

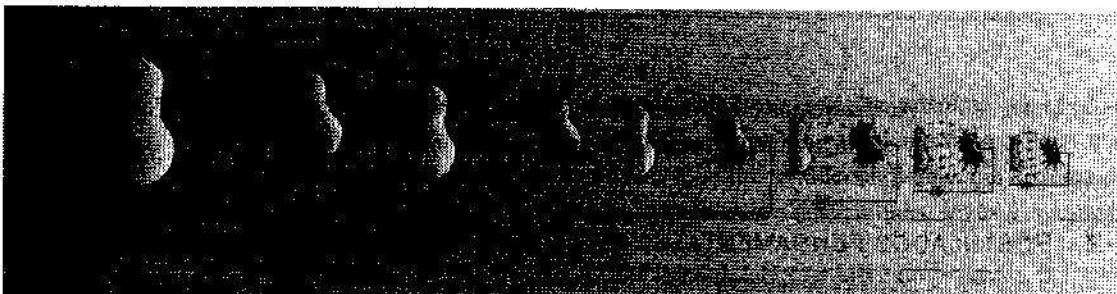
CAPÍTULO 3

Ejemplos de la generación de electricidad estática

3 - 1 DESCRIPCIÓN GENERAL Cuando caminamos por una alfombra en una habitación seca y tocamos el picaporte de metal de una puerta, en muchas ocasiones salta una chispa. Esto se debe a que las cargas estáticas inducidas en nuestro cuerpo como resultado de la fricción de las suelas de caucho contra la alfombra tienden a congregarse en los lugares puntiagudos, como la punta de los dedos, y saltar por el aire al picaporte de la puerta. La diferencia de potencial generada puede ser de miles de volts, pero no ocurren daños serios, excepto por el leve choque, ya que la cantidad de carga usualmente es muy pequeña. Otro ejemplo de la electricidad estática es el fenómeno de una prenda de vestir delgada que se adhiere a una prenda interior fabricada con otro material, debido a las cargas opuestas inducidas por el movimiento relativo y la fricción.

La electrostática es el estudio de los efectos de las cargas eléctricas en reposo y de los campos eléctricos que no cambian con el tiempo. Aunque es la más simple de las situaciones del electromagnetismo, es fundamental dominar este tema para comprender los modelos electromagnéticos más complicados. La explicación de muchos fenómenos naturales (como los relámpagos y el efecto corona) y los principios de varias aplicaciones industriales (como los osciloscopios, las impresoras de chorro de tinta, la xerografía, los teclados por efecto capacitivo y las pantallas de cristal líquido) se basan en la electrostática. Se han publicado varios libros sobre las aplicaciones especiales de la electrostática.[†]

[†] A. Klinkenberg y J. L. van der Minne, *Electrostatics in the Petroleum Industry*, Elsevier, Amsterdam, 1958. J. H. Dessauer y H. E. Clark, *Xerography and Related Processes*, Focal Press, Londres, 1965. A. D. Moore (Ed.), *Electrostatics and Its Applications*, John Wiley, Nueva York, 1973. C. E. Jewett, *Electrostatics in the Electronics Environment*, John Wiley, Nueva York, 1976. J. C. Crowley, *Fundamentals of Applied Electrostatics*, John Wiley, Nueva York, 1986.



Campos eléctricos estáticos

Desde el punto de vista histórico, las relaciones cuantitativas de la electrostática comenzaron con los experimentos de Charles Augustin de Coulomb, quien formuló en 1785 lo que se conoce ahora como *ley de Coulomb*. Más tarde, Karl F. Gauss desarrolló la *ley de Gauss* y otros científicos e ingenieros contribuyeron con importantes resultados adicionales relacionados con las cargas eléctricas estacionarias. La teoría de los campos eléctricos estáticos fue desarrollándose gradualmente. El método que consiste en comenzar con leyes experimentales y sintetizarlas en la forma de las ecuaciones de Maxwell es un *enfoque inductivo*. Este enfoque es el que usualmente se sigue en un curso de introducción a la física.

Debido a que los diversos resultados fueron obtenidos por individuos no coordinados y en tiempos diferentes, el enfoque inductivo tiende a parecer fragmentado y poco coherente. En este libro preferimos un *enfoque deductivo*, el cual, como señalamos en la sección 1-2, es más conciso y lógico, pues nos permite desarrollar el electromagnetismo de forma ordenada.

Para el estudio de los campos eléctricos estáticos en el espacio libre definimos un vector de intensidad de campo eléctrico especificando su divergencia y su rotacional. Éstos son los postulados fundamentales a partir de los cuales podemos *derivar* la ley de Coulomb y la ley de Gauss, que juntas pueden usarse para determinar el campo eléctrico debido a diversas distribuciones de carga. Después examinaremos los efectos de los conductores y los dieléctricos en los campos electrostáticos. Se presentará el potencial electrostático y se explorarán las relaciones entre las fuerzas y la energía electrostática. En aquellas situaciones donde no se conocen las distribuciones exactas de carga en todos los puntos, pero deben satisfacerse ciertas condiciones en la frontera (condiciones de contorno), es necesario emplear técnicas de resolución adicionales.

Enfoque deductivo

Analizaremos el procedimiento para resolver ecuaciones sencillas de Poisson y Laplace y explicaremos el método de imágenes.

3-2 POSTULADOS FUNDAMENTALES DE LA ELECTROSTÁTICA EN EL ESPACIO LIBRE

Para la electrostática en el espacio libre sólo tenemos que considerar una de las cuatro cantidades de campo vectoriales fundamentales del modelo electromagnético analizado en la sección 1-2, específicamente, la intensidad de campo eléctrico \mathbf{E} . Así mismo, en nuestra formulación sólo entra la permitividad del espacio libre, ϵ_0 , de las tres constantes universales mencionadas en la sección 1-3.

Intensidad de campo eléctrico

La **intensidad de campo eléctrico** se define como la fuerza por unidad de carga que experimenta una carga de prueba estacionaria muy pequeña al colocarse en una región donde existe un campo eléctrico. Es decir,

$$\mathbf{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{q} \quad (\text{V/m}). \quad (3-1)$$

La unidad en el SI de E es (V/m).

La intensidad de campo eléctrico \mathbf{E} es entonces proporcional a la fuerza \mathbf{F} y tiene su misma dirección. Si \mathbf{F} se mide en newtons (N) y la carga q en coulombs (C), \mathbf{E} tiene unidades de newtons por coulomb (N/C), lo cual equivale a volts por metro (V/m). Por supuesto, la carga de prueba q no puede ser cero en la práctica; de hecho, no puede ser menor que la carga de un electrón. Sin embargo, el carácter finito de la carga de prueba no hará que el campo \mathbf{E} medido difiera notablemente de su valor calculado si la carga de prueba es lo suficientemente pequeña como para no perturbar la distribución de carga de la fuente. Una relación inversa de la ecuación (3-1) da la fuerza \mathbf{F} sobre una carga estacionaria q en un campo eléctrico \mathbf{E} :

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} \quad (\text{N}). \quad (3-2)$$

Los dos postulados fundamentales de la electrostática en el espacio libre especifican la divergencia y el rotacional de \mathbf{E} . Éstos son

Divergencia de un \mathbf{E} electrostático en el espacio libre

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_v}{[\epsilon_0]} \quad (\text{en el espacio libre})$$

y ¿Cte de prop?

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

Axiomas / para
Cheng, por /
memes)

El rotacional del \mathbf{E} electrostático es nulo.

Si fueras así $\propto q'/M^2$
usar $k = 1/\epsilon_0 \approx 1/13.10^{11}$?

En la ecuación (3-3), ρ_v es la densidad volumétrica de carga (C/m^3) y ϵ_0 es la permitividad del espacio libre, expresada en la ecuación (1-11). La ecuación (3-4)

(3-3)

(3-4)

establece que *los campos eléctricos estáticos son irrotacionales*, mientras que la ecuación (3-3) implica que un campo eléctrico estático no es solenoidal a menos que $\rho_v = 0$. Estos dos postulados son concisos, sencillos e independientes del sistema de coordenadas, además, pueden usarse para derivar otras relaciones, leyes y teoremas de la electrostática.

Las ecuaciones (3-3) y (3-4) son relaciones puntuales; es decir, se aplican en todos los puntos del espacio. Se conocen como la forma diferencial de los postulados de la electrostática, ya que las operaciones de divergencia y rotacional implican derivadas espaciales. En las aplicaciones prácticas normalmente nos interesa el campo total debido a un conjunto o una distribución de cargas. Esto puede obtenerse de manera más conveniente con una forma integral de la ecuación (3-3). Si tomamos la integral de volumen en ambos lados de la ecuación (3-3) para un volumen arbitrario V , tenemos

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dv = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho_v dv. \quad (3-5)$$

Teniendo en cuenta el teorema de la divergencia de la ecuación (2-75), la ecuación (3-5) se convierte en

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad (3-6)$$

donde Q es la carga total contenida en el volumen V limitado por la superficie S . La ecuación (3-6) es una forma de la *ley de Gauss*, una de las relaciones más importantes de la electrostática. La analizaremos con mayor detalle en la sección 3-4, junto con algunos ejemplos ilustrativos.

También puede obtenerse una forma integral de la relación del rotacional de la ecuación (3-4), integrando $\nabla \times \mathbf{E}$ sobre una superficie abierta e invocando el teorema de Stokes expresado en la ecuación (2-103). Tenemos entonces

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\ell = 0. \quad (\text{en el espacio libre}) \quad (3-7)$$

La integral de línea se aplica a un contorno cerrado arbitrario C . La ecuación (3-7) establece que *la integral de línea escalar (o circulación) de la intensidad de campo eléctrico estático a lo largo de una trayectoria cerrada es nula*. El producto escalar $\mathbf{E} \cdot d\ell$ integrado a lo largo de cualquier trayectoria es el voltaje entre los extremos de dicha trayectoria. Por consiguiente, la ecuación (3-7) es una expresión de la *ley del voltaje de Kirchhoff* de la teoría de circuitos, que indica que *la suma algebraica de las caídas de voltaje a lo largo de un circuito cerrado es cero*.

La ecuación (3-7) también implica que la integral de línea escalar del campo irrotacional \mathbf{E} a lo largo de cualquier trayectoria de un punto (digamos P_1) a otro (digamos P_2)

Conservativo de q' conserva la energía. Es decir, la energía en un campo cerrado es cancelada por la de P_2 a P_1 a lo largo de cualquier otra trayectoria; es decir, la integral de línea de un campo eléctrico estático depende únicamente de los puntos inicial y final. Como veremos en la sección 3-5, la integral de línea de \mathbf{E} del punto P_1 a P_2 representa el trabajo realizado por \mathbf{E} para mover una unidad de carga de P_1 a P_2 . Por lo tanto, la ecuación (3-7) nos dice que el trabajo efectuado al mover una unidad de carga a lo largo de una trayectoria cerrada de un campo electrostático es cero. Es un enunciado de la conservación del trabajo o la energía en un campo electrostático. Es por esta razón que podemos afirmar que un campo irrotacional es un campo conservativo.[†]

A continuación repetimos los postulados fundamentales de la electrostática en el espacio libre porque forman la base para construir la estructura de la electrostática.

Si \mathbf{E} no hace trabajo, quien lo hace?

Dos postulados fundamentales de la electrostática en el espacio libre

Postulados de la electrostática en el espacio libre	
Forma diferencial	Forma integral
$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_v}{\epsilon_0}$	$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{Q}{\epsilon_0}$
$\nabla \times \mathbf{E} = 0$	$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\ell = 0$

Consideramos que estos postulados, al igual que el principio de la conservación de carga, son representaciones de las leyes de la naturaleza. En la sección siguiente derivaremos la ley de Coulomb.

3-3 LEY DE COULOMB

Consideremos el problema electrostático más simple, que consiste en una sola carga puntual, q , en reposo en el espacio libre ilimitado. Para hallar la intensidad de campo eléctrico creado por q , dibujamos una superficie esférica de radio arbitrario R con centro en q ; es decir, una superficie cerrada hipotética (una *superficie gaussiana*) alrededor de la fuente, a la cual se aplica la ley de Gauss para determinar el campo. Puesto que una carga puntual no tiene direcciones preferentes, su campo eléctrico debe ser radial en todas partes y tener la misma intensidad en todos los puntos de la superficie esférica. Al aplicar la ecuación (3-6) a la figura 3-1(a) tenemos

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \oint_S (\mathbf{a}_R E_R) \cdot \mathbf{a}_R ds = \frac{q}{\epsilon_0},$$

o sea

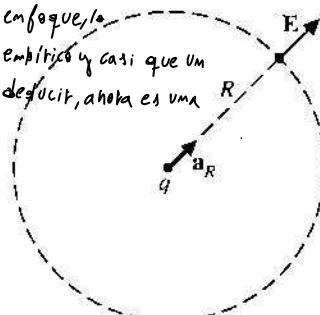
$$E_R \oint_S ds = E_R (4\pi R^2) = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

[†] Recordamos de la mecánica que el campo gravitacional es un campo conservativo.

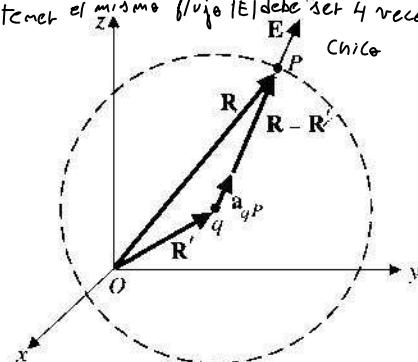
Una superficie gaussiana es una superficie hipotética sobre la cual se aplica la ley de Gauss.

$|q|q'/|\vec{E}|$ decrece con R^2 ? → Porque para cualquier R el flujo es el mismo. Si considero una esfera con el doble de radio tengo 4 veces más superficie ($S = 4\pi R^2$), por lo q' para tener el mismo flujo \vec{E} debe ser 4 veces más grande.

Con este cambio de enfoque, lo q' antes era un hecho empírico y casi que un axioma, ahora se puede deducir, ahora es una consecuencia.



(a) Carga puntual en el origen.



(b) Carga puntual fuera del origen.

FIGURA 3-1 Intensidad de campo eléctrico debido a una carga puntual.

Por lo tanto

La ley de Coulomb se deduce de la de Gauß. ¿Por qué se enseña primera la de Coulomb?

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}_R E_R = \mathbf{a}_R \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad (\text{V/m}).$$

(3-8)

Intensidad de campo eléctrico de una carga puntual aislada situada en el origen

La ecuación (3-8) nos indica que *la intensidad de campo eléctrico de una carga puntual positiva tiene dirección radial hacia afuera y magnitud proporcional a la carga e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a la carga*. Esta fórmula básica es muy importante en la electrostática. La representación gráfica de las líneas de flujo de la intensidad de campo eléctrico debido a una carga puntual positiva q es como se muestra en la figura 2-17(b).

■ **EJERCICIO 3.1** Compruebe que el campo \mathbf{E} de la ecuación (3-8) satisface la ecuación (3-4) y que por tanto es conservativo.

Si la carga q no está situada en el origen del sistema de coordenadas elegido, habrá que efectuar cambios apropiados al vector unitario \mathbf{a}_R y la distancia R para reflejar la posición de la carga y el punto donde se determinará \mathbf{E} . Sea \mathbf{R}' el vector de posición de q y \mathbf{R} el del punto campo P , como se ilustra en la figura 3-1(b). Entonces, a partir de la ecuación (3-8),

$$\mathbf{E}_P = \mathbf{a}_{qp} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{R} - \mathbf{R}'|^2}, \quad (3-9)$$

donde \mathbf{a}_{qp} es el vector unitario trazado de q a P . Puesto que

$$\mathbf{a}_{qp} = \frac{\mathbf{R} - \mathbf{R}'}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|}, \quad (3-10)$$

Intensidad de campo eléctrico de una carga puntual aislada en una posición arbitraria

tenemos

$$\boxed{\mathbf{E}_P = \frac{q(\mathbf{R} - \mathbf{R}')}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|^3} \quad (\text{V/m}).} \quad (3-11)$$

EJEMPLO 3-1

Determine la intensidad de campo eléctrico en $P(-0.2, 0, -2.3)$ debida a una carga puntual de $+5 \text{ nC}$ en $Q(0.2, 0.1, -2.5)$ en el aire. Todas las dimensiones están en metros.

SOLUCIÓN

El vector de posición del punto campo P es

$$\mathbf{R} = \overrightarrow{OP} = -\mathbf{a}_x 0.2 - \mathbf{a}_z 2.3.$$

El vector de posición del punto carga Q es

$$\mathbf{R}' = \overrightarrow{OQ} = \mathbf{a}_x 0.2 + \mathbf{a}_y 0.1 - \mathbf{a}_z 2.5.$$

La diferencia es

$$\mathbf{R} - \mathbf{R}' = -\mathbf{a}_x 0.4 - \mathbf{a}_y 0.1 + \mathbf{a}_z 0.2,$$

que tiene una magnitud

$$|\mathbf{R} - \mathbf{R}'| = [(-0.4)^2 + (-0.1)^2 + (0.2)^2]^{1/2} = 0.458 \text{ (m)}.$$

Al sustituir en la ecuación (3-11) obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_P &= \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{Q(\mathbf{R} - \mathbf{R}')}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|^3} \\ &= (9 \times 10^9) \frac{5 \times 10^{-9}}{0.458^3} (-\mathbf{a}_x 0.4 - \mathbf{a}_y 0.1 + \mathbf{a}_z 0.2) \\ &= 214.5(-\mathbf{a}_x 0.873 - \mathbf{a}_y 0.218 + \mathbf{a}_z 0.437) \quad (\text{V/m}). \end{aligned}$$

La cantidad entre paréntesis es el vector unitario $\mathbf{a}_{QP} = (\mathbf{R} - \mathbf{R}')/|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|$ y \mathbf{E}_P tiene una magnitud de 214.5 (V/m) .

NOTA: La permitividad del aire es esencialmente la misma que la del espacio libre. El factor $1/(4\pi\epsilon_0)$ aparece con frecuencia en la electrostática. A partir de la ecuación (1-11) sabemos que $\epsilon_0 = 1/(c^2\mu_0)$. Sin embargo, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ (H/m)}$ en unidades del SI, de manera que

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = \frac{\mu_0 c^2}{4\pi} = 10^{-7} c^2 \quad (\text{m/F}) \quad (3-12)$$

exactamente. Si usamos el valor aproximado $c = 3 \times 10^8 \text{ (m/s)}$, entonces $1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \times 10^9 \text{ (m/F)}$.

Cuando se coloca una carga puntual q_2 en el campo creado por otra carga puntual q_1 , q_2 *experimenta* una fuerza \mathbf{F}_{12} debida a la intensidad de campo eléctrico \mathbf{E}_{12} de q_1 en q_2 . Al combinar las ecuaciones (3-2) y (3-9) tenemos

$$\mathbf{F}_{12} = q_2 \mathbf{E}_{12} = q_2 \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{12}^2} \quad (\text{N}). \quad (3-13)$$

Ley de Coulomb

La ecuación (3-13) es una forma matemática de la *ley de Coulomb*. Establece que *la fuerza entre dos cargas puntuales es proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa*. En la ecuación (3-13) observamos que \mathbf{F}_{12} es una fuerza de repulsión cuando q_1 y q_2 son ambas positivas o negativas (la dirección de \mathbf{a}_{12} es de q_1 a q_2 y el producto $q_1 q_2$ es positivo) y una fuerza de atracción cuando q_1 y q_2 tienen signos opuestos (el producto $q_1 q_2$ es negativo).

- EJERCICIO 3.2** Dadas dos cargas puntuales, $q_1 = 10(\mu\text{C})$ en $(2, 0, -4)$ y $q_2 = -60(\mu\text{C})$ en $(0, -1, -2)$, determine
- la intensidad de campo eléctrico en q_1 debido a q_2 y
 - la magnitud de la fuerza experimentada por q_1 .

Todas las dimensiones se dan en metros.

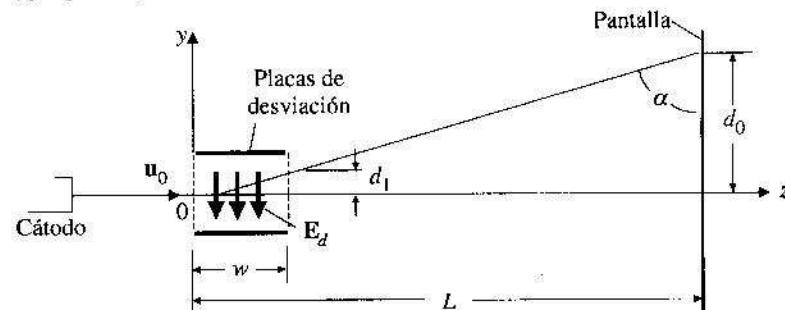
RESPUESTA: (a) $-20(\mathbf{a}_x 2 + \mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z 2)$ (kV/m), (b) 0.6 (N), atracción.

EJEMPLO 3-2

Sistema de desviación electrostática de un ORC

En la figura 3-2 se ilustra el sistema de desviación electrostática de un osciloscopio de rayos catódicos. Los electrones de un cátodo calentado reciben una velocidad inicial $\mathbf{u}_0 = \mathbf{a}_z u_0$ de un ánodo cargado positivamente (no ilustrado). Los electrones entran en $z = 0$ en una región de placas de desviación donde se mantiene un campo eléctrico uniforme $\mathbf{E}_d = -\mathbf{a}_y E_d$ en un ancho w . Ignore los efectos gravitatorios y encuentre la desviación vertical de los electrones en la pantalla fluorescente en $z = L$.

FIGURA 3-2 Sistema de desviación electrostática de un osciloscopio de rayos catódicos (ejemplo 3-2).



SOLUCIÓN

Puesto que no hay fuerza en la dirección z en la región $z > 0$, se mantiene la velocidad horizontal u_0 . El campo \mathbf{E}_d ejerce una fuerza sobre los electrones, cada uno de los cuales transporta una carga $-e$, ocasionando una desviación en la dirección y :

$$\mathbf{F} = (-e)\mathbf{E}_d = \mathbf{a}_y e\mathbf{E}_d.$$

A partir de la segunda ley del movimiento de Newton, en la dirección vertical tenemos

$$m \frac{du_y}{dt} = eE_d,$$

donde m es la masa del electrón. Al integrar ambos lados obtenemos

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{e}{m} E_d t,$$

donde la constante de integración se considera cero porque $u_y = 0$ en $t = 0$. Integraremos de nuevo para obtener

$$y = \frac{e}{2m} E_d t^2.$$

La constante de integración es nuevamente cero porque $y = 0$ en $t = 0$. Observe que los electrones tienen una trayectoria parabólica entre las placas de desviación. Al salir de las placas de desviación, $t = w/u_0$.

$$d_1 = \frac{eE_d}{2m} \left(\frac{w}{u_0} \right)^2$$

y

$$u_{y1} = u_y \left(\text{en } t = \frac{w}{u_0} \right) = \frac{eE_d}{m} \left(\frac{w}{u_0} \right).$$

Cuando los electrones llegan a la pantalla han viajado una distancia horizontal adicional de $(L - w)$, para lo cual requirieron $(L - w)/u_0$ segundos. En este tiempo hay una desviación vertical adicional

$$d_2 = u_{y1} \left(\frac{L-w}{u_0} \right) = \frac{eE_d}{m} \frac{w(L-w)}{u_0^2}.$$

Por lo tanto, la desviación en la pantalla es

$$d_0 = d_1 + d_2 = \frac{eE_d}{mu_0^2} w \left(L - \frac{w}{2} \right).$$

Las impresoras de chorro de tinta empleadas para la salida de computadores, al igual que los osciloscopios de rayos catódicos, son dispositivos basados en el principio

Principio de operación de las impresoras de chorro de tinta

de desviación electrostática de un flujo de partículas cargadas. Se pasan gotas diminutas de tinta a través de una boquilla vibratoria controlada por un transductor piezoelectrónico. Se suministran cantidades variables de carga a las gotas de tinta dependiendo de la salida del computador. Las gotas de tinta cargadas pasan por un par de placas de desviación donde existe un campo eléctrico estático uniforme. La cantidad de desviación de la gota depende de su carga. Conforme la cabeza de impresión se mueve en dirección horizontal, las gotas de tinta salen de la boquilla y entran en contacto con la superficie de impresión en diversas posiciones, formando así la imagen impresa.

3-3.1 CAMPO ELÉCTRICO DEBIDO A UN SISTEMA DE CARGAS DISCRETAS

Suponga que un grupo de n cargas puntuales discretas situadas en diferentes posiciones crea un campo electrostático. Puesto que la intensidad de campo eléctrico es una función lineal de (\propto) $a_R q / R^2$, es aplicable el principio de superposición, y el campo total \mathbf{E} en un punto es la *suma vectorial* de los campos causados por todas las cargas individuales. Denotemos las posiciones de las cargas q_1, q_2, \dots, q_n (puntos fuente) con los vectores de posición $\mathbf{R}'_1, \mathbf{R}'_2, \dots, \mathbf{R}'_n$, y la posición del punto campo donde se calculará la intensidad eléctrica, con \mathbf{R} .[†] A partir de la ecuación (3-11) podemos escribir

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1(\mathbf{R} - \mathbf{R}'_1)}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}'_1|^3} + \frac{q_2(\mathbf{R} - \mathbf{R}'_2)}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}'_2|^3} + \dots + \frac{q_n(\mathbf{R} - \mathbf{R}'_n)}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}'_n|^3} \right],$$

O

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^n \frac{q_k(\mathbf{R} - \mathbf{R}'_k)}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}'_k|^3} \quad (\text{V/m}). \quad (3-14)$$

Intensidad de campo eléctrico de un sistema de cargas puntuales discretas

Aunque la ecuación (3-14) es una expresión concisa, es complicada de usar porque muchas veces es necesario sumar vectores con diferentes magnitudes y direcciones. Una estrategia más sencilla sería encontrar \mathbf{E} a partir del potencial eléctrico. Veremos esto en la sección 3-5.

3-3.2 CAMPO ELÉCTRICO DEBIDO A UNA DISTRIBUCIÓN CONTINUA DE CARGA

Podemos obtener el campo eléctrico creado por una distribución de carga continua integrando (superponiendo) la contribución de un elemento de carga a toda la distribución de carga. Remítase a la figura 3-3, donde se presenta una distribución de carga

[†] Cuando sea necesario distinguir la notación de la posición de un punto fuente de la de un punto campo, seguiremos el convenio aceptado de usar coordenadas con prima para la primera y coordenadas sin prima para la segunda.

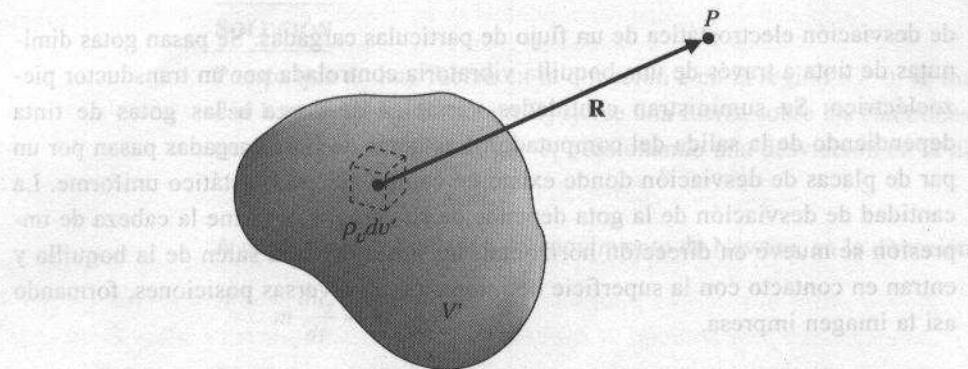


FIGURA 3-3 Campo eléctrico debido a una distribución de carga continua.

de volumen. La densidad volumétrica de carga $\rho_v(\text{C/m}^3)$ es, en términos generales, una función de las coordenadas. Ya que un elemento diferencial de carga se comporta como una carga puntual, la contribución a la intensidad de campo eléctrico en el punto fuente P de la carga $\rho_v dv'$ en un elemento de volumen diferencial dv' es

$$d\mathbf{E} = \mathbf{a}_R \frac{\rho_v dv'}{4\pi\epsilon_0 R^2}. \quad (3-15)$$

Tenemos

Intensidad de campo eléctrico de una distribución volumétrica

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \mathbf{a}_R \frac{\rho_v}{R^2} dv' \quad (\text{V/m}). \quad (3-16)$$

Si la carga está distribuida sobre una superficie con densidad superficial de carga $\rho_s(\text{C/m}^2)$, escribimos

Intensidad de campo eléctrico de una distribución superficial de carga

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \mathbf{a}_R \frac{\rho_s}{R^2} ds' \quad (\text{V/m}). \quad (3-17)$$

Para una carga lineal tenemos

Intensidad de campo eléctrico de una distribución lineal de carga

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{L'} \mathbf{a}_R \frac{\rho_\ell}{R^2} d\ell' \quad (\text{V/m}), \quad (3-18)$$

donde $\rho_\ell(\text{C/m})$ es la densidad de una línea de carga y L' es la línea (no necesariamente recta) por la cual se distribuye la carga.

EJEMPLO 3-3

Determine la intensidad de campo eléctrico de una línea de carga recta, infinitamente larga, con densidad uniforme ρ_t (C/m), en el aire.

SOLUCIÓN

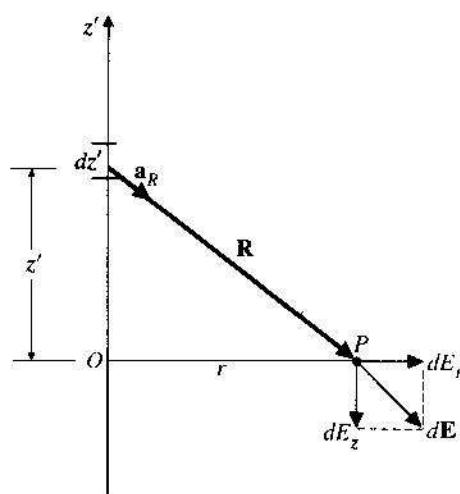
Supongamos que la línea de carga se encuentra sobre el eje z' , como se ilustra en la figura 3-4. Podemos efectuar esta suposición porque el campo no depende de cómo designemos la línea. *Observe el convenio de usar coordenadas con prima para los puntos fuente y coordenadas sin prima para los puntos campo.*

En el problema se nos pide que encontremos la intensidad de campo eléctrico en un punto P que está a una distancia r de la línea. Puesto que el problema tiene simetría cilíndrica (es decir, el campo eléctrico es independiente del ángulo de azimut ϕ), lo más conveniente es trabajar con coordenadas cilíndricas. Reescribimos la ecuación (3-18) como

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{L'} \rho_t \frac{\mathbf{R}}{R^3} d\ell' \quad (\text{V/m})} \quad (3-18a)$$

En este problema ρ_t es constante, y se elige un elemento de línea $d\ell' = dz'$ de manera que esté a una distancia arbitraria z' del origen. Es muy importante recordar que \mathbf{R} es

FIGURA 3-4 Línea de carga recta e infinitamente larga.



el vector distancia que va *desde la fuente hasta el punto campo* y no en dirección contraria. Tenemos

$$\mathbf{R} = \mathbf{a}_r r - \mathbf{a}_z z'. \quad (3-19)$$

El campo eléctrico $d\mathbf{E}$ producido por el elemento diferencial de carga $\rho_\ell d\ell' = \rho_\ell dz'$ es

$$\begin{aligned} d\mathbf{E} &= \frac{\rho_\ell dz'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{a}_r r - \mathbf{a}_z z'}{(r^2 + z'^2)^{3/2}} \\ &= \mathbf{a}_r dE_r + \mathbf{a}_z dE_z, \end{aligned} \quad (3-20)$$

donde

$$dE_r = \frac{\rho_\ell r dz'}{4\pi\epsilon_0(r^2 + z'^2)^{3/2}} \quad (3-21)$$

y

$$dE_z = \frac{-\rho_\ell z' dz'}{4\pi\epsilon_0(r^2 + z'^2)^{3/2}}. \quad (3-22)$$

En la ecuación (3-22) hemos descompuesto $d\mathbf{E}$ en sus componentes en las direcciones \mathbf{a}_r y \mathbf{a}_z . Por cada $\rho_\ell dz'$ en $+z'$ hay un elemento de carga $\rho_\ell dz'$ en $-z'$ que producirá un $d\mathbf{E}$ con componentes dE_r y $-dE_z$. Por lo tanto, las componentes \mathbf{a}_z se cancelarán en el proceso de integración y sólo tendremos que integrar dE_r en la ecuación (3-21):

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}_r E_r = \mathbf{a}_r \frac{\rho_\ell r}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{(r^2 + z'^2)^{3/2}},$$

o sea

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}_r \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (\text{V/m}).$$

(3-23)

Intensidad de campo eléctrico debido a una línea de carga recta infinita con densidad uniforme

La ecuación (3-23) es un resultado importante para una línea de carga infinita. Por supuesto, ninguna línea de carga física será infinita; no obstante, la ecuación (3-23) da el campo \mathbf{E} aproximado de una línea de carga recta muy larga en un punto cercano a la línea de carga.

- **EJERCICIO 3.3** Suponga una línea de carga infinitamente larga de 50 (pC/m) paralela al eje y en $x = 2(\text{m})$ y $z = 1(\text{m})$; obtenga la intensidad eléctrica en el punto $(-1, 5, -3)$.

RESPUESTA: $-0.18(\mathbf{a}_r 0.6 + \mathbf{a}_z 0.8)(\text{V/m})$.

3-4 LEY DE GAUSS Y APLICACIONES

La **ley de Gauss** se obtiene directamente del postulado de la divergencia de la electrotáctica, ecuación (3-3), aplicando el teorema de la divergencia. Se derivó en la ecuación (3-6) y se repite aquí debido a su gran importancia:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (3-24)$$

Ley de Gauss

La ley de Gauss establece que el flujo de salida total del campo E a través de cualquier superficie cerrada en el espacio libre es igual a la carga total encerrada en la superficie, dividida por ϵ_0 . Observamos que la superficie S puede ser *cualquier superficie cerrada hipotética (matemática) elegida por conveniencia*; no tiene que ser (y usualmente no es) una superficie física.

La ley de Gauss es muy útil para determinar el campo E de distribuciones de carga con ciertas condiciones de simetría, tal como que *la componente normal de la intensidad de campo eléctrico sea constante sobre una superficie cerrada*. En estos casos, la integral de superficie del lado izquierdo de la ecuación (3-24) sería muy fácil de calcular y la ley de Gauss sería una forma mucho más eficiente de determinar la intensidad de campo eléctrico que las ecuaciones (3-16) a (3-18a).

Por otra parte, la ley de Gauss no es muy útil cuando no existen condiciones de simetría. Los puntos cruciales para la aplicación de la ley de Gauss son, primero, la identificación de las condiciones de simetría y, segundo, la elección de una superficie apropiada donde la componente normal de E debida a la distribución de carga dada sea constante. Tal superficie se conoce como **superficie gaussiana**. Este principio básico ya lo usamos para obtener la ecuación (3-8) de una carga puntual con simetría esférica; por consiguiente, una superficie gaussiana apropiada es la superficie de una esfera centrada en la carga puntual.

Elección apropiada
de la superficie
gaussiana

EJEMPLO 3-4

Use la ley de Gauss para determinar la intensidad de campo eléctrico de una línea de carga recta, infinitamente larga, con densidad uniforme ρ_e en el aire.

SOLUCIÓN

Resolvemos este problema en el ejemplo 3-3 usando la ecuación (3-18). Puesto que la línea de carga es infinitamente larga, el campo E resultante debe ser radial y perpendicular a la línea de carga ($\mathbf{E} = a_r E_r$) y no puede existir una componente de E a lo largo de la línea. Aprovechando la simetría radial, construimos una superficie gaussiana cilíndrica de radio r y longitud arbitraria L con la línea de carga como eje, de la manera ilustrada en la figura 3-5. E_r es constante en esta superficie y $d\mathbf{s} = a_r d\phi dz$. Tenemos

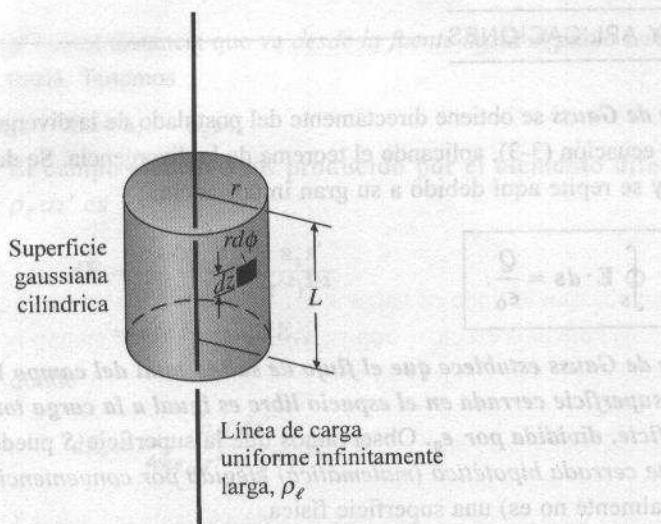


FIGURA 3-5 Aplicación de la ley de Gauss a una línea de carga infinitamente larga (ejemplo 3-4).

No hay contribución de la cara superior o inferior del cilindro porque en la cara superior $ds = \mathbf{a}_z r dr d\phi$, pero \mathbf{E} no tiene componente en z , de manera que $\mathbf{E} \cdot ds = 0$. Sigue lo mismo en la cara inferior. La carga total encerrada por el cilindro es $Q = \rho_e L$. Sustituyendo en la ecuación (3-24) obtenemos

$$2\pi r L E_r = \frac{\rho_e L}{\epsilon_0},$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}_r E_r = \mathbf{a}_r \frac{\rho_e}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

Este resultado es el mismo que el indicado por la ecuación (3-23), pero lo obtuvimos de manera mucho más sencilla. Observe también que la longitud L de la superficie gaussiana cilíndrica no aparece en la expresión final, por lo cual pudimos haber elegido un cilindro de longitud igual a la unidad.

NOTA: Esta misma superficie gaussiana/cilíndrica no funcionará si la línea de carga es de longitud finita. ¿Sabe por qué?

EJEMPLO 3-5

Determine la intensidad de campo eléctrico de un plano de carga infinito con densidad superficial de carga uniforme ρ_s .

SOLUCIÓN

El campo \mathbf{E} debido a una lámina cargada de extensión infinita es normal a la lámina. Podríamos usar la ecuación (3-17) para hallar \mathbf{E} , pero esto implicaría una integración doble entre límites infinitos de una expresión general de $1/R^2$. Aquí podemos aprovechar la ley de Gauss.

Elegimos como superficie gaussiana una caja rectangular con caras superior e inferior de área arbitraria A equidistantes del plano de carga, como se muestra en la figura 3-6. Los lados de la caja son perpendiculares a la lámina cargada. Si la lámina cargada coincide con el plano xy , tenemos entonces en la cara superior

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = (\mathbf{a}_z E_z) \cdot (\mathbf{a}_z ds) = E_z ds.$$

En la cara inferior,

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = (-\mathbf{a}_z E_z) \cdot (-\mathbf{a}_z ds) = E_z ds.$$

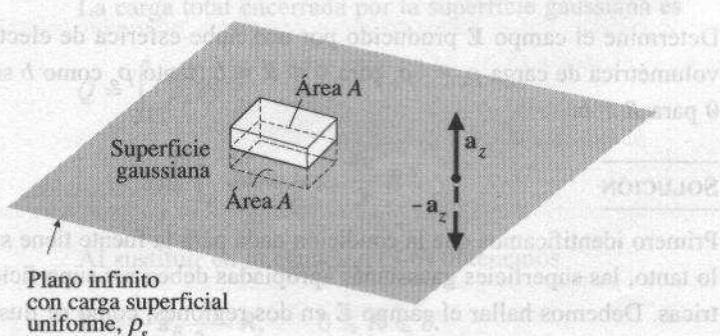
Puesto que no hay contribución de las caras laterales, tenemos

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 2E_z \int_A ds = 2E_z A.$$

La carga total encerrada por la caja es $Q = \rho_s A$. Por lo tanto,

$$2E_z A = \frac{\rho_s A}{\epsilon_0},$$

FIGURA 3-6 Aplicación de la ley de Gauss a un plano de carga infinito (ejemplo 3-5).



de donde obtenemos

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}_z E_z = \mathbf{a}_z \frac{\rho_s}{2\epsilon_0}, \quad z > 0, \quad (3-25a)$$

y

$$\mathbf{E} = -\mathbf{a}_z E_z = -\mathbf{a}_z \frac{\rho_s}{2\epsilon_0}, \quad z < 0. \quad (3-25b)$$

La lámina cargada no siempre coincide con el plano xy (así que no siempre empleamos los términos de “arriba” y “abajo” del plano), pero el campo \mathbf{E} siempre apunta alejándose de la lámina si ρ_s es positiva. La superficie gaussiana que elegimos pudo haber sido una caja de cualquier forma, no necesariamente rectangular.

NOTA: No puede elegirse una superficie gaussiana apropiada para este ejemplo si el plano de carga no es de extensión infinita en ambas direcciones o no es plano. ¿Puede explicar por qué?

Comparación de formas de iluminación

La forma de iluminar una oficina o un salón de clases puede consistir en bombillas incandescentes, largos tubos fluorescentes o paneles de luces en el techo. Éstos se asemejan de manera burda a fuentes puntuales, fuentes lineales y fuentes planares, respectivamente. Con base en las ecuaciones (3-8), (3-23) y (3-25) podemos estimar que la intensidad luminosa disminuirá con rapidez (como el cuadrado de la distancia a la fuente) en el caso de bombillas incandescentes, con menor rapidez (como primera potencia de la distancia) para los largos tubos fluorescentes y nada en el caso de paneles en el techo.

EJEMPLO 3-6

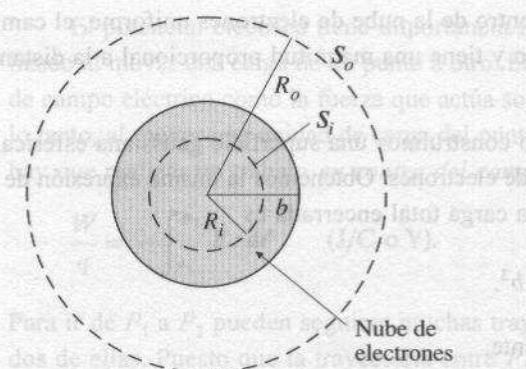
Determine el campo \mathbf{E} producido por una nube esférica de electrones con densidad volumétrica de carga $\rho_v = -\rho_o$ para $0 \leq R \leq b$ (tanto ρ_o como b son positivos) y $\rho_v = 0$ para $R > b$.

SOLUCIÓN

Primero identificamos que la condición dada para la fuente tiene simetría esférica. Por lo tanto, las superficies gaussianas apropiadas deben ser superficies esféricas concéntricas. Debemos hallar el campo \mathbf{E} en dos regiones, como se ilustra en la figura 3-7.

a) $0 \leq R \leq b$

obligaría más al campo a permanecer constante en el interior, el campo no cumpliría con el resultado requerido. La nube de electrones es una fuente de campo que actúa sobre una superficie gaussiana. Por tanto, si $R < b$, con $R_i < R < b$, el campo es constante en la nube de electrones. Si $R > b$, el campo es constante en la nube de electrones. Si $R < b$, el campo es constante en la nube de electrones. Si $R > b$, el campo es constante en la nube de electrones.



Para $R < R_i$, las trayectorias de los electrones se extienden más allá de la nube de electrones, y en la figura 3-8 se ilustran las trayectorias de los electrones. En la figura 3-9 se muestra la trayectoria que se sigue por un electrón en su trayectoria a la superficie de radio R . Para $R < R_i$, la trayectoria es rectilínea. Para $R > R_i$, la trayectoria es curvada. La trayectoria es rectilínea para $R < R_i$ y curvada para $R > R_i$.

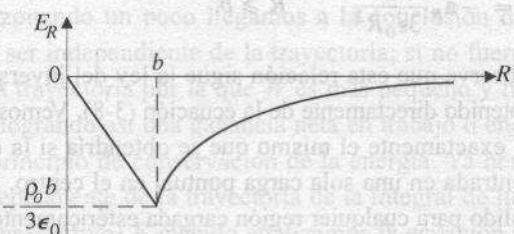


FIGURA 3-7 Intensidad de campo eléctrico de una nube de electrones (ejemplo 3-6).

Se construye una superficie gaussiana esférica hipotética S_i , con $R < b$ dentro de la nube de electrones. Sobre esta superficie, \mathbf{E} es radial y tiene magnitud constante:

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}_R E_R, \quad d\mathbf{s} = \mathbf{a}_R ds.$$

El flujo total de salida E es

$$\oint_{S_i} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E_R \int_{S_i} ds = E_R 4\pi R^2.$$

La carga total encerrada por la superficie gaussiana es

$$Q = \int_V \rho_v dv \\ = -\rho_o \int_V dv = -\rho_o \frac{4\pi}{3} R^3.$$

Al sustituir en la ecuación (3-6) obtenemos

$$\mathbf{E} = -\mathbf{a}_R \frac{\rho_o}{3\epsilon_0} R, \quad 0 \leq R \leq b.$$

Vemos que dentro de la nube de electrones uniforme, el campo \mathbf{E} está dirigido hacia el centro y tiene una magnitud proporcional a la distancia al centro.

b) $R \geq b$

Para este caso construimos una superficie gaussiana esférica S_o con $R > b$ fuera de la nube de electrones. Obtenemos la misma expresión de $\oint_{S_o} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ que para el caso (a). La carga total encerrada es

$$Q = -\rho_o \frac{4\pi}{3} b^3.$$

Por consiguiente,

$$\mathbf{E} = -\mathbf{a}_R \frac{\rho_o b^3}{3\epsilon_0 R^2}, \quad R \geq b.$$

Observe que esta relación sigue la ley del inverso del cuadrado y pudo haberse obtenido directamente de la ecuación (3-8). Vemos que \mathbf{E} fuera de la nube cargada es exactamente el mismo que se obtendría si la carga total hubiera estado concentrada en una sola carga puntual en el centro. Este resultado generalmente es válido para cualquier región cargada esféricamente simétrica, incluso si ρ_o es función de R .

■ **EJERCICIO 3.4** Dado $\mathbf{E} = \mathbf{a}_r(20/r^2)$ (mV/m) en el espacio libre, calcule ρ_o en el punto $(3, -4, 1)$ (cm).

RESPUESTA: -1.42 (nC/m^3).

■ **EJERCICIO 3.5** Una carga positiva Q se distribuye uniformemente sobre una capa esférica muy delgada de radio b en el aire. Encuentre \mathbf{E} en todos los puntos. Represente gráficamente $|\mathbf{E}|$ en función de R .

RESPUESTA: 0 para $0 < R < b$; $\mathbf{a}_R(Q/4\pi\epsilon_0 R^2)$ para $R > b$.

3-5 POTENCIAL ELÉCTRICO

Antes, al hablar de la identidad nula de la ecuación (2-105), señalamos que un campo vectorial con rotacional nulo siempre puede expresarse como el gradiente de un campo escalar. Por lo tanto, podemos definir un **potencial eléctrico** V escalar a partir de la ecuación (3-4), de manera que

Intensidad de campo electrostático a partir del potencial eléctrico

$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla V} \quad (3-26)$$

ya que las cantidades escalares son más fáciles de manejar que las cantidades vectoriales. Si podemos determinar V con mayor facilidad, entonces podemos encontrar \mathbf{E} con una operación de gradiente, lo cual no es más que un sencillo proceso de diferenciación. En seguida explicaremos la razón por la cual se incluye un signo negativo en la ecuación (3-26).

El potencial eléctrico tiene importancia física y se relaciona con el trabajo realizado al mover una carga de un punto a otro. En la sección 3-2 definimos la intensidad de campo eléctrico como la fuerza que actúa sobre una unidad de carga de prueba. Por lo tanto, al mover una unidad de carga del punto P_1 al punto P_2 en un campo eléctrico hay que realizar un trabajo *en contra del campo*, igual a

$$\frac{W}{q} = - \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\ell \quad (\text{J/C o V}). \quad (3-27)$$

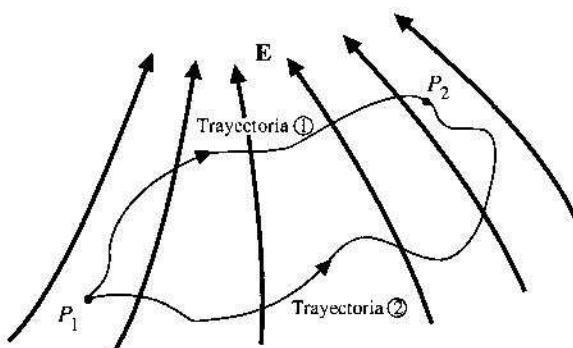
Para ir de P_1 a P_2 pueden seguirse muchas trayectorias, y en la figura 3-8 se ilustran dos de ellas. Puesto que la trayectoria entre P_1 y P_2 no está especificada en la ecuación (3-27), surge la siguiente duda: ¿Cómo depende el trabajo de la trayectoria que se siga? Razonando un poco llegamos a la conclusión de que W/q en la ecuación (3-27) debe ser independiente de la trayectoria; si no fuera así, sería posible ir de P_1 a P_2 por una trayectoria por la que W es más pequeño y luego regresar a P_1 por otra trayectoria, logrando así una ganancia neta en trabajo o energía. Este resultado iría en contra del principio de conservación de la energía. Ya hemos hecho alusión a la naturaleza independiente de la trayectoria de la integral de línea escalar del campo irrotacional (conservativo) \mathbf{E} cuando analizamos la ecuación (3-7).

En forma análoga al concepto de la energía potencial en la mecánica, la ecuación (3-27) representa la diferencia en energía potencial eléctrica de una unidad de carga entre el punto P_2 y el punto P_1 . Si denotamos la energía potencial eléctrica por unidad de carga con V (el **potencial eléctrico**), tenemos

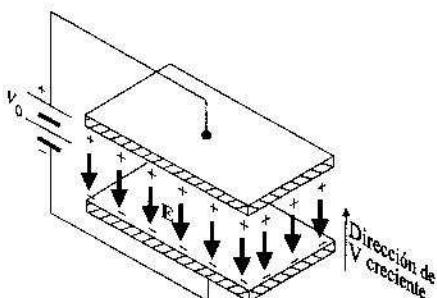
$$V_2 - V_1 = - \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\ell \quad (\text{V}). \quad (3-28)$$

Lo que hemos definido en la ecuación (3-28) es una **diferencia de potencial (voltaje electrostático)** entre los puntos P_2 y P_1 . No podemos hablar del potencial *absoluto* de un punto, al igual que no podemos hablar de la fase absoluta de un fasor o la altitud

FIGURA 3-8 Dos trayectorias que van de P_1 a P_2 en un campo eléctrico.



La diferencia de potencial electrostático entre P_2 y P_1 es igual al trabajo efectuado al mover una unidad de carga de P_1 a P_2 .

FIGURA 3-9 Direcciones relativas de \mathbf{E} y V creciente.**Elección de un punto de referencia a potencial cero**

absoluta de un lugar geográfico; primero hay que especificar un punto de referencia de potencial cero, una fase de referencia cero (usualmente en $t = 0$) o una altitud de referencia cero (por lo general el nivel del mar). En la mayoría de los casos (aunque no en todos) el punto de potencial cero se toma en el infinito. Cuando el punto de referencia de potencial cero no está en el infinito (por ejemplo, cuando está "en tierra"), debe especificarse de manera explícita.

Haremos dos observaciones importantes adicionales acerca de la ecuación (3-28). En primer lugar, hay que incluir el signo negativo para estar de acuerdo con el convenio de que el potencial eléctrico V aumenta al ir en contra del campo eléctrico \mathbf{E} . Por ejemplo, cuando se conecta una batería de corriente continua con voltaje V_0 entre dos placas conductoras paralelas, como en la figura 3-9, las cargas positivas y negativas se acumulan en las placas superior e inferior, respectivamente. El campo \mathbf{E} está dirigido de las cargas positivas a las negativas, mientras que el potencial aumenta en dirección opuesta.

En segundo lugar sabemos, a partir de la sección 2-5, donde definimos el gradiente de un campo escalar, que la dirección de ∇V es normal a las superficies con V constante. Por lo tanto, si usamos *líneas de campo dirigidas* o *líneas de flujo* para indicar la dirección del campo \mathbf{E} , siempre serán perpendiculares a las *líneas equipotenciales* y a las *superficies equipotenciales*.

Las líneas de los campos eléctricos son perpendiculares a las líneas y superficies equipotenciales.

- EJERCICIO 3.6** Determine el trabajo realizado por el campo eléctrico $\mathbf{E} = \mathbf{a}_x x - \mathbf{a}_y 2y$ (V/m) para mover una unidad de carga positiva desde la posición $P_1(-2, 0, 0)$ hasta la posición $P_2(5, -1, 3)$. Las distancias están en (m).

RESPUESTA: 9.5 (J).

3-5.1 POTENCIAL ELÉCTRICO DEBIDO A UNA DISTRIBUCIÓN DE CARGA

El potencial eléctrico de un punto a una distancia R de una carga puntual q con respecto al del infinito puede obtenerse fácilmente con la ecuación (3-28):

$$V = - \int_{\infty}^R \left(\mathbf{a}_R \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \right) \cdot (\mathbf{a}_R dR),$$

de lo cual se obtiene

$$\boxed{V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (\text{V})} \quad (3-29)$$

Potencial electrostático de una carga puntual con respecto al del infinito.

Ésta es una cantidad escalar y depende únicamente de la distancia R , además de q . La diferencia de potencial entre dos puntos P_2 y P_1 a distancias R_2 y R_1 , respectivamente, de q es

$$V_{21} = V_{P_2} - V_{P_1} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right). \quad (3-30)$$

El potencial eléctrico en \mathbf{R} debido a un sistema de n cargas discretas q_1, q_2, \dots, q_n localizadas en $\mathbf{R}'_1, \mathbf{R}'_2, \dots, \mathbf{R}'_n$ es, por superposición, la suma de los potenciales occasionados por las cargas individuales:

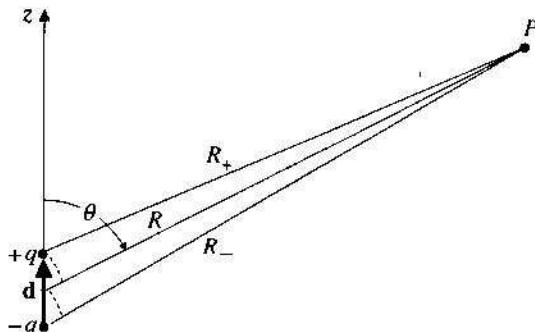
$$\boxed{V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^n \frac{q_k}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}'_k|} \quad (\text{V})} \quad (3-31)$$

Puesto que ésta es una suma escalar, en general será más fácil determinar \mathbf{E} usando el gradiente negativo de V en lugar de la suma vectorial de la ecuación (3-14).

EJEMPLO 3-7

En la figura 3-10 se muestra un dipolo eléctrico que consiste en dos cargas puntuales iguales y opuestas $+q$ y $-q$, separadas una pequeña distancia d . Determine el potencial V y la intensidad eléctrica \mathbf{E} en un punto arbitrario P a una distancia $R \gg d$ del dipolo.

FIGURA 3-10 Dipolo eléctrico.



SOLUCIÓN

Sean R_+ y R_- las distancias de las cargas $+q$ y $-q$ al punto campo P , respectivamente.

El potencial en P puede obtenerse directamente de la ecuación (3-31).

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_+} - \frac{1}{R_-} \right). \quad (3-32)$$

Si $d \ll R$, escribimos

$$R_+ \cong \left(R - \frac{d}{2} \cos \theta \right) \quad (3-33)$$

y

$$R_- \cong \left(R + \frac{d}{2} \cos \theta \right). \quad (3-34)$$

Al sustituir las ecuaciones (3-33) y (3-34) en la ecuación (3-32) tenemos

$$\begin{aligned} V &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R - \frac{d}{2} \cos \theta} - \frac{1}{R + \frac{d}{2} \cos \theta} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{d \cos \theta}{R^2 - \frac{d^2}{4} \cos^2 \theta} \right) \cong \frac{qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 R^2}. \end{aligned} \quad (3-35)$$

La ecuación (3-35) puede reescribirse como

Determinación del
potencial
electrostático a
partir del momento
dipolar eléctrico

$$V = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{a}_R}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad (\text{V}), \quad (3-36)$$

donde $\mathbf{p} = qd$ es el **momento dipolar eléctrico** (unidad en el SI: C · m). (Se ha omitido el signo de “aproximadamente” (\sim) por cuestiones de sencillez.)

El campo \mathbf{E} puede obtenerse de $-\nabla V$. En coordenadas esféricas tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla V = -\mathbf{a}_R \frac{\partial V}{\partial R} - \mathbf{a}_\theta \frac{\partial V}{R \partial \theta} \\ &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0 R^3} (\mathbf{a}_R 2 \cos \theta + \mathbf{a}_\theta \sin \theta). \end{aligned} \quad (3-37)$$

Observe que V y \mathbf{E} son independientes de ϕ , como era de esperarse.

- **EJERCICIO 3.7** Un dipolo eléctrico en el origen tiene momento dipolar $\mathbf{a}_z 0.1$ (nC·m). Calcule V y \mathbf{E} en (a) $(0, 0, 5)$ (m) y (b) $(2\text{m}, \pi/3, \pi/8)$.

RESPUESTA: (a) 36 (mV), $\mathbf{a}_z 14.4$ (mV/m); (b) 113 (mV), $\mathbf{a}_R 113 + \mathbf{a}_\theta 97.4$ (mV/m).

El potencial eléctrico debido a una distribución de carga continua confinada en una región dada se obtiene integrando la contribución de un elemento de carga sobre toda la región cargada. Para una distribución volumétrica de carga tenemos

Potencial eléctrico
debido a
distribuciones de
carga continuas

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_v}{R} dv' \quad (\text{V}). \quad (3-38)$$

Para una distribución superficial de carga,

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\rho_s}{R} ds' \quad (\text{V}); \quad (3-39)$$

y para una línea de carga,

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\rho_t}{R} dt' \quad (\text{V}). \quad (3-40)$$

Observe una vez más que las integrales de las ecuaciones (3-38) y (3-39) representan integraciones en tres y dos dimensiones, respectivamente.

EJEMPLO 3-8

Obtenga una fórmula para la intensidad del campo eléctrico en el eje de un disco circular de radio b que tiene una densidad superficial de carga uniforme ρ_s .

SOLUCIÓN

Aunque el disco tiene simetría circular, no podemos visualizar una superficie a su alrededor en la cual la componente normal de \mathbf{E} tenga magnitud constante; por consiguiente, la ley de Gauss no sirve para resolver este problema. En su lugar usamos la ecuación (3-39). Trabajando con las coordenadas cilíndricas indicadas en la figura 3-11 tenemos

$$ds' = r'dr' d\phi'$$

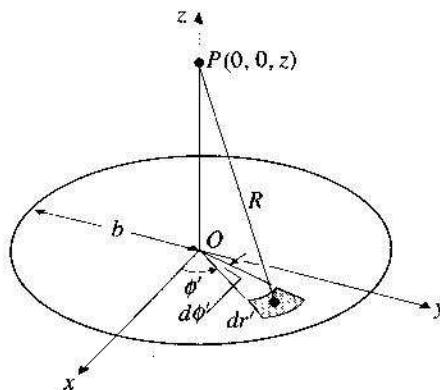


FIGURA 3-11 Disco con carga uniforme (ejemplo 3-8).

y

$$R = \sqrt{z^2 + r'^2}.$$

El potencial eléctrico en el punto $P(0, 0, z)$ con respecto al potencial en un punto en el infinito es

$$\begin{aligned} V &= \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^b \frac{r'}{(z^2 + r'^2)^{1/2}} dr' d\phi' \\ &= \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} [(z^2 + b^2)^{1/2} - |z|], \end{aligned} \quad (3-41)$$

donde el signo absoluto alrededor de z describe el hecho de que V es lo mismo si z es positivo (un punto por encima del disco) o negativo (un punto debajo del disco). Por consiguiente,

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\mathbf{a}_z \frac{\partial V}{\partial z} = \begin{cases} \mathbf{a}_z \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} [1 - z(z^2 + b^2)^{-1/2}], & z > 0 \\ -\mathbf{a}_z \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} [1 + z(z^2 + b^2)^{-1/2}]. & z < 0. \end{cases} \quad (3-42a)$$

$$(3-42b)$$

PREGUNTAS DE REPASO

P.3-1 Escriba la forma diferencial de los postulados fundamentales de la electrostática en el espacio libre.

P.3-2 ¿En qué condiciones será solenoidal e irrotacional una intensidad de campo eléctrico?

- P.3-3** Escriba la forma integral de los postulados fundamentales de la electrostática en el espacio libre y enuncie su significado con palabras.
- P.3-4** Explique por qué un campo irrotacional se conoce también como campo conservativo.
- P.3-5** ¿De qué manera varía la intensidad de campo eléctrico con la distancia para (a) una carga puntual? (b) ¿un dipolo eléctrico?
- P.3-6** Enuncie la *ley de Coulomb*.
- P.3-7** Enuncie la *ley de Gauss*. ¿En qué condiciones es muy útil la ley de Gauss para determinar la intensidad de campo eléctrico de una distribución de carga?
- P.3-8** Describa las formas en que varía con la distancia la intensidad de campo eléctrico de una linea de carga recta, infinitamente larga, y con densidad uniforme.
- P.3-9** Si el potencial eléctrico en un punto es cero, ¿también es cero la intensidad de campo eléctrico en ese punto? Explique.
- P.3-10** Si la intensidad de campo eléctrico en un punto es cero, ¿también es cero el potencial eléctrico en ese punto? Explique.

COMENTARIOS

- Al determinar la intensidad de campo eléctrico, \mathbf{E} , de una distribución de carga, es más sencillo aplicar la ley de Gauss si puede hallarse una superficie gaussiana simétrica que encierre las cargas y sobre la cual la componente normal al campo sea constante.
- Si no puede hallarse una superficie gaussiana apropiada, es más sencillo hallar primero V (un escalar) y obtener \mathbf{E} a partir de $-\nabla V$.**
- Las líneas de campo dirigidas (líneas de flujo) siempre son perpendiculares a las líneas y a las superficies equipotenciales.

3-6 MEDIOS MATERIALES EN UN CAMPO ELÉCTRICO ESTÁTICO

Hasta ahora sólo hemos analizado el campo eléctrico de las distribuciones de carga estacionarias en el espacio libre o en el aire. A continuación veremos el comportamiento de los campos en medios materiales. Los materiales usualmente se clasifican en tres tipos según sus propiedades eléctricas: **conductores**, **semiconductores** y **aislantes** (o **dieléctricos**). Considerando un modelo atómico básico para un átomo consistente en un núcleo con carga positiva y los electrones orbitando a su alrededor, los electrones en las capas más externas de los átomos de los **conductores** están unidos débilmente y emigran con facilidad de un átomo a otro. La mayoría de los metales pertenece a este grupo. Los electrones de los átomos de los **aislantes** o dieléctricos están confinados a sus órbitas; en circunstancias normales no pueden liberarse, ni siquiera con la aplicación de un campo eléctrico externo. Las propiedades eléctricas de los **semiconductores** están entre las de los conductores y las de los aislantes, ya que poseen un número relativamente pequeño de cargas que pueden moverse libremente.

En términos de la teoría de bandas de los sólidos encontramos que hay bandas de energía permitidas para los electrones, cada una de las cuales consiste en muchos estados de energía discretos y muy poco espaciados. Entre estas bandas de energía puede haber huecos (*gaps*) o regiones prohibidas donde no pueden residir electrones del átomo de un sólido. Los conductores tienen una banda de energía superior parcialmente llena con electrones o un par de bandas superiores que se pueden superponer y que se llenan de forma parcial para que los electrones de estas bandas puedan moverse de una a otra con sólo un pequeño cambio en energía. Los aislantes o dieléctricos son materiales con la banda superior completamente llena, de manera que la conducción no puede ocurrir en condiciones normales debido a la existencia de un gran salto o intervalo de energía a la siguiente banda superior. Si el intervalo de energía de la región prohibida es relativamente pequeño, bastan pequeñas cantidades de energía externa para excitar los electrones de la banda superior llena para que salten a la banda siguiente, dando lugar a la conducción. Estos materiales son semiconductores. La propiedad eléctrica macroscópica de un medio material se caracteriza por un parámetro constitutivo llamado **conductividad**, que definiremos en el capítulo 4.

3-6.1 CONDUCTORES EN UN CAMPO ELÉCTRICO ESTÁTICO

Suponga por el momento que se introducen algunas cargas positivas (o negativas) en el interior de un buen conductor. Se establecerá un campo eléctrico en el conductor y el campo ejercerá una fuerza sobre las cargas y hará que se alejen entre sí. Este movimiento continuará hasta que *todas* las cargas lleguen a la superficie del conductor y se redistribuyan de manera que desaparezcan en el interior tanto la carga como el campo. Por lo tanto,

Dentro de un conductor (en condiciones estáticas)
--

$$\rho_v = 0 \quad (3-43)$$

$$\mathbf{E} = 0 \quad (3-44)$$

La carga libre y la intensidad de campo eléctrico son nulas en el interior de un conductor en condiciones estáticas.

Cuando no hay cargas libres en el interior de un conductor ($\rho_v = 0$), \mathbf{E} debe ser igual a cero porque, de acuerdo con la ley de Gauss, debe desaparecer el flujo eléctrico total de salida a través de *cualquier* superficie cerrada construida dentro del conductor.

La distribución de carga en la superficie del conductor depende de la forma de la superficie. Es obvio que las cargas no estarían en un estado de equilibrio si existiera una componente tangencial de la intensidad de campo eléctrico que produjera una fuerza tangencial y moviera las cargas. Por lo tanto, *en condiciones estáticas, el campo E sobre la superficie de un conductor es normal a la superficie en todos los puntos*. En otras palabras, *la superficie de un conductor es una superficie equipotencial en condiciones*

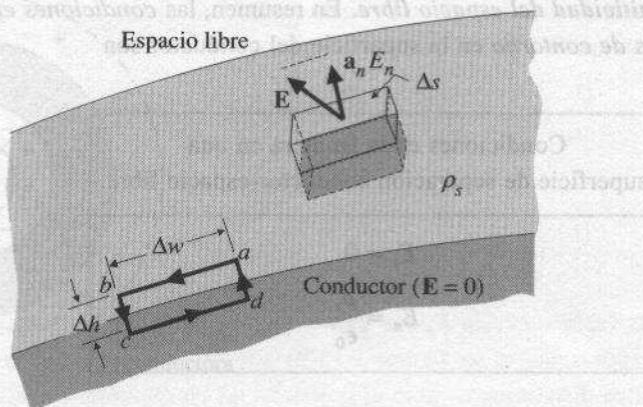


FIGURA 3-12 Superficie de separación conductor-espacio libre.

estáticas. De hecho, puesto que $\mathbf{E} = 0$ en todos los lugares dentro de un conductor, todo el conductor tiene el mismo potencial electrostático.

En la figura 3-12 se muestra una superficie de separación entre un conductor y el espacio libre. Considere el contorno $abcd$, con anchura $ab = cd = \Delta w$ y altura $bc = da = \Delta h$. Los lados ab y cd son paralelos a la superficie de separación. Al aplicar la ecuación (3-7) con $\Delta h \rightarrow 0$ y observar que \mathbf{E} en un conductor es cero, obtenemos

$$\oint_{abeda} \mathbf{E} \cdot d\ell = E_t \Delta w = 0$$

$$E_t = 0, \quad (3-45)$$

lo cual indica que *la componente tangencial del campo E sobre la superficie de un conductor es cero en condiciones estáticas*. Para hallar E_n , la componente normal de \mathbf{E} en la superficie del conductor, construimos una superficie gaussiana en forma de delgada caja circular con la cara superior en el espacio libre y la inferior en el conductor donde $\mathbf{E} = 0$. Usando la ecuación (3-6) obtenemos

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E_n \Delta S = \frac{\rho_s \Delta S}{\epsilon_0},$$

$$E_n = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \quad (3-46)$$

Por consiguiente, *la componente normal del campo E sobre la frontera conductor-espacio libre es igual a la densidad superficial de carga del conductor dividida por*

El campo eléctrico en la superficie de un conductor en condiciones estáticas es perpendicular a la superficie, la cual es equipotencial.

la permitividad del espacio libre. En resumen, las *condiciones en la frontera o condiciones de contorno* en la superficie del conductor son

Condiciones en la frontera en una superficie de separación conductor-espacio libre

$$\mathbf{E}_t = 0 \quad (3-45)$$

$$E_n = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \quad (3-46)$$

EJEMPLO 3-9

Una carga puntual positiva Q está en el centro de una capa conductora esférica con radio interior R_i y radio exterior R_o . Determine \mathbf{E} y V como funciones de la distancia radial R .

SOLUCIÓN

La geometría del problema se muestra en la figura 3-13(a). Puesto que hay simetría esférica, lo más sencillo es usar la ley de Gauss para determinar \mathbf{E} y luego hallar V por integración. Hay tres regiones distintas: (a) $R > R_o$, (b) $R_i < R < R_o$ y (c) $R < R_i$. Construiremos superficies gaussianas esféricas apropiadas en estas regiones. Por simetría, se requiere que $\mathbf{E} = \mathbf{a}_R E_R$ en las tres regiones.

- a) $R > R_o$ (superficie gaussiana S_1):

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E_{R1} 4\pi R^2 = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

o

$$E_{R1} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}. \quad (3-47)$$

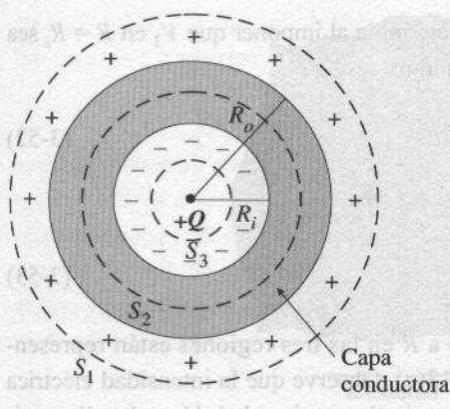
El campo \mathbf{E} es el mismo que el de una carga puntual Q sin la presencia de la capa; esta relación ya se dio en la ecuación (3-8). El potencial con respecto al del infinito es

$$V_1 = - \int_{\infty}^R (E_{R1}) dR = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}, \quad (3-48)$$

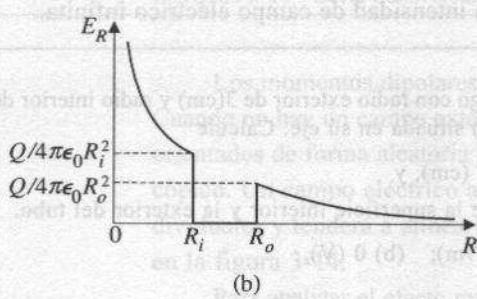
que es el mismo que se obtuvo en la ecuación (3-29).

- b) $R_i < R < R_o$ (superficie gaussiana S_2): A partir de la ecuación (3-44) sabemos que

$$E_{R2} = 0. \quad (3-49)$$

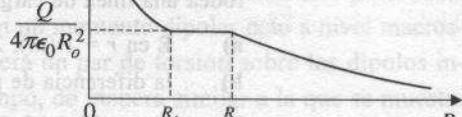


(a)



(b)

$$\left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_o}\right) \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = 0$$



(c)

FIGURA 3-13 Intensidad de campo eléctrico y variaciones de potencial de una carga puntual $+Q$ en el centro de una capa conductora (ejemplo 3-9).

Puesto que $\rho_v = 0$ en la capa conductora y dado que la carga total encerrada por la superficie S_2 debe ser cero, se habrá inducido una cantidad de carga negativa igual a $-Q$ en la superficie interior de la capa, en $R = R_i$. (Esto también significa que se induce una cantidad de carga positiva igual a $+Q$ en la superficie exterior de la capa, en $R = R_o$.) La capa conductora es un cuerpo equipotencial. Por lo tanto,

$$V_2 = V_1 \Big|_{R=R_o} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_o}. \quad (3-50)$$

- c) $R < R_i$ (superficie gaussiana S_3): Al aplicar la ley de Gauss se obtiene la misma fórmula para E_{R3} que la de E_{R1} en la ecuación (3-47) para la primera región:

$$E_{R3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}. \quad (3-51)$$

El potencial en la región es

$$V_3 = - \int E_{R3} dR + K = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} + K,$$

donde la constante de integración K se determina al imponer que V_3 en $R = R_i$ sea igual que V_2 en la ecuación (3-50). Tenemos

$$K = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_o} - \frac{1}{R_i} \right) \quad (3-52)$$

y

$$V_3 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_o} - \frac{1}{R_i} \right). \quad (3-53)$$

Las variaciones de E_R y V con respecto a R en las tres regiones están representadas gráficamente en las figuras 3-13(b) y 3-13(c). Observe que la intensidad eléctrica tiene saltos discontinuos, pero el potencial no pierde continuidad. Un salto discontinuo en el potencial significaría una intensidad de campo eléctrico infinita.

El potencial es continuo a través de las fronteras.

- **EJERCICIO 3.8** Suponga que un tubo de cobre muy largo con radio exterior de 3(cm) y radio interior de 2(cm) rodea una línea de carga de 60(pC/m) situada en su eje. Calcule
- \mathbf{E} en $r = 1$ (m), 2.5 (cm) y 1.5 (cm), y
 - la diferencia de potencial entre la superficie interior y la exterior del tubo.

RESPUESTA: (a) 1.08 (V/m), 0, 72 (V/m); (b) 0 (V).

3-6.2 DIELÉCTRICOS EN UN CAMPO ELÉCTRICO ESTÁTICO

Todos los medios materiales están compuestos por átomos con un núcleo con carga positiva rodeado por electrones con carga negativa. Aunque las moléculas de los dieléctricos son neutras a nivel macroscópico, la presencia de un campo eléctrico externo hace que se aplique una fuerza a cada partícula cargada y produce pequeños desplazamientos de las cargas positivas y negativas en direcciones opuestas. Éstas son **cargas ligadas**. Los desplazamientos, aunque pequeños en comparación con las dimensiones atómicas, *polarizan* un material dieléctrico y crean dipolos eléctricos. Esta situación se ilustra en la figura 3-14. Ya que los dipolos eléctricos tienen potencial eléctrico e intensidad de campo eléctrico no nulos (véase el ejemplo 3-7), es de esperar que los **dipolos eléctricos inducidos** modifiquen el campo eléctrico dentro y fuera del material dieléctrico.

Las moléculas de algunos dieléctricos poseen momentos dipolares permanentes, incluso en ausencia de un campo de polarización externo. Estas moléculas usualmente consisten en dos o más átomos diferentes y se denominan **moléculas polares**, a diferencia de las **moléculas no polares**, que no tienen momentos dipolares permanentes. Un ejemplo es la molécula de agua, H_2O , que consiste en dos átomos de hidrógeno y uno de oxígeno. Los átomos no se disponen de manera que la molécula tenga un momento dipolar cero; es decir, los átomos de hidrógeno no se encuentran en lados diametralmente opuestos del átomo de oxígeno.

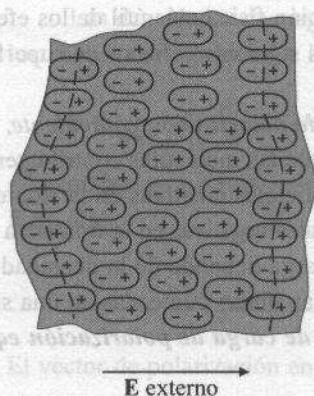


FIGURA 3-14 Corte transversal de un medio dieléctrico polarizado.

Los momentos dipolares de las moléculas polares son del orden de 10^{-30} (C · m). Cuando no hay un campo externo, los dipolos individuales de un dieléctrico polar están orientados de forma aleatoria y no producen un momento dipolar neto a nivel macroscópico. Un campo eléctrico aplicado ejercerá un par de torsión sobre los dipolos individuales y tenderá a alinearlos con el campo, de manera similar a la que se muestra en la figura 3-14.

Para analizar el efecto macroscópico de los dipolos inducidos, definimos un *vector de polarización P* como

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^{n \Delta v} \mathbf{p}_k}{\Delta v} \quad (\text{C/m}^2), \quad \begin{array}{l} \text{Estas definiciones falaba mo ane} \\ \text{que justam una mieta} \end{array} \quad (3-54)$$

donde n es el número de moléculas por unidad de volumen y el numerador representa la suma vectorial de los momentos dipolares inducidos que están contenidos en un volumen muy pequeño Δv . El vector \mathbf{P} , una función puntual promediada, es la *densidad de volumen del momento dipolar eléctrico*. El momento dipolar $d\mathbf{p}$ de un volumen elemental dv' es $d\mathbf{p} = \mathbf{P} dv'$, que produce un potencial electrostático (véase la Ec. 3-36)

$$dV = \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_R}{4\pi\epsilon_0 R^2} dv' \quad \begin{array}{l} \text{Visualización:} \\ \text{En verde } \mathbf{P} \end{array} \quad (3-55)$$

Al integrar sobre el volumen V' del dieléctrico se obtiene el potencial debido al dieléctrico polarizado.

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_R}{R^2} dv', \quad (3-56)$$

donde R es la distancia del volumen elemental dv' a un punto campo fijo.

Podemos obtener una interpretación física más útil de los efectos de los dipolos eléctricos inducidos si observamos los siguientes efectos de superficie y volumen del vector de polarización \mathbf{P} .[†]

1. *Densidad superficial de carga de polarización equivalente*, ρ_{ps} .

En la figura 3-14 podemos ver que las moléculas contribuyen de forma efectiva a la distribución de cargas superficiales positivas en la frontera a la derecha y a la distribución de cargas superficiales negativas en la frontera a la izquierda. Puesto que la densidad superficial de carga depende de la densidad de dipolos eléctricos que sobresalen más allá de las líneas punteadas en una superficie, podemos ver que la *densidad superficial de carga de polarización equivalente* es

Densidad superficial de carga de polarización equivalente

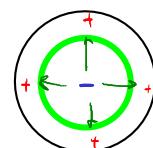
$$\rho_{ps} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_n \quad (\text{C/m}^2). \quad (3-57)$$

2. *Densidad volumétrica de carga de polarización equivalente*, ρ_{pv} .

Para una superficie S que limita un volumen V , la carga total neta que sale fuera de V como resultado de la polarización se obtiene integrando la ecuación (3-57). La carga neta que permanece dentro del volumen es el *negativo* de esta integral:

+ $Q \rightarrow$ Carga en el borde de la esfera:

$$Q = - \oint_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_n ds = \int_V (-\nabla \cdot \mathbf{P}) dv = \int_V \rho_{pv} dv, \quad + Q = \oint_S S_{sp} ds = \int_S \bar{P} \cdot \bar{a}_n ds \quad (3-58)$$



donde hemos aplicado el teorema de la divergencia para convertir la integral de superficie cerrada en una integral de volumen. Podemos definir la *densidad volumétrica de carga de polarización equivalente* como

Densidad volumétrica de carga de polarización equivalente

$$\rho_{pv} = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (\text{C/m}^3). \quad \nabla \cdot \bar{P} = -\oint_S \bar{P} \cdot \bar{a}_n ds \quad (3-59)$$

$\bar{P} \rightarrow$ comportamiento contrario al de E

Por lo tanto, cuando no se anula la divergencia de \mathbf{P} , el dieléctrico polarizado aparece estar cargado. Sin embargo, como comenzamos con un cuerpo dieléctrico eléctricamente neutro, la carga total del cuerpo tras la polarización debe seguir siendo cero. Este hecho puede verificarse al observar que

$$\text{Carga total} = \oint_S \rho_{ps} ds + \int_V \rho_{pv} dv$$

$$= \oint_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_n ds - \int_V \nabla \cdot \mathbf{P} dv = 0,$$

para un cuerpo dieléctrico de forma arbitraria.

[†] Puede hallar una derivación más formal en D. K. Cheng, *Field and Wave Electromagnetics*, 2da. ed., subsección 3-7.1, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Massachusetts, 1989.

+ Q_{ps}
- Q_{sp}
+ q

- $Q \rightarrow$ Carga dentro de la esfera, sin la superficie:
- $Q = -(+Q) = - \oint_S \bar{P} \cdot \bar{a}_n ds$

Luego Cheng aplica el teorema de la divergencia
y hace aparente que
 $\oint_S \bar{P} \cdot \bar{a}_n ds = 0$

No existe como existe
pr. Es una idea más abstracta

Las densidades de carga de polarización ρ_{ps} y ρ_{pv} pueden usarse para determinar los campos de potencial e intensidad eléctrica debidos a un dieléctrico polarizado:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S'} \frac{\rho_{ps}}{R} ds' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho_{pv}}{R} dv',$$

relación que es equivalente a la ecuación (3-56). En el caso de campos electrostáticos, $\mathbf{E} = -\nabla V$.

EJEMPLO 3-10

El vector de polarización en una esfera dieléctrica de radio R_0 es $\mathbf{P} = a_x P_0$. Determine

- las densidades superficial y volumétrica de carga de polarización equivalentes, y
- la carga total equivalente sobre la superficie y dentro de la esfera.

SOLUCIÓN

- La densidad superficial de carga de polarización sobre la superficie ($R = R_0$) de la esfera es

$$\begin{aligned}\rho_{ps} &= \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_R = P_0(a_x \cdot a_R) \\ &= P_0 \sin \theta \cos \phi.\end{aligned}$$

La densidad volumétrica de carga de polarización es

$$\rho_{pv} = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\nabla \cdot (a_x P_0) = 0.$$

- Carga total en la superficie,

$$\begin{aligned}Q_s &= \oint \rho_{ps} ds = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} P_0 \sin \theta \cos \phi d\phi d\theta \\ &= 0.\end{aligned}$$

Carga total dentro de la esfera,

$$Q_v = \int \rho_{pv} dv = 0.$$

Por lo tanto, la carga total en la esfera es $Q_s + Q_v = 0$, como era de esperarse.

3-7 DENSIDAD DE FLUJO ELÉCTRICO Y CONSTANTE DIELECTRICA

Puesto que un dieléctrico polarizado da lugar a una densidad volumétrica de carga equivalente ρ_{pv} , es de esperar que la intensidad de campo eléctrico en un dieléctrico debido a una distribución de fuentes dada sea diferente de la intensidad de campo en

Este hay que tumidito

\bar{D} depende sólo de las cargas libres
 $\nabla \cdot \bar{D} = \rho_v$

\bar{E} depende de las cargas libres y de las cargas de polarización

Definición del desplazamiento eléctrico D

La distinción entre cargas "naturales" y cargas de polarización me hace ruido.

el espacio libre. Específicamente, hay que modificar la divergencia postulada en la ecuación (3-3) para incluir el efecto de ρ_{pv} ; es decir,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_v + \rho_{pv}). \rightarrow \nabla \cdot (\epsilon_0 \bar{E}) - \rho_{pv} = \nabla \cdot (\epsilon_0 \bar{E}) + \nabla \cdot \bar{P} = \quad (3-60)$$

Usando la ecuación (3-59) tenemos $\nabla \cdot (\epsilon_0 \bar{E} + \bar{P}) = \rho_v$

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_v. \quad (3-61)$$

Definimos ahora una nueva cantidad fundamental de campo, la **densidad de flujo eléctrico o desplazamiento eléctrico**, D , de manera que

$$D = \epsilon_0 E + P \quad (\text{C/m}^2). \quad (3-62)$$

El uso del vector D nos permite escribir una relación de divergencia entre el campo eléctrico y la distribución de *cargas libres* en cualquier medio, sin tener que tratar de manera explícita con el vector de polarización P ni con la densidad de carga de polarización ρ_{pv} . Al combinar las ecuaciones (3-61) y (3-62) obtenemos la nueva ecuación

$$\nabla \cdot D = \rho_v \quad (\text{C/m}^3), \quad (3-63)$$

donde ρ_v es la **densidad de volumen de las cargas libres**. Las ecuaciones (3-63) y (3-64) son las dos ecuaciones diferenciales fundamentales que rigen la electrostática en cualquier medio. Observe que la permitividad del espacio libre, ϵ_0 , no aparece de manera explícita en estas dos ecuaciones.

La forma integral correspondiente de la ecuación (3-63) se obtiene tomando la integral de volumen en ambos lados. Tenemos

$$\int_V \nabla \cdot D \, dv = \int_V \rho_v \, dv, \quad \rightarrow \oint \bar{D} \cdot d\bar{s} = |D| \cdot 4\pi r^2 = q \quad (3-64)$$

o

$$\oint_S D \cdot ds = Q \quad (C). \quad (3-65)$$

Flujo? ¿Qué tan denso es el flujo?
 ¿Desplazamiento? ¿Qué es lo q' se despala?

La ecuación (3-65), otra forma de la **ley de Gauss**, establece que *el flujo total hacia el exterior del desplazamiento eléctrico (o simplemente, el flujo total eléctrico hacia el exterior) a través de una superficie cerrada es igual a la carga libre total encerrada en dicha superficie*.

Cuando las propiedades dieléctricas del medio son *lineales e isotropas*, la polarización es directamente proporcional a la intensidad de campo eléctrico y la constante de proporcionalidad es independiente de la dirección del campo. Escribimos

Ley de Gauss generalizada, aplicable al espacio libre y a medios dieléctricos

Susceptibilidad eléctrica

Definición de un medio dieléctrico lineal y un medio dieléctrico homogéneo

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}, \rightarrow \text{Para la mayoría de medios } \bar{\mathbf{P}} \text{ y } \bar{\mathbf{E}} \text{ son } \parallel \quad (3-66)$$

donde χ_e es una cantidad sin dimensiones llamada **susceptibilidad eléctrica**. Un medio dieléctrico es lineal si χ_e es independiente de E , y homogéneo si χ_e es independiente de las coordenadas espaciales. Si sustituimos la ecuación (3-66) en la ecuación (3-62) obtenemos

$$\boxed{\mathbf{D} = \epsilon_0(1 + \chi_e)\mathbf{E} \\ = \epsilon_0\epsilon_r\mathbf{E} = \epsilon\mathbf{E} \quad (\text{C/m}^2)}$$

La verdad que crees q $\bar{\mathbf{P}}$ No mas importa mucho. (3-67)

el campo eléctrico E polariza a un material, que genera un P . Ese P afecta luego a E ? ¿Cuál es la causa? ¿Cuál el efecto donde:

$$\epsilon_r = 1 + \chi_e = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \quad \bar{\mathbf{D}} = \epsilon_0 \bar{\mathbf{E}} + \bar{\mathbf{P}} \rightarrow \bar{\mathbf{D}} - \bar{\mathbf{P}} = \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \bar{\mathbf{E}} \\ \rightarrow (\nabla \cdot \mathbf{P}_r - \nabla \cdot \mathbf{P}_{pr}) \frac{1}{\epsilon_0} = \mathbf{D} \cdot (\mathbf{J}_r - \mathbf{J}_{pr}) \frac{1}{\epsilon_0} = \bar{\mathbf{E}} \quad (3-68)$$

es una cantidad sin dimensiones conocida como **permittividad relativa** o **constante dieléctrica** del medio. El coeficiente $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ es la **permittividad absoluta** (con frecuencia llamada simplemente **permittividad**) del medio y se mide en farads por metro (F/m). El aire tiene una constante dieléctrica de 1.00059; por lo tanto, su permitividad en general se considera como si fuera la del espacio libre. En la tabla 3-1 y en el apéndice B-3 se presentan las constantes dieléctricas de algunos materiales comunes.

Observe que ϵ_r puede ser una función de las coordenadas espaciales. Si ϵ_r es independiente de la posición, se dice que el medio es **homogéneo**. Un medio lineal, homogéneo e isotropo se denomina **medio simple**. La permitividad relativa de un medio simple es una constante. En el caso de materiales **anisótropos** (como los cristales), la constante dieléctrica es diferente para distintas direcciones del campo eléctrico y los vectores D y E tienen direcciones distintas.

$$\bar{\mathbf{E}} = \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \cdot (\mathbf{J}_r - \mathbf{J}_{pr})$$

¿P'real?

Medio simple

Las cargas de polarización raman en el $\bar{\mathbf{E}}$

¿Qué campo me importa analizar? $\{ \bar{\mathbf{E}}, \bar{\mathbf{D}} \circ \bar{\mathbf{P}} \}$
Le voy a buscar en el Feynman. Si no sabe él me cambie a derecha

TABLA 3-1 CONSTANTES DIELECTRICAS Y RIGIDEZ DIELECTRICA DE ALGUNOS MATERIALES COMUNES

Material	Constante dielectrica	Rigidez dielectrica (V/m)
Aire (presión atmosférica)	1.0	3×10^6
Aceite mineral	2.3	15×10^6
Papel	2-4	15×10^6
Poliestireno	2.6	20×10^6
Caucho	2.3-4.0	25×10^6
Vidrio	4-10	30×10^6
Mica	6.0	200×10^6

3-7.1 RIGIDEZ DIELÉCTRICA

Hemos explicado que un campo eléctrico ocasiona pequeños desplazamientos de las cargas ligadas en un material dieléctrico, dando lugar a la polarización. Si el campo eléctrico es muy fuerte, puede sacar a los electrones de las moléculas. Estos electrones se acelerarán bajo la acción del campo eléctrico, chocarán violentamente con la estructura molecular de la red y ocasionarán dislocaciones y daños permanentes en el material. Puede presentarse el efecto de avalancha de la ionización debido a las colisiones. El material se convertirá en conductor y pueden surgir corrientes muy grandes. Este fenómeno se conoce como *ruptura dieléctrica*. La intensidad máxima de campo eléctrico que puede resistir un material dieléctrico sin que se presente una ruptura se conoce como *rigidez dieléctrica* del material. En la tabla 3-1 se presenta la rigidez dieléctrica aproximada de algunas sustancias comunes. No debe confundirse la rigidez dieléctrica de un material con su constante dieléctrica.

Rigidez dieléctrica

La rigidez dieléctrica del aire es 3 (kV/mm).

Principio de un pararrayos

La intensidad de campo eléctrico en una superficie conductora es mayor en los puntos con mayor curvatura.

Un número que conviene recordar es la rigidez dieléctrica del aire a la presión atmosférica: 3 (kV/mm). Cuando la intensidad del campo eléctrico excede este valor, se “rompe” el aire; ocurre una ionización masiva y comienzan a aparecer chispas (descarga de efecto corona). La carga tiende a concentrarse en los puntos agudos. Éste es el principio de funcionamiento de un pararrayos, que consiste en una varilla metálica situada en la parte superior de un edificio de gran altura. Cuando una nube con abundancia de cargas eléctricas se aproxima a un edificio alto equipado con un pararrayos conectado a tierra, las cargas de un signo opuesto son atraídas desde la tierra a la punta de la varilla, donde la intensidad de campo eléctrico es máxima. Cuando la intensidad del campo eléctrico excede la rigidez dieléctrica del aire húmedo, ocurre la ruptura y se ioniza el aire cerca de la punta, convirtiéndose en conductor. Las cargas eléctricas de la nube se descargan entonces de manera inofensiva a tierra a través de un camino conductor.

En el ejemplo siguiente se ilustra el hecho de que la intensidad de campo eléctrico tiende a ser mayor en un punto cercano a la superficie con curvatura mayor de un conductor cargado.

EJEMPLO 3-11

Considere dos conductores esféricos con radios b_1 y b_2 ($b_2 > b_1$), conectados por un alambre conductor. La distancia de separación entre los conductores es muy grande en comparación con b_2 , de manera que puede considerarse que las cargas en los conductores esféricos tienen una distribución uniforme. Se deposita una carga total Q en las esferas. Calcule

- las cargas en las dos esferas, y
- las intensidades de campo eléctrico en la superficie de las esferas.

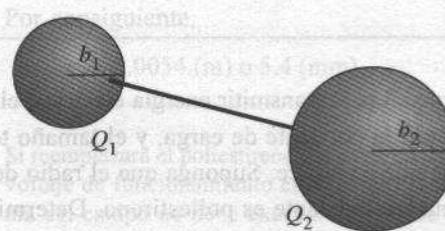


FIGURA 3-15 Dos esferas conductoras conectadas (ejemplo 3-11).

RESPUESTA 3-571 (a)

RESPUESTA

SOLUCIÓN

- a) Remítase a la figura 3-15. Puesto que las esferas conductoras tienen el mismo potencial,

$$\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 b_1} = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 b_2},$$

proporcionando una ecuación para la relación entre las cantidades de campo en la vecindad de separación entre los dos medios. Por ejemplo, quizá queramos determinar la intensidad de campo en la vecindad de separación. Ya sabemos que las superficies de las esferas tienen cargas directamente proporcionales a sus radios. Sin embargo, como

$$Q_1 + Q_2 = Q,$$

encontramos que

$$Q_1 = \frac{b_1}{b_1 + b_2} Q \quad \text{y} \quad Q_2 = \frac{b_2}{b_1 + b_2} Q.$$

- b) Las intensidades de campo eléctrico en las superficies de las dos esferas conductoras son

$$E_{1n} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 b_1^2} \quad \text{y} \quad E_{2n} = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 b_2^2},$$

de manera que

$$\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \left(\frac{b_2}{b_1}\right)^2 \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{b_2}{b_1}. \quad (3-69)$$

Las intensidades de campo eléctrico son inversamente proporcionales a los radios, siendo mayor la intensidad en la superficie de la esfera menor, que tiene mayor curvatura.

EJEMPLO 3-12

Cuando se usa un cable coaxial para transmitir energía eléctrica, el radio del conductor interior está determinado por la corriente de carga, y el tamaño total por el voltaje y el tipo de material aislante que se utilice. Suponga que el radio del conductor interno es $r_i = 2$ (mm) y que el material aislante es poliestireno. Determine el radio exterior, r_o , del conductor externo para que el cable funcione con especificación de voltaje de 10 (kV). Para evitar la ruptura debido a los picos de voltaje ocasionados por relámpagos y otras condiciones anómalas externas, la intensidad máxima de campo eléctrico en el material aislante no debe exceder el 25% de su rigidez dieléctrica.

SOLUCIÓN

En la tabla 3-1 hallamos la constante dieléctrica y la rigidez dieléctrica del poliestireno: 2.6 y 20×10^6 (V/m), respectivamente. La intensidad eléctrica debida a una línea de carga ρ_t es, de acuerdo con la ecuación (3-23),

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}_r E_r = \mathbf{a}_r \frac{\rho_t}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r r}. \quad (3-70)$$

Como el cable deberá soportar una diferencia de potencial de 10^4 V entre los conductores interno y externo, escribimos

$$10^4 = - \int_{r_o}^{r_i} E_r dr = \frac{\rho_t}{2\pi\epsilon_0(2.6)} \ln \frac{r_o}{r_i},$$

o

$$\ln \frac{r_o}{r_i} = \left(\frac{5.2\pi\epsilon_0}{\rho_t} \right) \times 10^4. \quad (3-71)$$

Para limitar la intensidad eléctrica a un valor máximo del 25% de 20×10^6 , imponemos que, de acuerdo con la ecuación (3-70),

$$\text{Máx } E_r = 0.25 \times (20 \times 10^6) = \frac{\rho_t}{2\pi\epsilon_0(2.6)r_i},$$

o sea

$$\begin{aligned} \left(\frac{\rho_t}{5.2\pi\epsilon_0} \right) &= (0.25 \times 20 \times 10^6)r_i = (5 \times 10^6) \times (2 \times 10^{-3}) \\ &= 10^4. \end{aligned}$$

Al sustituir el valor anterior en la ecuación (3-71) se obtiene $\ln(r_o/r_i) = 1$ o

$$\begin{aligned} \ln r_o &= 1 + \ln r_i = 1 + \ln(2 \times 10^{-3}) \\ &= 1 - 6.215 = -5.215. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$r_o = 0.0054 \text{ (m)} \text{ o } 5.4 \text{ (mm).}$$

■ EJERCICIO 3.9

Si reemplazara el poliestireno del cable coaxial del ejemplo 3-12 por aire, ¿cuál sería el máximo voltaje de funcionamiento en el cable? (Mantenga la restricción de que la intensidad máxima del campo no debe exceder el 25% de la rigidez dieléctrica del material aislante.)

RESPUESTA: 1.5 (kV).

■ EJERCICIO 3.10

Si desea que el voltaje de funcionamiento de un cable coaxial lleno de aire con radio $r_i = 2$ (mm) para el conductor interior mantenga el valor de 10 (kV) del ejemplo 3-9, ¿cuál debe ser el valor de r_o ?

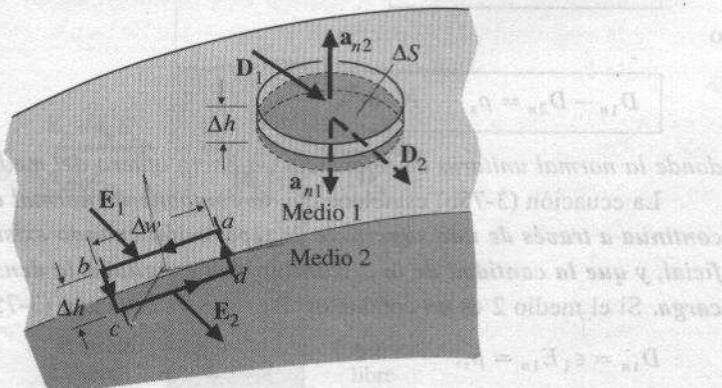
RESPUESTA: 1.571 (m).

3-8 CONDICIONES EN LA FRONTERA PARA CAMPOS ELECTROSTÁTICOS

Los problemas de electromagnetismo usualmente comprenden medios con distintas propiedades físicas, y es necesario conocer las relaciones de las cantidades de campo en la superficie de separación entre los dos medios. Por ejemplo, quizás queramos determinar cómo cambian los vectores \mathbf{E} y \mathbf{D} al cruzar una superficie de separación. Ya sabemos cuáles son las condiciones en la frontera que deben satisfacerse en una superficie de separación conductor-espacio libre (estas condiciones se presentaron en las ecuaciones (3-45) y (3-46)). Consideraremos ahora una superficie entre dos medios generales, como se ilustra en la figura 3-16.

Construyamos una trayectoria pequeña $abcd$ con lados ab y cd en el medio 1 y 2, respectivamente, ambos paralelos a la superficie de separación e iguales a Δw . Aplicamos la ecuación (3-7) a esta trayectoria. Si dejamos que los lados $bc = da = \Delta h$ se

FIGURA 3-16 Superficie de separación entre dos medios.



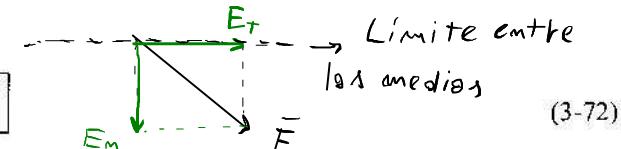
aproximen a cero, podemos ignorar sus contribuciones a la integral de línea de \mathbf{E} a lo largo de la trayectoria. Tenemos

$$\oint_{abcd} \mathbf{E} \cdot d\ell = \mathbf{E}_1 \cdot \Delta \mathbf{w} + \mathbf{E}_2 \cdot (-\Delta \mathbf{w}) = E_{1t} \Delta w - E_{2t} \Delta w = 0.$$

Por lo tanto,

Condición en la frontera de la componente tangencial de \mathbf{E}

$$E_{1t} = E_{2t}, \quad (\text{V/m}),$$



(3-72)

lo cual establece que *la componente tangencial de un campo \mathbf{E} es continua a través de una superficie de separación*. Cuando los medios 1 y 2 son dieléctricos con permitividades ϵ_1 y ϵ_2 , respectivamente, tenemos

$$\frac{D_{1t}}{\epsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\epsilon_2}. \quad (3-73)$$

Para hallar una relación entre las componentes normales de los campos en una frontera, construimos una pequeña caja circular con la cara superior en el medio 1 y la inferior en el medio 2, como se ilustra en la figura 3-16. Las caras tienen un área ΔS y la altura de la caja, Δh , es muy pequeña. Al aplicar a la caja la ley de Gauss, ecuación (3-65), tenemos

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} &= (\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{a}_{n2} + \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{a}_{n1}) \Delta S \\ &= \mathbf{a}_{n2} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \Delta S \\ &= \rho_s \Delta S, \end{aligned} \quad (3-74)$$

donde hemos usado la relación $\mathbf{a}_{n2} = -\mathbf{a}_{n1}$. Los vectores unitarios \mathbf{a}_{n1} y \mathbf{a}_{n2} son normales y dirigidos *hacia afuera* de los medios 1 y 2, respectivamente. A partir de la ecuación (3-74) obtenemos

$$\mathbf{a}_{n2} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_s, \quad (3-75a)$$

o

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_s, \quad (\text{C/m}^2), \quad (3-75b)$$

donde la normal unitaria de referencia va hacia afuera del medio 2.

Condición en la frontera de la componente normal de \mathbf{D}

La ecuación (3-75b) establece que *la componente normal del campo \mathbf{D} es discontinua a través de una superficie de separación cuando existe una carga superficial, y que la cantidad de la discontinuidad es igual a la densidad superficial de carga*. Si el medio 2 es un conductor, $\mathbf{D}_2 = 0$ y la ecuación (3-75b) se convierte en

$$D_{1n} = \epsilon_1 E_{1n} = \rho_s, \quad (3-76)$$

que se reduce a la ecuación (3-46) cuando el medio 1 es el espacio libre.

Cuando dos dieléctricos están en contacto *sin cargas libres* en la superficie de separación, $\rho_s = 0$ y tenemos

$$D_{1n} = D_{2n} \quad (3-77)$$

o sea

$$\epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n}. \quad (3-78)$$

En resumen, las condiciones en la frontera que deben satisfacer los campos eléctricos estáticos son:

Condiciones en la frontera para campos electrostáticos

Componentes tangenciales: $E_{1t} = E_{2t}$ (3-79)

Componentes normales: $\mathbf{a}_{n2} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_s.$? (3-80)

■ **EJERCICIO 3.11** Enuncie y explique las condiciones en la frontera que debe satisfacer el potencial eléctrico en una superficie de separación entre dieléctricos perfectos con constantes dieléctricas ϵ_{r1} y ϵ_{r2} .

RESPUESTA: $\epsilon_{r1} \partial V_1 / \partial n = \epsilon_{r2} \partial V_2 / \partial n, V_1 = V_2.$

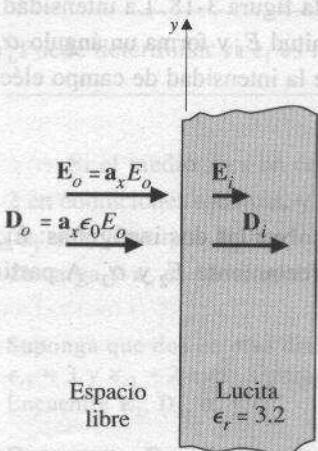
EJEMPLO 3-13

Se introduce perpendicularmente una lámina de lucita ($\epsilon_r = 3.2$) en un campo eléctrico uniforme $\mathbf{E}_o = a_x E_o$ en el espacio libre. Determine $\mathbf{E}_i, \mathbf{D}_i$ y \mathbf{P}_i dentro de la lucita.

SOLUCIÓN

Suponemos que la introducción de la lámina de lucita no perturba el campo eléctrico uniforme original \mathbf{E}_o . La situación se ilustra en la figura 3-17. Puesto que las

FIGURA 3-17 Lámina de lucita en un campo eléctrico uniforme (ejemplo 3-13).



superficies de separación son perpendiculares al campo eléctrico, sólo tenemos que considerar las componentes de campo normales. No hay cargas libres.

La condición en la frontera de la ecuación (3-77) para la superficie de separación izquierda nos indica

$$\mathbf{D}_i = \mathbf{a}_x D_i = \mathbf{a}_x D_o,$$

o sea

$$\mathbf{D}_i = \mathbf{a}_x \epsilon_0 E_o.$$

No hay cambio en la densidad de flujo eléctrico a través de la superficie de separación. La intensidad de campo eléctrico en la lámina de lucita es

$$\mathbf{E}_i = \frac{1}{\epsilon} \mathbf{D}_i = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r} \mathbf{D}_i = \mathbf{a}_x \frac{E_o}{3.2}.$$

Por consiguiente, el efecto de la lámina de lucita es reducir la intensidad eléctrica. El vector de polarización es cero fuera de la lámina de lucita ($\mathbf{P}_o = 0$); dentro de ésta,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_i &= \mathbf{D}_i - \epsilon_0 \mathbf{E}_i = \mathbf{a}_x \left(1 - \frac{1}{3.2}\right) \epsilon_0 E_o \\ &= \mathbf{a}_x 0.6875 \epsilon_0 E_o \quad (\text{C/m}^2). \end{aligned}$$

Es evidente que una aplicación similar de la condición en la frontera (3-77) en la superficie de separación derecha dará los valores originales E_o y \mathbf{D}_o en el espacio libre a la derecha de la lámina de lucita.

¿Cambiaría la solución a este problema si el campo eléctrico original no fuera uniforme, es decir, si $\mathbf{E}_o = \mathbf{a}_x E(y)$?

EJEMPLO 3-14

Dos medios dieléctricos con permitividades ϵ_1 y ϵ_2 están separados por una frontera libre de cargas, como se muestra en la figura 3-18. La intensidad de campo eléctrico en el punto P_1 del medio 1 tiene magnitud E_1 y forma un ángulo α_1 con la normal. Determine la magnitud y la dirección de la intensidad de campo eléctrico en el punto P_2 del medio 2.

SOLUCIÓN

Se requieren dos ecuaciones para resolver las dos incógnitas: E_{2n} y E_{2r} . Una vez determinados E_{2n} y E_{2r} se obtienen directamente E_2 y α_2 . A partir de las ecuaciones (3-72) y (3-77) tenemos

$$E_2 \sin \alpha_2 = E_1 \sin \alpha_1 \quad (E_{2+} = \epsilon_{1+}) \quad (3-81)$$

y

$$\epsilon_2 E_2 \cos \alpha_2 = \epsilon_1 E_1 \cos \alpha_1 \quad (D_{2m} = D_{1m}) \quad (3-82)$$

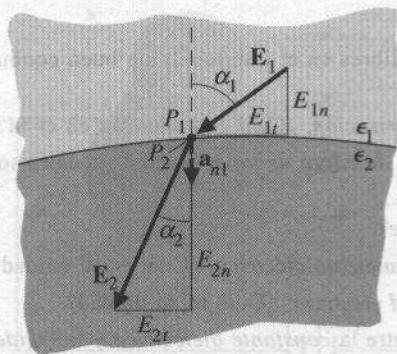


FIGURA 3-18 Condiciones en la frontera en la superficie de separación entre dos medios dielécticos (ejemplo 3-14).

Al dividir la ecuación (3-81) por la ecuación (3-82) se obtiene

determina $\alpha \leftarrow$

$$\frac{\tan \alpha_2}{\tan \alpha_1} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \rightarrow \tan(\alpha_2) = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \cdot \tan(\alpha_1) \quad \text{arctg} \quad (3-83)$$

$$\alpha_2 = \text{arctg} \left[\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \tan(\alpha_1) \right] \quad \frac{\pi}{2}$$

La magnitud de E_2 es

$$E_2 = \sqrt{E_{2t}^2 + E_{2n}^2} = \sqrt{(E_2 \sin \alpha_2)^2 + (E_2 \cos \alpha_2)^2}$$

$$= \left[(E_1 \sin \alpha_1)^2 + \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} E_1 \cos \alpha_1 \right)^2 \right]^{1/2},$$

o sea

determina $E_1 \leftarrow$

$$E_2 = E_1 \left[\sin^2 \alpha_1 + \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \cos \alpha_1 \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (3-84)$$

¿Puede determinar si ϵ_1 es mayor o menor que ϵ_2 con sólo examinar la figura 3-18?

$$\epsilon_1 > \epsilon_2$$

Si el medio 2 es un conductor, no puede haber un campo eléctrico en el medio 2 en condiciones estáticas, y E_1 en la frontera únicamente tiene una componente normal ($\alpha_1 = 0$). Tenemos $E_1 = a_n E_{1n} = a_n D_{1n}/\epsilon_1 = a_n \rho_s/\epsilon_1$, donde ρ_s es la densidad superficial de carga y a_n es la normal hacia afuera de la superficie del conductor.

EJERCICIO 3.12 Suponga que dos medios dielécticos isótropos homogéneos con constantes dieléctricas $\epsilon_{r1} = 3$ y $\epsilon_{r2} = 2$ están separados por el plano xy . En un punto común, $E_1 = a_x - a_y 5 - a_z 4$. Encuentre E_2 , D_2 , α_1 y α_2 .

RESPUESTA: $D_2 = 2\epsilon_0 E_2 = 2\epsilon_0 (a_x - a_y 5 - a_z 6)$, 51.9° , 40.4° .

PREGUNTAS DE REPASO

- P.3-11** ¿Por qué no hay cargas libres en el interior de un buen conductor en condiciones estáticas?
- P.3-12** Defina el *vector de polarización*. ¿Cuál es su unidad en el SI?
- P.3-13** ¿Qué son las *densidades de carga de polarización*? ¿Cuáles son las unidades en el SI de $\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_n$ y $\nabla \cdot \mathbf{P}$?
- P.3-14** ¿Qué es un *medio simple*?
- P.3-15** Defina el *vector desplazamiento eléctrico*. ¿Cuál es su unidad en el SI?
- P.3-16** Defina la *susceptibilidad eléctrica*. ¿Cuál es su unidad?
- P.3-17** ¿Cuál es la diferencia entre la *constante dieléctrica* y la *rigidez dieléctrica*?
- P.3-18** Explique el principio de funcionamiento de un pararrayos.
- P.3-19** ¿Cuáles son las condiciones en la frontera generales de \mathbf{E} y \mathbf{D} en la superficie de separación de dos medios dieléctricos diferentes con constantes dieléctricas ϵ_r y ϵ_{r2} ?
- P.3-20** ¿Cuáles son las condiciones en la frontera de los campos electrostáticos en la superficie de separación entre un conductor y un dieléctrico con permitividad ϵ ?
- P.3-21** ¿Cuál es la condición en la frontera del potencial electrostático en la superficie de separación entre dos medios dieléctricos distintos?

COMENTARIOS

1. El campo \mathbf{E} en el interior de un conductor es cero en condiciones estáticas.
2. La superficie de un conductor es equipotencial en condiciones estáticas y el campo \mathbf{E} es normal a la superficie en todos sus puntos.
3. El potencial eléctrico es continuo en la superficie de separación entre dos medios dieléctricos diferentes.
4. No confunda la constante dieléctrica de un medio, ϵ_r , con su permitividad, ϵ . La primera no tiene dimensiones; la unidad en el SI de la segunda es (F/m).

3-9 CAPACITANCIAS Y CONDENSAORES

En la sección 3-6 vimos que un conductor en un campo eléctrico estático es un cuerpo equipotencial y que las cargas depositadas en un conductor se distribuirán sobre su superficie de manera que desaparezca el campo eléctrico en su interior. Suponga que el potencial debido a una carga Q es V . Si se aumentara la carga total en un factor k se incrementaría la densidad superficial de carga ρ_s en el mismo factor en todos los puntos sin afectar la distribución de carga, ya que el conductor sigue siendo un cuerpo equipotencial en una situación estática. De la ecuación (3-39) podemos llegar a la conclusión de que el potencial de un conductor aislado es directamente proporcional a su carga total. Esto también puede verse del hecho de que al aumentar V en un factor

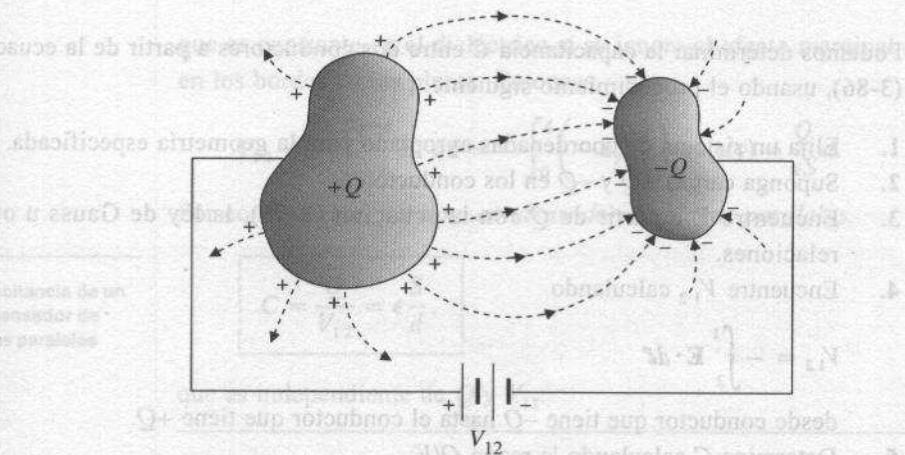


FIGURA 3-19 Un condensador de dos conductores.

k se incrementa $\mathbf{E} = -\nabla V$ en el mismo factor. Sin embargo, de la ecuación (3-46), $\mathbf{E} = \mathbf{a}_n \rho_s / \epsilon_0$; se desprende entonces que ρ_s , y por tanto la carga total Q , también aumentan en un factor de k . Por consiguiente, la razón Q/V no cambia. Escribimos

$$Q = CV, \quad (3-85)$$

donde la constante de proporcionalidad C se denomina **capacitancia** del cuerpo conductor aislado. Su unidad en el SI es el coulomb por volt o farad (F).

El **condensador** (o **capacitor**) es de gran importancia en la práctica y consiste en dos conductores separados por el espacio libre o por un medio dieléctrico. Los conductores pueden ser de forma arbitraria, como en la figura 3-19. Cuando se conecta una fuente de voltaje de corriente continua entre los conductores, ocurre una transferencia de carga que produce una carga $+Q$ en un conductor y $-Q$ en el otro. En la figura 3-19 se muestran varias líneas de campo eléctrico que se originan de las cargas positivas y terminan en las cargas negativas. Observe que las líneas de campo son perpendiculares a las superficies de los conductores, las cuales son superficies equipotenciales. Podemos aplicar la ecuación (3-85) en esta situación si consideramos que V es la diferencia de potencial entre los dos conductores, V_{12} . Es decir,

$$C = \frac{Q}{V_{12}} \quad (\text{F}). \quad (3-86)$$

Definición de la
capacitancia

La capacitancia de un condensador es una propiedad física de un sistema de dos conductores. Depende de la geometría del condensador y de la permitividad del medio.

Procedimiento para determinar C

Podemos determinar la capacitancia C entre dos conductores a partir de la ecuación (3-86), usando el procedimiento siguiente:

1. Elija un sistema de coordenadas apropiado para la geometría especificada.
2. Suponga cargas $+Q$ y $-Q$ en los conductores.
3. Encuentre \mathbf{E} a partir de Q con la ecuación (3-76), la ley de Gauss u otras relaciones.
4. Encuentre V_{12} calculando

$$V_{12} = - \int_2^1 \mathbf{E} \cdot d\ell$$

desde conductor que tiene $-Q$ hasta el conductor que tiene $+Q$.

5. Determine C calculando la razón Q/V_{12} .

EJEMPLO 3-15

Un condensador de placas paralelas consiste en dos placas conductoras paralelas de área S separadas por una distancia uniforme d . El espacio entre las placas se llena con un dieléctrico de permitividad constante ϵ . Determine la capacitancia.

SOLUCIÓN

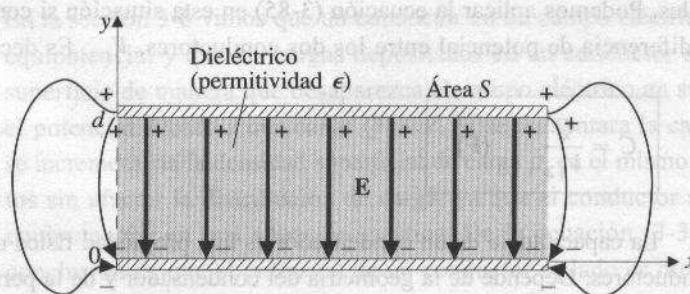
En la figura 3-20 se muestra un corte transversal del condensador. El sistema de coordenadas apropiado para este ejemplo es el cartesiano. Siguiendo el procedimiento previamente descrito, colocamos cargas $+Q$ y $-Q$ en las placas conductoras superior e inferior, respectivamente. Suponemos que las cargas se distribuyen de manera uniforme en las placas conductoras, con densidades superficiales $+\rho_s$ y $-\rho_s$, donde

$$\rho_s = \frac{Q}{S}$$

A partir de la ecuación (3-76) tenemos

$$\mathbf{E} = -\mathbf{a}_y \frac{\rho_s}{\epsilon} = -\mathbf{a}_y \frac{Q}{\epsilon S},$$

FIGURA 3-20 Corte transversal de un condensador de placas paralelas (ejemplo 3-15).



que es constante en el dieléctrico si se ignora el efecto marginal del campo eléctrico en los bordes de las placas. Entonces,

$$(3-8) \quad V_{12} = - \int_{y=0}^{y=d} \mathbf{E} \cdot d\ell = - \int_0^d \left(-\mathbf{a}_y \frac{Q}{\epsilon S} \right) \cdot (\mathbf{a}_y dy) = \frac{Q}{\epsilon S} d.$$

Por consiguiente, para un condensador de placas paralelas,

$$C = \frac{Q}{V_{12}} = \epsilon \frac{S}{d}, \quad (3-87)$$

Capacitancia de un condensador de placas paralelas

que es independiente de Q y V_{12} .

- **EJERCICIO 3.13** Determine la capacitancia del condensador de placas paralelas de la figura 3-20 comenzando con una diferencia de potencial supuesta V_{12} entre las placas superior e inferior, para luego determinar Q y calcular la razón Q/V_{12} .

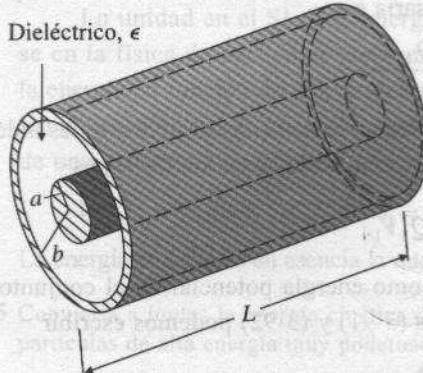
EJEMPLO 3-16

Un condensador cilíndrico, ilustrado en la figura 3-21, consiste en un conductor interno con radio a y un conductor externo con radio interior b . El espacio entre los conductores está lleno de un dieléctrico con permitividad ϵ y la longitud del condensador es L . Determine la capacitancia del condensador.

SOLUCIÓN

Para este problema usamos coordenadas cilíndricas. Primero suponemos cargas $+Q$ y $-Q$ en la superficie del conductor interno y la superficie interna del conductor externo, respectivamente. El campo \mathbf{E} del dieléctrico puede obtenerse aplicando la ley

FIGURA 3-21 Condensador cilíndrico (ejemplos 3-16 y 3-19).



de Gauss a la superficie gaussiana cilíndrica en el dieléctrico $a < r < b$. Si observamos que $\rho_\ell = Q/L$, tenemos, a partir de la ecuación (3-23),

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}_r E_r = \mathbf{a}_r \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L r}. \quad (3-88)$$

Ignoramos una vez más los efectos marginales del campo cerca de los bordes de los conductores. La diferencia de potencial entre los conductores interno y externo es

$$\begin{aligned} V_{ab} &= - \int_{r=b}^{r=a} \mathbf{E} \cdot d\ell = - \int_b^a \left(\mathbf{a}_r \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L r} \right) \cdot (\mathbf{a}_r dr) \\ &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln\left(\frac{b}{a}\right). \end{aligned} \quad (3-89)$$

Por lo tanto, para un condensador cilíndrico,

Capacitancia de un condensador cilíndrico

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}. \quad (3-90)$$

EJERCICIO 3.14 Suponga que la Tierra es una esfera conductora de gran tamaño (radio = 6.37×10^3 km) rodeada por aire. Encuentre su capacitancia referida al infinito.

RESPUESTA: 7.08×10^{-4} (F).

3-10 ENERGÍA Y FUERZAS ELECTROSTÁTICAS

En la sección 3-5 indicamos que el potencial eléctrico en un punto de un campo eléctrico es el trabajo necesario para traer una unidad de carga positiva desde el infinito (potencial de referencia cero) a dicho punto. Para traer una carga Q_2 (lentamente, de manera que puedan ignorarse la energía cinética y los efectos de radiación) desde el infinito *contra* el campo creado por una carga Q_1 en el espacio libre hasta una distancia R_{12} , la cantidad de trabajo necesaria es

$$W_2 = Q_2 V_2 = Q_2 \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{12}}. \quad (3-91)$$

Puesto que los campos electrostáticos son conservativos, W_2 es independiente de la trayectoria que sigue Q_2 . Otra forma de la ecuación (3-91) es

$$W_2 = Q_1 \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{12}} = Q_1 V_1. \quad (3-92)$$

Este trabajo se almacena como energía potencial en el conjunto de las dos cargas. Combinando las ecuaciones (3-91) y (3-92) podemos escribir

$$W_2 = \frac{1}{2}(Q_1 V_1 + Q_2 V_2). \quad (3-93)$$

Suponga ahora que se trae otra carga Q_3 desde el infinito hasta un punto que está a una distancia R_{13} de Q_1 y R_{23} de Q_2 ; se necesita un trabajo adicional igual a

$$\Delta W = Q_3 V_3 = Q_3 \left(\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{13}} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{23}} \right). \quad (3-94)$$

La suma de ΔW en la ecuación (3-94) y W_2 en la ecuación (3-91) es la energía potencial, W_3 , almacenada en el conjunto de las tres cargas Q_1 , Q_2 y Q_3 . Es decir,

$$W_3 = W_2 + \Delta W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1 Q_2}{R_{12}} + \frac{Q_1 Q_3}{R_{13}} + \frac{Q_2 Q_3}{R_{23}} \right). \quad (3-95)$$

Podemos reescribir W_3 de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} W_3 &= \frac{1}{2} \left[Q_1 \left(\frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{12}} + \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 R_{13}} \right) + Q_2 \left(\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{12}} + \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 R_{23}} \right) \right. \\ &\quad \left. + Q_3 \left(\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{13}} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{23}} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2}(Q_1 V_1 + Q_2 V_2 + Q_3 V_3). \end{aligned} \quad (3-96)$$

En la ecuación (3-96), V_1 , el potencial en la posición de Q_1 , se debe a las cargas Q_2 y Q_3 ; es *diferente* de V_1 en la ecuación (3-92), para el caso de dos cargas. De forma similar, V_2 y V_3 son los potenciales de Q_2 y Q_3 , respectivamente, en el conjunto de tres cargas.

Si extendemos este procedimiento para incorporar cargas adicionales, llegamos a la siguiente expresión general de la energía potencial de un grupo de N cargas puntuales discretas en reposo. (El propósito del subíndice e en W_e es indicar que la energía es de naturaleza eléctrica.) Tenemos

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N Q_k V_k \quad (\text{J}), \quad (3-97)$$

donde V_k , el potencial eléctrico en Q_k , se debe a las demás cargas.

La unidad en el SI de la energía, el *joule* (J), es demasiado grande para usarse en la física de partículas elementales, de manera que es más conveniente medir la energía en función de una unidad mucho más pequeña, llamada *electrón-volt* (eV). Un electrón-volt es la energía o el trabajo necesario para mover un electrón en contra de una diferencia de potencial de un volt.

$$1 \text{ (eV)} = (1.60 \times 10^{-19}) \times 1 = 1.60 \times 10^{-19} \text{ (J)}. \quad (3-98)$$

La energía en (eV) es en esencia la que se expresa en (J) por unidad de carga electrónica.

Energía eléctrica almacenada en un sistema de cargas puntuales discretas

Relación entre un joule y un electrón-volt

■ **EJERCICIO 3.15** Convierta a joules la energía cinética de 2 (TeV) del haz de protones de un acelerador de partículas de alta energía muy poderoso.

RESPUESTA: 3.20×10^{27} (J).

■ **EJERCICIO 3.16** Determine la cantidad de energía necesaria para situar tres cargas puntuales, $-1 \text{ } (\mu\text{C})$, $2 \text{ } (\mu\text{C})$ y $3 \text{ } (\mu\text{C})$, en los vértices de un triángulo equilátero con lados de 10 (cm) en el espacio libre.

RESPUESTA: 0.09 (J) .

EJEMPLO 3-17

Encuentre la energía necesaria para formar una esfera de carga uniforme con radio b y densidad volumétrica de carga ρ_v .

SOLUCIÓN

Debido a la simetría, lo más sencillo es suponer que la esfera de carga se forma a partir de una sucesión de capas esféricas de grosor dR . Para el radio R ilustrado en la figura 3-22, el potencial es

$$V_R = \frac{Q_R}{4\pi\epsilon_0 R},$$

donde Q_R es la carga total contenida en una esfera de radio R :

$$Q_R = \rho_v \frac{4}{3}\pi R^3.$$

La carga diferencial en la capa esférica de grosor dR es

$$dQ_R = \rho_v 4\pi R^2 dR,$$

y el trabajo o la energía para llegar a dQ_R es

$$dW_e = V_R dQ_R = \frac{4\pi}{3\epsilon_0} \rho_v^2 R^4 dR.$$

Por consiguiente, el trabajo o la energía total para formar una esfera de carga uniforme de radio b y densidad de carga ρ_v es

$$W_e = \int dW_e = \frac{4\pi}{3\epsilon_0} \rho_v^2 \int_0^b R^4 dR = \frac{4\pi\rho_v^2 b^5}{15\epsilon_0} \quad (3-99)$$

En función de la carga total

$$Q = \rho_v \frac{4}{3}\pi b^3,$$

tenemos

$$W_e = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 b} \quad (3-100)$$

La ecuación (3-100) nos indica que la energía es directamente proporcional al cuadrado de la carga total. La esfera de carga de la figura 3-22 puede ser, por ejemplo, una nube de electrones.

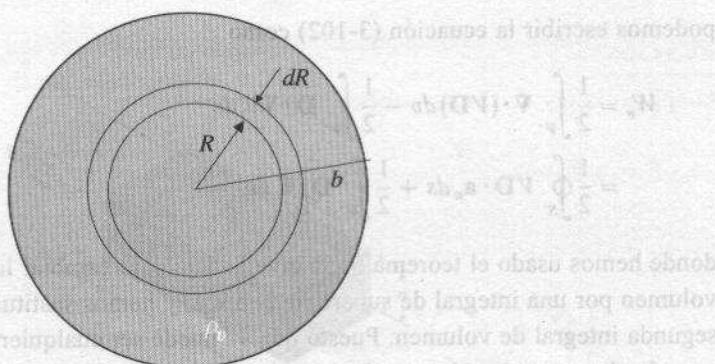


FIGURA 3-22 Formación de una esfera de carga uniforme (ejemplo 3-17).

Es necesario modificar la fórmula de W_e de la ecuación (3-97) para cargas discretas si existe una distribución de carga continua con densidad ρ_v . Para no tener que pasar por una demostración aparte, sustituimos Q_k por $\rho_v dv$ y la sumatoria por una integración, para obtener

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \rho_v V dv \quad (J)$$
(3-101)

Energía eléctrica almacenada en una distribución de carga continua

En la ecuación (3-101), V es el potencial en el punto donde la densidad volumétrica de carga es ρ_v y V' es el volumen de la región donde existe ρ_v . Observe que el valor de W_e en la ecuación (3-101) incluye el trabajo (energía propia) necesario para formar la distribución de cargas macroscópicas, ya que es la energía de la interacción entre cada elemento de carga infinitesimal y todos los otros elementos de carga infinitesimales.

3-10.1 ENERGÍA ELECTROSTÁTICA EN TÉRMINOS DE CANTIDADES DE CAMPO

La expresión de la energía electrostática de una distribución de carga en la ecuación (3-101) contiene la densidad de carga fuente ρ_v y la función de potencial V . En muchos casos es más conveniente contar con una expresión de W_e en términos de las cantidades de campo \mathbf{E} o \mathbf{D} , sin tener que conocer ρ_v de manera explícita. Para ello, sustituimos ρ_v por $\nabla \cdot \mathbf{D}$ en la ecuación (3-101):

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V (\nabla \cdot \mathbf{D}) V dv. \quad (3-102)$$

Después, usando la identidad vectorial (Prob. P.2-25), ecuación (2-114),

$$\nabla \cdot (\mathbf{V} \mathbf{D}) = \mathbf{V} \nabla \cdot \mathbf{D} + \mathbf{D} \cdot \nabla \mathbf{V}, \quad (3-103)$$

podemos escribir la ecuación (3-102) como

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{2} \int_{V'} \nabla \cdot (V \mathbf{D}) dv - \frac{1}{2} \int_{V'} \mathbf{D} \cdot \nabla V dv \\ &= \frac{1}{2} \oint_S V \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} ds + \frac{1}{2} \int_{V'} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv, \end{aligned} \quad (3-104)$$

donde hemos usado el teorema de la divergencia para cambiar la primera integral de volumen por una integral de superficie cerrada, y hemos sustituido \mathbf{E} por $-\nabla V$ en la segunda integral de volumen. Puesto que V' puede ser cualquier volumen que incluya todas las cargas, podemos elegirlo de manera que sea una esfera muy grande con radio R . Conforme $R \rightarrow \infty$, el potencial eléctrico V y la magnitud del desplazamiento eléctrico D disminuyen según $1/R$ y $1/R^2$, respectivamente.[†] El área de la superficie limitadora S' aumenta a razón de R^2 . Por lo tanto, la integral de superficie de la ecuación (3-104) decrece al menos con una razón de $1/R$ y desaparecerá conforme $R \rightarrow \infty$. De esta manera, sólo nos queda la segunda integral del lado derecho de la ecuación (3-104):

Energía eléctrica en términos de \mathbf{E} y \mathbf{D}

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{V'} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv \quad (J). \quad (3-105)$$

Usando la relación $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ para un medio lineal e isótropo, podemos escribir W_e exclusivamente en términos de \mathbf{E} .

Energía eléctrica en términos de \mathbf{E} y ϵ

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{V'} \epsilon E^2 dv \quad (J). \quad (3-106)$$

También podemos definir la **densidad de energía electrostática** w_e de manera que su integral de volumen sea igual a la energía electrostática total:

$$W_e = \int_{V'} w_e dv, \quad (3-107)$$

donde

?? No me gustaron tantas
estas pitufetas

No es un circo esto

Tampoco me dice
mucho esta ecuación

¿Qué es w_e ?

El problema de este libro(y creo que
de esta materia): no te explican un choto.
¿Qué es esta fórmula? ¿Qué me dice? ¿Por qué
es importante? ¿Cómo se lee?

$$w_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \quad (\text{J/m}^3).$$

(3-108)

EJEMPLO 3-18

Objetivo Tenga sentido En la figura 3-23, un condensador de placas paralelas con área S y separación d se carga con un voltaje V . La permitividad del dieléctrico es ϵ . Encuentre la energía electrostática almacenada.

[†] Para cargas puntuales, $V \propto 1/R$ y $D \propto 1/R^2$; para dipolos, $V \propto 1/R^2$ y $D \propto 1/R^3$.

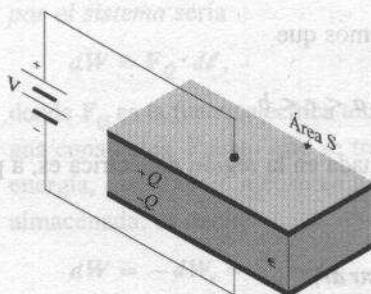


FIGURA 3-23

SOLUCIÓN

Con la fuente de corriente continua (baterías) conectada en la forma ilustrada, las placas superior e inferior tienen carga positiva y negativa, respectivamente. Si ignoramos los efectos marginales del campo en los bordes, el campo eléctrico en el dieléctrico es uniforme (sobre la placa) y constante (a través del dieléctrico) y tiene una magnitud de

$$E = \frac{V}{d}$$

Utilizando la ecuación (3-106), tenemos

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \epsilon \left(\frac{V}{d}\right)^2 dv = \frac{1}{2} \epsilon \left(\frac{V}{d}\right)^2 (Sd) = \frac{1}{2} \left(\epsilon \frac{S}{d}\right) V^2. \quad (3-109)$$

La cantidad entre paréntesis en la última expresión, $\epsilon S/d$, es la capacitancia del condensador de placas paralelas (véase la Ec. 3-87). Por consiguiente,

$$W_e = \frac{1}{2} CV^2 \quad (\text{J.})$$

→ ¿Para esto sirve esa fórmula? ¿Para sacar la energía del capacitor?

(3-110)

En el ejemplo siguiente se ilustra la forma de usar la ecuación (3-110) junto con la ecuación (3-106) para determinar capacitancias.

EJEMPLO 3-19

Utilice las fórmulas de energía (3-106) y (3-110) para hallar la capacitancia de un condensador cilíndrico que tiene una longitud L , un conductor interior de radio a , un conductor externo con radio interior b y un dieléctrico con permitividad ϵ , como se muestra en la figura 3-21.

SOLUCIÓN

Al aplicar la ley de Gauss, sabemos que

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}_r E_r = \mathbf{a}_r \frac{Q}{2\pi\epsilon L r}, \quad a < r < b.$$

La energía electrostática almacenada en la región dieléctrica es, a partir de la ecuación (3-106),

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{2} \int_a^b \epsilon \left(\frac{Q}{2\pi\epsilon L r} \right)^2 (L 2\pi r dr) \\ &= \frac{Q^2}{4\pi\epsilon L} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon L} \ln\left(\frac{b}{a}\right). \end{aligned} \quad (3-111)$$

Por otra parte, podemos expresar W_e en función de la capacitancia C . A partir de las ecuaciones (3-110) y (3-111) tenemos

$$W_e = \frac{C}{2} \left(\frac{Q}{C} \right)^2 = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon L} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Despejando C obtenemos

$$C = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)},$$

lo mismo que se obtuvo en la ecuación (3-90).

- **EJERCICIO 3.17** Se conectan en serie dos condensadores con capacitancias de 20 (μF) y 40 (μF) a una batería de 60 (V). Calcule la energía almacenada en cada condensador.

RESPUESTA: 16 (mJ), 8 (mJ).

3-10.2 FUERZAS ELECTROSTÁTICAS

La ley de Coulomb rige la fuerza entre dos cargas puntuales. En un sistema más complejo de cuerpos cargados sería muy tedioso usar la ley de Coulomb para determinar la fuerza ejercida sobre uno de los cuerpos por las cargas de los demás. Esta situación se presenta incluso en el sencillo caso de la determinación de la fuerza entre las placas de un condensador de placas paralelas cargado. A continuación analizaremos un método para calcular la fuerza sobre un objeto en un sistema de cargas a partir de la energía electrostática del sistema. Este método se basa en el **principio de desplazamiento virtual**.

Consideraremos un *sistema aislado* de cuerpos conductores cargados y dieléctricos separados entre sí sin conexión con el mundo exterior. Las cargas de los cuerpos son constantes. Imagine que las fuerzas electrostáticas han desplazado uno de los cuerpos

Para ese
servir?

una distancia diferencial $d\ell$ (un desplazamiento virtual). El trabajo mecánico realizado por el sistema sería

$$dW = \mathbf{F}_Q \cdot d\ell, \quad (3-112)$$

donde \mathbf{F}_Q es la fuerza eléctrica total que actúa sobre el cuerpo en las condiciones de cargas constantes. Puesto que se trata de un sistema aislado sin suministro externo de energía, este trabajo mecánico debe realizarse a expensas de la energía electrostática almacenada; es decir,

$$dW = -dW_e = \mathbf{F}_Q \cdot d\ell. \quad (3-113)$$

En la ecuación (2.51) de la sección 2-5 se observa que el cambio diferencial de un escalar ocasionado por un cambio en posición $d\ell$ es el producto punto del gradiente del escalar y $d\ell$; escribimos entonces

$$dW_e = (\nabla W_e) \cdot d\ell. \quad (3-114)$$

Puesto que $d\ell$ es arbitrario, comparando las ecuaciones (3-113) y (3-114) tenemos la siguiente relación.

$$\boxed{\mathbf{F}_Q = -\nabla W_e} \quad (N). \quad \text{WHAT} \quad \text{Se y este: ??} \quad (3-115)$$

La ecuación vectorial (3-115) es en realidad tres ecuaciones en el espacio tridimensional. Por ejemplo, la fuerza en la dirección x en coordenadas cartesianas es

$$(F_Q)_x = -\frac{\partial W_e}{\partial x}. \quad \begin{matrix} \text{¿ Una fuerza como derivada de} \\ \text{la energía? } \end{matrix} \quad (3-116)$$

El procedimiento es similar para las otras direcciones.

Determinación de la fuerza electrostática sobre cuerpos cargados, usando el método del desplazamiento virtual

EJEMPLO 3-20

Determine la fuerza sobre las placas conductoras de un condensador de placas paralelas cargado, cuyas placas tienen un área S y están separadas una distancia x por aire.

SOLUCIÓN

Suponemos que hay cargas fijas $\pm Q$ en las placas y usamos la ecuación (3-110) para escribir la energía eléctrica almacenada como

$$W_e = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV. \quad (3-117)$$

Si ignoramos el efecto marginal, existe una intensidad de campo eléctrico constante \mathbf{E} entre las placas, donde

$$\mathbf{E} = -\mathbf{a}_x \frac{\rho_s}{\epsilon_0} = -\mathbf{a}_x \frac{Q}{\epsilon_0 S}. \quad (3-118)$$

La diferencia de potencial V entre las placas superior e inferior es

$$V = - \int_{\text{Placa inferior}}^{\text{Placa superior}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_x dx = \frac{Q}{\epsilon_0 S} x. \quad (3-119)$$

Al sustituir en la ecuación (3-117) el valor de V obtenido en la ecuación (3-119), para luego usar la ecuación (3-116), obtenemos

$$(F_Q)_x = - \frac{Q}{2} \frac{\partial V}{\partial x} = - \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S}. \quad (3-120)$$

El signo negativo de la ecuación (3-120) indica que la fuerza es opuesta a la dirección de incremento de x .

PREGUNTAS DE REPASO

P.3-22 Defina la *capacitancia* y un *condensador*.

P.3-23 Escriba la fórmula de capacitancia de un condensador de placas paralelas de área S donde las placas están separadas por un medio con constante dieléctrica ϵ , y espesor d .

P.3-24 ¿Cuál es la definición de un *electrón-volt*? ¿Cómo se compara con un *joule*?

P.3-25 Escriba la expresión de la energía electrostática en términos de E .

P.3-26 Analice el significado y el uso del *principio del desplazamiento virtual*.

COMENTARIOS

1. La capacitancia de un condensador es independiente de la carga en los conductores y de la diferencia de potencial entre ellos.
2. La energía electrostática almacenada en un sistema de cargas discretas puede ser positiva o negativa.
3. La ecuación (3-105) para la energía es válida para un medio general, pero la ecuación (3-106) sólo se aplica a un medio lineal e isótropo.
4. Es posible demostrar que la fórmula de la energía electrostática almacenada dada por la ecuación (3-110) no sólo es válida para condensadores de placas paralelas, sino también para cualquier sistema de dos conductores.

3-11 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ELECTROSTÁTICOS CON VALORES EN LA FRONTERA

En este capítulo hemos visto técnicas para determinar la intensidad de campo eléctrico, el potencial eléctrico y la densidad de flujo eléctrico de distribuciones de carga. Sin embargo, en muchos problemas prácticos no se conoce la distribución de carga exacta en todos los puntos y no es posible aplicar de forma directa las fórmulas desarrolladas hasta ahora. Por ejemplo, si se especifican las cargas en ciertos puntos discretos

del espacio y los potenciales de algunos cuerpos conductores, es bastante difícil hallar la distribución de las cargas superficiales en los cuerpos conductores o la intensidad del campo eléctrico en el espacio. En esta sección analizaremos algunos métodos para resolver problemas en los que se especifican las condiciones en la frontera conductor-espacio libre (o dieléctrico). Estos tipos de problemas se conocen como *problemas con valores en la frontera (o con condiciones de contorno)*. Primero formularemos las ecuaciones diferenciales que rigen el potencial eléctrico en una situación electrostática.

3-11.1 ECUACIONES DE POISSON Y DE LAPLACE

En la sección 3-7 señalamos que las ecuaciones (3-63) y (3-4) son las ecuaciones diferenciales fundamentales que rigen la electrostática en cualquier medio. A continuación repetimos estas ecuaciones:

$$\text{Ec. (3-63): } \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v. \quad (3-121)$$

$$\text{Ec. (3-4): } \nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (3-122)$$

La naturaleza irrotacional de \mathbf{E} , indicada por la ecuación (3-122), nos permite definir un potencial eléctrico escalar V , como en la ecuación (3-26).

$$\text{Ec. (3-26): } \mathbf{E} = -\nabla V. \quad (3-123)$$

En un medio lineal e isótropo, $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ y la ecuación (3-121) se convierte en

$$\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = \rho_v. \quad (3-124)$$

Al sustituir la ecuación (3-123) en la ecuación (3-124) se obtiene

$$\nabla \cdot (\epsilon \nabla V) = -\rho_v. \quad (3-125)$$

donde ϵ puede ser una función de la posición. En el caso de un medio simple (es decir, un medio que también es homogéneo), ϵ es constante y puede sacarse de la operación de divergencia. De esta manera tenemos

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon}$$

$\nabla \rightarrow$ Potencial

$\nabla \cdot \nabla \rightarrow$ Gradiente de V , $-\bar{E}$

$\nabla \cdot (\bar{\nabla} \cdot \nabla) = \nabla^2 \nabla \rightarrow$ Divergencia del gradiente

BS: $\nabla^2 V \in \mathbb{R}$

(3-126)

Ecuación de Poisson en forma de operador

En la ecuación (3-126) se ha introducido un operador nuevo, ∇^2 (del cuadrado), el *operador laplaciano* que representa "la divergencia del gradiente de" o $\nabla \cdot \nabla$. La ecuación (3-126) se conoce como *ecuación de Poisson*. En coordenadas cartesianas,

$$\nabla^2 V = \nabla \cdot \nabla V = \left(\mathbf{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\mathbf{a}_x \frac{\partial V}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial V}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{\partial V}{\partial z} \right),$$

y la ecuación (3-126) se convierte en

Ecuación de Poisson en coordenadas cartesianas

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho_v}{\epsilon} \quad (\text{V/m}^2). \quad (3-127)$$

De forma similar, podemos usar las ecuaciones (2-70) y (2-57) para verificar las siguientes expresiones de $\nabla^2 V$ en coordenadas cilíndricas y esféricas.

Coordenadas cilíndricas:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}. \quad (3-128)$$

Coordenadas esféricas:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial V}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}. \quad (3-129)$$

La resolución de la ecuación de Poisson en tres dimensiones sujeta a condiciones en la frontera prescritas normalmente no es una tarea sencilla.

En aquellos puntos de un medio simple donde no hay cargas libres, $\rho_v = 0$ y la ecuación (3-126) se reduce a

Ecuación de Laplace en forma de operador

$$\nabla^2 V = 0, \quad (3-130)$$

que se conoce como *ecuación de Laplace*. La ecuación de Laplace ocupa un lugar muy importante en el electromagnetismo. En coordenadas cartesianas tenemos

Ecuación de Laplace en coordenadas cartesianas

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \quad (3-131)$$

3-11.2 PROBLEMAS CON VALORES EN LA FRONTERA EN COORDENADAS CARTESIANAS

El caso más sencillo es cuando V es una función de una sola coordenada. Ilustraremos esta situación con un ejemplo.

EJEMPLO 3-21

Dos placas conductoras paralelas están separadas por una distancia d y se mantienen a potenciales de 0 y V_0 , como se ilustra en la figura 3-24. La región entre las placas está llena con una distribución continua de electrones que tiene densidad volumétrica de carga $\rho_v = -\rho_0 y/d$. Suponga que el efecto marginal en los bordes es insignificante y determine

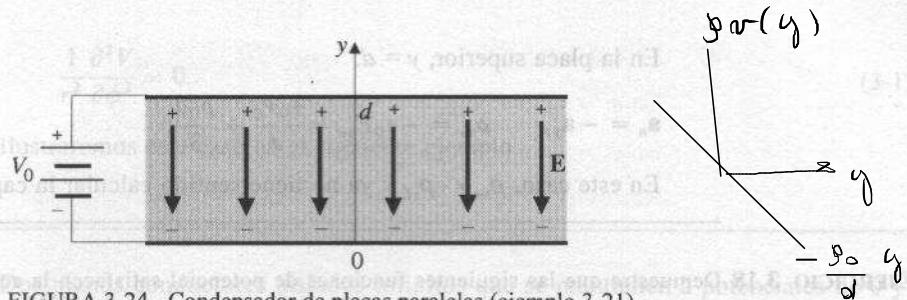


FIGURA 3-24 Condensador de placas paralelas (ejemplo 3-21).

- a) el potencial en cualquier punto entre las placas, y
 b) las densidades superficiales de carga en las placas.

SOLUCIÓN

- a) La ecuación determinante es la ecuación de Poisson (3-127), que se simplifica a

$$\frac{d^2V(y)}{dy^2} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0 d} y. \quad (3-132)$$

Al integrar dos veces la ecuación (3-132) tenemos

$$V(y) = \frac{\rho_0}{6\epsilon_0 d} y^3 + C_1 y + C_2. \quad (3-133)$$

Las condiciones en la frontera sobre las dos placas conductoras son:

$$\text{En } y = 0, \quad V = 0 = C_2.$$

$$\text{En } y = d, \quad V = V_0 = \frac{\rho_0 d^2}{6\epsilon_0} + C_1 d, \quad C_1 = \frac{V_0}{d} - \frac{\rho_0 d}{6\epsilon_0}. \quad (3-134)$$

Al sustituir los valores anteriores de C_1 y C_2 en la ecuación (3-133) obtenemos la solución de la ecuación de Poisson (3-132).

$$V(y) = \frac{\rho_0}{6\epsilon_0 d} y^3 + \left(\frac{V_0}{d} - \frac{\rho_0 d}{6\epsilon_0} \right) y. \quad (3-135)$$

La intensidad de campo eléctrico es $-\nabla V$.

$$\mathbf{E}(y) = -\mathbf{a}_y \frac{\partial V}{\partial y} = -\mathbf{a}_y \left[\frac{\rho_0}{2\epsilon_0 d} y^2 + \left(\frac{V_0}{d} - \frac{\rho_0 d}{6\epsilon_0} \right) \right]. \quad (3-135)$$

- b) Las densidades superficiales de carga sobre las placas conductoras pueden determinarse de la condición en la frontera expresada por la ecuación (3-46).

En la placa inferior, $y = 0$.

$$\mathbf{a}_n = \mathbf{a}_y, \quad \rho_{sf} = \epsilon_0 E_{y'} = -\frac{\epsilon_0 V_0}{d} + \frac{\rho_0 d}{6}.$$

En la placa superior, $y = d$.

$$\mathbf{a}_n = -\mathbf{a}_y, \quad \rho_{su} = -\epsilon_0 E_{yu} = \frac{\epsilon_0 V_0}{d} + \frac{\rho_0 d}{3}.$$

En este caso, $\rho_{su} \neq -\rho_{st}$ y ya no tiene sentido calcular la capacitancia.

■ **EJERCICIO 3.18** Demuestre que las siguientes funciones de potencial satisfacen la ecuación bidimensional de Laplace:

a) $Ae^{-kx} \sin ky$, y

b) $A \sin\left(\frac{n\pi}{b}x\right) \cosh\left[\frac{n\pi}{b}(a-y)\right]$. *Oh hell man*

donde A , k , a y b son constantes.

3-11.3 PROBLEMAS CON VALORES EN LA FRONTERA EN COORDENADAS CILÍNDRICAS

La ecuación de Laplace para el potencial eléctrico escalar V en coordenadas cilíndricas es, a partir de la ecuación (3-128)

Ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \quad (3-136)$$

Es bastante complicado obtener una solución general de la ecuación (3-136). En aquellos casos donde hay simetría cilíndrica ($\partial^2 V / \partial \phi^2 = 0$) y la dimensión longitudinal es muy grande en comparación con el radio ($\partial^2 V / \partial z^2 \gg 0$); la ecuación (3-136) se reduce a

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) = 0, \quad \int dr \rightarrow r \frac{dV}{dr} = C_1 \rightarrow \frac{dV}{dr} = C_1/r \quad \int dr \rightarrow V(r) = C_1 \ln r + C_2 \quad (3-137)$$

y V es función únicamente de la dimensión radial r . La ecuación (3-137) puede integrarse dos veces para dar

$$V(r) = C_1 \ln r + C_2, \quad (3-138)$$

donde las constantes de integración C_1 y C_2 están determinadas por las condiciones en la frontera de los problemas.

■ **EJERCICIO 3.19** El radio del conductor interno de un largo cable coaxial es a . El radio interior del conductor externo es b . Si los conductores interior y exterior se mantienen a potenciales de V_0 y 0, respectivamente, determine el potencial eléctrico y la intensidad de campo eléctrico en el material aislante resolviendo la ecuación de Laplace.

RESPUESTA: $V = V_0 \ln(b/r)/\ln(b/a)$, $\mathbf{E} = \mathbf{a}_r V_0/r \cdot \ln(b/a)$.

Si el problema es tal que el potencial eléctrico sólo cambia en la dirección circular y no en las direcciones r y z , la ecuación (3-136) se reduce a

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0. \quad (3-139)$$

Ilustraremos este caso en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3-22

Dos planos conductores aislados infinitos que se mantienen a potenciales de 0 y V_0 constituyen una configuración en forma de cuña, como se ilustra en la figura 3-25. Determine las distribuciones de potencial en las regiones:

- a) $0 < \phi < \alpha$, y
- b) $\alpha < \phi < 2\pi$.

SOLUCIÓN

Tenemos $\partial V / \partial r = 0$ y $\partial V / \partial z = 0$. Puesto que se excluye la región en $r = 0$, la ecuación (3-139) se convierte en

$$\frac{d^2 V}{d\phi^2} = 0. \quad (3-140)$$

V sólo depende de ϕ y puede obtenerse de la ecuación (3-140) integrando dos veces.

$$V(\phi) = K_1\phi + K_2. \quad (3-141)$$

Las dos constantes de integración, K_1 y K_2 , se determinan de las condiciones en la frontera.

- a) Para $0 \leq \phi \leq \alpha$:

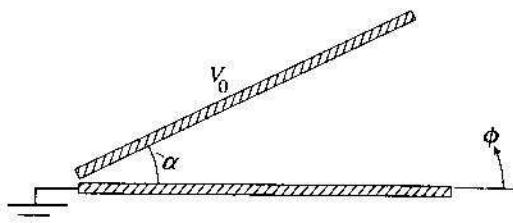
$$\text{En } \alpha = 0, \quad V(0) = 0 = K_2. \quad (3-142a)$$

$$\text{En } \phi = \alpha, \quad V(\alpha) = V_0 = K_1\alpha, \quad K_1 = V_0/\alpha. \quad (3-142b)$$

Por lo tanto, de la ecuación (3-141),

$$V(\phi) = \frac{V_0}{\alpha} \phi, \quad 0 \leq \phi \leq \alpha. \quad (3-143)$$

FIGURA 3-25 Dos planos conductores aislados infinitos, mantenidos a potenciales constantes (ejemplo 3-22).



b) Para $\alpha \leq \phi \leq 2\pi$:

$$\text{En } \phi = \alpha, \quad V(\alpha) = \alpha K_1 + K_2. \quad (3-144a)$$

$$\text{En } \phi = 2\pi, \quad V(2\pi) = 2\pi K_1 + K_2. \quad (3-144b)$$

Resolviendo las ecuaciones (3-144a) y (3-144b) tenemos

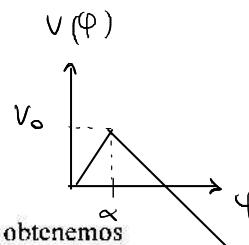
$$K_1 = -\frac{V_0}{2\pi - \alpha} \quad (3-145a)$$

y

$$K_2 = \frac{2\pi V_0}{2\pi - \alpha}. \quad (3-145b)$$

Finalmente, de la ecuación (3-141) obtenemos

$$V(\phi) = \frac{V_0}{2\pi - \alpha} (2\pi - \phi), \quad \alpha \leq \phi \leq 2\pi. \quad (3-146)$$



3-11.4 PROBLEMAS CON VALORES EN LA FRONTERA EN COORDENADAS ESFÉRICAS

Podemos obtener las ecuaciones de Poisson y Laplace para el potencial eléctrico escalar V en coordenadas esféricas usando la ecuación (3-129). En el ejemplo siguiente se analizará un caso unidimensional simplificado.

EJEMPLO 3-23

Los radios interior y exterior de dos delgadas capas esféricas conductoras y concéntricas son R_i y R_o , respectivamente. El espacio entre las capas está lleno con un material aislante. La capa interior se mantiene a un potencial V_1 y la exterior a V_2 . Determine la distribución de potencial en el material aislante resolviendo la ecuación de Laplace.

SOLUCIÓN

Puesto que la situación presentada en la figura 3-26 tiene simetría esférica, el potencial eléctrico es independiente de θ y ϕ . Al sustituir la ecuación (3-129) simplificada en la ecuación (3-130) se obtiene la siguiente ecuación unidimensional de Laplace.

$$\frac{d}{dR} \left(R^2 \frac{dV}{dR} \right) = 0. \quad (3-147)$$

Al integrar una vez la ecuación (3-147) con respecto a R se tiene

$$\frac{dV}{dR} = \frac{C_1}{R^2}. \quad (3-148)$$

Una segunda integración produce

$$V = -\frac{C_1}{R} + C_2. \quad (3-149)$$

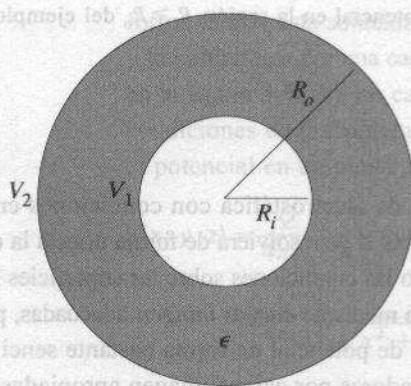


FIGURA 3-26 Dos capas conductoras concéntricas mantenidas a potenciales constantes (ejemplo 3-23).

Las dos constantes de integración, C_1 y C_2 , se determinan a partir de las condiciones en la frontera en las dos capas conductoras.

En $R = R_i$,

$$V_1 = -\frac{C_1}{R_i} + C_2 \quad (3-150a)$$

En $R = R_o$,

$$V_2 = -\frac{C_1}{R_o} + C_2. \quad (3-150b)$$

La solución de las ecuaciones (3-150a) y (3-150b) nos da

$$C_1 = -\frac{R_o R_i (V_1 - V_2)}{R_o - R_i} \quad (3-151a)$$

$$C_2 = \frac{R_o V_2 - R_i V_1}{R_o - R_i}. \quad (3-151b)$$

Por lo tanto, la distribución de potencial entre las dos capas es, utilizando las ecuaciones (3-149), (3-151a) y (3-151b),

$$V(R) = \frac{1}{R_o - R_i} \left[\frac{R_i R_o}{R} (V_1 - V_2) + R_o V_2 - R_i V_1 \right], \quad R_i \leq R \leq R_o. \quad (3-152)$$

Podemos observar en la ecuación (3-152) que V es independiente de la constante dielectrica del material aislante.

■ **EJERCICIO 3.20** Encuentre la distribución de potencial en la región $R \geq R_o$ del ejemplo 3-23.

RESPUESTA: $V = R_o V_2 / R$.

*MALÍSIMO
NO LEER*

3-11.5 MÉTODO DE IMÁGENES

Hay una clase de problemas de electrostática con condiciones en la frontera que al parecer son difíciles de satisfacer si se resolviera de forma directa la ecuación de Poisson o de Laplace que las rige, pero las condiciones sobre las superficies limitadoras de estos problemas pueden establecerse mediante **cargas imagen** adecuadas, pudiéndose entonces determinar las distribuciones de potencial de forma bastante sencilla. Este método de sustituir las superficies limitadoras por cargas imagen apropiadas, en lugar de intentar una resolución formal de la ecuación de Poisson o de Laplace, se conoce como **método de imágenes**.

El método de imágenes simplifica la resolución de ciertos problemas.

Teorema de unicidad

Antes de analizar el método de imágenes, es importante saber que **una solución de la ecuación de Poisson** (de la cual la ecuación de Laplace es un caso especial) **que satisface un conjunto de condiciones en la frontera (o de contorno) es una solución única**. Este enunciado se conoce como **teorema de unicidad**. Debido al teorema de unicidad, la solución de un problema electrostático que satisface un conjunto de condiciones en la frontera es **la única solución posible**, sin importar el método con el cual se obtenga la solución. Incluso una solución obtenida por estimaciones realizadas de forma inteligente será la única correcta. El teorema de unicidad puede demostrarse formalmente,[†] pero aquí simplemente aceptaremos su veracidad.

A continuación analizaremos varias aplicaciones importantes del método de imágenes.

A. Cargas puntuales cercanas a planos conductores

Ilustraremos este tipo de problemas con un ejemplo.

EJEMPLO 3-24

Una carga positiva Q está situada a una distancia d sobre un gran plano conductor conectado a tierra (potencial cero), como se muestra en la figura 3-27(a). Calcule (a) el potencial en un punto arbitrario $P(x, y, z)$ de la región $y > 0$ y (b) la distribución de carga inducida sobre la superficie del plano conductor.

SOLUCIÓN

- Un procedimiento formal para la resolución de este problema requeriría resolver la ecuación de Poisson en la región $y > 0$ sujeta a la condición en la frontera $V = 0$ en $y = 0$ y en el infinito. Es bastante difícil obtener de

[†] Véase, por ejemplo, D. K. Cheng, *Field and Wave Electromagnetics*, 2da. ed., págs. 158-159, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Massachusetts, 1989.

Imagen de una carga puntual cerca de un gran plano conductor

forma directa esta solución. Por otra parte, si eliminamos el plano conductor y lo sustituimos por una carga puntual imagen $-Q$ en $y = -d$, como se muestra en la figura 3-27(b), no cambiarían ni la situación en la región $y > 0$ ni las condiciones en la frontera. Observando la figura 3-27(b) podemos escribir el potencial en un punto $P(x, y, z)$ debido a las dos cargas.

$$\begin{aligned} V(x, y, z) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_+} - \frac{1}{R_-} \right) \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + (y-d)^2 + z^2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y+d)^2 + z^2}} \right], \quad y \geq 0; \end{aligned} \quad (3-153a)$$

y

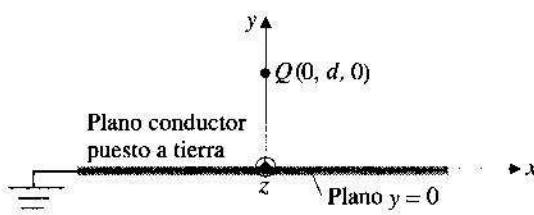
$$V(x, y, z) = 0, \quad y \leq 0. \quad (3-153b)$$

Puesto que se satisfacen las condiciones en la frontera especificadas, las ecuaciones (3-153a) y (3-153b) representan la solución correcta, en virtud del teorema de unicidad.

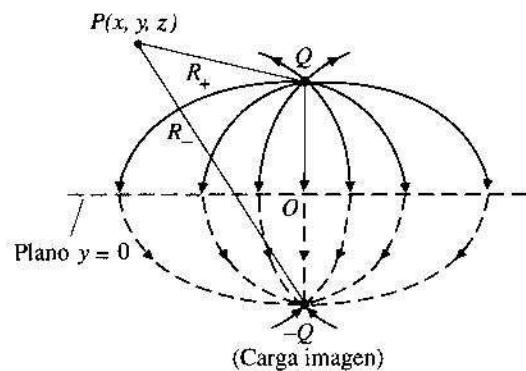
- b) Para hallar la distribución de carga inducida sobre la superficie conductora, primero se determina la intensidad de campo eléctrico. A partir de la ecuación (3-153a) tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla V \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\mathbf{a}_x x + \mathbf{a}_y (y-d) + \mathbf{a}_z z}{[x^2 + (y-d)^2 + z^2]^{3/2}} - \frac{\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y (y+d) + \mathbf{a}_z z}{[x^2 + (y+d)^2 + z^2]^{3/2}} \right\}, \\ &\quad y \geq 0. \end{aligned} \quad (3-154)$$

FIGURA 3-27 Carga puntual y plano conductor puesto a tierra (ejemplo 3-24).



(a) Disposición física.



(b) Carga imagen y líneas de campo.

La densidad superficial de carga inducida es, a partir de las ecuaciones (3-46) y (3-154),

$$\rho_s = \epsilon_0 E_y \Big|_{y=0} = -\frac{Qd}{2\pi(x^2 + d^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (3-155)$$

Debemos subrayar que el método de imágenes únicamente puede usarse para determinar los campos en la región donde *no* se encuentran las cargas imagen. Por ello, en el ejemplo 3-24 *no* podemos usar las cargas puntuales $+Q$ y $-Q$ para calcular V o \mathbf{E} en la región $y < 0$. De hecho, tanto V como \mathbf{E} son nulos en la región $y < 0$.

- **EJERCICIO 3.21** Encuentre la cantidad total de carga inducida en la superficie del plano conductor infinito del ejemplo 3-24.

RESPUESTA: $-Q$.

B. Línea de carga cercana a un cilindro conductor paralelo

Consideremos ahora el problema de una línea de carga ρ_t (C/m) situada a una distancia d del eje de un cilindro circular conductor paralelo de radio a . Se supone que tanto la línea de carga como el cilindro conductor son infinitamente largos. En la figura 3-28(a) se muestra un corte transversal de esta disposición. Antes de atacar el problema por el método de imágenes hay que señalar lo siguiente: (a) La imagen debe ser una línea de carga paralela dentro del cilindro para que la superficie cilíndrica en $r = a$ sea equipotencial. Llaremos a esta línea de carga imagen ρ_i . (2) Debido a la simetría con respecto a la línea OP , la línea de carga imagen debe estar en algún lugar a lo largo de OP , digamos en el punto P_i , que está a una distancia d_i del eje (Fig. 3-28b). Debemos determinar dos incógnitas: ρ_i y d_i .

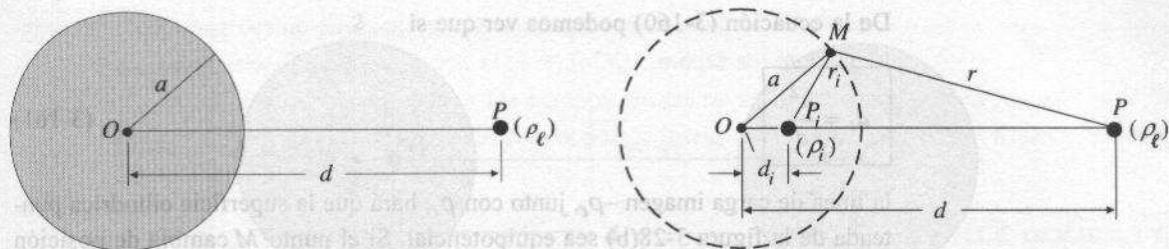
Como primer paso, supongamos que

Línea de carga
imagen

$$\rho_i = -\rho_t. \quad (3-156)$$

En esta etapa, la ecuación (3-156) es sólo una solución de prueba (una estimación inteligente) y no tenemos la seguridad de que sea válida. Usaremos esta solución de prueba hasta descubrir que no satisface las condiciones en la frontera. Sin embargo, si la ecuación (3-156) conduce a una solución que satisface todas las condiciones en la frontera, entonces será la única solución, debido al teorema de unicidad. Nuestro siguiente trabajo será ver si podemos determinar d_i .

El potencial eléctrico a la distancia r de una línea de carga con densidad ρ_t puede determinarse integrando la intensidad de campo eléctrico \mathbf{E} dada por la ecuación (3-23):



(a) Línea de carga y cilindro conductor paralelo. (b) Línea de carga y su imagen.

FIGURA 3-28 Corte transversal de una línea de carga y su imagen en un cilindro circular conductor paralelo.

$$V = - \int_{r_0}^r E_r dr = - \frac{\rho_t}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_0}^r \frac{1}{r} dr = \frac{\rho_t}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r}. \quad (3-157)$$

Observe que el punto de referencia del potencial cero, r_0 , no puede estar en infinito, ya que si asignamos $r_0 = \infty$ en la ecuación (3-157), V sería infinito en todos los demás puntos. Dejemos r_0 sin especificar por el momento. El potencial en un punto sobre o fuera de la superficie del cilindro se obtiene sumando las contribuciones de ρ_t y ρ_i . Específicamente, para un punto M sobre la superficie del cilindro presentado en la figura 3-28(b) tenemos

$$V_M = \frac{\rho_t}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r} + \frac{\rho_t}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r_i} = \frac{\rho_t}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r_i}. \quad (3-158)$$

Por cuestiones de sencillez, en la ecuación (3-158) hemos elegido como punto de referencia de potencial cero un punto equidistante de ρ_t y ρ_i , para que se cancelen los términos $\ln r_0$. De no haberlo hecho, sería necesario incluir un término constante en el lado derecho de la ecuación (3-158), aunque no afectaría lo que sigue. Las superficies equipotenciales están especificadas por

$$\frac{r_i}{r} = \text{constante}. \quad (3-159)$$

Para que una superficie equipotencial coincida con la superficie cilíndrica ($OM = a$), el punto P_i debe estar situado de manera que los triángulos OMP_i y OPM sean similares. Estos triángulos ya tienen un ángulo común, $\angle MOP_i$. Debemos elegir el punto P_i de manera que $\angle OMP_i = \angle OPM$. Tenemos

$$\frac{P_i M}{P M} = \frac{\overline{O P_i}}{\overline{O M}} = \frac{\overline{O M}}{\overline{O P}}, \quad (3-160)$$

o

$$\frac{r_i}{r} = \frac{d_i}{a} = \frac{a}{d} = \text{constante}. \quad (3-160)$$

De la ecuación (3-160) podemos ver que si

$$d_i = \frac{a^2}{d}$$

(3-161)

la línea de carga imagen $-\rho_\ell$, junto con ρ_ℓ , hará que la superficie cilíndrica punteada de la figura 3-28(b) sea equipotencial. Si el punto M cambia de posición en el círculo punteado, también cambiarán r_i y r ; sin embargo, su razón sigue siendo una constante igual a a/d . El punto P , se denomina **punto inverso** de P con respecto a un círculo de radio a .

La línea de carga imagen $\rho_i = -\rho_\ell$ puede entonces sustituir a la superficie cilíndrica conductora y podemos determinar V y E en cualquier punto *fuera de la superficie* a partir de las líneas de carga ρ_ℓ y $-\rho_\ell$. Por simetría, vemos que la superficie cilíndrica paralela que rodea a la línea de carga original ρ_ℓ , con radio a y eje a una distancia d , a la derecha de P , también es una superficie equipotencial. Esta observación nos permite calcular la capacitancia por unidad de longitud de una línea de transmisión abierta formada por dos conductores paralelos de sección transversal circular.

EJEMPLO 3-25

Determine la capacitancia por unidad de longitud entre dos largos alambres conductores circulares paralelos de radio a . Los ejes de los alambres están separados una distancia D .

SOLUCIÓN

Remítase al corte transversal de la línea de transmisión de dos alambres que se muestra en la figura 3-29. Las superficies equipotenciales de los dos alambres pueden considerarse como generadas por un par de líneas de carga $+\rho_\ell$ y $-\rho_\ell$ separadas por una distancia $(D - 2d_i) = d - d_i$. La diferencia de potencial entre los dos alambres es la que existe entre dos puntos cualesquiera de los alambres respectivos. Denotemos con los subíndices 1 y 2 los alambres que rodean a las líneas de carga equivalentes $+\rho_\ell$ y $-\rho_\ell$, respectivamente. A partir de las ecuaciones (3-158) y (3-160) tenemos

$$V_2 = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{d}$$

y, de manera similar,

$$V_1 = -\frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{d}.$$

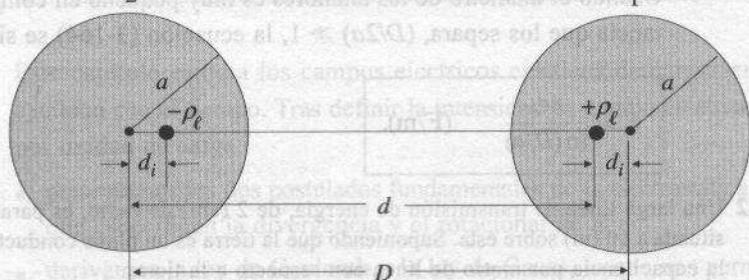


FIGURA 3-29 Corte transversal de una línea de transmisión de dos alambres y líneas de carga equivalentes (ejemplo 3-25).

Observamos que V_1 es una cantidad positiva, mientras que V_2 es negativa porque $a < d$. La capacitancia por unidad de longitud es

$$C = \frac{\rho_e}{V_1 - V_2} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln(d/a)}, \quad (3-162)$$

donde

$$d = D - d_i = D - \frac{a^2}{d},$$

de donde obtenemos[†]

$$d = \frac{1}{2}(D + \sqrt{D^2 - 4a^2}). \quad (3-163)$$

Si usamos la ecuación (3-163) en la ecuación (3-162) tenemos

Capacitancia por unidad de longitud de alambres paralelos	$C = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln[(D/2a) + \sqrt{(D/2a)^2 - 1}]} \quad (\text{F/m}).$	(3-164)
--	---	---------

Como

$$\ln[x + \sqrt{x^2 - 1}] = \cosh^{-1}x \text{ para } x > 1,$$

la ecuación (3-164) puede escribirse alternativamente como

$C = \frac{\pi\epsilon_0}{\cosh^{-1}(D/2a)} \quad (\text{F/m}).$	(3-165)
--	---------

[†] La otra solución, $d = \frac{1}{2}(D - \sqrt{D^2 - 4a^2})$ se descarta porque normalmente D y d son mucho mayores que a .

Cuando el diámetro de los alambres es muy pequeño en comparación con la distancia que los separa, $(D/2a) \gg 1$, la ecuación (3-164) se simplifica a

$$C = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln(D/a)} \quad (\text{F/m}).$$

(3-166)

- **EJERCICIO 3.22** Una larga línea de transmisión de energía, de 2 (cm) de radio, es paralela a la tierra y está situada a 10 (m) sobre ésta. Suponiendo que la tierra es un plano conductor infinito, encuentre la capacitancia por metro de línea con respecto a la tierra.

RESPUESTA: 8.04 (pF/m).

PREGUNTAS DE REPASO

- P.3-27** Escriba en notación vectorial las ecuaciones de Poisson y de Laplace para un medio simple.
- P.3-28** Escriba las ecuaciones de Poisson y de Laplace en coordenadas cartesianas para un medio simple.
- P.3-29** Si $\nabla^2 U = 0$, ¿por qué no sale que U sea idénticamente cero?
- P.3-30** Se aplica un voltaje fijo a un condensador de placas paralelas.
- ¿La intensidad de campo eléctrico depende de la permitividad del medio en el espacio entre las placas?
 - ¿La densidad de flujo eléctrico depende de la permitividad del medio? Explique.
- P.3-31** Suponga que se depositan cargas fijas $+Q$ y $-Q$ sobre las placas de un condensador de placas paralelas aislado.
- ¿La intensidad de campo eléctrico depende de la permitividad del medio en el espacio entre las placas?
 - ¿La densidad de flujo eléctrico depende de la permitividad del medio? Explique.
- P.3-32** Enuncie con palabras el *teorema de unicidad de la electrostática*.
- P.3-33** ¿Cuál es la imagen de una nube esférica de electrones con respecto a un plano conductor infinito?
- P.3-34** ¿Cuál es la imagen de una línea de carga infinitamente larga con densidad ρ_e con respecto a un cilindro circular conductor paralelo?
- P.3-35** ¿Cuál es la superficie de potencial cero de la línea de transmisión de dos alambres de la figura 3-29?

COMENTARIOS

1. La ecuación de Poisson (3-126) y la ecuación de Laplace (3-130) no son válidas si el medio es no lineal, no homogéneo o anisótropo.
2. El método de imágenes sólo puede usarse para determinar los campos en la región donde *no* se localizan las cargas imagen.

RESUMEN

Este capítulo estudia los campos eléctricos estáticos de cargas en reposo y que no cambian con el tiempo. Tras definir la intensidad de campo eléctrico \mathbf{E} como la fuerza por unidad de carga,

- presentamos los dos postulados fundamentales de la electrostática en el espacio libre que especifican la divergencia y el rotacional de \mathbf{E} ;
 - derivamos la ley de Coulomb y la ley de Gauss, lo que nos permitió determinar el campo eléctrico debido a distribuciones de carga discretas y continuas;
 - presentamos el concepto del potencial eléctrico escalar;
 - consideramos el efecto de los medios materiales en un campo eléctrico estático;
 - analizamos el efecto macroscópico de los dipolos inducidos, hallando las densidades de carga de polarización equivalentes;
 - definimos la densidad de flujo eléctrico o desplazamiento eléctrico, \mathbf{D} , y la constante dieléctrica;
 - analizamos las condiciones en la frontera de los campos eléctricos estáticos;
 - definimos la capacitancia y explicamos el procedimiento para determinarla;
 - encontramos las fórmulas de la energía electrostática almacenada;
 - usamos el principio del desplazamiento virtual para calcular la fuerza sobre un objeto en un sistema cargado;
 - presentamos las ecuaciones de Poisson y de Laplace e ilustramos el método de resolución de problemas simples, y
 - explicamos el método de imágenes para resolver problemas electrostáticos con valores en la frontera.
-

PROBLEMAS

P.3-1 El osciloscopio de rayos catódicos (ORC) de la figura 3-2 se usa para medir el voltaje aplicado a las placas de desviación paralelas.

- a) Suponiendo que no hay rupturas en el aislamiento, ¿cuál es el voltaje máximo que puede medirse si la distancia de separación entre las placas es h ?
- b) ¿Cuál es la restricción de L si el diámetro de la pantalla es D ?
- c) ¿Qué puede hacerse con una geometría fija para duplicar el voltaje máximo que puede medir el ORC?

P.3-2 Tres cargas puntuales de $2 \text{ } (\mu\text{C})$ están situadas en el aire, en los vértices de un triángulo equilátero de 10 (cm) de lado. Determine la magnitud y la dirección de la fuerza experimentada por cada carga.

P.3-3 Dos cargas puntuales, Q_1 y Q_2 , están situadas en $(0, 5, -1)$ y $(0, -2, 6)$, respectivamente. Determine la relación entre Q_1 y Q_2 para que la fuerza total ejercida sobre una carga de prueba en el punto $P(0, 2, 3)$

- a) no tenga componente en y , y
- b) no tenga componente en z .

P.3-4 Tres cargas puntuales $Q_1 = -9 \text{ } (\mu\text{C})$, $Q_2 = 4 \text{ } (\mu\text{C})$ y $Q_3 = -36 \text{ } (\mu\text{C})$ se disponen en una línea recta. La distancia entre Q_1 y Q_3 es 9 (cm) . Se sabe que se puede seleccionar una posición para Q_2 de forma que todas las cargas experimenten una fuerza nula. Determine esa posición.

P.3-5 En el ejemplo 3-8, determine la posición del punto P en el eje z más allá del cual el disco puede considerarse como carga puntual si el error en el cálculo de \mathbf{E} no es mayor que el 1%.

P.3-6 Una linea de carga de densidad uniforme ρ_e forma un círculo de radio b que yace en el plano xy en el aire, con su centro en el origen.

- a) Encuentre la intensidad de campo eléctrico \mathbf{E} en el punto $(0, 0, h)$.
- b) ¿Con qué valor de h en el apartado (a) se obtendrá la \mathbf{E} máxima? ¿Cuál es este máximo?
- c) Explique por qué \mathbf{E} tiene un máximo en esa posición.

P.3-7 Una linea de carga con densidad uniforme ρ_e forma un semicírculo de radio b en la mitad superior del plano xy . Determine la magnitud y la dirección de la intensidad de campo eléctrico en el centro del semicírculo.

P.3-8 Una distribución esférica de carga $\rho = \rho_0[1 - (R^2/b^2)]$ existe en la región $0 \leq R \leq b$. Esta distribución de carga está rodeada concéntricamente por una capa conductora de radio interior R_i ($> b$) y radio exterior R_o . Determine \mathbf{E} en todos los puntos.

P.3-9 Dos superficies cilíndricas coaxiales de longitud infinita, $r = a$ y $r = b$ ($b > a$), tienen densidades superficiales de carga ρ_{sa} y ρ_{sb} , respectivamente.

- a) Determine \mathbf{E} en todos los puntos.
- b) ¿Cuál debe ser la relación entre a y b para que \mathbf{E} se anule para $r > b$?

P.3-10 Determine el trabajo realizado para mover una carga de $+5 \text{ } (\mu\text{C})$ de $P_1(1, 2, -4)$ a $P_2(-2, 8, -4)$ en el campo $\mathbf{E} = \mathbf{a}_x y + \mathbf{a}_y x$

- a) a lo largo de la parábola $y = 2x^2$, y
- b) a lo largo de la línea recta que une P_1 y P_2 .

P.3-11 Repita el problema P.3-10 para el campo $\mathbf{E} = \mathbf{a}_x y - \mathbf{a}_y x$.

P.3-12 Una linea de carga finita de longitud L tiene una densidad lineal de carga uniforme ρ_e y es coincidente con el eje x .

- a) Determine V en el plano que divide en dos partes iguales a la linea de carga.
- b) Determine \mathbf{E} directamente de ρ_e aplicando la ley de Coulomb.
- c) Compruebe la respuesta del apartado (b) con $-\nabla V$.

P.3-13 La polarización en un cubo dieléctrico de lados L , centrado en el origen, está expresada por $\mathbf{P} = P_0(\mathbf{a}_x x + \mathbf{a}_y y + \mathbf{a}_z z)$.

a) Determine las densidades superficial y volumétrica de carga ligada.

b) Demuestre que la carga total ligada es cero.

P.3-14 El vector de polarización en una esfera dieléctrica de radio b es $\mathbf{P} = \mathbf{a}_z P_0$.

a) Determine las densidades superficial y volumétrica de carga ligada.

b) Demuestre que la carga total ligada es cero.

P.3-15 El eje de un largo tubo dieléctrico, con radio interior r_i y radio exterior r_o , coincide con el eje z . Existe un vector de polarización $\mathbf{P} = P_0(\mathbf{a}_x 3x + \mathbf{a}_y 4y)$ en el dieléctrico.

a) Determine las densidades superficial y volumétrica de carga ligada.

b) Demuestre que la carga total ligada es cero.

P.3-16 Una carga puntual positiva Q está en el centro de una capa dieléctrica esférica con radio interior R_i y radio exterior R_o . La constante dieléctrica de la capa es ϵ_r . Determine \mathbf{E} , V , \mathbf{D} y \mathbf{P} como funciones de la distancia radial R .

P.3-17 Resuelva los siguientes problemas:

a) Determine el voltaje de ruptura de un condensador de placas paralelas, suponiendo que las placas conductoras están separadas 50 (mm) y que el medio entre ellas es aire.

b) Determine el voltaje de ruptura si el espacio entre las placas conductoras está lleno de plexiglás, que tiene una constante dieléctrica de 3 y rigidez dieléctrica de 20 (kV/mm).

c) Si se introduce una lámina de plexiglás de 10 (mm) de grosor, ¿cuál es el voltaje máximo que puede aplicarse a las placas sin llegar a la ruptura?

P.3-18 Suponga que el plano $z = 0$ separa dos regiones dieléctricas sin pérdidas con $\epsilon_{r1} = 2$ y $\epsilon_{r2} = 3$. Si sabemos que \mathbf{E}_1 en la región 1 es $\mathbf{a}_x 2y - \mathbf{a}_y 3x + \mathbf{a}_z (5 + z)$, ¿qué sabemos también de \mathbf{E}_2 y \mathbf{D}_2 en la región 2? ¿Podemos determinar \mathbf{E}_2 y \mathbf{D}_2 en cualquier punto de la región 2? Explique.

P.3-19 Pueden usarse lentes dieléctricas para colimar campos electromagnéticos. En la figura 3-30, la superficie izquierda de la lente es la de un cilindro circular y la superficie derecha es un plano. Si \mathbf{E}_1 en el punto $P(r_o, 45^\circ, z)$ de la región 1 es $\mathbf{a}_z 5 - \mathbf{a}_\phi 3$, ¿cuál debe ser la constante dieléctrica de la lente para que \mathbf{E}_3 en la región 3 sea paralelo al eje x ?

P.3-20 El espacio entre las placas paralelas de área S de un condensador está lleno con un dieléctrico cuya permitividad varía linealmente de ϵ_1 en una placa ($y = 0$) a ϵ_2 en la otra ($y = d$). Ignore el efecto marginal y calcule la capacitancia.

P.3-21 Suponga que el conductor exterior del condensador cilíndrico del ejemplo 3-16 está puesto a tierra y que el conductor interior se mantiene a un potencial V_0 .

a) Determine la intensidad de campo eléctrico, $E(a)$, en la superficie del conductor interior.

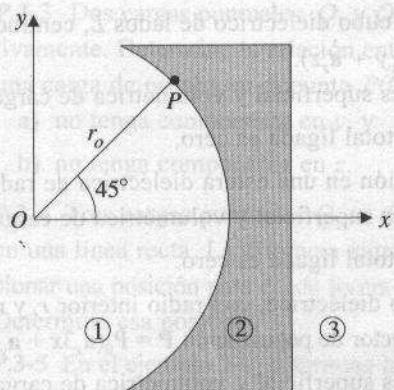


FIGURA 3-30 Lente dieléctrica (Prob. P.3-19).

b) Manteniendo fijo el radio interior, b , del conductor externo, determine a de manera que se minimice $E(a)$.

c) Determine este mínimo $E(a)$.

d) Determine la capacitancia en las condiciones del apartado (b).

P.3-22 El radio del núcleo y el radio interior del conductor exterior de una línea de transmisión coaxial muy larga son r_i y r_o , respectivamente. El espacio entre los conductores está lleno con dos capas coaxiales de dieléctricos. Las constantes dieléctricas de éstos son ϵ_{r1} para $r_i < r < b$ y ϵ_{r2} para $b < r < r_o$. Determine la capacitancia por unidad de longitud.

P.3-23 Un condensador esférico consiste en una esfera conductora interior con radio R_i y un conductor exterior con pared interior esférica de radio R_o . El espacio entre los conductores está lleno con un dieléctrico de permitividad ϵ . Determine la capacitancia.

P.3-24 Se conectan tres condensadores de $1 \text{ } (\mu\text{F})$, $2 \text{ } (\mu\text{F})$ y $3 \text{ } (\mu\text{F})$ a una fuente de 120 voltios, de la forma que se muestra en la figura 3-31. Calcule la energía eléctrica almacenada en cada condensador.

P.3-25 Calcule la energía gastada en mover una carga puntual de 500 (pC) de $P_1(2, \pi/3, -1)$ a $P_2(4, -\pi/2, -1)$ en un campo eléctrico $\mathbf{E} = a_r 6r \sin \phi + a_\phi 3r \cos \phi \text{ (V/m)}$,

a) haciendo primero el movimiento de $\phi = \pi/3$ a $-\pi/2$ en $r = 2$ y luego de $r = 2$ a 4 en $\phi = -\pi/2$, y

b) haciendo primero el movimiento de $r = 2$ a 4 en $\phi = \pi/3$ y luego de $\phi = \pi/3$ a $-\pi/2$ en $r = 4$.

P.3-26 Use el método del desplazamiento virtual para calcular la fuerza entre el conductor interior (radio a) y el exterior (radio b) que tienen cargas $+Q$ y $-Q$.

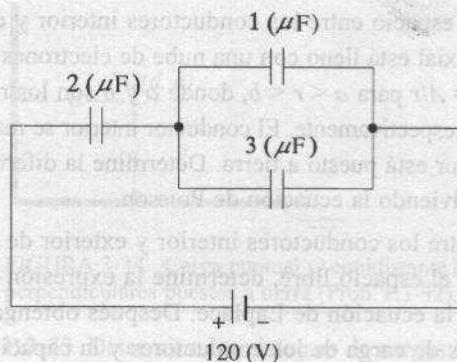


FIGURA 3-31 Condensadores conectados a una batería (Prob. P.3-24).

respectivamente, de un condensador coaxial de longitud L . La permitividad del material aislante es ϵ .

SUGERENCIA: Suponga primero que los radios interior y exterior son a y $a + r$, respectivamente; después diferencie con respecto a r .

P.3-27 Un condensador de placas paralelas de anchura w , longitud L y separación d tiene entre las placas una lámina de dieléctrico sólido de permitividad ϵ . El condensador se carga a un voltaje V_0 usando una batería, como se muestra en la figura 3-32. Suponiendo que se retira la lámina dieléctrica a la posición indicada en la figura y que después se abre el interruptor, determine la fuerza que actúa sobre la lámina.

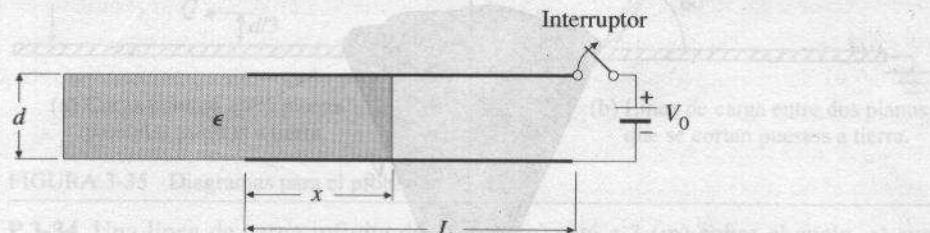


FIGURA 3-32 Condensador de placas paralelas parcialmente lleno (Prob. P.3-27).

P.3-28 Las placas conductoras superior e inferior de un condensador de placas paralelas muy grande están separadas una distancia d y se mantienen a potenciales de V_0 y 0, respectivamente. Sobre la placa inferior se coloca una lámina dieléctrica con constante dieléctrica de 6.0 y grosor uniforme de $0.8d$. Suponga que el efecto marginal es insignificante y determine lo siguiente resolviendo la ecuación de Laplace:

- el potencial y la distribución de campo eléctrico dentro de la lámina de dieléctrico,
- el potencial y la distribución de campo eléctrico en el espacio de aire entre la lámina de dieléctrico y la placa superior, y
- las densidades superficiales de carga en las placas superior e inferior.

P.3-29 Suponga que el espacio entre los conductores interior y exterior de una larga estructura cilíndrica coaxial está lleno con una nube de electrones cuya densidad volúmetrica de carga es $\rho_v = A/r$ para $a < r < b$, donde a y b son los radios de los conductores interior y exterior, respectivamente. El conductor interior se mantiene a un potencial V_0 y el conductor exterior está puesto a tierra. Determine la diferencia de potencial en la región $a < r < b$ resolviendo la ecuación de Poisson.

P.3-30 Si el espacio entre los conductores interior y exterior de la estructura coaxial del problema P.3-29 es el espacio libre, determine la expresión de $V(r)$ en la región $a \leq r \leq b$ resolviendo la ecuación de Laplace. Despues obtenga a partir de $V(r)$ las densidades superficiales de carga de los conductores y la capacitancia por unidad de longitud de la estructura. Compare su resultado con la ecuación (3-90).

P.3-31 Un cono conductor infinito de medio ángulo α se mantiene a un potencial V_0 y está aislado de un plano conductor puesto a tierra, como se ilustra en la figura 3-33. Determine

- la distribución de potencial $V(\theta)$ en la región $\alpha < \theta < \pi/2$,
- la intensidad de campo eléctrico en la región $\alpha < \theta < \pi/2$, y
- las densidades superficiales de carga del cono y del plano puesto a tierra.

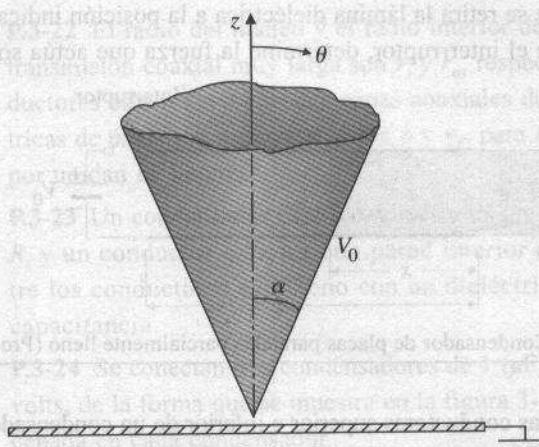


FIGURA 3-33 Cono conductor infinito y un plano conductor puesto a tierra (Prob. P.3-31).

P.3-32 En la figura 3-34 se muestra una carga puntual positiva Q localizada a una distancia d de dos semiplanos conductores perpendiculares y puestos a tierra. Determine la expresión de

- el potencial y la intensidad de campo eléctrico en un punto arbitrario $P(x, y)$, y
- las densidades superficiales de carga inducidas en los dos semiplanos.

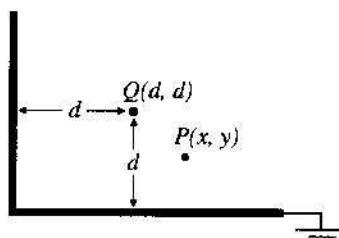
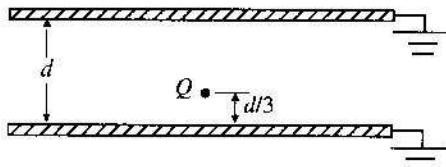


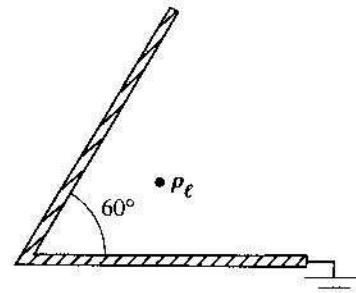
FIGURA 3-34 Carga puntual Q equidistante de dos semiplanos conductores perpendiculares puestos a tierra (Prob. P.3-32).

P.3-33 Determine los sistemas de cargas imagen que reemplazarán los contornos conductores que son mantenidos a potencial cero para

- una carga puntual Q situada entre dos grandes planos conductores paralelos puestos a tierra como se muestra en la figura 3-35(a), y
- una línea de carga infinita ρ_ℓ situada a la mitad entre dos grandes planos conductores que se cortan formando un ángulo de 60 grados, como se muestra en la figura 3-35(b).



(a) Carga puntual entre placas paralelas puestas a tierra.



(b) Línea de carga entre dos planos que se cortan puestos a tierra.

FIGURA 3-35 Diagramas para el problema P.3-33.

P.3-34 Una línea de carga infinita de 50 (nC/m) está a 3 (m) sobre el suelo, el cual está a potencial cero. Elija el plano xy como el de tierra y la línea de carga paralela al eje x . Use el método de imágenes para determinar lo siguiente:

- E en $(0, 4, 3)$, y
- E y ρ_s en $(0, 4, 0)$.

P.3-35 Los ejes de los dos alambres paralelos de una larga línea de transmisión están separados 2 (cm). Los alambres tienen un radio de 3 (mm); se mantienen a potenciales de +100 (V) y -100 (V). Determine

- la situación con respecto a los ejes de los alambres de las líneas de carga equivalentes,
- la densidad lineal de carga equivalente de cada alambre, y
- la intensidad de campo eléctrico en un punto medio entre los dos alambres.