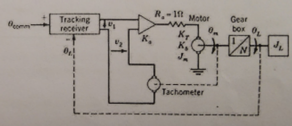
La figura muestra un sistema de seguimiento de satélites. El controlador posee una función transferencia de la forma:

V1 (s)/(θcomm - θL) = 5/(1 + s/40π) (tracking receiver)

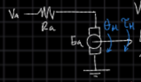
Además:
Ka: ganancia del servoamplificador = 60
Kt: constante del tacómetro = 0.04 volts seg
KT: constante de torque del motor 0.5 Nm/A
Kb: constante f.c.e.m. del motor= 0.75 volts seg
JL: inercia de la antena = 2880 kg m^2
Jm: inercia del motor = 0.007 kg m^2
1:N = relación de engranajes = 1: 12000



a) Obtener la transferencia del Conjunto Motor-Antena
b) Obtener el diagrama en bloques completo
c) Hallar la función transferencia θL(s)/θcomm(s)

a) Estoy buscando θ_L/V_A

Desde el motor



$V_A - I_A R_A = E_A \rightarrow V_A = E_A + I_A R_A$

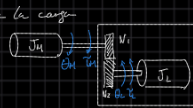
$E_A = K_b\, \omega_M = K_b\, \dot{\theta}_M$

$\tau_M = K_\tau \cdot I_A \Rightarrow I_A = \frac{\tau_M}{K_\tau}$

$\Rightarrow V_A = K_b\, s\,\theta_M + \frac{\tau_M}{K_\tau} R_A$ (I)

Ahora hay que dejar θ_M y τ_M en términos de θ_L
Se pasa al análisis mecánico

Desde la carga



Busquemos reflejar este pedazo de la carga

$\frac{\theta_M}{\theta_L} = \frac{N_2}{N_1} = N \Rightarrow \theta_M = N\theta_L \wedge \theta_M = N\theta_L$

Por trabajo se que

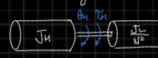
$\tau_M \theta_M = \tau_L \theta_L \Rightarrow \tau_L = \tau_M \frac{\theta_M}{\theta_L}$

$\left.\right\} \tau_L = N\tau_M$

Planteo la segunda carga

$\tau_L = s^2\theta_L J_L \Rightarrow N\tau_M = s^2\left(\frac{1}{N}\right)\theta_M J_L \Rightarrow \tau_M = s^2\theta_M\left(\frac{J_L}{N^2}\right)$

Esta expresión está en términos de τ_M y θ_M, como si estuviera conectada al mismo eje que está J_M
El nuevo segundo momento de inercia es $\frac{J_L}{N^2}$



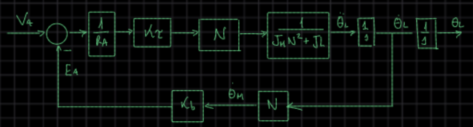
$\tau_M = s^2\theta_M\left(J_M + \frac{J_L}{N^2}\right)$

Sabíamos que $\theta_M = N\theta_L$ (II) $\Rightarrow \tau_M = s^2 N\theta_L\left(J_M + \frac{J_L}{N^2}\right)$ (III)

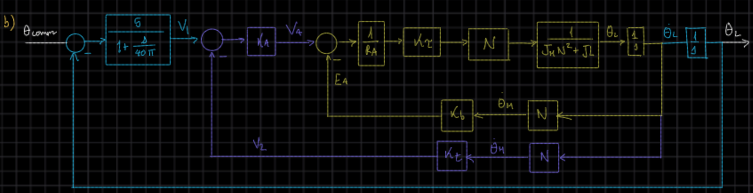
Reemplazando (II) y (III) en (I)

$$V_A = K_b\, s\, N\theta_L + \frac{R_A}{K_\tau}s^2 N\theta_L\underbrace{\left(J_M + \frac{J_L}{N^2}\right)}_{\frac{J_M N^2 + J_L}{N^2}} = \theta_L\left[s\left(K_b N + \frac{R_A}{K_\tau}s\left(\frac{J_M N^2 + J_L}{N}\right)\right)\right] \rightarrow \frac{\theta_L}{V_A} = \frac{1}{s\left[K_b N + s\frac{R_A}{K_\tau}\left(\frac{J_M N^2 + J_L}{N}\right)\right]} = \frac{\frac{K_\tau N}{R_A(J_M N^2 + J_L)}}{s\left[s + \frac{K_b K_\tau N^2}{R_A(J_M N^2 + J_L)}\right]} \rightarrow \frac{\frac{K_\tau N}{s R_A(J_M N^2 + J_L)}}{s\left[1 + \frac{K_\tau N}{s R_A(J_M N^2 + J_L)}\cdot(N\cdot K_b)\right]}$$

$$s\left[\frac{K_b K_\tau N^2 + s R_A(J_M N^2 + J_L)}{K_\tau N}\right]$$



b)



c) Digamos que todo esto es $G(s)$ K_t

$\frac{1}{s}G(s) = \frac{\theta_L}{V_A} \Rightarrow G(s) = \frac{\theta_L}{V_A}\cdot s$

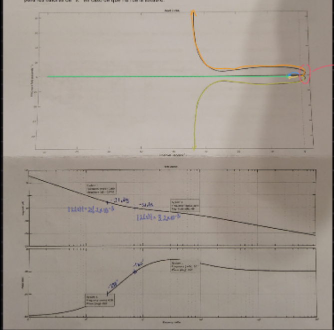
Todo esto sería $\frac{K_A G}{1 + K_A G K_t N}$

$$\frac{\theta_A}{\theta_{comm}} = \frac{\left[\frac{5}{1 + \frac{s}{40\pi}}\right]\cdot\frac{1}{s}\left[\frac{K_A G}{1 + K_A G K_t N}\right]}{1 + \left[\frac{5}{1 + \frac{s}{40\pi}}\right]\cdot\frac{1}{s}\left[\frac{K_A G}{1 + K_A G K_t N}\right]} = \frac{5K_A G}{5K_A G + s\left(1 + \frac{s}{40\pi}\right)\left(1 + K_A G K_t N\right)}$$

Problema 2 Dada la transferencia de lazo abierto

$$L(s) = \frac{k(s+4)^3}{s^4(s+80)}$$

cuyos diagramas de Root Locus y Bode se ven abajo trazados para $k = 1$, realizar el diagrama de Nyquist a mano. El diagrama debe reflejar cualitativamente cómo se comportará el sistema a lazo cerrado para distintos valores de "k". Determinar aproximadamente, para qué rango de valores de "k" el sistema es estable y cuántos polos inestables tiene para los valores de "k" en caso de que no fuera estable.



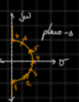
$L(s) = \frac{K(s+4)^3}{s^4(s+80)} \Rightarrow \lambda(s) = \underbrace{K(s+4)^3}_{\text{lazo cerrado}} + \underbrace{s^4(s+80)}_{\text{lazo abierto}}$

→ Las ramas empiezan en 0 y −80
Van a haber 5 ramas

→ 3 van a converger, 2 se van al ∞.

→ Va a haber inestabilidad entre $0 < K < X$
Ahora busco X

Por el polo en el origen me toca hacer una circulación de Nyquist alrededor del origen



Da 0 de fase alrededor del origen

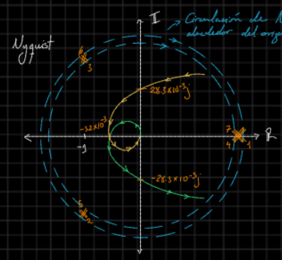
$L(\varepsilon e^{j\theta}) = \frac{K(\varepsilon e^{j\theta} + 4)^3}{(\varepsilon e^{j\theta})^4(\varepsilon e^{j\theta} + 80)}$ con $\varepsilon > 0$ infinitesimalmente pequeño

Da fase de 0 alrededor del origen

$\Rightarrow L(\varepsilon e^{j\theta}) = \frac{K}{(\varepsilon e^{j\theta})^4} = \frac{K}{\varepsilon^4 e^{j4\theta}} = \frac{K}{\varepsilon^4}e^{-j4\theta}$

	θ	$e^{-j4\theta}$	∠L(s)
1	−90°	j360	360°
2	−60°	j240	240°
3	−30°	j120	120°
4	0°	j0	0°
5	30°	−j120	−120°
6	60°	−j240	−240°
7	90°	−j360	−360°

Nyquist



$Z = N + P$
$N = 2$
$P = 0$
$Z = 2$
Hay dos polos inestables a lazo cerrado

Quiero que el sistema sea estable
↳ Me interesa que la "burbuja" que se genera encierre al −1.

$\Rightarrow K(-3.2\times10^{-3}) < -1 \longrightarrow K > \frac{-1}{(-3.2\times10^{-3})} \approx 316.23 = X$

Rangos de estabilidad:

→ Si $0 < K < 316.23$ el sistema es inestable y va a tener dos polos inestables

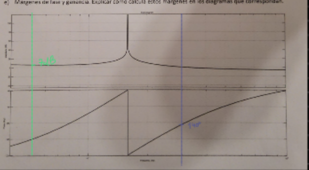
→ Si $K > 316.23$ el sistema va a ser estable
En este caso $N = 2 - 2 = 0 \Rightarrow Z = 0$

Problema 3 Dado el lazo con realimentación unitaria compuesto por planta y controlador dados por:

$$P(s) = \frac{1}{(s-1)(s+1)} \qquad C(s) = k\frac{(s+1)^5}{s(s^2+1)}$$

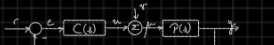
Y dada la curvas de Bode que se ven más abajo, evaluar:

a) Si es Verdadero o Falso:
  a. Que el lazo tiene error nulo en estado estacionario a señales de referencia tipo escalón.
  b. Que el lazo tiene error nulo en estado estacionario a señales de referencia senoidales de pulsación $\omega = 1\frac{rad}{s}$.
  c. Que el lazo tiene salida nula en estado estacionario ante perturbaciones de entrada tipo escalón.
  d. Que el lazo tiene salida nula en estado estacionario ante perturbaciones de entrada senoidales de pulsación $\omega = 1\frac{rad}{s}$.
  Fundamentar todo junto en una sola respuesta indicando como se procede para determinar si las proposiciones son verdaderas o falsas.
b) Si el lazo es internamente estable:
  a. para valores $k > 0$ arbitrariamente chicos.
  b. para valores $k > 0$ arbitrariamente grandes.
c) ¿Cuál es el contorno de Nyquist que debe usarse en este problema para trazar el diagrama de Nyquist? Haga un esbozo del mismo.
d) ¿Qué problema presenta el controlador propuesto así como está? ¿Cómo lo resolvería sin romper el diseño?
e) Márgenes de fase y ganancia. Explicar cómo calcula estos márgenes en los diagramas que correspondan.



$L(s) = C(s)P(s) = \underbrace{\frac{K(s+1)^{5\,4}}{s(s^2+1)}\cdot\frac{1}{(s-1)\cancel{(s+1)}}}_{} = \frac{K(s+1)^4}{s(s-1)(s^2+1)}$

Esta cancelación polo/cero es perfectamente legal al tratarse de un punto en el semiplano izquierdo.



a) a- ¿Tiene error nulo a referencia ⎍?

$e(t\to\infty) = \lim_{s\to0} s\,E(s)$

La transferencia de $r \to e$ es $\frac{1}{1 + L(s)}$

$\Rightarrow E(s) = R(s)\frac{1}{1+L(s)} \wedge R(s) = \frac{1}{s}\left(\mathcal{L}[u(t)]\right)$

$\Rightarrow e(t\to\infty) = \lim_{s\to0}\cancel{s}\frac{1}{\cancel{s}}\cdot\frac{1}{1+L(s)} = \left.\frac{1}{1+L(s)}\right|_{s=0}$

$\frac{1}{1+L(s)} = \frac{s(s-1)(s^2+1)}{s(s-1)(s^2+1) + K(s+1)^4} \Rightarrow \left.\frac{1}{1+L(s)}\right|_{s=0} = 0$

Verdad → el error estacionario es 0.

b- ¿El lazo tiene error estacionario 0 a referencia senoidal de $\omega = 1$?

Miremos la transferencia $r \to e = S(s) = \frac{1}{1+L(s)}$

$\Rightarrow E(s) = R(s)S(s)$ para $s = j$ $E(j) = R(j)S(j) = \frac{R(j)}{1+L(j)}$

Pero en el bode se ve como $|L(s)|\big|_{s=j} \to \infty$
Con lo cual $E(j) = 0$

Verdad → el error estacionario de una senoidal $\omega = 1$ es 0.

c- ¿Salida nula a perturbaciones tipo escalón?

$y(t\to\infty) = \lim_{s\to0} s\,Y(s)$ transferencia $v\to y = PS(s) = \frac{P(s)}{1+L(s)}$

$\Rightarrow Y(s) = \frac{P(s)}{1+L(s)}V(s)$ y $V(s) = \mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}$

$\Rightarrow y(t\to\infty) = \lim_{s\to0}\cancel{s}\frac{1}{\cancel{s}}\underbrace{\frac{P(s)}{1+L(s)}}_{} = \left.\frac{n_p(s)\,d_c(s)}{\lambda(s)}\right|_{s=0} = 0$

$\frac{\frac{n_p}{d_p}}{1 + \frac{n_p n_c}{d_p d_c}} = \frac{n_p d_c}{\lambda(s)}$

$n_p(0)d_c(0) = 0(0^2+1)\cdot1 = 0$ $\lambda(0) = (0+1)\left[K(0+1)^4 + (0)(0-1)(0^2+1)\right] = K$

Verdad → La salida estacionaria es nula a perturbaciones del tipo escalón

d- ¿Tiene salida nula a perturbaciones senoides de $\omega = 1$?

$Y(s) = PS(s)V(s)$ con $V(s) = \mathcal{L}[\operatorname{sen}(t)]$

$PS(s)V(s) = \frac{P(s)V(s)}{1+L(s)}$

Como $|L(s)| \to \infty$ para $\omega = 1$ en el bode, el denominador va a $\to\infty$ haciendo que $Y(s) \to 0$

Verdadero → la salida estacionaria es nula a una perturbación senosoidal de $\omega = 1$.

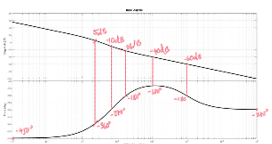
b) $\lambda(s) = (s+1)\left[K(s+1)^4 + s(s-1)(s^2+1)\right]$ con $K > 0$
→ Si K es arbitrariamente pequeño los ceros van a tender a $0, 1, \pm j$ haciendo inestable al sistema.
→ Si K es arbitrariamente grande los ceros van a tender a −1 haciendo estable el sistema.

c) $L(s) = \frac{K(s+1)^4}{s(s-1)(s^2+1)}$ → Tiene un polo inestable en $s = 1$
Tiene polos conjugados en $\pm j$

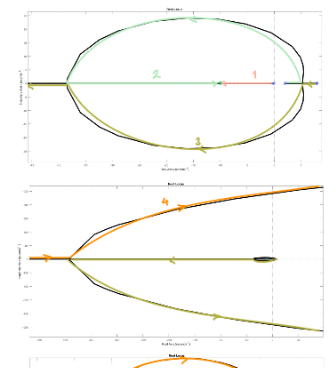
d) El controlador es impropio
Debo agregar polos lejos del origen para hacerlo propio y no alterar su funcionamiento
Los polos deben estar en el semiplano izquierdo.

e) Margen de fase: 180° − 145° = 35°
Margen de ganancia: 0dB − 7dB = −7dB

Problema 2 Dado el lazo $L(s) = k\frac{(s+10)^2(1000-s)}{s(s-2)(s-8)(s+1000)}$ con el siguiente Bode (hecho para $k = 1$):



a) Trazar el diagrama de Nyquist para $k = 1$.
b) Identifique las ramas del Root Locus del problema el cual se provee con tres niveles de ampliación. Ubique el centroide y las asíntotas. Use el Root Locus como ayuda para el punto siguiente.
c) En base al Bode y al Nyquist (grafíquelo más grande si lo necesita), estime aproximadamente los intervalos de ganancia $k > 0$ para los cuales el sistema es estable o inestable y cuántos polos inestables tiene en cada intervalo si los tuviere.



1) Nyquist

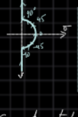
$-450° = -90°$
$-270° = 90°$

La transferencia L(s) tiene dos polos inestables (2 y 8)
P = 2

Debemos analizar la circulación alrededor del origen

$L(\varepsilon e^{j\theta}) = K\frac{(\varepsilon e^{j\theta} + 10)^2(1000 - \varepsilon e^{j\theta})}{\varepsilon e^{j\theta}(\varepsilon e^{j\theta} - 2)(\varepsilon e^{j\theta} - 8)(\varepsilon e^{j\theta} + 1000)} \rightarrow \angle L(\varepsilon e^{j\theta}) = -\theta$

Este es el término que me va a definir la circulación



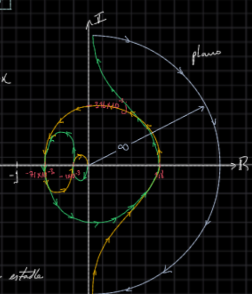
θ	$e^{-j\theta}$	∠L(s)
−90°	$e^{j90°}$	90°
−45°	$e^{j45°}$	45°
0°	e^{j0}	0°
45°	$e^{-j45°}$	−45°
90°	$e^{-j90°}$	−90°

En este estado P = 2

Z = N + P = 2
Ahora, si $-71\times10^{-3}K < -1 < -1\times10^{-3}K$
el sistema será estable al ser N = −2
Si $-1 > -1\times10^{-3}K$ se vuelve a hacer inestable

$\Rightarrow -71\times10^{-3} < -1/K < -1\times10^{-3}$
$71\times10^{-3} > 1/K > 1\times10^{-3}$
$\frac{1}{71\times10^{-3}} < K < \frac{1}{1\times10^{-3}}$

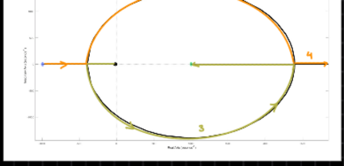
$\underline{14 < K < 1000}$
En este rango el sistema es estable



Si $0 < K < 14$
→ El sistema es inestable y tiene 2 polos
N = 0

Si $14 < K < 1000$
→ El sistema es estable
N = −2

Si $K > 1000$
→ El sistema es inestable y tiene 2 polos
N = 1 − 1 = 0



→ Va a haber 4 ramas. 3 van a converger y 1 se va a ir al infinito

$$\sigma_a = \frac{\sum \text{polos finitos} - \sum \text{ceros finitos}}{\#\text{polos finitos} - \#\text{ceros finitos}} = \frac{0+2+8-1000-(-10-10+1000)}{4-3} = -1970$$

$$\theta_a = \frac{(2m+1)\pi}{\#\text{polos finitos} - \#\text{ceros finitos}} = (2m+1)\pi = -\pi, \pi = -180°, 180°$$

$m = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$