-type de X

On sait que $\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ on a $P(X = k) = \frac{1}{n}$. D'où, comme X suit une loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, 6\}$ on a :

$$P(X = 2) = \frac{1}{6}$$

On a :

$$\begin{aligned} P(X \geq 4) &= P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \\ P(X \geq 4) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Loi discrète uniforme

Pour une loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, n\}$ l'espérance est donnée par $E(X) = \frac{n+1}{2}$. D'où on a :

$$E(X) = \frac{6+1}{2} = \frac{7}{2}$$

Pour une loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, n\}$ la variance est donnée par $Var(X) = \frac{n^2-1}{12}$. D'où on a :

$$Var(X) = \frac{6^2-1}{12} = \frac{36-1}{12} = \frac{35}{12}$$

On'en déduit l'écart-type σ :

$$\sigma = \sqrt{Var(x)} = \sqrt{\frac{35}{12}}$$

Une expérience consiste souvent en des essais répétés, chacun avec deux résultats possibles qui peuvent être qualifiés de **succès** ou **d'échec**. Un exemple de cette expérience est lorsqu'on choisit des pièces qui sortent d'une chaîne de montage, où chaque choix peut indiquer une pièce défectueuse ou non défectueuse. Nous pouvons choisir de définir l'un ou l'autre des résultats comme un succès. **Le processus est appelé processus de Bernoulli**.

Par exemple, si l'on tirait des cartes d'un jeu, les probabilités d'essais répétés changent si les cartes ne sont pas remplacées. Autrement dit, la probabilité de sélectionner un cœur sur le premier tirage est de 1/4, mais sur le deuxième tirage, il s'agit d'une probabilité conditionnelle ayant une valeur de 13/51 ou 12/51, selon que le cœur est apparu sur le premier tirage. : ceci, alors, ne serait plus considéré comme un ensemble d'essais de Bernoulli.

Loi de Bernoulli et loi binomiale

Definition

Une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli (ou loi indicatrice) de paramètre p si elle est définie de la manière suivante :

Valeur	P_X
Succès 1	p
Échec 0	$q = 1 - p$

Notation

On utilise la notation suivante pour dire qu'une variable aléatoire suit une loi de Bernoulli :

$$X \hookrightarrow Bernoulli(p)$$

Loi de Bernoulli et loi binomiale

Proposition

Si $X \hookrightarrow Bernoulli(p)$, alors :

- $E(X) = p$
- $Var(X) = pq$

Definition

Les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ suivent un processus de Bernoulli si elles sont indépendantes, toutes distribuées selon la même loi de Bernoulli(p).

Propriété

Un processus de Bernoulli doit posséder les propriétés suivantes :

- On effectue des expériences répétés.
- Chaque essai aboutit à un résultat qui peut être classé comme un succès ou un échec.
- La probabilité de succès, notée p, reste constante d'un expérience à l'autre.
- Les expériences répétés sont indépendants.

Loi de Bernoulli et loi binomiale

Definition

Si les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ forment un processus de Bernoulli (*c-à-d si elles sont indépendantes, toutes distribuées selon la même loi de Bernoulli*), alors la somme :

$$Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

est appelée **variable aléatoire binomiale**.

C'est à dire que le nombre X de succès dans n essais de Bernoulli est appelé une variable aléatoire binomiale. La distribution de probabilité de cette variable aléatoire discrète est appelée **distribution binomiale**.

Loi de Bernoulli et loi binomiale

Definition

La variable aléatoire Z suit la loi binomiale de paramètres n et p si :

$$Z = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$$

Et

$$P(Z = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

Notation

Une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètre n et p est notée :

$$X \hookrightarrow B(n; p)$$

Exemple

La probabilité qu'une certaine valide un test de durabilité est de 3/4. Trouvez la probabilité que 2 des 4 prochaines machines valident le test.
En supposant que les tests sont indépendants et $p = 3/4$ pour chacun des 4 tests, on obtient :

$$P(X=2) = C_4^2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(1 - \frac{3}{4}\right)^{4-2}$$

$$= \left(\frac{4!}{2!2!}\right) \times \frac{9}{16} \times \frac{1}{4}$$

$$P(X=2) = \frac{27}{32} \approx 0.84$$

Exemple

La probabilité qu'un patient se rétablisse d'une maladie sanguine rare est de 0.4. Si 15 personnes ont contracté cette maladie, quelle est la probabilité que :

1. au moins 10 survivent ?
2. 3 à 8 survivent ?
3. exactement 5 survivent ?

Soit X le nombre de personnes qui survivent.

$$\begin{aligned} P(X \geq 10) &= 1 - P(X < 10) = 1 - \sum_{k=1}^{9} P(X = k) \\ &= 1 - P(X = 1) - P(X = 2) - \cdots - P(X = 9) \\ &= 1 - C_{15}^{1} 0.4^{1} \left(1 - 0.4\right)^{15-1} - C_{15}^{2} 0.4^{2} \left(1 - 0.4\right)^{15-2} - \ldots \\ &\quad - C_{15}^{9} 0.4^{9} \left(1 - 0.4\right)^{15-9} \end{aligned}$$

$$P(X \geq 10) = 1 - 0.9662$$

$$P(X \geq 10) = 0.0338$$

Exemple

$$
\begin{aligned}
P(3 \leq X \leq 8) &= \sum_{k=3}^{8} P(X = k) \\
&= P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) \\
&\quad + P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) \\
&= C_{15}^{3} 0.4^{3} \left(1 - 0.4\right)^{15-3} + C_{15}^{4} 0.4^{4} \left(1 - 0.4\right)^{15-4} + \ldots \\
&\quad + C_{15}^{8} 0.4^{8} \left(1 - 0.4\right)^{15-8} \\
P(3 \leq X \leq 8) &= 0.8779
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(X = 5) &= C_{15}^{5} 0.4^{5} \left(1 - 0.4\right)^{15-5} \\
&= \frac{15!}{5!10!} \times 0.4^{5} \times 0.6^{1}0 \\
P(X = 5) &= 0.1859
\end{aligned}
$$

Propriété

Si $Z \hookrightarrow B(n;p)$, alors on a :

- $E(Z) = n \times p$
- $V(Z) = n \times p \times q$

Propriété

Soient $Z_1 \hookrightarrow B(n_1;p)$ et $Z_2 \hookrightarrow B(n_2;p)$. Si Z_1 et Z_2 sont indépendantes, alors :

$$Z = Z_1 + Z_2 \hookrightarrow B(n_1 + n_2, p)$$

Exercices

Exercice 1

On considère la variable aléatoire X dont la loi est donnée par le tableau suivant :

k	0	1	2	3	4
$P(X=k)$	0.1	0.4	0.3	0.15	p

1. Quelle condition doit-on imposer à p pour que ce tableau définisse une loi de probabilité ?
2. Calculer les probabilités $P(X < 2.3)$, $P(1 < X < 3)$, $P(0 \leq X < 2)$ et $P(X > 2)$.
3. Déterminer la fonction de répartition de X.
4. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Correction Exercice 1

1. Quelle condition doit-on imposer à p pour que ce tableau définisse une loi de probabilité ?

Toutes les probabilités ponctuelles doivent être comprises entre 0 et 1. Donc, on doit avoir $0 \leq p \leq 1$.
La somme de toutes les probabilités ponctuelles doit être égale à 1, c'est-à-dire que :$0.1 + 0.4 + 0.3 + 0.15 + p = 1$. Ainsi, la deuxième condition à vérifier est $p = 0.05$.

2. Calculer les probabilités $P(X < 2.3)$, $P(1 < X < 3)$, $P(0 \leq X < 2)$ et $P(X > 2)$.

$$\begin{aligned}
P(X < 3) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0.8 \\
P(1 < X < 3) &= P(X = 2) = 0.3 \\
P(0 \leq X < 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) = 0.5 \\
P(X > 2) &= P(X = 3) + P(X = 4) = 0.2
\end{aligned}$$

3. Déterminer la fonction de répartition de X.

Par définition, la fonction de répartition d'une variable aléatoire X est la fonction F, de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$, qui à $x \in \mathbb{R}$ associe $F(x) = P(X \leq x)$. Ainsi, la fonction de répartition de X est de :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 0.1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0.5 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 0.8 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 0.95 & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 1 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

4. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

▶ D'une part, l'espérance d'une variable aléatoire discrète est donnée par $E(X) = \sum_{i=0}^{k} x_i \times P(X = x_i)$. Ainsi, en utilisant cette formule on obtient :

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{i=0}^{4} i \times P(X = i) \\
&= 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2) \\
&\quad + 3 \times P(X = 3) + 4 \times P(X = 4) \\
&= 0 \times 0.1 + 1 \times 0.4 + 2 \times 0.3 + 3 \times 0.15 + 4 \times 0.05 \\
E(X) &= 1.65
\end{aligned}
$$

Correction Exercice 1

D'autre part, la variance d'une variable aléatoire discrète est donnée par $V(X) = E\left(X^2\right) - [E(X)]^2$, avec $E\left(X^2\right) = \sum_{i=0}^{k} x_i^2 \times P(X = x_i)$. Ainsi, on calcule d'abord $E\left(X^2\right)$:

$$
\begin{aligned}
E\left(X^2\right) &= \sum_{i=0}^{4} i^2 \times P(X = i) \\
&= 0^2 \times P(X=0) + 1^2 \times P(X=1) + 2^2 \times P(X=2) \\
&\quad + 3^2 \times P(X=3) + 4^2 \times P(X=4) \\
&= 0 \times 0.1 + 1 \times 0.4 + 4 \times 0.3 + 9 \times 0.15 + 16 \times 0.05 \\
E\left(X^2\right) &= 3.75
\end{aligned}
$$

On en déduit :

$$
\begin{aligned}
V(X) &= E\left(X^2\right) - [E(X)]^2 \\
&= 3.75 - (1.65)^2 \\
V(X) &= 1.0275
\end{aligned}
$$

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire d'espérance mathématique $E(X) = m$ et d'écart-type $\sigma > 0$.

Soit X^* la variable aléatoire centrée réduite relative à X $\left(X^* = \frac{X-m}{\sigma}\right)$.

Montrer que $E(X^*) = 0$ et que $V(X^*) = 1$.

Correction Exercice 2

On sait que, si Y est une variable aléatoire tel que $Y = aX + b$ (avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$) alors on :

$$\begin{cases} E(Y) = aE(X) + b \\ V(Y) = a^2 V(X) \end{cases}$$

Ici, on a $X^* = \frac{X-m}{\sigma}$. Ainsi, en appliquant la formule ci-dessus sur X^* on obtient :

$$\begin{aligned} E(X^*) &= \frac{1}{\sigma} E(X) + \left(\frac{-m}{\sigma}\right) \\ &= \frac{m}{\sigma} - \frac{m}{\sigma} \\ E(X^*) &= 0 \end{aligned}$$

Et

$$V(X^*) = \left(\frac{1}{\sigma}\right)^2 V(X)$$

$$V(X^*) = \left(\frac{1}{\sigma}\right)^2 \times \sigma^2 = 1$$

Exercice 3

Une urne est constituée de 4 boules vertes et 6 boules rouges.

1. On tire simultanément au hasard 3 boules de cette urne.

   Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de boules vertes que l'on peut observer parmi ces 3 boules prises. Déterminer la loi de probabilité de X ainsi que son espérance et sa variance.
2. On tire successivement, avec remise, 3 boules de cette urne.

   Soit Y la variable aléatoire représentant le nombre de boules vertes que l'on peut observer parmi ces 3 boules prises. Déterminer la loi de probabilité de Y ainsi que son espérance et sa variance.

Correction Exercice 3

1. On tire simultanément au hasard 3 boules de cette urne. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de boules vertes que l'on peut observer parmi ces 3 boules prises. Déterminer la loi de probabilité de X ainsi que son espérance et sa variance.

Dans ce cas, on a $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$. Ainsi, la loi de probabilité de X est donnée par :

$$P(X=0) = \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{20}{120} = \frac{5}{30}$$

$$P(X=1) = \frac{C_4^1 C_6^2}{C_{10}^3} = \frac{60}{120} = \frac{15}{30}$$

$$P(X=2) = \frac{C_4^2 C_6^1}{C_{10}^3} = \frac{36}{120} = \frac{9}{30}$$

$$P(X=3) = \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$$

On peut résumer les calculs dans le tableau ci-dessous :

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	5/30	15/30	9/30	1/30

Correction Exercice 3

Par la suite, déterminons l'espérance de la variable aléatoire X :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=0}^{3} x_i \times P(X = x_i) \\ &= 0 \times P(X=0) + 1 \times P(X=1) + 2 \times P(X=2) + 3 \times P(X=3) \\ E(X) &= \frac{15}{30} + 2 \times \frac{9}{30} + 3 \times \frac{1}{30} = \frac{6}{5} = 1.2 \end{aligned}$$

Avant de déterminer la variance de X, on calcule d'abord $E\left(X^2\right)$:

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{i=0}^{3} x_i^2 \times P(X = x_i) \\ &= 1 \times P(X=1) + 2^2 \times P(X=2) + 3^2 \times P(X=3) \\ E(X^2) &= \frac{15}{30} + 4 \times \frac{9}{30} + 9 \times \frac{1}{30} = 2 \end{aligned}$$

Ainsi, on déduit la variance de X :

$$\begin{aligned} V(X) &= E\left(X^2\right) - [E(X)]^2 \\ &= 2 - 1.2^2 \\ V(X) &= 0.56 \end{aligned}$$

Correction Exercice 3

2. On tire successivement, avec remise, 3 boules de cette urne. Soit Y la variable aléatoire représentant le nombre de boules vertes que l'on peut observer parmi ces 3 boules prises. Déterminer la loi de probabilité de Y ainsi que son espérance et sa variance.

Chaque tirage d'une boule est une épreuve de *Bernoulli* à deux issues possibles : soit on obtient une boule verte (*succès*) avec la probabilité $p = 4/10 = 2/5$, ou bien on obtient une boule rouge (*échec*) avec la probabilité $1 - p = 6/10 = 3/5$.
On répète cette même épreuve trois fois, de manière indépendante (*car les tirages se font avec remise*). X est la variable aléatoire indiquant le nombre de boules vertes tirées, c'est-à-dire le nombre de succès. **Donc, on déduit que Y suit une loi binomiale**.

Definition

La variable aléatoire Z suit la loi binomiale de paramètres n et p si :

$$Z = \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

Et

$$P(Z = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad k = 0, 1, \dots, n$$

Correction Exercice 3

On a $Y \hookrightarrow$ Bin $\left(3, \frac{2}{5}\right)$. Avec, $Y(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ et $\forall k \in \{0, 1, 2, 3\}$:

$$P(Y = k) = C_3^k \left(\frac{2}{5}\right)^k \left(1 - \frac{2}{5}\right)^{3-k}$$

Ainsi, on peut calculer les différentes probabilité :

$$P(Y = 0) = C_3^0 \left(\frac{2}{5}\right)^0 \left(1 - \frac{2}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}$$

$$P(Y = 1) = C_3^1 \left(\frac{2}{5}\right)^1 \left(1 - \frac{2}{5}\right)^2 = \frac{54}{125}$$

$$P(Y = 2) = C_3^2 \left(\frac{2}{5}\right)^2 \left(1 - \frac{2}{5}\right)^1 = \frac{36}{125}$$

$$P(Y = 3) = C_3^3 \left(\frac{2}{5}\right)^3 \left(1 - \frac{2}{5}\right)^0 = \frac{8}{125}$$

Correction Exercice 3

On peut résumer les calculs dans le tableau ci-dessous :

k	0	1	2	3
$P(X=Y)$	27/125	54/125	36/125	8/125

Par la suite, calculons l'espérance et la la variance de la variable aléatoire Y. Par définition, si X suit une loi binomiale Bin(n, p) alors on a : $E(X) = n \times p$ et $V(X) = n \times p \times q$. D'où :

$$E(Y) = 3 \times \frac{2}{5} = 1.2$$

$$V(Y) = 3 \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = 0.72$$

Exercice 4

Un sac contient 9 jetons numérotés de 1 à 9, indiscernables au toucher. On tire au hasard simultanément 3 jetons du sac.

1. On appelle X la variable aléatoire indiquant le nombre de numéros impairs figurant parmi les trois numéros d'un tirage. Donner la loi de probabilité de X, son espérance et sa variance.

2. Quelle est la probabilité que la somme des trois numéros d'un tirage soit paire ?

3. On répète 10 fois le tirage simultané de 3 jetons en les remettant dans le sac après chaque tirage. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 4 fois une somme paire au cours de ces 10 tirages ?

Correction Exercice 4

1. On appelle X la variable aléatoire indiquant le nombre de numéros impairs figurant parmi les trois numéros d'un tirage. Donner la loi de probabilité de X, son espérance et sa variance.

On a 5 jetons impairs et 4 jetons pairs. On fait un tirage simultané de 3 jetons du sac. X est la variable aléatoire indiquant le nombre de numéros impairs figurant parmi les trois numéros d'un tirage. Dans ce cas, on a $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$. Ainsi, la loi de probabilité de X est donnée par

$$P(X = 0) = \frac{C_4^3}{C_9^3} = \frac{4}{84} = \frac{2}{42}$$

$$P(X = 1) = \frac{C_5^1 C_4^2}{C_9^3} = \frac{30}{84} = \frac{15}{42}$$

$$P(X = 2) = \frac{C_5^2 C_4^1}{C_9^3} = \frac{40}{84} = \frac{20}{42}$$

$$P(X = 3) = \frac{C_5^3}{C_9^3} = \frac{10}{84} = \frac{5}{42}$$

On peut résumer les calculs dans le tableau ci-dessous :

k	0	1	2	3
$P(X = Y)$	2/42	15/42	20/42	5/42

Correction Exercice 4

Par la suite, calculons l'espérance de la variable aléatoire X :

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{i=0}^{3} x_i \times P(X = x_i) \\
&= 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2) + 3 \times P(X = 3)
\end{aligned}
$$

$$E(X) = \frac{15}{42} + 2 \times \frac{20}{42} + 3 \times \frac{5}{42} = \frac{5}{3}$$

Avant de déterminer la variance de X, on calcule d'abord $E\left(X^2\right)$:

$$E(X^2) = 1 \times P(X = 1) + 2^2 \times P(X = 2) + 3^2 \times P(X = 3)$$

$$E(X^2) = \frac{15}{42} + 4 \times \frac{20}{42} + 9 \times \frac{5}{42} = \frac{10}{3}$$

Ainsi, on déduit la variance de X :

$$
\begin{aligned}
V(X) &= E\left(X^2\right) - [E(X)]^2 \\
&= \frac{10}{3} - \frac{5}{3}^2 \\
V(X) &= \frac{5}{9}
\end{aligned}
$$

Correction Exercice 4

2. Quelle est la probabilité que la somme des trois numéros d'un tirage soit paire ?

On sait que :

La somme de deux nombres pairs est paire.
La somme de deux nombres impairs est paire.
La somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est impaire.

On pose alors l'événement A "*la somme des trois numéros du tirage est paire*". A est réalisé si et seulement si, **on obtient trois numéros pairs** (c'est à dire $X = 0$), ou bien **on obtient deux numéros impairs et un numéro pair** (c'est à dire $X = 2$). D'où :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(X = 0 \text{ ou } X = 2) \\ &= P(X = 0) + P(X = 2) \\ &= \frac{2 + 20}{42} \\ P(A) &= \frac{11}{21} \end{aligned}$$

3. On répète 10 fois le tirage simultané de 3 jetons en les remettant dans le sac après chaque tirage. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 4 fois une somme paire au cours de ces 10 tirages ?

Chaque tirage simultané de trois jetons est **une épreuve de Bernoulli**, avec les deux possibilités suivantes : soit la somme des numéros des trois jetons obtenus est paire (*succès*) avec la probabilité $p = 11/21$, ou bien cette somme est impaire (*échec*) avec la probabilité $1 - p = 10/21$.

On répète cette même épreuve de Bernoulli 10 fois, de manière indépendante (*car on remet les 3 jetons après chaque tirage simultané*). Soit Y la variable aléatoire indiquant le nombre de fois que l'on obtient une somme paire à l'issue des 10 épreuves de Bernoulli.

Alors, Y **suit une loi binomiale B** $\left(10, \frac{11}{21}\right)$.On en déduit la probabilité d'obtenir exactement 4 fois une somme paire au cours de ces 10 tirages :

$$P(Y = 4) = C_{10}^{4} \left(\frac{11}{21}\right)^{4} \left(1 - \frac{11}{21}\right)^{10-4} = 0.184$$

Exercice 5

90% des visiteurs d'un musée sont des francophones (non anglophones) et 10% sont des anglophones (non francophones). On considère un groupe de 10 personnes parmi ces visiteurs. Soit X la variable aléatoire indiquant le nombre d'anglophones dans ce groupe.

1. Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance mathématique et sa variance.

2. En déduire la probabilité que ce groupe

   Ne contienne aucun anglophone.

   Contienne au moins un anglophone.

   Contienne au plus trois anglophones.

3. On met à la disposition de ce groupe 9 brochures en français et 3 brochures en anglais. Quelle est la probabilité que chaque visiteur dispose d'une brochure dans sa langue ?

1. Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance mathématique et sa variance.

Cette situation correspond à une épreuve de Bernoulli que l'on répète 10 fois de manière indépendante, avec une probabilité de succès (*avoir un visiteur anglophone*) de $p = 0.1$. Donc, $X \hookrightarrow$ **Bin**$(10, 0.1)$.

Par définition, l'espérance et la variance d'une loi binomiale sont données par :

$$E(X) = n \times p = 10 \times 0.1 = 1$$

$$V(X) = n \times p \times (1 - p) = 10 \times 0.1 \times 0.9 = 0.9$$

Correction Exercice 5

2. En déduire la probabilité que ce groupe, Contienne au moins un anglophone.

Par définition, on a $\forall k \in \{0, 1, \ldots, 10\}$:

$$P(X = k) = C_{10}^{k}(0.1)^{k}(0.9)^{10-k}$$

Ainsi, on cherche la probabilité que $X = 0$:

$$P(X = 0) = C_{10}^{0}(0.1)^{0}(0.9)^{10} = 0.349$$

2. En déduire la probabilité que ce groupe, ne contienne aucun anglophone

Ce qui revient a chercher la probabilité que $X \geq 1$:

$$P(X = 1) = 1 - P(X = 0) = 0.651$$

2. En déduire la probabilité que ce groupe, contienne au plus trois anglophones.

Ici, on cherche la probabilité que $X \leq 3$:

$$\begin{aligned}
P(X \leq 3) &= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) \\
&= C_{10}^{0}(0.1)^{0}(0.9)^{10} + C_{10}^{1}(0.1)^{1}(0.9)^{9} \\
&\quad + C_{10}^{2}(0.1)^{2}(0.9)^{8} + C_{10}^{3}(0.1)^{3}(0.9)^{7} \\
&= 0.349 + 0.387 + 0.194 + 0.057
\end{aligned}$$

$$P(X \leq 3) = 0.987$$

Correction Exercice 5

1. On met à la disposition de ce groupe 9 brochures en français et 3 brochures en anglais.

   Quelle est la probabilité que chaque visiteur dispose d'une brochure dans sa langue ?

Soit l'événement A "*chaque visiteur dispose d'une brochure dans sa langue*". Comme on a 10 visiteurs, l'événement A est réalisé si, et seulement si, le nombre d'anglophones est compris entre 1 et 3 (c'est à dire si, et seulement si $1 \leq X \leq 3$) :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(1 \leq X \leq 3) = P(X \leq 3) - P(X = 0) \\ &= 0.987 - 0.349 \\ P(A) &= 0.638 \end{aligned}$$

Donc, la probabilité que chaque visiteur dispose d'une brochure dans sa langue est d'environ 62%.

Loi de Poisson

Definition

Une variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre λ, avec $\lambda > 0$, si :

$$X = \{0, 1, 2, \dots\}$$

Et

$$P(X = x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, \quad \forall x = 0, 1, 2, \dots$$

Notation

Une variable aléatoire X qui suit une loi Poisson de paramètre n et p est notée :

$$X \hookrightarrow P(\lambda)$$

Loi de Poisson

Propriété

Si $X \hookrightarrow P(\lambda)$, alors on a :

- $E(X) = \lambda$
- $V(X) = \lambda$

Propriété

Soient $X_1 \hookrightarrow P(\lambda_1)$ et $X_2 \hookrightarrow P(\lambda_2)$. Si X_1 et X_2 sont indépendantes, alors :

$$X = X_1 + X_2 \hookrightarrow P(\lambda_1 + \lambda_2)$$

Loi de Poisson

Definition (Approximation)

Lorsque n est grand, p petit et np pas trop grand ($n \geq 50$, $p \leq 0.1$ **et** $np \leq 5$), une **loi binomiale** $B(n,p)$ est très proche d'une **loi de Poisson** dont le paramètre vaut np :

$$B(n,p) \approx P(np)$$

Exercices

Exercice 1

On admet que le nombre X d'accidents de travail survenant annuellement dans une grande entreprise obéit à une loi de Poisson de paramètre 3.

Calculer la probabilité des évènements suivants :

1. Aucun accident ne survient pendant l'année.
2. Au moins 4 accidents surviennent dans l'année.
3. Moins de 4 accidents surviennent dans l'année.
4. Au plus 5 accidents surviennent dans l'année.
5. Plus de 5 accidents surviennent dans l'année

Correction Exercice 1

1. Aucun accident ne survient pendant l'année.

X est une variable aléatoire qui suit une loi de poisson, qu'on note $X \hookrightarrow \text{Pois}(\lambda)$, alors on a que :

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Ici, on a $X \hookrightarrow \text{Pois}(3)$.

C'est à dire, déterminer la probabilité que $X = 0$:

$$P(X = 0) = \frac{3^0 e^{-3}}{0!} = 0.0497 \approx 0.05$$

2. Au moins 4 accidents surviennent dans l'année.

Ici, on cherche la probabilité de l'événement $X \geq 4$:

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 4) &= 1 - P(X < 4) \\
&= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\
&\quad + P(X = 3)] \\
&= 1 - \left[\frac{3^0 e^{-3}}{0!} + \frac{3^1 e^{-3}}{1!} + \frac{3^2 e^{-3}}{2!} + \frac{3^3 e^{-3}}{3!} \right] \\
P(X \geq 4) &= 1 - 0.647 = 0.353
\end{aligned}
$$

3. Moins de 4 accidents surviennent dans l'année.

D'après la question précédente, on a :

$$P(X < 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$
$$P(X < 4) = 0.647$$

4. Au plus 5 accidents surviennent dans l'année.

On chercher à déterminer la probabilité que $X \leq 5$:

$$\begin{aligned} P(X \leq 5) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &\quad + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) \\ &= \frac{3^0 e^{-3}}{0!} + \frac{3^1 e^{-3}}{1!} + \frac{3^2 e^{-3}}{2!} + \frac{3^3 e^{-3}}{3!} + \frac{3^4 e^{-3}}{4!} + \frac{3^5 e^{-3}}{5!} \end{aligned}$$
$$P(X \leq 5) = 0.916$$

5. Plus de 5 accidents surviennent dans l'année.

Ici, on cherche la probabilité que $X > 5$:

$$P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - 0.916 = 0.084$$

Donc, la probabilité que plus de 5 accidents surviennent dans l'année est de 8.4%.

Exercice 2

Dans un magasin, on estime à 0.01 la probabilité qu'un client dont le montant des achats est inférieur à 100 Dh fasse un chèque.

En justifiant le modèle choisi, donner une approximation de la probabilité que, sur 200 clients dont le montant des achats est inférieur à 100 Dh :

1. 3 clients règlent par chèque.
2. au moins 6 clients règlent par chèque.

Correction Exercice 2

Considérons un client dont le montant des achats est inférieur à 100 Dh, alors on a deux possibilité : le client va régler par chèque (*succès*) avec la probabilité $p = 001$, ou bien il va régler autrement (*échec*) avec la probabilité $1 - p = 0.99$.

Il s'agit donc **d'une épreuve de Bernoulli** que l'on répète 200 fois de manière indépendante.

Soit X la variable aléatoire indiquant le nombre de clients réglant par chèque .Ainsi, X suit **une loi binomiale** Bin$(200, 0.01)$. Or, comme on a :

$$\begin{cases} 200 \geq 50 \\ 0.01 \leq 0.1 \\ 200 \times 0.01 = 2 \leq 5 \end{cases}$$

Alors, on peut faire l'approximation de la loi binomiale Bin$(200, 0.01)$ par la loi de Poisson Pois(200×0.01), c'est à dire Pois(2).

Correction Exercice 2

1. La probabilité que 3 clients règlent par chèque.

En utilisant la loi de Poisson on a :

$$P(X = 3) = \frac{2^3 e^{-2}}{3!} = 0.180$$

2. au moins 6 clients règlent par chèque.

Ici, on cherche la probabilité que $X \geq 6$:

$$\begin{aligned}
P(X \geq 6) &= 1 - P(X < 6) \\
&= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\
&+ P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)] \\
&= 1 - \left[\frac{2^0 e^{-2}}{0!} + \frac{2^1 e^{-2}}{1!} + \frac{2^2 e^{-2}}{2!} + \cdots + \frac{2^5 e^{-2}}{5!}\right]
\end{aligned}$$

$$P(X \geq 6) = 1 - 0.983 = 0.017$$

Exercice 3

Une compagnie d'assurance automobile gère 1000 clients. On admet que chaque automobiliste a une probabilité de 0.004 d'avoir un accident durant l'année. Soit X la variable aléatoire indiquant le nombre d'accidents enregistrés.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$
3. Peut-on faire une approximation de la loi de X ? Justifier.
4. Calculer la probabilité qu'au moins 5 accidents soient enregistrés par la compagnie.

Correction Exercice 3

1. Déterminer la loi de probabilité de X.

Cette situation correspond à une épreuve de Bernoulli que l'on répète 1000 fois de manière indépendante, avec une probabilité de succès de $p = 0.004$. Donc, $X \hookrightarrow \text{Bin}(1000, 0.004)$.

2. Calculer *E(X)* et *V(X)*

Par définition, l'espérance et la variance d'une loi binomiale sont données par :

$$E(X) = n \times p = 1000 \times 0.004 = 4$$

$$V(X) = n \times p \times (1 - p) = 1000 \times 0.004 \times 0.996 = 3.984$$

3. Peut-on faire une approximation de la loi de X ? Justifier.

Comme on a :

$$\begin{cases} n = 1000 \geq 50 \\ p = 0.004 \leq 0.1 \\ n \times p = 1000 \times 0.004 = 4 \leq 5 \end{cases}$$

Alors, on peut faire l'approximation de la loi binomiale $B(1000, 0.004)$ par la loi de Poisson $P(1000 \cdot 0.004)$, c'est à dire $P(4)$.

4. Calculer la probabilité qu'au moins 5 accidents soient enregistrés par la compagnie.

En utilisant la loi de Poisson, on a :

$$\begin{aligned} P(X \geq 5) &= 1 - P(X < 5) \\ &= 1 - [P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) \\ &\quad + P(X=3) + P(X=4)] \\ &= 1 - \left[\frac{4^0 e^{-4}}{0!} + \frac{4^1 e^{-4}}{1!} + \frac{4^2 e^{-4}}{2!} + \frac{4^3 e^{-4}}{3!} + \frac{4^4 e^{-4}}{4!}\right] \end{aligned}$$

$$P(X \geq 5) = 1 - 0.629 = 0.371$$

Merci. Des questions ?