

# Introducción a Sistemas de Control

---

ANÁLISIS FRECUENCIAL Y CRITERIO DE ESTABILIDAD DE NYQUIST

ALEJANDRO S. GHERSIN



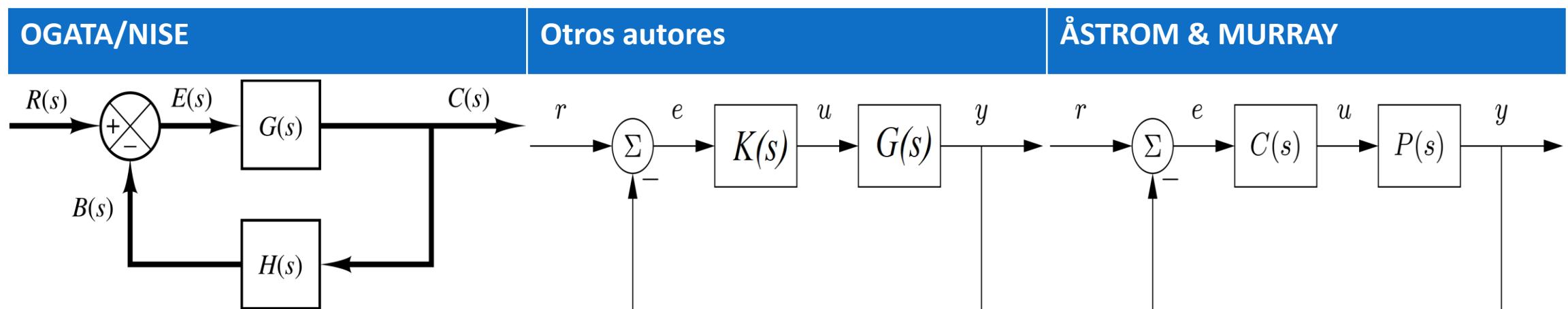
*Harry Nyquist*

# Polos y ceros de $F(s) = 1 + L(s)$

Distintos libros, distinta notación.

Prestar atención la transferencias “ $L(s)$ ”.

$$L(s) = G(s)H(s) = G(s)K(s) = P(s)C(s) =$$



# $S(s)$ , $F(s)$ y $\lambda(s)$

	OGATA/NISE	OTROS	ÅSTROM & MURRAY	TODOS LOS CASOS
	$G(s) = \frac{n_G(s)}{d_G(s)}, H(s) = \frac{n_H(s)}{d_H(s)}$	$K(s) = \frac{n_K(s)}{d_K(s)}$	$P(s) = \frac{n_p(s)}{d_p(s)}, C(s) = \frac{n_c(s)}{d_c(s)}$	$L(s) = \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{b}(s)}{a(s)}$
$S(s)$	$\frac{1}{1 + G(s)H(s)}$	$\frac{1}{1 + G(s)K(s)}$	$\frac{1}{1 + P(s)C(s)}$	$\frac{1}{1 + L(s)}$
$S(s)$	$\frac{d_G(s)d_H(s)}{d_G(s)d_H(s) + n_G(s)n_H(s)}$	$\frac{d_G(s)d_K(s)}{d_G(s)d_K(s) + n_G(s)n_K(s)}$	$\frac{d_p(s)d_c(s)}{d_p(s)d_c(s) + n_p(s)n_c(s)}$	$\frac{a(s)}{a(s) + \mathbf{k} \cdot \mathbf{b}(s)}$
$\lambda(s)$	$d_G(s)d_H(s) + n_G(s)n_H(s)$	$d_G(s)d_K(s) + n_G(s)n_K(s)$	$d_p(s)d_c(s) + n_p(s)n_c(s)$	$a(s) + \mathbf{k} \cdot \mathbf{b}(s)$

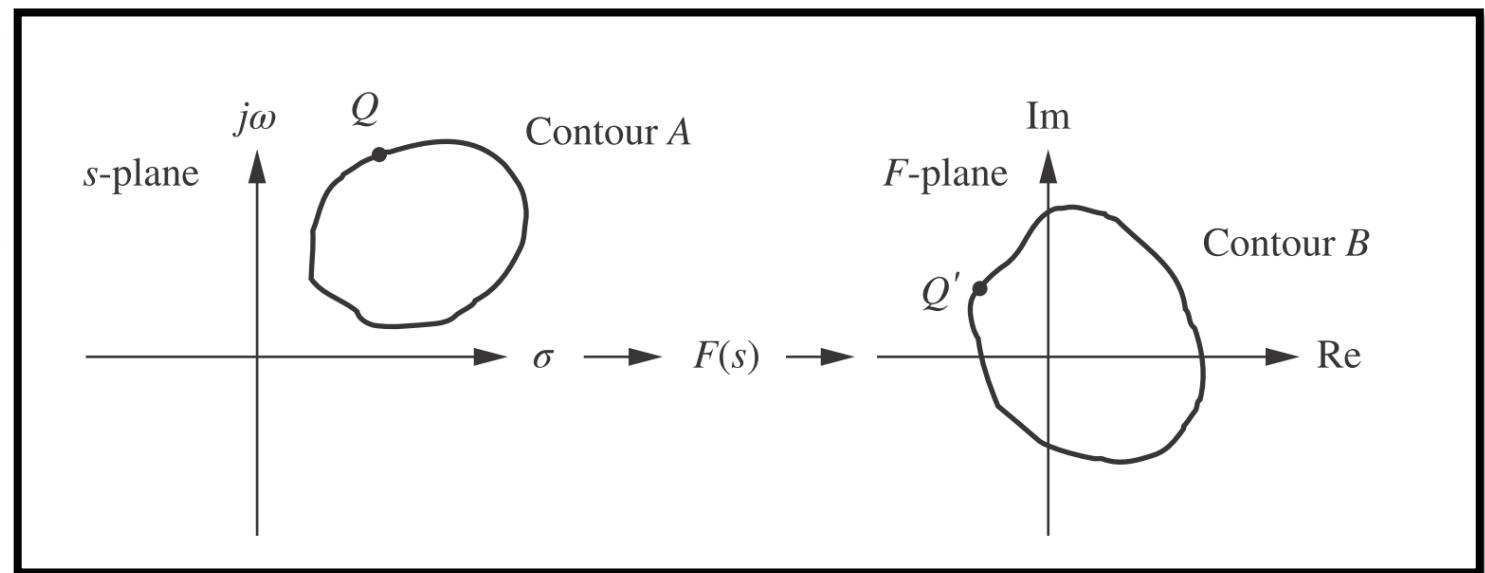
# $S(s)$ , $F(s)$ y $\lambda(s)$

	OGATA/NISE	OTROS	ÅSTROM & MURRAY	TODOS LOS CASOS
$F(s)$	$1 + G(s)H(s)$	$1 + G(s)K(s)$	$1 + P(s)C(s)$	$1 + L(s)$
$F(s)$	$\frac{d_G(s)d_H(s) + n_G(s)n_H(s)}{d_G(s)d_H(s)}$	$\frac{d_G(s)d_K(s) + n_G(s)n_K(s)}{d_G(s)d_K(s)}$	$\frac{d_p(s)d_c(s) + n_p(s)n_c(s)}{d_p(s)d_c(s)}$	$\frac{a(s) + k \cdot b(s)}{a(s)}$
$\lambda(s)$	$d_G(s)d_H(s) + n_G(s)n_H(s)$	$d_G(s)d_K(s) + n_G(s)n_K(s)$	$d_p(s)d_c(s) + n_p(s)n_c(s)$	$a(s) + k \cdot b(s)$
$F(s)$	$\frac{\lambda(s)}{d_G(s)d_H(s)}$	$\frac{\lambda(s)}{d_G(s)d_K(s)}$	$\frac{\lambda(s)}{d_P(s)d_C(s)}$	$\frac{\lambda(s)}{a(s)}$

- Nos interesan las raíces de  $\lambda(s)$  las cuales son desconocidas a priori.
- Estas raíces, son los polos de lazo cerrado.
- Lo que si se conoce a priori son los polos de “ $F(s)$ ”, i.e., los polos de lazo abierto.
- $a(s)$  y  $b(s)$  son COPRIMOS (no comparten raíces).

# Aplicaciones (mappings)

$$F(s) = \frac{(s - z_1)(s - z_2)\dots}{(s - p_1)(s - p_2)\dots}$$

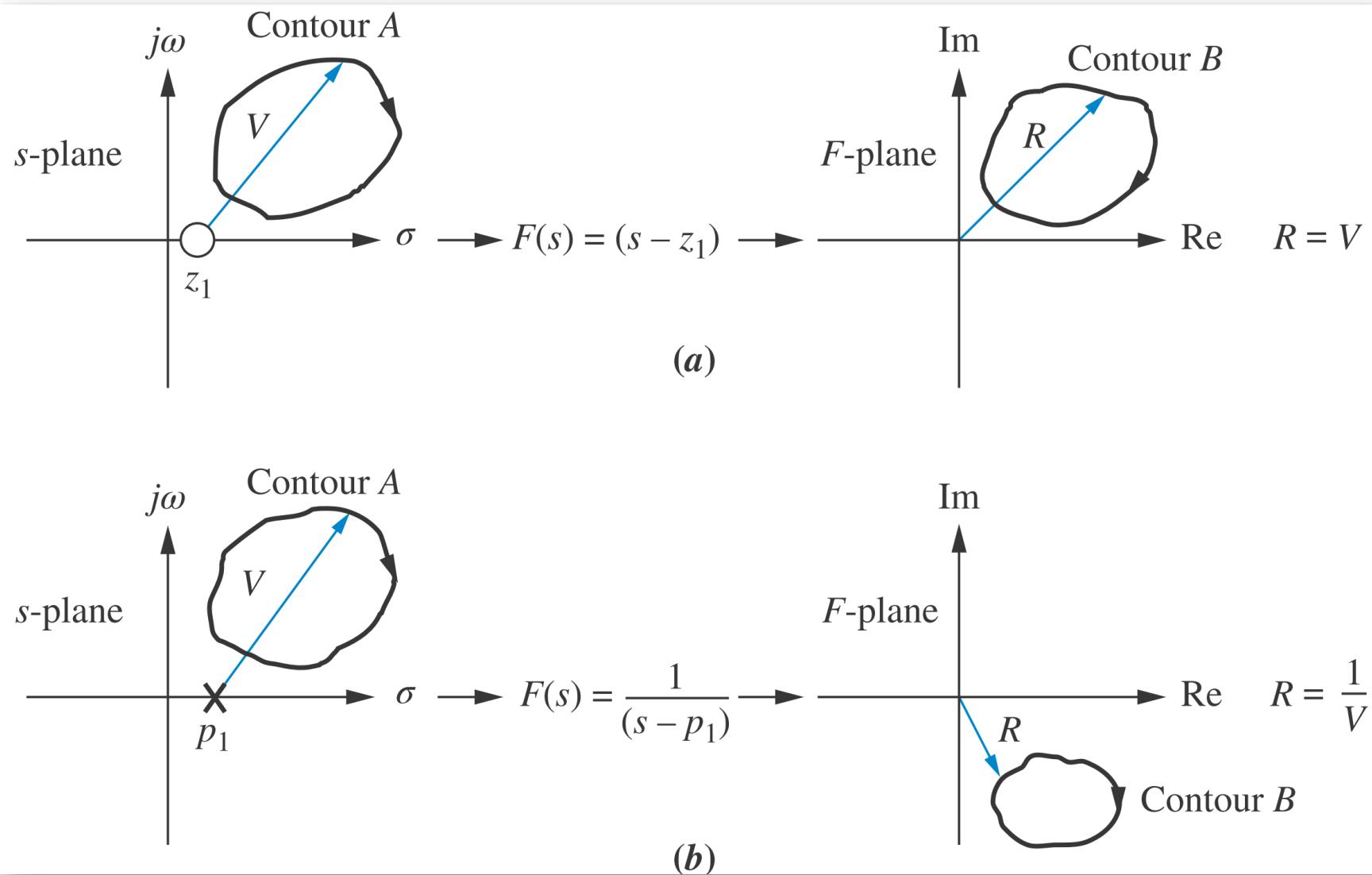


Nos interesa ver qué sucede con la transferencia  $F(s)$  como transformación del plano-*s* al plano-*F*.

# Aplicaciones (mappings)

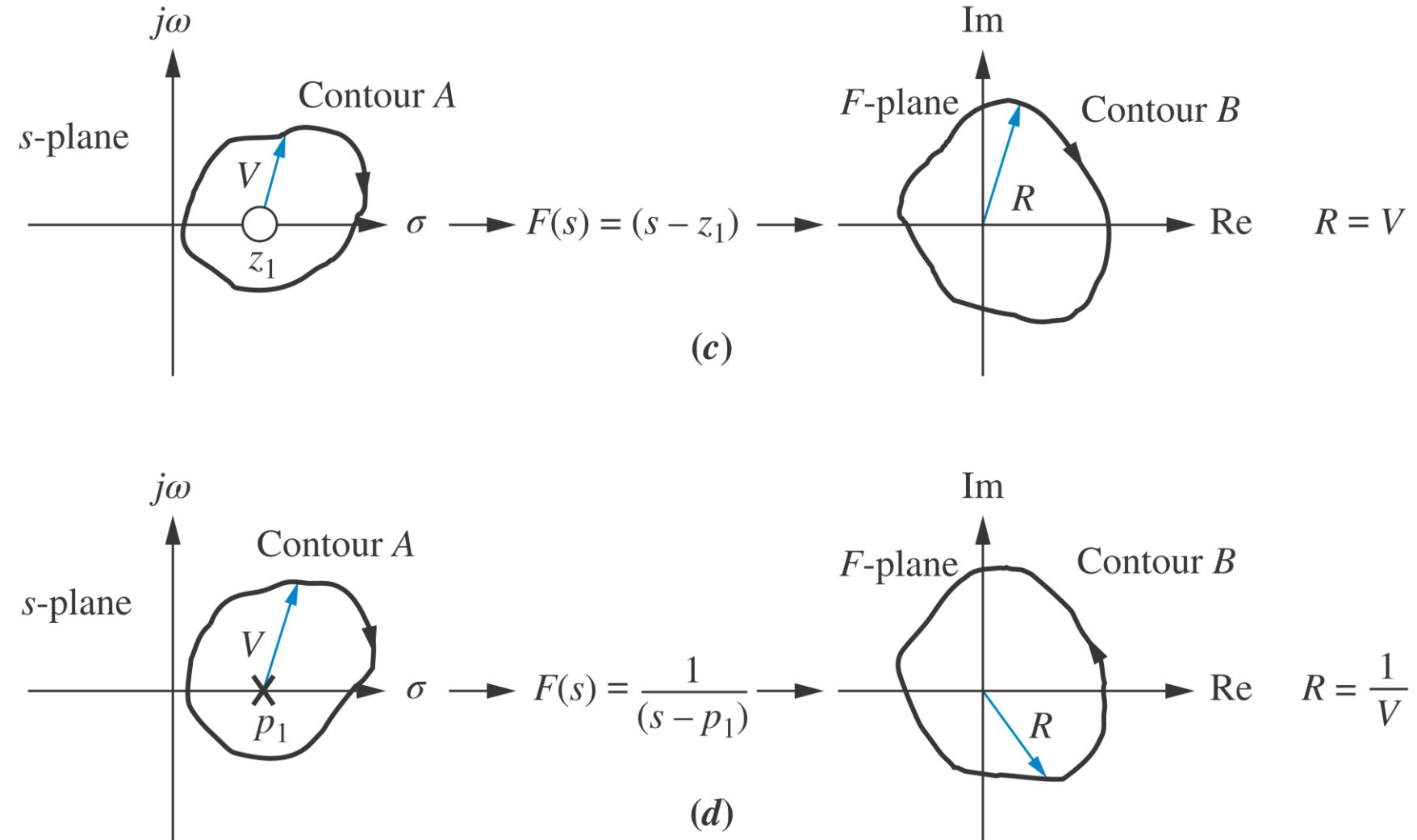
Cero y polo simples afuera del contorno.

En ninguno de los dos casos, el vector “R” tiene un cambio de fase neto de 360 grados.

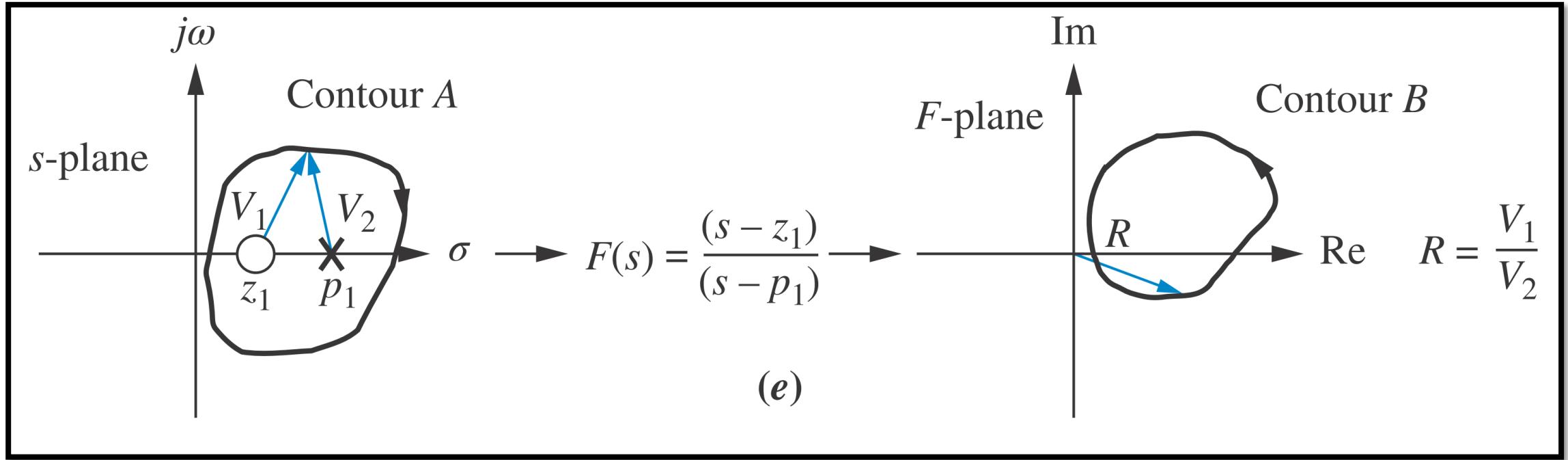


# Aplicaciones (mappings)

- Cero y polo simples adentro del contorno.
- En ambos casos, el vector “R” tiene un cambio de fase neto de 360 grados.
- Por la cantidad de giros puedo identificar cuántas singularidades tiene  $F(s)$  dentro del contorno y de qué tipo son.



# Aplicaciones (mappings)



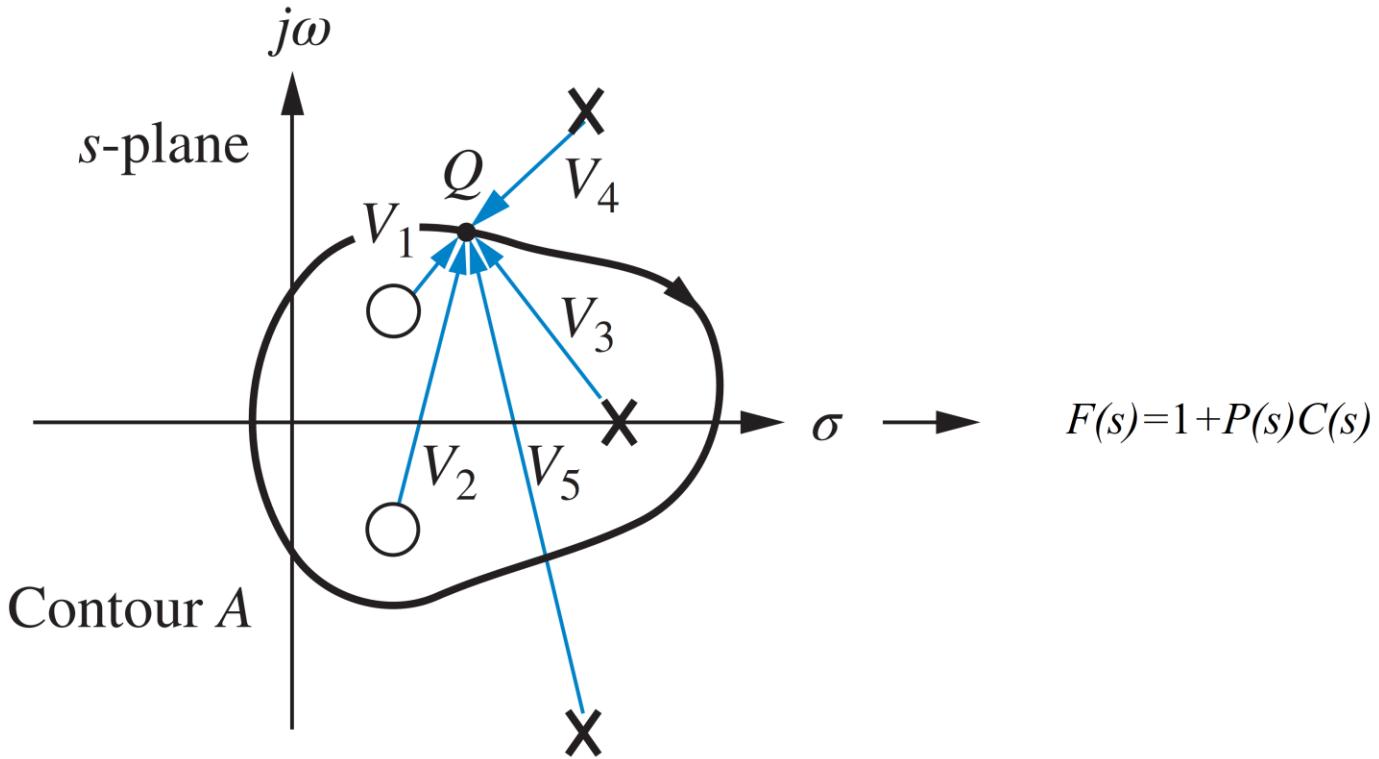
Ahora la misma  $F(s)$  tiene un cero y un polo simples adentro del contorno.

La fase de cada uno se “contrapone” y no hay giro neto en el plano-*F*.

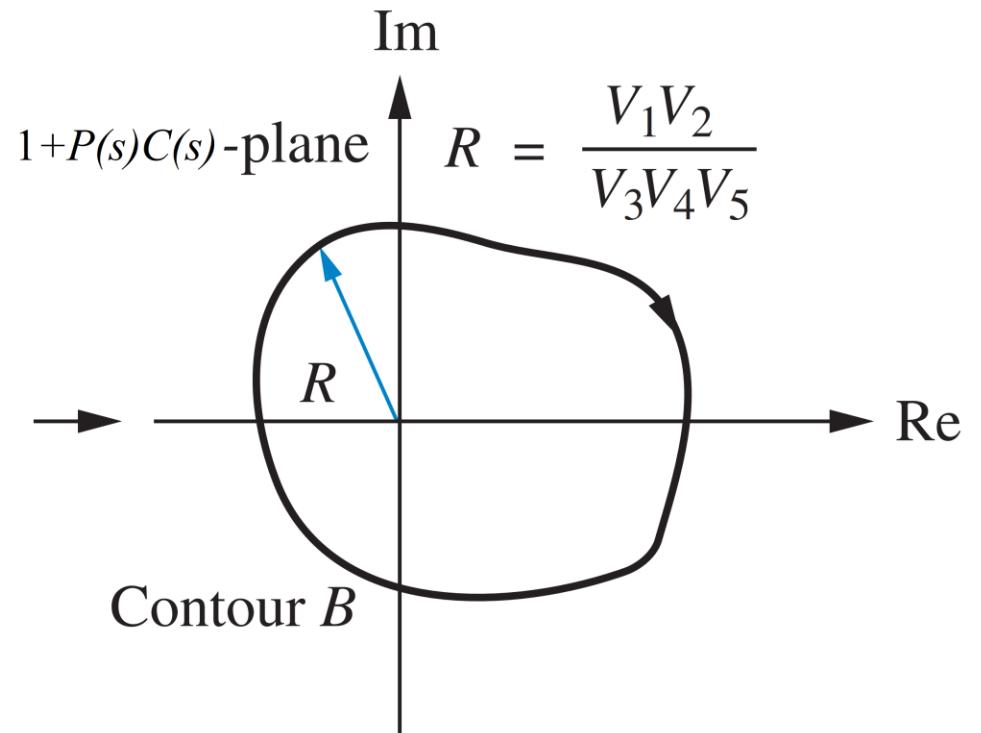
# Aplicaciones (mappings)

Tres polos y un cero simples adentro del contorno:

Un solo giro neto antihorario en el plano-F.



$$F(s) = 1 + P(s)C(s)$$



$$R = \frac{V_1V_2}{V_3V_4V_5}$$

# Aplicaciones (mappings)

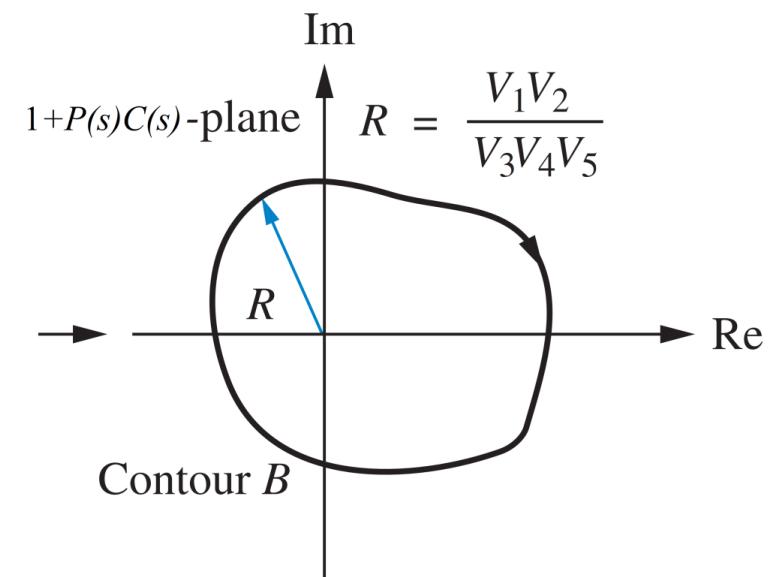
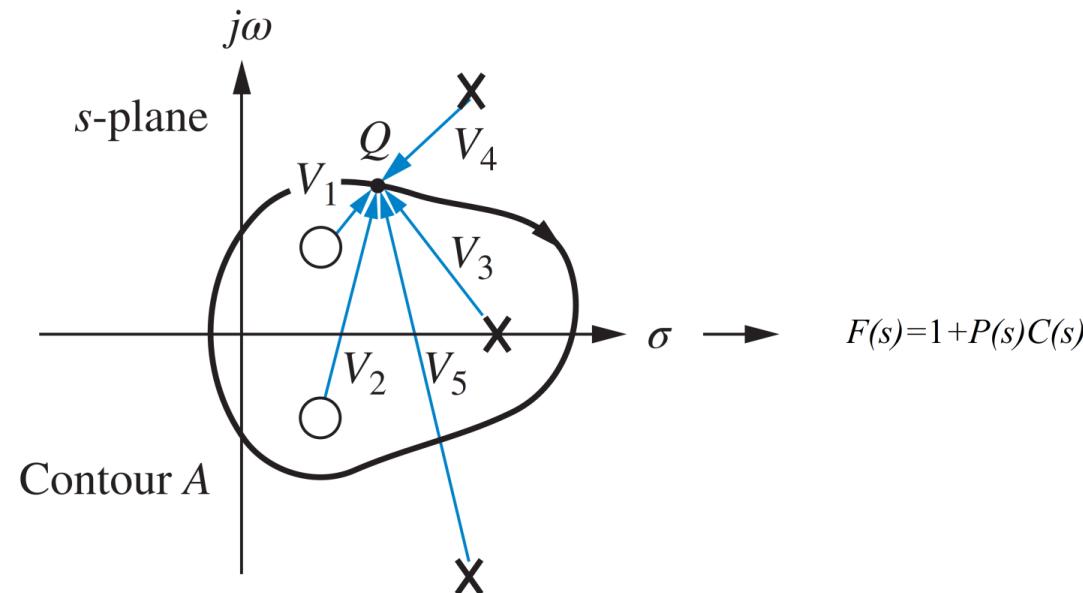
N: cantidad de circulaciones horarias al origen. Si las circulaciones resultan antihorarias, entonces N se cuenta como número negativo.

P= cantidad de polos de  $1+G(s)H(s)$  en el interior del contorno.

Z= cantidad de ceros de  $1+G(s)H(s)$  en el interior del contorno.

$$Z=P+N$$

El número que importa es Z. Analizar con el ejemplo.



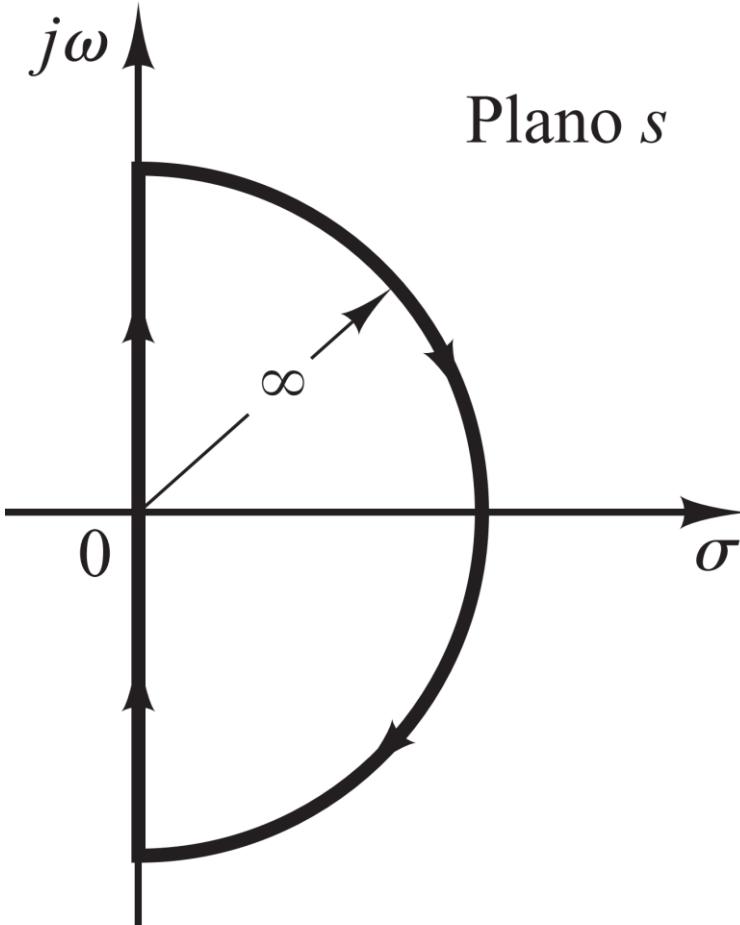
# Criterio de Estabilidad de Nyquist: Ogata

---

**Teorema de la transformación.** Supóngase que  $F(s)$  es el cociente de dos polinomios en  $s$ . Supóngase también que  $P$  es el número de polos y  $Z$  el número de ceros de  $F(s)$  que se encuentran en cierto contorno cerrado en el plano  $s$ , considerada una multiplicidad de polos y ceros. Supóngase, por último, que este contorno es tal que no pasa a través de ningún polo ni cero de  $F(s)$ . Este contorno cerrado en el plano  $s$  se transforma después dentro del plano  $F(s)$  como una curva cerrada. El número total  $N$  de rodeos del origen del plano  $F(s)$  en el sentido de las agujas del reloj, conforme un punto representativo traza el contorno completo en el sentido de las agujas del reloj, es igual a  $Z - P$ . (Obsérvese que, mediante este teorema de la transformación, no se encuentra el número de ceros y de polos sino su diferencia.)

# Criterio de Estabilidad de Nyquist

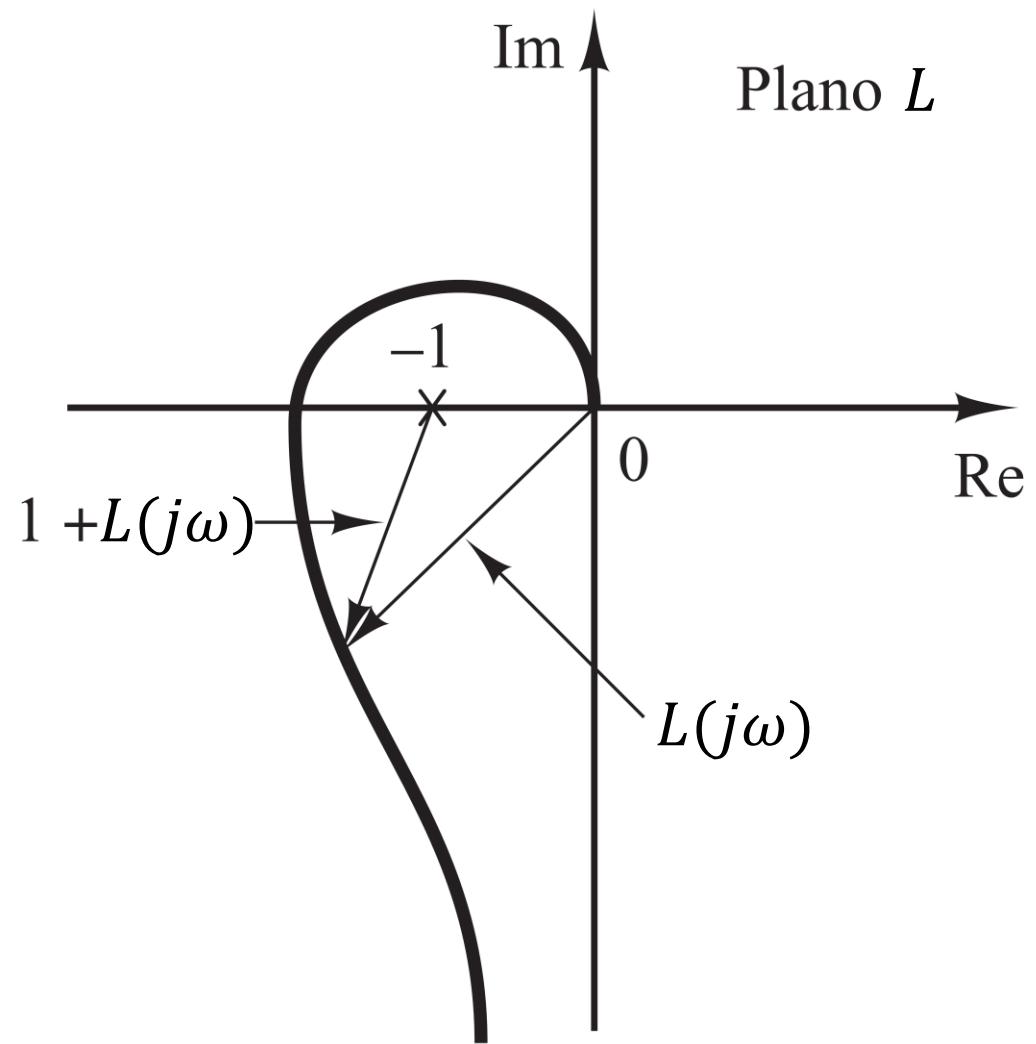
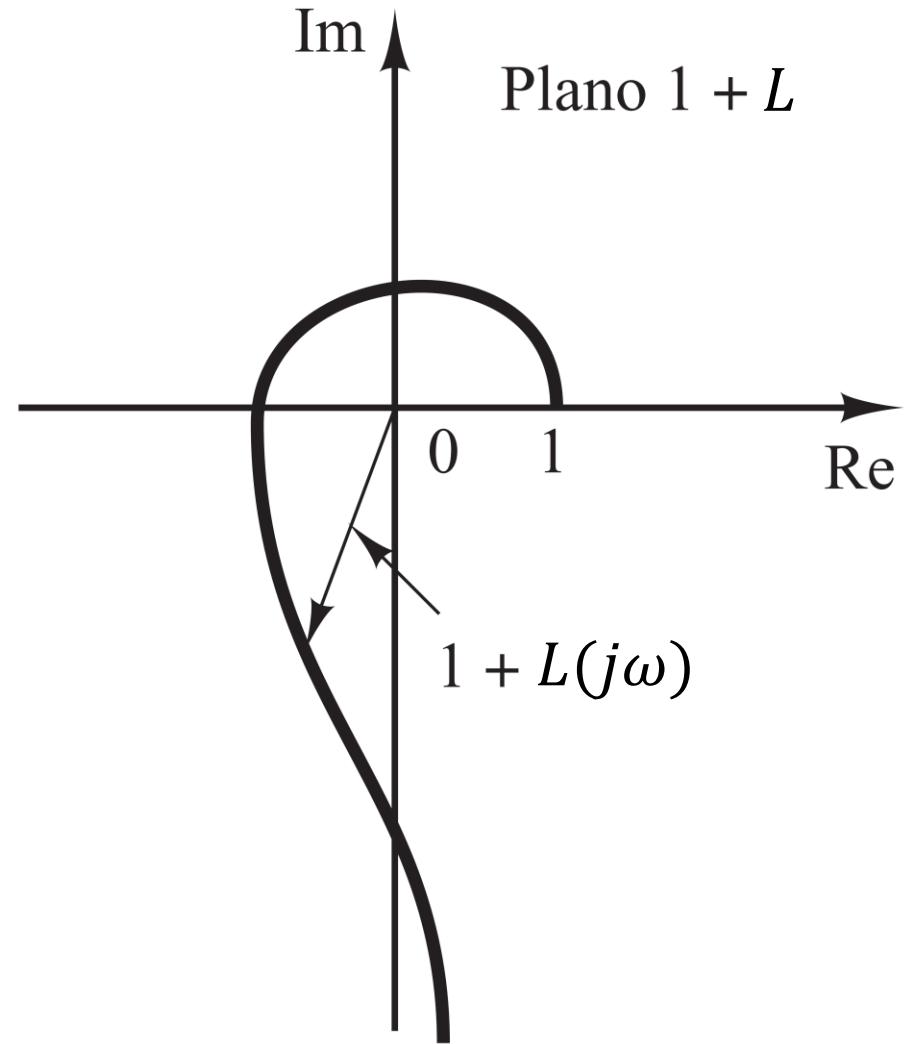
## Contorno del Semiplano Derecho



$$\lim_{s \rightarrow \infty} [1 + L(s)] = \text{constante}$$

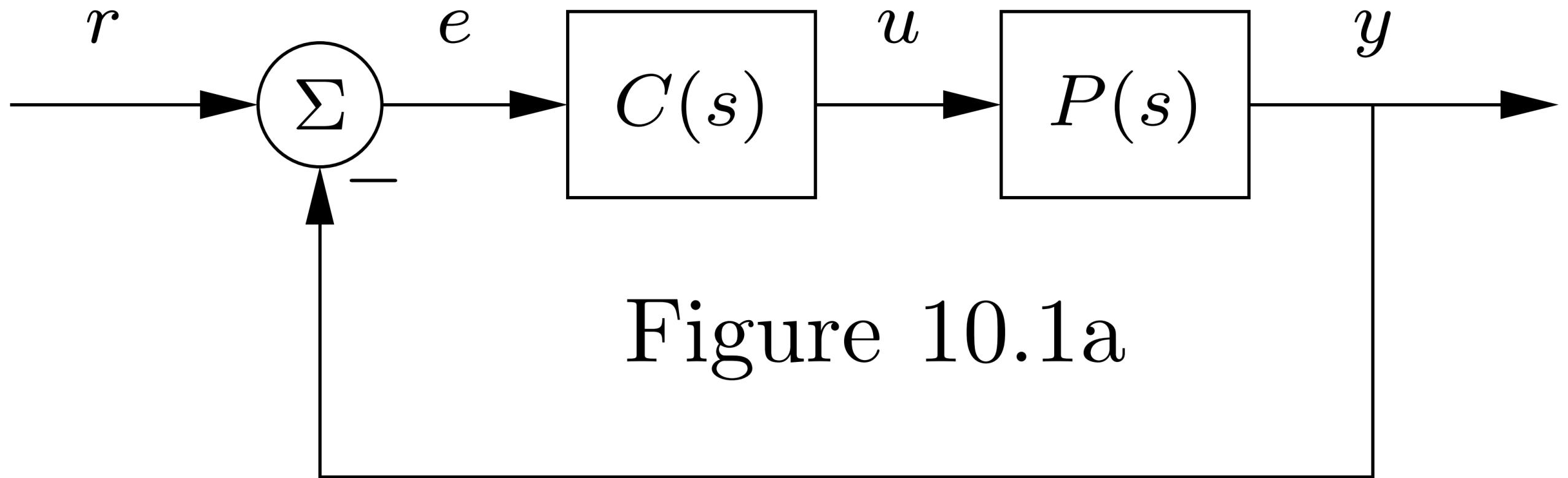
# Criterio de Estabilidad de Nyquist

## Corrimiento del plano $1 + L(s)$



# Criterio de Estabilidad de Nyquist

---



# Criterio de Estabilidad de Nyquist

---

**Theorem 10.1** (Simplified Nyquist criterion). *Let  $L(s)$  be the loop transfer function for a negative feedback system (as shown in Figure 10.1a) and assume that  $L$  has no poles in the closed right half-plane ( $\text{Re } s \geq 0$ ) except possibly at the origin. Then the closed loop system  $G_{cl}(s) = L(s)/(1 + L(s))$  is stable if and only if the image of  $L$  along the closed contour  $\Gamma$  given by equation (10.2) has no net encirclements of the critical point  $s = -1$ .*

# Criterio de Estabilidad de Nyquist

**Theorem 10.2** (Principle of variation of the argument). *Let  $\Gamma$  be a closed contour in the complex plane and let  $D$  represent the interior of  $\Gamma$ . Assume the function  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  is analytic on  $\Gamma$  and  $D$  except at a finite number of poles and zeros in  $D$ . Then the winding number  $n_{w,\Gamma}(f(s))$  of the function  $f(s)$  as  $s$  traverses the contour  $\Gamma$  in the counterclockwise direction is given by*

$$n_{w,\Gamma}(f(s)) = \frac{1}{2\pi} \Delta \arg_{\Gamma} f(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(s)}{f(s)} ds = n_{z,D} - n_{p,D},$$

where  $\Delta \arg_{\Gamma}$  is the net variation in the angle when  $s$  traverses the contour  $\Gamma$  in the counterclockwise direction,  $n_{z,D}$  is the number of zeros of  $f(s)$  in  $D$ , and  $n_{p,D}$  is the number of poles of  $f(s)$  in  $D$ . Poles and zeros of multiplicity  $m$  are counted  $m$  times.

# Criterio de Estabilidad de Nyquist

---

**Theorem 10.3** (General Nyquist criterion). *Consider a closed loop system with loop transfer function  $L(s)$  that has  $n_{p,rhp}$  poles in the region enclosed by the Nyquist contour  $\Gamma$ . Let  $n_{w,\Gamma}(1 + L(s))$  be the winding number of  $f(s) = 1 + L(s)$  when  $s$  traverses  $\Gamma$  in the counterclockwise direction. Assume that  $1 + L(i\omega) \neq 0$  for all  $\omega$  on  $\Gamma$  and that  $n_{w,\Gamma}(1 + L(s)) + n_{p,rhp} = 0$ . Then the closed loop system has no poles in the closed right half-plane and it is thus stable.*

# Criterio de Estabilidad de Nyquist

---

- En la práctica Nyquist se aplica circulando en sentido horario.
- Esto es consistente con evaluar la respuesta en frecuencia de  $\omega = 0$  a  $\omega = \infty$  en base al diagrama de Bode.
- En este caso el número de circulaciones al punto “ $s = -1$ ” se cuenta positivo en sentido horario.
- Sean
  - “ $P$ ” es el número de polos inestables de lazo abierto (polos de “ $L(s) = P(s)C(s)$ ”).
  - “ $N$ ” es el número de circulaciones horarias alrededor del punto “ $s = -1$ ”. Si las circulaciones son antihorarias se cuenta negativo.
  - “ $Z = N + P$ ” es el número de ceros inestables de “ $1 + L(s)$ ” que son los polos de lazo cerrado.
- Notar que cuando usamos pequeños semicírculos de radio infinitesimal “ $\varepsilon$ ” para evitar polos en el eje “ $j\omega$ ”, estos generan secciones del diagrama de Nyquist que tienen magnitud tendiendo a infinito sin importar el valor de la ganancia “ $k$ ” del controlador  $C(s)$ . Se debe tener cuidado al contar el número “ $N$ ” de circulaciones.

1. Este criterio se expresa como

$$Z = N + P$$

donde  $Z$  = número de ceros de  $1 + G(s)H(s)$  en el semiplano derecho del plano  $s$

$N$  = número de rodeos en el sentido de las agujas del reloj del punto  $-1 + j0$

$P$  = número de polos de  $G(s)H(s)$  en el semiplano derecho del plano  $s$

Si  $P$  no es cero, para un sistema de control estable, se debe tener  $Z = 0$  o  $N = -P$ , lo cual significa que se deben tener  $P$  rodeos del punto  $-1 + j0$  en el sentido de las agujas del reloj.

Si  $G(s)H(s)$  no tiene polos en el semiplano derecho del plano  $s$ , entonces  $Z = N$ . Por tanto, para la estabilidad no se debe rodear el punto  $-1 + j0$  mediante el lugar geométrico  $G(j\omega)H(j\omega)$ . En este caso, no es necesario considerar el lugar geométrico para el eje  $j\omega$  completo, sino sólo para la parte de frecuencia positiva. La estabilidad de este sistema se determina observando si el punto  $-1 + j0$  se rodea mediante el diagrama de Nyquist de  $G(j\omega)H(j\omega)$ . La región encerrada mediante el diagrama de Nyquist aparece en la Figura 7-49. Para la estabilidad, el punto  $-1 + j0$  debe encontrarse fuera de la región sombreada.

**ERROR!!!!**

1. This criterion can be expressed as

$$Z = N + P$$

where  $Z$  = number of zeros of  $1 + G(s)H(s)$  in the right-half  $s$  plane

$N$  = number of clockwise encirclements of the  $-1 + j0$  point

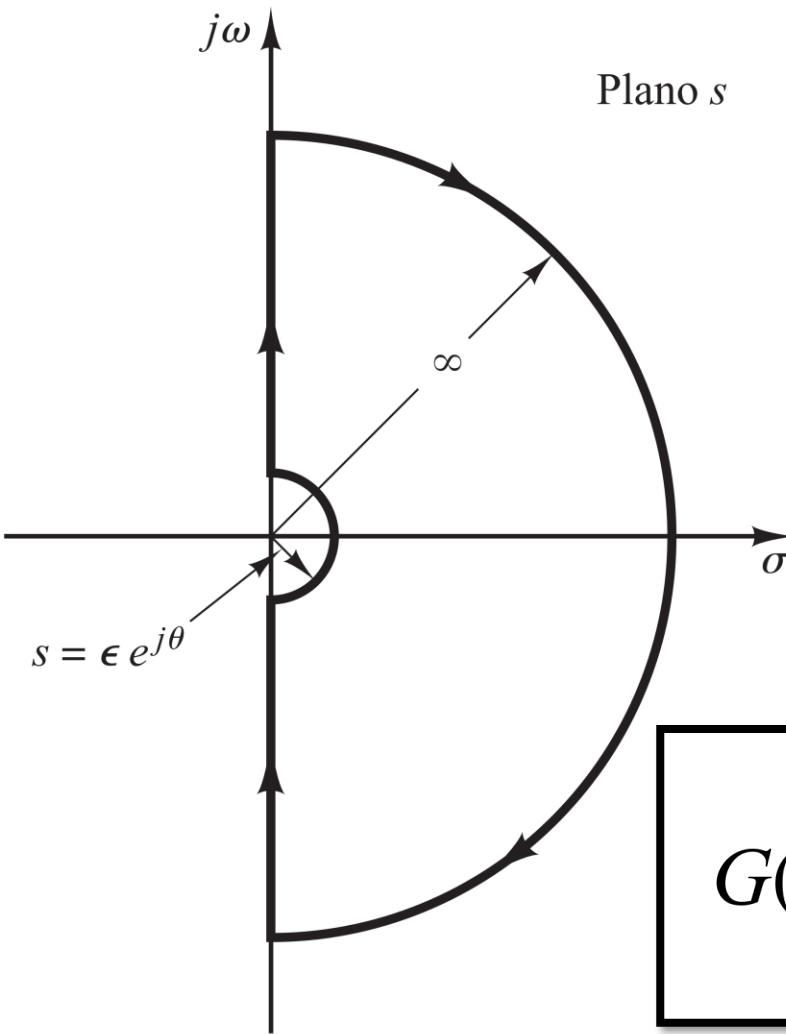
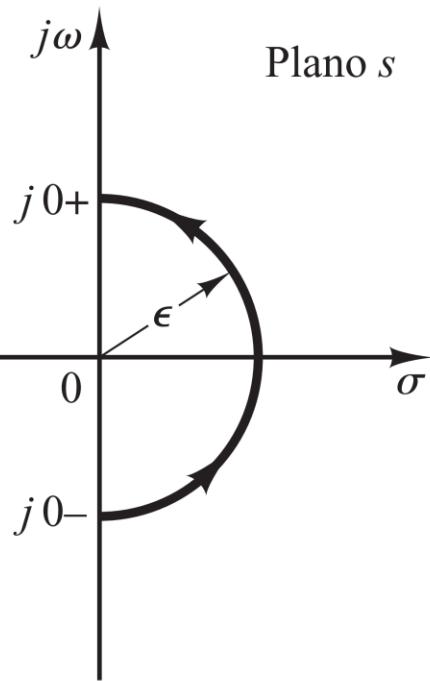
$P$  = number of poles of  $G(s)H(s)$  in the right-half  $s$  plane

If  $P$  is not zero, for a stable control system, we must have  $Z = 0$ , or  $N = -P$ , which means that we must have  $P$  counterclockwise encirclements of the  $-1 + j0$  point.

If  $G(s)H(s)$  does not have any poles in the right-half  $s$  plane, then  $Z = N$ . Thus, for stability there must be no encirclement of the  $-1 + j0$  point by the  $G(j\omega)H(j\omega)$  locus. In this case it is not necessary to consider the locus for the entire  $j\omega$  axis, only for the positive-frequency portion. The stability of such a system can be determined by seeing if the  $-1 + j0$  point is enclosed by the Nyquist plot of  $G(j\omega)H(j\omega)$ . The region enclosed by the Nyquist plot is shown in Figure 7-49. For stability, the  $-1 + j0$  point must lie outside the shaded region.

# Error de traducción Ogata (el correcto es en inglés).

# Caso polos y/o ceros en el eje “ $j\omega$ ”: Contorno “ $s$ ” modificado.



$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)}$$

$$s = \epsilon e^{j\theta}$$

$\theta$  varía de  $-90^\circ$  a  $+90^\circ$

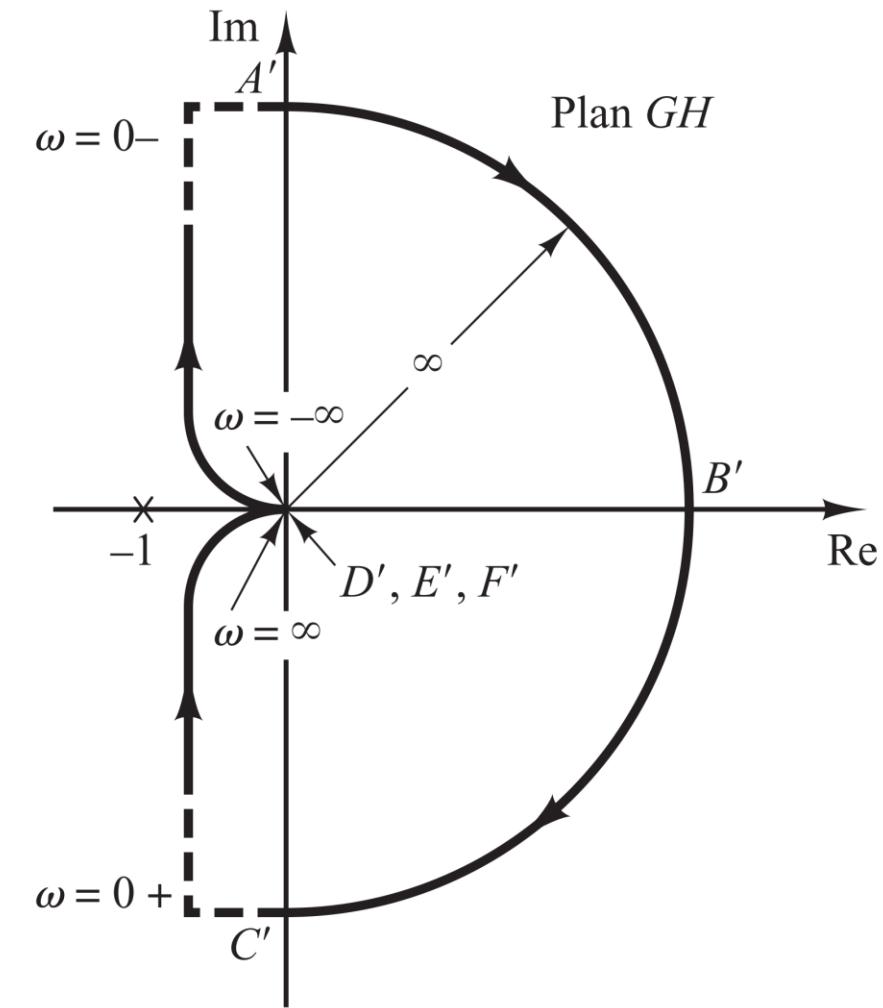
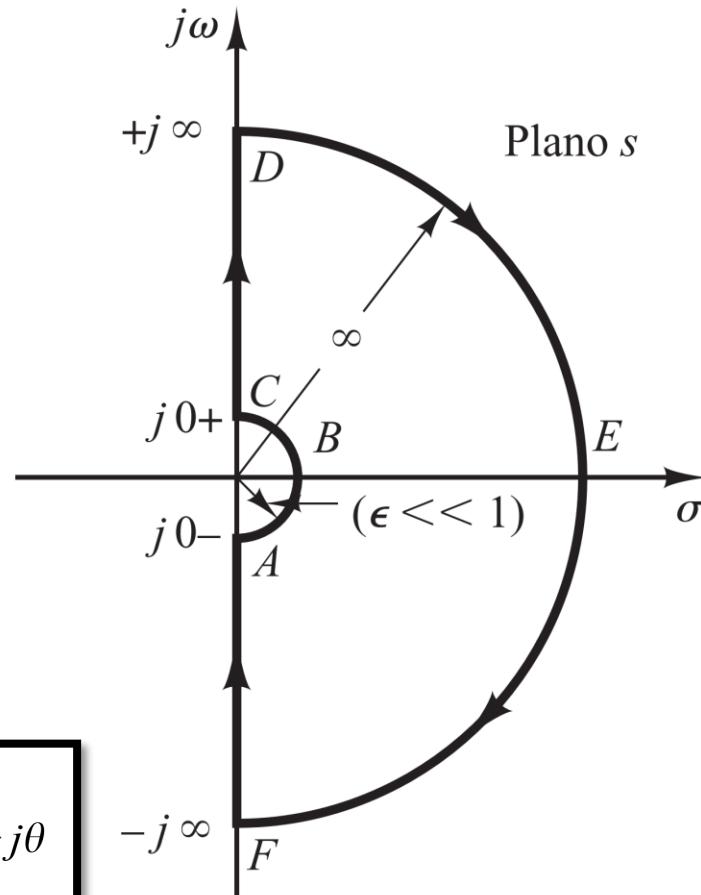
$$G(\epsilon e^{j\theta})H(\epsilon e^{j\theta}) = \frac{K}{\epsilon e^{j\theta}} = \frac{K}{\epsilon} e^{-j\theta}$$

# Caso polos y/o ceros en el eje “ $j\omega$ ”: Contorno “ $s$ ” modificado.

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)}$$

$$s = \varepsilon e^{j\theta}$$

$$G(\varepsilon e^{j\theta})H(\varepsilon e^{j\theta}) = \frac{K}{\varepsilon e^{j\theta}} = \frac{K}{\varepsilon} e^{-j\theta}$$



# Más Ejemplos Básicos: ¿Qué se hace con las singularidades en el eje “ $j\omega$ ”?

Trazar el diagrama de Nyquist de:

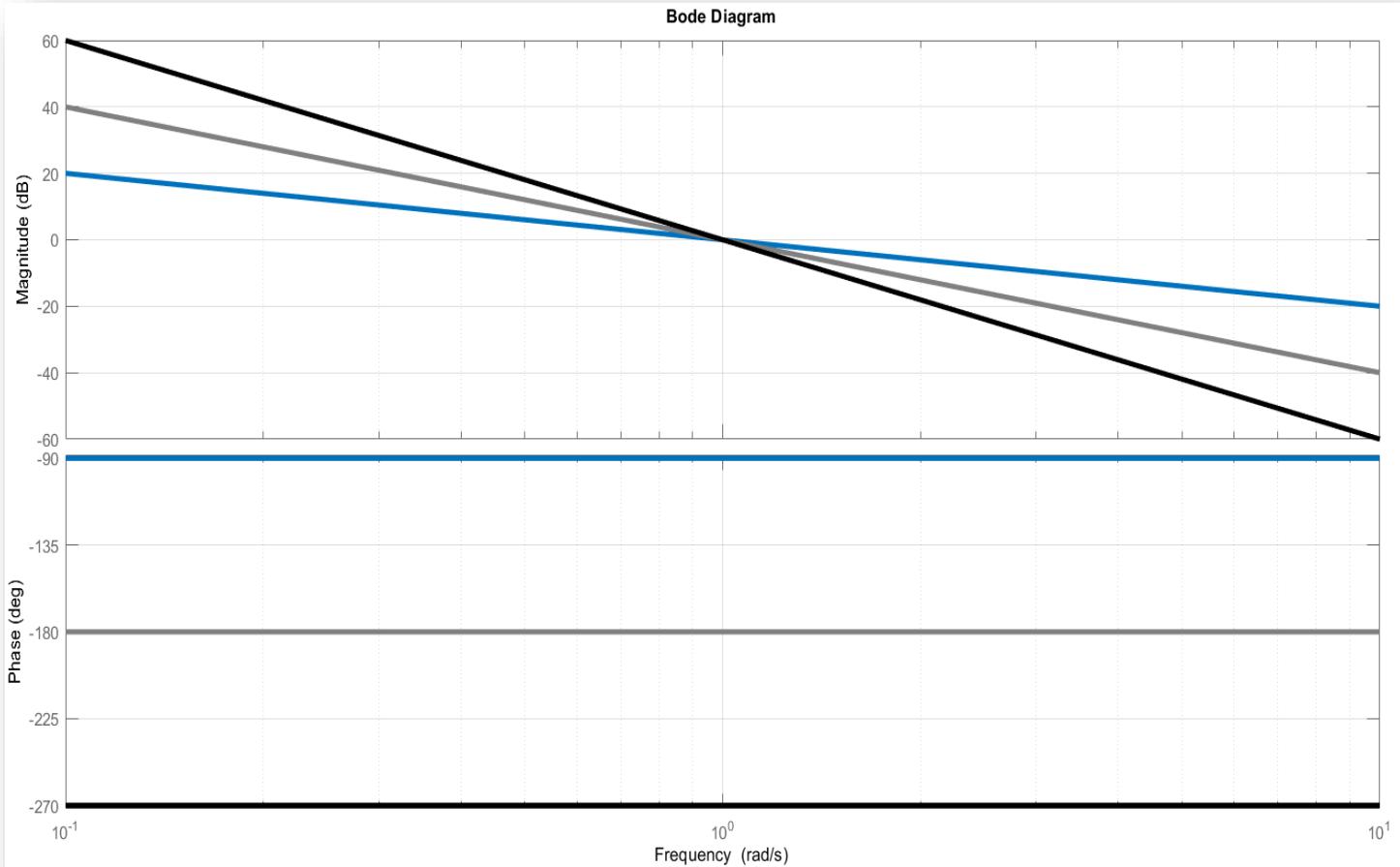
$$L(s) = \frac{1}{s}, \frac{1}{s^2} \text{ y } \frac{1}{s^3}.$$

En el contorno infinitesimal del origen:

$$\left. \frac{1}{s} \right|_{s=r.e^{j\phi}} = \frac{1}{r.e^{j\phi}} = \frac{1}{r} e^{-j\phi}$$

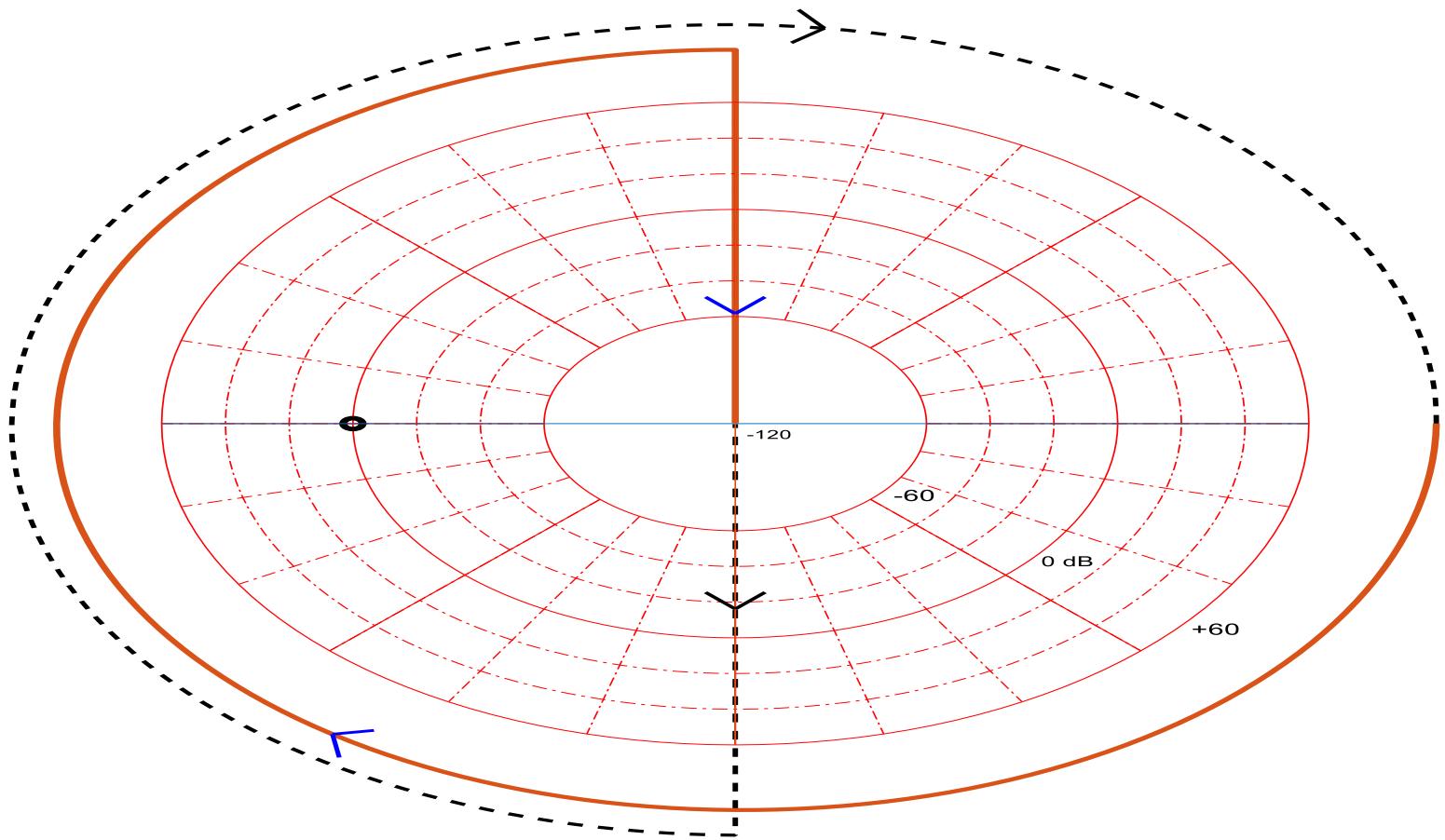
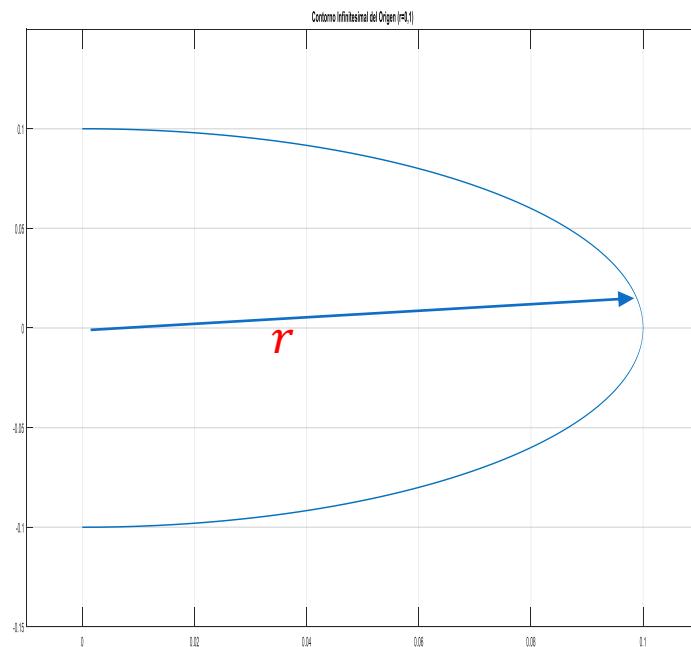
$$\left. \frac{1}{s^2} \right|_{s=r.e^{j\phi}} = \frac{1}{r^2.e^{j2\phi}} = \frac{1}{r^2} e^{-j2\phi}$$

$$\left. \frac{1}{s^3} \right|_{s=r.e^{j\phi}} = \frac{1}{r^3.e^{j3\phi}} = \frac{1}{r^3} e^{-j3\phi}$$



$$L(s)|_{s=r.e^{j\phi}} = \frac{1}{s^3} \Big|_{s=r.e^{j\phi}} = \frac{1}{r^3.e^{j3\phi}} = \frac{1}{r^3} e^{-j3\phi}$$

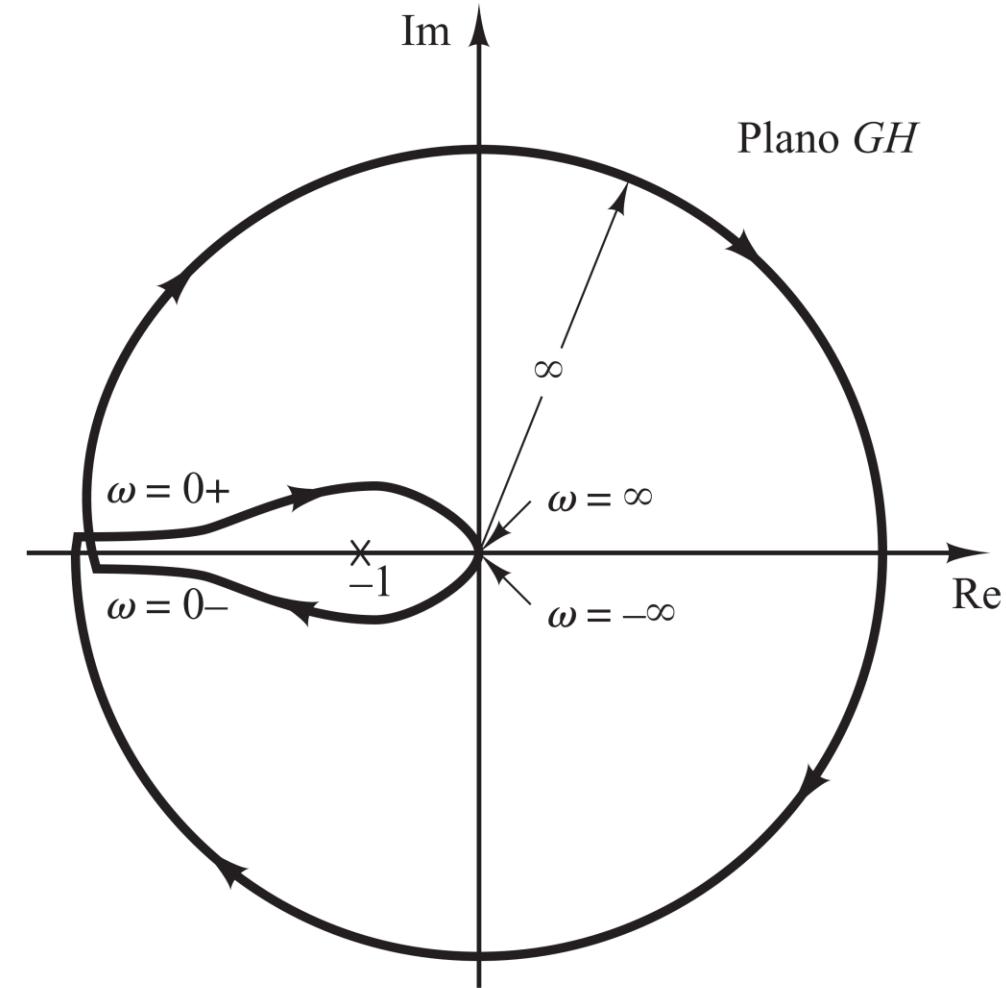
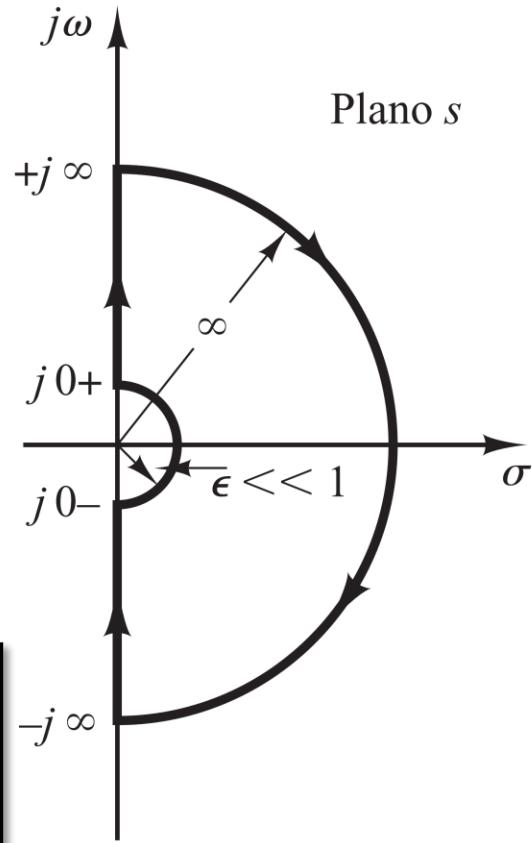

---



# Caso polos y/o ceros en el eje “ $j\omega$ ”: Contorno “ $s$ ” modificado.

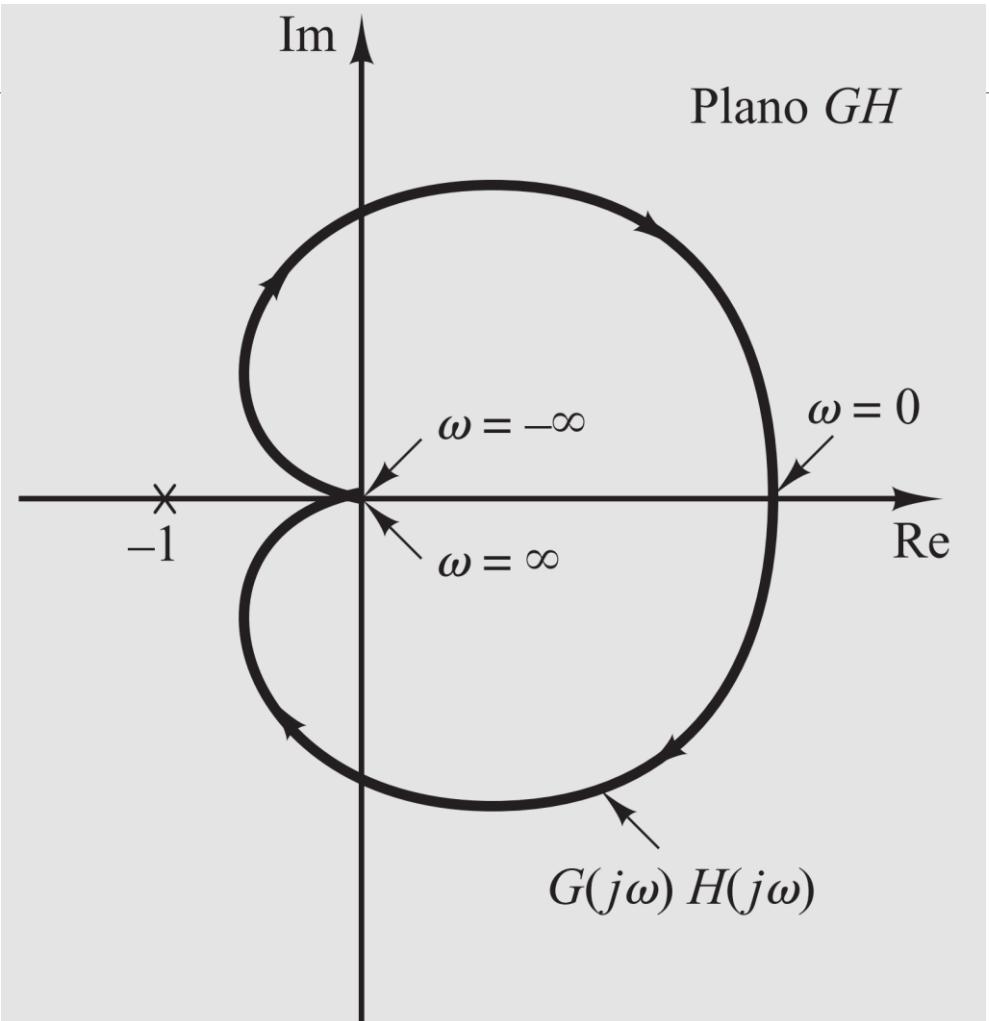
$$G(s)H(s) = \frac{K}{s^2(Ts + 1)}$$

$$\lim_{s \rightarrow \varepsilon e^{j\theta}} G(s)H(s) = \frac{K}{\varepsilon^2 e^{2j\theta}} = \frac{K}{\varepsilon^2} e^{-2j\theta}$$



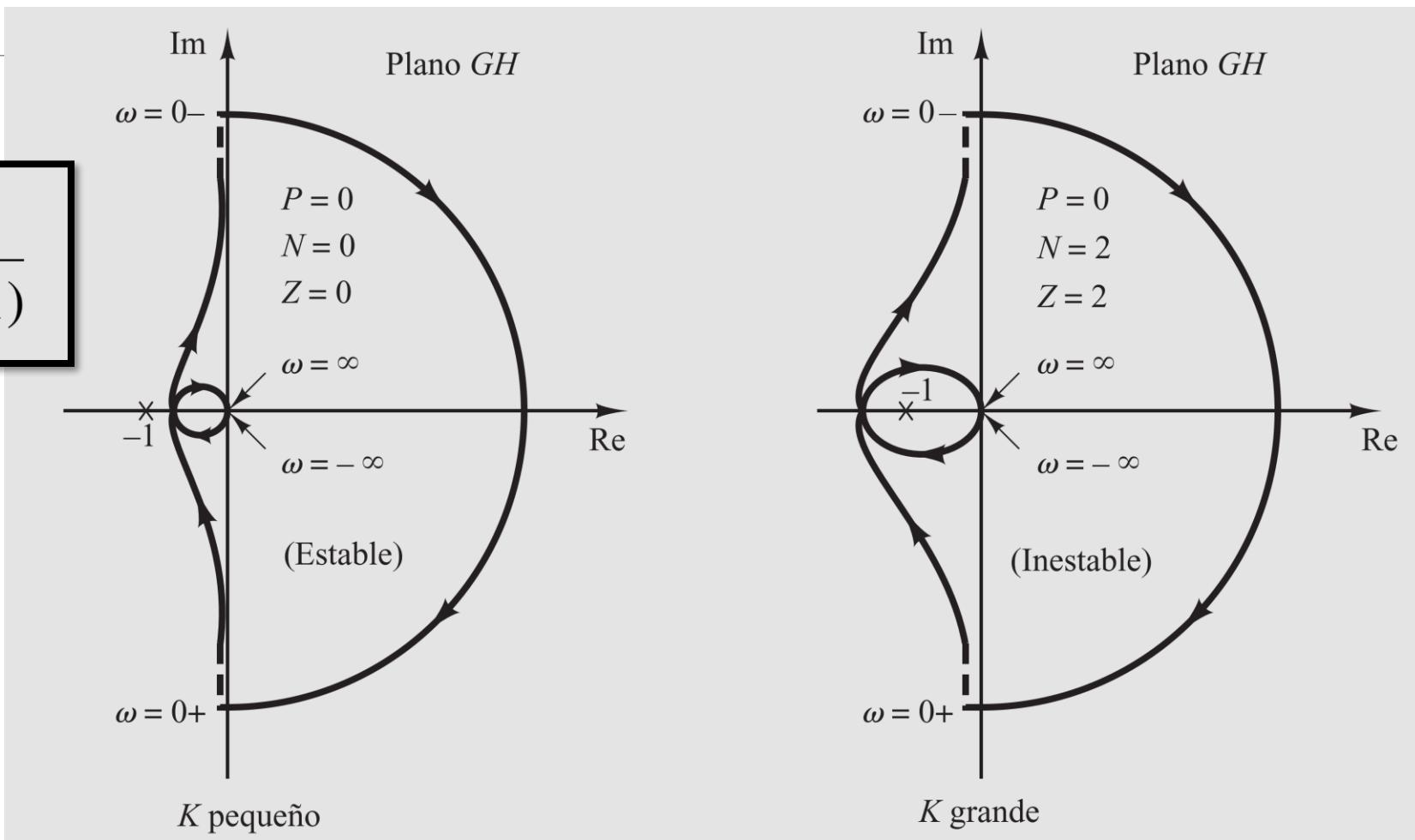
# Ejemplo

$$G(s)H(s) = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$



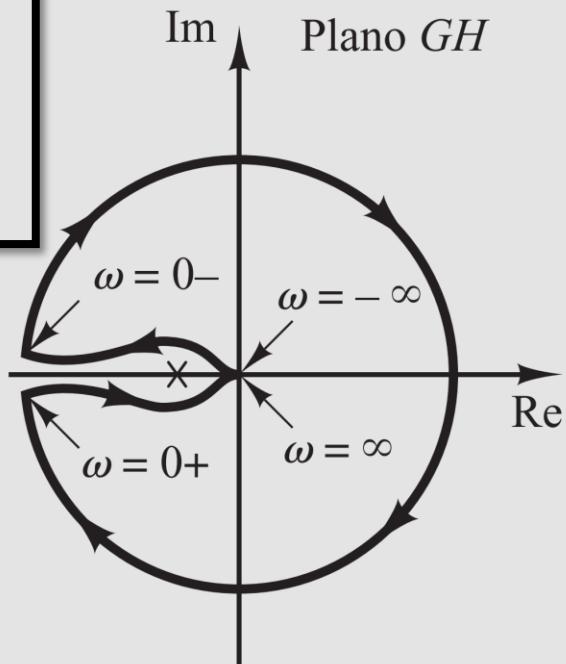
# Ejemplo

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

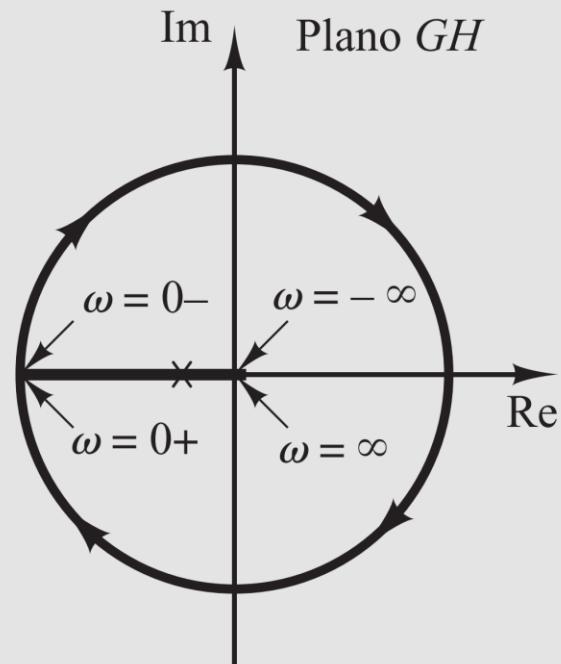


# Ejemplo

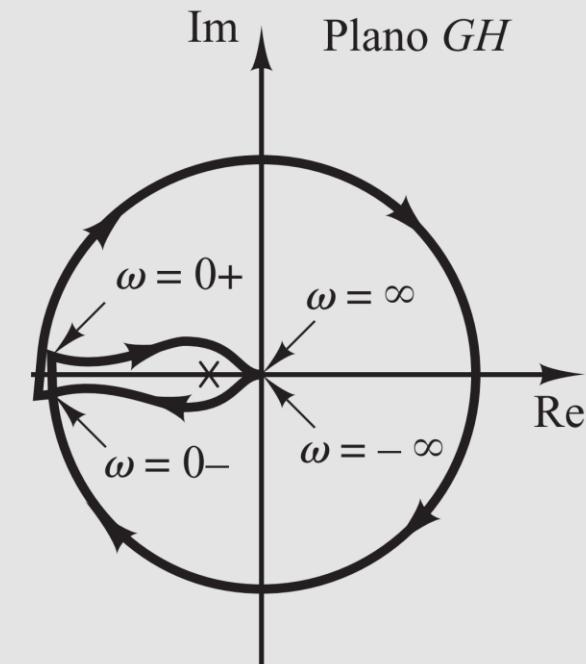
$$G(s)H(s) = \frac{K(T_2 s + 1)}{s^2(T_1 s + 1)}$$



$T_1 < T_2$   
(Estable)



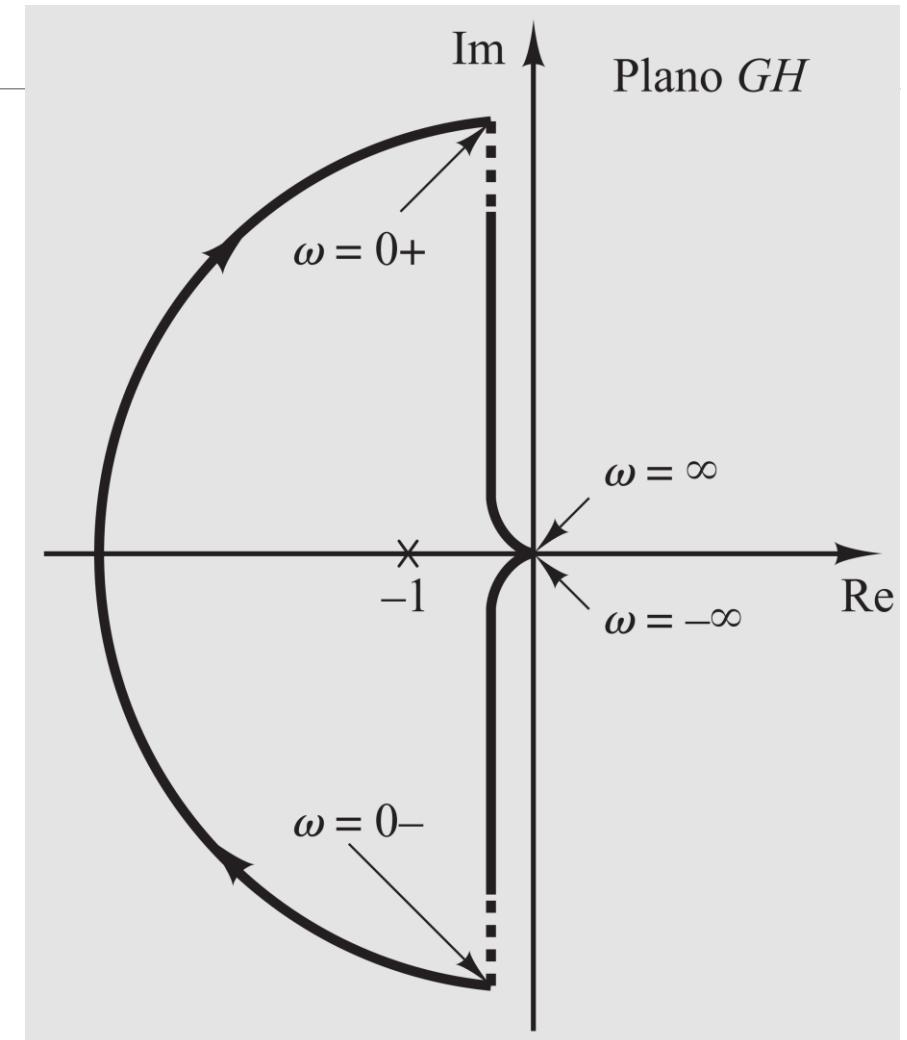
$T_1 = T_2$   
El lugar de  $G(j\omega) H(j\omega)$  pasa  
por el punto  
 $-1 + j0$



$T_1 > T_2$   
(Inestable)

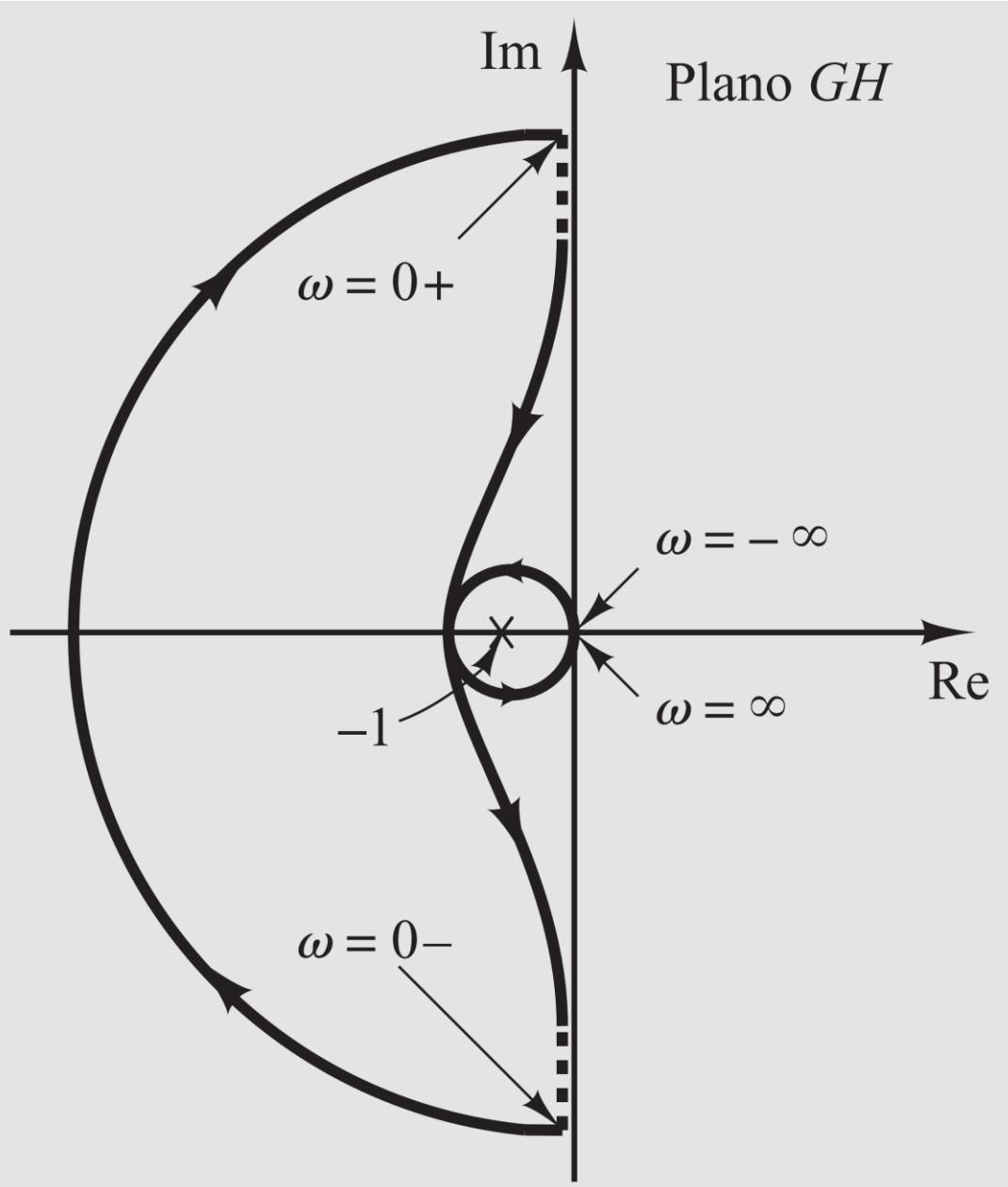
# EJEMPLO

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(Ts - 1)}$$



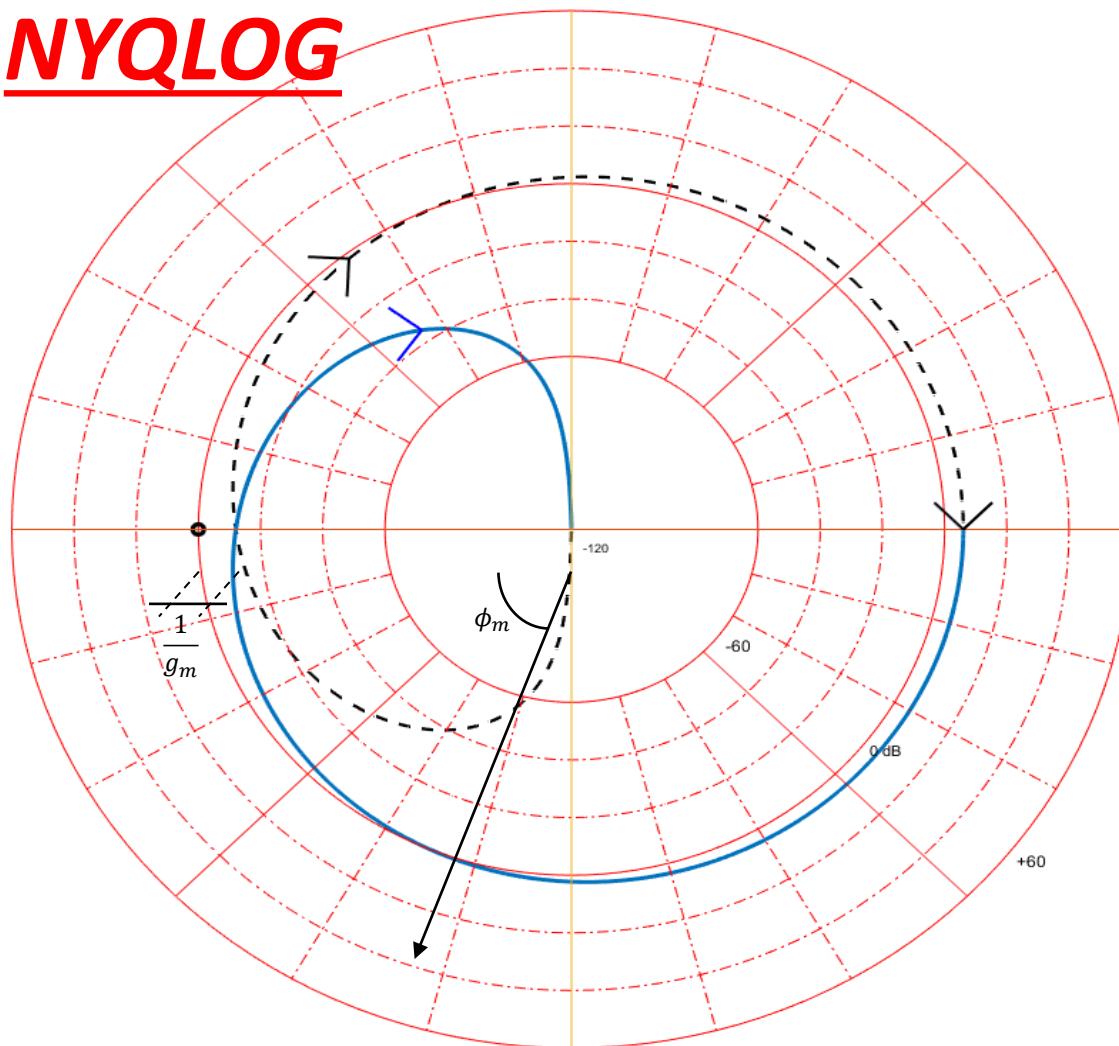
# EJEMPLO

$$G(s)H(s) = \frac{K(s + 3)}{s(s - 1)} \quad (K > 1)$$



# Márgenes de FASE y GANANCIA

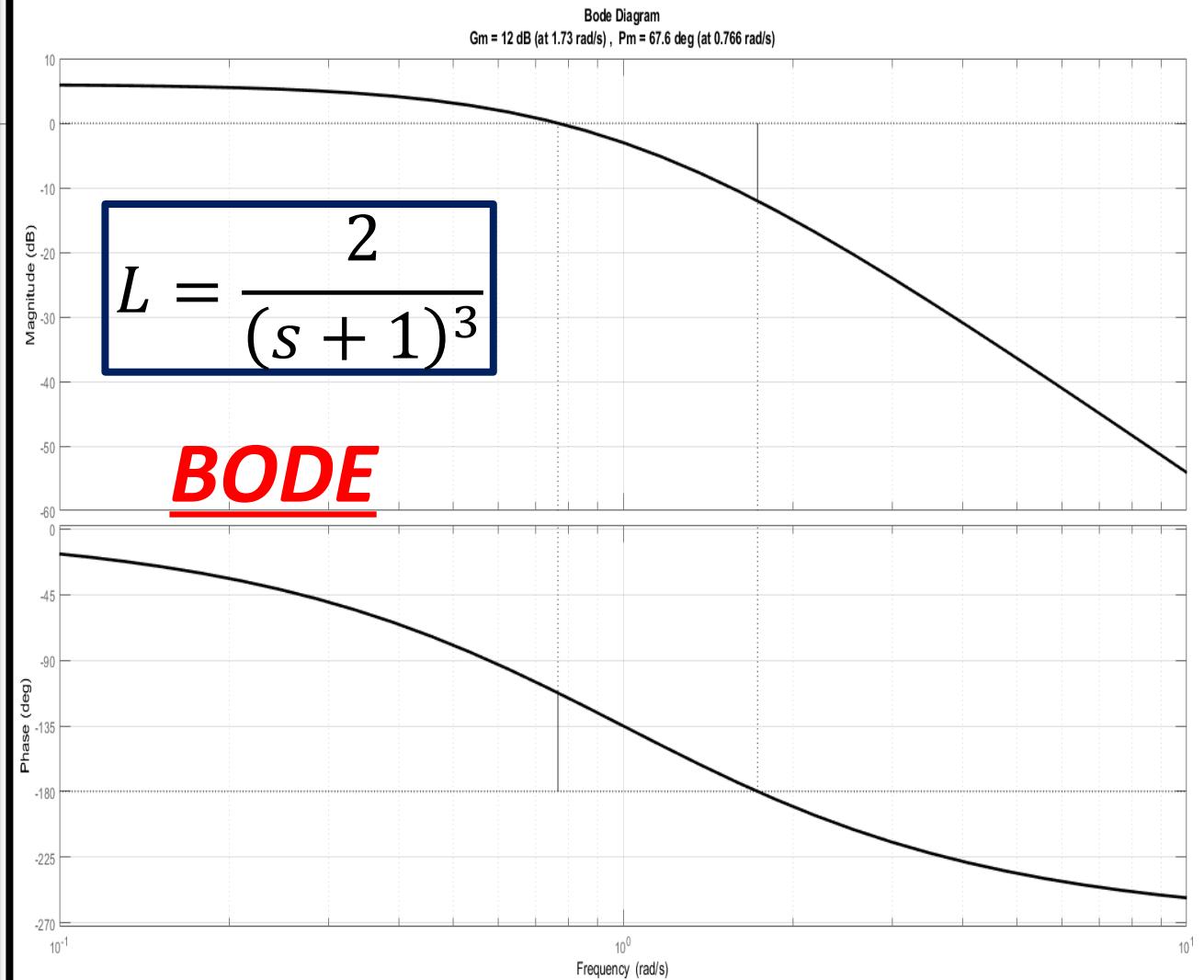
**NYQLOG**



Bode Diagram  
Gm = 12 dB (at 1.73 rad/s), Pm = 67.6 deg (at 0.766 rad/s)

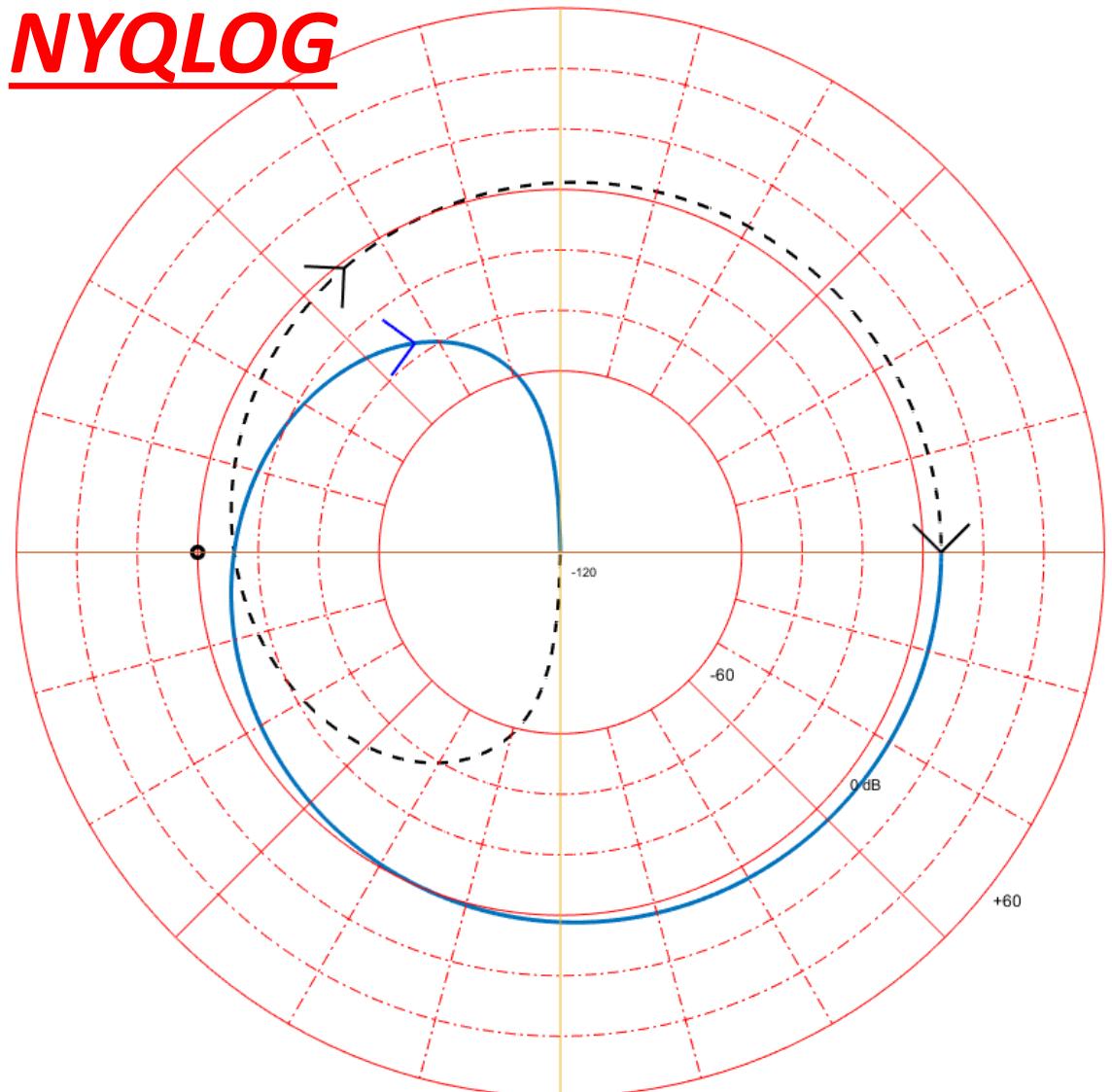
$$L = \frac{2}{(s + 1)^3}$$

**BODE**

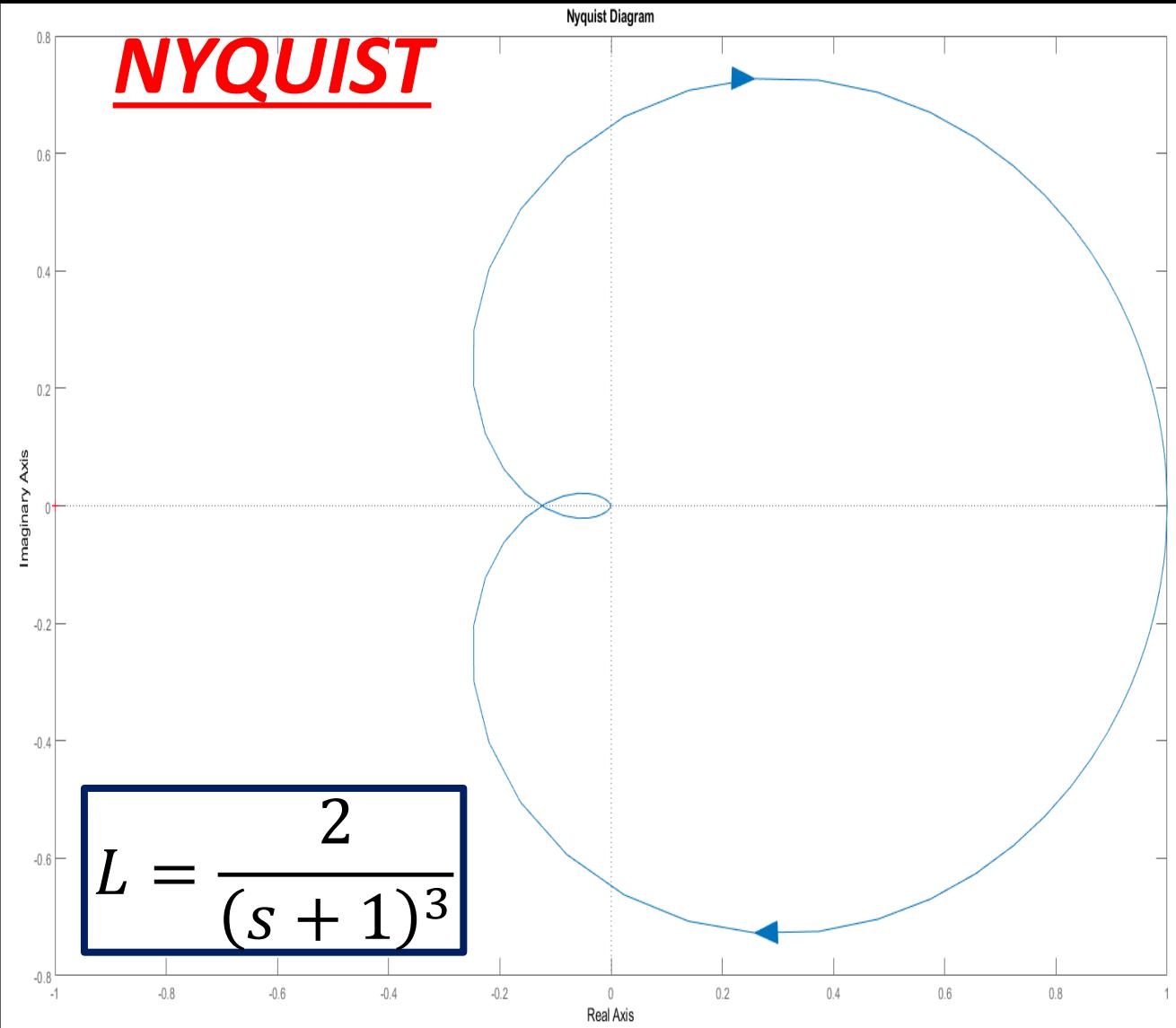


# Márgenes de FASE y GANANCIA

**NYQLOG**

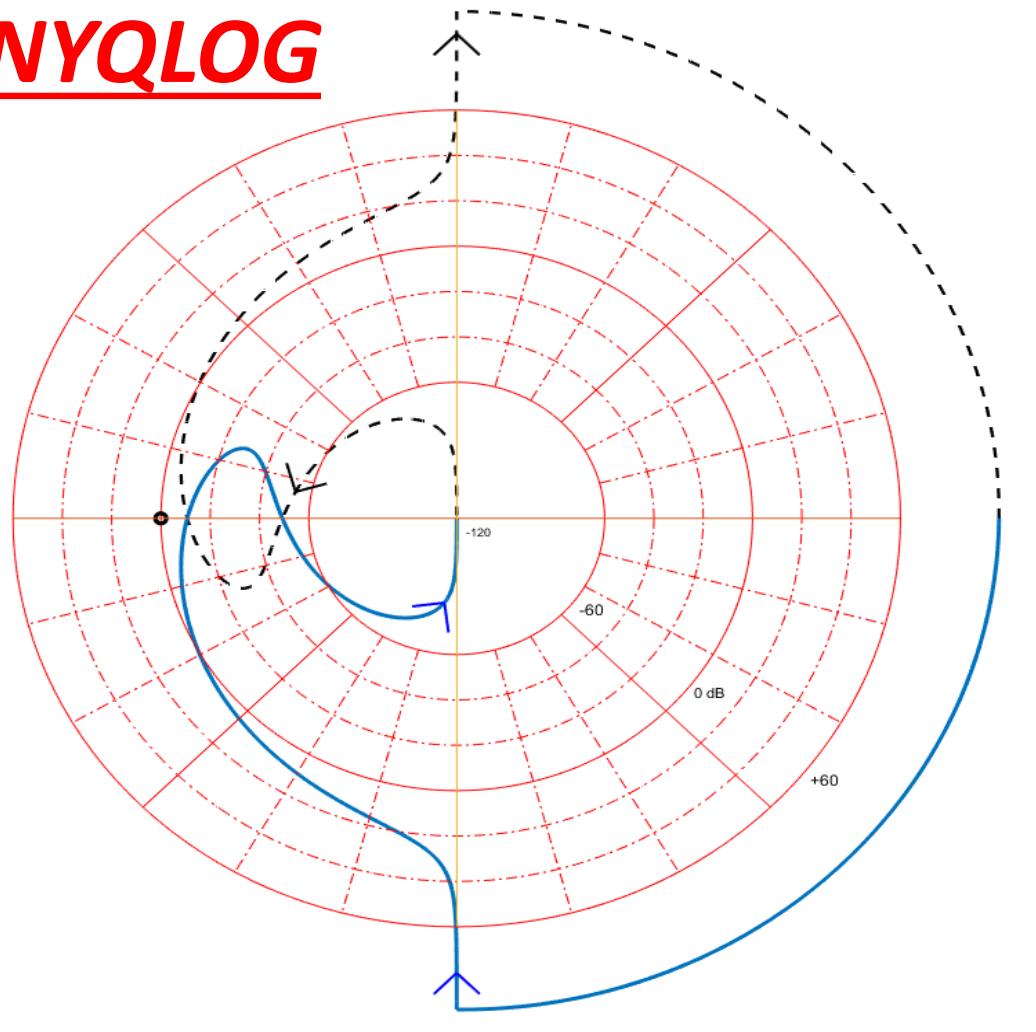


**NYQUIST**

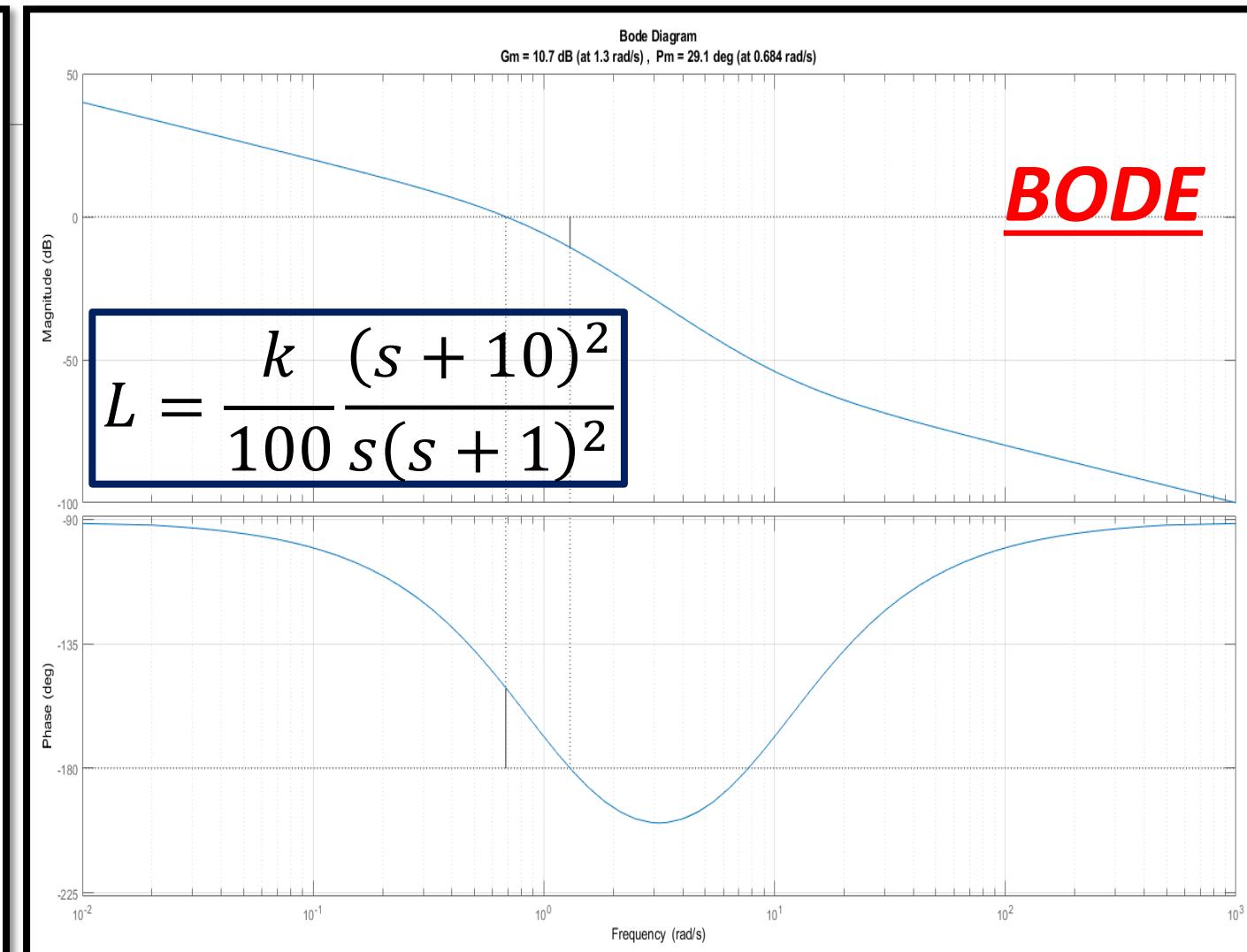


# Estabilidad Condicional: Una ganancia pequeña

**NYQLOG**



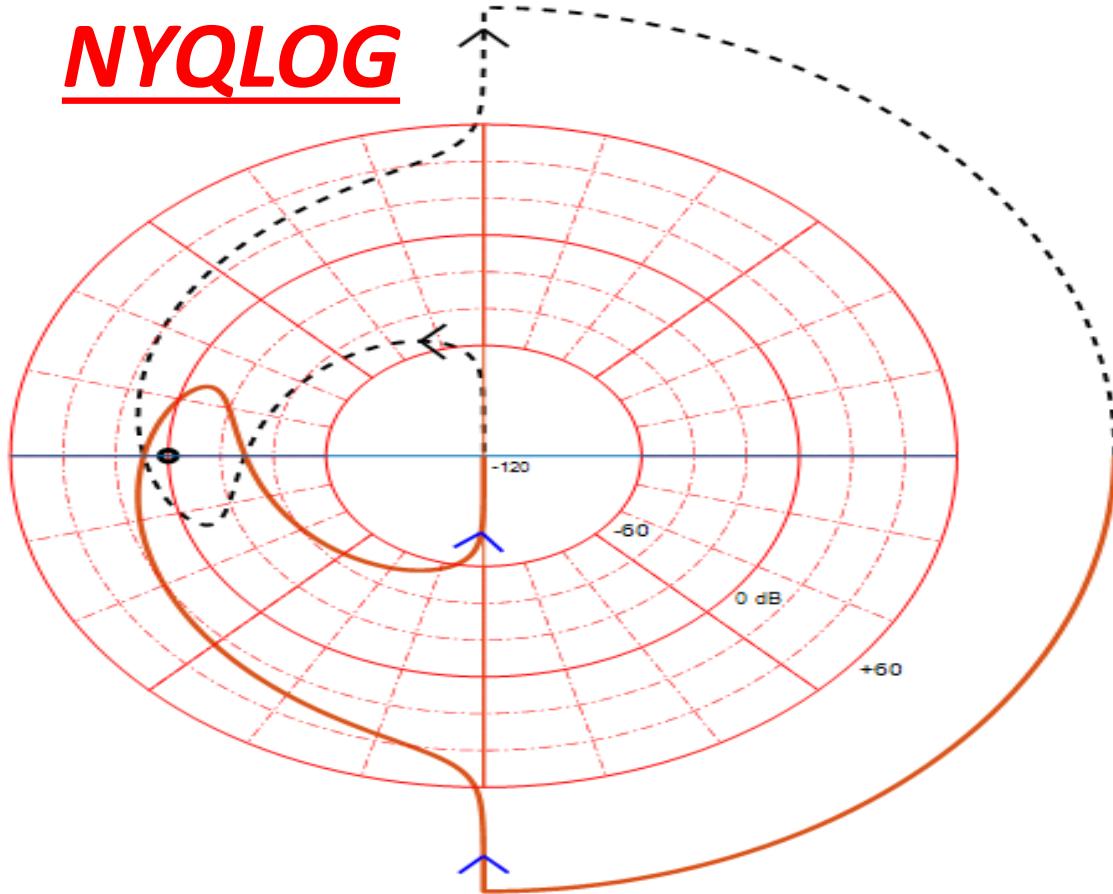
**BODE**



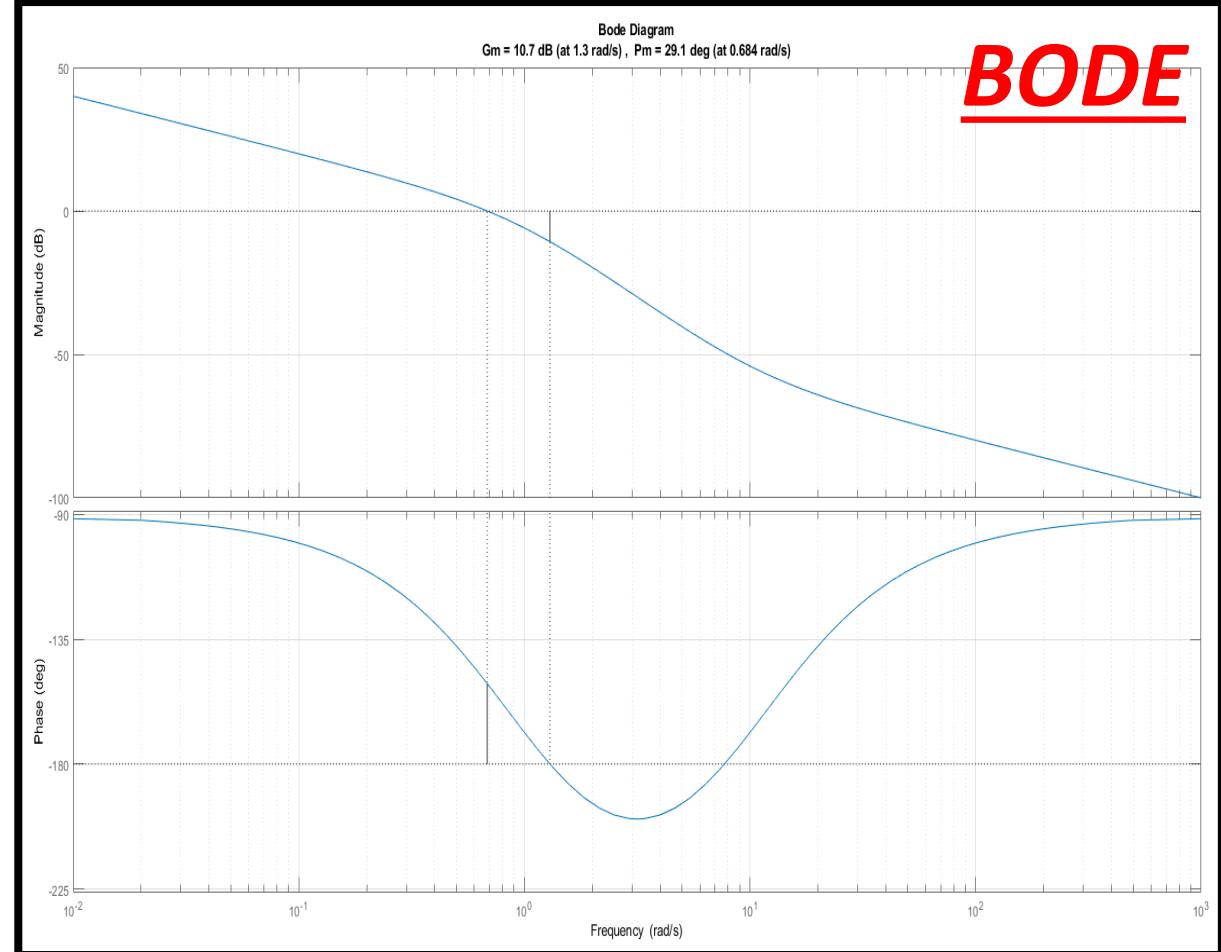
# Estabilidad Condicional: Una ganancia itermedia

$$L = \frac{k}{100} \frac{(s + 10)^2}{s(s + 1)^2}$$

**NYQLOG**

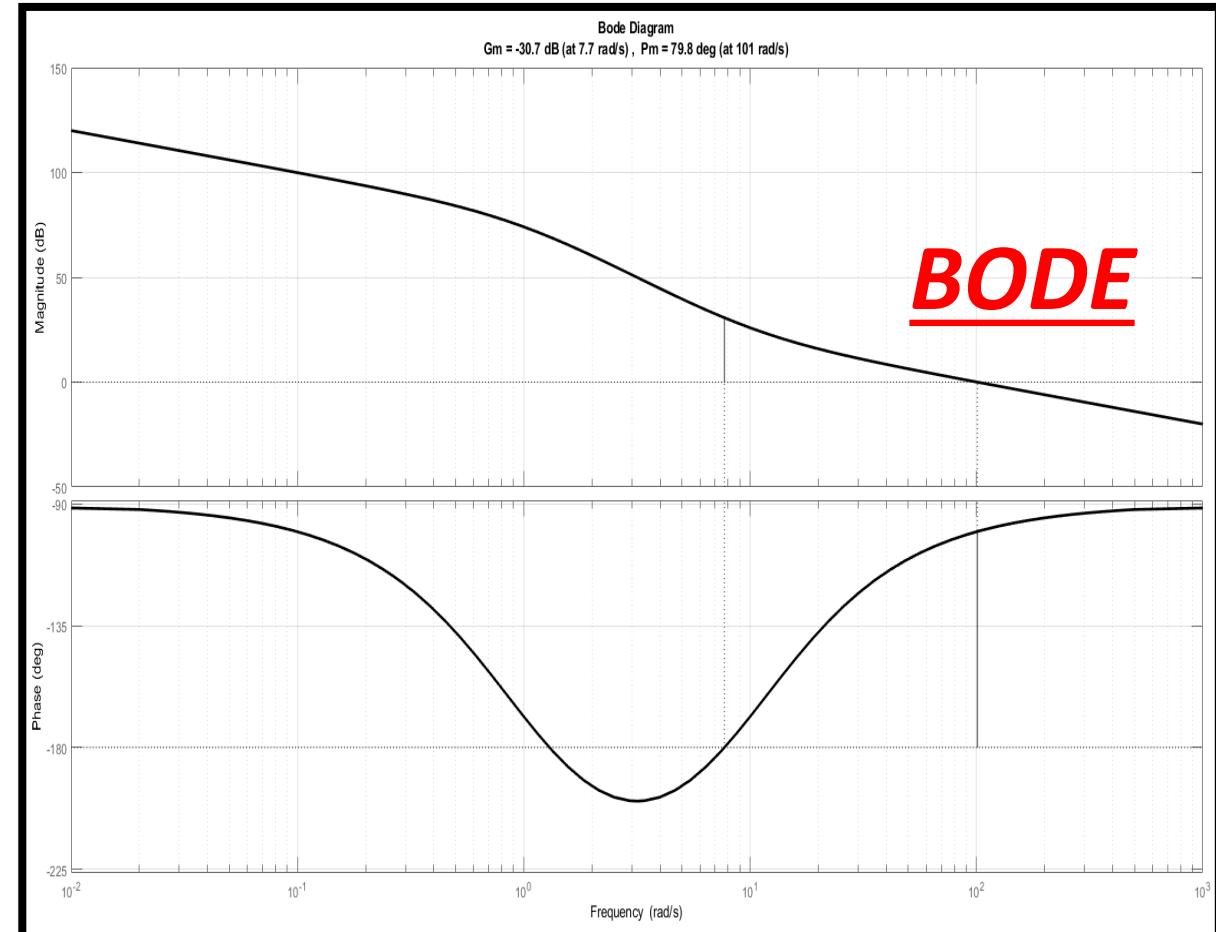
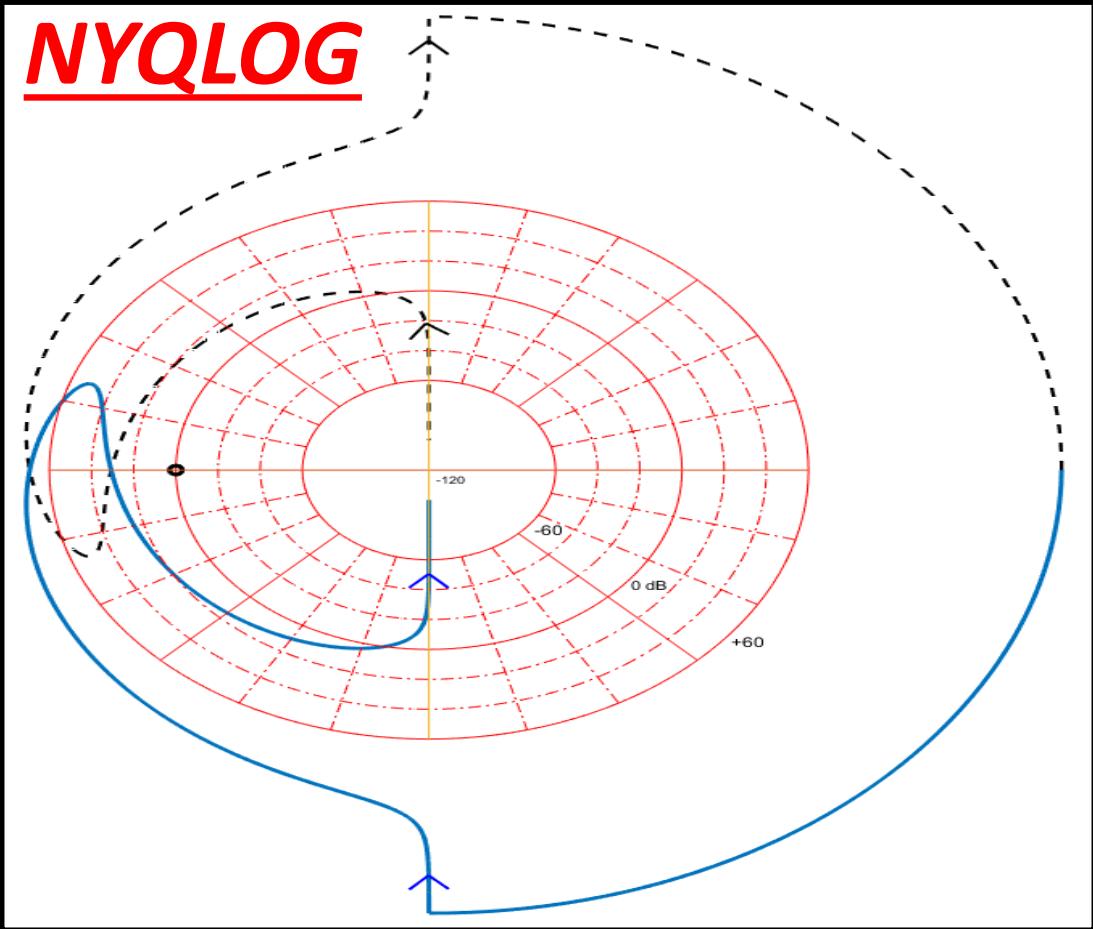


**BODE**

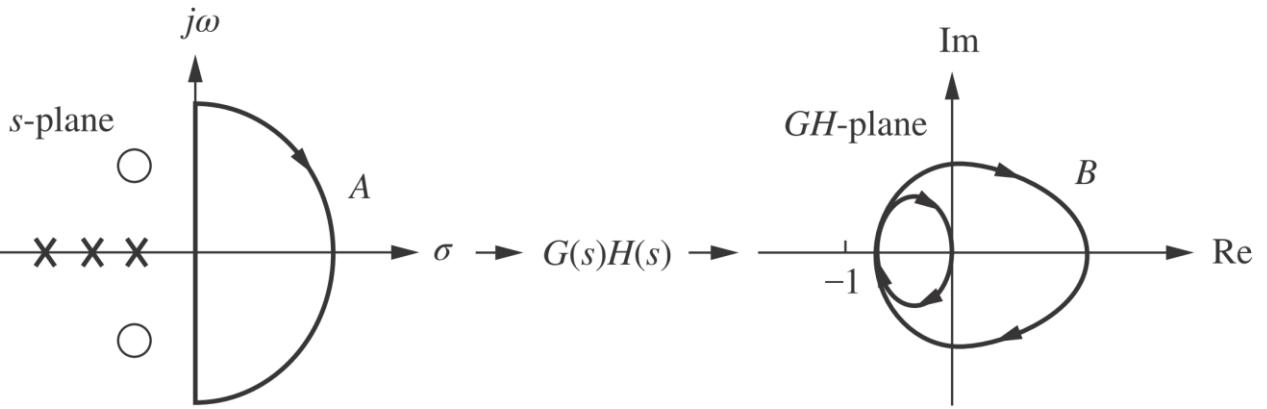


# Estabilidad Condicional: Ganancia Grande

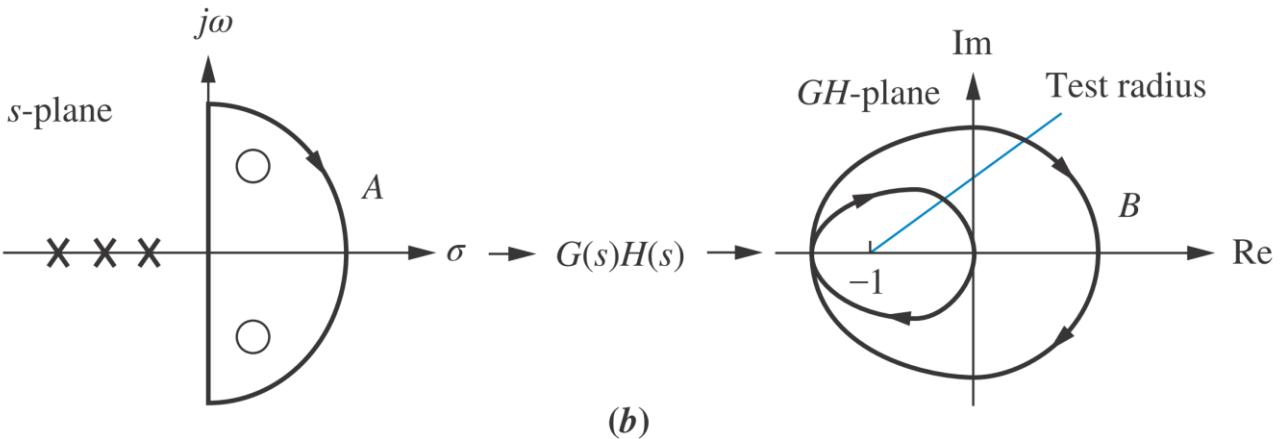
$$L = \frac{k}{100} \frac{(s + 10)^2}{s(s + 1)^2}$$



# Ejemplos:



(a)



(b)

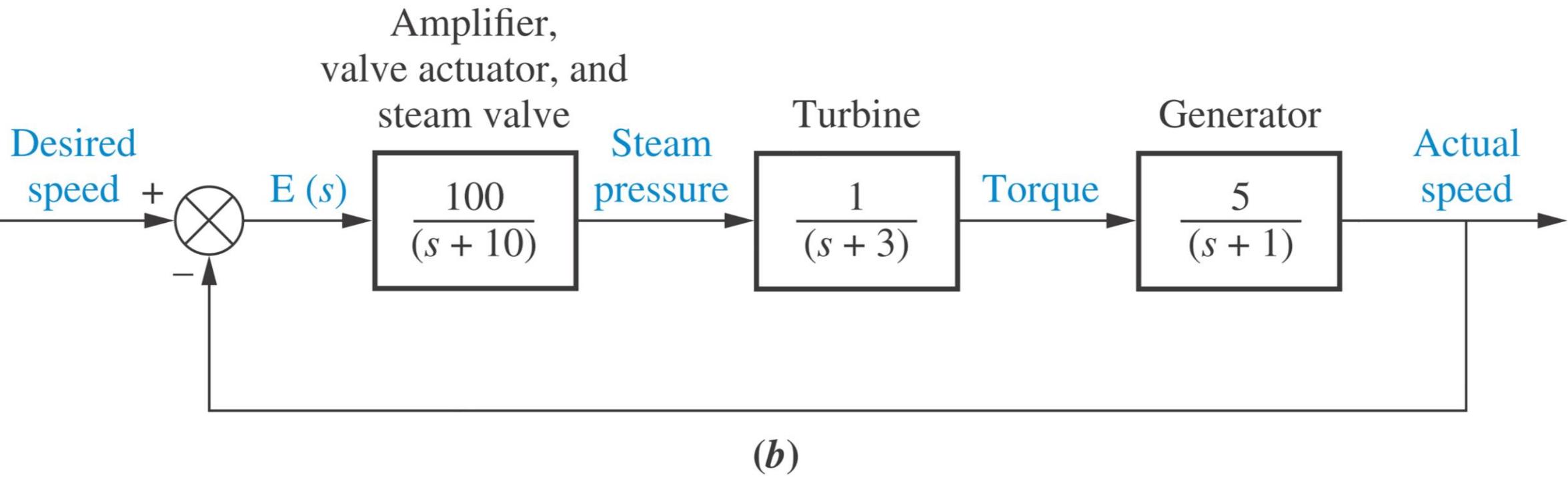
○ = zeros of  $1 + G(s)H(s)$   
= poles of closed-loop system  
Location not known

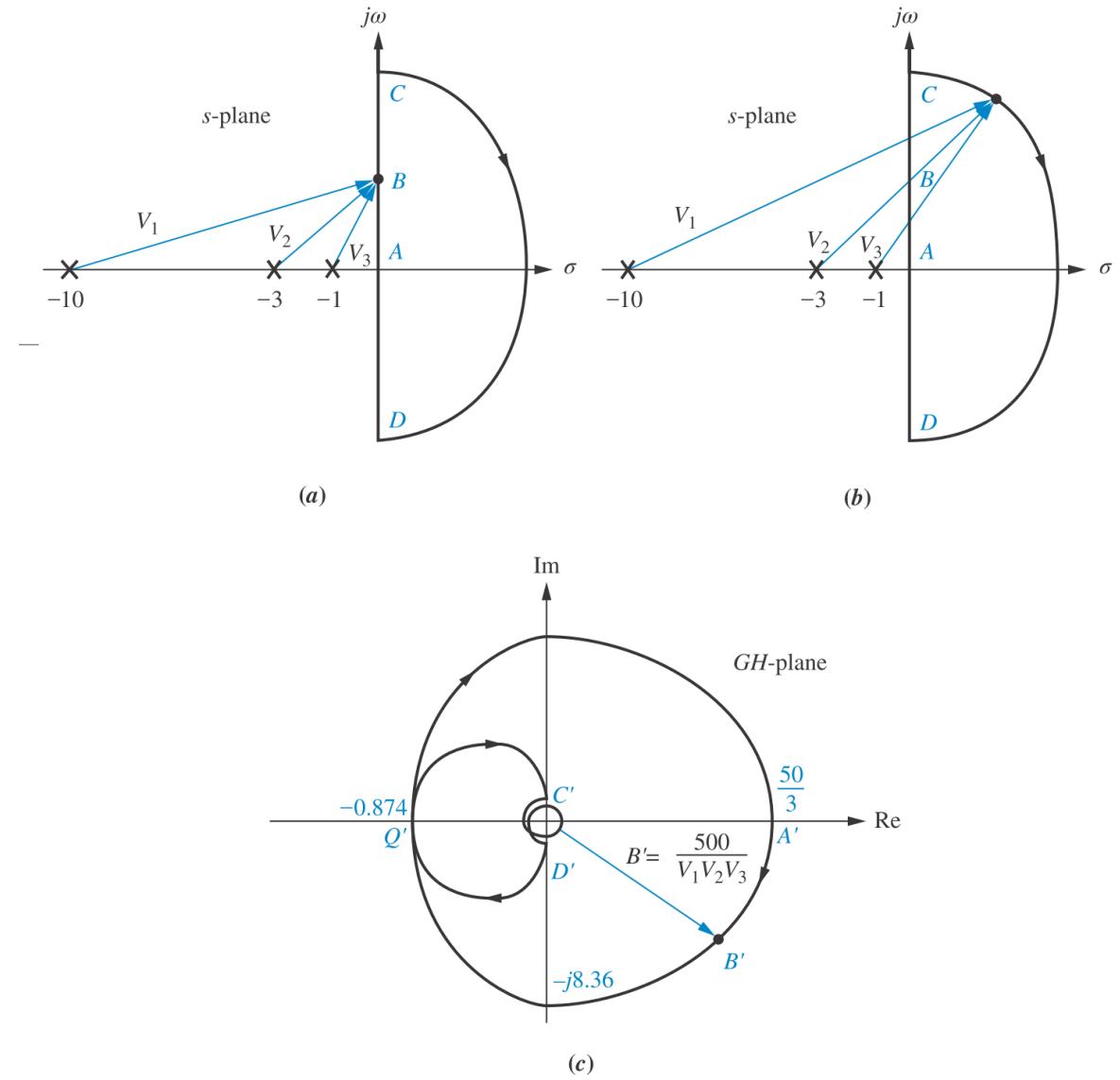
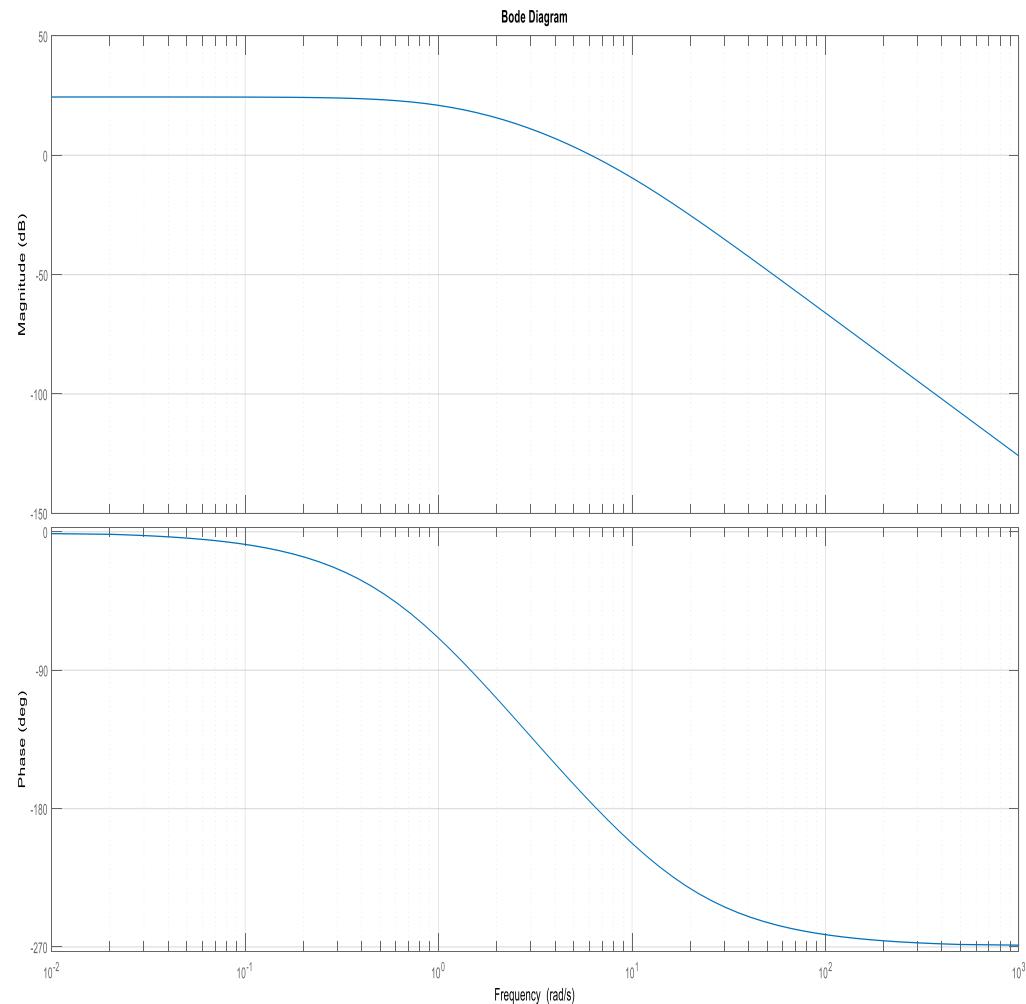
✗ = poles of  $1 + G(s)H(s)$   
= poles of  $G(s)H(s)$   
Location is known

# 10.4 Sketching the Nyquist Diagram

## Example 10.4

### Sketching a Nyquist Diagram



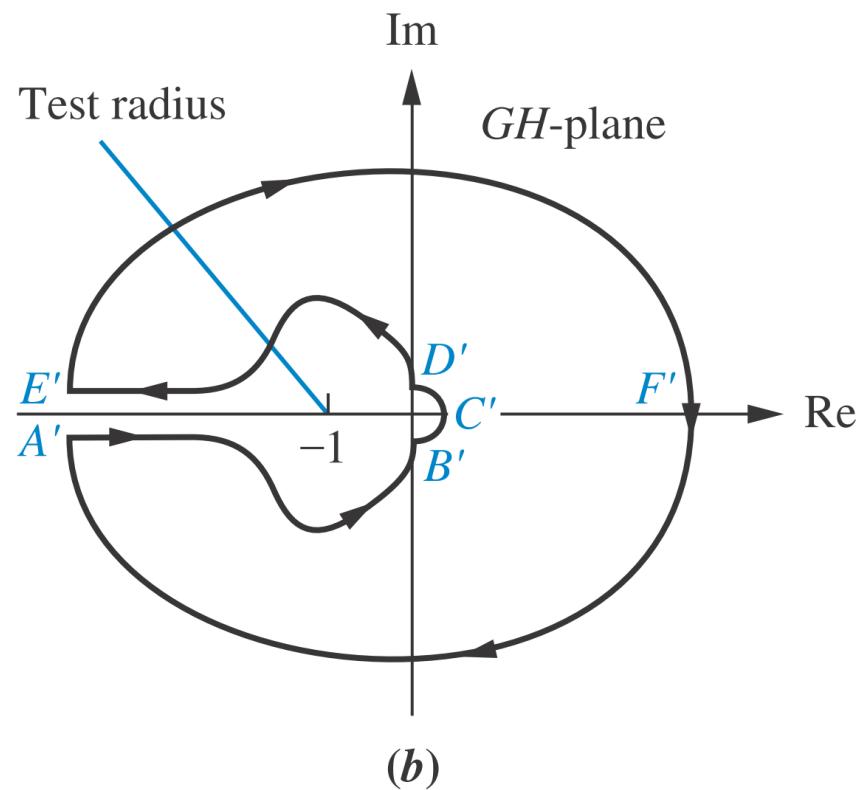
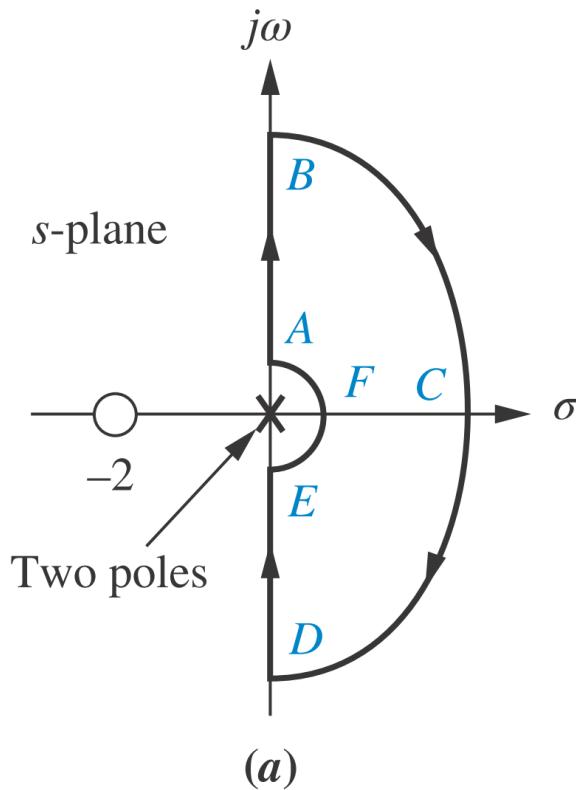


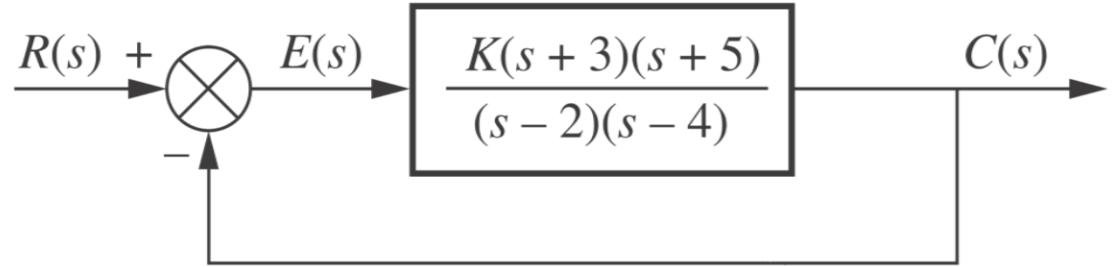
**FIGURE 10.27** Vector evaluation of the Nyquist diagram for Example 10.4: **a.** vectors on contour at low frequency; **b.** vectors on contour around infinity; **c.** Nyquist diagram

## Example 10.5

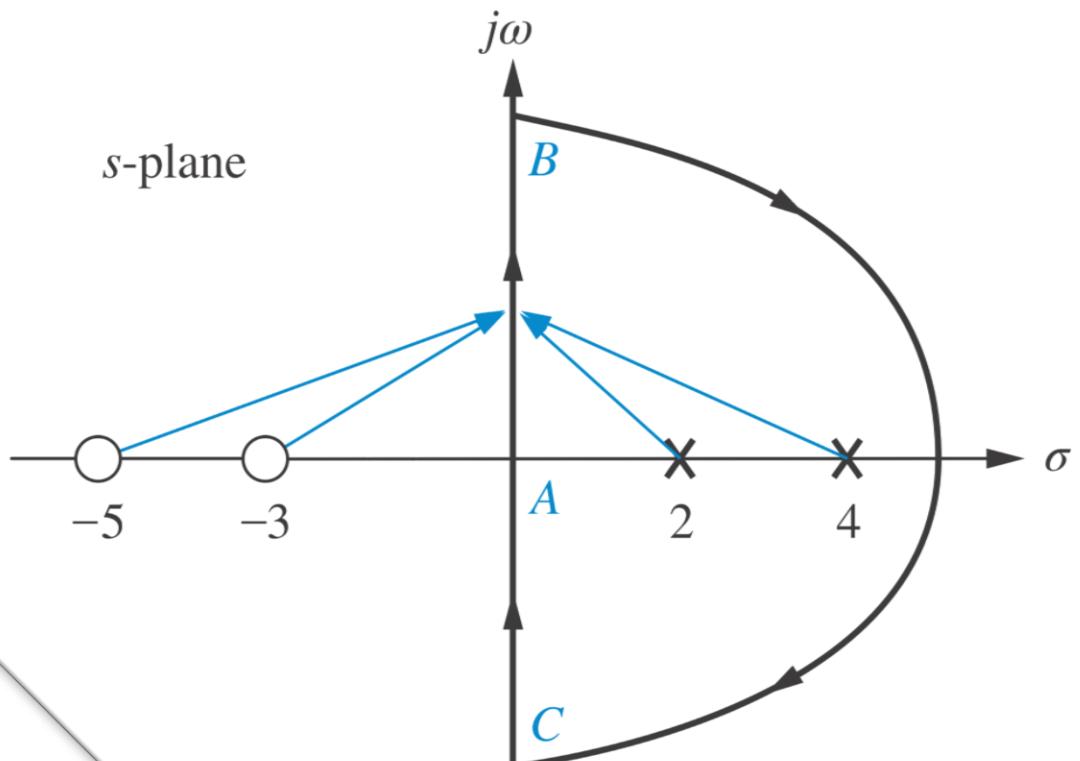
### Nyquist Diagram for Open-Loop Function with Poles on Contour

**PROBLEM:** Sketch the Nyquist diagram of the unity feedback system of Figure 10.10, where  $G(s) = (s + 2)/s^2$ .

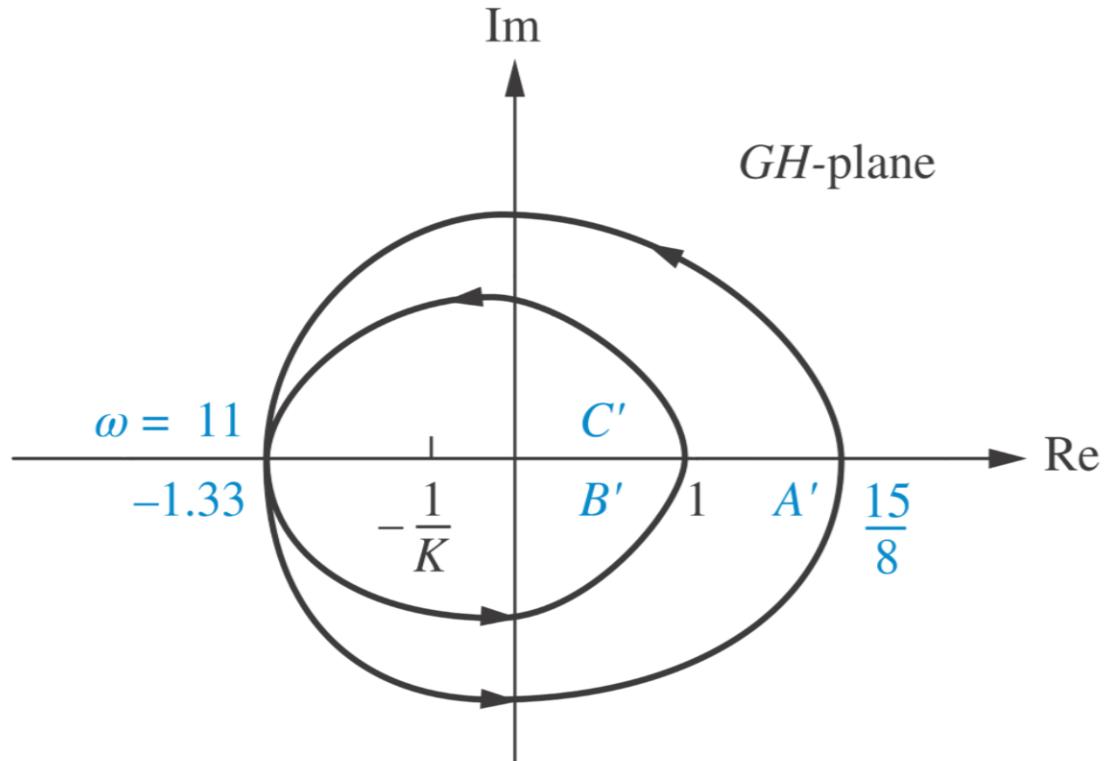




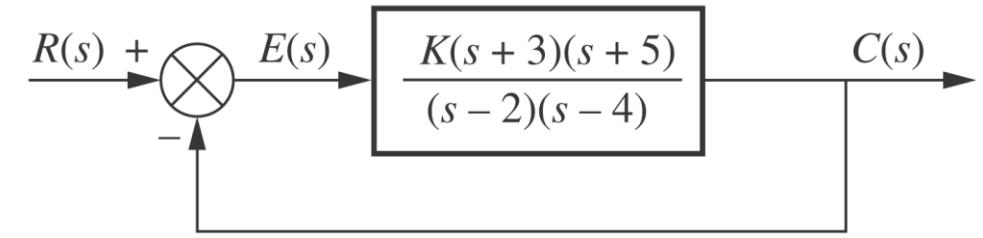
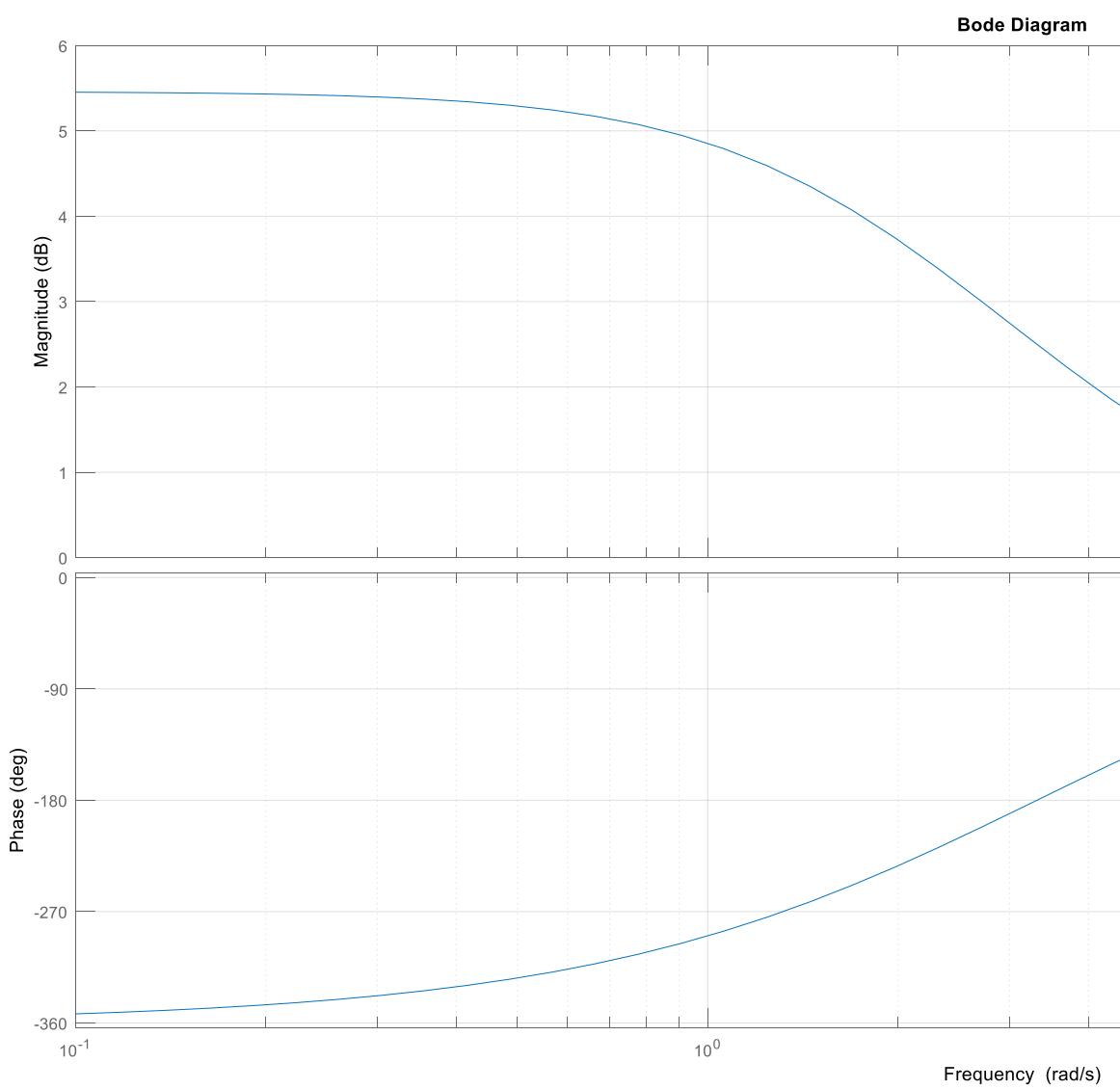
(a)



(b)



(c)

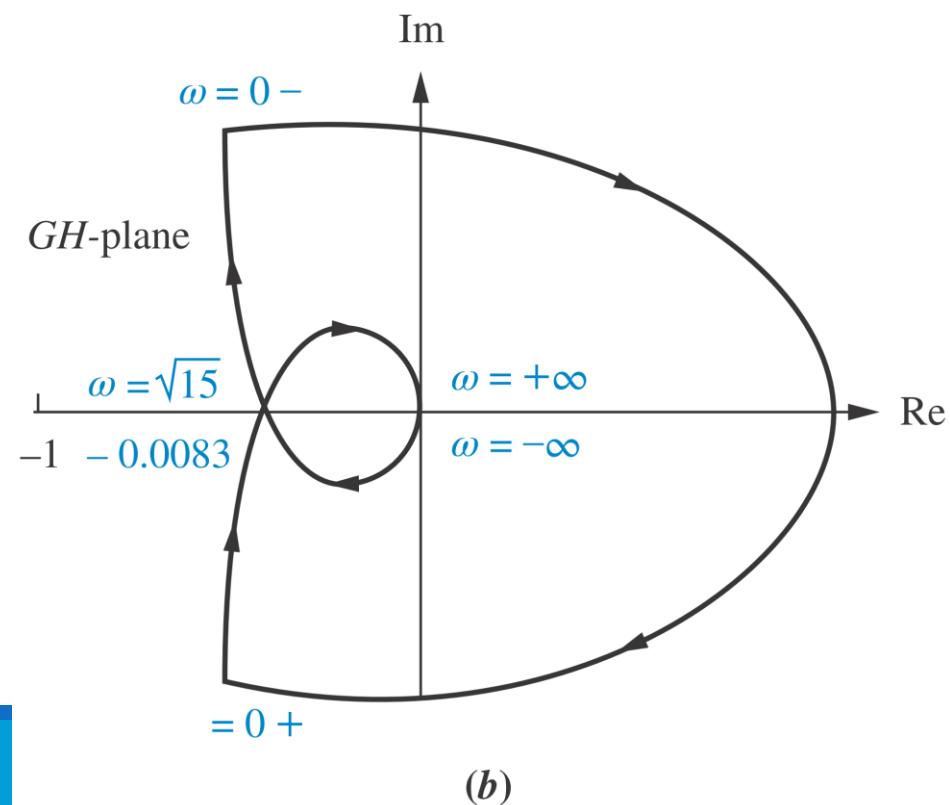
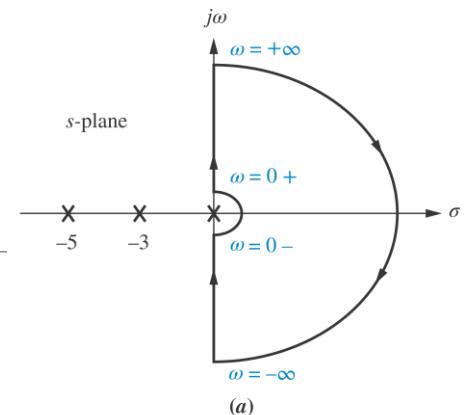
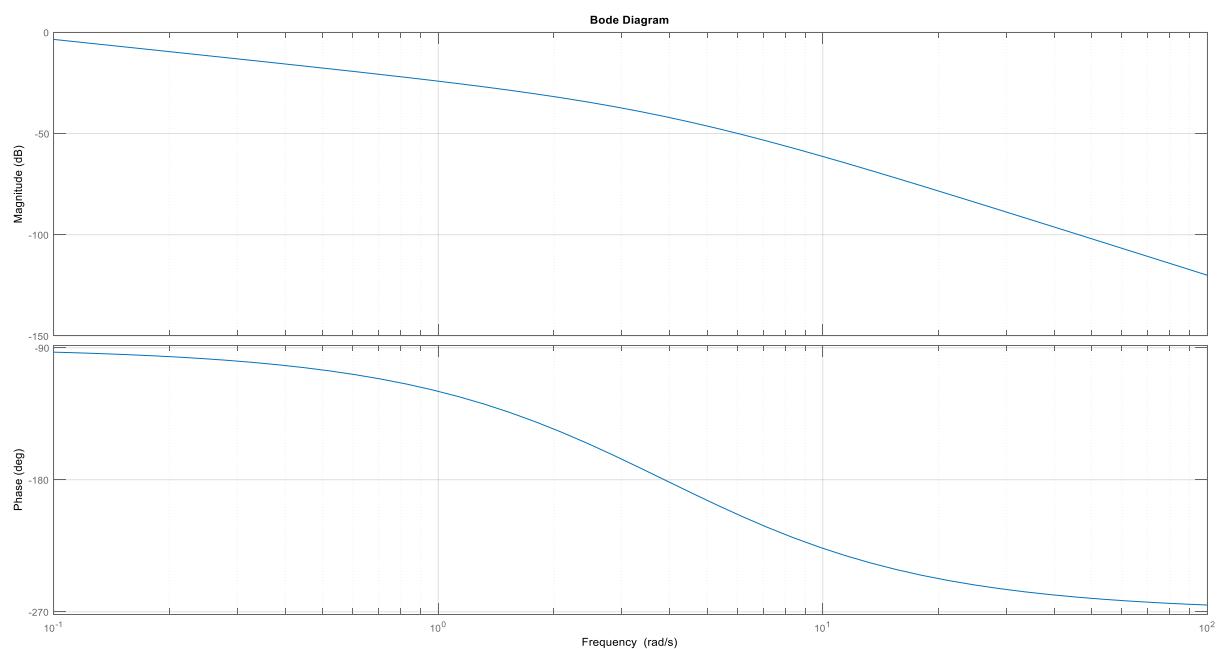


(a)

## Example 10.6

### Range of Gain for Stability via the Nyquist Criterion

**PROBLEM:** For the unity feedback system of Figure 10.10, where  $G(s) = K/[s(s + 3)(s + 5)]$ , find the range of gain,  $K$ , for stability, instability, and the value of gain for marginal stability. For marginal stability also find the frequency of oscillation. Use the Nyquist criterion.



# Ejercicios:

---

Simples:  $\frac{1}{s}$ ,  $\frac{1}{s^2}$  y  $\frac{1}{s^3}$ .

$\frac{1}{(s+1)(s-1)}$ , con y sin acción integral.

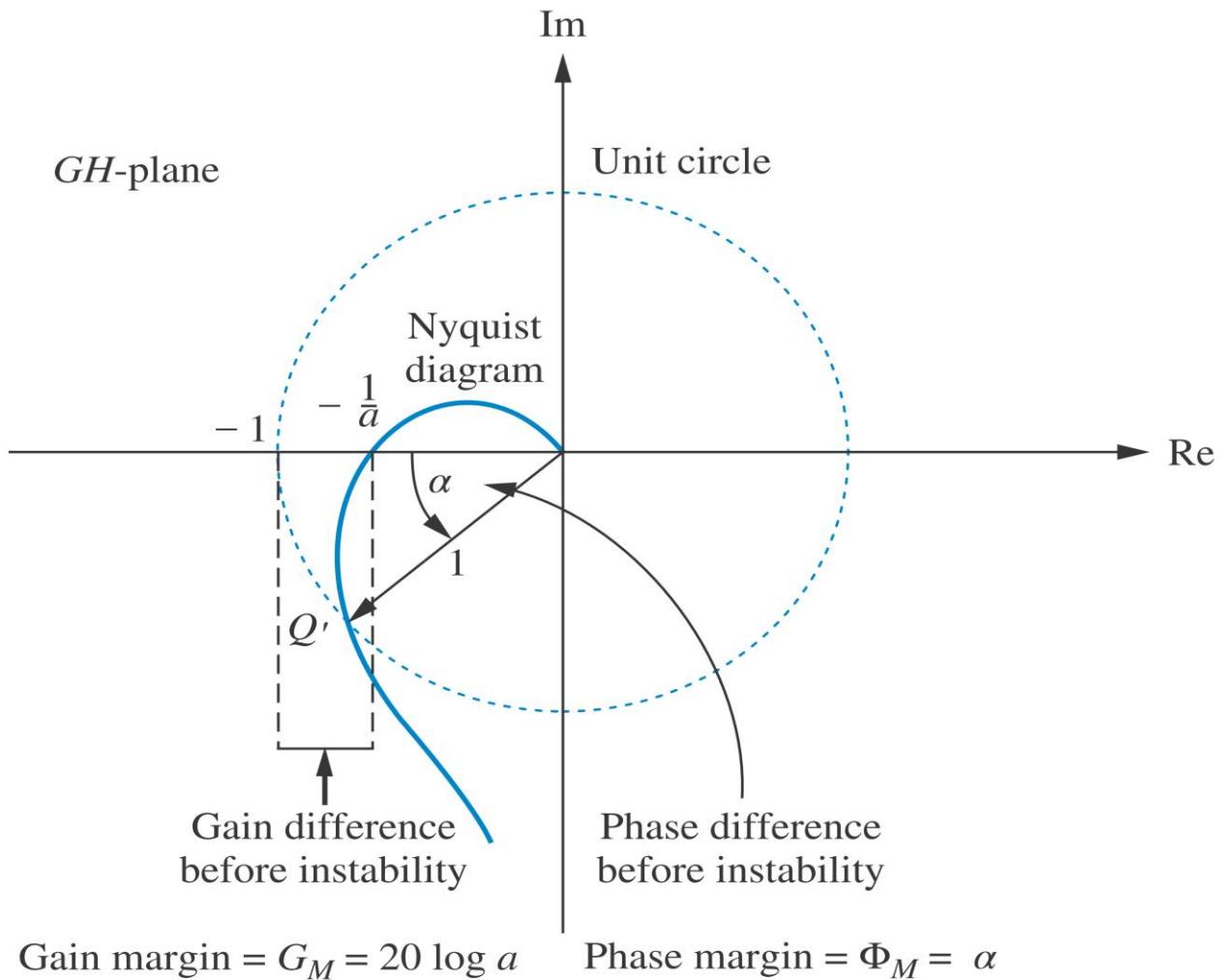
$$\frac{(s-1)^2}{(s+3)^2}$$

Problema del Astrom Murray:  $L(s) = \frac{3(s+6)^2}{s(s+1)^2}$ .

Para ver más claramente este problema con las tres “zonas” de ganancia tales que sucesivamente el lazo es estable, luego inestable, y finalmente vuelve a ser estable, conviene modificar el problema ligeramente a:

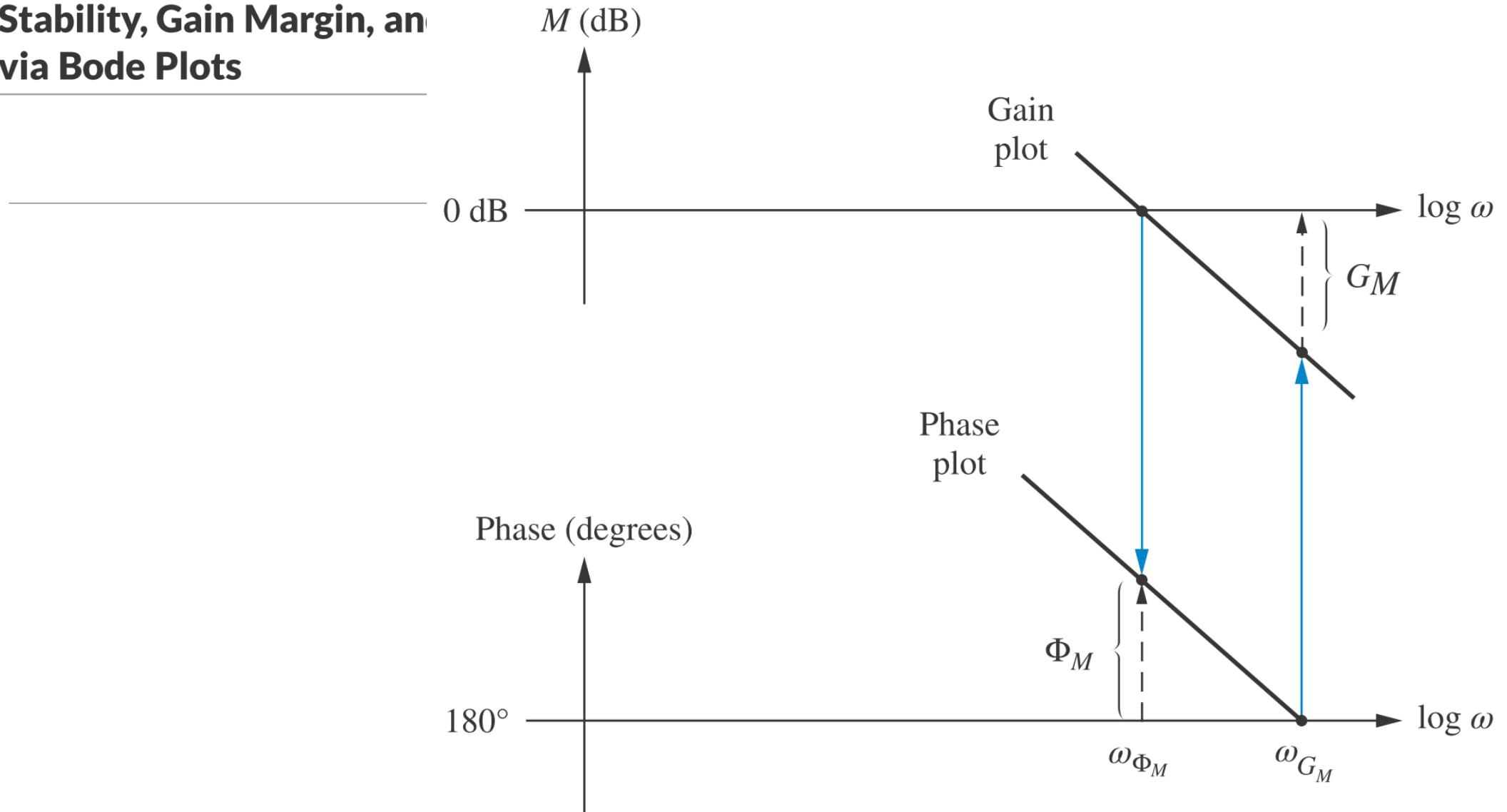
$$L(s) = \frac{(s+20)^2}{s(s+1)^2}$$

En ese caso se ve cómo la fase tiene dos cruces por  $-180^\circ$ .



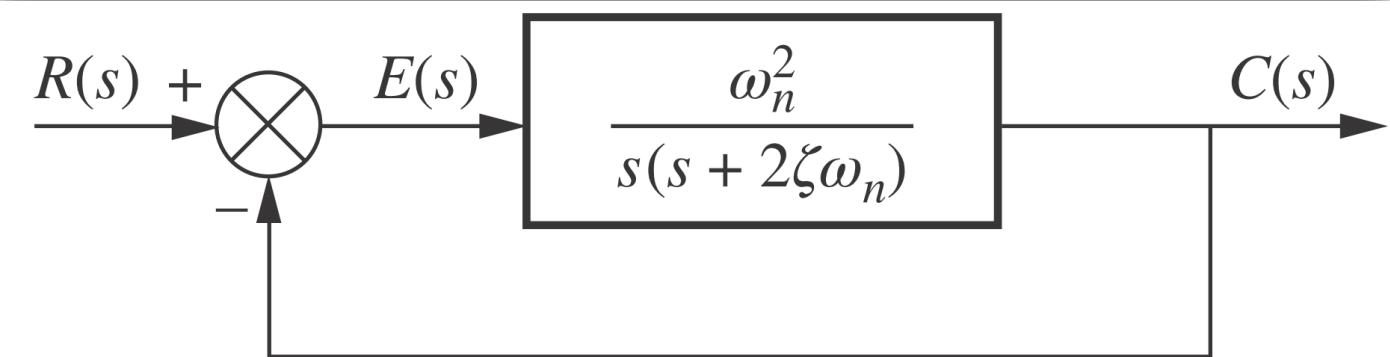
**FIGURE 10.35** Nyquist diagram showing gain and phase margins

## 10.7 Stability, Gain Margin, and Phase Margin via Bode Plots



## 10.8 Relation Between Closed-Loop Transient and Closed-Loop Frequency Responses

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$$

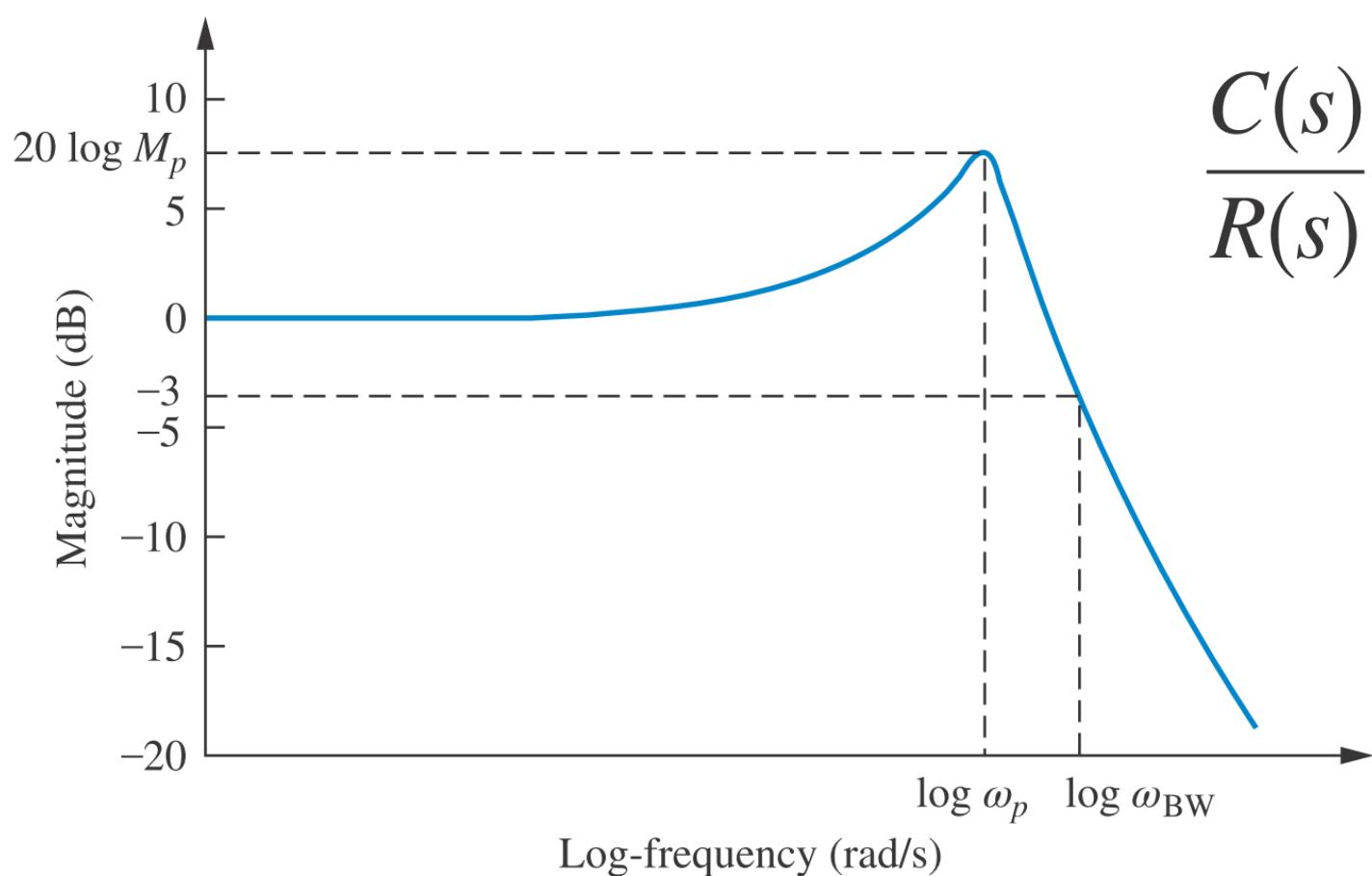


**FIGURE 10.38** Second-order closed-loop system

$$\frac{C(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

## 10.8 Relation Between Closed-Loop Transient and Closed-Loop Frequency Responses

---



$$\frac{C(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

## 10.8 Relation Between Closed-Loop Transient and Closed-Loop Frequency Responses

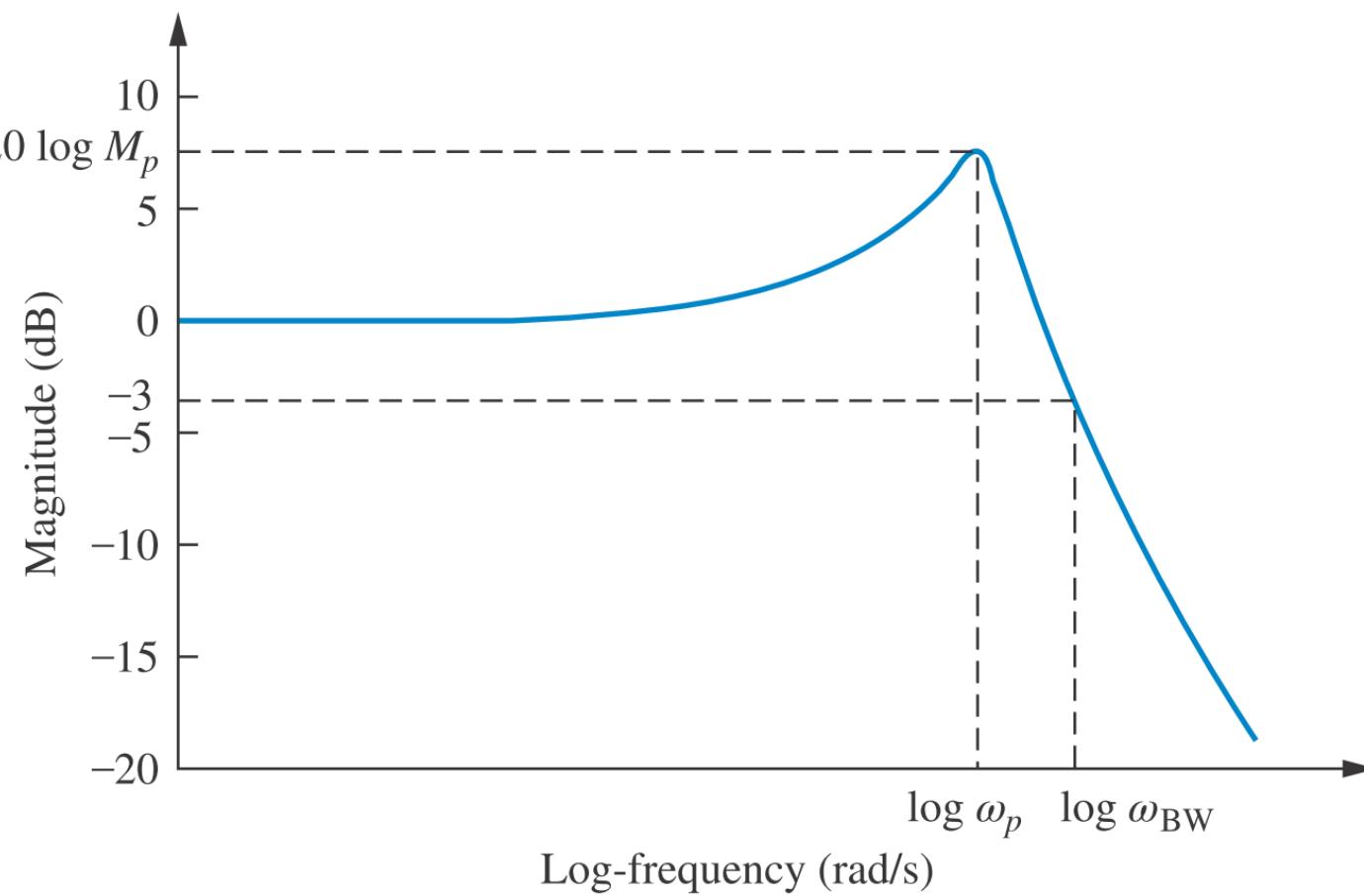
$$\frac{C(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$M = |T(j\omega)| = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2}}$$

$$\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

$$M_p = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

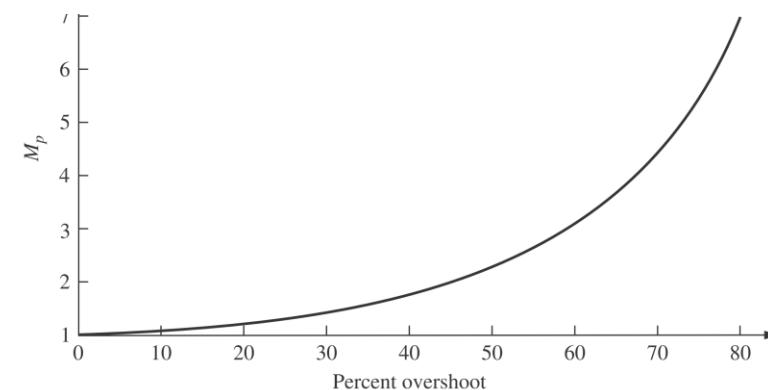
$$\omega_{BW} = \omega_n \sqrt{(1 - 2\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}}$$



$$\omega_{BW} = \frac{4}{T_s \zeta} \sqrt{(1 - 2\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}}$$

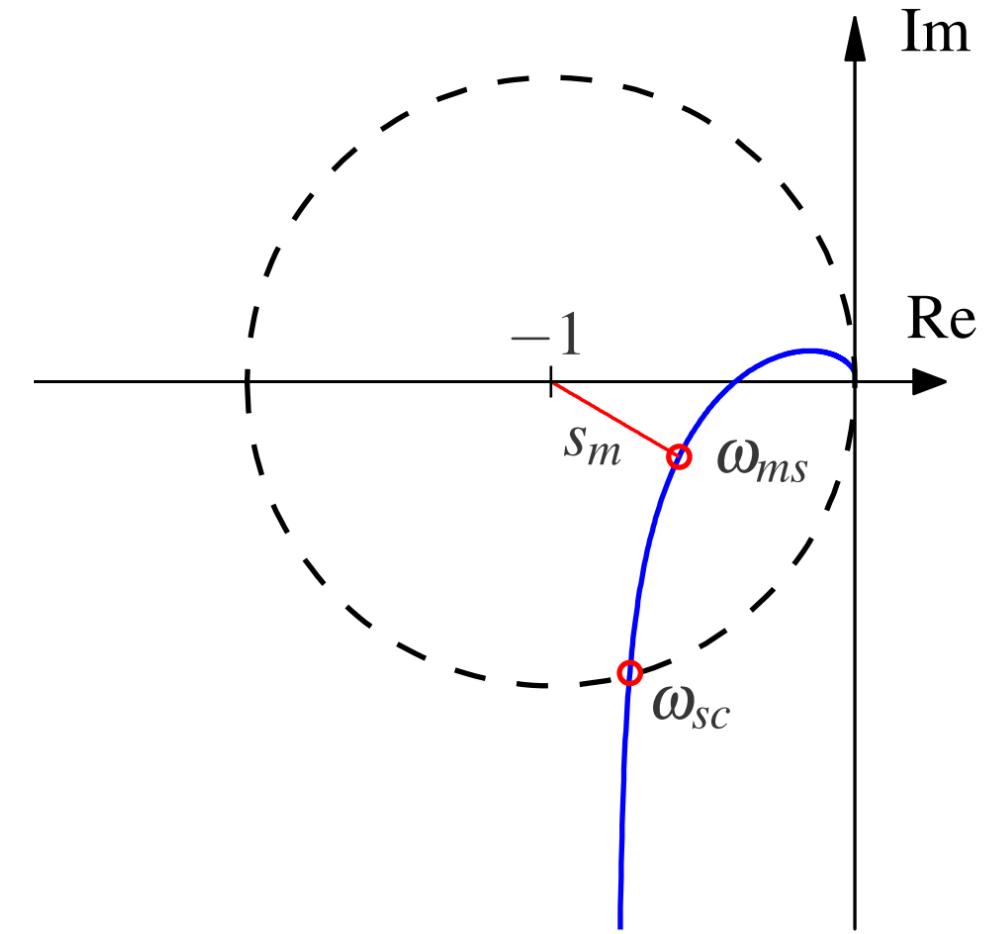
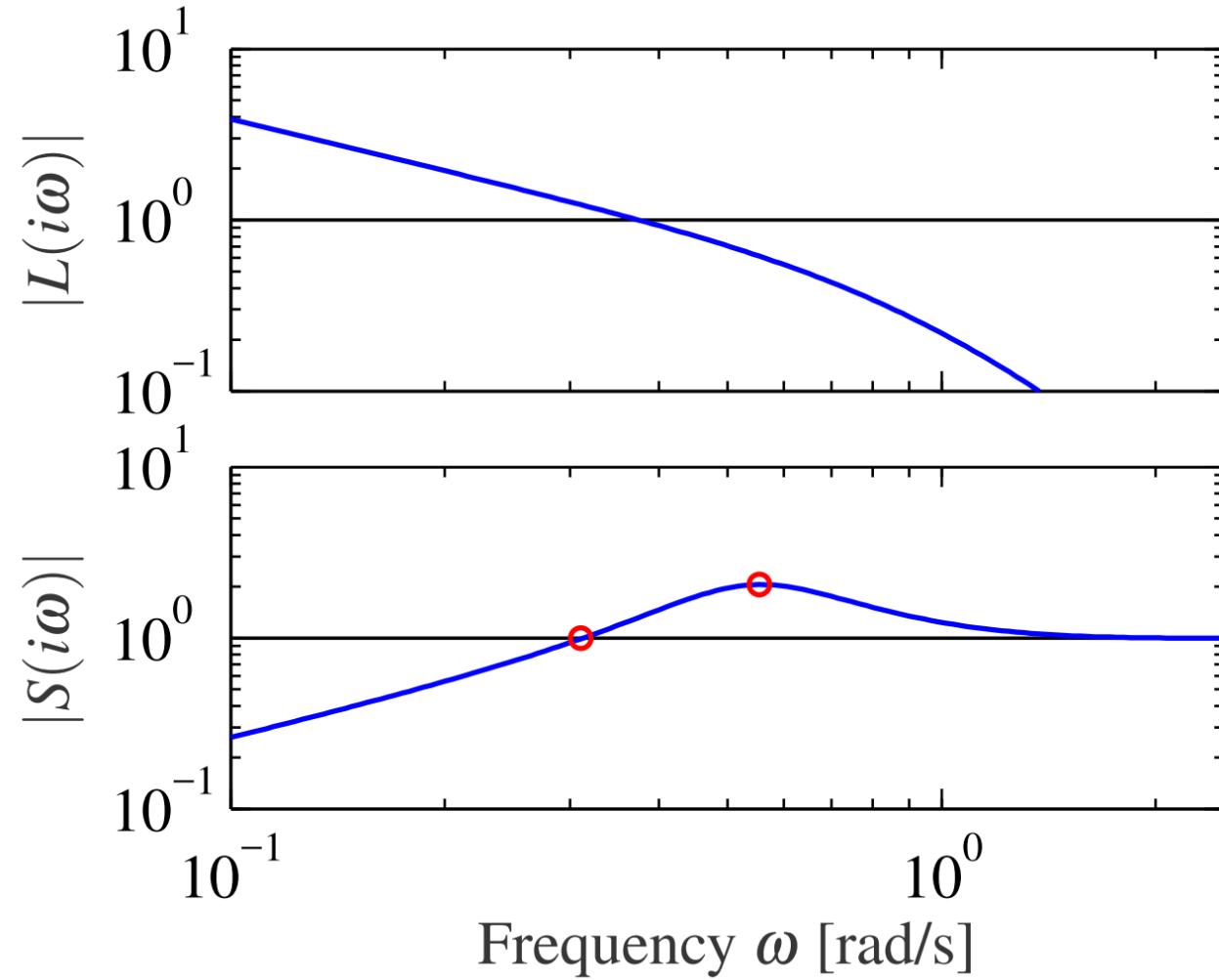
$$\omega_{BW} = \frac{\pi}{T_p \sqrt{1 - \zeta^2}} \sqrt{(1 - 2\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}}$$

$$\omega_n = 4/T_s \zeta$$



**FIGURE 10.40** Closed-loop frequency response peak vs. percent overshoot for a two-pole system

# Márgenes de Fase y Ganancia y Robustez



# Frecuencias de cruce

$M_p, M_t$ : Complementary Sensitivity Peak (NISE, A&M)

$\omega_p, \omega_{mt}$ : Comp. Sensitivity Peak frequency (NISE, A&M).

$\omega_{BW}, \omega_b$ : Comp. Sensitivity -3dB frequency (NISE, A&M).

$\omega_{tc}$ : Complementary Sensitivity Cross Over Frequency.

$M_s$ : Sensitivity Peak (Astrom & Murray).  $M_s = \frac{1}{s_m}$   
 $s_m = \min_{\omega} |1 + L(j\omega)|$

$\omega_{sc}$ : Sensitivity Cross Over Frequency

$L(s)$ : Loop Gain, transferencia de lazo abierto.

- $\omega_{gc}$ : Loop Gain Cross Over Frequency,
- $\omega_{pc}$ : Loop Gain Cross Over Frequency

•  $g_m = \left| \frac{1}{L(j\omega_{pc})} \right|$ , margen de ganancia.

$\varphi_m = \angle \frac{1}{L(j\omega_{gc})}$ . Margen de fase. A veces aparece como  $\phi_m$ .

Si  $\varphi_m = 60^\circ$ ,  $\omega_{sc} = \omega_{gc} = \omega_{tc} \approx \omega_b$

$$t_r \omega_b \approx 2$$

# Relaciones para sistemas de 2ndo Orden

**Table 7.1:** Properties of the step response for a second-order system with  $0 < \zeta \leq 1$ .

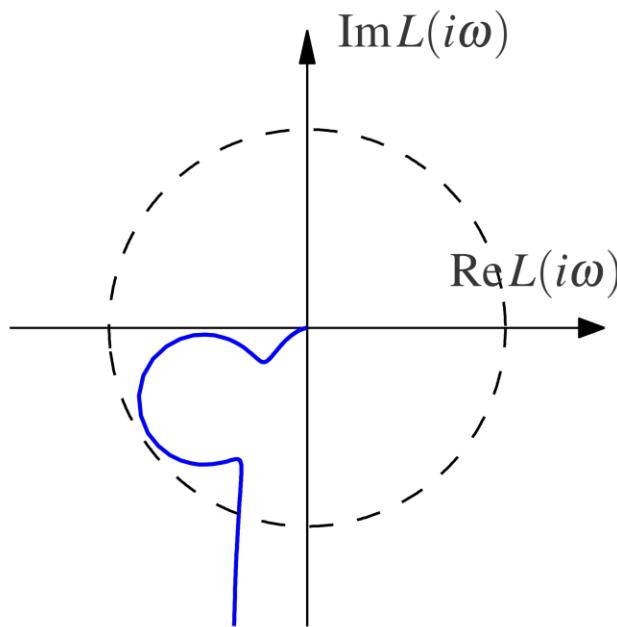
Property	Value	$\zeta = 0.5$	$\zeta = 1/\sqrt{2}$	$\zeta = 1$
Steady-state value	$k$	$k$	$k$	$k$
Rise time (inverse slope)	$T_r = e^{\varphi/\tan\varphi} / \omega_0$	$1.8/\omega_0$	$2.2/\omega_0$	$2.7/\omega_0$
Overshoot	$M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$	16%	4%	0%
Settling time (2%)	$T_s \approx 4/\zeta\omega_0$	$8.0/\omega_0$	$5.6/\omega_0$	$4.0/\omega_0$

**Table 7.2:** Properties of the frequency response for a second-order system with  $0 < \zeta \leq 1$ .

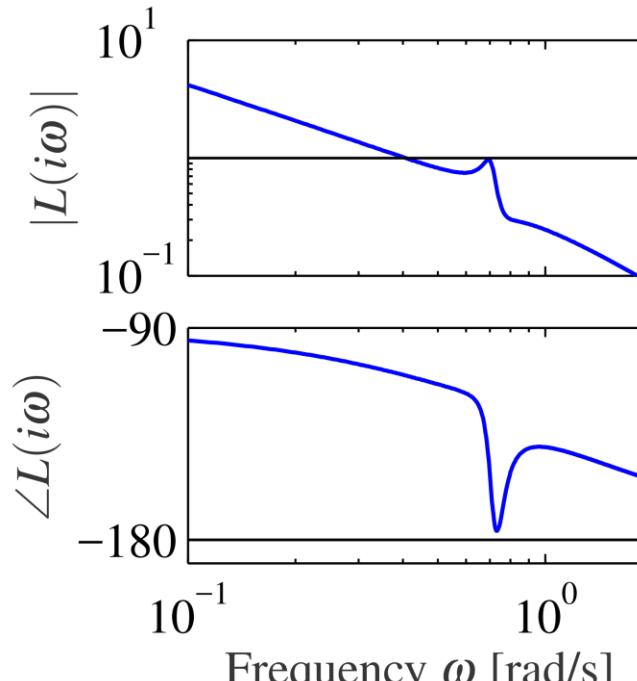
Property	Value	$\zeta=0.1$	$\zeta=0.5$	$\zeta=1/\sqrt{2}$
Zero frequency gain	$M_0$	$k$	$k$	$k$
Bandwidth	$\omega_b = \omega_0 \sqrt{1 - 2\zeta^2 + \sqrt{(1 - 2\zeta^2)^2 + 1}}$	$1.54\omega_0$	$1.27\omega_0$	$\omega_0$
Resonant peak gain	$M_r = \begin{cases} k/(2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}) & \zeta \leq \sqrt{2}/2, \\ \text{N/A} & \zeta > \sqrt{2}/2 \end{cases}$	$5k$	$1.15k$	$k$
Resonant frequency	$\omega_{mr} = \begin{cases} \omega_0\sqrt{1-2\zeta^2} & \zeta \leq \sqrt{2}/2, \\ 0 & \zeta > \sqrt{2}/2 \end{cases}$	$\omega_0$	$0.707\omega_0$	$0$

# Márgenes de Fase y Ganancia: Puede fallar

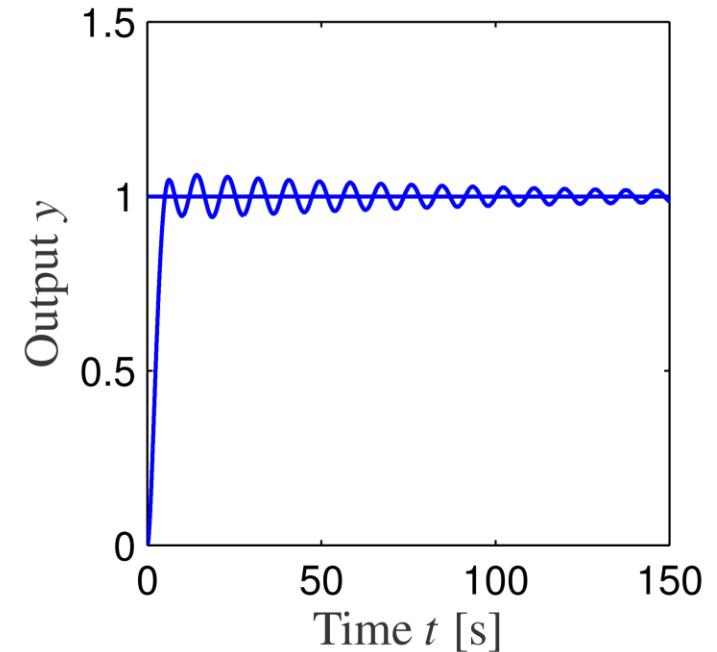
$$L(s) = \frac{0.38(s^2 + 0.1s + 0.55)}{s(s+1)(s^2 + 0.06s + 0.5)}$$



(a)

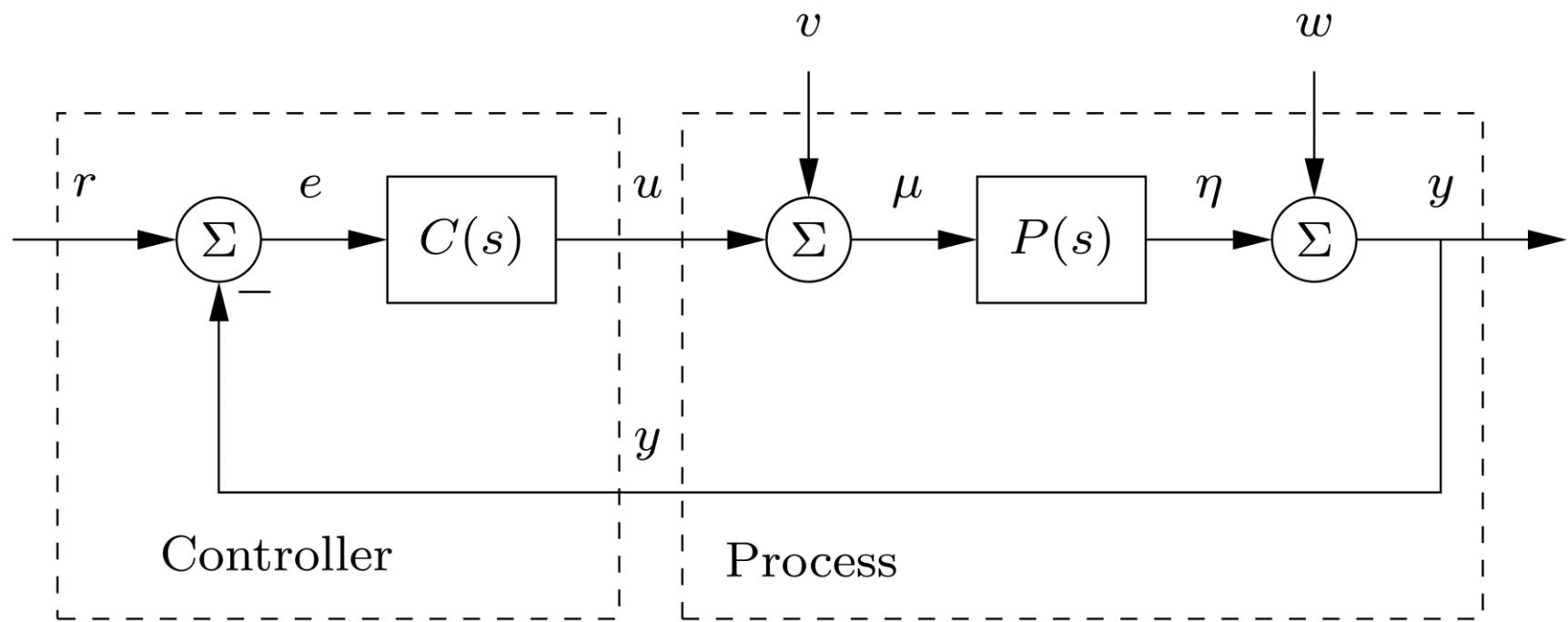
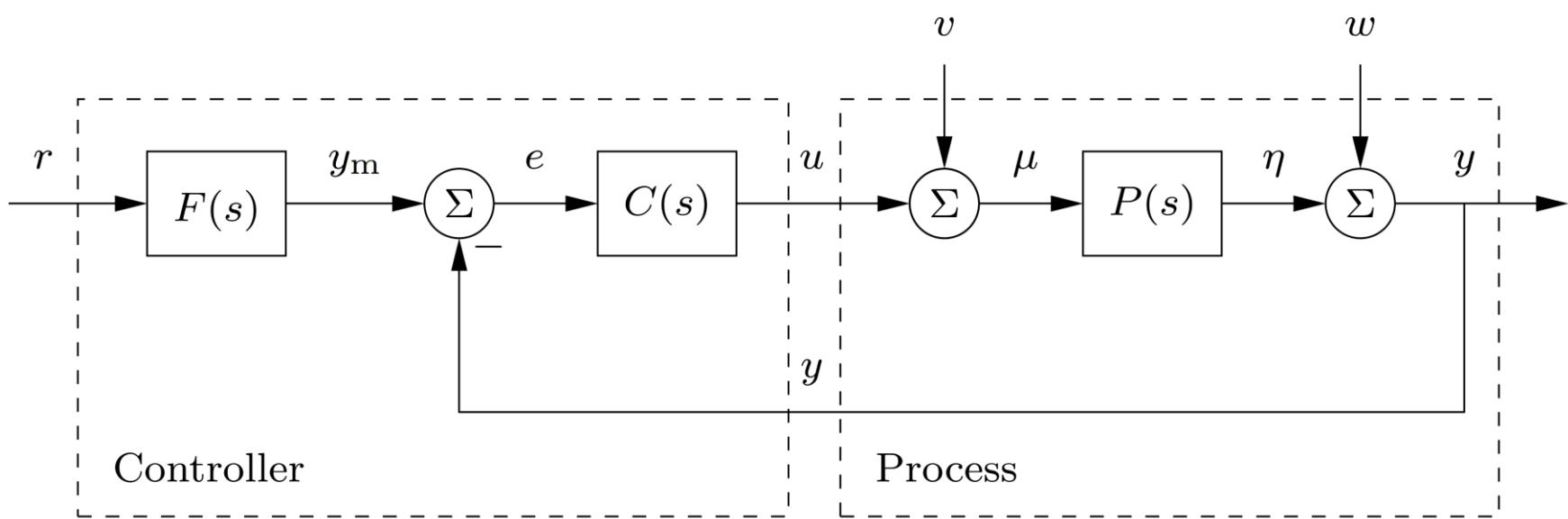


(b)

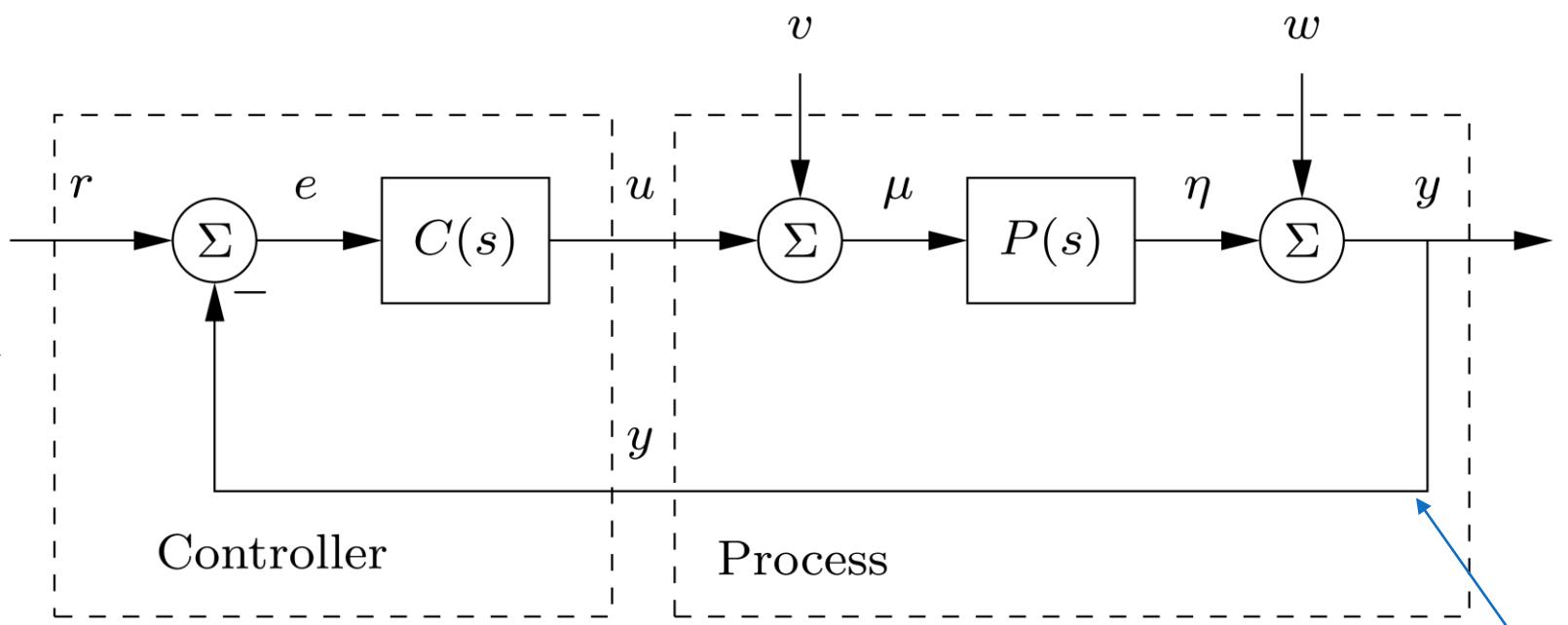


(c)

# Funciones de Sensibilidad

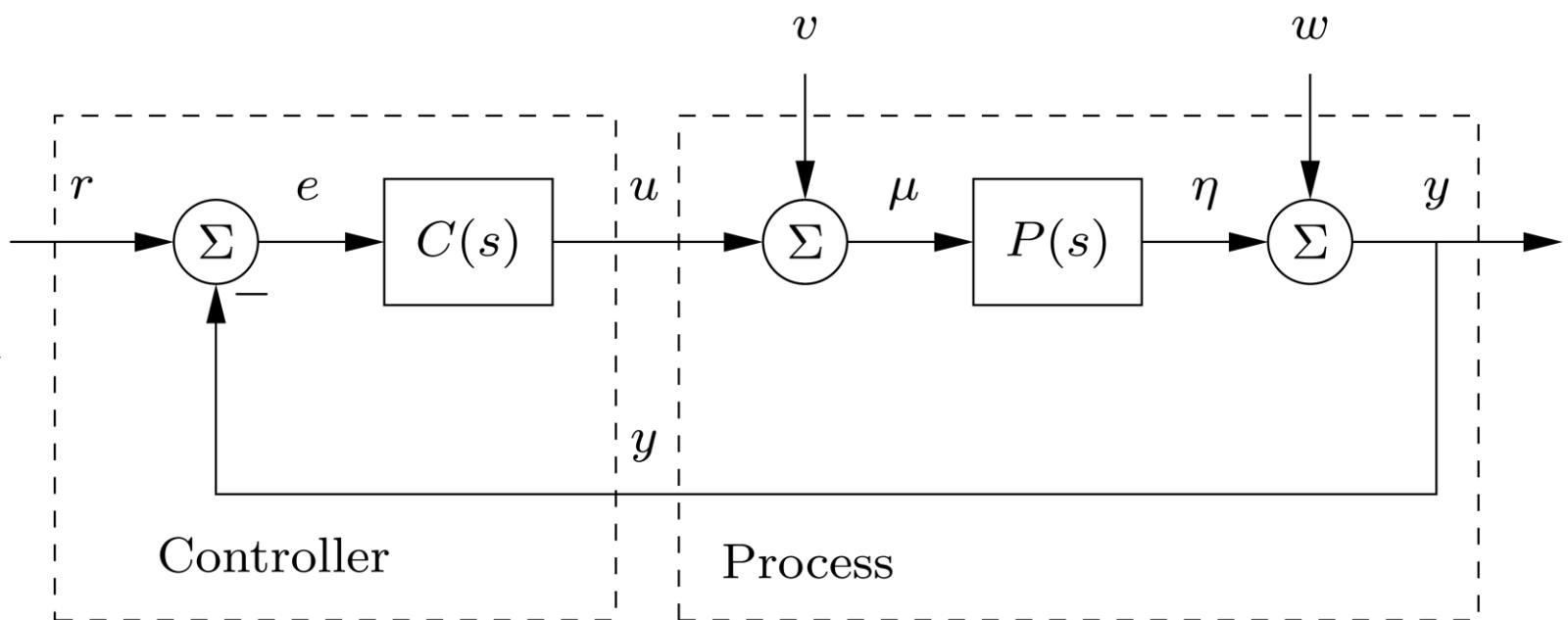


# Funciones de Sensibilidad



$y$	$u$	$e$	$\mu$	$\eta$	
$\frac{PC}{1 + PC}$	$\frac{C}{1 + PC}$	$\frac{1}{1 + PC}$	$\frac{C}{1 + PC}$	$\frac{PC}{1 + PC}$	$r$
$\frac{P}{1 + PC}$	$\frac{-PC}{1 + PC}$	$\frac{-P}{1 + PC}$	$\frac{1}{1 + PC}$	$\frac{P}{1 + PC}$	$v$
$\frac{1}{1 + PC}$	$\frac{-C}{1 + PC}$	$\frac{-1}{1 + PC}$	$\frac{-C}{1 + PC}$	$\frac{-PC}{1 + PC}$	$w$

# Funciones de Sensibilidad



$$-G_{uv} = \frac{PC}{1+PC},$$

$$G_{yv} = \frac{P}{1+PC},$$

$$-G_{uw} = \frac{C}{1+PC},$$

$$G_{yw} = \frac{1}{1+PC}.$$

$$S = \frac{1}{1+PC}$$

sensitivity function

$$T = \frac{PC}{1+PC}$$

complementary sensitivity function

$$PS = \frac{P}{1+PC}$$

load (or input) sensitivity function

$$CS = \frac{C}{1+PC}$$

noise (or output) sensitivity function

# Forma típica de respuestas en frecuencia

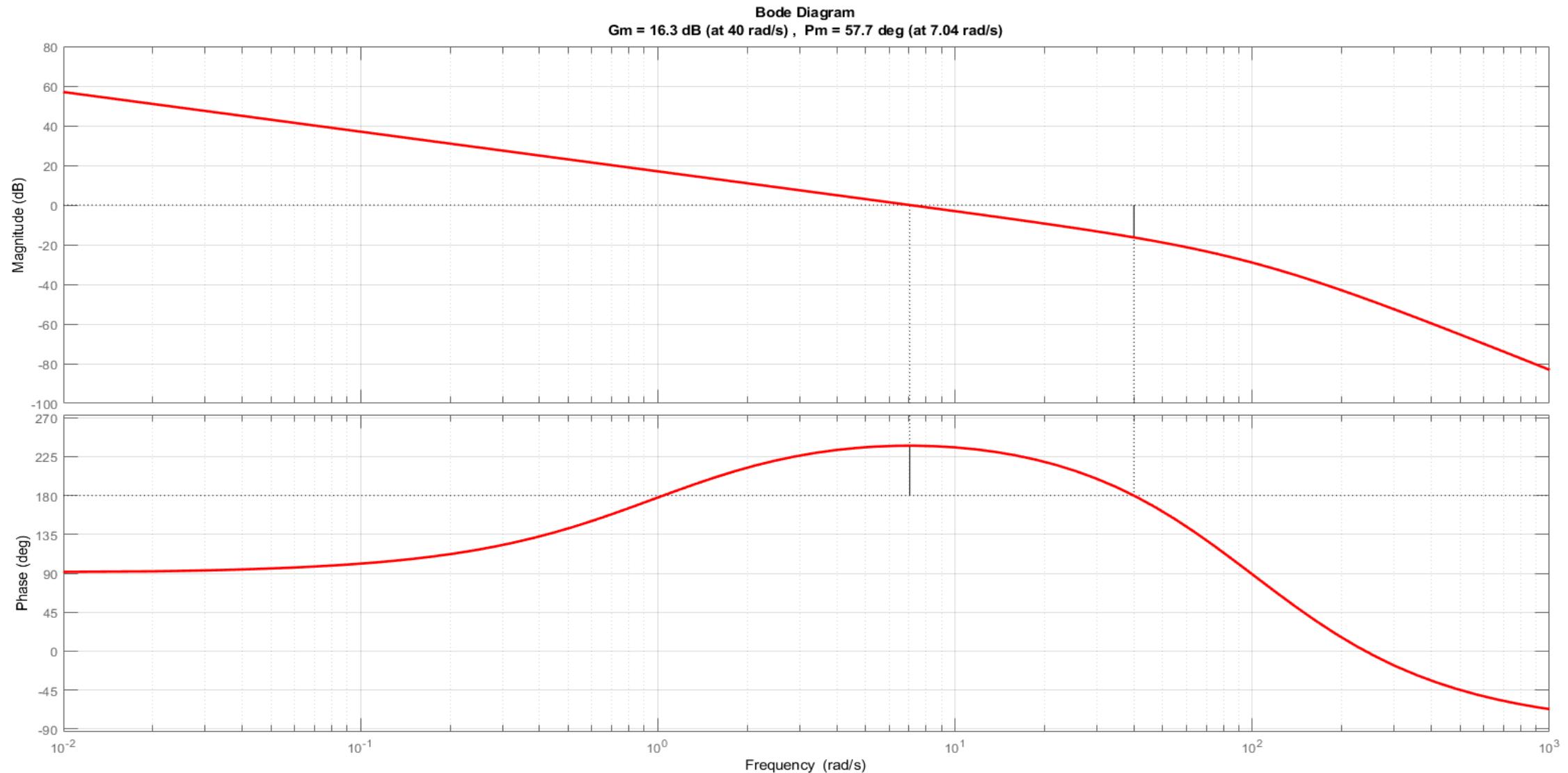
---

$$P(s) = \frac{1}{(s - 1)(s + 1)} \frac{(1 - s * \frac{T_s}{4})}{(1 + s * \frac{T_s}{4})}$$

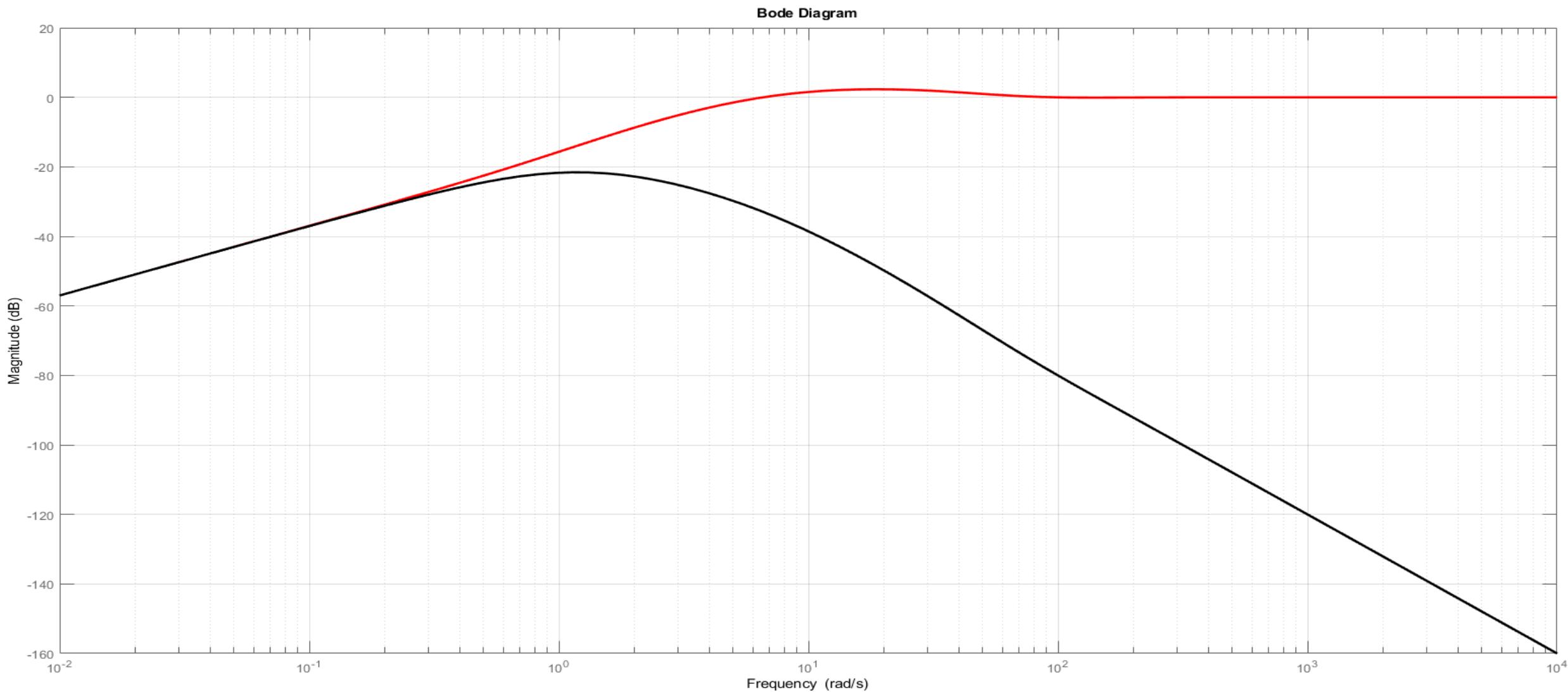
Un diseño simple por Loop Shaping SISO basado en un PID filtrado:

$$C(s) = k \frac{(s + 1)^2}{s} \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$$

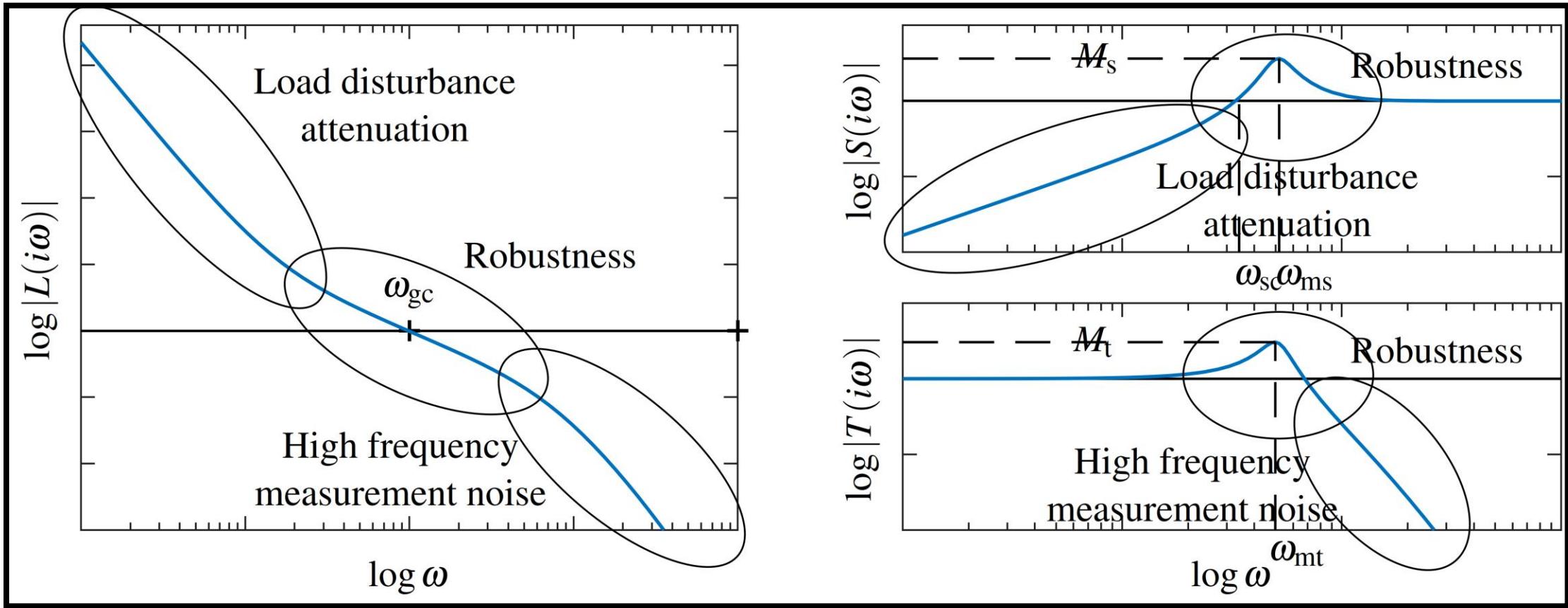
# FORMA TÍPICA DE RESPUESTAS EN FRECUENCIA



# FORMA TÍPICA DE RESPUESTAS EN FRECUENCIA



# LoopShaping

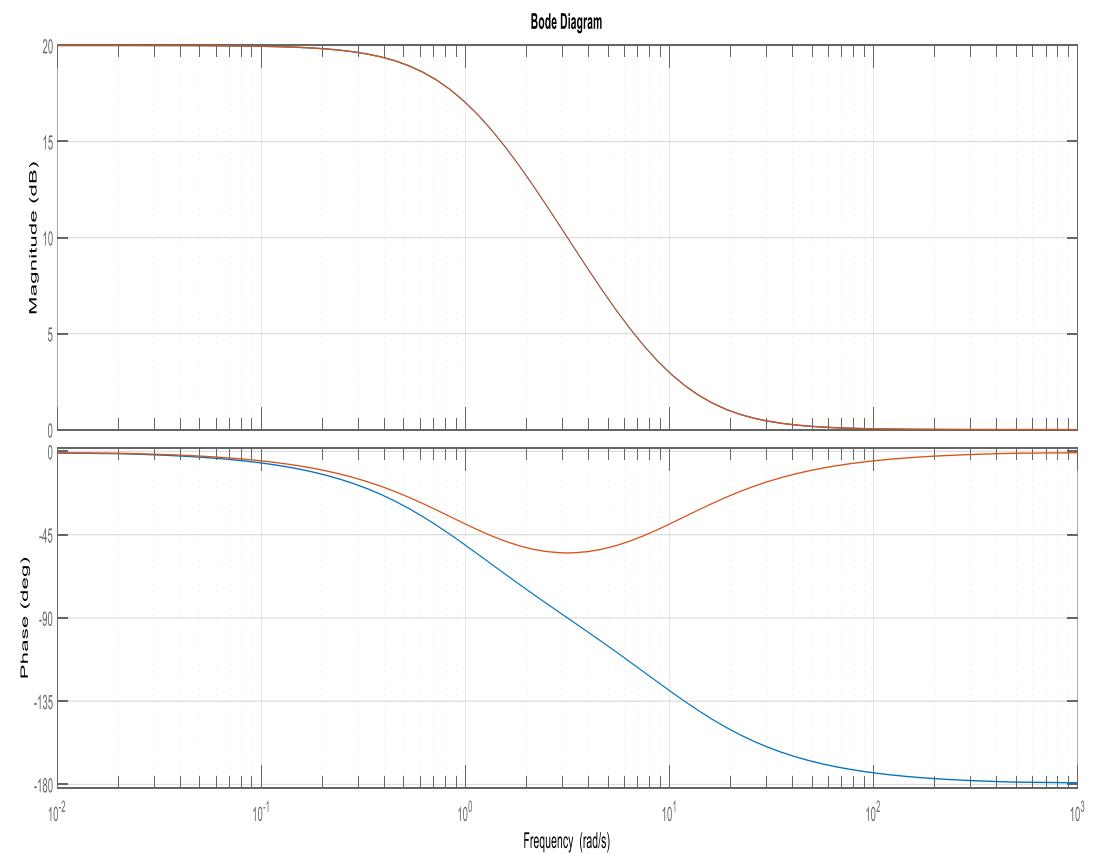


$$(R(s) \mapsto E(s)) = S(s) = \frac{1}{1 + L(s)}$$

$$(V(s) \mapsto Y(s)) = PS(s) = \frac{P(s)}{1 + L(s)}$$

# Sistemas de Fase Mínima

- Sistema lineal en el que la curva de fase, para valores negativos de la fase, toma valores absolutos los más pequeños posibles, para una curva de ganancia dada. Un sistema con fase mínima no incluye elementos de retardo o elementos de ganancia a altas frecuencias no nula.
- $\frac{10-s}{s+1}$  vs  $\frac{10+s}{s+1}$

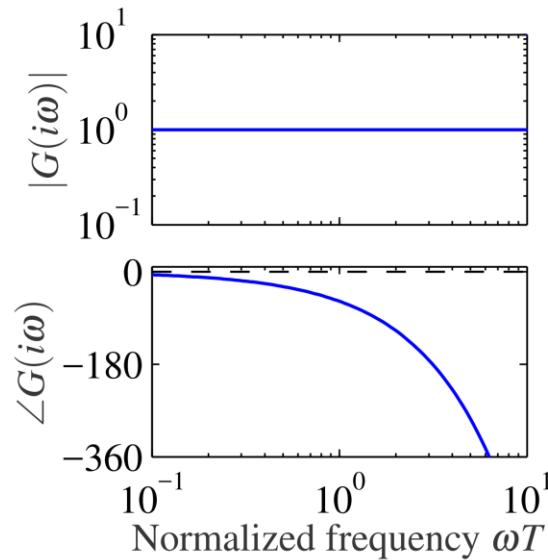


# Sistemas de Fase Mínima

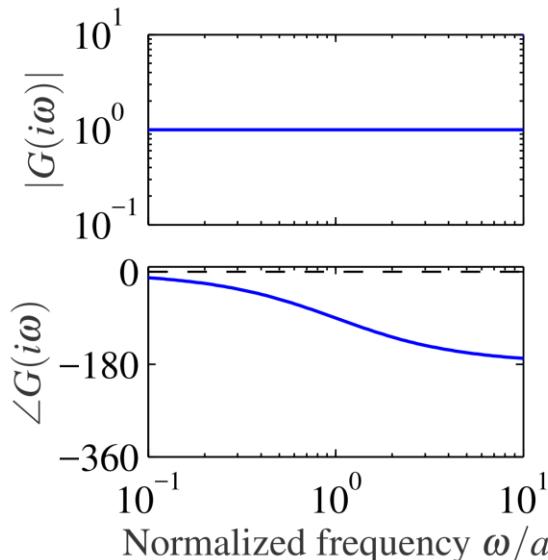
---

- Por ej.  $G(s)=1$  es fase mínima,  
 $G(s)=-1$ , no.
- Finalmente llamaremos sistemas de fase mínima a aquellos para los cuales se cumple la relación fase ganancia de Bode.

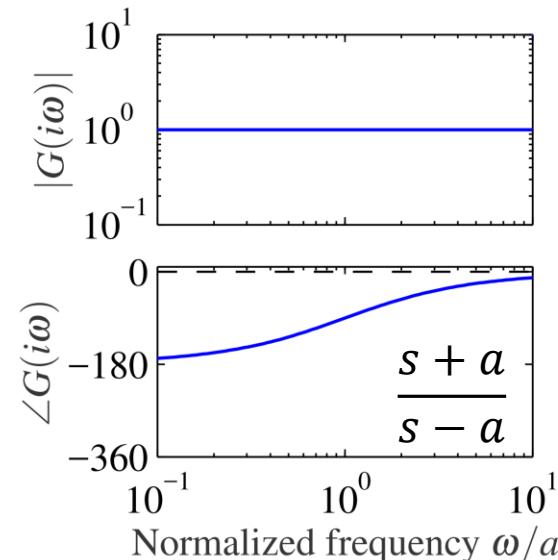
# Sistemas de Fase NO Minima: Ejemplos



(a) Time delay



(b) RHP zero



(c) RHP pole

**Figure 10.13:** Bode plots of systems that are not minimum phase. (a) Time delay  $G(s) = e^{-sT}$ , (b) system with a right half-plane (RHP) zero  $G(s) = (a - s)/(a + s)$  and (c) system with right half-plane pole. The corresponding minimum phase system has the transfer function  $G(s) = 1$  in all cases, the phase curves for that system are shown as dashed lines.

# Relación Fase Ganancia de Bode (R.F.G.B.)

Sistemas de Fase Mínima: Para estos sistemas se cumple esta relación entre la pendiente de la magnitud y la fase:

---

$$\arg G(i\omega_0) = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty f(\omega) \frac{d \log |G(i\omega)|}{d \log \omega} d \log \omega \approx \frac{\pi}{2} \frac{d \log |G(i\omega_0)|}{d \log \omega_0}$$

$f(\omega)$  es el núcleo  
de la integral:

$$f(\omega) = \frac{2}{\pi^2} \log \left| \frac{\omega + \omega_0}{\omega - \omega_0} \right|, \quad \text{and} \quad \int_0^\infty f(\omega) \frac{d\omega}{\omega} = 1$$

El signo aproximadamente igual vale como igual cuando la pendiente está “bien” establecida *i.e.* una década para atrás y una más para delante del punto  $\omega_0$  en el cual se está evaluando la cuenta.

## Ejemplo:

---

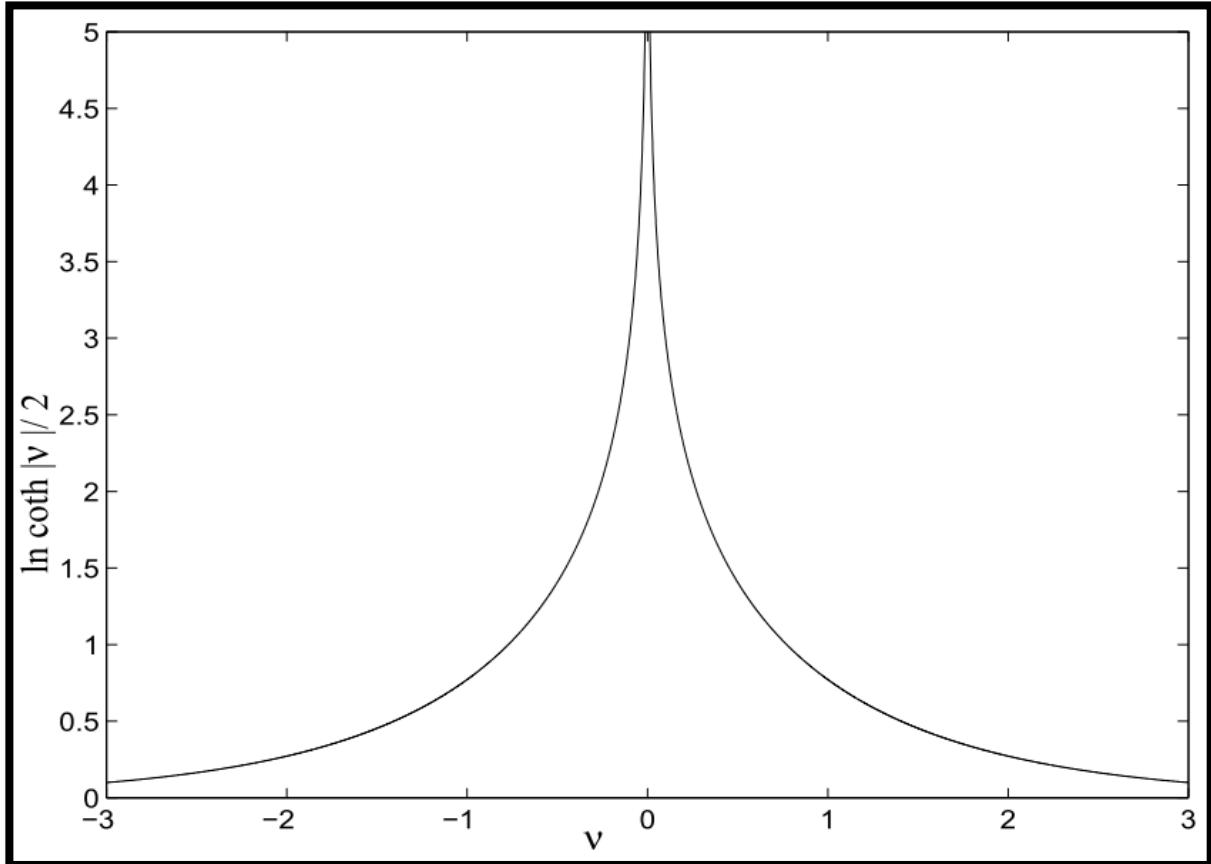
### Example 10.10 Phase of $G(s) = s^n$

We have  $\log G(s) = n \log s$  and hence  $d \log G(s) / d \log s = n$ . Equation (10.8) then gives

$$\arg G(i\omega_0) = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty f(\omega) \frac{d \log |G(i\omega)|}{d \log \omega} \frac{d\omega}{\omega} = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty n f(\omega) \frac{d\omega}{\omega} = n \frac{\pi}{2},$$

where the last equality follows from equation (10.9). If the gain curve has constant slope  $n$ , the phase curve is a horizontal line  $\arg G(i\omega) = n\pi/2$ .  $\nabla$

# Sobre el núcleo de la integral $f(\omega)$



$$\nu := \ln(\omega/\omega_0)$$

# ¿De qué sirve la RFGB en el Loop Shaping?

---

Ejemplo fase mínima  $G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$ . Se requiere que el sistema tenga si o si, acción integral:

$\tilde{G}(s) = \frac{1}{s^2(s+1)}$  que tiene el término “ $s^2$ ” en el denominador debido al polo en el origen de la planta más la acción integral.

$\tilde{G}(s)$  cumple con la relación fase ganancia de Bode.

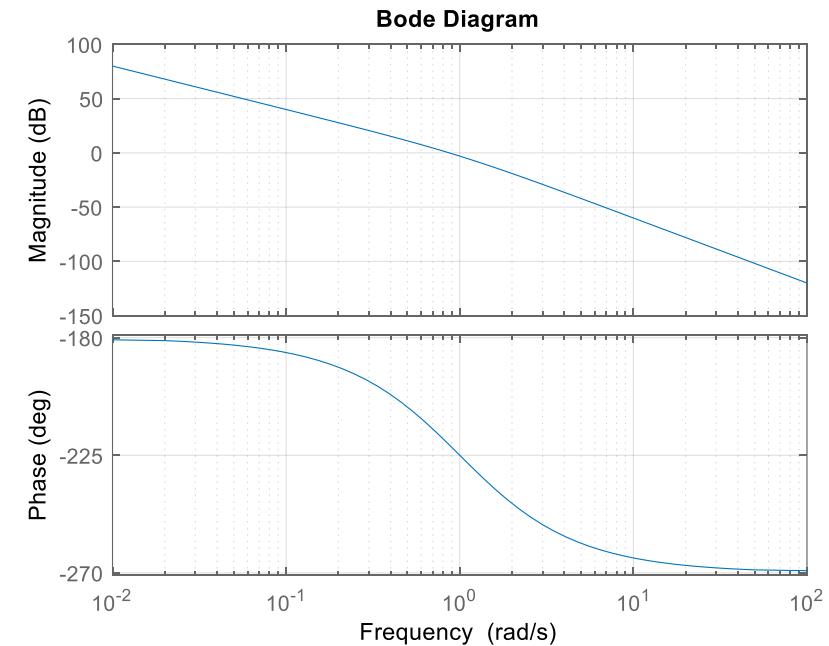
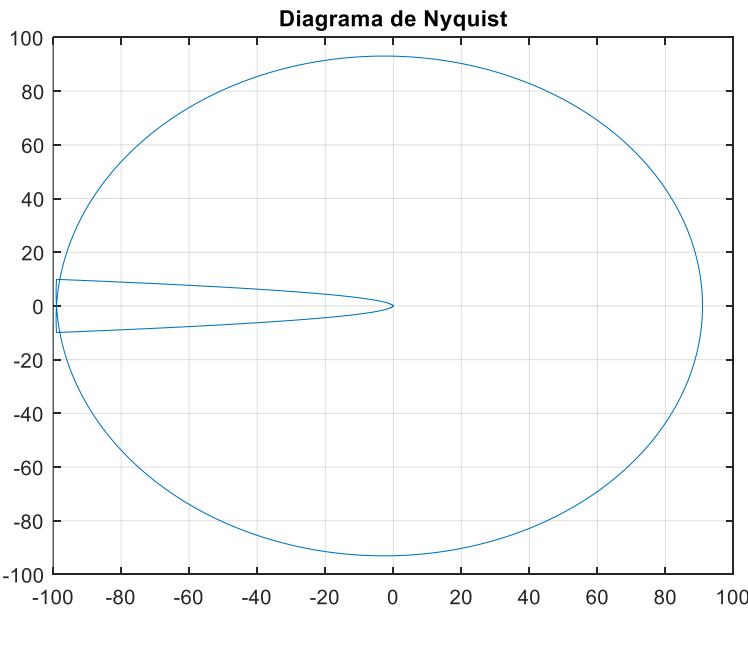
¿En qué frecuencia crítica voy a aplicar la RFGB?

En la frecuencia de Cruce “ $\omega_{gc}$ ”, que es donde se analiza el margen de fase.

# Diseño para la nueva “planta” $\tilde{G}(s)k = \frac{k}{s^2(s+1)}$

Queda claro del Nyquist, que solamente ajustando “ $k$ ” no se podrá estabilizar la planta. En el Nyquist se ven dos circulaciones que implican dos polos inestables a lazo cerrado. En el Bode se ve que la fase está siempre por debajo de  $-180^\circ$ .

La compensación necesaria precisa “levantar la fase” en una parte conveniente de la respuesta en frecuencia.



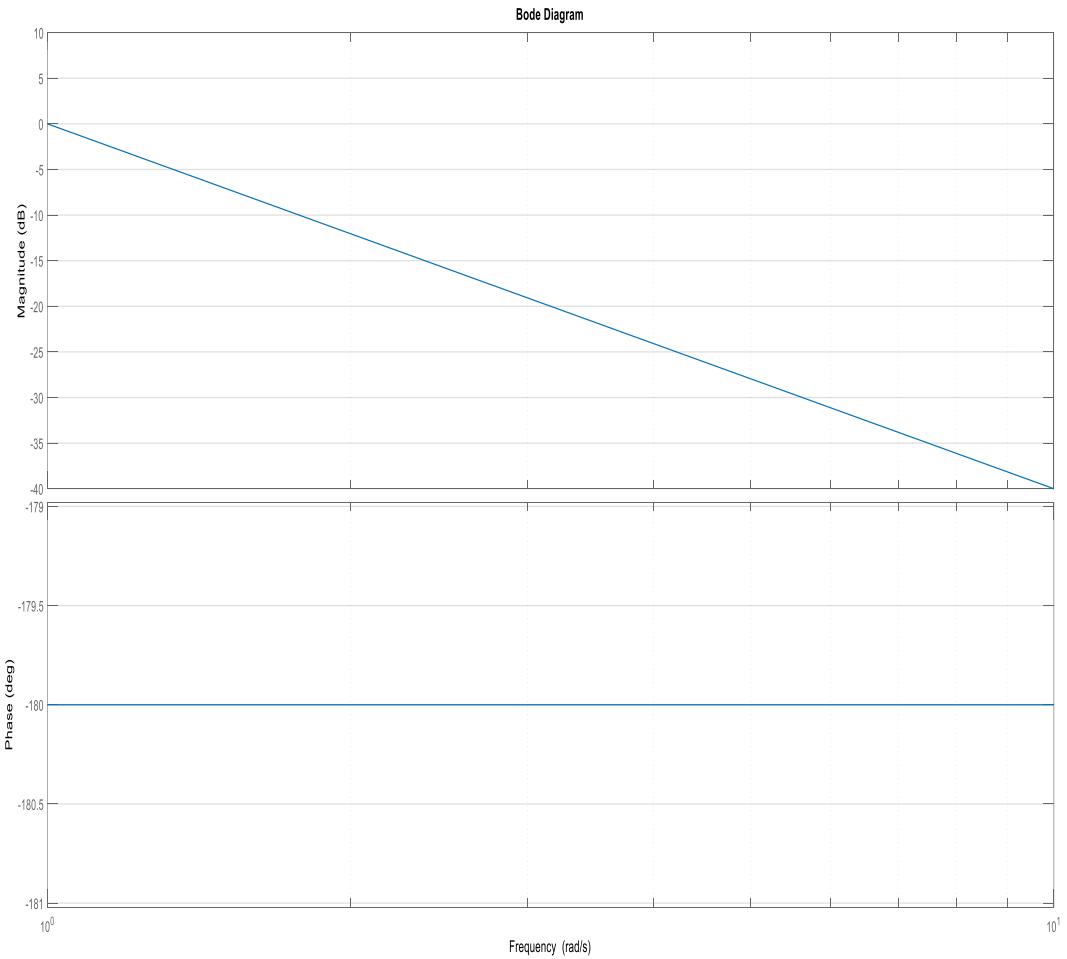
# Diseño para la nueva “planta” $\tilde{G}(s)k = \frac{k}{s^2(s+1)}$

Solución “Quick & Dirty”: Cancelo el polo estable y me fijo que pasa:

$$\tilde{G}(s)k(s+1) = \frac{k(s+1)}{s^2(s+1)} = \frac{k}{s^2}$$

Ahora compensaré  $\frac{k}{s^2}$ .

Todavía le falta un adelanto de fase más, porque además es muy pronunciada la pendiente de la magnitud, i.e.: no se puede estabilizar así!



# Diseño para $\frac{k}{s^2}$

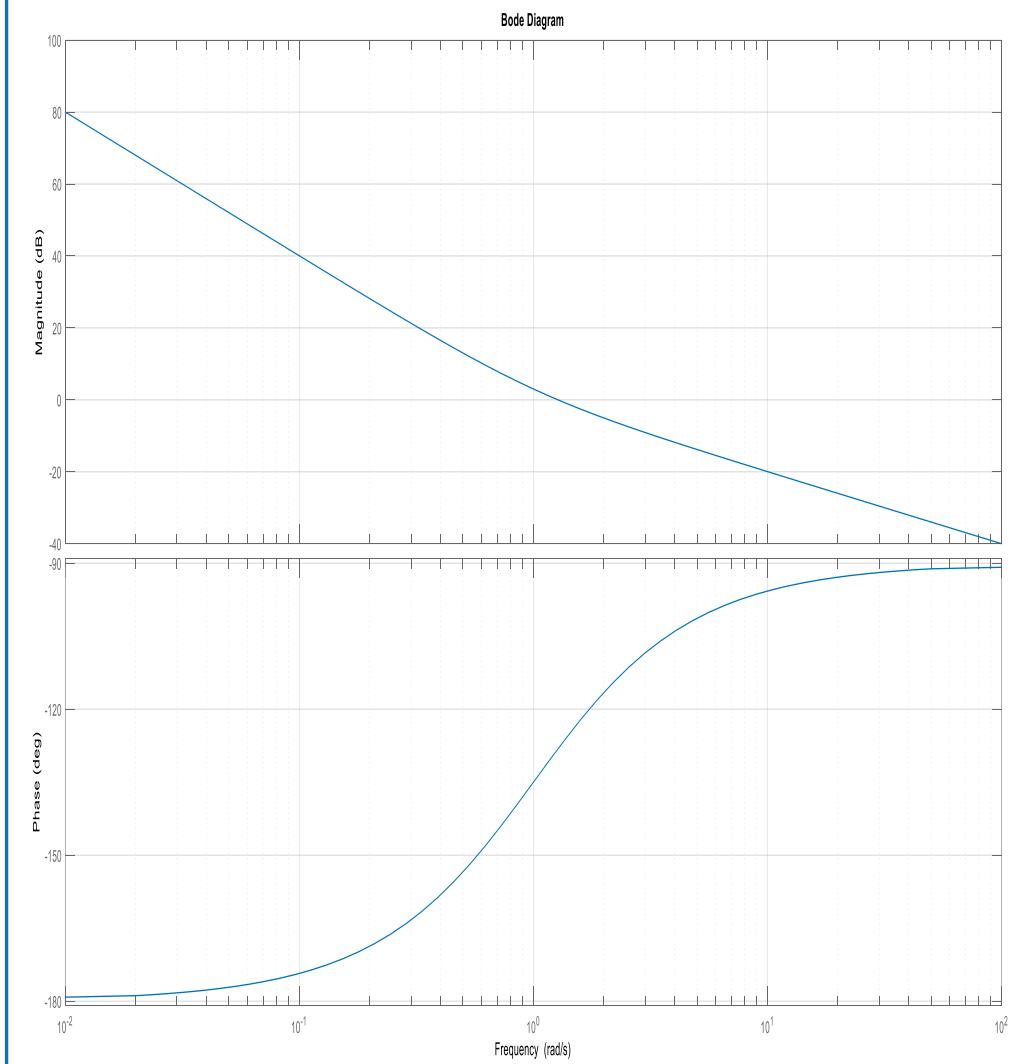
Si le agrego un cero más:  $\frac{k(s+z)}{s^2}$ , probemos por ejemplo con  $z = 1$ .

Ahora tengo posibilidad de darle a “ $k$ ” un valor para que la frecuencia de cruce sea tal que la fase esté por arriba de  $-180^\circ$ .

Finalmente  $K(s) = \frac{k(s+1)^2}{s}$ , que es de tipo PID.

$$L(s) = \frac{k(s+1)^2}{s} * \frac{1}{s(s+1)} = \frac{k(s+1)}{s^2}$$

Encontrar  $k$  para margen de fase  $60^\circ$ .

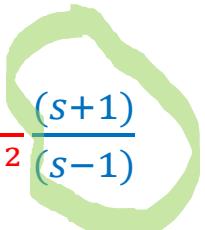


# ¿Qué pasa si tengo polos y/o ceros tales que la RFGB no se cumple?

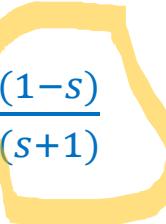
Factorizo la planta en parte “MP” y parte “AP” (la planta puede ser “ $P(s)$ ” o “ $G(s)$  según el libro”):

$$P(s) = P_{mp}(s)P_{ap}(s)$$

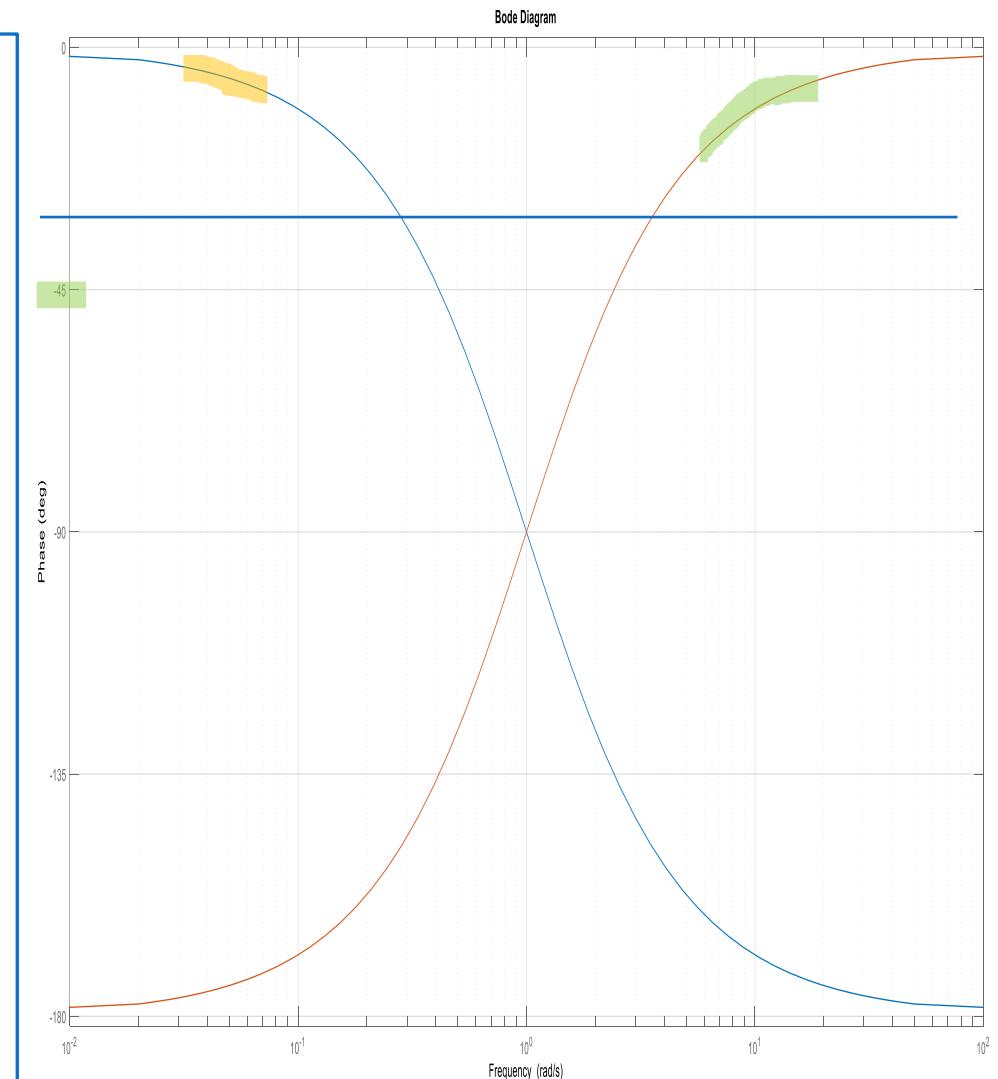
Ejemplo 1:  $P(s) = \frac{1}{(s-1)(s+1)} = \frac{1}{(s+1)^2} \frac{(s+1)}{(s-1)}$



Ejemplo 2:  $P(s) = \frac{(1-s)}{s} = \frac{(s+1)}{s} \frac{(1-s)}{(s+1)}$



Notar que las  $P_{ap}(s)$  se formatean de forma tal de que la fase sea negativa en ambos casos.



# Análisis de Fase en “ $\omega_{gc}$ ”, $P(s) = P_{mp}(s)P_{ap}(s)$

La fase lazo abierto en “ $\omega_{gc}$ ”:

$$\arg L(i\omega_{gc}) = \arg P_{ap}(i\omega_{gc}) + \arg P_{mp}(i\omega_{gc}) + \arg C(i\omega_{gc}) \geq -\pi + \varphi_m$$

$n_{gc}$  es la pendiente de la RFGB:

$$n_{gc} = \left. \frac{d \log |L(i\omega)|}{d \log \omega} \right|_{\omega=\omega_{gc}} = \left. \frac{d \log |P_{mp}(i\omega)C(i\omega)|}{d \log \omega} \right|_{\omega=\omega_{gc}}$$

Por Causa de la RFGB, se cumple que:

$$\arg P_{mp}(i\omega) + \arg C(i\omega) \approx n_{gc} \frac{\pi}{2}$$

“ $\varphi_{ap}$ ” es el retraso adicional que introduce la parte pasa todo.

“ $\bar{\varphi}_{ap}$ ” es el retraso pasatodo admisible.

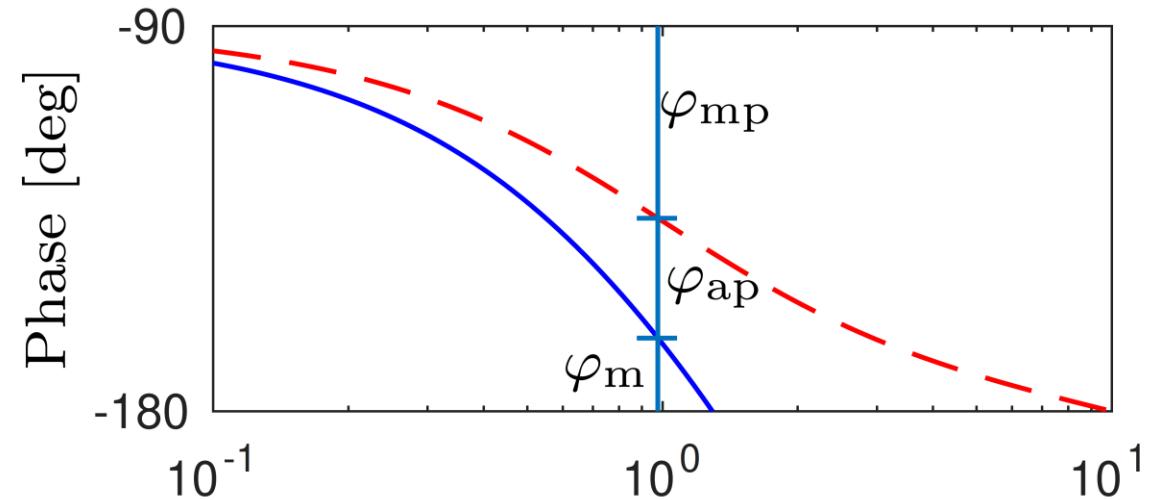
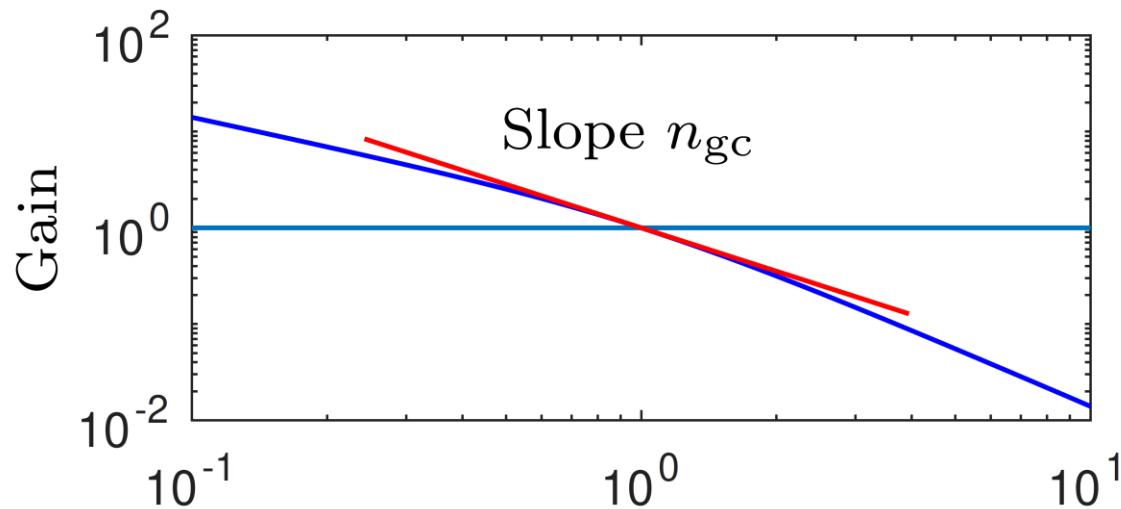
$$\varphi_{ap} := -\arg P_{ap}(i\omega_{gc}) \leq \pi - \varphi_m + n_{gc} \frac{\pi}{2} := \bar{\varphi}_{ap}$$

**Theorem 14.4** (Gain crossover frequency inequality). Let  $P(s) = P_{mp}(s)P_{ap}(s)$  where  $P_{ap}$  is an all-pass transfer function containing the non-minimum phase portion of  $P(s)$ . If  $C(s)$  is a stabilizing compensator for the closed loop system with no right half-plane poles and zeros and with phase margin  $\varphi_m$ , gain crossover frequency  $\omega_{gc}$ , and gain crossover slope  $n_{gc}$ , then the allowable phase lag for the all-pass transfer function must satisfy the inequality

$$\varphi_{ap} := -\arg P_{ap}(i\omega_{gc}) \leq \pi - \varphi_m + n_{gc} \frac{\pi}{2} := \bar{\varphi}_{ap}. \quad (14.10)$$

$\bar{\varphi}_{ap}$	$\varphi_m$	$n_{gc}$	$\pi - \varphi_m + n_{gc} \frac{\pi}{2}$
$30^\circ$	$60^\circ$	$-1$	$180^\circ - 60^\circ - 90^\circ = 30^\circ$
$90^\circ$	$45^\circ$	$-1/2$	$180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ$

Ejemplos: Si podemos tolerar un menor margen de fase, entonces podemos aceptar un lag de la parte de no mínima fase algo mayor.



$\bar{\varphi}_{ap}$	$\varphi_m$	$n_{gc}$	$\pi - \varphi_m + n_{gc} \frac{\pi}{2}$
$30^\circ$	$60^\circ$	-1	$180^\circ - 60^\circ - 90^\circ = 30^\circ$
$90^\circ$	$45^\circ$	$-1/2$	$180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ$

Ejemplos: Si podemos tolerar un menor margen de fase, entonces podemos aceptar un lag de la parte de no mínima fase algo mayor.

# Limitaciones de Diseño

$$P_{\text{ap}}(s) = \frac{z - s}{z + s}$$

$$\varphi_{\text{ap}} = -\arg P_{\text{ap}}(i\omega) = 2 \arctan \frac{\omega}{z}$$

$$\omega_{\text{gc}} \leq z \tan(\bar{\varphi}_{\text{ap}}/2)$$

$$P_{\text{ap}}(s) = \frac{s + p}{s - p}$$

$$\varphi_{\text{ap}} = -\arg P_{\text{ap}}(i\omega) = 2 \arctan \frac{p}{\omega}$$

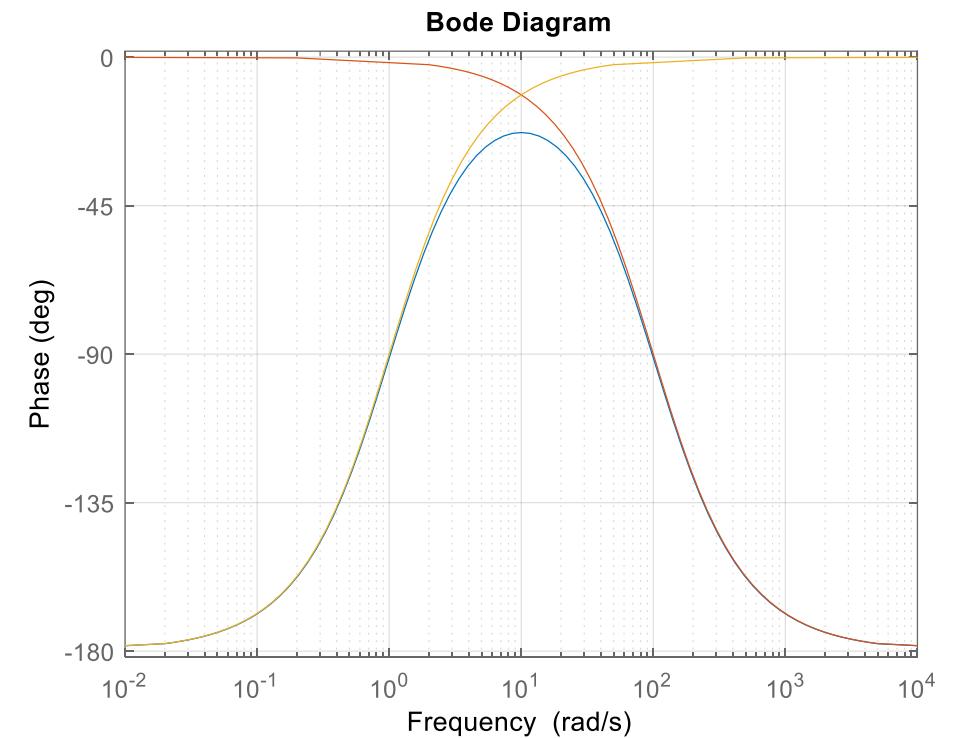
$$\omega_{\text{gc}} \geq \frac{p}{\tan(\bar{\varphi}_{\text{ap}}/2)}$$

$\bar{\varphi}_{\text{ap}} = 30^\circ$	$\bar{\varphi}_{\text{ap}} = 30^\circ$
$\omega_{\text{gc}} < 0,6z$	$\omega_{\text{gc}} > 1,7p$

$$\text{Ejercicio: } P(s) = \frac{100-s}{s(s-1)}$$

---

- Problema con Cero y Polo en el Semiplano derecho con más característica integral.
- Así se ve en el bode el retraso de fase que introduce una combinación polo inestable con un cero NMP en el caso favorable (la freq. del cero es más alta en módulo que la del polo).
- Existe una frecuencia (10 rad/s) que es más favorable como frecuencia de cruce porque es donde menos magnitud tendría  $\varphi_{ap}$ .



## Ejercicios:

---

Ver cómo se complica este:

$$G(s) = \frac{1 - s}{s(s - 100)}$$

el cual no sale con este método.

Recordar que siempre debe verificarse la estabilidad interna viendo los polos de lazo cerrado y/o el Nyquist.