Introducción a Sistemas de Control

ALEJANDRO S. GHERSIN

Linealización y transferencia del péndulo

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \sin x_1 + u \end{bmatrix}$$

Linealizado alrededor del equilibrio inestable

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 + u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

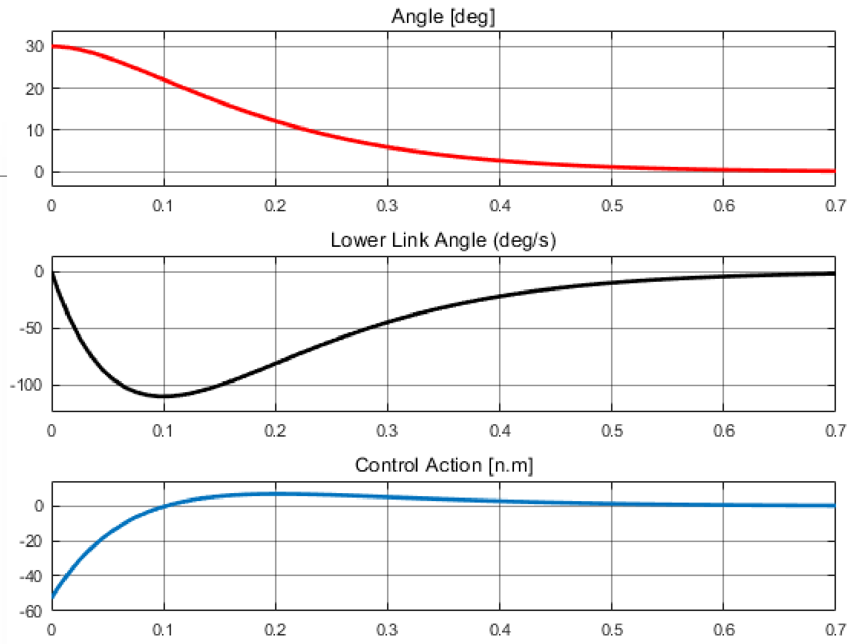
autovalores en $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$.

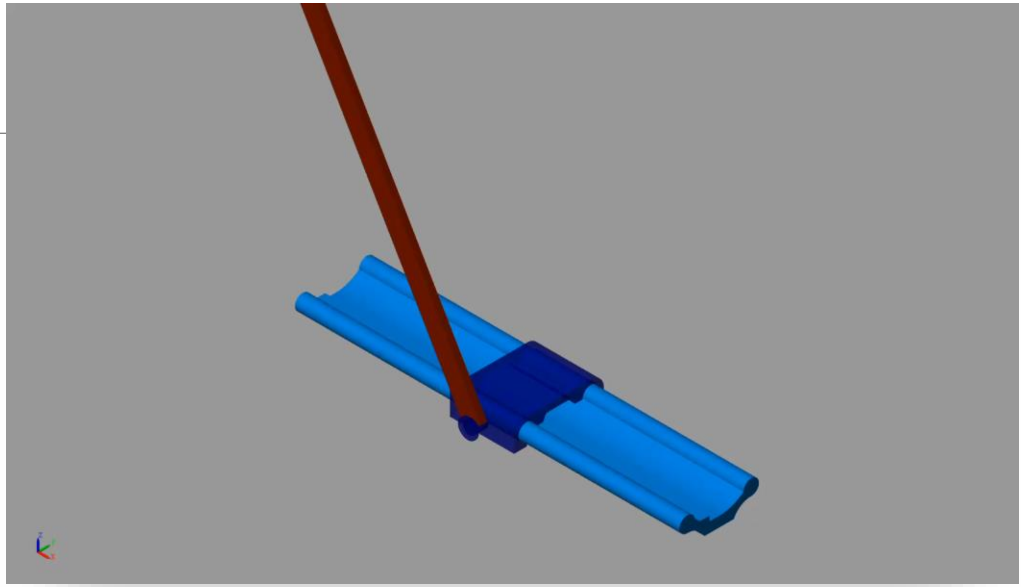
En transferencia, tomando $y = x_1 = [1 \quad 0]x$, la transferencia queda:

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s-1)}$$

Péndulo invertido a Lazo Cerrado

$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_2\\ x_1+u\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}x + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$	**A lazo abierto:** $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1.$
Realimentación de estados:	$u = -k_1x_1 - k_2x_2 = -[k_1 \quad k_2]x$
$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}x - \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}[k_1 \quad k_2]x$	$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}x - \begin{bmatrix}0 & 0\\ k_1 & k_2\end{bmatrix}x$
$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1-k_1 & -k_2\end{bmatrix}x$	
$\lambda(s) = s^2 + k_2s + (k_1 - 1)$	**A lazo cerrado:** $k_1 = 101, k_2 = 20\ \lambda_{1,2} = -10$
$\lambda(s) = s^2 + 20s + 100$	$\lambda(s) = (s+10)^2$


Angle [deg]
30
20
10
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
Lower Link Angle (deg/s)
0
-50
-100
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
Control Action [n.m]
0
-20
-40
-60
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7



Simulación

Root Locus: ¿Qué es? Un ejemplo con $L(s)$ bipropia

$$G(s) = \frac{s+10}{(s+1)(s-1)} = \frac{n_{g(s)}}{d_{g(s)}}, K(s) = k * \frac{(s+1)(s+1)}{s} = \frac{n_{k(s)}}{d_{k(s)}}$$

$$L(s) = k * \frac{(s+1)(s+1)}{s} \frac{s+10}{(s+1)(s-1)} = \frac{k \cdot b(s)}{a(s)} = \frac{k \cdot (s+1)(s+10)}{s(s-1)}$$

$$\lambda(s) = n_{k(s)} n_{g(s)} + d_{k(s)} d_{g(s)} = \Pi(\mathrm{s} - \mathrm{c_i}) \cdot \bar{\lambda}(s)$$

Root Locus: ¿Qué es?
Un ejemplo con $L(s)$ bipropia

$$L(s) = k * \frac{(s+1)(s+1)}{s} \frac{s+10}{(s+1)(s-1)} = \frac{k \cdot b(s)}{a(s)} = \frac{k \cdot (s+1)(s+10)}{s(s-1)}$$

$$\lambda(s) = n_{k(s)} n_{g(s)} + d_{k(s)} d_{g(s)} = \Pi(\mathrm{s} - \mathrm{c_i}) \cdot \bar{\lambda}(s)$$

$\bar{\lambda}(s) = k \cdot b(s) + a(s)$, $a(s)$ y $b(s)$ mónicos.

$$\lambda(s) = k(s+1)(s+1)(s+10) + s(s+1)(s-1)$$

Un ejemplo con $L(s)$ bipropia

$\bar{\lambda}(s) = n_{k(s)} n_{g(s)} + d_{k(s)} d_{g(s)} = k \cdot b(s) + a(s)$

$\bar{\lambda}(s) = k(s+1)(s+10) + s(s-1)$

La raíz que falta $\lambda(s) = (s+1)\bar{\lambda}(s)$. El polo cancelado está fijo.

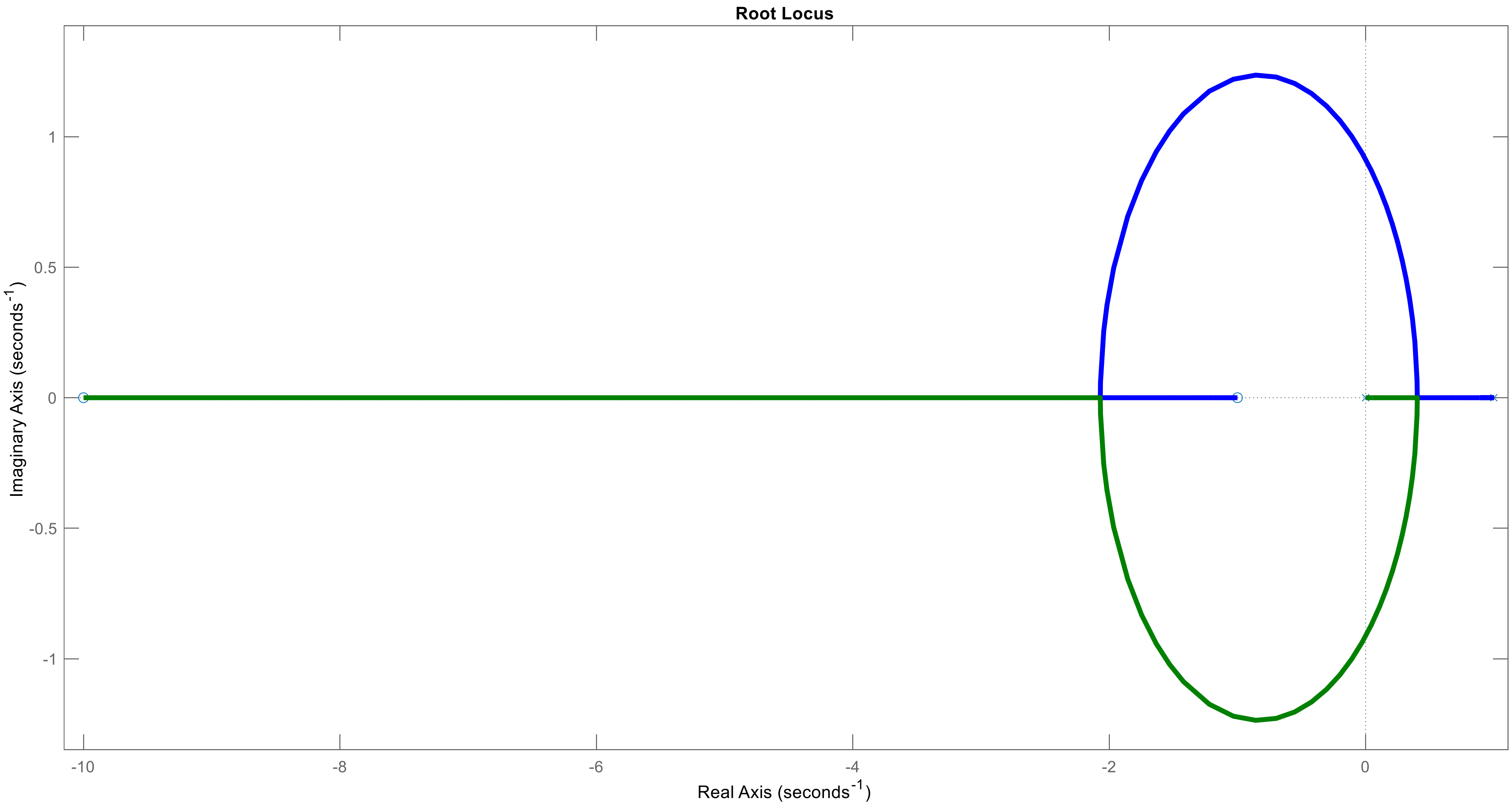
Si $k > 0$ es arbitrariamente chico:

$$\bar{\lambda}(s) \approx a(s) = s(s-1)$$

Si $k > 0$ es arbitrariamente grande:

$$\bar{\lambda}(s) \approx kb(s) = k(s+1)(s+10)$$

Un ejemplo con $L(s)$ bipropia



Caso general (no bipropio):

- $\bar{\lambda}(s) = k \cdot b(s) + a(s)$
- Se puede demostrar que el root locus tiene tantas ramas como el grado de $a(s)$.
- Si $b(s)$ y $a(s)$ son del mismo grado, las ramas del Root Locus empiezan en las raíces de $a(s)$ y terminan en las raíces de $b(s)$.
- Si “$b(s)$” es de menor grado, una cantidad de Ramas igual al grado de de “$b(s)$” empiezan en las raíces de “$a(s)$” y terminan en las raíces de “$b(s)$”. Las restantes ramas tienden asintóticamente a infinito.
- Las rutinas de Matlab/Octave rlocus, resuelven el problema numéricamente lo cual es muy útil para análisis.

Ejemplo: Péndulo invertido

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \sin x_1 + u \end{bmatrix}$$

Linealizado alrededor del equilibrio inestable

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

En transferencia, tomando $y = x_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$, la transferencia queda:

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s-1)}$$

Ejemplo: Péndulo invertido

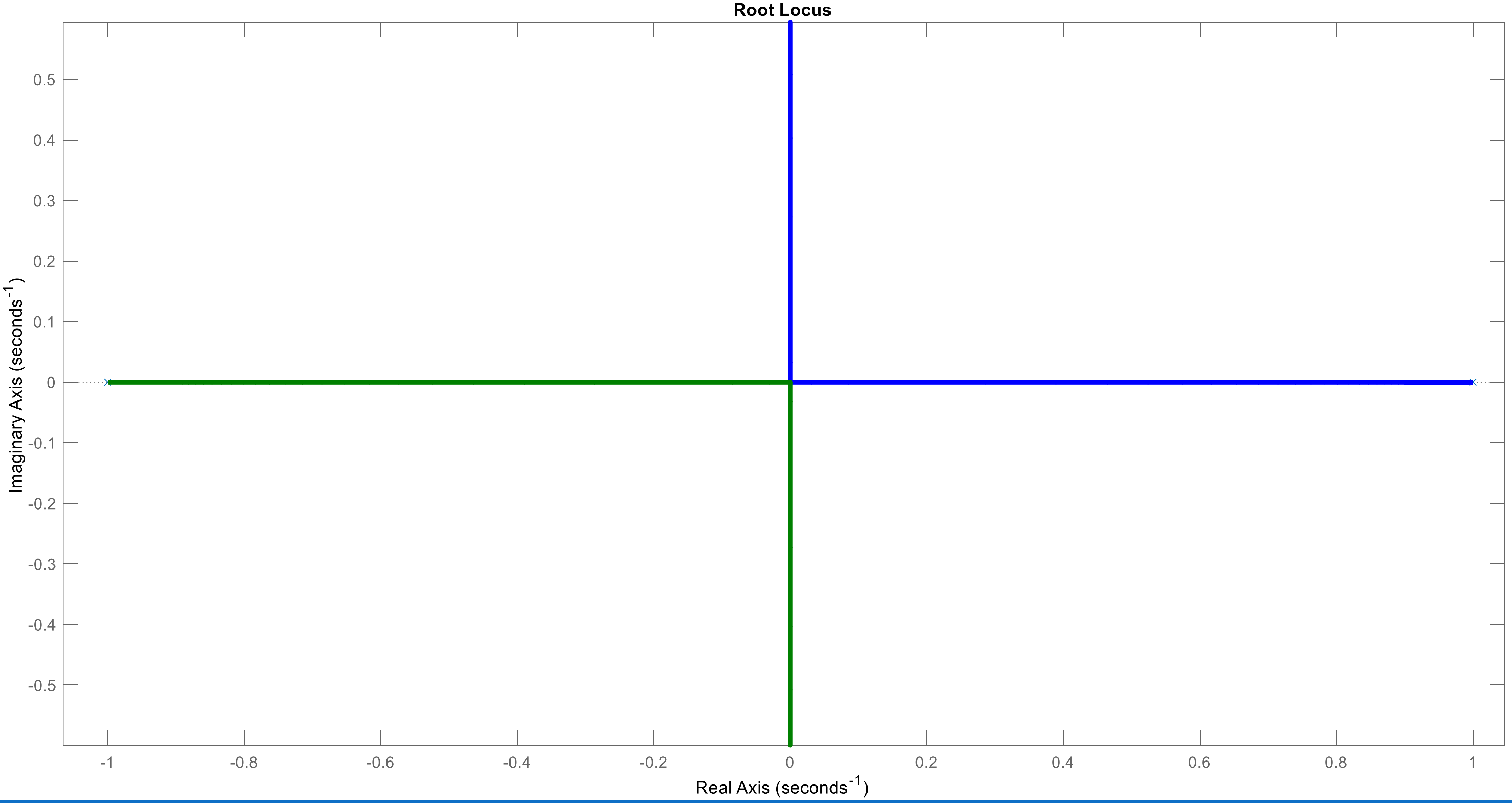
Probamos una realimentación proporcional para el péndulo

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s-1)}, \qquad K(s) = k, \qquad L(s) = \frac{k}{(s+1)(s-1)}$$

$$S(s) = \frac{1}{1+L(s)} = \frac{(s+1)(s-1)}{(s+1)(s-1)+k} = \frac{(s+1)(s-1)}{s^2-1+k}$$

Esto no va a funcionar.

Ejemplo péndulo invertido: Root Locus



Péndulo invertido con un PD:

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s-1)}, \qquad K(s) = k_p + k_d s$$

$$L(s) = \frac{k_p + k_d s}{(s+1)(s-1)}$$

$$S(s) = \frac{1}{1+L(s)} = \frac{(s+1)(s-1)}{(s+1)(s-1)+(k_d s + k_p)} = \frac{(s+1)(s-1)}{s^2 + k_d s + (k_p - 1)}$$

Esto puede funcionar. Si hacemos $k_d = 20$ y $k_p = 101$, nos da lo mismo que la realimentación de estados diseñada antes.

Conclusiones

- Usaremos el Root Locus como método de contrastación y análisis. En OGATA, NISE, Franklin\Powell\Emami y otros, se lo usa también como para diseño.

- La realimentación de estados me permite en general y bajo ciertas condiciones, hacer que los polos de lazo cerrado queden en una ubicación elegida para conseguir una respuesta transitoria deseada.

- En el caso particular del péndulo el controlador PD también permitió esto, pero no es así en general.

- Aun no sabemos cómo estabilizar un lazo de control, qué polos y ceros poner en su transferencia, ni por qué; si va un “P”, “PD”, “PI”, “PID”, “Lead”, “Lag” o qué.

Más Conclusiones

- Ninguno de los dos diseños (que son iguales), permitió conseguir error nulo en estado estacionario a perturbaciones de entrada tipo escalón o a referencias de tipo escalón.

- Porque no hay acción integral, lo cual se puede agregar tanto en un controlador por transferencia como en el caso de un controlador por variables de estado.

- Estos son los dos métodos de diseño a ver en Control I.