

## **CAPÍTULO VIII**

### **Introducción al análisis de respuesta en frecuencia**

## Nociones generales

Se analizará la respuesta en frecuencia de onda senoidal de circuitos con uno o más dispositivos activos amplificadores. Consideraremos que trabajamos con pequeña señal de modo de enfocar el estudio en **amplificadores lineales**, es decir, sistemas circuitales que podrán ser modelizados a los efectos de la señal, mediante circuitos lineales de parámetros concentrados e invariantes en el tiempo y, por lo tanto se puede analizar su comportamiento mediante la aplicación del principio de superposición. En base a esta propiedad se va a estudiar el comportamiento del sistema ante excitaciones que poseen una variación temporal cuya correlación en el dominio de las frecuencias posee un determinado **espectro de frecuencia**, es decir, las señales a considerar deberán ser **desarrollables por Fourier** en serie o mediante la transformada correspondiente.

Estas señales de excitación estarán compuestas por una **sumatoria (discreta o continua)** de **funciones senoidales** puras, que conforman la señal a elaborar por el sistema amplificador. Cada componente senoidal estará caracterizada por su **amplitud, pulsación angular  $\omega$  o frecuencia física  $f = \omega/2\pi$  y ángulo de fase inicial  $\phi_0$**  <sup>(1)(2)</sup>.

El comportamiento de un circuito variará con la frecuencia de cada componente senoidal de la señal a elaborar, lo que es característico de los sistemas reales. Por este motivo, para obtener la señal de salida de un circuito amplificador (o la señal en un par de terminales cualquiera del circuito), se sumarán, aplicando superposición, cada componente senoidal del espectro de la señal de excitación, multiplicada por un número complejo, dependiente de la frecuencia. Esto es equivalente a decir que las amplitudes de cada componente senoidal se multiplicarán por un número real distinto para cada frecuencia y se introducirán distintos corrimientos en el tiempo (o ángulo de fase).

<sup>(1)</sup> Sólo la onda senoidal tiene una **pulsación** expresada por **un número real  $\omega$**  que posee un **significado físico**, dado por la velocidad angular constante del fasor que genera la senoide, siendo por lo tanto una **magnitud vectorial**. Por definición se entiende que toda onda senoidal es pura, es decir, posee amplitud y frecuencia constantes, y fase variable linealmente en el tiempo (con o sin valor inicial) desde  $-\infty$  a  $+\infty$ . En cambio, **la frecuencia física  $f = 1/T$**  se define para cualquier forma de onda periódica de período  $T$  y constituye una **magnitud escalar**. Hecha esta diferenciación conceptual, llamaremos de ahora en adelante "frecuencia" a la frecuencia física " $f$ " de cualquier forma de onda periódica y denominaremos "pulsación angular" a " $\omega$ ", asociada sólo a una onda senoidal.

<sup>(2)</sup> Las señales periódicas  $f(t)$ , de período  $T$ , que admitan un desarrollo en serie de Fourier tendrán un espectro discreto para  $\omega$  variable entre 0 y  $+\infty$ . Las componentes del espectro estarán separadas entre sí por la pulsación de componente fundamental del desarrollo,  $\omega = 2\pi/T$ , y las amplitudes tenderán a anularse para  $\omega \rightarrow +\infty$ , lo que exige la convergencia de la serie. Las señales no periódicas  $f(t)$  que admitan un desarrollo en integral de Fourier, es decir que posean Transformada de Fourier,  $F(\omega)$ , tendrán un espectro continuo y simétrico respecto al eje  $\omega$ , para  $\omega$  variable entre  $-\infty$  y  $+\infty$ . Las componentes contiguas del espectro tendrán pulsaciones separadas entre sí por un diferencial de pulsación  $d\omega$  y sus amplitudes  $F(\omega)d\omega$  tenderán a cero, ya que  $F(\omega)$  representa la **densidad espectral de la función  $f(t)$** . Se sobreentiende, que las señales para las que será válido este tipo de análisis poseerán un espectro cuyas amplitudes deberán tender a cero para  $\omega \rightarrow \infty$ , es decir el desarrollo de Fourier será convergente. Al sumar las componentes de pulsaciones  $-\omega$  y  $+\omega$ ,  $[F(-\omega) e^{-j\omega t} d\omega]$  y  $[F(+\omega) e^{+j\omega t} d\omega]$  se obtendrá la componente senoidal de frecuencia física  $f = \omega/2\pi$ .

Aún no considerando los componentes reactivos concretos, capacitores e inductores, que generalmente forman parte de un circuito, tales como capacitores de acople, desacople y compensación, inductores de choque de altas frecuencias, transformadores, etc.; los sistemas circuitales lineales reales o físicos, y en particular los amplificadores lineales que son objeto de nuestro estudio, presentarán siempre efectos reactivos, de naturaleza capacitiva y/o inductiva, que podrán ser o bien intrínsecos al funcionamiento de cada componente o dispositivo que conforma el amplificador, o bien parásitos de ellos o de las conexiones que los unen <sup>(3)</sup>.

Sin embargo, si bien los circuitos varían su comportamiento con la frecuencia, resulta habitual que esta variación se ponga de manifiesto de manera distinta por rangos o bandas de frecuencias. Por ejemplo podrá ocurrir que mantenga un mismo comportamiento en una o varias zonas determinadas del espectro, dentro de tolerancias prefijadas para el comportamiento del circuito. En este caso, para obtener la señal de salida en ese rango de frecuencias, las componentes del espectro de la señal cuyas pulsaciones se encuentran en ese intervalo, verán multiplicada su amplitud por un mismo factor y no sufrirán corrimientos importantes en el tiempo (o los corrimientos en el tiempo serán iguales para todas las componentes) dentro de la banda de frecuencias considerada. Es decir, se conservará la forma de variación en el tiempo de la señal representada por las componentes senoidales consideradas significativas en el intervalo de frecuencias fijado para reproducir la señal con las tolerancias prefijadas.

En otras palabras, se admitirá que el comportamiento del circuito en ese intervalo de frecuencias no presenta efectos reactivos, es decir, que el modelo equivalente de señal con que podemos representar al circuito, válido para esa banda de frecuencias, carece de componentes reactivos. A este intervalo de frecuencias se lo conoce como ***"rango de frecuencias medias"*** <sup>(4)</sup>.

<sup>(3)</sup> Estos efectos parásitos serán más notorios a medida que se trabaje a frecuencias más elevadas, y tal es su grado de importancia que a medida que aumenta  $\omega$  los circuitos pasarán de poder modelizarse mediante parámetros concentrados a tener que hacerlo mediante parámetros distribuidos en la longitud del circuito real. Puede estimarse que este comportamiento con características de líneas de transmisión de ondas electromagnéticas, donde ya no es válida la reducción de las ecuaciones de Maxwell a las ecuaciones de Kirchhoff, comenzará a partir de frecuencias donde la longitud de onda  $\lambda$  de las señales no sea mucho menor que las dimensiones del circuito real, siendo  $\lambda \cdot f = c$  ( $c$ : velocidad de la luz en el vacío).

<sup>(4)</sup> Los amplificadores con esta forma de respuesta se los conoce como de "banda ancha". Aquellos amplificadores particulares que no poseen estas características y que trabajan en un rango muy reducido de frecuencias, se los llama de "banda angosta" o "sintonizados", donde el rango de frecuencias de trabajo estará reducido a componentes senoidales de frecuencias cercanas a una frecuencia central determinada, atenuándose en forma importante el resto de las componentes. El grado de atenuación de las componentes senoidales no útiles estará evaluado por el "factor de mérito"  $Q$  del amplificador sintonizado.

Las componentes de frecuencias de la señal de excitación por debajo y por encima de esa banda de frecuencias, en la que todas las amplitudes de las componentes se verán multiplicadas por un mismo factor y sufrirán el mismo corrimiento en el tiempo (pudiendo este ser nulo), serán afectadas en amplitud por factores dependientes de la frecuencia y sufrirán distintos corrimientos en el tiempo según la frecuencia de la componente considerada. En este caso para obtener la señal de salida por superposición, cada componente senoidal del espectro de la señal de excitación se verá multiplicada por un **número complejo**, dependiente de la frecuencia, que hará que las amplitudes se vean multiplicadas por un número real distinto para cada frecuencia y se introduzcan distintos corrimientos en el tiempo para cada componente.

En gran parte de los sistemas se admiten tolerancias en la reproducción de la señal de excitación que permiten que parte de las componentes del espectro de frecuencias de la señal de entrada pueden ser afectadas por efectos reactivos, que se manifiestan en forma más notoria fuera del rango que hemos denominado de "frecuencias medias".

Esto último implica que se aceptará cierta deformación en la reproducción de la forma de variación en el tiempo de la señal de excitación, pero ésta no incidirá en el comportamiento requerido del sistema de acuerdo a la tolerancia admitida.

La ubicación de los límites superior e inferior de este intervalo de frecuencias, mayor que el que hemos denominado de "frecuencias medias", quedará fijada por la **tolerancia que se acepte en cuanto a la deformación en la reproducción de la forma de variación en el tiempo** de la señal de excitación a la salida. A este intervalo de frecuencias útil del circuito, extendido con respecto al de frecuencias medias, se lo denominará "**ancho de banda**" del circuito.

Esta extensión del rango útil de frecuencias podrá realizarse hacia uno o hacia ambos lados del rango frecuencias medias, según sea la utilidad requerida para el circuito.

Denominaremos **componentes significativas** del espectro de frecuencias de la señal de excitación a aquellas componentes de la señal de excitación necesarias para reproducir a la salida la forma de variación en el tiempo de dicha señal con la tolerancia admitida por el sistema en que se utilizará el circuito en estudio, es decir a las que formen parte del ancho de banda fijado.

Fuera del ancho de banda útil, el comportamiento del circuito al variar las pulsaciones de las componentes senoidales de la señal de excitación variará en forma mucho más pronunciada, y de acuerdo al uso previsto para el circuito, el estudio de dicho comportamiento deberá extenderse o no a intervalos de frecuencia mucho mayores que el ancho de banda fijado.

El comportamiento de un circuito que posee un número cualquiera de pares de terminales (podrá o no poseer un terminal común) con la

frecuencia, se describe a partir de diagramas llamados **“características de respuesta en frecuencia”**. Dichos diagramas representan la variación del módulo y el argumento de las siguientes funciones en función de la frecuencia o de la pulsación angular  $\omega = 2\pi f$ :

1. Una relación entre variables correspondientes a dos pares de terminales distintos del circuito, conocida como **“Función transferencia”** (de tensión, de corriente, de transimpedancia o de transadmitancia).
2. Una relación entre las dos variables correspondientes a un mismo par de terminales, conocida como **“Función inmitancia”** (impedancia o admitancia).

Por comodidad indicaremos con la letra **“T”** tanto a las transferencias como a las inmitancias y para indicar si trabajamos en el dominio de las frecuencias de onda senoidal, usaremos la notación  **$T(j\omega)$** .

La función  **$T(j\omega)$**  será, para cada valor de  $\omega$ , el **número complejo** dependiente de la frecuencia, por el cual hay que multiplicar cada componente senoidal del espectro de la señal de excitación para obtener la señal de salida por superposición. Las amplitudes se multiplicarán por un número real normalmente distinto para cada frecuencia, que será el módulo de la función  $T(j\omega)$  -  $|T(j\omega)| = |T|(\omega)$  - y al ángulo de fase de cada componente se le sumará el argumento de  $T(j\omega)$ , que será un ángulo función de la frecuencia -  $\varphi(T(j\omega)) = \varphi_T(\omega)$  -.

Las características de respuesta en frecuencia serán, por lo tanto, diagramas donde se represente las funciones del módulo y del argumento de  $T(j\omega)$  en función de la pulsación angular o de la frecuencia física de onda senoidal, haciendo variar  $\omega$  teóricamente entre 0 y  $+\infty$  -  $|T(j\omega)| = f(\omega)$  y  $\varphi(T(j\omega)) = g(\omega)$  -.

En este estudio se describirá el comportamiento con la frecuencia de **circuitos amplificadores** que cumplan con la **condición de poseer un rango de frecuencias medias**, es decir, que posean **una banda de frecuencias** en la que **todas las amplitudes de las componentes senoidales de la señal de excitación** se verán **multiplicadas por un mismo factor** -  $|T| \neq f(\omega)$  y **sufrirán un mismo desplazamiento de fase**  $\varphi_T \neq f(\omega)$  **de valor  $0^\circ$  o  $180^\circ$** .

En este caso las características de respuesta en frecuencia del módulo y argumento de la función  $T(j\omega)$  que se considere poseerán en el intervalo de frecuencias correspondiente a lo que hemos denominado rango de frecuencias medias, un módulo de la transferencia con una zona sensiblemente plana y un argumento  $\varphi(T(j\omega))$  prácticamente constante de valor  $0^\circ$  (equivalente a decir que todas las componentes del espectro de la señal en ese intervalo poseen un corrimiento nulo en el tiempo) o  $180^\circ$  (equivalente a decir que las distintas componentes del espectro de la señal en ese intervalo poseen un corrimiento en el tiempo de valor  $t_i = \varphi_i / \omega_i = \pi / \omega_i = T_i / 2$ , siendo  $\omega_i$  la pulsación de cada

una de las componentes senoidales de la señal de excitación en el rango de frecuencias medias y  $T_i$  su correspondiente período).

A partir de esta forma de descripción, extenderemos la zona útil del espectro de la señal de excitación definiendo como “ancho de banda” del sistema, al intervalo de frecuencias entre los cuales se admite que  $|T|(\omega)$  pueda variar su módulo y/o su argumento dentro de tolerancias compatibles con las con los errores que permite el equipo en el que se utilizará este circuito. Cuando esas tolerancias sean muy acotadas en la reproducción de la señal de entrada, el ancho de banda del circuito coincidirá con el que llamamos “rango de frecuencias medias” (donde todos los efectos reactivos del circuito pueden desprejiciarse dentro de las tolerancias establecidas), en tanto que será mayor en los casos en que pueda admitirse una mayor deformación en la forma de variación en el tiempo de la señal de salida respecto a la de entrada (o de las señales tensión y corriente en un mismo par de terminales en una inmitancia), debiendo considerarse los efectos reactivos del circuito para aquellas frecuencias del ancho de banda que se encuentren fuera del rango de frecuencias medias.

Si las características de respuesta en frecuencia se construyen en forma de **diagramas asintóticos**, conocidos como “**Diagramas de Bode**”, el ancho de banda útil del circuito amplificador se expresará normalmente en base a un intervalo de frecuencias donde se tenga una variación determinado del módulo de la función  $T(j\omega)$  expresado en decibels (db), respecto a su valor a frecuencias medias <sup>(5)</sup>.

De no especificarse el valor de variación del módulo de  $T(j\omega)$  en db ( $\pm 0,5$  dB,  $\pm 1$  dB, etc.) respecto a su valor a frecuencias medias, se entenderá que las frecuencias límites del ancho de banda corresponden a una caída de -3 db:

$$|T(\omega_{\text{límite}})|(\text{db}) = |T_m|(\text{db}) - 3 \text{ db}$$

donde  $|T_m|$  es el valor absoluto o módulo de la transferencia a frecuencias medias <sup>(6)</sup>.

<sup>(5)</sup> En los diagramas de Bode decir, se representa  $|T(j\omega)|$  expresada en decibels y su correspondiente argumento  $\phi_T$  en función del logaritmo decimal de la pulsación angular -  $\log(\omega)$  -, es decir  $|T(j\omega)|(\text{db}) = f(\log \omega)$  y  $\phi_T = g(\log \omega)$ , en diagramas donde se trazan sólo las asíntotas que se obtienen a partir aproximaciones para valores de  $\omega$  mucho menores y mucho mayores que cada pulsación natural. El hecho de escalar logarítmicamente el eje de  $\omega$  se debe, por un lado, a poder representar en igual proporción variaciones dentro de un rango muy amplio de valores, los cuales no serían claramente visibles en una escala lineal y por otro, para reducir a las rectas asintóticas, las funciones hiperbólicas que se obtienen al aproximar.

<sup>(6)</sup>  $T_m$  será un número real, independiente de  $\omega$ , pero podrá tener signo negativo o positivo según exista o no inversión de fase entre las ondas senoidales de excitación y respuesta en el rango de frecuencias medias. Su determinación por medición se realiza del siguiente modo: manteniendo constante la amplitud de la onda senoidal de excitación y variando su frecuencia desde 0 (incremento de pequeña señal de tensión o corriente continua) hasta frecuencias suficientemente altas (teóricamente  $f \rightarrow \infty$ ) se obtiene la amplitud de la onda senoidal de salida para cada frecuencia de la señal de entrada y se encuentran las frecuencias para las cuales esta última cae a  $1/\sqrt{2} \approx 0,707$  de su valor a frecuencias medias. Para inmitancias, el procedimiento es el mismo, manteniendo constante en ese caso la amplitud de la variable tensión o corriente que corresponda al par de terminales de entrada analizado.

En este caso se trabajará con lo que se conoce como “*ancho de banda a -3 dB*”. Los -3 db corresponden a la condición en que la amplitud de la variable de salida a las frecuencias límites caen a  $1/\sqrt{2}$  de su valor a frecuencias medias, es decir, al 70,7% del valor de  $|T_m|$ .

Esta reducción de la amplitud de una tensión o corriente senoidal corresponde a una caída en la potencia desarrollada sobre una carga resistiva a la mitad de su valor a frecuencias medias, por lo que esas frecuencias límites del ancho de banda a - 3 db se las llama también “frecuencias de potencia mitad” y análogamente al ancho de banda así determinado se lo denomina “***ancho de banda de potencia mitad***”.

A estas frecuencias límite determinadas para una caída de -3 db se las denomina *frecuencias de corte inferior  $f_l$  y superior  $f_h$* . En los circuitos prácticos, *la frecuencia de corte inferior a -3 db puede no existir* ya sea por caer  $|T(j\omega)|$  un valor inferior a -3 db desde frecuencias medias al ir bajando la frecuencia de la onda senoidal de excitación, o por mantenerse el valor de  $|T(j\omega)|$  constante e igual a su valor de frecuencias medias hasta frecuencia nula. Este último es el caso de los denominados *amplificadores de continua* que *amplifican con igual valor desde incrementos de continua* (de valores suficientemente pequeños como para que pueda admitirse comportamiento lineal para la señal, continua en este caso) hasta ondas senoidales cuya frecuencia se considere como límite superior de lo que sería el rango de frecuencias medias.

Por otro lado, ***la frecuencia de corte superior existirá siempre*** ya que, como se describió al comienzo del capítulo, todo elemento circuital real, incluidas las líneas de interconexión sean de un circuito impreso o en el interior de un circuito integrado, poseerá en todos los casos efectos reactivos correspondientes a capacitancias parásitas en paralelo e inductancias en serie que, por pequeñas que sean, siempre reducirán a cero la amplitud de la onda senoidal de salida para  $\omega \rightarrow \infty$ .

La determinación de las características de respuesta en frecuencia de un circuito amplificador se podrá realizar por medición, en forma analítica o mediante los programas de computadora que resulten mas convenientes, sean del campo puramente matemático que resuelvan el sistema de ecuaciones integro-diferenciales lineales de coeficientes constantes planteado para el circuito de señal o bien, abstrayéndonos de las ecuaciones matemáticas, mediante la utilización de los modelos matemáticos equivalentes de los componentes que forman parte de ese circuito usando simuladores circuitales, como el PSpice.

Por lo tanto, pueden determinarse los valores de  $T(j\omega)$  a frecuencias medias,  $T_m$ , la frecuencia de corte superior  $f_h$  y la frecuencia de corte inferior  $f_l$  si la hay, ya sea encontrando la expresión analítica de  $T(j\omega)$ , o representando las características de respuesta en frecuencia (a partir de la expresión analítica, de una simulación u obtenida por medición) mediante diagramas del módulo de  $T(j\omega)$  en escalas lineales, logarítmicas o semilogarítmicas o trazando los diagramas de Bode.

## 8.1.- Esquema del método analítico

El método analítico a aplicar para hallar las frecuencias de corte cuando se está en presencia de un sistema lineal cualquiera, que puede tener efectos reactivos de un solo tipo o de ambos (inductivos y capacitivos en un circuito; o de inercia y constantes elásticas en un sistema mecánico), puede ser sistematizado en los siguientes pasos, que proporcionan el camino a seguir en forma general para la determinación de los valores de las frecuencias de corte superior o inferior <sup>(7)</sup>:

- Determinar analíticamente la expresión de la **función transferencia o inmitancia  $T(s)$**  como relación entre las transformadas de Laplace de la respuesta y la excitación, siendo  **$s$**  la **pulsación compleja,  $s = \sigma + j\omega$** . Por tratarse de un número complejo  $\sigma$  y  $\omega$  serán las partes real e imaginaria del número complejo, y por ende números reales. Dado que se tratarán en este trabajo sólo circuitos que puedan modelizarse para la señal, mediante parámetros lineales, concentrados e invariantes en el tiempo, las funciones que se obtendrán serán racionales, es decir, cocientes de polinomios en la variable compleja  $s$ , donde admitiremos en general el numerador será de grado " $m$ " y el denominador de grado " $n$ ".
- Transformar ambos polinomios de modo tal que el coeficiente del término de mayor grado en  $s$  sea unitario, es decir, sacar como factor común los coeficientes  $a_m$  y  $b_n$  del numerador y denominador respectivamente. Llamaremos  $K$  al factor de escala resultante como cociente de los coeficientes mencionados -  $K = a_m/b_n$  -.
- Encontrar sus **polos y ceros  $s_p$  y  $s_z$** , hallando las raíces de los polinomios en  **$s$**  del numerador y denominador de la función transferencia utilizando el método mas conveniente – normalmente, si el grado de los polinomios es mayor que dos se utilizará algún programa de matemática -. Los mismos serán en general números complejos en circuitos que posean componentes reactivos de ambos tipos o de un sólo tipo, pero realimentados de modo tal que la realimentación resulte positiva en los alrededores de una o varias frecuencias <sup>(8)</sup>. Si el sistema considerado posee un solo tipo de componentes reactivos y no existen realimentaciones que pudieran llegar a ser positivas para los alrededores de ciertas frecuencias físicas, los polos y ceros serán reales. A partir de estos valores se podrá construir el **diagrama de polos y ceros** sobre el **plano complejo  $s$** .

<sup>(7)</sup> Si bien en el planteo analítico que sigue, utilizaremos transferencias e inmitancias operacionales de la manera usual, luego estudiaremos la posibilidad de **realizar cálculos** con la variable  $s$  **por inspección** y para ello, se analizarán en forma cualitativa algunos conceptos básicos sobre los criterios a considerar para ello.

<sup>(8)</sup> Por ejemplo, si se conecta un capacitor entre colector y emisor en un base común o drain y source en un gate común, se manifestará como un efecto inductivo a la entrada, pudiendo resonar con la capacitancia del nodo de entrada.



- d. De la expresión analítica completa de  $T(s)$  se hallará la expresión de  $T(j\omega)$ , reemplazando la  $s$  por los valores que toma sobre el eje imaginario del plano complejo  $s$ ,  $s=j\omega$  donde  $\omega$  es un *número real que coincide con la pulsación física de onda senoidal* cuando la excitación o señal de entrada es una función de ese tipo.
- e. Si se analizan circuitos que posean un rango de frecuencias medias, podrá simplificarse la expresión de  $T(j\omega)$  según el rango de frecuencias que se considere. En general, pueden hallarse dos o tres intervalos de frecuencias para las cuales la expresión de  $T(j\omega)$  tendrá una forma simplificada (válida en dicha zona exclusivamente). Cada función particular  $T(j\omega)$  a la que se arribe, como parte de la expresión general o total, se considerará válida sólo dentro del rango de pulsaciones angulares para el que se realice la simplificación.
- f. Los tres rangos de valores de  $\omega$  que se consideran normalmente, se determinan en base a la comparación del valor  $|j\omega|=\omega$  con los valores absolutos de los polos y ceros reales de la función transferencia, o con sus módulos, si son complejos.

Para ejemplificar el procedimiento se partirá de un circuito genérico conformado por dispositivos activos y pasivos, de dos pares de terminales, donde puede o no existir un terminal común a entrada y salida, y se considerará que en uno de dichos pares se aplica la señal a elaborar y en el otro la carga donde desea obtenerse la señal útil ya elaborada (sin dificultad puede extenderse el análisis a un circuito con un número cualquiera de pares de terminales).

En cada par de terminales se tendrán dos variables de señal, una tensión  $v(t)$  y una corriente  $i(t)$ , por lo que para este circuito se podrán definir dos funciones inmitancia para cada par de terminales y cuatro funciones transferencia entre las dos variables del par de terminales de salida y las dos del de entrada.

En este caso, la resolución del sistema de ecuaciones integro-diferenciales que se planteen, al pasar al campo transformado de Laplace, conducirá a una función transferencia o inmitancia que tendrá la siguiente forma general, ya factorizados los polinomios del numerador y denominador:

$$T(s) = K \frac{\prod_{j=1}^m (s - s_{zj})}{\prod_{i=1}^n (s - s_{pi})} \quad (8.1)$$

siendo  $K$  el factor de escala.

Dado que los polos y ceros de las funciones de transferencia e inmitancia son funciones de la variable compleja  $s$  que se reducen a funciones reales cuando  $s$  toma valores reales, debe cumplirse la condición:  $F(s^*) = F^*(s)$ , es decir que la función de la variable conjugada de  $s$  es igual a la función conjugada de la variable  $s$ , se deduce que los polos y ceros o son reales o deben existir de a pares conjugados.

Los **polos** de las funciones transferencia e inmitancia de un **circuito estable** (donde la respuesta en estado estacionario a una excitación nula, es nula), deberán tener parte real negativa, en tanto que la parte real de los ceros y la relación entre el grado del numerador "m" y del denominador "n" dependerán del tipo de función que se trate.

**Signo de la parte real de los ceros:** En las funciones inmitancia, al tener sentido físico tanto una de las funciones – Z o Y – como su inversa, los ceros de una serán los polos de la otra y viceversa, por lo que los ceros deberán tener también parte real negativa. En cualquiera de las cuatro funciones de transferencia, las inversas no tienen sentido práctico por tratarse, en general, de circuitos que incluyen componentes activos, es decir las inversas de las funciones transferencia no son funciones circuitales válidas, por lo que los ceros podrán tener sus partes reales negativas o positivas.

**Relación entre el grado del numerador "m" y del denominador "n":** Este análisis permite establecer las condiciones que deben cumplir entre sí los grados del numerador y denominador de una función de circuito estudiando la función para  $s \rightarrow \infty$ , bajo el supuesto de validez para esos valores de  $s$ , de la expresión de dicha función obtenida mediante la modelización con parámetros lineales, concentrados e invariantes en el tiempo. Evidentemente las conclusiones obtenidas en cuanto a las características de respuesta en frecuencia haciendo  $s = j\omega$  y haciendo tender  $\omega$  a infinito no tienen sentido práctico, pues *los modelos utilizados han perdido validez* cuando las dimensiones físicas del circuito dejaron de ser mucho menores que la longitud de onda asociada a la frecuencia de la componente senoidal de la señal.

Dado que las funciones de circuitos son cocientes de polinomios, el número de polos deberá ser igual al de ceros y si  $m \neq n$ , existirán ceros o polos en el  $\infty$  de orden  $(m - n)$  según  $m$  sea menor que  $n$  o viceversa respectivamente. La relación entre el grado del numerador "m" y del denominador "n" dependerán del tipo de función que se trate cumpliendo con las siguientes condiciones:

**Funciones inmitancia:** Si (8.1) representa una impedancia operacional vista desde el par de terminales entrada i, para  $s \rightarrow \infty$  se reduce a:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = \frac{V_i(s)}{I_i(s)} = \frac{s^m}{s^n} = K s^{(m-n)} \quad (8.2)$$

Si  $[m-n = +1]$  se tiene una impedancia donde predomina una componente inductiva y si  $[m-n = -1]$  predominará una componente capacitiva. Evidentemente en un sistema circuital lineal la diferencia entre  $m$  y  $n$  no podrá ser mayor que la unidad. Si  $[m-n]$  fuese nula, la impedancia resultante sería de tipo resistivo, cosa imposible si se modeliza mediante parámetros concentrados un circuito real, debido a las componentes parásitas.

Como la inversa de la impedancia será una admitancia vista desde el par de terminales entrada "i", se desprende que la relación entre el grado del numerador "m" y del denominador "n", para que la expresión de  $F(s)$  represente el modelo matemático de un circuito físico modelizado con las condiciones indicadas es:

$$m = n \pm 1 \quad (8.3)$$

Funciones transferencia: Se deben distinguir dos casos

1. *La expresión  $F(s)$  representa una relación entre el mismo tipo de variable de los dos pares de terminales.* Si  $F(s) = V_o(s)/V_i(s)$  se tratará de una función de transferencia de tensión, y si  $F(s) = I_o(s)/I_i(s)$  será una función de transferencia de corriente. En este caso si se modeliza un sistema físico no podrán existir polos en el infinito, por lo que deberá cumplirse:

$$m < n \text{ siendo } [m - n] \text{ el orden del cero en infinito} \quad (8.4)$$

2. *La expresión  $F(s)$  representa una relación entre distinto tipo de variable de los dos pares de terminales.* Si  $F(s) = I_o(s)/V_i(s)$  se tratará de una función de transferencia de transadmitancia, y si  $F(s) = V_o(s)/I_i(s)$  será una función de transferencia de transimpedancia. En este caso podrá existir un polo simple en infinito y ceros de cualquier orden, con lo cual deberá cumplirse:

$$m \leq n + 1 \quad (8.5)$$

dado que en un sistema físico real no podrá tenerse  $m = n$ .

Para simplificar el análisis partiremos de un circuito que posee cinco elementos almacenadores de energía independientes del mismo o distinto tipo, es decir, no reducibles, y que la función transferencia genérica, dada por la expresión (8.1) representa una relación entre las variables transformadas del mismo tipo, por ejemplo tensión, correspondientes a distintos pares de terminales. En este caso deberán existir cinco polos y cinco ceros, cada par impuesto por cada uno de los elementos reactivos.

Supondremos que la función transferencia de este circuito particular posee un cero simple en el origen y otro, también simple en infinito. Admitiremos que todos los ceros restantes son simples, reales y negativos, que tres de los cinco polos son también simples, reales y negativos y que los otros dos polos constituyen un par de polos complejos conju-

gados con su parte real negativa de acuerdo a las condiciones que debe reunir la transferencia de un sistema real estable.

La expresión de la función transferencia que responde a estas premisas es:

$$T(s) = \frac{\text{Transf. de la variable de salida}}{\text{Transf. de la variable de entrada}} = K \frac{s(s-s_{z2})(s-s_{z3})(s-s_{z4})}{(s-s_{p1})(s-s_{p2})(s-s_{p3})(s-s_{p4})(s-s_{p5})} \quad (8.6)$$

Resumiendo, la función transferencia de este circuito posee la siguiente constelación de polos y ceros:

- Un cero simple en el origen ( $s_{z1} = 0$ ).
- Un cero simple en infinito ( $s_{z5} = \infty$ ).
- Tres ceros simples finitos de valores reales y negativos ( $s_{z2}$ ,  $s_{z3}$  y  $s_{z4}$ ).
- Tres polos simples de valores reales y negativos ( $s_{p1}$ ,  $s_{p2}$  y  $s_{p3}$ ).
- Un par de polos complejos conjugados ( $s_{p4}$  y  $s_{p5}$ ) con parte real negativa.

De este modo podemos escribir:

$$s_{z2} = -\sigma_{z2}; s_{z3} = -\sigma_{z3}; s_{z4} = -\sigma_{z4} \quad (8.7)$$

$$s_{p1} = -\sigma_{p1}; s_{p2} = -\sigma_{p2}; s_{p3} = -\sigma_{p3}; s_{p4} = -\sigma_{p4} + j\omega_{p4} \text{ y } s_{p5} = -\sigma_{p4} - j\omega_{p4} \quad (8.8)$$

resultando  $s_{p4} = s_{p5}^*$ .

En base a (8.7) y (8.8), la expresión de la función transferencia de tensión dada por la (8.6) resultará:

$$T(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = K \frac{s(s + \sigma_{z2})(s + \sigma_{z3})(s + \sigma_{z4})}{(s + \sigma_{p1})(s + \sigma_{p2})(s + \sigma_{p3})(s + \sigma_{p4} - j\omega_{p4})(s + \sigma_{p4} + j\omega_{p4})} \quad (8.9)$$

Para construir el diagrama de polos y ceros en el plano  $s$ , consideraremos también en forma arbitraria que la ubicación de los polos y ceros de acuerdo a sus valores en el semieje negativo de  $\sigma$  en el plano  $s$  responde a:

$$\sigma_{p1} < \sigma_{z2} < \sigma_{p2} < \sigma_{p3} < \sigma_{z3} < \sigma_{p4} < \sigma_{z4} \quad (8.10)$$

La condición que establece la existencia de un rango de frecuencias medias, exige que la separación entre dos polos consecutivos cualesquiera, que hemos elegido en este caso como  $s_{p2}$  y  $s_{p3}$ , reales y negativos, sea de al menos de tres décadas en el valor de las pulsaciones correspondientes. De este modo existirá al menos una década de frecuencias en la cual las caídas del módulo de la transferencia en función de  $\omega$  sea menor o igual 0,996 del valor correspondiente a frecuencias medias, lo que equivale a una caída en decibels en el diagrama de Bode correspondiente, de -0,043 db.

El diagrama de polos y ceros en el plano complejo  $s$  se muestra en la Fig. 8.1.

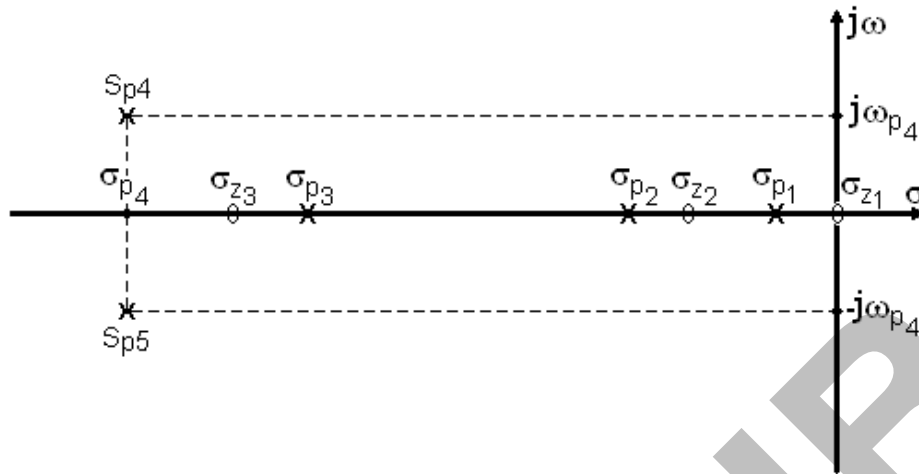


Fig. 8.1

Como nos interesa hallar la respuesta del sistema en función de las frecuencias físicas de onda senoidal, o lo que es equivalente, en función de las pulsaciones angulares del espectro de frecuencias de la señal de excitación, se deberá obtener el módulo y el argumento de la función transferencia  $T(s)$ , dada por (8.9), restringida a valores de la variable compleja  $s$  que surgen de recorrer el eje imaginario del plano complejo  $s$ . Es decir, sólo para valores de  $s = j\omega$ , considerando cada componente de la excitación como una senoide de pulsación angular  $\omega$ . Reemplazando  $s$  por  $j\omega$  en (8.9) para el circuito en estudio se obtiene:

$$T(j\omega) = K \frac{j\omega (j\omega + \sigma_{z2})(j\omega + \sigma_{z3})(j\omega + \sigma_{z4})}{(j\omega + \sigma_{p1})(j\omega + \sigma_{p2})(j\omega + \sigma_{p3})(j\omega + \sigma_{p4} - j\omega_{p4})(j\omega + \sigma_{p4} + j\omega_{p4})} \quad (8.11)$$

En base a haber supuesto por (8.10) que  $\sigma_{p2} \ll \sigma_{p3}$  y que su relación es de al menos de tres décadas, se podrá admitir que habrá un *intervalo de valores de la pulsación angular* para los cuales ésta resulta *ser mucho mayor* que  $\sigma_{p1}$ ,  $\sigma_{z2}$  y  $\sigma_{p2}$  (por lo menos  $6,55\sigma_{p2}$  para una caída en veces a  $0,989|T_m|$  o de  $-0,1\text{db}$  respecto a  $|T_m|(\text{db})$ , o una década para una caída en veces a  $0,995|T_m|$  o de  $-0,043\text{db}$  respecto a  $|T_m|(\text{db})$ ) y *mucho menor* que  $\sigma_{p3}$ ,  $\sigma_{z3}$  y  $|s_{p4}| = |s_{p4}^*|$  (por lo menos  $\sigma_{p2}/6,55$  para una caída en veces a  $0,989|T_m|$  o de  $-0,1\text{db}$  respecto a  $|T_m|(\text{db})$ , o una década para una caída de  $0,995|T_m|$  o  $-0,043\text{db}$  respecto a  $|T_m|(\text{db})$ ), de modo que se pueden establecer *tres rangos* bien diferenciados en el valor de las pulsaciones:

- **Rango de frecuencias medias**

$$\sigma_{p2} \ll \omega \ll \sigma_{p3} \quad (8.12)$$

con lo que (8.11) se puede simplificar del siguiente modo:

$$T(j\omega) = K \frac{j\omega j\omega \sigma_{z3} \sigma_{z4}}{j\omega j\omega \sigma_{p3} (\sigma_{p4} - j\omega_{p4})(\sigma_{p4} + j\omega_{p4})} = K \frac{\sigma_{z3} \sigma_{z4}}{\sigma_{p3} (\sigma_{p4}^2 + \omega_{p4}^2)} \quad (8.13)$$

rango en el cual la transferencia puede considerarse **independiente de  $\omega$**  dentro de tolerancias prefijadas y por lo tanto **es un número real** que llevará el signo de K, negativo o positivo de acuerdo a que exista o no inversión de fase entre las variables de salida y excitación.

Por lo tanto en el **rango de frecuencias medias** la transferencia será:

$$T_m = K \frac{\sigma_{z3} \sigma_{z4}}{\sigma_{p3} (\sigma_{p4}^2 + \omega_{p4}^2)} \quad (8.14)$$

- **Rango de frecuencias bajas**

$$\omega \ll \sigma_{p3} \text{ pero no mucho mayor que } \sigma_{p2} \quad (8.15)$$

con lo que en la expresión (8.11) no podrán desprejarse  $\sigma_{p1}$ ,  $\sigma_{z2}$  y  $\sigma_{p2}$  frente a los valores que toma  $j\omega$ , pero se seguirá desprejiendo  $j\omega$  frente a los restantes valores de los polos y ceros, resultando la expresión:

$$\begin{aligned} T(j\omega) &= K \frac{j\omega (j\omega + \sigma_{z2}) \sigma_{z3} \sigma_{z4}}{(j\omega + \sigma_{p1})(j\omega + \sigma_{p2}) \sigma_{p3} (\sigma_{p4} - j\omega_{p4})(\sigma_{p4} + j\omega_{p4})} \\ &= T_m \frac{j\omega (j\omega + \sigma_{z2})}{(j\omega + \sigma_{p1})(j\omega + \sigma_{p2})} \end{aligned} \quad (8.16)$$

donde:  $T_m = K \frac{\sigma_{z3} \sigma_{z4}}{\sigma_{p3} (\sigma_{p4}^2 + \omega_{p4}^2)}$

De esta expresión puede comprobarse directamente que en el rango de frecuencias bajas, solo influirán en la variación del módulo y argumento de  $T(j\omega)$  con la frecuencia, los elementos reactivos que crean los polos y ceros indicados con los subíndices 1 y 2. El valor de los polos y ceros restantes quedaron incluidos en el valor de la transferencia a frecuencias medias  $T_m$ . Los diagramas de Bode de módulo y argumento de la Transferencia para el rango de bajas frecuencias, correspondiente a la expresión (8.16), se muestran en la Fig. 8.2.

- **Rango de frecuencias altas**

$$\omega \gg \sigma_{p2} \text{ pero no mucho menor que } \sigma_{p3} \quad (8.17)$$

En este caso en (8.11) podrán desprejarse  $\sigma_{p1}$ ,  $\sigma_{z2}$  y  $\sigma_{p2}$  frente a los valores que toma  $j\omega$ , pero no podrá desprejarse  $j\omega$  frente a los restantes valores de los polos y ceros, resultando la expresión:

$$T(j\omega) = K \frac{j\omega j\omega (j\omega + \sigma_{z3})(j\omega + \sigma_{z4})}{j\omega j\omega (j\omega + \sigma_{p3})(j\omega + \sigma_{p4} - j\omega_{p4})(j\omega + \sigma_{p4} + j\omega_{p4})} =$$

$$\begin{aligned}
 &= K \frac{-\omega^2 (j\omega + \sigma_{z3})(j\omega + \sigma_{z4})}{-\omega^2 (j\omega + \sigma_{p3})(j\omega + \sigma_{p4} - j\omega_{p4})(j\omega + \sigma_{p4} + j\omega_{p4})} = \\
 &= K \frac{(j\omega + \sigma_{z3})(j\omega + \sigma_{z4})}{(j\omega + \sigma_{p3})(j\omega + \sigma_{p4} - j\omega_{p4})(j\omega + \sigma_{p4} + j\omega_{p4})} \quad (8.18)
 \end{aligned}$$

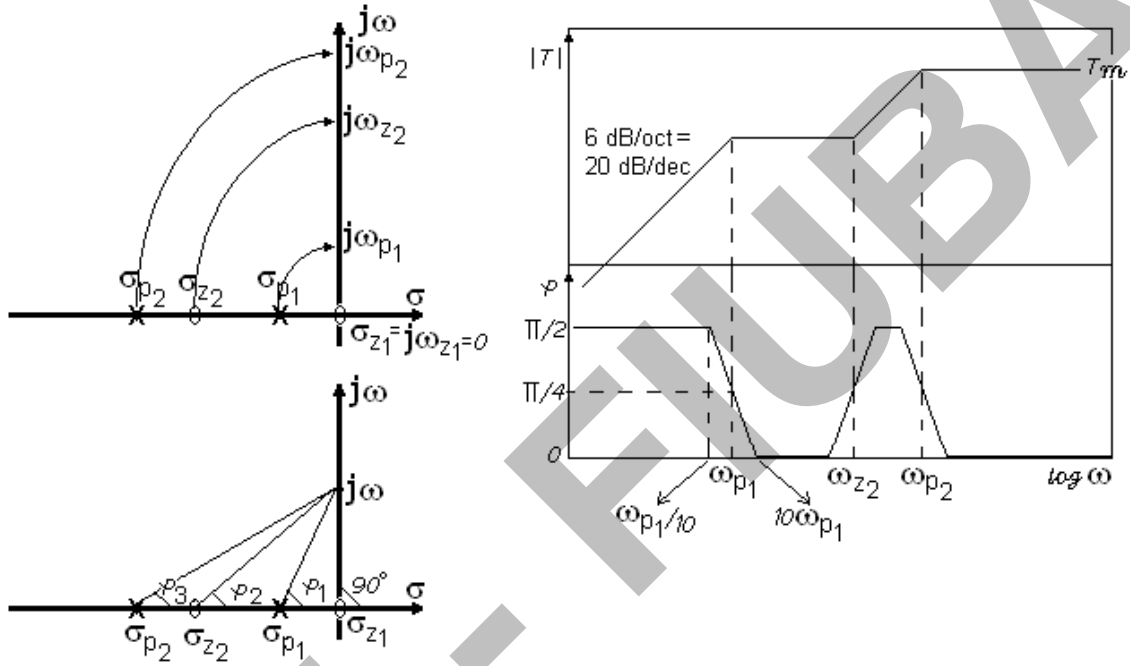


Fig. 8.2

Extrayendo fuera de los paréntesis a los términos constantes como factor común, la expresión (8.18) resulta:

$$\begin{aligned}
 T(j\omega) &= K \frac{\sigma_{z3} \sigma_{z4} (1 + j\omega/\sigma_{z3})(1 + j\omega/\sigma_{z4})}{\sigma_{p3} (1 + j\omega/\sigma_{p3}) (\sigma_{p4} - j\omega_{p4}) [1 + j\omega/(\sigma_{p4} - j\omega_{p4})] (\sigma_{p4} + j\omega_{p4}) [(1 + j\omega/(\sigma_{p4} + j\omega_{p4}))]} = \\
 &= K \frac{\sigma_{z3} \sigma_{z4} (1 + j\omega/\sigma_{z3})(1 + j\omega/\sigma_{z4})}{\sigma_{p3} (\sigma_{p4}^2 + \omega_{p4}^2) (1 + j\omega/\sigma_{p3}) [1 + j\omega/(\sigma_{p4} - j\omega_{p4})] [(1 + j\omega/(\sigma_{p4} + j\omega_{p4}))]} = \\
 &= T_m \frac{(1 + j\omega/\sigma_{z3})(1 + j\omega/\sigma_{z4})}{(1 + j\omega/\sigma_{p3}) [1 + j\omega/(\sigma_{p4} - j\omega_{p4})] [(1 + j\omega/(\sigma_{p4} + j\omega_{p4}))]} \quad (8.19)
 \end{aligned}$$

En este caso se observa directamente que en el rango de frecuencias altas, solo influirán en la variación del módulo y argumento de  $T(j\omega)$  con la frecuencia, los elementos reactivos que crean los polos y ceros indicados con los subíndices 3, 4 y 5. El valor de los polos y ceros restantes quedaron incluidos en el valor de la transferencia a frecuencias medias  $T_m$ . Los diagramas de Bode de módulo y argumento de la

Transferencia para el rango de altas frecuencias, correspondiente a la expresión (8.19), se muestran en la Fig. 8.3 <sup>(9)</sup>.

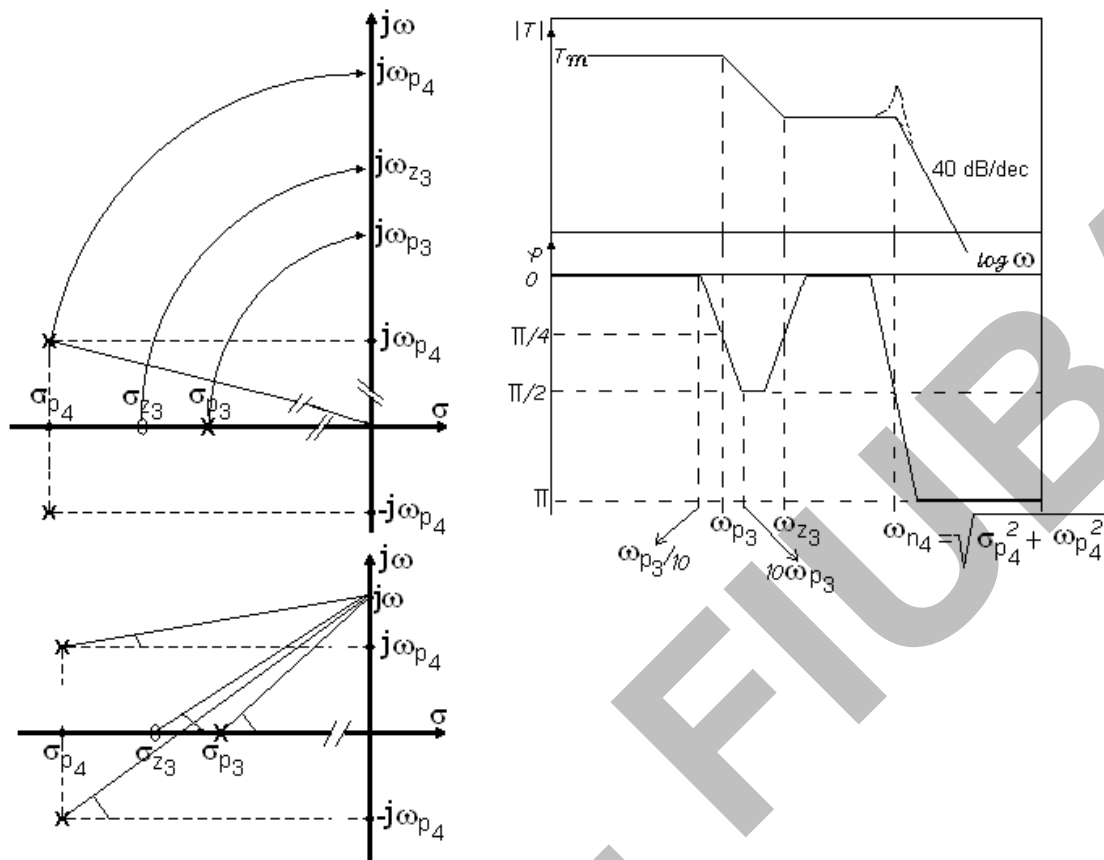


Fig. 8.3

## 8.2.- Estudio de la respuesta en frecuencia de circuitos amplificadores

Cuando se necesita conocer la respuesta en frecuencia de circuitos amplificadores con uno o mas dispositivos activos y componentes de circuito asociados, incluyendo el generador de la señal a procesar por el amplificador y su carga, se puede *proceder analíticamente*, reemplazando los componentes por sus respectivos modelos circuitales incrementales, planteando el sistema de ecuaciones integro-diferenciales correspondiente y resolviéndolo de la manera mas adecuada o recurrir a programas de simulación circuital como el Spice.

Sin embargo, ya sea porque sólo interesa realizar un estudio aproximado que permita alcanzar los objetivos propuestos o porque se debe realizar un cálculo rápido para asegurar que los valores obtenidos a partir de la computadora son correctos, resulta importante poder realizar un *análisis por inspección* que facilite la obtención de valores aproximados.

<sup>(9)</sup> Puede notarse el sobrepico indicado en línea de puntos sobre el diagrama de Bode a la frecuencia del polo complejo conjugado. El valor de este sobrepico dependerá de la relación entre las partes real e imaginaria del polo.



En amplificadores que posean un rango de frecuencias medias, muchas veces uno de los capacitores que se incluyen en el circuito, domina la respuesta en bajas frecuencias, y al estudiar el comportamiento en altas frecuencias hay algún nodo donde concurren capacitores cuyo equivalente reducido a común domina. En estos casos la frecuencia física de onda senoidal que se corresponde con un valor de la pulsación, que iguala en valor al polo que introduce dicho capacitor en el rango de frecuencias bajas, o al polo que introduce la capacitancia equivalente del nodo dominante en el rango de altas frecuencias, se corresponden con las respectivas frecuencias de corte inferior,  $f_l$ , y superior,  $f_h$ .

Puede suceder que lo indicado en el párrafo anterior sea válido sólo en uno de los extremos de la banda de frecuencias y no en el otro. Por supuesto, en amplificadores de continua, sólo se tendrá que analizar la respuesta en altas frecuencias.

Si no existe un polo dominante en los extremos de la banda de frecuencias de interés, siempre podrá hallarse por inspección un *valor garantizable* de las frecuencias de corte inferior y superior utilizando el método aproximado de las constantes de tiempo de cada capacitor con los otros en cortocircuito, para bajas frecuencias, y de la capacitancia equivalente de cada nodo del circuito con las capacitancias de los otros nodos abiertas. En el caso de frecuencias bajas se sumarán las pulsaciones de onda senoidal correspondientes a todas las constantes de tiempo halladas,  $\omega = 1/\tau$ , obteniéndose el *valor garantizable* de  $f_l$  a partir de la suma  $\omega_l$  y en el extremo de altas frecuencias se sumarán las constantes de tiempo halladas y su inversa dará la pulsación correspondiente a la *frecuencias de corte superior garantizable*  $f_h$ . En todos los casos el problema se reduce a determinar una constante de tiempo que se corresponde con el valor de la pulsación compleja  $[s = \sigma + j\omega]$  para valores de la variable “s” reales, que corresponden a los casos en que se tenga un único componente reactivo, capacitancias en el caso más común, si se admite que se trabaja con amplificadores que no presentan efectos inductivos en la banda de interés (por supuesto a frecuencias muy altas esta premisa no es válida).

Bajo estas condiciones, resulta fácil determinar el polo que introduce cada capacitancia por inspección, como así también el cero que impone para los casos que sea de interés.

Es por eso que analizaremos cómo *hallar el polo y el cero* que introduce una capacitancia, en un circuito en que se encuentra asociada a resistores, mediante *un análisis por inspección*, para luego estudiar cómo es la respuesta en frecuencia en módulo y argumento de la transferencia  $T(j\omega)$ , en escala lineal, utilizando también un *análisis cualitativo*.

### Resumen del concepto de polo y cero

Para una señal de entrada  $[v_i = |V_i|e^{st}]$ , si la frecuencia compleja asociada a dicha señal de entrada es  $s = s_{zi}$ , se obtendrá en régimen permanente una señal de salida nula.

Si la frecuencia compleja asociada a la señal de entrada posee un valor  $s = s_{pi}$ , en régimen permanente la salida será infinita, a menos que el módulo de la señal de entrada tienda a cero, en cuyo caso, la salida será indeterminada, pudiendo ser finita. En otras palabras, existirá un efecto de *resonancia*, que denominaremos en general *resonancia de Laplace* o *resonancia operacional en el plano "s"* y se producirán a las frecuencias complejas  $[s = \sigma_p + j\omega_p]$  correspondientes a los polos y ceros.

Debe recordarse que sólo en el caso de *circuitos L-C* que posean componentes reactivos ideales y no exista ningún efecto de tipo disipativo, el concepto de *resonancia* está asociado a un continuo entretenimiento de energía entre los inductores y capacitores que integren el circuito. En éste caso los polos y ceros del circuito se encontrarán sobre el eje " $j\omega$ " del plano " $s$ " y se tendría realmente una salida " $\infty$ " o " $0$ " en régimen permanente, en el caso ideal que todos los componentes del circuito pudiesen resistirlo sin destruirse.

Por lo tanto, en una red circuital lineal de dos pares de terminales se tendrá:

- ♦ **Polos:** aquellas " $n$ " frecuencias complejas  $s_{pi}$  para las cuales el valor de la transferencia  $T(s)$  tiende a infinito.
- ♦ **Ceros:** aquellas " $m$ " frecuencias complejas  $s_{zi}$  que anulan la transferencia  $T(s)$  siendo " $m = n$ ".

Por lo tanto sólo en los casos en que los polos y ceros del circuito se encuentren sobre el eje imaginario del plano " $s$ ", tendrán una pulsación  $\omega_p$  u  $\omega_z$ , que serán la parte imaginaria de  $s_p$  o  $s_z$  y por ende podría existir, si los elementos del circuito lo permitiesen, una salida en régimen permanente de onda senoidal a *frecuencias físicas*  $f = \omega/2\pi$  de amplitud infinita o cero según corresponda.

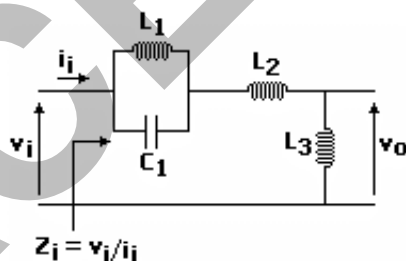


Fig. 8.4

Por ejemplo, para el siguiente circuito L-C de la Fig. 8.4 - admitiendo componentes ideales y excitando mediante un generador ideal de tensión de prueba  $v_i = v_{ip}$  -, el polo corresponderá a la frecuencia de resonancia propia del sistema (con  $v_{ip}$  pasivada).

Para que  $v_o \rightarrow \infty$  con una  $v_{ip}$  finita no nula, deberá ser  $i_i \rightarrow \infty$ . Es decir que, la frecuencia de resonancia debe corresponder a una pulsación  $\omega_p$  tal que  $Z_i = 0$ , de modo que  $i_i = v_{ip}/Z_i \rightarrow \infty$ .

De esta forma,  $[|v_o| = |i_i| \omega_p L_3 \rightarrow \infty]$ . Esto equivaldría a una resonancia serie entre las dos ramas – serie y paralelo – del circuito.

Para  $Z_i(j\omega_p) = 0$ , al ser un circuito reactivo puro, deberá ser cero la parte imaginaria en  $\omega = \omega_p$ , para lo cual la rama  $C_1, L_1, L_2$ , deberá comportarse como un *capacitor equivalente*,  $C_{eq}$ , que a  $\omega = \omega_p$  posea una reactancia igual a la de  $L_3$  (en módulo). Es decir:

$$(-1/j\omega_p.C_{eq}) = j\omega_p.L_3 \Rightarrow \omega_p = [\pm\sqrt{C_{eq}.L_3}]^{-1} \quad (8.20)$$

$$j\omega.L_3 + 1/j\omega_p.C_{eq} = j(\omega.L_3 - 1/\omega_p.C_{eq}) = 0, \text{ de donde } \omega.L_3 = 1/\omega.C_{eq} \quad (8.21)$$

Reemplazando  $C_{eq}$  por su expresión en función de  $C_1, L_1, L_2$  y  $\omega_p$ :

$$\omega_p = \pm\{\sqrt{C_1.[L_1/(L_2+L_3)]}\}^{-1} \text{ (polos complejos conjugados)} \quad (8.22)$$

donde  $\omega_p = +\{\sqrt{C_1.[L_1/(L_2+L_3)]}\}^{-1}$  estará asociada a la frecuencia física  $f_p = \omega_p/2\pi$ .

Queda en evidencia que la pulsación del polo complejo conjugado  $s_p = \pm j\omega_p$  no es otra que la *pulsación de resonancia* del único capacitor,  $C_1$ , con la *inductancia equivalente que le presentan todos los inductores del circuito*,  $[L_1/(L_2+L_3)]$ . En otras palabras,  $\omega_p$  es la pulsación para la cual la reactancia del único capacitor iguala a la reactancia de Thévenin ( $v_{ip}$  pasivada) vista desde sus terminales.

La pulsación del cero,  $\omega_z$ , a la que se tendrán los ceros conjugados  $s_z = \pm j\omega_z$ , se dará para  $v_o = 0$ , con  $v_{ip}$  no nula. Esto ocurrirá para la condición:

$$Z_i(j\omega_z) = j X_i(j\omega_z) \rightarrow \infty, \text{ es decir } i_i = (v_{ip}/Z_i) = 0 \quad (8.23)$$

con lo que  $i_i.\omega_z.L_3 = 0$  para un  $\omega$  *finito distinto de cero*. Se observa por inspección que cuando resuene el circuito paralelo o *circuito tanque*  $L_1-C_1$ , su susceptancia será cero, o lo que es lo mismo, su reactancia tenderá a infinito:

$$\omega_z = [\pm\sqrt{C_1.L_1}]^{-1} \quad (8.24)$$

donde  $\omega_z = [+ \sqrt{C_1.L_1}]^{-1}$  estará asociada a la frecuencia física  $f_z = \omega_z/2\pi$ .

Para comprender mejor cómo hallar los polos y ceros por inspección, incluso en circuitos con varios C y L, resulta de utilidad realizar un análisis cualitativo para ver cómo se comporta el circuito en distintos rangos de frecuencias. Puede observarse en la Fig. 8.5 que para frecuencias bajas **(1)**, desde continua hasta  $\omega_z$ , admitiendo  $\omega_z < \omega_p$  y dado que la inductancia equivalente que resuena con el capacitor resulta menor que en el polo, *el circuito tanque se comportará como un inductor equivalente*, funcionando todo el circuito como *un divisor inductivo*. A la frecuencia de resonancia del tanque  $L_1-C_1$  ( $\omega_z$ ), *la rama serie presentará una impedancia infinita* y la salida será nula **(2)**. Para frecuencias superiores a  $\omega_z$ , *el circuito tanque se comportará como un capacitor equivalente*, el cual resonará con  $L_2$  y  $L_3$  en resonancia serie a  $\omega_p$  **(3)**, presentando una impedancia de entrada nula al generador de excitación de prueba, para luego comportarse *nuevamente como un divisor inductivo* a  $\omega \rightarrow \infty$  **(4)**.

Esta forma de análisis cualitativo puede aplicarse a circuitos L-C más complejos con varios componentes capacitivos e inductivos. Desde ya, el análisis cualitativo implicará realizar una serie de suposiciones tales como decidir a priori cuál rama del circuito resonará a una frecuencia menor. De cualquier modo estas suposiciones no alteran las conclusiones a alcanzar en cuanto al comportamiento de la red circuital.

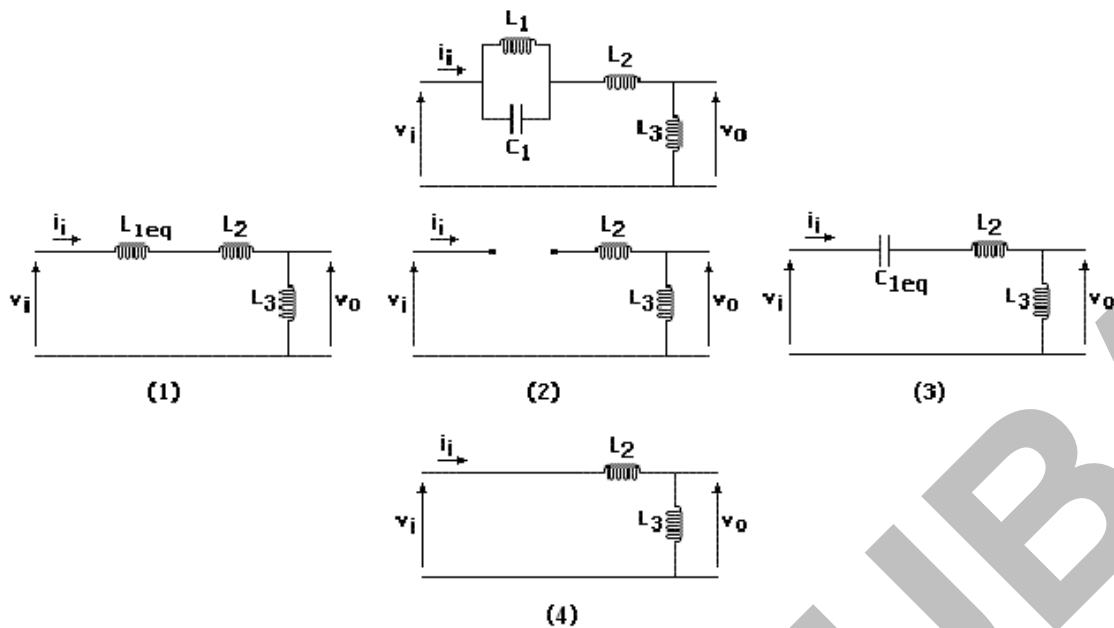
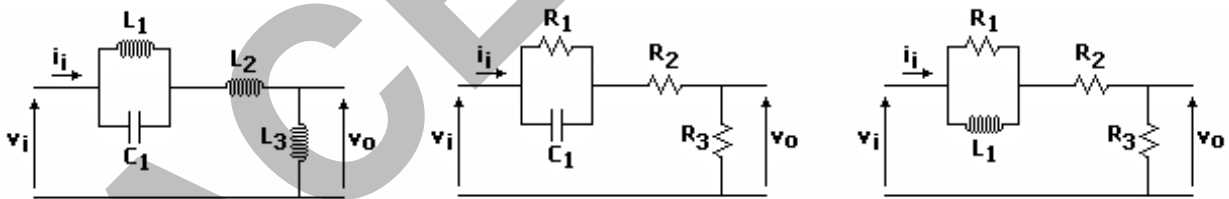


Fig. 8.5

Hasta aquí, se analizaron circuitos con singularidades sobre el eje imaginario  $j\omega$ . Para circuitos con singularidades sobre el eje real  $\sigma$ , puede realizarse un análisis idéntico haciendo una analogía directa entre el concepto de “*resonancia a frecuencia física de onda senoidal*” y “*resonancia operacional o resonancia de Laplace en el plano  $s$* ”. Obviamente esta generalización conlleva a idéntico análisis en circuitos con polos y ceros complejos conjugados en todo el plano “ $s$ ”.

Como puede verse en los tres circuitos indicados en la Fig. 8.6, (L-C con un único elemento reactivo capacitivo; R-C con un único capacitor y L-R con un único inductor), las expresiones de la transferencia  $[T(s) = V_o(s)/V_i(s)]$  poseen igual forma, con la salvedad de que las singularidades L-C son imaginarias conjugadas.



$T(s) = \frac{L_3}{L_2 + L_3} \frac{s^2 + 1/L_1 C_1}{s^2 + \frac{1}{C_1} \left( \frac{1}{L_2 + L_3} + \frac{1}{L_1} \right)}$	$T(s) = \frac{R_3}{R_2 + R_3} \frac{s + 1/R_1 C_1}{s + \frac{1}{C_1} \left( \frac{1}{R_2 + R_3} + \frac{1}{R_1} \right)}$	$T(s) = \frac{R_3}{R_2 + R_3} \frac{1 + s L_1 / R_1}{1 + s L_1 \left( \frac{1}{R_2 + R_3} + \frac{1}{R_1} \right)}$
---	---	---

Fig. 8.6

Es decir, la parte real (negativa en este caso) asociada al polo,  $s_p = \sigma_p$ , corresponderá a la *resonancia operacional* entre el elemento reactivo correspondiente y la *resistencia equivalente de Thévenin vista entre sus terminales*. Por otro lado, la parte real (negativa en este caso) asociada al cero,  $s_z = \sigma_z$ , corresponderá a la *resonancia operacional* del circuito tanque  $R_1 - C_1$  y  $R_1 - L_1$ , respectivamente. Esta asociación puede verse también en la distribución de polos y ceros en el plano complejo “ $s$ ” de la Fig. 8.7.

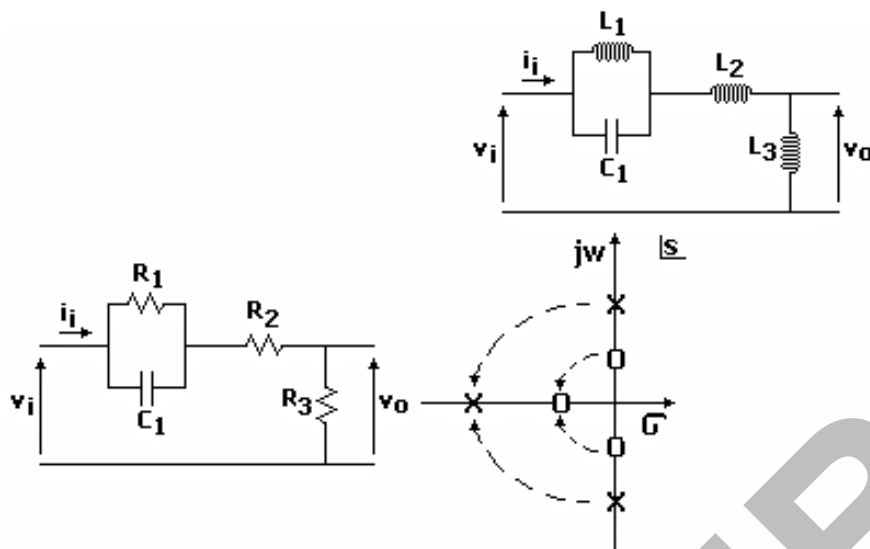


Fig. 8.7

De acuerdo con lo dicho, en circuitos con un sólo elemento reactivo, la *obtención del polo por simple inspección* se realizará pasivando el generador de excitación de entrada <sup>(10)</sup> y calculando la constante de tiempo asociada a dicho elemento reactivo (a través de qué resistencia equivalente se carga o descarga el capacitor en un R-C o se energiza o desenergiza el inductor en un R-L). Para la obtención del *cero por simple inspección* habrá que considerar nula la tensión sobre el terminal de salida (si la transferencia es de relación de tensiones o de tras-resistencia) o la corriente de salida nula (si la transferencia es de relación de corrientes o de transconductancia).

Notar que lo que se denomina normalmente frecuencia compleja es en realidad una *pulsación compleja*, representada por un número complejo cuya parte imaginaria representa la pulsación concreta que se puede obtener y medir en laboratorio con *onda senoidal*, o sea con  $\sigma = 0$ . En este caso, la *frecuencia física* de dicha onda resulta ser  $1/2\pi$  veces la *parte imaginaria de la pulsación compleja* ( $f = \omega/2\pi$ ). Es decir, para una señal del tipo  $[\text{Im}[Ae^{st}] = \text{Im}[Ae^{j\omega t}] = A \sin(\omega t)]$ , la parte imaginaria de la pulsación compleja representa la velocidad angular con que gira el fasor asociado a la señal. En el caso de una señal del tipo  $Ae^{st}$ , el fasor que gira a velocidad angular  $\omega$  variará el valor de su módulo como  $Ae^{\sigma t}$ . En este último caso la velocidad angular podrá admitirse constante sólo si  $\sigma \ll \omega$  (bajo amortiguamiento).

<sup>(10)</sup> Si el circuito está excitado mediante un generador ideal, se cortocircuitará si la señal proviene de un generador de tensión o se dejará abierto si proviene de uno de corriente, siendo distinta la incidencia sobre los polos y ceros del circuito. En el caso de un generador real, representado circuitalmente por su equivalente Thévenin, habrá que dejar en el circuito su impedancia que modificará los polos y ceros.

LACE - FLUBA