FACULTAD
DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Introducción a Sistemas de Control

ALEJANDRO S. GHERSIN

Sistemas en Espacio de Estados

El modelo en espacio de estados está dado por la ecuación diferencial de primer orden "n" dimensional:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t)$$

junto con la ecuación de salida

$$y = h(x, u, t)$$

donde

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados y
- $u(t) \in \mathbb{R}^p$, es el vector de entradas
- $y(t) \in \mathbb{R}^q$, es el vector de salidas

Estado. El estado de un sistema dinámico es el conjunto de variables más pequeño (llamadas *variables de estado*), de forma que el conocimiento de estas variables en $t = t_0$, junto con el conocimiento de la entrada para $t \geqslant t_0$, determinan completamente el comportamiento del sistema en cualquier $t \geqslant t_0$.

Obsérvese que el concepto de estado no está limitado a sistemas físicos. Es aplicable a sistemas biológicos, sistemas económicos, sistemas sociales y otros.

Sistemas en Espacio de Estados

También se puede tener el caso donde ni la "f"

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u)$$

ni la "h"

$$y = h(x, u)$$

dependen de "t".

El caso lineal

Lineal Tiempo Variante (LTV)
$\dot{x} = f(x, u, t) = A(t)x + B(t)u$
$y = h(x, u, t) = C(t)x + D(t)u$

Lineal Tiempo Invariante (LTI)
$\dot{x} = f(x, u) = Ax + Bu$
$y = h(x, u) = Cx + Du$

¿Cómo se ve que es lineal?

Existencia y Unicidad del problema a valores iniciales (PVI):

- Dado el PVI para el sistema autónomo

$$\dot{x}(t) = f(x,t) \text{ con } x(t_0) = x_0$$

con
existe una $x_*(t)$ que es solución, y es única.

- Dada

$$\dot{x}(t) = f(x,u,t)\ con\ x(t_0) = x_0\ y\ u(t) = u_*(t)$$

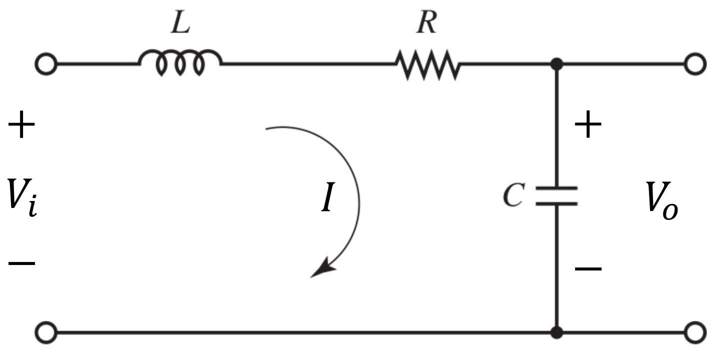
existe una $x_*(t)$ que es solución de la ecuación diferencial y es única.

¿Cómo se ve que es lineal?

Lineal Tiempo Variante (LTV): Control II y Control No Lineal
$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, x(t_0) = x_0$
$y = C(t)x + D(t)u$
$x(t) = \Phi(\mathrm{t}, \mathrm{t}_0)\, x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(\mathrm{t}, \mathrm{t}_0) B(\tau) u(\tau) d\tau$

Lineal Tiempo Invariante (LTI): Control I y Control II
$\dot{x} = Ax + Bu, x(t_0) = x_0$
$y = Cx + Du$
Podemos usar la transformada de Laplace

Un ejemplo simple

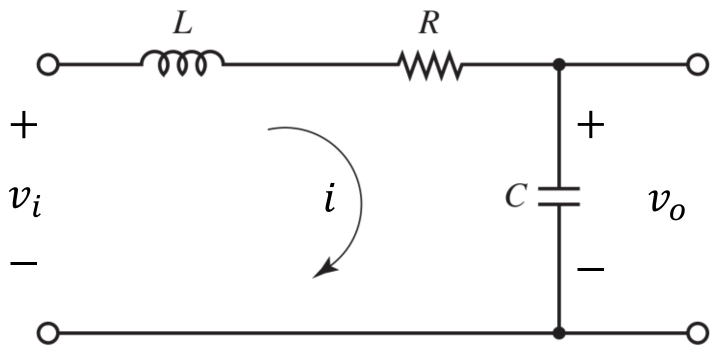


$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{\frac{1}{\mathrm{sC}}}{\frac{1}{\mathrm{sC}} + \mathrm{sL} + \mathrm{R}}$$

$$\frac{1}{\mathrm{s}^2\mathrm{LC} + \mathrm{sCR} + 1} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \xi = \frac{\frac{R}{L}}{2\omega_n}$$

Un ejemplo simple

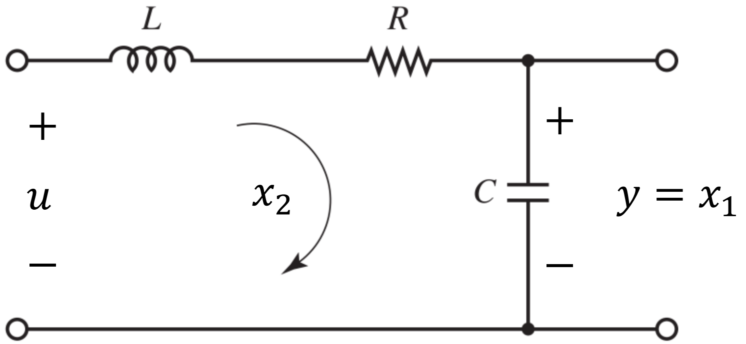


$$v_o = v_C$$
$$x_1 = v_C, x_2 = i_L$$
$$u = v_i, y = x_1$$

$\dfrac{dv_C}{dt} = \dfrac{1}{C} i_C$
$\dfrac{di_L}{dt} = \dfrac{1}{L} v_L$
$v_L = v_i - R\, i_L - v_C$
$i = i_R = i_C = i_L$

Un ejemplo simple

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{C} x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{L}(-x_1 - Rx_2 + u)$$
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C} x_2 \\ \frac{1}{L}(-x_1 - Rx_2 + u) \end{bmatrix}$$



$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$
$$\dot{x} = f(x, u)$$

Un ejemplo simple

$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C}\,x_2 \\ \frac{1}{L}(-x_1 - Rx_2 + u) \end{bmatrix}$	$\dot{x} = Ax + Bu$
$y = x_1$	$y = Cx + Du$
$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}$	$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix}$
$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$	$D = 0$

Espacio de estados a transferencia

$\dot{x} = Ax + Bu$	$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$
$y = Cx + Du$	$Y(s) = CX(s) + DU(s)$

$(sI - A)X(s) = x(0) + BU(s)$
$X(s) = (sI - A)^{-1}[x(0) + BU(s)]$
$Y(s) = CX(s) + DU(s)$
$Y(s) = C\{(sI - A)^{-1}[x(0) + BU(s)]\} + DU(s)$
$Y(s) = C(sI - A)^{-1}x(0) + [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s)$

Ejercicio:

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

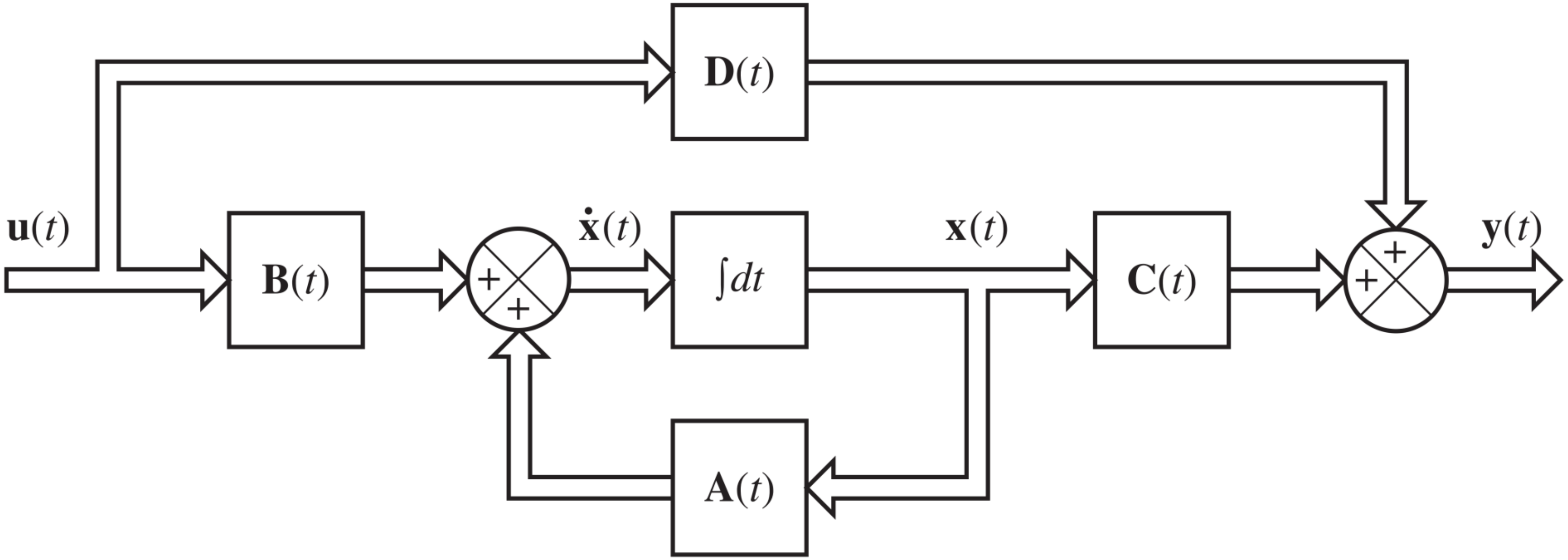
$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, D = 0$$

Encontrar la expresión de la transferencia $Y(s)/U(s)$ en función de A, B, C y D y mostrar que da lo mismo que la obtenida por el método de las impedancias.

Modelos en Espacio de Estados: En BLOQUES

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t)$$



Fenómenos No Lineales

Problema de existencia y unicidad (sistema autónomo):

Dado siguiente problema de valores iniciales:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \qquad\qquad x(t_o) = x_o$$

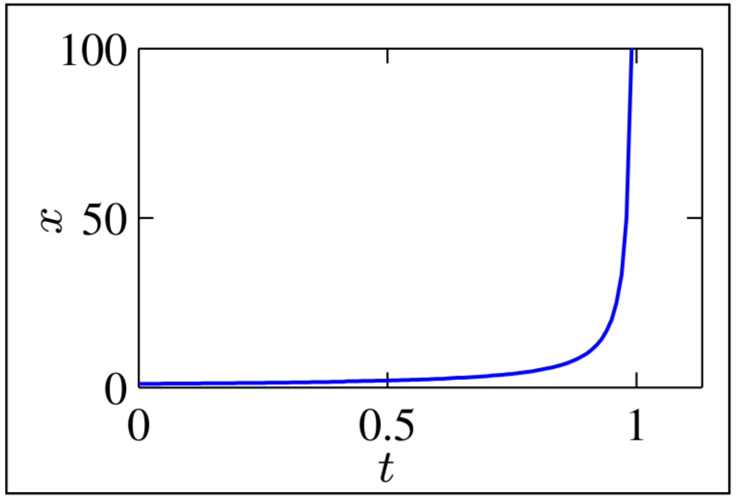
¿Qué le tengo que pedir a la “$f(x)$” como requisito para que tenga sentido práctico como modelo en ingeniería?

Ejemplos que complican:

Comportamiento dinámico: Fenómenos no lineales

Finite escape time

Let $x \in \mathbb{R}$ and consider the differential equation



$$\frac{dx}{dt} = x^2 \qquad x(0) = 1$$

verify that the function $\quad x(t) = \dfrac{1}{1-t}$

satisfies the differential equation and that it also satisfies the initial condition.

the solution goes to infinity as t goes to 1.

this system has *finite escape time*

the solution exists only in the time interval $0 \le t < 1$

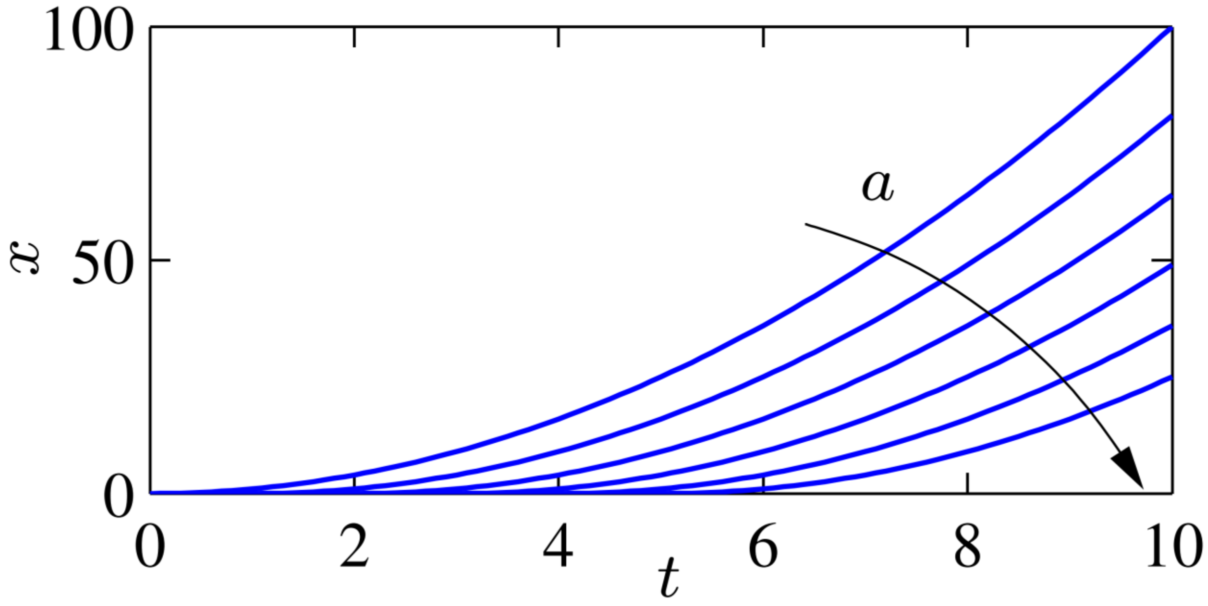
Comportamiento dinámico: Fenómenos no lineales

Nonunique solution

$$\frac{dx}{dt} = 2\sqrt{x} \qquad x(0) = 0$$

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \le t \le a \\ (t-a)^2 & \text{if } t > a \end{cases}$$

$$\frac{dx}{dt} = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \le t \le a \\ 2(t-a) & \text{if } t > a \end{cases}$$



Existencia y Unicidad: Lipschitz

There may be difficulties even with simple differential equations.

Existence and uniqueness can be guaranteed by requiring *Lipschitz continuity*.

The function F for some fixed $c \in \mathbb{R}$,

$$\|F(x) - F(y)\| < c\|x - y\| \quad \text{for all } x, y,$$

A sufficient condition for a function to be Lipschitz is that the Jacobian $\partial F / \partial x$ is uniformly bounded for all x. The difficulty in Example 5.2 is that the derivative $\partial F / \partial x$ becomes large for large x, and the difficulty in Example 5.3 is that the derivative $\partial F / \partial x$ is infinite at the origin.

Solución de la Ec. de Estados vía Laplace (para hacer el TPO1):

Caso Escalar:

$$\dot{x} = ax$$

$$sX(s) - x(0) = aX(s)$$

$$X(s) = \frac{x(0)}{s-a} = (s-a)^{-1}x(0)$$

$$\boxed{x(t) = e^{at}x(0)}$$

Caso Vectorial:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$$

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s)$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}(0)$$

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0)$$

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)}$$

Esta es la

EXPONENCIAL
MATRICIAL

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\mathbf{I}}{s} + \frac{\mathbf{A}}{s^2} + \frac{\mathbf{A}^2}{s^3} + \cdots$$

$$\mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3t^3}{3!} + \cdots = e^{\mathbf{A}t}$$

Solución de la Ecuación de Estados vía Laplace

$$(sI - A)\left(\frac{I}{s} + \frac{A}{s^2} + \frac{A^3}{s^3} + \frac{A^3}{s^4} + \cdots\right) = s\left(\frac{I}{s} + \frac{A}{s^2} + \frac{A^2}{s^3} + \frac{A^3}{s^4} + \cdots\right) - A\left(\frac{I}{s} + \frac{A}{s^2} + \frac{A^2}{s^3} + \frac{A^3}{s^4} + \cdots\right)$$

$$\left(I + \frac{A}{s} + \frac{A^2}{s^2} + \frac{A^3}{s^3} + \frac{A^4}{s^4}\right) - \left(\frac{A}{s} + \frac{A^2}{s^2} + \frac{A^3}{s^3} + \frac{A^4}{s^4} + \cdots\right) = I$$

$$\left(\frac{I}{s} + \frac{A}{s^2} + \frac{A^2}{s^3} + \frac{A^3}{s^4} + \cdots\right) = (sI - A)^{-1}$$

Esta es la

EXPONENCIAL MATRICIAL

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\mathbf{I}}{s} + \frac{\mathbf{A}}{s^2} + \frac{\mathbf{A}^2}{s^3} + \cdots$$

$$\mathscr{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3t^3}{3!} + \cdots = e^{\mathbf{A}t}$$

Nota Sobre la Exponencial Matricial

- Se define como una serie sobre la cual, al igual que en el caso de la exponencial escalar, se prueba la convergencia. En lo relativo a nuestro curso, daremos esta prueba por válida.

- Para el TPO1 se calculará la exponencial matricial a través de la transformada inversa de Laplace de la inversa de (sI-A), la cual existe ***para casi todo "s"***.

- Sobre la base de la exponencial matricial sacamos conclusiones de estabilidad.

- Es conveniente diagonalizar la matriz "A" o llevarla a la forma de Jordan para calcular la exponencial matricial.

Solución Forzada en el Tiempo

Dada:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu \qquad \text{con} \qquad x(0) = x_0$$

Queremos ver que:

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Tiene como derivada temporal a:

$$\frac{dx}{dt} = Ae^{At}x(0) + \int_0^t Ae^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Bu(t)$$

Solución Forzada

Regla de Leibniz (Teorema fundamental del cálculo):

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

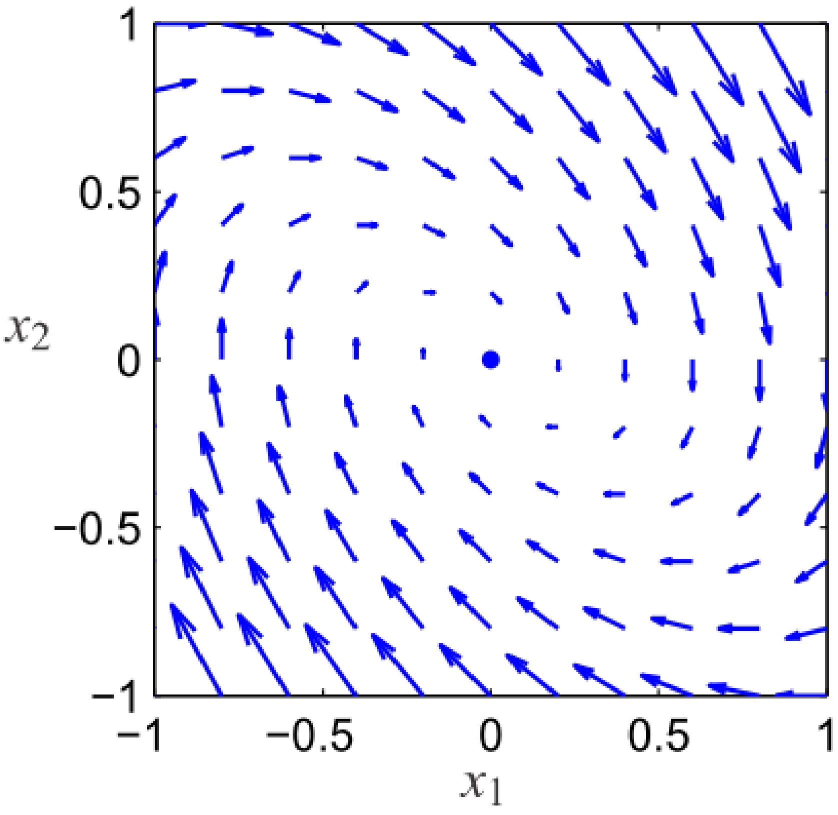
$$\boxed{\frac{d}{dt}\int_{f(t)}^{g(t)} H(t,\tau)d\tau = H(t,g(t))\dot{g}(t) - H(t,f(t))\dot{f}(t) + \int_{f(t)}^{g(t)} \frac{\partial}{\partial t}H(t,\tau)d\tau}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau\right] = e^{A(t-t)}Bu(t) - 0 + \int_0^t Ae^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

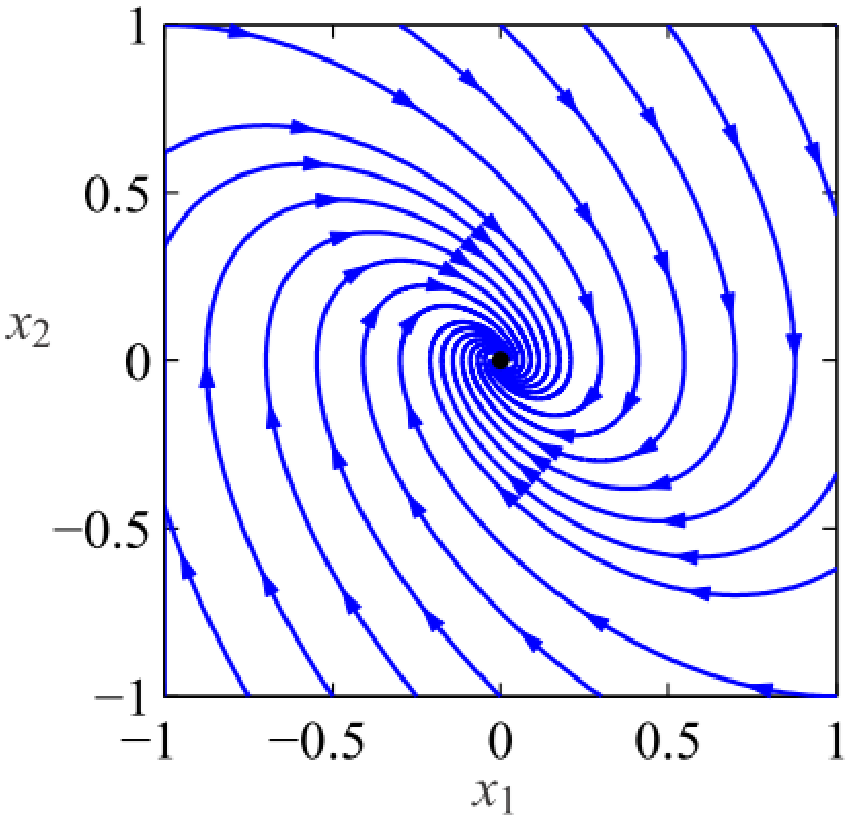
$$= \int_0^t Ae^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Bu(t)$$

Campo Vectorial y Retrato de Fase

$$\frac{dx}{dt} = F(x)$$

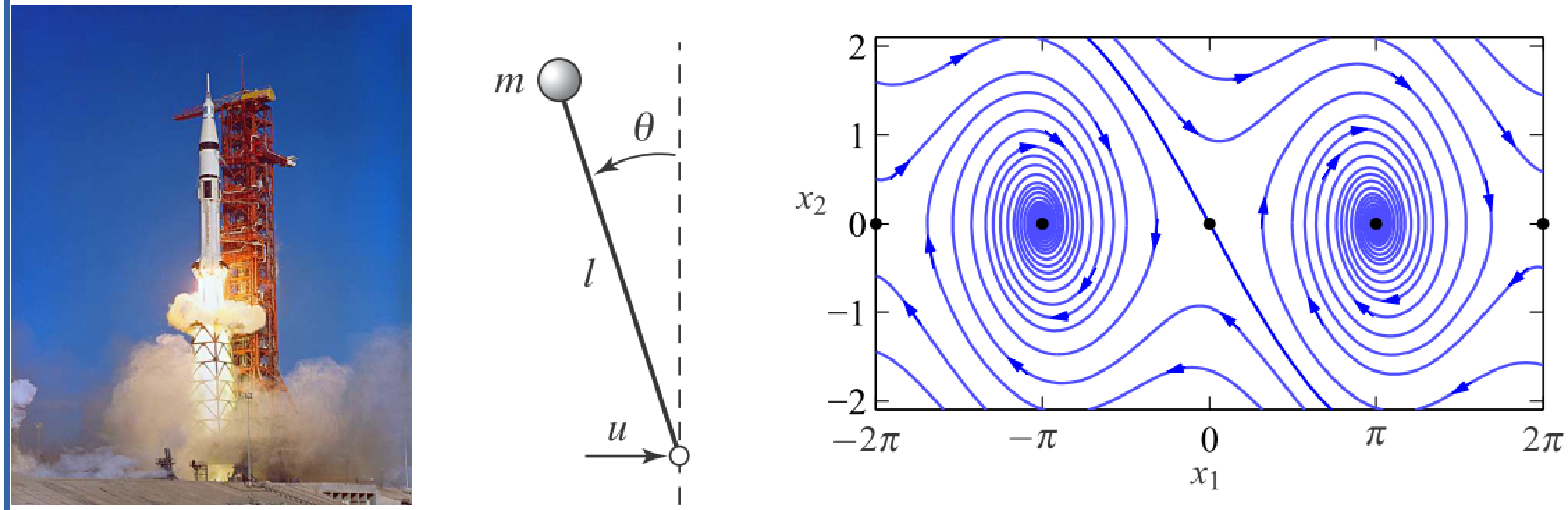


(a) Vector field



(b) Phase portrait

Campo Vectorial y Retrato de Fase



(a) (b) (c)

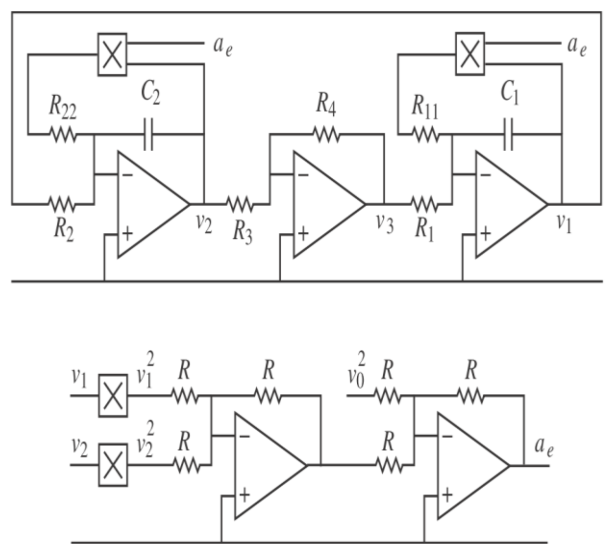
$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \sin x_1 - cx_2 + u\cos x_1 \end{pmatrix}$$

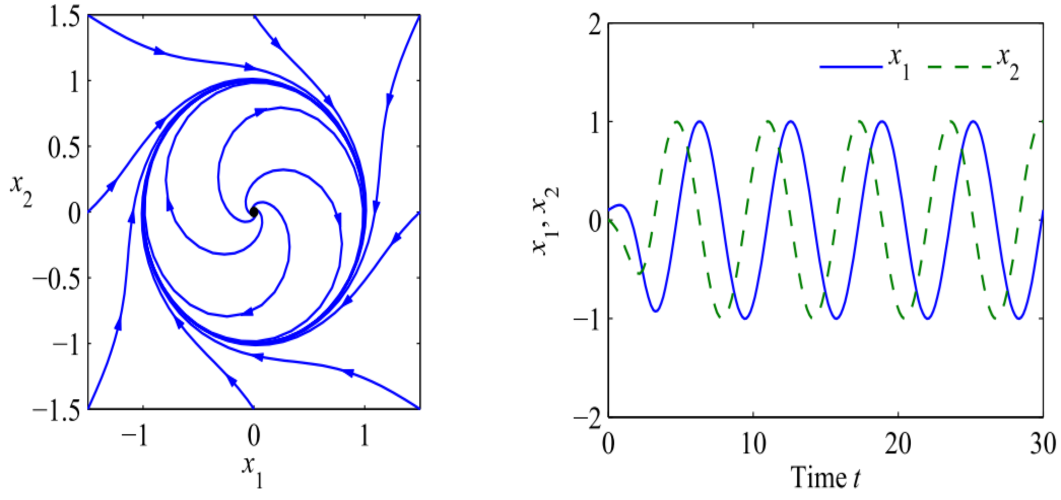
$$mgl/J_t = 1 \text{ and } l/J_t = 1$$

$$x_e = \begin{pmatrix} \pm n\pi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Campo Vectorial y Retrato de Fase

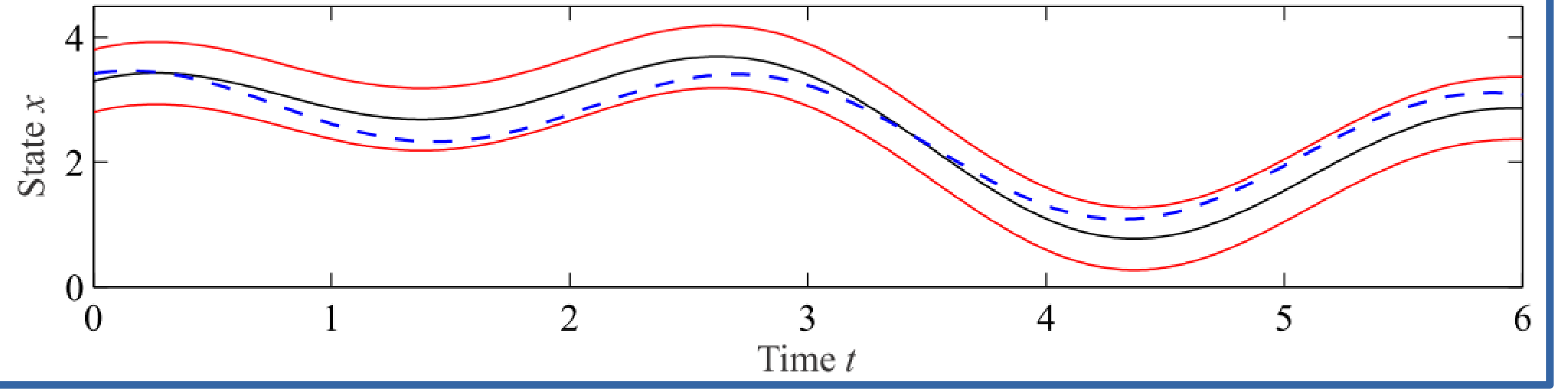
$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2), \qquad \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)$$





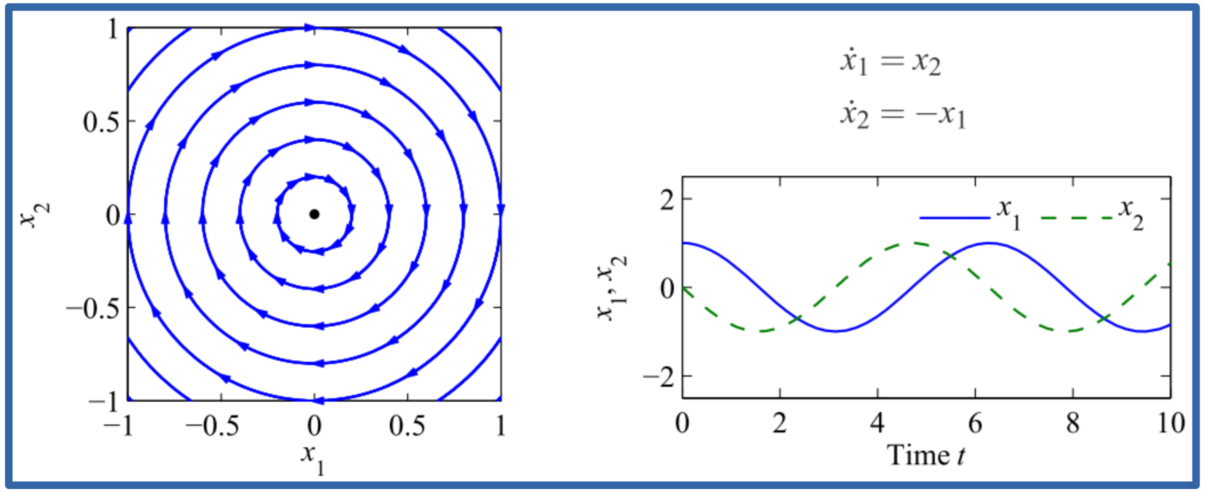
(a)
(b)

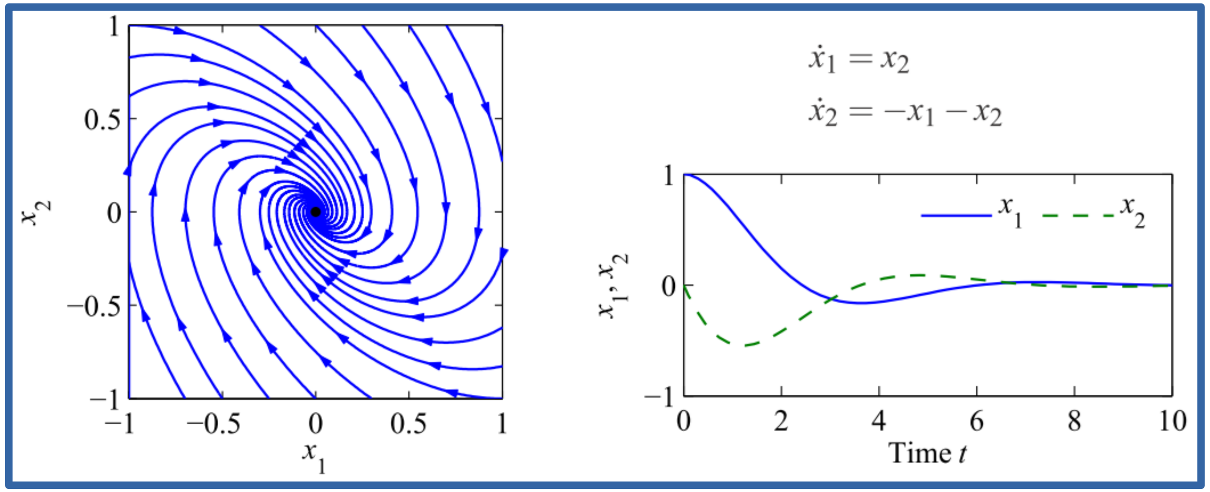
Estabilidad

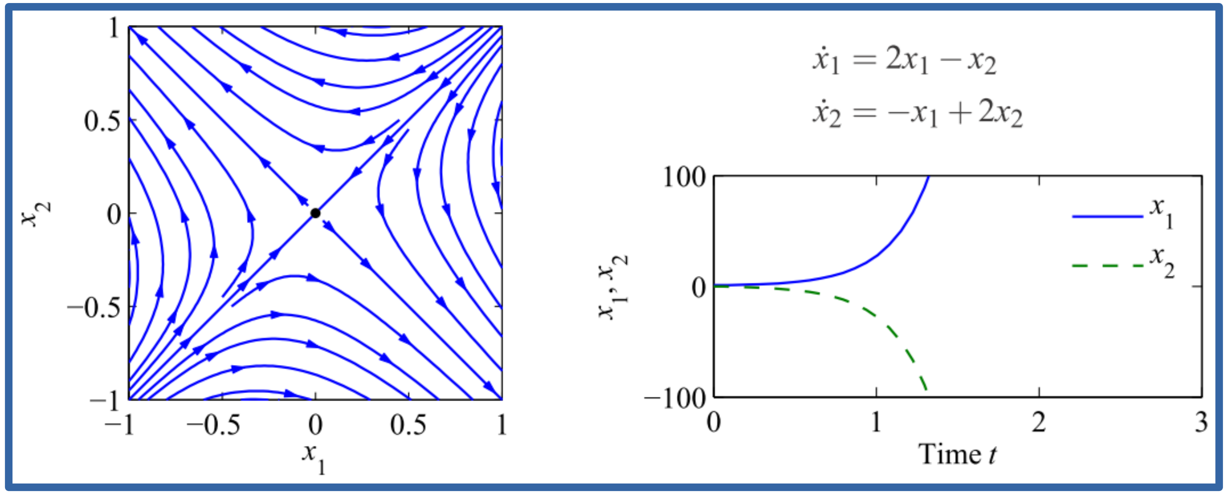


$$\|b-a\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|x(t;b)-x(t;a)\| < \varepsilon \quad \text{for all } t > 0$$

Campo Vectorial y Retrato de Fase







Estabilidad de Sistemas Nolineales: Aproximación lineal

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \sin x_1 - \gamma x_2 \end{pmatrix}$$

$$x = (0,0)$$

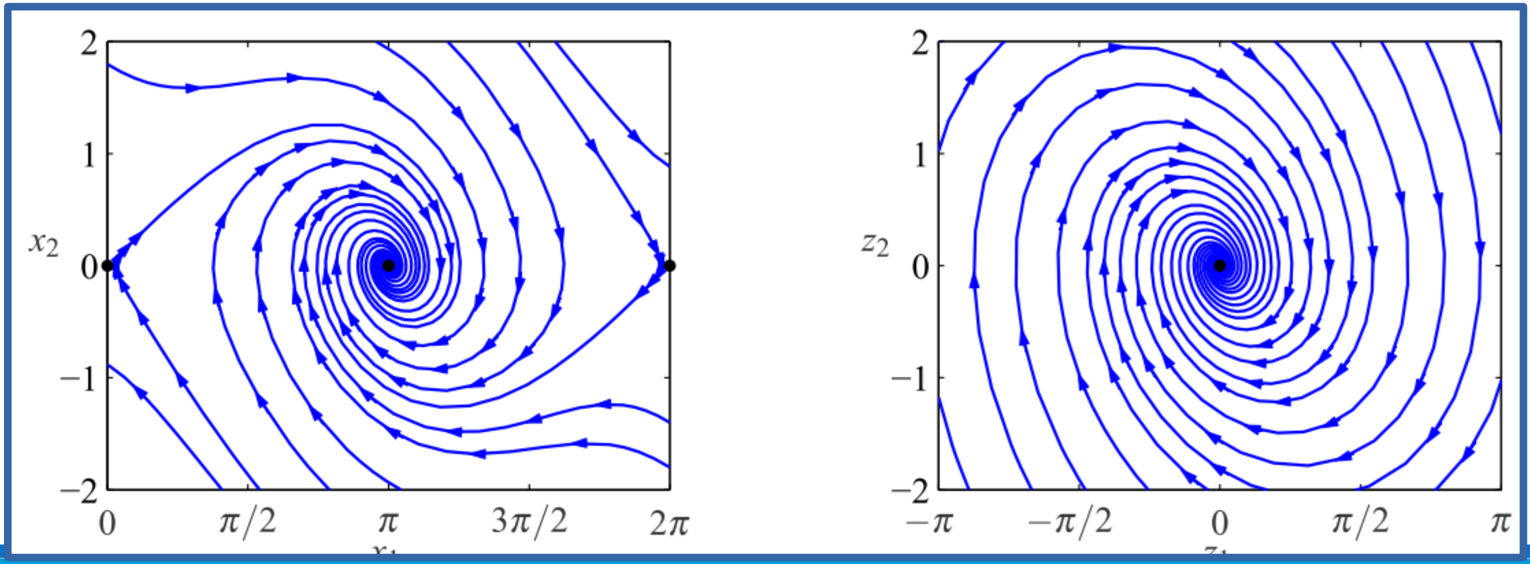
$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 - \gamma x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\gamma \end{pmatrix} x$$

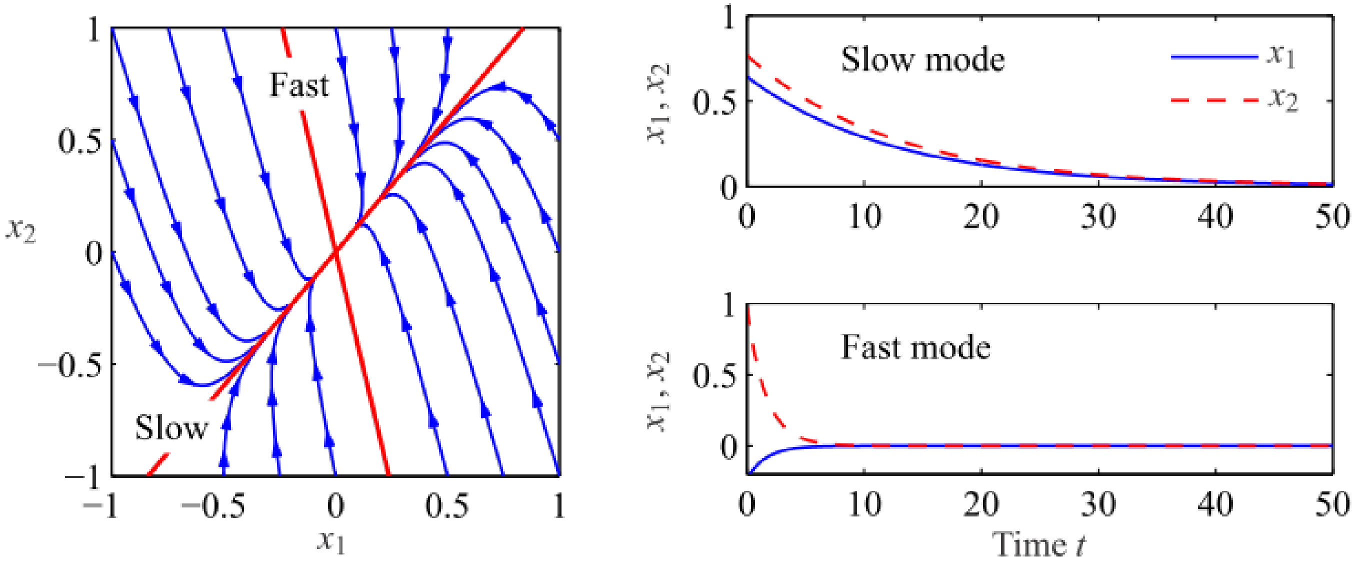
$$\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta \approx -\theta$$

$$\cos(\pi + \theta) = -\cos(\theta) \approx -1.$$

$$x = (\pi, 0)$$

$$\frac{dz}{dt} = \begin{pmatrix} z_2 \\ -z_1 - \gamma z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\gamma \end{pmatrix} z$$





$$\boxed{Av = \lambda v.}$$

$$\boxed{e^{At}v = \left(I + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + \cdots\right)v = v + \lambda t v + \frac{\lambda^2 t^2}{2}v + \cdots = e^{\lambda t}v.}$$

Puntos de Equilibrio

Dado un sistema

$$\dot{x} = f(x, u)$$

si x_e, u_e son tales que $f(x_e, u_e) = 0$ entonces representan un punto de equilibrio.

- Si el sistema tiene como condiciones iniciales a x_e, u_e entonces el mismo permanecerá en ese punto.
- En torno a esos valores, se llevará a cabo la linealización.

Linealización Jacobiana

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u), \qquad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R},$$

$$x = x_e, \; u = u_e$$

$$y = h(x,u), \qquad y \in \mathbb{R},$$

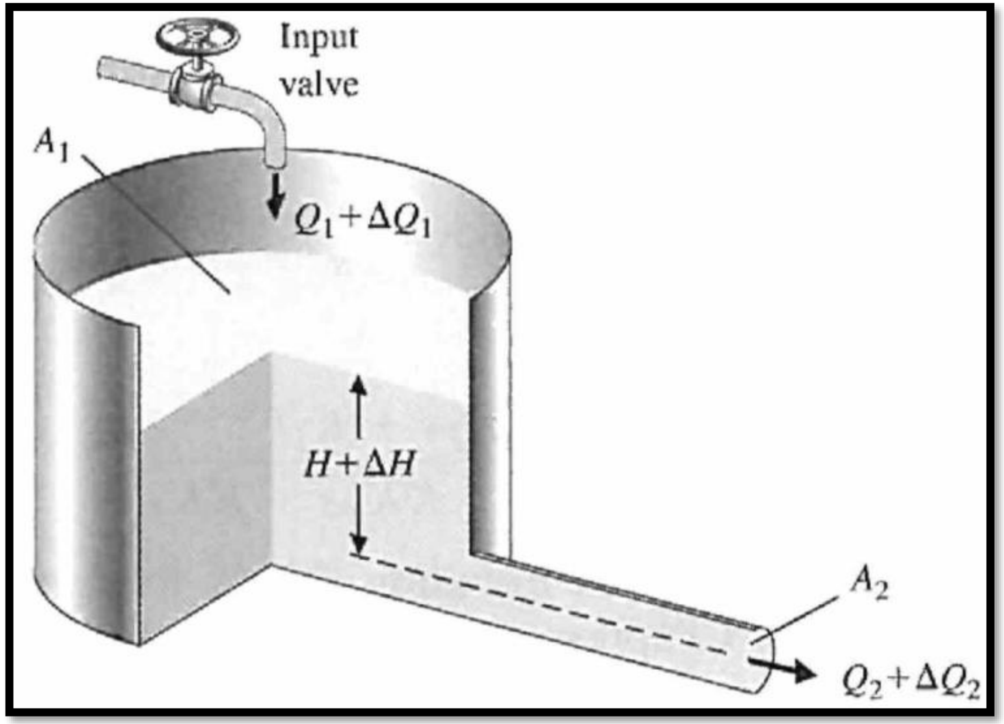
$$z = x - x_e, \qquad v = u - u_e, \qquad w = y - h(x_e, u_e)$$

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_e,u_e)}, \quad B = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(x_e,u_e)}, \quad C = \left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{(x_e,u_e)}, \quad D = \left.\frac{\partial h}{\partial u}\right|_{(x_e,u_e)}$$

$$\frac{dz}{dt} = Az + Bv, \qquad w = Cz + Dv,$$

Linealización: Ejemplo del tanque de agua

Ejemplo Dorf pág. 94 (125 pdf 13ra Ed.)



Densidad y Gravedad:	$\rho = 1000\dfrac{kg}{m^3}$	$g = 9{,}81\dfrac{m}{s^2}$
Secciones transversales:	$A_1 = \dfrac{\pi}{4}m^2$	$A_2 = \dfrac{\pi}{400}m^2$
Valores de equilibrio:	$H^* = 1m$	$Q^* = 34{,}77\dfrac{kg}{s}$

Linealización: Ejemplo Tanque

Masa de agua:	$m = \rho A_1 H$
<u>Variación de masa:</u> Derivada con respecto al tiempo.	$\dot{m} = \rho A_1 \dot{H}$ $\dot{m} = Q_1 - Q_2$
<u>Bernoulli</u>: Balance de energías	$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + P_1 + \rho g H = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + P_2$
Simplificaciones:	$P_1 = P_2 = 0$, porque son presiones relativas y $v_1 = 0$ se desprecia, por ser “chica”.
Por definición:	$Q_2 = \rho A_2 v_2$
De donde se obtiene:	$\mathrm{g}H = \frac{1}{2} v_2^2$ $v_2 = \sqrt{2g} \cdot \sqrt{H}$

Linealización: Ejemplo Tanque

Derivada de la masa con respecto al tiempo:	$\dot{m} = \rho A_1 \dot{H}$ $\dot{m} = Q_1 - \rho A_2 v_2$ $v_2 = \sqrt{2g} \cdot \sqrt{H}$
Operando sobre la ecuación anterior:	$\rho A_1 \dot{H} = Q_1 - \rho A_2 v_2$ $\dot{H} = -\left(\frac{A_2}{A_1}\sqrt{2g}\right)\sqrt{H} + \frac{1}{\rho A_1} Q_1$

Linealización: Ejemplo Tanque

$$\dot{H} = -\left(\frac{A_2}{A_1}\sqrt{2g}\right)\sqrt{H} + \frac{1}{\rho A_1}Q_1$$

$k_1 = -\left(\frac{A_2}{A_1}\sqrt{2g}\right)$	$k_2 = \frac{1}{\rho A_1}$
$k_3 = \rho\sqrt{2g}A_2$	$x = H$
$u = Q_1$	$y = Q_2$

$$\dot{x}(t) = f(x,u) = k_1\sqrt{x(t)} + k_2 u(t)$$

$$y = h(x,u) = k_3\sqrt{x}$$

Linealización: Ejemplo Tanque

Simplificamos el problema: $$k_1 = -1, k_2 = k_3 = 1$$	$$\dot{x}(t) = f(x,u) = -\sqrt{x(t)} + u(t)$$ $$y = h(x,u) = \sqrt{x}$$
Para $x_e = 1, u_e = 1, y_e = 1$, la linealización queda:	$$\dot{z} = -\frac{1}{2}z + v$$ $$w = \frac{1}{2}z$$

- Verificar el resultado como ejercicio.
- Calcular el valor de x_e y de y_e para un u_e genérico.

Simulink del Problema

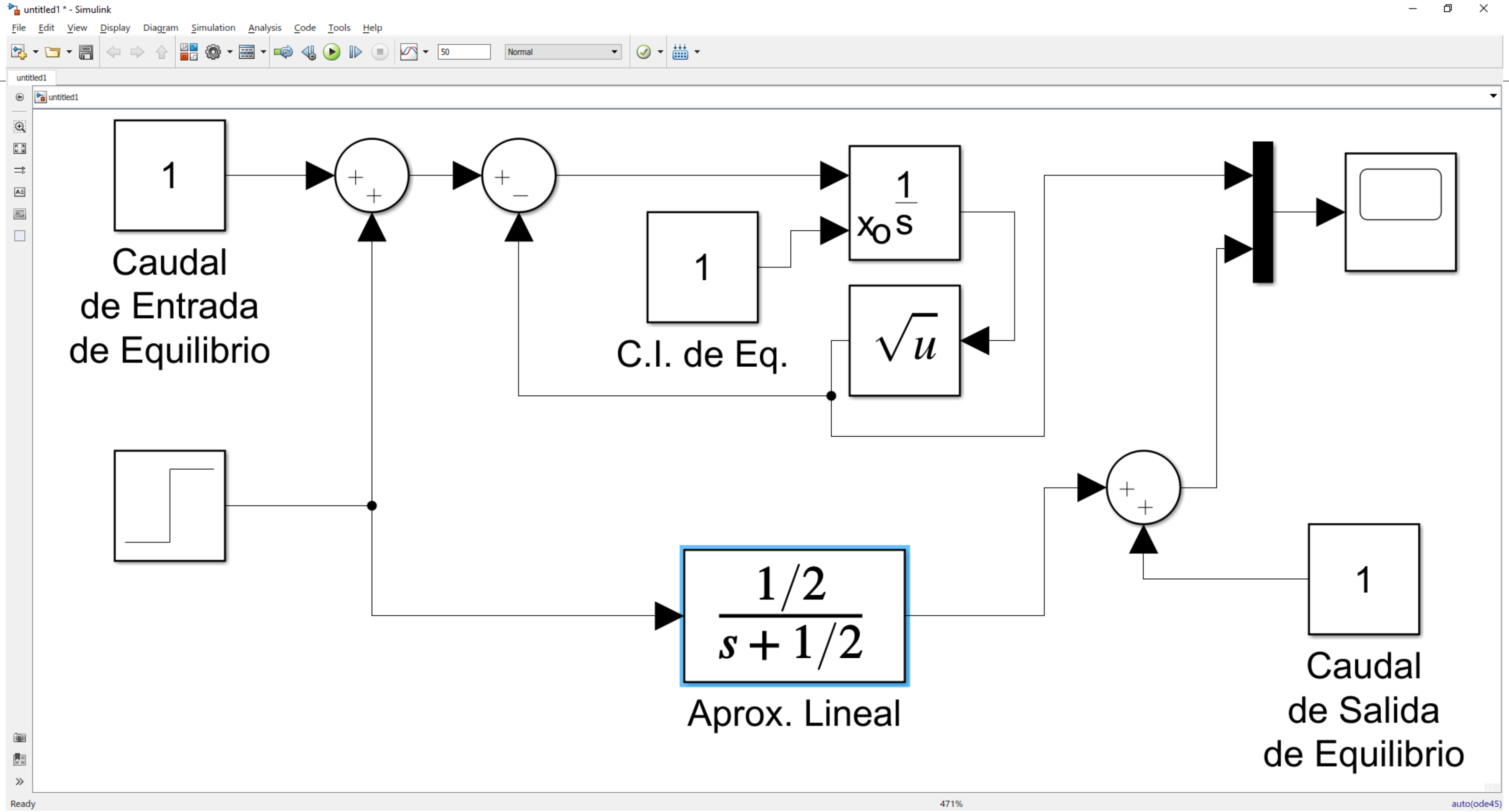


Gráfico de la Simulación, no lineal vs. Linealizado.