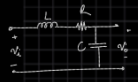
1- Calcular la transferencia del RLC a partir de A,B,C y D obtenidas para describir en espacio de estados.



$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{\frac{1}{sC}}{\frac{1}{sC} - sL + R}$$
$$\frac{1}{s^2LC + sCR + 1} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$v_o = v_c$
$x_1 = v_c$, $x_2 = i_L$ } Vector de estados
$u = v_i$ → Vector de entradas
$y = x_1$

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$
$\dot{x}: f(x,u) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}$

$\frac{dv_c}{dt} = \frac{1}{C} i_c \Rightarrow \frac{dv_c^{x_1}}{dt} = \frac{1}{C} i_L^{x_2}$ → $\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{C} x_2$

$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} v_L$

$v_L = v_i - R i_L - v_c$

$i = i_R = i_c = i_L$

$\frac{di_L^{x_2}}{dt} = \frac{1}{L}(v_i^{u} - R i_L^{x_2} - v_c^{x_1}) \rightarrow \frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{L}(u - Rx_2 - x_1)$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C} x_2 \\ \frac{1}{L}(-x_1 - Rx_2 + u) \end{bmatrix}$

Esto en forma vectorial sería
$\dot{x} = Ax + Bu$ con:

$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}$

Además $y = f(x,u)$ que en término vectorial se puede escribir como $y = Cx + Du$

Si $y = x_1 \Rightarrow C = [1 \ \ 0]$, $D = 0$

Sabemos que $\left.\begin{matrix} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{matrix}\right\}$ Aplicando Laplace

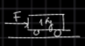
$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$
$sX(s) - AX(s) = x(0) + BU(s)$
$(sI - A)X(s) = x(0) + BU(s)$
$\Rightarrow X(s) = (sI-A)^{-1}[x(0) + BU(s)]$

$Y(s) = CX(s) + DU(s)$
$Y(s) = C(sI-A)^{-1}[x(0) + BU(s)] + DU(s)$
$Y(s) = C(sI-A)^{-1}x(0) + [C(sI-A)^{-1}B + D]U(s)$

→ Solo se puede definir función de transferencia si $x(0) = 0$ (condiciones iniciales son iguales a 0) ya que así queda
$Y(s) = [C(sI-A)^{-1}B + D]U(s)$
de forma tal que
$\frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI-A)^{-1}B + D$ – siendo esta la función de transferencia

Si $A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix}$, $C = [1 \ \ 0]$, $D = 0$ entonces $C(sI-A)^{-1}B + D = \frac{1}{s^2LC + sCR + 1}$ si da !!!

Ahora



Sabemos
$a = \ddot{q}$
$v = \dot{q}$
$F = ma$

Podemos tomar
$x_1 = q$, $x_2 = v$ } $v = \dot{q}$, $x_2 = \dot{x}_1$
Además $\dot{x}_2 = a = mF$
y podemos tomar $u = F$ → $u = m\dot{x}_2 \Rightarrow \dot{x}_2 = \frac{u}{m}$

Con lo cual
$y = x_1$ → la salida es la posición

$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ u/m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ u/m \end{bmatrix}$

$= x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix}}_{B} u$

Para el ejemplo se toma que $m = 1kg$

Teniendo en cuenta que
$\left.\begin{matrix} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{matrix}\right\}$

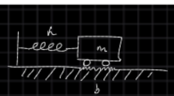
$y = \underbrace{[1 \ \ 0]}_{C} x + \underbrace{0}_{D} u$

Con lo cual
$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
$C = [1 \ \ 0]$
$D = 0$

$C(sI-A)^{-1}B + D = \frac{1}{s^2}$

2- Obtener la descripción en espacio de estados y la transferencia para el sistema masa, resorte, fricción:
   a. De la fuerza "$u = F$" como entrada a la posición "$q = y = x_1$" como salida.
   b. De la fuerza "$u = F$" como entrada a la velocidad "$v = y$" como salida en los siguientes dos casos:
      i. Con "$k = 0$". ¿De qué orden da el sistema en este caso?
      ii. Con "$k \neq 0$". ¿De qué orden da el sistema en este caso?

a)



Partimos de la ecuación: $F - k \cdot q - v \cdot b = m \cdot a$

Sabemos: $q = y = x_1$, $v = x_2$ → $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q \\ v \end{bmatrix}$
$u = F$
$\dot{x}_1 = v = x_2$

Tenemos que conseguir dos ecuaciones de la forma $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx + Du$

$\dot{x} = Ax + Bu$

$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}$

$\dot{x}_2 = \dot{v} = a \rightarrow \dot{x}_2 = \frac{1}{m}[F - kq - vb]$

$\dot{x}_2 = \frac{1}{m}[u - kx_1 - bx_2] = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{1}{m}u$

$\Rightarrow \dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{u}{m} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix}}_{B} u$

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix}$

$y = Cx + Du \rightarrow \underset{x_1}{y} = C\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + Du \Rightarrow x_1 = \underbrace{[1 \ \ 0]}_{C}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{0}_{D}u$

$C = [1 \ \ 0]$ $D = 0$

La transferencia está dada entonces por $C(sI-A)^{-1}B + D$
con $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix}$ $C = [1 \ \ 0]$ $D = 0$
Esto da como resultado una transferencia igual a $\frac{1}{ms^2 + bs + k}$!!!

b) Sabemos: $y = v = x_2$, $u = F$, $q = x_1$ → $\underbrace{x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}}$ Son los mismos que para el caso a)
A y B son iguales

Ahora $y = Cx + Du$
si $y = x_2 \Rightarrow C = [0 \ \ 1]$, $D = 0$
$C = [0 \ \ 1]$, $D = 0$

Con lo cual la transferencia se define como $C(sI-A)^{-1}B + D$ dando como resultado $\frac{s}{ms^2 + bs + k}$

i) Si $k \neq 0$ la transferencia sería $\frac{s}{k + ms^2 + bs}$ siendo un sistema de orden 2.
ii) Si $k = 0$ la transferencia sería $\frac{s}{ms^2 + bs} = \frac{s}{s(ms + b)} = \frac{1}{ms + b}$ siendo un sistema de orden 1.

1- Encuentre las antitransformadas:
   a. $F(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$
   b. $G(s) = \frac{s^3 + 5s^2 + 9s + 7}{(s+1)(s+2)}$
   c. $F(s) = \frac{2s + 12}{s^2 + 2s + 5}$
   d. $F(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s+1)^3}$

$f(t) = \sum_i \text{Res}\, F(s)\big|_{s=p_i} e^{p_i t} + \sum_k \text{Res}\, F(s) e^{st}\big|_{s=p_k}$

a) $F(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$ son polos simples en $s = -1$ y $s = -2$

$\text{Res}\, F(s)\big|_{s=-1} = \lim_{s\to -1} \frac{s+3}{\cancel{(s+1)}(s+2)}\cancel{(s+1)} = \lim_{s\to -1} \frac{s+3}{s+2} = \frac{2}{1} = 2$

$\text{Res}\, F(s)\big|_{s=-2} = \lim_{s\to -2} \frac{s+3}{(s+1)\cancel{(s+2)}}\cancel{(s+2)} = \lim_{s\to -2} \frac{s+3}{s+1} = \frac{1}{-1} = -1$

$f(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}$

b) $G(s) = \frac{s^3 + 5s^2 + 9s + 7}{(s+1)(s+2)}$ tiene dos polos sencillos en $s = -1$ y $s = -2$

$\text{Res}\, G(s)\big|_{s=-1} = \lim_{s\to -1} \frac{s^3 + 5s^2 + 9s + 7}{\cancel{(s+1)}(s+2)}\cancel{(s+1)} = \lim_{s\to -1} \frac{s^3 + 5s^2 + 9s + 7}{(s+2)} = \frac{-1+5-9+7}{1} = 2$

$\text{Res}\, G(s)\big|_{s=-2} = \lim_{s\to -2} \frac{s^3 + 5s^2 + 9s + 7}{\cancel{(s+2)}(s+1)}\cancel{(s+2)} = \lim_{s\to -2} \frac{s^3 + 5s^2 + 9s + 7}{(s+1)} = \frac{-8+20-18+7}{-1} = -1$

$g(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}$

c) $F(s) = \frac{2s + 12}{s^2 + 2s + 5}$

$s^2 + 2s + 5$
Tiene 2 polos complejos simples en $-1 \pm 2i$

$\text{Res}\, F(s)\big|_{s=-1+2i} = \lim_{s\to -1+2i} \frac{2s+12}{\cancel{(s+1-2i)}(s+1+2i)}\cancel{(s+1-2i)} = \lim_{s\to -1+2i} \frac{2s+12}{(s+1+2i)} = 1 - \frac{5}{2}i$

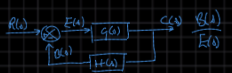
$\text{Res}\, F(s)\big|_{s=-1-2i} = \lim_{s\to -1-2i} \frac{2s+12}{(s+1-2i)\cancel{(s+1+2i)}}\cancel{(s+1+2i)} = \lim_{s\to -1-2i} \frac{2s+12}{(s+1-2i)} = 1 + \frac{5}{2}i$

$\Rightarrow f(t) = (1 - \frac{5}{2}i)e^{-1+2i} + (1 + \frac{5}{2}i)e^{-1-2i}$

d) $F(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s+1)^3}$ $(s+1)^3$
Es un polo múltiple de grado 3 en -1

$\text{Res}\, F(s)\big|_{s=-1 \ (3)} = \frac{1}{(3-1)!} \lim_{s\to -1} \frac{d^2}{ds^2}\left[\frac{s^2 + 2s + 3}{\cancel{(s+1)^3}}\cancel{(s+1)^3} e^{st}\right] = e^{-t}t^2 + e^{-t}$

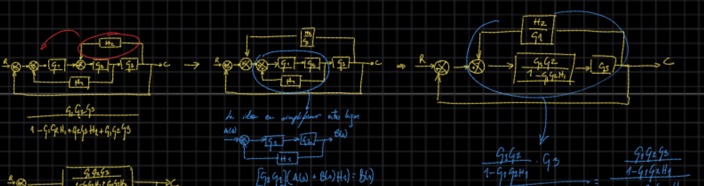
Ejercicios Libro (Ogata).



$\frac{B(s)}{E(s)}$

$R(s) - B(s) = E(s)$
$E(s)G(s) = C(s)$
$C(s)H(s) = B(s)$

$\Rightarrow E(s) = \frac{C(s)}{G(s)}$ } $\frac{B(s)}{E(s)} = \frac{\cancel{C(s)}H(s)}{\frac{\cancel{C(s)}}{G(s)}} = H(s)G(s)$



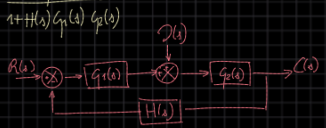
$\frac{G_1G_2G_3}{1 - G_1G_2H_1 + G_2G_3H_2 + G_1G_2G_3}$

La idea es simplificar este lazo

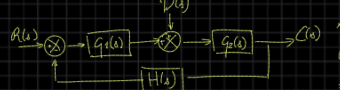
$[G_2G_1](A(s) + B(s)H_1) = B(s)$
$G_2G_1A + G_2G_1H_1B = B$
$G_2G_1A = B[1 - G_2G_1H_1]$

$\frac{\frac{G_1G_2}{1-G_1G_2H_1} \cdot G_3}{1 + \frac{\cancel{G_1}G_2}{1-G_1G_2H_1} G_3 \frac{H_2}{\cancel{G_1}}} = \frac{\frac{G_1G_2G_3}{1-G_1G_2H_1}}{1 + \frac{G_2G_3H_2}{1-G_1G_2H_1}}$

$C_D(s) = [-C_D(s)H(s)G_1(s) + D(s)]G_2(s) = -C_D(s)H(s)G_1(s)G_2(s) + D(s)G_2(s)$
$\Rightarrow C_D(s) + C_D(s)H(s)G_1(s)G_2(s) = C_D(s)[1 + H(s)G_1(s)G_2(s)] = D(s)G_2(s)$
$\Rightarrow \frac{C_D(s)}{D(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + H(s)G_1(s)G_2(s)}$



$\frac{C_D(s)}{D(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$
$\Rightarrow C_D(s) + C_D(s)G_1(s)G_2(s)H(s) = G_2(s)D(s)$
$C_D(s) = -C_D(s)G_1(s)G_2(s)H(s) + G_2(s)D(s)$
$C_D(s) = G_2(s)[-C_D(s)G_1(s)H(s) + D(s)]$



Ahora, asumiendo que $D(s) = 0$
$C_R(s) = (R(s) - C_R(s)H(s))G_1(s)G_2(s) \Rightarrow C_R(s) + C_R(s)H(s)G_1(s)G_2(s)$
$= C_R(s)[1 + H(s)G_1(s)G_2(s)] = R(s)G_1(s)G_2(s)$

$C=\left[\frac{G_1G_2G_3}{1-G_1G_2H_1+G_2G_3H_2}\right](R-C) \Rightarrow \left[1+\frac{G_1G_2G_3}{1-G_1G_2H_1+G_2G_3H_2}\right]C=\frac{G_1G_2G_3}{1-G_1G_2H_1+G_2G_3H_2}R$

$A\left[\frac{G_2G_1}{1-G_2G_1H}\right]=B \rightarrow$ Esta es la nueva transferencia.

$=\dfrac{\dfrac{G_1G_2G_3}{\cancel{1-G_1G_2H_1}}}{\dfrac{1-G_1G_2H_1+G_2G_3H_2}{\cancel{1-G_1G_2H_1}}}=\dfrac{G_1G_2G_3}{1-G_1G_2H_1+G_2G_3H_2}$

$R\left[\dfrac{\dfrac{G_1G_2G_3}{\cancel{1-G_1G_2H_1+G_2G_3H_2}}}{\dfrac{1-G_1G_2H_1+G_2G_3H_2+G_1G_2G_3}{\cancel{1-G_1G_2H_1+G_2G_3H_2}}}\right]=C$

$C=R\left[\dfrac{G_1G_2G_3}{1-G_1G_2H_1+G_2G_3H_2+G_1G_2G_3}\right]$

$R \rightarrow \boxed{\dfrac{G_1G_2G_3}{1-G_1G_2H_1+G_2G_3H_2+G_1G_2G_3}} \rightarrow C$

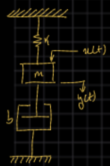
$\Rightarrow \dfrac{C_R(s)}{R(s)}=\dfrac{G_1(s)G_p(s)}{1+G_1(s)G_p(s)H(s)}$

Observe que el numerador de la función de transferencia en lazo cerrado $C(s)/R(s)$ es el producto de la función de transferencia en el camino directo. El denominador de $C(s)/R(s)$ es igual a

$$1+\sum(\text{producto de las funciones de transferencia alrededor de cada lazo})$$
$$=1+(-G_1G_2H_1+G_2G_3H_2+G_1G_2G_3)$$
$$=1-G_1G_2H_1+G_2G_3H_2+G_1G_2G_3$$

(El lazo de realimentación positiva da lugar a un término negativo en el denominador.)

CLAVE



$u(t)=F$

Aplicando Newton:

$\sum F=ma=m\ddot{y}$

$\sum F=u-ky-b\dot{y}=m\ddot{y} \Rightarrow u=m\ddot{y}+b\dot{y}+ky$

Definimos $x_1=y(t)$ y $x_2=\dot{y}(t)$

$\Rightarrow \dot{x}_1=\dot{y}(t) \wedge \dot{x}_2=\ddot{y}(t)$

$\dot{x}_1=x_2$

$u=m\ddot{y}+b\dot{y}+ky$

$u=m\dot{x}_2+bx_2+kx_1$

$\Rightarrow m\dot{x}_2=u-bx_2-kx_1$

$\dot{x}_2=\frac{1}{m}[u-bx_2-kx_1]$

$\dot{x}_2=-\frac{k}{m}x_1-\frac{b}{m}x_2+\frac{1}{m}u$

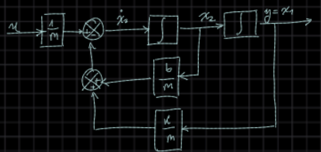
$\dot{x}=Ax+Bu$

$y=Cx+Du$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2\\ -\frac{k}{m}x_1-\frac{b}{m}x_2+\frac{1}{m}u\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2\\ -\frac{k}{m}x_1-\frac{b}{m}x_2\end{bmatrix}+\overbrace{\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{m}\end{bmatrix}}^{B}u$$

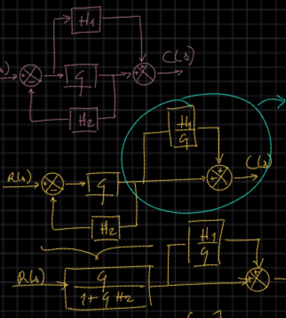
$$\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m}\end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{m}\end{bmatrix}u$$

$y=Cx+Du \Rightarrow y=x_1=\underbrace{[1\quad 0]}_{C}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\underbrace{0}_{D}u$



La salida $y=x_1$ además $\dot{x}_1=x_2$, $x_1=\int x_2$

A-2-1)



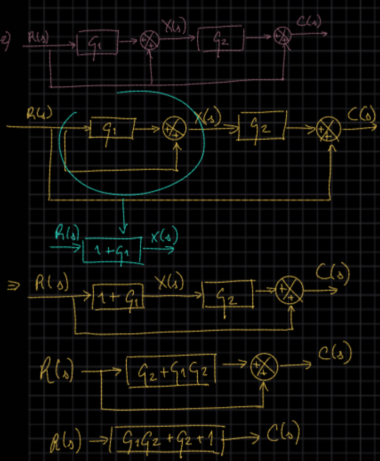
$C(s)=A(s)\frac{H_1}{G}+A(s)$

$C(s)=A(s)\left[\frac{H_1}{G}+1\right]$

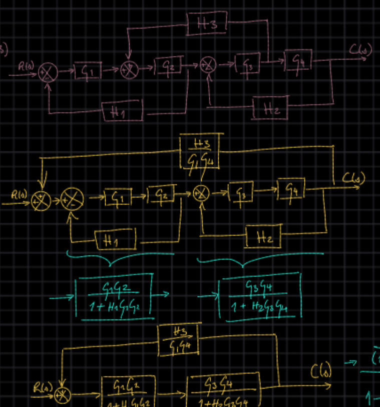
$\frac{C(s)}{A(s)}=\left[1+\frac{H_1}{G}\right]$

$C(s)=\left[\frac{G}{1+GH_2}\left(\frac{H_1}{\cancel{G}}\right)+\frac{G}{1+GH_2}\right]R(s) \Rightarrow \frac{C(s)}{R(s)}=\frac{H_1+G}{1+GH_2}$

A-2-2)



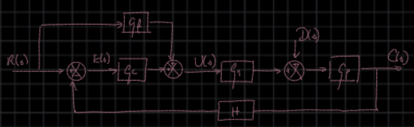
A-2-3)



$C(s)$

$\dfrac{\dfrac{G_1G_2G_3G_4}{(1+H_1G_1G_2)(1+H_2G_3G_4)}}{1-\dfrac{G_1G_2G_3G_4H_3}{G_2G_3(1+H_1G_1G_2)(1+H_2G_3G_4)}}$

$=\dfrac{\dfrac{G_1G_2G_3G_4}{\cancel{(1+H_1G_1G_2)(1+H_2G_3G_4)}}}{\dfrac{(1+H_1G_1G_2)(1+H_2G_3G_4)-G_1G_4H_3}{\cancel{(1+H_1G_1G_2)(1+H_2G_3G_4)}}}=\boxed{\dfrac{G_1G_2G_3G_4}{1+G_3G_4H_2+G_1G_2H_1+G_1G_2G_3G_4H_1H_2-G_1G_4H_3}}$



Calcular $\frac{C(s)}{R(s)}$

$\rightarrow C(s)=G_p[U(s)G_1+D(s)]$

$U(s)=E(s)G_c+R(s)G_f$

$E(s)=R(s)-HC(s)$

$U(s)=R(s)G_c-HG_cC(s)+R(s)G_f$

$C(s)=G_p\left[\left(R(s)G_c-HG_cC(s)+R(s)G_f\right)G_1+\cancel{D(s)}\right]$ $D(s)=0$

$C(s)=G_pG_1R(s)G_c-G_pG_1HG_cC(s)+G_pG_1R(s)G_f$

$C(s)\left[1+G_pG_1HG_c\right]=R(s)\left[G_pG_1(G_c+G_f)\right]$

$\Rightarrow \frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G_pG_1(G_c+G_f)}{1+G_pG_1HG_c}$

Calcular $\frac{C(s)}{D(s)}$

$R(s)=0$

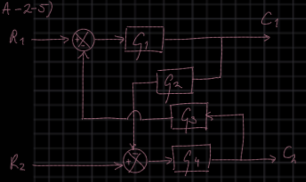
$C(s)=G_p\left[\left(\cancel{R(s)G_c}-HG_cC(s)+\cancel{R(s)G_f}\right)G_1+D(s)\right]$

$C(s)=G_p\left[\left(-HG_cC(s)\right)G_1+D(s)\right]$

$C(s)\left[1+HG_1G_pG_c\right]=G_pD(s)$

$\frac{C(s)}{D(s)}=\frac{G_p}{1+HG_1G_pG_c}$

A-2-5)



Encontrar $\frac{C_1(s)}{R_1(s)}$, $\frac{C_1(s)}{R_2(s)}$, $\frac{C_2(s)}{R_1(s)}$, $\frac{C_2(s)}{R_2(s)}$

$C_1=G_1(R_1-G_3C_2)$

$C_2=G_4(R_2-G_2C_1)$

$C_1=G_1\left[R_1-G_3G_4(R_2-G_2C_1)\right]$

$C_1=G_1R_1-G_1G_3G_4(R_2-G_2C_1)$

$C_1=G_1R_1-G_1G_3G_4R_2+G_1G_2G_3G_4C_1$

$C_1\left[1-G_1G_2G_3G_4\right]=G_1R_1-G_1G_3G_4R_2$

$C_1=\frac{G_1}{1-G_1G_2G_3G_4}R_1-\frac{G_1G_3G_4}{1-G_1G_2G_3G_4}R_2$

$C_2=G_4\left[R_2-G_1G_2(R_1-G_3C_2)\right]$

$C_2=G_4R_2-G_1G_2G_4(R_1-G_3C_2)$

$C_2=G_4R_2-G_1G_2G_4R_1+G_1G_2G_3G_4C_2$

$C_2\left[1-G_1G_2G_3G_4\right]=G_4R_2-G_1G_2G_4R_1$

$C_2=\frac{-G_1G_2G_4}{1-G_1G_2G_3G_4}R_1+\frac{G_4}{1-G_1G_2G_3G_4}R_2$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}C_1\\ C_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{G_1}{1-G_1G_2G_3G_4} & \frac{-G_1G_3G_4}{1-G_1G_2G_3G_4}\\ \frac{-G_1G_2G_4}{1-G_1G_2G_3G_4} & \frac{G_4}{1-G_1G_2G_3G_4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}R_1\\ R_2\end{bmatrix}$$

$\frac{C_1}{R_1}$ $\frac{C_1}{R_2}$ $\frac{C_2}{R_1}$ $\frac{C_2}{R_2}$

A-2-6)

Demuestre que, para el sistema descrito por la ecuación diferencial

$$\dddot{y}+a_1\ddot{y}+a_2\dot{y}+a_3y=b_0\dddot{u}+b_1\ddot{u}+b_2\dot{u}+b_3u$$

las ecuaciones de estado y de salida se obtienen, respectivamente, mediante

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -a_3 & -a_2 & -a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{bmatrix}u$$

y

$$y=[1\quad 0\quad 0]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\beta_0u$$

donde las variables de estado se definen mediante

$$x_1=y-\beta_0u$$
$$x_2=\dot{y}-\beta_0\dot{u}-\beta_1u=\dot{x}_1-\beta_1u$$
$$x_3=\ddot{y}-\beta_0\ddot{u}-\beta_1\dot{u}-\beta_2u=\dot{x}_2-\beta_2u$$

y

$$\beta_0=b_0$$
$$\beta_1=b_1-a_1\beta_0$$
$$\beta_2=b_2-a_1\beta_1-a_2\beta_0$$
$$\beta_3=b_3-a_1\beta_2-a_2\beta_1-a_3\beta_0$$

$\dddot{y}+a_1\ddot{y}+a_2\dot{y}+a_3y=b_0\dddot{u}+b_1\ddot{u}+b_2\dot{u}+b_3u \rightarrow \dddot{y}=-a_1\ddot{y}-a_2\dot{y}-a_3y+b_0\dddot{u}+b_1\ddot{u}+b_2\dot{u}+b_3u$

$\mathrm{I} \rightarrow -a_1\ddot{y}-a_2\dot{y}-a_3y+\beta_0\dddot{u}+\beta_1\ddot{u}+a_1\beta_0\ddot{u}+\beta_2\dot{u}+a_1\beta_1\dot{u}+a_2\beta_0\dot{u}+\beta_3u+a_1\beta_2u+a_2\beta_1u+a_3\beta_0u$

$x_1=y-\beta_0u$

$x_2=\dot{y}-\beta_0\dot{u}-\beta_1u=\dot{x}_1-\beta_1u$

$x_3=\ddot{y}-\beta_0\ddot{u}-\beta_1\dot{u}-\beta_2u=\dot{x}_2-\beta_2u$

$\dot{x}_1=\dot{y}-\beta_0\dot{u}=x_2+\beta_1u$

$\dot{x}_2=x_3+\beta_2u$

$\dot{x}_3=\dddot{y}-\beta_0\dddot{u}-\beta_1\ddot{u}-\beta_2\dot{u}=-a_3x_3-a_2x_2-a_1x_1+\beta_3u$

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -a_1 & -a_2 & -a_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{bmatrix}u$$

$\beta_0=b_0$

$\beta_1=b_1-a_1\beta_0 \rightarrow b_1=\beta_1+a_1\beta_0$

$\beta_2=b_2-a_1\beta_1-a_2\beta_0 \rightarrow b_2=\beta_2+a_1\beta_1+a_2\beta_0$

$\beta_3=b_3-a_1\beta_2-a_2\beta_1-a_3\beta_0 \rightarrow b_3=\beta_3+a_1\beta_2+a_2\beta_1+a_3\beta_0$

I

$\dot{x}_3=-a_1\ddot{y}-a_2\dot{y}-a_3y+\cancel{\beta_0\dddot{u}}+\cancel{\beta_1\ddot{u}}+a_1\beta_0\ddot{u}+\cancel{\beta_2\dot{u}}+a_1\beta_1\dot{u}+a_2\beta_0\dot{u}+\beta_3u+a_1\beta_2u+a_2\beta_1u+a_3\beta_0u-\cancel{\beta_0\dddot{u}}-\cancel{\beta_1\ddot{u}}-\cancel{\beta_2\dot{u}}$

$\dot{x}_3=-a_1\ddot{y}+a_1\beta_0\ddot{u}+a_1\beta_1\dot{u}+a_1\beta_2u-a_2\dot{y}+a_2\beta_0\dot{u}+a_2\beta_1u-a_3y+a_3\beta_0u+\beta_3u$

$=-a_1(\underbrace{\ddot{y}-\beta_0\ddot{u}-\beta_1\dot{u}-\beta_2u}_{x_3})-a_2(\underbrace{\dot{y}-\beta_0\dot{u}-\beta_1u}_{x_2})-a_3(\underbrace{y-\beta_0u}_{x_1})+\beta_3u=-a_3x_3-a_2x_2-a_1x_1+\beta_3u$

Ahora: $x_1=y-\beta_0u \Rightarrow y=x_1+\beta_0u \rightarrow y=[1\quad 0\quad 0]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\beta_0u$

A-2-7)

Obtenga la ecuación en el espacio de estados y la ecuación de salida definida por

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{2s^3+s^2+s+2}{s^3+4s^2+5s+2}$$

$\frac{Y(s)}{U(s)}=G(s) \Rightarrow G(s)=\frac{2s^3+s^2+s+2}{s^3+4s^2+5s+2}$

$U(s)G(s)=Y(s)$

$U(s) \rightarrow \boxed{G(s)} \rightarrow Y(s)$

$U(s)\,\frac{2s^3+s^2+s+2}{s^3+4s^2+5s+2}=Y(s)$

$2s^3U(s)+s^2U(s)+sU(s)+2U(s)=s^3Y(s)+4s^2Y(s)+5sY(s)+2Y(s)$

Aplicando $\mathcal{L}^{-1}$ (y condiciones iniciales $=0$)

Es hacer el mismo desarrollo del 4-2-6

$a_1=4$ $b_0=2$ $\beta_0=2$

$$2\dddot{u}+\ddot{u}+\dot{u}+2u=\dddot{y}+4\ddot{y}+5\dot{y}+2y$$

$b_0 \quad b_1 \quad b_2 \quad b_3 \qquad a_1 \quad a_2 \quad a_3$

$a_2=5 \quad a_3=2 \qquad b_1=1 \quad b_2=1 \quad b_3=2$

$\beta_1=b_1-a_1\beta_0=1-4\cdot 2=-7$

$\beta_2=b_2-a_1\beta_1-a_2\beta_0=1-4(-7)-5\cdot 2=1+28-10=19$

$\beta_3=b_3-a_1\beta_2-a_2\beta_1-a_3\beta_0=2-4\cdot 19-5(-7)-2\cdot 2=2-76+35-4=-43$

$\beta_0=b_0$

$\beta_1=b_1-a_1\beta_0$

$\beta_2=b_2-a_1\beta_1-a_2\beta_0$

$\beta_3=b_3-a_1\beta_2-a_2\beta_1-a_3\beta_0$

$x_1=y-\beta_0 u$

$x_2=\dot{y}-\beta_0\dot{u}-\beta_1 u=\dot{x}_1-\beta_1 u$

$x_3=\ddot{y}-\beta_0\ddot{u}-\beta_1\dot{u}-\beta_2 u=\dot{x}_2-\beta_2 u$

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-2&-5&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-7\\19\\-43\end{bmatrix}u$$

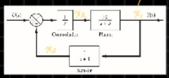
$x_1=y-2u \qquad y-\beta_0 u$

$x_2=\dot{y}-2\dot{u}+7u \qquad \dot{y}-\beta_0\dot{u}-\beta_1 u$

$x_3=\ddot{y}-2\ddot{u}+7\dot{u}-19u \qquad \ddot{y}-\beta_0\ddot{u}-\beta_1\dot{u}-\beta_2 u$

$$y=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+2u$$

A-2-8)



$y=X_1$

Consiga el sistema de estados

Aplicando $\mathcal{L}^{-1}$

$X_1(s)=X_2(s)\frac{10}{s+5}$ → $\frac{X_1(s)}{X_2(s)}=\frac{10}{s+5}$

$sX_1+5X_1=10X_2$

$\dot{x}_1+5x_1=10x_2$

$\dot{x}_1=-5x_1+10x_2$

$X_3(s)=X_1(s)\frac{1}{s+1}$ → $\frac{X_3(s)}{X_1(s)}=\frac{1}{s+1}$

$sX_3+X_3=X_1$

$\dot{x}_3+x_3=x_1$

$\dot{x}_3=x_1-x_3$

$X_2(s)=\frac{1}{s}[U(s)-X_3(s)]$ → $\frac{X_2(s)}{U(s)-X_3(s)}=\frac{1}{s}$

$sX_2=U-X_3$

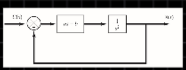
$\dot{x}_2=u-x_3$

$\dot{x}_2=-x_3+u$

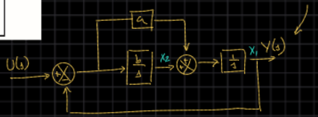
$$\dot{x}=\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5&10&0\\0&0&-1\\1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+0u$$

A-2-9)



$(as+b)\left(\frac{1}{s^2}\right)=\left(\frac{as+b}{s^2}\right)=\left(\frac{a}{s}+\frac{b}{s^2}\right)=\frac{1}{s}\left(a+\frac{b}{s}\right)$



$X_1=\frac{1}{s}\left[X_2+a(U-X_1)\right]$

$sX_1=X_2+aU-aX_1$

$sX_1+aX_1=X_2+aU$

$\dot{x}_1+ax_1=x_2+au$

$\dot{x}_1=-ax_1+x_2+au$

$X_2=\frac{b}{s}(U-X_1)$

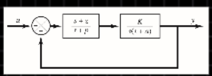
$sX_2=bU-bX_1$

$\dot{x}_2=-bx_1+bu$

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-a&1\\-b&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

A-2-10)



$\frac{K}{s(s+a)}=\frac{K}{s}\cdot\frac{1}{s+a}$

$\frac{s+z}{s+p}=1+A\rightarrow A=\frac{s+z}{s+p}-1=\frac{s+z-s-p}{s+p}=\frac{z-p}{s+p}$

$\rightarrow\frac{s+z}{s+p}=1+\frac{z-p}{s+p}$

$\left(\frac{s+z}{s+p}\right)=\frac{s+p+z-p}{s+p}=\frac{\cancel{s+p}}{\cancel{s+p}}+\frac{z-p}{s+p}$

$X_1=\frac{1}{s+a}X_2$

$sX_1+aX_1=X_2$

$sX_1=-aX_1+X_2$

$\dot{x}_1=-ax_1+x_2$

$X_2=\frac{K}{s}\left[X_3+U-X_1\right]$

$sX_2=-KX_1+KX_3+KU$

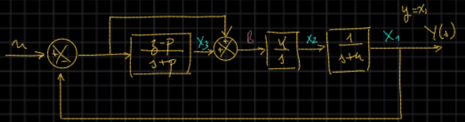
$\dot{x}_2=-Kx_1+Kx_3+Ku$

$X_3=\left(\frac{z-p}{s+p}\right)(U-X_1)$

$sX_3+pX_3=(p-z)X_1+(z-p)U$

$sX_3=(p-z)X_1-pX_3+(z-p)U$

$\dot{x}_3=(p-z)x_1-px_3+(z-p)u$

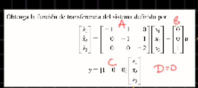


$$\dot{x}=\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-a&1&0\\-K&0&K\\(p-z)&0&-p\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\K\\(z-p)\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

$B=A\left[1+\frac{z-p}{s+p}\right]\rightarrow\frac{B}{A}=\frac{s+p+z-p}{s+p}=\frac{s+z}{s+p}$

A-2-11)



Obtenga la función de transferencia del sistema definido por

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&1&0\\0&-1&1\\0&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

A B C $D=0$

$\dot{x}_1=-x_1+x_2$

$\dot{x}_2=-x_2+x_3$

$\dot{x}_3=-2x_3+u$

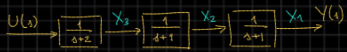
$y=x_1 \qquad Y=X_1$

Aplicando $\mathcal{L}$

$sX_1=-X_1+X_2\rightarrow X_1(s+1)=X_2\longrightarrow X_1=\left[\frac{1}{s+1}\right]X_2$

$sX_2=-X_2+X_3\rightarrow X_2(s+1)=X_3\longrightarrow X_2=\left[\frac{1}{s+1}\right]X_3$

$sX_3=-2X_3+U\rightarrow X_3(s+2)=U\rightarrow X_3=\left[\frac{1}{s+2}\right]U$



$U(s)\left[\frac{1}{(s+2)(s+1)^2}\right]=Y(s)\rightarrow\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{(s+2)(s+1)^2}$

$\dot{x}=Ax+Bu$

$y=Cx+Du$

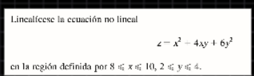
$sX=AX+BU\rightarrow X(sI-A)=BU$

$X=(sI-A)^{-1}BU$

$Y=CX+DU\rightarrow Y=(C(sI-A)^{-1}B+D)U\rightarrow\frac{Y}{U}=C(sI-A)^{-1}B+D$

Se puede calcular también con las matrices

A-2-13)



Linealícese la ecuación no lineal

$$z=x^2+4xy+6y^2$$

en la región definida por $8\leqslant x\leqslant 10$, $2\leqslant y\leqslant 4$.

$z=f(x,y)\Rightarrow z=\underbrace{f(\bar{x},\bar{y})}_{\bar{z}}+\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x-\bar{x})+\frac{\partial f}{\partial y}(y-\bar{y})\right]$

$z=x^2+4xy+6y^2 \qquad 8\leq x\leq 10,\ 2\leq y\leq 4$

$\bar{x}=9,\ \bar{y}=3 \quad \bar{z}=(9)^2+4(9\cdot 3)+6(3)^2=81+108+54$, $\bar{z}=243$

$z-\bar{z}=K_1(x-\bar{x})+K_2(y-\bar{y})\longrightarrow z=243+30(x-9)+72(y-3)$

$K_1=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\bar{x},y=\bar{y}} \qquad K_2=\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x=\bar{x},y=\bar{y}}$

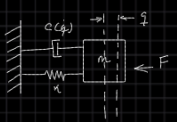
$K_1=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\bar{x},y=\bar{y}}=2\bar{x}+4\bar{y}=2(9)+4(3)=18+12=30$

$K_2=\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x=\bar{x},y=\bar{y}}=4\bar{x}+12\bar{y}=4(9)+12(3)=36+36=72$

$z=243+30x-270+72y-216$

$z=-243+30x+72y$

$z-30x-72y+243=0$



$\Sigma F:\ F-c\dot{q}-kq=m\ddot{q}$

$F=m\ddot{q}+c\dot{q}-kq$

sea $x_1=q=y$, $x_2=\dot{q}$, $u=F$

$u=m\dot{x}_2+cx_2+kx_1$

$\dot{x}_2=-\frac{k}{m}x_1-\frac{c}{m}x_2+\frac{1}{m}u$

$y=x_1$

$\dot{x}_1=x_2$

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\-\frac{k}{m}&-\frac{c}{m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{m}\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

$\ddot{q}+2\zeta\omega_0\dot{q}+\omega_0^2 q=0$

sea $x_1=q$

$x_2=\dot{q}/\omega_0=\dot{x}_1/\omega_0\rightarrow\dot{x}_1=\omega_0 x_2$

$\dot{x}_2\omega_0+2\zeta\omega_0^2x_2+\omega_0^2x_1=0$

$\rightarrow\dot{x}_2=-2\zeta\omega_0x_2-\omega_0x_1$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\omega_0x_2\\-\omega_0x_1-2\zeta\omega_0x_2\end{bmatrix}=F(x)$$

Linealización Jacobiana

$\frac{dx}{dt}=f(x,u) \qquad x=x_e\rightarrow x$ de equilibrio

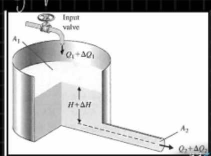
$y=h(x,u) \qquad u=u\rightarrow u$ de equilibrio

Además $z=x-x_e$, $v=u-u_e$, $w=y-h(x_e,u_e)$ $\Rightarrow\frac{dz}{dt}=Az+Bv$, $w=Cz+Dv$

$A=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_e,u_e)} \qquad B=\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(x_e,u_e)}$

$C=\left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{(x_e,u_e)} \qquad D=\left.\frac{\partial h}{\partial u}\right|_{(x_e,u_e)}$

Ejemplo:



$A_1=\frac{\pi}{4}m^2$

$A_2=\frac{\pi}{400}m^2$

Punto de equilibrio

$H^*=1m$

$Q^*=34{,}77\ kg/s$

Cantidad de agua

$m=\rho A_1 H$

Su variación

$\dot{m}=\rho A_1\dot{H}$

$\dot{m}=Q_1-Q_2$

Agua que entra menos la que sale

Por definición $Q_2=\rho A_2 v_2$ $\Rightarrow\dot{m}=Q_1-\rho A_2 v_2$

Bernoulli (energías):

$\frac{1}{2}\rho v_1^2+P_1+\rho gH=\frac{1}{2}\rho v_2^2+P_2$

→ Simplificaciones

$P_1=P_2=0$ (son presiones relativas)

$v_1\rightarrow 0$ (el nivel baja muy despacio)

$\Rightarrow\cancel{\rho}gH=\frac{1}{2}\cancel{\rho}v_2^2\Rightarrow v_2=\sqrt{2gH}$

$\dot{m}=\rho A_1\dot{H}$

$\dot{m}=Q_1-\rho A_2 v_2$

$v_2=\sqrt{2gH}$

$\rho A_1\dot{H}=Q_1-\rho A_2\sqrt{2gH}$

$\Rightarrow\dot{H}=\frac{-\rho A_2}{\rho A_1}v_2+\frac{Q}{\rho A_1}$

$\dot{H}=-\underbrace{\left(\frac{A_2}{A_1}\sqrt{2g}\right)}_{K_1}\sqrt{H}+\underbrace{\frac{1}{\rho A_1}}_{K_2}Q$

$Q_2=\rho A_2\sqrt{2gH}=\rho A_2\sqrt{2g}\sqrt{H}$

$\Rightarrow\dot{x}=f(x,u)=K_1\sqrt{x}+K_2u$

$y=h(x,u)=K_3\sqrt{x}$

Simplificando $K_1=-1$, $K_2=K_3=1$

$x_e,y_e,u_e \qquad z=x-x_e$

$\dot{x}=-\sqrt{x}+u$, $y=\sqrt{x}$

$\frac{dz}{dt}=Az+Bv\rightarrow\dot{z}=-\frac{1}{2}z+v$

$A=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_e,u_e)}=\frac{dx}{dt}(K_1\sqrt{x})\Big|_{x_e}=\left.\frac{K_1}{2\sqrt{x}}\right|_{x_e}=\frac{K_1}{2\sqrt{x_e}}=-\frac{1}{2}$

$w=Cz+Dv\rightarrow w=\frac{1}{2}z$

$C=\left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{(x_e,u_e)}=\frac{dx}{dt}(K_3\sqrt{x})\Big|_{x_e}=\left.\frac{K_3}{2\sqrt{x}}\right|_{x_e}=\frac{K_3}{2\sqrt{x_e}}=\frac{1}{2}$

La transferencia $C(sI-A)^{-1}B+D$ para la linealización sería

$(sI-A)^{-1}=\left(s-\frac{K_1}{2\sqrt{x_e}}\right)^{-1}=\left(\frac{2s\sqrt{x_e}-K_1}{2\sqrt{x_e}}\right)^{-1}=\frac{2\sqrt{x_e}}{2s\sqrt{x_e}-K_1}$

Definimos $u = Q_1$ (entrada de la llave)
$y = Q_2$ (salida del tanque)
$x = H$

$\dot{x} = k_1\sqrt{x} + k_2 u$
$y = k_3\sqrt{x}$
si $x_e = u_e = y_e = 1$

$v = u - u_e$
$w = y - h(x_e, u_e)$

$\dot{z} = \frac{k_1}{2\sqrt{x_e}} z + k_2 v = \frac{-1}{2} z + v$

$w = \frac{k_3}{2\sqrt{x_e}} z = \frac{1}{2} z$

$C(sI-A)^{-1}B = \frac{k_3}{2\sqrt{x_e}} \left(\frac{2\sqrt{x_e}}{2s\sqrt{x_e} - k_1} \right) \cdot k_2 = \frac{k_2 k_3}{2s\sqrt{x_e} - k_1}$

$= \frac{1}{2s+1} = \frac{1/2}{s + 1/2}$

Realizaciones

Sea n el orden del denominador $a(u)$
Sea m el orden del numerador $b(u)$
Si $m \leq n$ la transferencia es propia
→ Si $m < n$ es estrictamente propia
→ Si $m = n$ es transferencia bipropia
Si $m > n$ la transferencia es impropia

$$\begin{array}{r|l} & 32 \\ s^2+2s+1 & 32s^2+8s+49 \\ & -32s^2-64s-32 \\ \hline & -56s+17 \end{array}$$

$G(s) = \frac{\beta(s)}{a(s)} = \frac{b(s)}{a(s)} + d$

$\beta(s) = b(s) + d \cdot a(s)$

$G(s) = \frac{32s^2+8s+49}{s^2+2s+1} = 32 + \frac{-56s+17}{s^2+2s+1}$

$32s^2+8s+49 \to \beta(s)$; $32 \to d$; $-56s+17 \to b(s)$; $s^2+2s+1 \to a(s)$

Constante

Parte estrictamente propia

En sistema de estados NO se pueden representar sistemas impropios.

$G(s) = C(sI-A)^{-1}B + D = C(sI-A)^{-1}B + d$

$(sI-A)^{-1} = \frac{(Adj(sI-A))^T}{|sI-A|}$

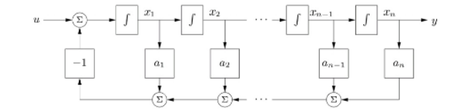
- $Adj(sI-A)$: sus elementos son polinomios de orden $\leq n-1$.
- $C(sI-A)^{-1}B$ es la parte estrictamente propia.
- Si $D \neq 0$ la transferencia será bipropia, pero nunca impropia.

$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_{n-1} x_{n-1} + a_n x_n = u \Rightarrow \frac{d^n y}{dt^n} = u - a_1 x_1 - a_2 x_2 - \dots - a_{n-1} x_{n-1} - a_n x_n$

Grado Relativo "n"

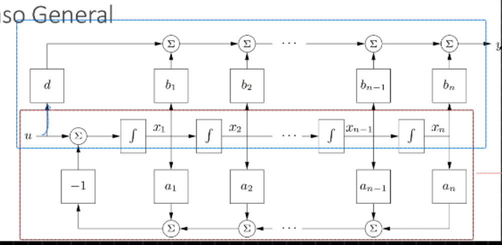
$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y = u$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d^{n-1}y/dt^{n-1} \\ d^{n-2}y/dt^{n-2} \\ \vdots \\ dy/dt \\ y \end{bmatrix} \qquad \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 x_1 - \dots - a_n x_n \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$y = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_n x_n + du$$

Caso General



→ De esta parte sale que

$y = [b_1 \; b_2 \; \cdots \; b_{n-1} \; b_n] x + du$

De esta parte sale que

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$F(s) = \frac{s^2+2s+3}{(s+1)^3}$ $\qquad F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_1}{s+1} + \frac{b_2}{(s+1)^2} + \frac{b_3}{(s+1)^3}$

$(s+1)^3 \frac{B(s)}{A(s)} = b_1(s+1)^2 + b_2(s+1) + b_3$ $\qquad \frac{d}{ds}\left[(s+1)^3 \frac{B(s)}{A(s)}\right] = b_2 + 2b_1(s+1)$

$\left[(s+1)^3 \frac{B(s)}{A(s)}\right]_{s=-1} = b_3$ $\qquad \frac{d}{ds}\left[(s+1)^3 \frac{B(s)}{A(s)}\right]_{s=-1} = b_2$

$\frac{d^2}{ds^2}\left[(s+1)^3 \frac{B(s)}{A(s)}\right] = 2b_1$

En matlab se puede usar la función "residue" para calcular los coeficientes de la descomposición.

$F(s) = \frac{s^2+2s+3}{(s+1)^3} = \frac{b_1}{(s+1)^3} + \frac{b_2}{(s+1)^2} + \frac{b_3}{(s+1)} \Rightarrow \frac{s^2+2s+3}{(s+1)^3} = \frac{2}{(s+1)^3} + \frac{1}{(s+1)}$

$(s+1)^3 F(s) = b_1 + (s+1)b_2 + (s+1)^2 b_3$

$s^2+2s+3 = b_1 + (s+1)b_2 + (s+1)^2 b_3$

$s^2+2s+3\big|_{s=-1} = b_1 + (0)b_2 + (0)^2 b_3 = b_1$
$= (-1)^2 + 2(-1) + 3 = 1 - 2 + 3 = 2$ $\Big\}\; b_1 = 2$

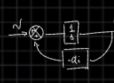
$\frac{d}{ds}\left[(s+1)^3 F(s)\right]\Big|_{s=-1} = \frac{d}{ds}\left[s^2+2s+3\right]\Big|_{s=-1} = 2s+2\big|_{s=-1} = 2(-1)+2 = 0$

$= \frac{d}{ds}\left(\cancel{(s+1)^3}\frac{b_1}{\cancel{(s+1)^3}} + (s+1)b_2 + (s+1)^2 b_3\right)\Big|_{s=-1} = b_2 + 2(s+1)b_3\big|_{s=-1} = b_2$ $\Big\}\; \underline{b_2 = 0}$

$\frac{d^2}{ds^2}\left[(s+1)^3 F(s)\right] = \frac{d^2}{ds^2}\left[s^2+2s+3\right] = 2\big|_{s=-1} = 2$

$= \frac{d^2}{ds^2}\left(b_1 + (s+1)b_2 + (s+1)^2 b_3\right)\Big|_{s=-1} = 2b_3$ $\Big\}\; b_3 = 1$

Forma de Jordan



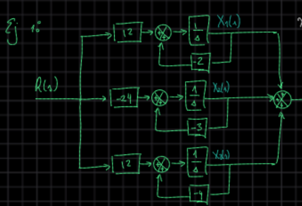
$\frac{X_i(s)}{N(s)} = \frac{1}{s+a_i}$

$N(s) = \mathcal{L}\{v\}$

$\dot{x}_1 = -a_i x_i + v$

$sX_i(s) = -a_i X_i(s) + N(s)$
$(s+a_i) X_i(s) = N(s)$
$\rightarrow \frac{X_i(s)}{N(s)} = \frac{1}{s+a_i}$

Ej 1°



$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

$X_1(s) = \frac{1}{s}\left[12R(s) - 2X_1(s)\right] = \frac{12}{s}R(s) - \frac{2}{s}X_1(s)$

$X_1(s) + \frac{2}{s}X_1(s) = \frac{12}{s}R(s) \rightarrow X_1(s)\left(1 + \frac{2}{s}\right) = \frac{12}{s}R(s)$

$\frac{X_1(s)}{R(s)} = \frac{\frac{12}{\cancel{s}}}{\frac{s+2}{\cancel{s}}} = \frac{12}{s+2}$ ✓

igual para $X_2(s)$ y $X_3(s)$

$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{12}{(s+2)} + \frac{12}{(s+4)} - \frac{24}{(s+3)}$

$y = c(t) = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow y = [1 \; 1 \; 1]\, x$

$\dot{x}_1 = -2x_1 + 12r$
$\dot{x}_2 = -3x_2 - 24r$
$\dot{x}_3 = -4x_3 + 12r$

$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 12 \\ -24 \\ 12 \end{bmatrix} r$

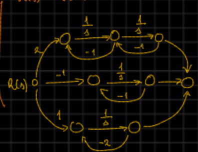
Ej 2: $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{(s+3)}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{b_1}{(s+1)^2} + \frac{b_2}{(s+1)} + \frac{b_3}{(s+2)}$

$\left[(s+1)^2 F(s)\right]\Big|_{s=-1} = b_1 + (s+1)b_2 + \frac{(s+1)^2 b_3}{(s+2)}\Big|_{s=-1} = b_1 = \frac{(s+3)}{(s+2)}\Big|_{s=-1} = 2 \rightarrow \underline{b_1 = 2}$

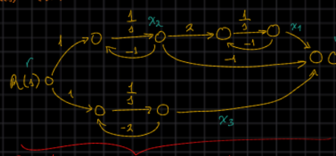
$\frac{d}{ds}\left[(s+1)^2 F(s)\right]\Big|_{s=-1} = \left[b_2 + \frac{2(s+1)(s+2) - (s+1)^2}{(s+2)^2} b_3\right]\Big|_{s=-1} = b_2 = \frac{(s+2)-(s+3)}{(s+2)^2}\Big|_{s=-1} = -1 \rightarrow \underline{b_2 = -1}$

$\left[(s+2)F(s)\right]\Big|_{s=-2} = \left[(s+2)\frac{b_1}{(s+1)^2} + (s+2)\frac{b_2}{(s+1)} + b_3\right]\Big|_{s=-2} = b_3 = \frac{(s+3)}{(s+1)^2}\Big|_{s=-2} = 1 \rightarrow \underline{b_3 = 1}$

$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2}{(s+1)^2} - \frac{1}{(s+1)} + \frac{1}{(s+2)}$



$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2}{(s+1)^2} - \frac{1}{(s+1)} + \frac{1}{(s+2)} = \frac{1}{(s+1)}\left(\frac{2}{(s+1)} - 1\right) + \frac{1}{(s+2)}$



Preguntar si esta forma está bien

$\dot{x}_1 = -x_1 + 2x_2$
$\dot{x}_2 = -x_2 + r$
$\dot{x}_3 = -2x_3 + r$

$\Rightarrow \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} r$

Preguntar que pasa acá con el bloque de Jordan

$y = x_1 - x_2 + x_3$ $\qquad y = [1 \; -1 \; 1]\, x$

Estabilidad

- NO nos interesa ver entrada y salida
→ Nos interesa ver la evolución del sistema

$\dot{x} = Ax + \cancel{Bu}$
$\cancel{y = Cx + Du}$

Vamos a estudiar $\dot{x} = Ax$

Para determinar la estabilidad de un sistema lineal

Sea $\frac{dx}{dt} = Ax$ y $x(0) = x_0$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Para determinar la estabilidad $\lambda(A) := \{ s \in \mathbb{C} : \det(sI - A) = 0 \}$

$\det(sI-A)$ es el polinomio característico
Los autovalores (λ_j) son las raíces del polinomio

Esto es si la matriz es diagonalizable

$A\left[v_1 \cdots v_n\right] = \left[v_1 \cdots v_n\right]\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$

(vector de) (matriz de)

Sea $T = V^{-1}$
tq.
$\Rightarrow z = Tx \Rightarrow x = T^{-1}z$ y $\dot{x} = T^{-1}\dot{z}$
con lo cual
$\dot{x} = AT^{-1}z \Rightarrow T^{-1}\dot{z} = AT^{-1}z$

– El sistema es estable si tiene autovalores con parte $\mathbb{R}\{-\}$!!!

Recordatorio:
Para que la matriz A sea diagonalizable la multiplicidad algebraica tiene que ser igual a la multiplicidad geométrica para cada autovalor λ_i.

Para calcular la multiplicidad algebraica:
$char_A(s) = \det(sI-A) = (s-\lambda_1)^3 (s-\lambda_2)^2 (s-\lambda_3)$
Esta es la multiplicidad algebraica

Es el mismo nucleo
Conjunto de $\vec{x}$ tq. $A\vec{x} = 0$

$Ker(\lambda_1 I - A) = span\{v_1\}$
$Ker(\lambda_2 I - A) = span\{v_4\}$
El tamaño del subespacio es la multiplicidad geométrica

Si la matriz NO es diagonalizable

Se obtiene una matriz de Jordan (J) compuesta por bloques de Jordan (J_i) tq:

$J = \begin{bmatrix} J_1 & & 0 \\ & J_2 & \\ 0 & & J_k \end{bmatrix}$ $\qquad J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix}$

Su tamaño depende de la multiplicidad algebraica de λ_i

Además J_i se puede escribir como

$J_i = \lambda_i I + N$

Donde se cumple que $N^{n} = 0$

Este es igual a la multiplicidad algebraica de λ_i correspondiente (autovectores) (vector de autovalores) $\rightarrow z = \underbrace{TAT^{-1}}_{\text{Esto es } \Lambda} z \rightarrow \boxed{\dot{z} = \Lambda z}$

Interconexiones

Serie:

$u \rightarrow G_1 \xrightarrow{y_1} G_2 \rightarrow y$

$\dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u$ $\quad$ $\dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 y_1$

$y_1 = C_1 x_1 + D_1 u$ $\quad$ $y = C_2 x_2 + D_2 y_1$

$$\dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2(C_1 x_1 + D_1 u) = A_2 x_2 + B_2 C_1 x_1 + B_2 D_1 u$$

$$y = C_2 x_2 + D_2(C_1 x_1 + D_1 u) = C_2 x_2 + C_1 D_2 x_1 + D_1 D_2 u$$

$\Downarrow$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix}}_{A'} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \end{bmatrix}}_{B'} u$$

$$y = \underbrace{[C_1 D_2 \;\; C_2]}_{C'} x + \underbrace{D_1 D_2}_{D'} u$$

$G_1(s) G_2(s) = C'(sI - A')B' + D'$

Paralelo:

$u \rightarrow G_1 (x_1, y_1),\; G_2 (x_2, y_2) \rightarrow \Sigma \rightarrow y$

$\dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u$ $\quad$ $y = y_1 + y_2$ $\quad$ $\dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u$

$y_1 = C_1 x_1 + D_1 u$ $\quad$ $y_2 = C_2 x_2 + D_2 u$

$$y = C_1 x_1 + D_1 u + C_2 x_2 + D_2 u = C_1 x_1 + C_2 x_2 + (D_1 + D_2) u$$

$\Downarrow$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}}_{A'} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}}_{B'} u$$

$$y = \underbrace{[C_1 \;\; C_2]}_{C'} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{[D_1 + D_2]}_{D'} u$$

Feedback

r (valor esperado) → Σ → e (error) → C(s) → u (acción de control) → Σ ← v → perturbación → μ → P(s) → y

Controlador (Sistema diseñado para controlar la planta) — Planta (El sistema que queremos controlar)

Son del controlador:

$\dot{x}_c = A_c x_c + B_c e$

$u = C_c x_c + D_c e$

$e = r - y$

Son de la planta:

$\dot{x} = Ax + B\mu$

$y = Cx + D\mu$

$\mu = v + u$

Definimos $x_{cl} = \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix}$

$\dot{x} = Ax + B\mu$

$\dot{x}_c = A_c x_c + B_c e$

$y = Cx + \cancel{D\mu}$

$u = C_c x_c + \cancel{D_c e}$

$e = r - y$

$\mu = v + u$

¿Creo que vamos a despreciar estos términos por simplicidad? → Consideramos que el controlador y la planta son estrictamente propios

$\dot{x} = Ax + B\mu$

$\dot{x}_c = A_c x_c + B_c e$

$y = Cx$, $e = r - y$ $\}$ $e = r - Cx$

$\mu = v + u$, $u = C_c x_c$ $\}$ $\mu = v + C_c x_c$

$\dot{x} = Ax + B(v + C_c x_c)$

$\dot{x}_c = A_c x_c + B_c(r - Cx)$

$\dot{x} = Ax + Bv + BC_c x_c$

$\dot{x}_c = A_c x_c + B_c r - B_c C x$

$$\Rightarrow \dot{x}_{cl} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_c \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & BC_c \\ -B_c C & A_c \end{bmatrix}}_{A_{cl}} x_{cl} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & B \\ B_c & 0 \end{bmatrix}}_{B_{cl}} \begin{bmatrix} r \\ v \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e \\ \mu \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -C & 0 \\ 0 & C_c \end{bmatrix}}_{C_{cl}} x_{cl} + \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}}_{D_{cl}} \begin{bmatrix} r \\ v \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}_{cl} = A_{cl} x_{cl} + B_{cl} \begin{bmatrix} r \\ v \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e \\ \mu \end{bmatrix} = C_{cl} x_{cl} + D_{cl} \begin{bmatrix} r \\ v \end{bmatrix}$$

$C(s) = \frac{n_c(s)}{d_c(s)}$ → numerador del controlador / → denominador del controlador

$P(s) = \frac{n_p(s)}{d_p(s)}$ → numerador de la planta / → denominador de la planta

$\lambda(s) = n_c(s) n_p(s) + d_c(s) d_p(s)$ → polinomio característico de lazo cerrado

$S(s) = \frac{1}{1 + P(s)C(s)} = \frac{d_c(s) d_p(s)}{\lambda(s)}$ → función de sensibilidad (de la referencia al error)

$T(s) = 1 - S(s) = \frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)} = \frac{n_p(s) n_c(s)}{\lambda(s)}$ → función de sensibilidad complementaria (del error a la salida)

$PS(s) = \frac{P(s)}{1 + P(s)C(s)} = \frac{n_p(s) d_c(s)}{\lambda(s)}$ → sensibilidad a la perturbación de entrada (de la perturbación a la salida)

$CS(s) = \frac{C(s)}{1 + P(s)C(s)} = \frac{n_c(s) d_p(s)}{\lambda(s)}$ → sensibilidad al ruido de medición (de la referencia a la acción de control)

Cancelación Polo/Cero

→ Si tengo una planta $n_p(s) = \tilde{n}_p(s)(s - z)$, $d_p(s) = \tilde{d}_p(s)(s - p)$ ("El resto") y un controlador tq. $n_c(s) = \tilde{n}_c(s)(s - p)$, $d_c(s) = \tilde{d}_c(s)(s - z)$

$\lambda(s) = n_c(s) n_p(s) + d_c(s) d_p(s)$

$\tilde{\lambda}(s) = \tilde{n}_c(s) \tilde{n}_p(s) + \tilde{d}_c(s) \tilde{d}_p(s)$

$\Rightarrow \lambda(s) = (s - p)(s - z)\tilde{\lambda}(s)$

Generas la cancelación de un polo y un cero.

→ Ojo, es OBLIGATORIO que sea en el semiplano izquierdo (su parte real debe ser negativa) $s = \sigma + j\omega$, $\sigma < 0$. Si no se va todo a la mierda.

→ En un sistema perfecto $S(s) = 0$ y $T(s) = 1$ — Copia la referencia y no se ve afectado por el error.

→ El orden del lazo cerrado es el orden de la planta más el orden del controlador.

Tipos de controlador:

I) $\frac{K_i}{s}$: Integrador puro (estrictamente propio)

PI) $K_p + \frac{K_i}{s}$: Integrador proporcional (bipropio)

PID) $K_p + \frac{K_i}{s} + \frac{K_d s}{1 + N}$: Integrador proporcional derivativo (Se debe agregar un polo al derivador para que sea propio)

Ejemplo:

$P(s) = \frac{s + 10}{(s+1)(s-1)}$ — Orden 2, Cuenta con 2 polos $(-1, 1)$

$C(s) = K \frac{(s+1)(s+1)}{s}$ — Orden 1, Cuenta con 1 polo (0)

$\Rightarrow L(s) = C(s) P(s) = K \frac{(s+1)\cancel{(s+1)}}{s} \cdot \frac{(s+10)}{(s-1)\cancel{(s+1)}} = \frac{K(s+1)(s+10)}{s(s-1)} = \frac{K \cdot b(s)}{a(s)}$ ("Transferencia")

→ El orden del sistema lazo cerrado es 3 (orden controlador + orden planta).

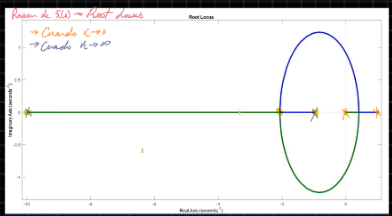
→ El orden de la transferencia $L(s)$ es 2 (polos en 0 y 1).

$\lambda(s) = n_p(s) n_c(s) + d_p(s) d_c(s) = \Pi(s - c_i)\, \tilde{\lambda}(s)$ → Estas raíces van a estar fijas, no van a depender de K

$\tilde{\lambda}(s) = K \cdot b(s) + a(s) = K(s+1)(s+10) + s(s-1)$

↳ Si $K \to 0$ es muy chico $\tilde{\lambda}(s) \approx a(s) = s(s-1)$ → Si la ganancia $K \to 0$ las raíces van a los polos de lazo abierto

↳ Si $K \to \infty$ es muy grande $\tilde{\lambda}(s) \approx K b(s) = K(s+1)(s+10)$ → Si la ganancia $K \to \infty$ las raíces van a los ceros de lazo cerrado



→ El root locus va a tener tantas ramas como el grado de $a(s)$

↳ Si el grado de $a(s)$ y $b(s)$ es el mismo, las ramas van a comenzar en las raíces de $a(s)$ y van a terminar en las de $b(s)$.

↳ Si el grado de $b(s)$ es < al grado de $a(s)$, un # de ramas igual al grado de $b(s)$ van a comenzar en $a(s)$ y terminar en $b(s)$. Las otras van a ir al ∞.

R → Σ → E → C(s) → P(s) → Y

Si quiero ver como responde al escalón $R(s) = \frac{1}{s}$ → En este caso me gustaría que el error sea 0.

$\lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} s E(s)$ $\wedge$ $E(s) = R(s) S(s)$

$\rightarrow \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \frac{1}{\cancel{s}} S(s) = S(s)\big|_{s=0}$

* Un controlador tiene acción integral si tiene un polo en el origen.

En tal caso $C(s) = \frac{n_c(s)}{d_c(s)} = \frac{n_c(s)}{s \tilde{d}_c(s)}$. La función de sensibilidad quedaría $S(s) = \frac{d_c(s) d_p(s)}{\lambda(s)} = \frac{s \tilde{d}_c(s) d_p(s)}{\lambda(s)}$

Por este motivo es bueno agregar acción integral al controlador. → Al hacer $S(s)\big|_{s=0} = 0$. Tengo error 0 en continua.

Loopshaping

r → Σ → e → C(s) → u → Σ ← v → P(s) → y

→ El controlador NO debe tener ceros ni polos en el semiplano derecho (incluyendo el eje imaginario).

→ Los ceros de F(s) deben estar en el semiplano izquierdo.

$\lambda(s) = n_c(s) n_p(s) + d_c(s) d_p(s)$

$L(s) = C(s) P(s)$

$\Rightarrow S(s) = \frac{1}{1 + L(s)} \Rightarrow \underline{F(s) = S(s)^{-1} = 1 + L(s)}$

→ Los polos de F(s) son los polos de lazo abierto

→ Los ceros de F(s) son los polos de lazo cerrado

$L(s) = \frac{K b(s)}{a(s)} \Rightarrow L(s) = \frac{K b(s) + a(s)}{a(s)}$ → polos lazo cerrado / → polos lazo abierto

Se puede sacar entonces que

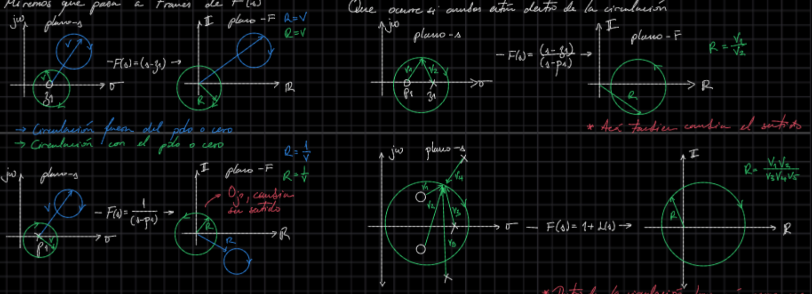
N: Cantidad de ↻ horarios alrededor del origen

P: Cantidad de polos de $F(s) = 1 + L(s)$

Z: Cantidad de ceros de $F(s) = 1 + L(s)$

$\Big\}$ $Z = N + P$

Miremos que pasa a través de F(s)



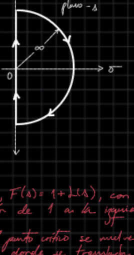
→ Circulación fuera del polo o cero

→ Circulación con el polo o cero

* Así también cambia el sentido

* Dentro de la circulación hay más ceros que polos, con lo cual se mueve a tener circulación horaria e incluye al origen

¿Que circulación elijo entonces? → Contorno del Semiplano derecho



$\lim_{s \to \infty} [1 + L(s)] = \text{constante}$

→ Cuando es estrictamente propio el grado del numerador es > que el grado del denominador, con lo cual

$\lim_{s \to \infty} [1 + L(s)] = 1 + \underbrace{\lim_{s \to \infty} L(s)}_{0} = 1$

→ Cuando es bipropio el grado del numerador es = al grado del denominador, con lo cual

$\lim_{s \to \infty} [1 + L(s)] = 1 + \underbrace{\lim_{s \to \infty} L(s)}_{K} = 1 + K$

$L(s) = \frac{K b(s)}{a(s)} = K$ ← $b(s)$ y $a(s)$ son mónicos

Ahora, $F(s) = 1 + L(s)$, con lo cual el plano L es una traslación de 1 a la izquierda del plano F.

→ El punto crítico se vuelve $s = -1$!!! (Es donde se trasladó el origen).

Entonces:

P es el # polos inestables a lazo abierto

N es el # de ↻ horarios alrededor de -1.

↳ Cuando la circulación es ↺ se cuenta -1.

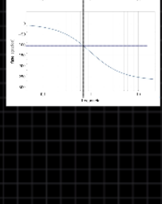
Z = N + P es el número de ceros inestables que son polos a lazo cerrado

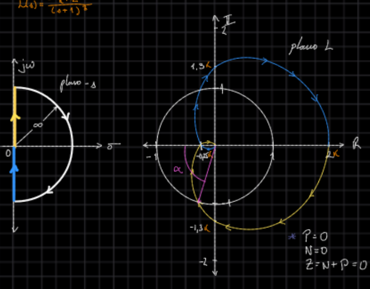
Ejemplo:

Tengo la transferencia $L(s) = \frac{2}{(s+1)^3}$. Esta cuenta con un polo triple en -1.

Si pongo una ganancia K

$L(s) = \frac{K \cdot 2}{(s+1)^3}$





* $P = 0$

$N = 0$

$Z = N + P = 0$

* Acá vale notar algo. $L(s) = \frac{2}{(s+1)^3}$ tiene un polo triple en $s = -1$. Sin embargo este polo se encuentra en el semiplano izquierdo del plano s. Como la circulación de Nyquist solo toma el semiplano derecho, no aparece en el diagrama de Nyquist.

Si $K > 4$, $N = 2$ (hay dos circulaciones)

$P = 0$ (no hay polos a la derecha)

$Z = N + P = 2 + 0 = 2$

Si la ganancia es mayor a 4 hay 2 polos inestables a lazo cerrado

→ En el Bode puedo ver que la magnitud cuando la fase es -180° es de 12 dB

→ Ese es mi margen de ganancia (MG)

$K_{max} = 10^{\frac{12 dB}{20}} = 4$ → Es el K que necesito en este caso para alcanzar -1.

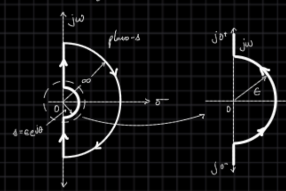
→ Miro donde el módulo de la ganancia es 1 (0 dB) y miro la fase

→ Al valor de fase le sumo 180 lo que obtengo es mi margen de fase (MF)

$\alpha = 180° + (-112.5°) = 67.5°$ — En este caso es mi margen de fase

→ El margen de estabilidad se lo deriva a partir del ... en el ... de $|S(s)|$

¿Que hago si hay un polo/cero en el eje jω? → Genero una singularidad alrededor del origen



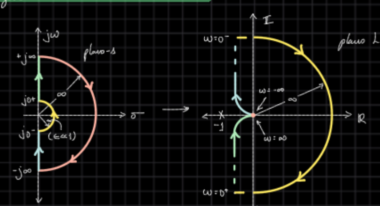
$G(s)H(s)=\frac{K}{s(sT+1)}$ con $s=\varepsilon e^{j\theta}$ en el cual ε será infinitesimalmente pequeño.

$\theta \in (-90°, 90°)$

Con lo cual $G(\varepsilon e^{j\theta})H(\varepsilon e^{j\theta})=\frac{K}{\varepsilon e^{j\theta}}=\frac{K}{\varepsilon}e^{-j\theta}$

Si ε es infinitesimalmente pequeño, $\frac{K}{\varepsilon}\to\infty$

La singularidad se mapea en el ∞



→ La circulación alrededor del origen se mapea en el infinito

→ La circulación de Nyquist en el infinito se mapea en el origen

→ Las frecuencias de 0^+ al $+\infty$ se mapean en la rama de abajo

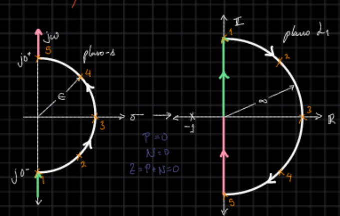
→ Las frecuencias de $-\infty$ al 0^- se mapean en la rama de arriba

→ Si K fuera negativo el Nyquist se refleja sobre el eje imaginario

el margen está dado como 1/pico en veces.

Ejemplos

Las transferencias son $L_1(s)=\frac{K}{s}$ y $L_2(s)=\frac{K}{s^2}$



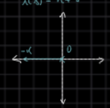
$L(s)=\frac{K}{s}\Rightarrow L(\varepsilon e^{j\theta})=\frac{K}{\varepsilon e^{j\theta}}=\frac{K}{\varepsilon}e^{-j\theta}$

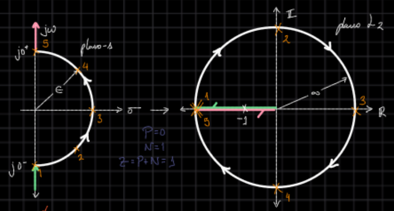
	θ	$e^{-j\theta}$	L_1
1	-90°	e^{j90}	$\frac{K}{\varepsilon}\angle 90°$
2	-45°	e^{j45}	$\frac{K}{\varepsilon}\angle 45°$
3	0°	e^{j0}	$\frac{K}{\varepsilon}\angle 0°$
4	45°	e^{-j45}	$\frac{K}{\varepsilon}\angle -45°$
5	90°	e^{-j90}	$\frac{K}{\varepsilon}\angle -90°$

Con $\frac{K}{\varepsilon}\to\infty$ ya que $\varepsilon\to 0$

Root Locus

$\lambda(s)=K+s$





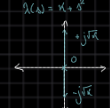
$L(s)=\frac{K}{s^2}\Rightarrow L(\varepsilon e^{j\theta})=\frac{K}{(\varepsilon e^{j\theta})^2}=\frac{K}{\varepsilon^2}e^{-j2\theta}$

	θ	$e^{-j2\theta}$	L_2
1	-90°	e^{j180}	$\frac{K}{\varepsilon^2}\angle 180°$
2	-45°	e^{j90}	$\frac{K}{\varepsilon^2}\angle 90°$
3	0°	e^{j0}	$\frac{K}{\varepsilon^2}\angle 0°$
4	45°	e^{-j90}	$\frac{K}{\varepsilon^2}\angle -90°$
5	90°	e^{-j180}	$\frac{K}{\varepsilon^2}\angle -180°$

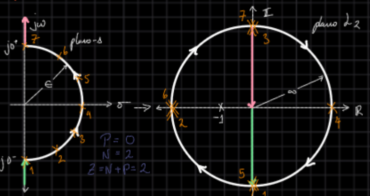
Con $\frac{K}{\varepsilon^2}\to\infty$ ya que $\varepsilon\to 0$

Root Locus

$\lambda(s)=K+s^2$



Ejemplo: $L(s)=\frac{K}{s^3}$



$L(s)=\frac{K}{(\varepsilon e^{j\theta})^3}=\frac{K}{\varepsilon^3}e^{-j3\theta}$

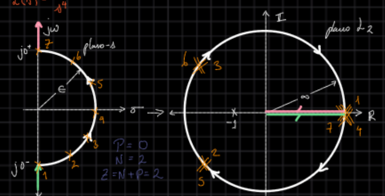
	θ	$e^{-j3\theta}$	L
1	-90°	e^{j270}	$\frac{K}{\varepsilon^3}\angle 90°$
2	-60°	e^{j180}	$\frac{K}{\varepsilon^3}\angle 180°$
3	-30°	e^{j90}	$\frac{K}{\varepsilon^3}\angle 90°$
4	0°	e^{0}	$\frac{K}{\varepsilon^3}\angle 0°$
5	30°	e^{-j90}	$\frac{K}{\varepsilon^3}\angle -90°$
6	60°	e^{-j180}	$\frac{K}{\varepsilon^3}\angle 180°$
7	90°	e^{-j270}	$\frac{K}{\varepsilon^3}\angle 90°$

Con $\frac{K}{\varepsilon^2}\to\infty$ ya que $\varepsilon\to 0$

Root Locus:

$\lambda(s)=K+s^3$

$L(s)=\frac{K}{s^4}$



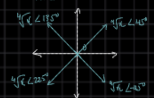
$L(s)=\frac{K}{s^4}\Rightarrow L(\varepsilon e^{j\theta})=\frac{K}{(\varepsilon e^{j\theta})^4}=\frac{K}{\varepsilon^4}e^{-j4\theta}$

	θ	$e^{-j4\theta}$	L_2
1	-90°	e^{j360}	$\frac{K}{\varepsilon^4}\angle 360$
2	-60°	e^{j240}	$\frac{K}{\varepsilon^4}\angle 240$
3	-30°	e^{j120}	$\frac{K}{\varepsilon^4}\angle 120$
4	0°	e^{j0}	$\frac{K}{\varepsilon^4}\angle 0$
5	30°	e^{-j120}	$\frac{K}{\varepsilon^4}\angle -120$
6	60°	e^{-j240}	$\frac{K}{\varepsilon^4}\angle -240$
7	90°	e^{-j360}	$\frac{K}{\varepsilon^4}\angle -360$

Con $\frac{K}{\varepsilon^4}\to\infty$ ya que $\varepsilon\to 0$

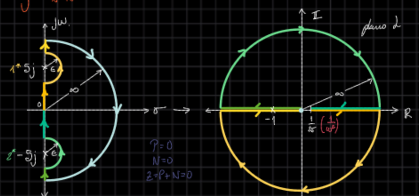
Root Locus

$\lambda(s)=K+s^4$



Ahora, que pasa si tengo $\frac{K}{s^2+\omega^2}$

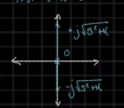
Ej: $\frac{K}{s^2+5^2}$



	θ	$e^{-j(\theta+90)}$	$e^{j(90-\theta)}$
1	-90°	e^{j0}	e^{j180}
2	-45°	e^{-j45}	e^{j135}
3	0°	e^{-j90}	e^{j90}
4	45	e^{-j135}	e^{j45}
5	90°	e^{-j180}	e^{j0}

Root Locus:

$\lambda(s)=K+s^2+5^2$



1*: $s=5j+\varepsilon e^{j\theta}\Rightarrow L(5j+\varepsilon e^{j\theta})=\frac{K}{(5j+\varepsilon e^{j\theta})^2+25}$

$\cancel{(5j)^2}+\underbrace{10j\varepsilon e^{j\theta}+\varepsilon^2 e^{j2\theta}}\cancel{+25}$

Si $\varepsilon\to 0$, domina $10j\varepsilon e^{j\theta}$, con lo cual

$=\frac{K}{10j\varepsilon e^{j\theta}}=\frac{K}{10\varepsilon}e^{-j90°}e^{-j\theta}=\frac{K}{10\varepsilon}e^{-j(\theta+90)}$

$\frac{K}{10\varepsilon}\to\infty$

2*: $s=-5j+\varepsilon e^{j\theta}\Rightarrow L(-5j+\varepsilon e^{j\theta})=\frac{K}{(-5j+\varepsilon e^{j\theta})^2+25}$

$\cancel{(-5j)^2}\underbrace{-10j\varepsilon e^{j\theta}+\varepsilon^2 e^{j2\theta}}\cancel{+25}$

Predomina $-10j\varepsilon e^{j\theta}$

$=\frac{-K}{10j\varepsilon e^{j\theta}}=\frac{K}{10\varepsilon}e^{j90°}e^{-j\theta}=\frac{K}{10\varepsilon}e^{j(90°-\theta)}$

$\frac{K}{10\varepsilon}\to\infty$

Y si la ganancia fuera <0.

Ej: $\frac{K}{s(s-3)}$ $\quad L(s)=K\frac{1}{s(s-3)}$

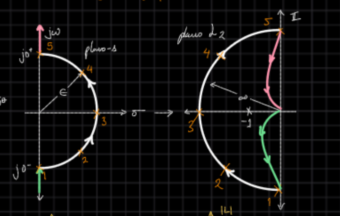
Si $s=\varepsilon e^{j\theta}\Rightarrow L(s)=\frac{K}{\varepsilon e^{j\theta}(\varepsilon e^{j\theta}-3)}=\frac{K}{\varepsilon^2 e^{2j\theta}-3\varepsilon e^{j\theta}}$

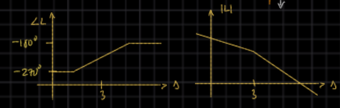
→ $\varepsilon\to 0$ con lo cual el término que predomina es $-3\varepsilon e^{j\theta}$

$L(s)=\frac{K}{-3\varepsilon e^{j\theta}}=\frac{K}{3\varepsilon}e^{-j180}\cdot e^{-j\theta}=\frac{K}{3\varepsilon}e^{-j(\theta+180°)}$

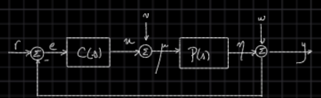
	θ	$e^{-j(\theta+180)}$	∠L
1	-90°	$e^{-j90°}$	$\frac{K}{3\varepsilon}\angle -90°$
2	-45°	e^{-j135}	$\frac{K}{3\varepsilon}\angle -135°$
3	0°	e^{-j180}	$\frac{K}{3\varepsilon}\angle -180°$
4	45°	e^{-j225}	$\frac{K}{3\varepsilon}\angle -225°$
5	90°	e^{-j270}	$\frac{K}{3\varepsilon}\angle -270°$

Con $\frac{K}{3\varepsilon}\to\infty$ ya que $\varepsilon\to 0$





Funciones de Sensibilidad



y	u	e	μ	η	
$\frac{PC}{1+PC}$	$\frac{C}{1+PC}$	$\frac{1}{1+PC}$	$\frac{C}{1+PC}$	$\frac{PC}{1+PC}$	r
$\frac{P}{1+PC}$	$\frac{-PC}{1+PC}$	$\frac{-P}{1+PC}$	$\frac{1}{1+PC}$	$\frac{P}{1+PC}$	ν
$\frac{1}{1+PC}$	$\frac{-C}{1+PC}$	$\frac{-1}{1+PC}$	$\frac{-C}{1+PC}$	$\frac{-PC}{1+PC}$	w

Teorema de valor final:

$y(t\to\infty)=\lim_{s\to 0} sY(s)=\lim_{s\to 0} sU(s)T(s)$

si $u\to\boxed{T(s)}\to y$

→ El error $e(t\to\infty)=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} sU(s)R(s)$

Acordémonos que

$e=S(s)r$

→ Si me dicen que la referencia es el escalón $u(t)\Rightarrow R(s)=U(s)=\frac{1}{s}$

$e(t\to\infty)=\lim_{s\to 0} S(s)$ → Acá hay 3 posibilidades

$e(t\to\infty)=\infty$

$e(t\to\infty)=K$

$e(t\to\infty)=0$

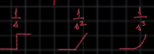
Con esto podemos definir 3 tipos de sistemas

Tipo 0: Sin polos en el origen

Tipo 1: Tiene un polo simple en el origen

Tipo 2: Tiene un polo doble en el origen

⚠ Tipo es diferente de orden



	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{1}{s^3}$
T 0	e = cte	e = ∞	e = ∞
T 1	e = 0	e = cte	e = ∞
T 2	e = 0	e = 0	e = cte

Cuando el e = cte

- K_p (cte a la posición) → $1/(1+K_p)$
- K_v (cte a la velocidad) → $1/K_v$
- K_a (cte a la aceleración) → $1/K_a$

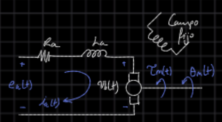
Así $L(s)=G(s)H(s)$, pero $H(s)=1$ con lo cual $G(s)=L(s)$

$K_p=\lim_{s\to 0} G(s)$

$K_v=\lim_{s\to 0} sG(s)$

$K_a=\lim_{s\to 0} s^2G(s)$

Modelación motores eléctricos



Fuerza contraelectromotriz

$v_b(t)=K_b\frac{d\theta_m(t)}{dt}\xrightarrow{\mathcal{L}} V_b(s)=K_b\,s\,\theta_m(s)$

Constante de emf

Ahora hago la circulación por el motor para obtener la relación con la tensión de armadura

$R_a i_a(t)+L_a\frac{di_a(t)}{dt}+v_b(t)=e_a(t)\Rightarrow R_a I_a(s)+L_a s I_a(s)+V_b(s)=E_a(s)$

El torque generado es proporcional a la corriente de armadura

$\tau_m(t)=K_t i_a(t)\Rightarrow \tau_m(s)=K_t I_a(s)$ — Constante de torque del motor — $I_a(s)=\frac{1}{K_T}\tau_m(s)$

Equivalente cargado del motor:

$\Rightarrow\frac{(R_a+L_a s)\tau_m(s)}{K_T}+K_b s\theta_m(s)=E_a(s)$

Ahora, para encontrar la equivalencia entre $\tau_m(s)$ y $\theta_m(s)$ miro el equivalente cargado del motor

$\tau_m(t)=\frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2}J_m+\frac{d\theta_m(t)}{dt}D_m\xrightarrow{\mathcal{L}}\tau_m(s)=s^2\theta_m(s)J_m+s\theta_m(s)D_m$

$\tau_m(s)=\theta_m(s^2J_m+sD_m)$

$\Rightarrow\frac{(R_a+L_a s)(J_m s^2+D_m s)}{K_T}\theta_m(s)+K_b s\theta_m(s)=E_a(s)$

Si asumimos que $L_a \ll R_a$

$\to\frac{R_a}{K_T}(J_m s+D_m)s\theta_m(s)+K_b s\theta_m(s)=E_a(s)$

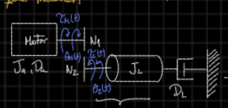
$\left[\frac{R_a}{K_T}(J_m s+D_m)+K_b\right]s\theta_m(s)=E_a(s)$

$\frac{\theta_m(s)}{E_a(s)}=\frac{1}{\underbrace{\left[\frac{R_a}{K_T}(J_m s+D_m)+K_b\right]}s}=\underbrace{\frac{K_T}{(R_aJ_m s+R_aD_m+K_bK_t)s}}\cdot\frac{\frac{1}{R_aJ_m}}{\frac{1}{R_aJ_m}}$

$\frac{R_a}{K_T}(J_m s+D_m)+K_b=\frac{R_aJ_m s+R_aD_m+K_bK_t}{K_T}$

$\frac{\theta_m(s)}{E_a(s)}=\frac{K_T/R_aJ_m}{\left[s+\frac{1}{J_m}\left(D_m+\frac{K_bK_t}{R_a}\right)\right]s}$

Ojo, Jm y Dm tienen que ser evaluados a partir de la carga que mueven



$\tau_2(t)=J_L s^2\theta_2+D_L s\theta_2$
$=s\theta_2(J_L s+D_L)$

Los engranajes tienen que cumplir

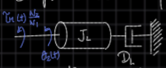
$r_1\theta_M=r_2\theta_2\Rightarrow\frac{\theta_2}{\theta_M}=\frac{r_1}{r_2}=\frac{N_1}{N_2}$

→ Los engranajes NO guardan energía. El trabajo que hace N_1 se pasa todo a N_2

$\underbrace{W=F\cdot d}_{\text{lineal}}\Rightarrow\underbrace{W=\tau\cdot\theta}_{\text{rotacional}}$ $\quad\left.\begin{array}{l}W_1=\tau_M\theta_M\\W_2=\tau_2\theta_2\\W_1=W_2\end{array}\right\}\tau_M\theta_M=\tau_2\theta_2$

$\Rightarrow\frac{\tau_M}{\tau_2}=\frac{\theta_2}{\theta_M}=\frac{N_1}{N_2}\longrightarrow\tau_2=\tau_M\frac{N_2}{N_1}$

Si planteo la transferencia para el motor



$\tau_M(t)\frac{N_2}{N_1}=\frac{d^2\theta_2(t)}{dt^2}J_L+\frac{d\theta_2(t)}{dt^2}D_L \wedge \frac{\theta_M}{\theta_2}=\frac{N_2}{N_1}\Rightarrow\theta_2=\theta_M\frac{N_1}{N_2}$

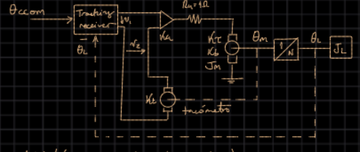
$\xrightarrow{\mathcal{L}}\tau_M(s)\frac{N_2}{N_1}=s\theta_2(s)(sJ_L+D_L)=s\theta_M(s)\frac{N_1}{N_2}(sJ_L+D_L)$

$\Rightarrow\tau_M(s)=s\theta_M(s)\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2(sJ_L+D_L)=s\theta_M(s)\left[s\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2J_L+\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2D_L\right]$

Con esta reflexión, Jm y Dm van a ser la suma del Ja y Da de la armadura más J_L y D_L reflejados.

$J_m=J_a+\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2J_L\qquad D_m=D_a+\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2D_L$

Ejemplo: Recuperatorio 11/11/2024



$V_1(s)/(\theta_{comm}-\theta_L)=5/(1+s/40\pi)$

$K_a=60$

$K_t=0.04$ volts seg

$K_T=0.5$ Nm/A

$K_b=0.75$ volts seg

$J_L=2880$ Kg m²

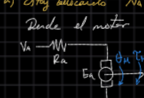
a) Obtener la transferencia del conjunto Motor-antena

b) Obtener el diagrama de bloques completo

c) Encontrar $\theta_L(s)/\theta_{comm}(s)$

a) Estoy buscando θ_L/V_A

Desde el motor



$V_A-I_AR_A=E_A\to V_A=E_A+I_AR_A$

$E_A=K_b\cdot\omega_M=K_b\dot{\theta}_M$

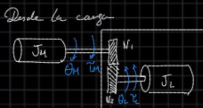
$\tau_M=K_T\cdot I_A\Rightarrow I_A=\frac{\tau_M}{K_T}$

$\Rightarrow V_A=K_b s\theta_M+\frac{\tau_M}{K_T}R_A$ (I)

Ahora hay que dejar θ_M y τ_M en términos de θ_L

Se pasa al análisis mecánico

Desde la carga



Busquemos reflejar este pedazo de la carga

$\frac{\theta_M}{\theta_L}=\frac{N_2}{N_1}=N\Rightarrow\theta_M=N\theta_L \wedge \theta_M=N\theta_L$ $\Big\}\ \tau_L=N\tau_M$

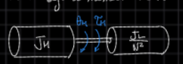
Por trabajo se que

Planteo la segunda carga

$\tau_L=s^2\theta_LJ_L\Rightarrow N\tau_M=s^2\left(\frac{1}{N}\right)\theta_MJ_L\Rightarrow\tau_M=s^2\theta_M\left(\frac{J_L}{N^2}\right)$

Esta expresión está en términos de τ_M y θ_M, como si estuviera conectada al mismo eje que está J_M

El nuevo segundo momento de inercia es $\frac{J_L}{N^2}$



$\tau_M=s^2\theta_M\left(J_M+\frac{J_L}{N^2}\right)$ (II)

$J_M = 0.0042\ \ldots$

$1:N = 1:12000 \quad (N_1/N_2)$

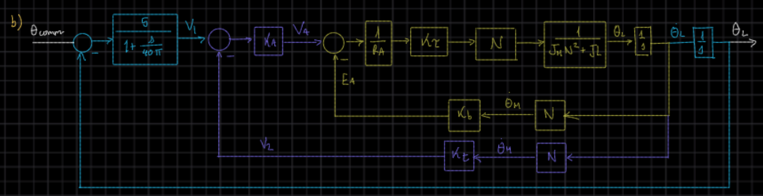
$\tau_M \theta_M = \tau_L \theta_L \Rightarrow \tau_L = \tau_M \frac{\theta_M}{\theta_L}$ ... Sabiendo que $\theta_M = N\theta_L$ (III), con lo cual $\tau_M = s^2 N \theta_L (J_M + \frac{J_L}{N^2})$

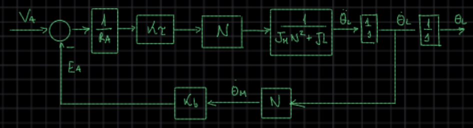
Reemplazando (II) y (III) en (I) $\quad V_A = K_b s N \theta_L + \frac{R_A}{K_\tau} s^2 N \theta_L \underbrace{\left(J_M + \frac{J_L}{N^2}\right)}_{\frac{J_M N^2 + J_L}{N^2}} = \theta_L \left[s\left(K_b N + \frac{R_A}{K_\tau} s \left(\frac{J_M N^2 + J_L}{N}\right)\right)\right] \rightarrow \frac{\theta_L}{V_A} = \frac{1}{s\left[K_b N + s\frac{R_A}{K_\tau}\left(\frac{J_M N^2 + J_L}{N}\right)\right]} = \frac{\frac{K_\tau N}{R_A (J_M N^2 + J_L)}}{s\left[s + \frac{K_b K_\tau N^2}{R_A (J_M N^2 + J_L)}\right]}$

$s\left[\frac{K_b K_\tau N^2 + s R_A (J_M N^2 + J_L)}{K_\tau N}\right]$

$\frac{\frac{K_\tau N}{s R_A (J_M N^2 + J_L)}}{s\left[1 + \frac{K_\tau N}{s R_A (J_M N^2 + J_L)} (N \cdot K_b)\right]}$

b)



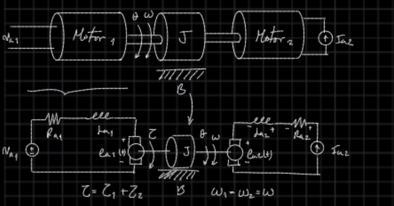


c) Digamos que todo esto es $G(s)$ tq $\quad \frac{\theta_A}{\theta_{comm}} = \frac{\left[\frac{5}{1+\frac{s}{40\pi}}\right] \cdot \frac{1}{s} \left[\frac{K_A G}{1+K_A G K_t N}\right]}{1 + \left[\frac{5}{1+\frac{s}{40\pi}}\right] \cdot \frac{1}{s} \left[\frac{K_A G}{1+K_A G K_t N}\right]} = \frac{5 K_A G}{5 K_A G + s\left(1+\frac{s}{40\pi}\right)(1 + K_A G K_t N)}$

$\frac{1}{s} G(s) = \frac{\theta_L}{V_A} \Rightarrow G(s) = \frac{\theta_L}{V_A} \cdot s$

Todo esto sería $\frac{K_A G}{1 + K_A G K_t N}$

Problema 3 05/06/24



$\tau = \tau_1 + \tau_2 \qquad \omega_1 = \omega_2 = \omega$

$e_{a1}(t) = T_\omega \cdot \omega(t)$

$\tau_1 = T_m \cdot i_{a1}(t)$

$e_{a2}(t) = T_\omega \cdot \omega(t)$

$\tau_2 = T_m \cdot I_{a2}$

$\omega(t) = \dot\theta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \omega(s) = s\,\theta(s)$

$\frac{1}{s}\omega(s) = \theta(s)$ } Mi salida va a ser de forma $\omega \rightarrow \boxed{\frac{1}{s}} \rightarrow \theta$

Busquemos como llegar a ω.

Miremos el disco

$\tau(t) = \tau_1(t) + \tau_2(t) = J\dot\omega + B\omega \xrightarrow{\mathcal{L}} \tau(s) = \omega(s)[sJ + B]$

$\omega(s) = \tau(s)\left[\frac{1}{sJ+B}\right]$ } $\tau \rightarrow \boxed{\frac{1}{sJ+B}} \rightarrow \omega$

Ahora busquemos $\tau(s)$

$\tau(t) = \tau_1(t) + \tau_2(t)$ $\begin{cases} \tau_1(t) = i_{a1}(t)\, T_m \\ \tau_2(t) = I_{a2}\, T_m \end{cases}$

$\tau(t) = T_m (i_{a1}(t) + I_{a2})$

Busquemos $i_{a1}(t)$

Hagamos malla del motor 1.

$V_{a1} - i_{a1} R_a - s\, i_{a1} L_a - e_{a1}(s) = 0$

$\frac{V_{a1} - e_{a1}(s)}{R_a + sL_a} = i_{a1} = \frac{1}{R_a + sL_a}[V_{a1} - e_{a1}(s)]$

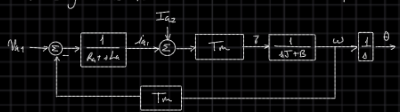
Miremos $e_{a1}(t)$

$e_{a1}(t) = T_\omega \cdot \omega(t)$

$\Rightarrow e_{a1}(s) = T_\omega \cdot \omega(s)$

Genera realimentación

Ahora juntemos todo



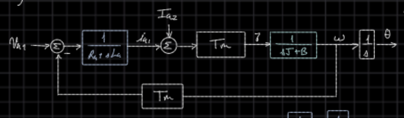
b) $\frac{\omega}{V_{a1}} = \frac{\frac{T_m}{(R_a + sL_a)(sJ+B)}}{1 + \frac{T_m^2}{(R_a + sL_a)(sJ+B)}} = \frac{T_m}{(R_a + sL_a)(B + sJ) + T_m^2}$

$\frac{\omega}{I_{a2}} = \frac{\frac{T_m}{(sJ+B)}}{1 + \frac{T_m^2}{(R_a + sL_a)(sJ+B)}} = \frac{T_m (R_a + sL_a)}{T_m^2 + (R_a + sL_a)(B + sJ)}$

$\frac{\theta}{V_{a1}} = \frac{\theta}{\omega} \cdot \frac{\omega}{V_{a1}} = \frac{T_m}{s[(R_a + sL_a)(B + sJ) + T_m^2]}$, con $\frac{\theta}{\omega} = \frac{1}{s}$

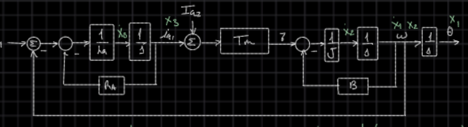
$\frac{\theta}{I_{a2}} = \frac{\theta}{\omega} \cdot \frac{\omega}{I_{a2}} = \frac{T_m (R_a + sL_a)}{s[T_m^2 + (R_a + sL_a)(B + sJ)]}$

c)



$\frac{1}{R_a + sL_a} = \frac{\frac{1}{sL_a}}{\frac{R_a}{sL_a} + 1} = \frac{\frac{1}{sL_a}}{R_a\left(\frac{1}{sL_a}\right) + 1}$

$\frac{1}{B + sJ} = \frac{\frac{1}{sJ}}{\frac{B}{sJ} + 1} = \frac{\frac{1}{sJ}}{B\left(\frac{1}{sJ}\right) + 1}$



$\dot X_1 = X_2 \;\Big|\; \dot X_2 = \frac{1}{J}(-B X_2 + X_3 T_m + I_{a2} T_m) \;\Big|\; \dot X_3 = \frac{1}{L_a}(V_{a1} - X_2 - R_a X_3)$

$\dot X_2 = -\frac{B}{J} X_2 + \frac{T_m}{J} X_3 + \frac{T_m}{J} I_{a2} \;\Big|\; \dot X_3 = \frac{-1}{L_a} X_2 - \frac{R_a}{L_a} X_3 + \frac{1}{L_a} V_{a1}$

$\dot X = AX + BU = \begin{bmatrix} \dot x_1 \\ \dot x_2 \\ \dot x_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{B}{J} & \frac{T_m}{J} \\ 0 & \frac{-1}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix}}_{A} X + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{T_m}{J} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_a} \end{bmatrix} U$

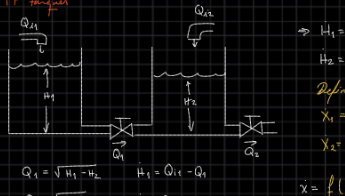
Para los autovalores

$(\lambda I - A) = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda + \frac{B}{J} & -\frac{T_m}{J} \\ 0 & \frac{1}{L_a} & \lambda + \frac{R_a}{L_a} \end{pmatrix}$

$|\lambda I - A| = \lambda\left[\left(\lambda + \frac{B}{J}\right)\left(\lambda + \frac{R_a}{L_a}\right) + \frac{T_m}{L_a}\right]$

y acá álgebra.

TP Tanques



$Q_1 = \sqrt{H_1 - H_2} \qquad \dot H_1 = Q_{i1} - Q_1$

$Q_2 = \sqrt{H_2} \qquad \dot H_2 = Q_{i2} + Q_1 - Q_2$

Si $y = H_1 \rightarrow y = h(x, u) =$

$u = \begin{bmatrix} Q_{i1} \\ Q_{i2} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \dot H_1 = Q_{i1} - \sqrt{H_1 - H_2}$

$\dot H_2 = Q_{i2} + \sqrt{H_1 - H_2} - \sqrt{H_2}$

Definamos $X_1 = H_1$ y $X_2 = H_2$

$\dot X_1 = Q_{i1} - \sqrt{X_1 - X_2}$

$\dot X_2 = Q_{i2} + \sqrt{X_1 - X_2} - \sqrt{X_2}$

$\dot x = f(x, u) = \begin{bmatrix} Q_{i1} - \sqrt{X_1 - X_2} \\ Q_{i2} + \sqrt{X_1 - X_2} - \sqrt{X_2} \end{bmatrix}$

$-\frac{1}{2}(x_1 - x_2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(x_2)^{-\frac{1}{2}}$

$= \frac{-1}{2\sqrt{x_1 - x_2}} - \frac{1}{2\sqrt{x_2}}$

$A = \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial x_2} \end{pmatrix}\right|_{\substack{x = x_e \\ u = u_e}} \longrightarrow A = \left.\begin{pmatrix} \frac{-1}{2\sqrt{x_1 - x_2}} & \frac{1}{2\sqrt{x_1 - x_2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{x_1 - x_2}} & \frac{-1}{2\sqrt{x_1 - x_2}} - \frac{1}{2\sqrt{x_2}} \end{pmatrix}\right|_{\substack{x = x_e \\ u = u_e}}$

$B = \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial u_2} \end{pmatrix}\right|_{\substack{x = x_e \\ u = u_e}} \longrightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Si la salida es $H_1 \Rightarrow y = X_1 = h(x, u)$

$C = \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} \end{pmatrix}\right|_{\substack{x = x_e \\ u = u_e}} = (1 \quad 0)$

$D = \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial u_1} & \frac{\partial h}{\partial u_2} \end{pmatrix}\right|_{\substack{x = x_e \\ u = u_e}} = (0 \quad 0)$

Sistema de fase mínima: → Todo sistema cuya transferencia está dada por un cociente de polinomios cuyos ceros y polos están todos en el semiplano izquierdo cerrado (incluyendo en eje $j\omega$).
→ Se dice que todo sistema de fase mínima es aquel que cumple la relación fase-ganancia de Bode

Relación fase-ganancia de Bode (Para sistemas de fase mínima)

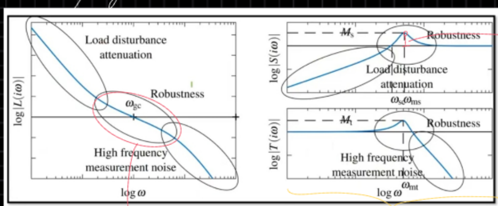
→ Si la pendiente de $(s^1)\ |L(s)| = -20\,dB/dec \Rightarrow \angle L(s) = -90°$

$(s^2)\ |L(s)| = -40\,dB/dec \Rightarrow \angle L(s) = -180°$

$(s^3)\ |L(s)| = -60\,dB/dec \Rightarrow \angle L(s) = -270°$

$\vdots$

$(s^n)\ |L(s)| = 20n\,dB/dec \Rightarrow \angle L(s) = n\frac{\pi}{2}$



De este pico depende la ganancia Sm. Entre más grande el pico, menor es el margen de ganancia

La parte de la transición (frecuencias medias) debe tener pendiente suave aprox. -20dB

Acá se cumple $S(s) + T(s) = 1$

→ Lo que toca es descomponer la planta en parte de fase mínima y la parte que no

$P(s) = P_{mp}(s)\, P_{ap}(s)$ → Fase mínima (minimal phase) → Parte pasa todo (All pass)

Ej: $\frac{1}{(s-1)(s+1)} = \frac{1}{(s-1)(s+1)} \cdot \frac{(s+1)}{(s+1)} = \frac{1}{(s+1)^2} \cdot \frac{(s+1)}{(s-1)}$ → No altera la respuesta en frecuencia en magnitud

Sobre esta se pueden cancelar las singularidades que NO están sobre el eje $j\omega$. $= P^{c}_{mp}(s) \cdot P^{\bar c}_{mp}(s)$

* ω_{gc} es la frecuencia que me va a determinar el margen de fase

En otras palabras $|H(\omega_{gc})| = 0\,dB$

$\frac{(1-s)}{s} = \frac{(1-s)}{s} \cdot \frac{(s+1)}{(s+1)} = \frac{(s+1)}{s} \cdot \frac{(1-s)}{(s+1)}$ → Acá NO puedo eliminar el polo en el polo en el origen. $[P^{\bar c}_{mp}(s)]$

→ El controlador siempre lo vamos a hacer de fase mínima

$\longrightarrow \angle L(j\omega_{gc}) = \underbrace{\angle P_{mp}(j\omega_{gc}) + \angle P_{ap}(j\omega_{gc})}_{\text{Margen de fase de la parte de fase mínima y la parte pasa todo respectivamente}} + \underbrace{\angle C(j\omega_{gc})}_{\text{Margen de fase del controlador (el que yo diseño).}} \geq -180° + \varphi_m$ → Margen de fase mínimo requerido para la transferencia → Hace que se cumpla

$\angle P_{mp}(j\omega) + \angle C(j\omega) \approx n_{gc}\frac{\pi}{2}$

→ n_{gc} es la pendiente del bode de acuerdo a la relación fase-ganancia en el sistema de mínima fase.

→ Toca buscar que la parte pasa-todo no me meta un retraso de fase mayor a los 30°.

Theorem 14.4 (Gain crossover frequency inequality). *Let $P(s) = P_{mp}(s)P_{ap}(s)$ where P_{ap} is an all-pass transfer function containing the non-minimum phase portion of $P(s)$. If $C(s)$ is a stabilizing compensator for the closed loop system with no right half-plane poles and zeros and with phase margin φ_m, gain crossover frequency ω_{gc}, and gain crossover slope n_{gc}, then the allowable phase lag for the all-pass transfer function must satisfy the inequality*

$$\varphi_{ap} := -\arg P_{ap}(i\omega_{gc}) \leq \pi - \varphi_m + n_{gc}\frac{\pi}{2} := \bar\varphi_{ap}. \qquad (14.10)$$

φ_{ap}	φ_m	n_{gc}	$\pi - \varphi_m + n_{gc}\frac{\pi}{2}$
30°	60°	−1	180° − 60° −90°= 30°
90°	45°	−1/2	180° − 45° −45°= 90°

Ejemplos: Si podemos tolerar un menor margen de fase, entonces podemos aceptar un lag de la parte de no mínima fase algo mayor.

→ Si yo tengo una planta y controlador en tiempo continuo el lazo va a ser $L_0(s) = P(s)\,C(s)$

→ Si pienso la planta y el controlador en tiempo discreto el lazo es $L(s) = e^{-sT/2} P(s)\,C(s)$

↳ El aproximante de Padé correspondiente es $e^{-s\tau} \cong \frac{1 - s\tau/2}{1 + s\tau/2}$

→ En este caso $e^{-sT/2} \cong \frac{1 - sT/4}{1 + sT/4}$

Fórmula de Ackerman

$P(s) = \frac{1}{(s+1)(s-1)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-1}$

$A(s-1) + B(s+1) = 1 \Rightarrow As - A + Bs + B = 1$

$\{ A + B = 0 \Rightarrow B = -A$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ -0{,}5 \end{bmatrix} \qquad (sI - A) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}$

$C = [1 \;\; 1] \qquad D = 0 \qquad \det(sI - A) = (s-1)(s+1) = s^2 - 1 = s^2 + a_1 s + a_2 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = -1 \end{cases}$

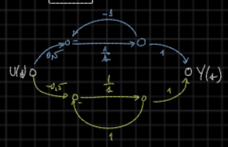
$W_r = [B \;\; AB] \qquad AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow W_r = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \qquad \tilde W_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$-A+B=1 \quad \Rightarrow 2B = 1 \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} B = \frac{1}{2} \\ A = -\frac{1}{2}\end{matrix}}$

$$P(s) = \frac{-0.5}{s+1} + \frac{0.5}{s-1}$$

Tengo polos en -1 y 1



Ahora asumamos que quiero tener mis polos a lazo cerrado en -4 (doble).

$$\det\left(sI - (A - BK)\right) = (s+4)^2 = s^2 + 8s + 16 = s^2 + p_1 s + p_2$$

K son los valores que puedo elegir

Polo doble en -4

$$\Rightarrow \begin{cases} p_1 = 8 \\ p_2 = 16 \end{cases}$$

$$\rightarrow K = [p_1 - a_1 \quad p_2 - a_2]\, \tilde{W}_r W_r^{-1}$$

$$K = [8-0 \quad 16-(-1)] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = [8 \quad 17] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{K = [25 \quad 9]}$$

Controlabilidad

Se trata de la propiedad que el comportamiento de un sistema puede ser controlado por medio de sus entradas

Para que el sistema sea controlable su matriz de controlabilidad (W_r) debe de ser de igual rango al orden del sistema

$$W_r = [B \quad AB \quad A^2B \cdots A^{n-1}B]$$

Si se realimenta el sistema se cumple la ley de control $u = -Kx + k_r r$ donde K es la ganancia con la que se realimenta

$$\tilde{W}_r = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & 1 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$K = (p_1 - a_1 \quad p_2 - a_2 \cdots p_n - a_n)\, \tilde{W}_r W_r^{-1}$$

$$k_f = k_r = -1/\left(C(A-BK)^{-1}B\right)$$

Siendo a_n los términos del polinomio a lazo abierto y p_n los términos del polinomio a lazo cerrado.

Ej:

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u$$

$$y = \underbrace{[2 \quad 0 \quad 0]}_{C} x + \underbrace{0}_{D}$$

Quiero que el sistema realimentado tenga polos en -2 y en $-1 \pm j$ tq. la salida siga asintóticamente a cualquier referencia r.

$$W_r = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$ tiene rango 3 es controlable

$$\Rightarrow \lambda(s) = \det(sI - A) = \begin{bmatrix} s-1 & -1 & 2 \\ 0 & s-1 & -1 \\ 0 & 0 & s-1 \end{bmatrix} = (s-1)^3 = s^3 - 3s^2 + 3s - 1 \begin{cases} a_1 = -3 \\ a_2 = 3 \\ a_3 = -1 \end{cases}$$

Ahora $p(s)$ donde quiero los polos

$$p(s) = (s-(-2))(s-(-1-j))(s-(-1+j)) = (s+2)(s+1+j)(s+1-j)$$
$$= s^3 + 4s^2 + 6s + 4 \begin{cases} p_1 = 4 \\ p_2 = 6 \\ p_3 = 4 \end{cases}$$

Con lo cual $\tilde{W}_r = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \Rightarrow \tilde{W}_r = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \wedge W_r^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow K = [p_1 - a_1 \quad p_2 - a_2 \quad p_3 - a_3]\, \tilde{W}_r W_r^{-1} = [4+3 \quad 6-3 \quad 4+1] \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$K = [15 \quad 47 \quad -8]$$

Para que el sistema siga la referencia en estado estacionario

$$\dot{x} = 0 = Ax + Bu \quad \text{con} \quad u = -Kx + k_r r$$
$$\Rightarrow \dot{x} = Ax + B(-Kx + k_r r) = Ax - BKx + Bk_r r$$
$$= (A - BK)x + Bk_r r$$

Despejando para x $-Bk_r r = (A - BK)x$

$$\Rightarrow x = -Bk_r r (A - BK)^{-1}$$

Si la salida $y = Cx$ tiene que ser igual a la referencia entonces

$$\Rightarrow y = r = Cx = C\left(-Bk_r r (A-BK)^{-1}\right)$$
$$\Rightarrow \cancel{r} = -CBk_r \cancel{r} (A-BK)^{-1} \Rightarrow 1 = -CBk_r (A-BK)^{-1}$$
$$\Rightarrow k_r = \frac{1}{-CB(A-BK)^{-1}} = \frac{-1}{2}$$

Observabilidad

Observador $\rightarrow$ Sistema que permite estimar el vector de estados x a partir de otras señales

Observabilidad: Propiedad que indica si el comportamiento interno puede detectarse a partir de sus salidas

Para que sea observable, la matriz de observabilidad debe ser de rango n (igual al orden del sistema)

$$W_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \tilde{W}_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-2} & a_{n-3} & a_{n-4} & \cdots & 1 & 0 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Con lo cual la ganancia que se debe dar va a estar dada por

$$L = W_o^{-1} \tilde{W}_o \begin{bmatrix} p_1 - a_1 \\ p_2 - a_2 \end{bmatrix} \qquad e = x - \hat{x} \qquad \dot{e} = (A - LC)e$$

Siendo e el error entre los estados x y el estimador $\hat{x}$

Ej:

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -5 & 10 \end{bmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u$$

$$y = \underbrace{[1 \quad -4]}_{C} x + \underbrace{0}_{D}$$

Revisar que el sistema sea observable y diseñar un observador "full-state" con polos $s_{1,2} = -1$.
Graficar el error de estimación $e = x - \hat{x}$ con un error inicial $e(0) = [1 \quad 1]^T$

$$\Rightarrow W_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 21 & -36 \end{bmatrix}$$

Como W_o tiene un rango de 2 igual al orden del sistema, quiere decir que este es observable

$$\rightarrow \lambda(s) = \det(sI - A) = \begin{bmatrix} s-1 & -4 \\ 5 & s-10 \end{bmatrix} = (s-1)(s-10) - (-20) = s^2 - 11s + 30 \begin{cases} a_1 = -11 \\ a_2 = 30 \end{cases}$$

Ahora queremos que la dinámica del error esté dada por

$$p(s) = (s+1)^2 = s^2 + 2s + 1 \begin{cases} p_1 = 2 \\ p_2 = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Queremos usar un observador de la forma $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$

$$\rightarrow L = W_o^{-1} \tilde{W}_o \begin{bmatrix} p_1 - a_1 \\ p_2 - a_2 \end{bmatrix} \rightarrow \tilde{W}_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -11 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 11 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 21 & -36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 11 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2-(-11) \\ 1-30 \end{bmatrix} \Rightarrow L = \begin{bmatrix} -1/4 \\ -53/16 \end{bmatrix}$$

Ahora la respuesta temporal está dada por

$$\dot{e} = (A - LC)e \Rightarrow sE - e(0) = (A - LC)E \Rightarrow (s - A + LC)E = e(0)$$
$$\Rightarrow E = \frac{e(0)}{s - A + LC} \rightarrow e(t) = e^{-(A-LC)t} e(0)$$

$$(A - LC)(x - \hat{x}) = Ax - A\hat{x} - LCx + LC\hat{x}$$
$$Ax + Bu - A\hat{x} - Bu - LC(x - \hat{x})$$
$$Ax + Bu - (A\hat{x} + Bu + LCe)$$
$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$$