Introducción a Sistemas de Control: Linealización

ALEJANDRO S. GHERSIN

Puntos de Equilibrio

Dado un sistema

$$\dot{x} = f(x, u)$$

si x_e, u_e son tales que $f(x_e, u_e) = 0$ entonces representan un punto de equilibrio.

- Si el sistema tiene como condiciones iniciales a x_e, u_e entonces el mismo permanecerá en ese punto.
- En torno a esos valores, se llevará a cabo la linealización.

Linealización Jacobiana

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u), \qquad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R},$$

$$y = h(x,u), \qquad y \in \mathbb{R},$$

$$x = x_e,\ u = u_e$$

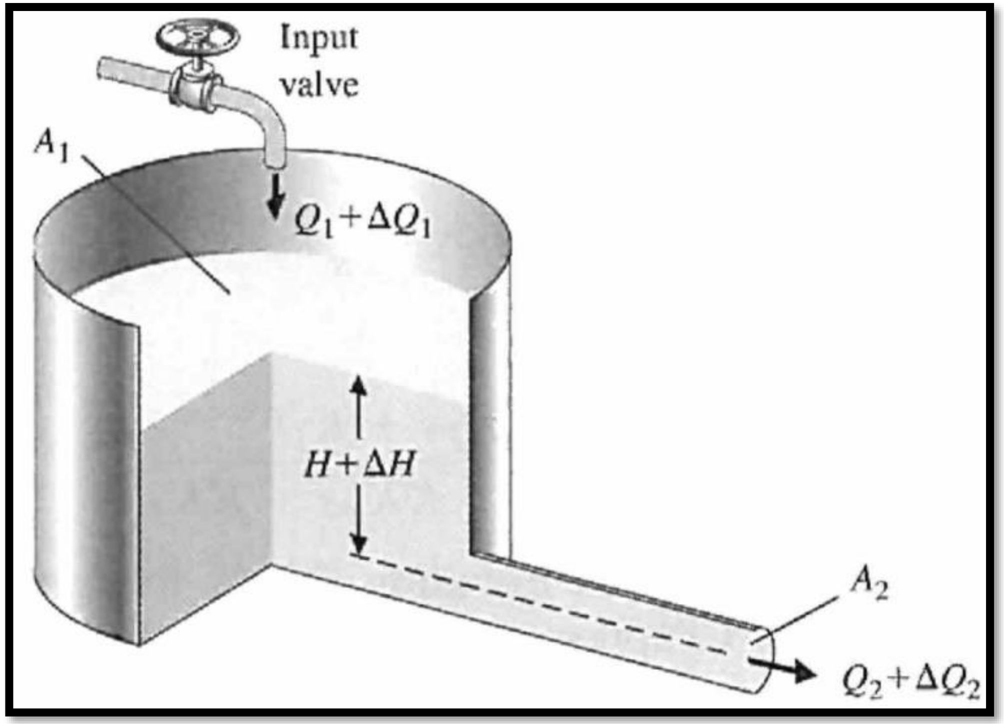
$$z = x - x_e, \qquad v = u - u_e, \qquad w = y - h(x_e, u_e)$$

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_e,u_e)}, \quad B = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(x_e,u_e)}, \quad C = \left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{(x_e,u_e)}, \quad D = \left.\frac{\partial h}{\partial u}\right|_{(x_e,u_e)}$$

$$\frac{dz}{dt} = Az + Bv, \qquad w = Cz + Dv.$$

Linealización: Ejemplo del tanque de agua

Ejemplo Dorf pág. 94 (125 pdf 13ra Ed.)



Densidad y Gravedad:	$\rho = 1000\dfrac{kg}{m^3}$	$g = 9{,}81\dfrac{m}{s^2}$
Secciones transversales:	$A_1 = \dfrac{\pi}{4}m^2$	$A_2 = \dfrac{\pi}{400}m^2$
Valores de equilibrio:	$H^* = 1m$	$Q^* = 34{,}77\dfrac{kg}{s}$

Linealización: Ejemplo Tanque

Masa de agua:	$m = \rho A_1 H$
<u>Variación de masa:</u> Derivada con respecto al tiempo.	$\dot{m} = \rho A_1 \dot{H}$ $\dot{m} = Q_1 - Q_2$
Bernoulli: Balance de energías	$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + P_1 + \rho g H = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + P_2$
Simplificaciones:	$P_1 = P_2 = 0$, porque son presiones relativas y $v_1 = 0$ se desprecia, por ser “chica”.
Por definición:	$Q_2 = \rho A_2 v_2$
De donde se obtiene:	$\mathrm{g}H = \frac{1}{2}v_2^2$ $v_2 = \sqrt{2g} \cdot \sqrt{H}$

Linealización: Ejemplo Tanque

Derivada de la masa con respecto al tiempo:	$\dot{m} = \rho A_1 \dot{H}$ $\dot{m} = Q_1 - \rho A_2 v_2$ $v_2 = \sqrt{2g} \cdot \sqrt{H}$
Operando sobre la ecuación anterior:	$\rho A_1 \dot{H} = Q_1 - \rho A_2 v_2$ $\dot{H} = -\left(\frac{A_2}{A_1}\sqrt{2g}\right)\sqrt{H} + \frac{1}{\rho A_1} Q_1$

Linealización: Ejemplo Tanque

$$\dot{H} = -\left(\frac{A_2}{A_1}\sqrt{2g}\right)\sqrt{H} + \frac{1}{\rho A_1}Q_1$$

$k_1 = -\left(\frac{A_2}{A_1}\sqrt{2g}\right)$	$k_2 = \frac{1}{\rho A_1}$
$k_3 = \rho\sqrt{2g}A_2$	$x = H$
$u = Q_1$	$y = Q_2$

$$\dot{x}(t) = f(x,u) = k_1\sqrt{x(t)} + k_2 u(t)$$

$$y = h(x,u) = k_3\sqrt{x}$$

Linealización: Ejemplo Tanque

Simplificamos el problema: $k_1 = -1, k_2 = k_3 = 1$	$\dot{x}(t) = f(x,u) = -\sqrt{x(t)} + u(t)$ $y = h(x,u) = \sqrt{x}$
Para $x_e = 1, u_e = 1, y_e = 1$, la linealización queda:	$\dot{z} = -\frac{1}{2}z + v$ $w = \frac{1}{2}z$

- Verificar el resultado como ejercicio.
- Calcular el valor de x_e y de y_e para un u_e genérico.

Simulink del Problema

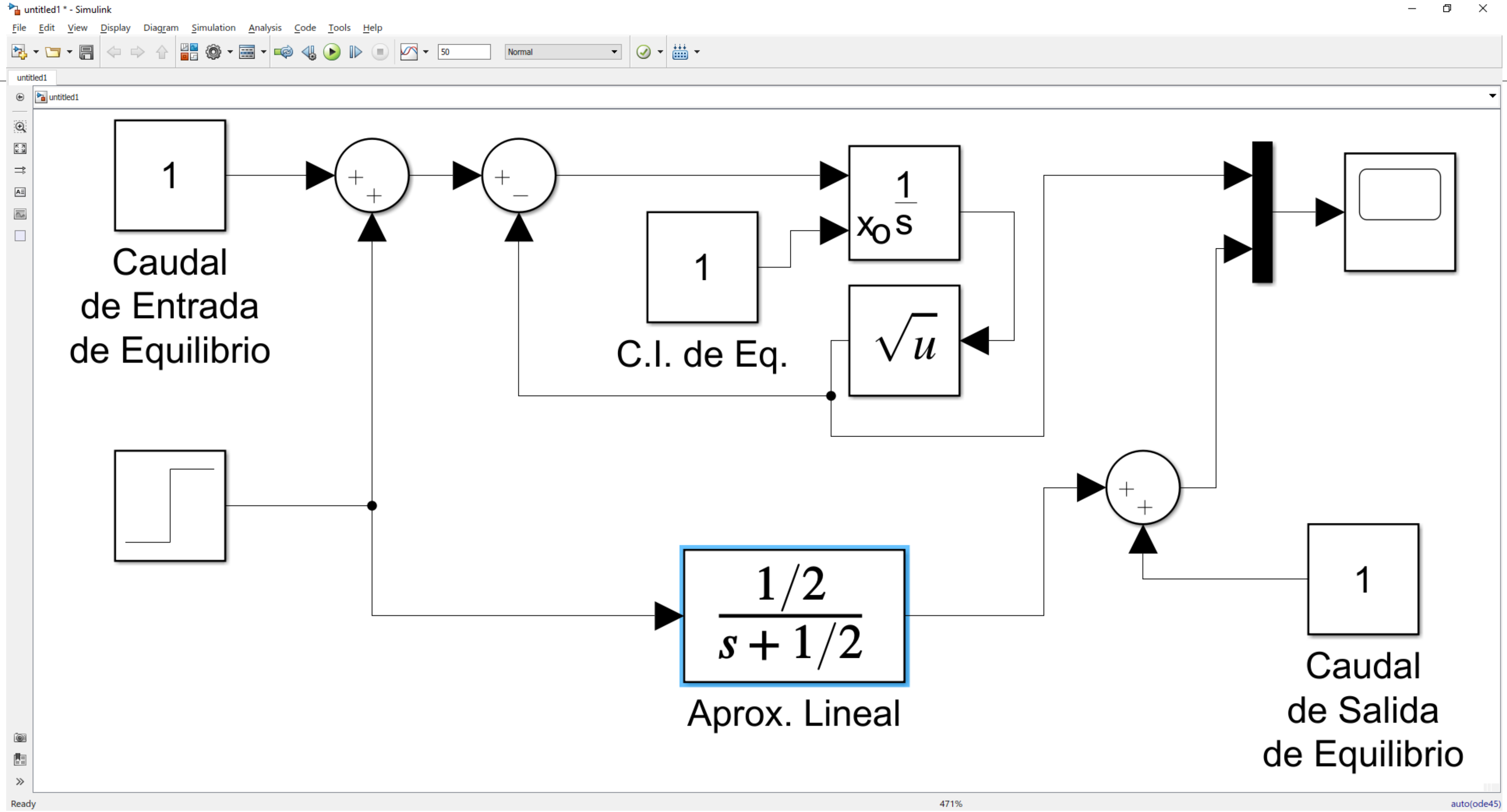


Gráfico de la Simulación, no lineal vs. Linealizado.