

CAPÍTULO 7

7 - 1 DESCRIPCIÓN GENERAL En la sección 6-5 vimos que en un medio simple no conductor libre de fuentes es posible combinar las ecuaciones de Maxwell para generar ecuaciones de onda vectoriales homogéneas en \mathbf{E} y \mathbf{H} . Estas dos ecuaciones, (6-96) y (6-97), tienen exactamente la misma forma. Por ejemplo, la ecuación de onda para \mathbf{E} , libre de fuentes, es

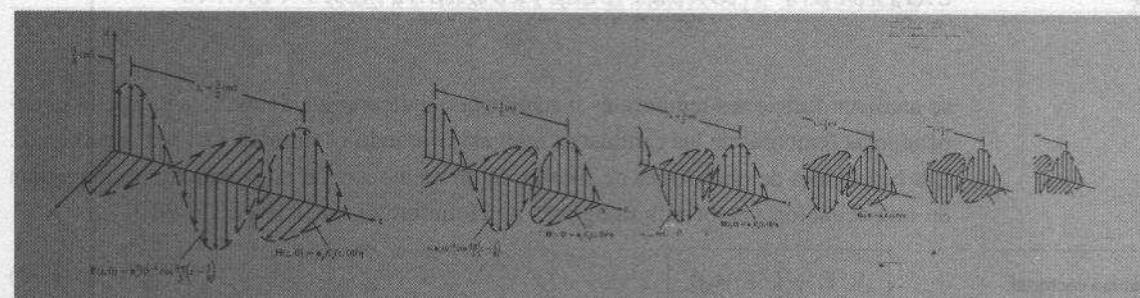
$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{u_p^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (6-96)(7-1)$$

En coordenadas cartesianas podemos descomponer la ecuación (7-1) en tres ecuaciones de onda escalares, homogéneas y unidimensionales. Cada una de estas ecuaciones para las componentes tendrá la forma de la ecuación (6-61), cuya solución representa una onda que se propaga en el medio con una velocidad

$$u_p = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}. \quad (6-63)(7-2)$$

Puesto que los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} variables con el tiempo están acoplados a través de las ecuaciones de rotacional de Maxwell, (6-94a) y (6-94b), el resultado es una onda electromagnética, la cual usaremos para explicar la acción electromagnética a distancia. El estudio del comportamiento de las ondas con una dependencia espacial unidimensional es el tema principal de este capítulo.

Daremos inicio al capítulo con el estudio de la propagación de los campos de ondas planas con dependencia armónica con el tiempo en un medio homogéneo ilimitado. Presentaremos los parámetros del medio, como la impedancia intrínseca, la constante de atenuación y la constante de fase. Se explicará el significado de la *profundidad*



Ondas electromagnéticas planas

de penetración, la profundidad a la que penetra una onda en un buen conductor. Las ondas electromagnéticas transportan potencia electromagnética. Analizaremos el concepto del **vector de Poynting**, una densidad de flujo de potencia.

Estudiaremos el comportamiento de una onda plana que incide en forma oblicua sobre un plano límite. También examinaremos las leyes que rigen la reflexión y la refracción de ondas planas, así como las condiciones de la no reflexión y la reflexión total.

Una **onda plana uniforme** es una solución particular de las ecuaciones de Maxwell teniendo **E** la misma dirección, magnitud y fase en planos infinitos perpendiculares a la dirección de propagación (lo mismo para **H**). De manera estricta, una onda plana uniforme no existe en la práctica, ya que para crearla se requeriría una fuente de extensión infinita. Sin embargo, si estamos lo suficientemente alejados de la fuente, el **frente de onda** (la superficie de fase constante) será casi esférica y una porción muy pequeña de una esfera gigante es casi un plano. Las características de las ondas planas uniformes son muy simples y su estudio es fundamentalmente importante tanto desde el punto de vista teórico como del práctico.

Definición de una onda plana uniforme

Definición de frente de onda

7-2 ONDAS PLANAS EN MEDIOS SIN PÉRDIDAS

En este capítulo y los siguientes centraremos nuestra atención en el comportamiento ondulatorio en el estado estacionario senoidal. Representaremos las cantidades senoidales con fasores, sin usar el subíndice *s* por cuestiones de sencillez. En aquellos casos donde

se analicen funciones temporales instantáneas, indicaremos de manera explícita la dependencia temporal de las cantidades relevantes usando el símbolo t en sus argumentos. Las ecuaciones de onda libres de fuentes en un medio simple no conductor se convierten en una ecuación vectorial homogénea de Helmholtz (véase la Ec.(6-98)):

Ecuación vectorial homogénea de Helmholtz para \mathbf{E} en medios simples no conductores

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0, \quad (7-3)$$

donde k es el número de onda. En un medio caracterizado por ϵ y μ tenemos, a partir de la ecuación (6-82a),

$$k = \omega \sqrt{\mu \epsilon} = \frac{\omega}{\mu_p} \quad (\text{rad/m}). \quad (7-4)$$

La ecuación (7-3) en coordenadas cartesianas equivale a tres ecuaciones escalares de Helmholtz, para las componentes E_x , E_y y E_z . Si escribimos la ecuación para la componente E_x tenemos

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) E_x = 0. \quad (7-5)$$

Considere una onda plana uniforme caracterizada por una E_x uniforme (magnitud uniforme y fase constante) sobre superficies planas perpendiculares a z ; es decir,

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} = 0.$$

La ecuación (7-5) se simplifica a

$$\frac{d^2 E_x}{dz^2} + k^2 E_x = 0. \quad (7-6)$$

que es una ecuación diferencial ordinaria porque E_x , un fasor, depende únicamente de z .

Es fácil ver que la solución de la ecuación (7-6) es

$$\begin{aligned} E_x(z) &= E_x^+(z) + E_x^-(z) \\ &= E_0^+ e^{-j k z} + E_0^- e^{j k z}, \end{aligned} \quad (7-7)$$

donde E_0^+ y E_0^- son constantes arbitrarias que deben determinarse a partir de las condiciones en la frontera (condiciones de contorno).

Examinemos ahora el primer término fasorial del lado derecho de la ecuación (7-7) y escribamos

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{a}_x E_x^+(z) = \mathbf{a}_x E_0^+ e^{-j k z}. \quad (7-8)$$

La expresión instantánea del fasor \mathbf{E} dado por la ecuación (7-8) es, para una referencia coseno,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(z, t) &= \mathbf{a}_x E_x^+(z, t) = \mathbf{a}_x \Re e [E_x^+(z) e^{j \omega t}] \\ &= \mathbf{a}_x \Re e [E_0^+ e^{j(\omega t - kz)}] = \mathbf{a}_x E_0^+ \cos(\omega t - kz). \end{aligned} \quad (7-9)$$

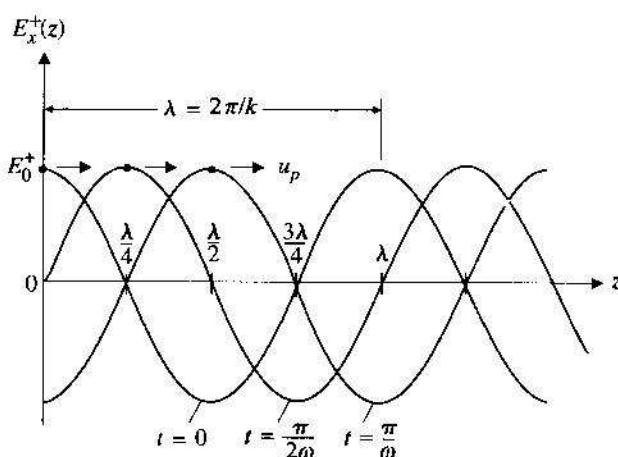


FIGURA 7-1 Onda que se propaga en la dirección z positiva $E_x^+(z, t) = E_0^+ \cos(\omega t - kz)$, para distintos valores de t .

En la figura 7-1 se ha representado gráficamente la ecuación (7-9) para varios valores de t . En $t = 0$, $E_x^+(z, 0) = E_0^+ \cos kz$ es una curva coseno con amplitud E_0^+ . En instantes sucesivos, la curva de hecho *se propaga en la dirección z positiva*. Tenemos entonces una **onda viajera**. Si nos centramos en un punto específico de la onda (un punto de una fase en particular), asignamos $\cos(\omega t - kz) = \text{una constante}$ o

$$\omega t - kz = \text{fase constante},$$

de lo cual obtenemos

$$u_p = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}. \quad (7-10)$$

La ecuación (7-10) asegura que la velocidad de propagación de un frente de fase constante (**la velocidad de fase**) es igual a la velocidad de la luz. El número de onda k tiene una relación clara con la longitud de onda.

$$k = \omega \sqrt{\mu\epsilon} = \frac{2\pi}{\lambda},$$

(7-11)

como se señaló en las ecuaciones (6-82a y b).

Podemos ver, sin tener que volver a representar gráficamente, que el segundo término fasorial del lado derecho de la ecuación (7-7), $E_0^- e^{ikz}$, representa una onda cosenoidal que se propaga en la dirección $-z$ con la misma velocidad u_p . Si nos centramos sólo en la onda que se propaga en la dirección $+z$, entonces hacemos $E_0^- = 0$. Sin embargo, si hay discontinuidades en el medio, también habrá que considerar las ondas reflejadas que se propagan en dirección opuesta, como veremos más adelante en este capítulo.

El campo magnético asociado \mathbf{H} puede determinarse a partir de la ecuación $\nabla \times \mathbf{E}$ (6-80a):

$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x^+(z) & 0 & 0 \end{vmatrix} = -j\omega\mu(\mathbf{a}_x H_x^+ + \mathbf{a}_y H_y^+ + \mathbf{a}_z H_z^+),$$

lo cual nos lleva a

$$H_x^+ = 0, \quad (7-12a)$$

$$H_y^+ = \frac{1}{-j\omega\mu} \frac{\partial E_x^+(z)}{\partial z}, \quad (7-12b)$$

$$H_z^+ = 0. \quad (7-12c)$$

De esta manera, H_y^+ es la única componente de \mathbf{H} distinta de cero correspondiente a \mathbf{E} en la ecuación (7-8). Además, dado que

$$\frac{\partial E_x^+(z)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(E_0^+ e^{-jkz}) = -jkE_x^+(z),$$

la ecuación (7-12b) produce

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{a}_y H_y^+(z) = \mathbf{a}_y \frac{k}{\omega\mu} E_x^+(z) \\ &= \mathbf{a}_y \frac{1}{\eta} E_x^+(z). \end{aligned} \quad (7-13)$$

Hemos introducido una cantidad nueva, η , en la ecuación (7-13): $\eta = \omega\mu/k$ o, lo que es igual,

Impedancia
intrínseca de un
medio

$$\boxed{\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (\Omega)}, \quad (7-14)$$

denominada **impedancia intrínseca** del medio. En el aire tenemos $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 120\pi = 377 \text{ } (\Omega)$. $H_y^+(z)$ está en fase con $E_x^+(z)$ y podemos escribir la expresión instantánea del campo \mathbf{H} como

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(z, t) &= \mathbf{a}_y H_y^+(z, t) = \mathbf{a}_y \mathcal{R}_e[H_y^+(z)e^{j\omega t}] \\ &= \mathbf{a}_y \frac{E_0^+}{\eta} \cos(\omega t - kz). \end{aligned} \quad (7-15)$$

- **EJERCICIO 7.1** Partiendo de la expresión fasorial $\mathbf{E} = \mathbf{a}_x E_x(z) = \mathbf{a}_x E_0^- e^{jkz}$ de una onda plana uniforme que se propaga en la dirección $-z$ determine el $\mathbf{H} = \mathbf{a}_y H_y(z)$ asociado. Calcule la razón $E_x^-(z)/H_y^-(z)$.

RESPUESTA : $E_x/H_y = -\eta$.

PREGUNTAS DE REPASO

- P.7-1 Defina una *onda plana uniforme*.
- P.7-2 ¿Qué es un *frente de onda*?
- P.7-3 ¿Qué es una onda viajera?
- P.7-4 Defina la *velocidad de fase*.
- P.7-5 Defina la *impedancia intrínseca* de un medio. ¿Cuál es el valor de la impedancia intrínseca del espacio libre?

COMENTARIOS

- La velocidad de fase de una onda electromagnética en un medio sin pérdidas es independiente de su frecuencia y de su dirección de propagación.
- La razón de las magnitudes de \mathbf{E} y \mathbf{H} en una onda plana uniforme es la impedancia intrínseca del medio.
- La dirección en la que el campo \mathbf{E} corta a la dirección del campo \mathbf{H} nos da la dirección de la propagación de onda; las tres direcciones son mutuamente perpendiculares.

EJEMPLO 7-1

Una onda plana uniforme con $\mathbf{E} = \mathbf{a}_x E_x$ se propaga en un medio simple sin pérdidas ($\epsilon_r = 4$, $\mu_r = 1$, $\sigma = 0$) en la dirección $+z$. Suponga que E_x es senoidal con frecuencia 100 (MHz) y que su valor máximo es $+10^{-4}$ (V/m) en $t = 0$ y $z = \frac{1}{8}$ (m).

- Escriba la expresión instantánea de \mathbf{E} para cualquier t y z .
- Escriba la expresión instantánea de \mathbf{H} .
- Determine las posiciones donde E_x tiene un máximo positivo cuando $t = 10^{-8}$ (s).

SOLUCIÓN

Primero hallamos k :

$$\begin{aligned} k &= \omega \sqrt{\mu\epsilon} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu_r \epsilon_r}, \\ &= \frac{2\pi 10^8}{3 \times 10^8} \sqrt{4} = \frac{4\pi}{3} \quad (\text{rad/m}). \end{aligned}$$

- a) Si usamos $\cos \omega t$ como referencia, la expresión instantánea de \mathbf{E} es

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{a}_x E_x = \mathbf{a}_x 10^{-4} \cos(2\pi 10^8 t - kz + \psi).$$

Puesto que E_x es igual a $+10^{-4}$ cuando el argumento de la función coseno es igual a cero, es decir, cuando

$$2\pi 10^8 t - kz + \psi = 0,$$

tenemos, en $t = 0$ y $z = \frac{1}{8}$,

$$\psi = kz = \left(\frac{4\pi}{3}\right)\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{\pi}{6} \quad (\text{rad}).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} E(z, t) &= a_x 10^{-4} \cos\left(2\pi 10^8 t - \frac{4\pi}{3} z + \frac{\pi}{6}\right) \\ &= a_x 10^{-4} \cos\left[2\pi 10^8 t - \frac{4\pi}{3}\left(z - \frac{1}{8}\right)\right] \quad (\text{V/m}). \end{aligned}$$

Esta expresión muestra un desplazamiento de $\frac{1}{8}$ (m) en la dirección $+z$ y pudo haberse escrito directamente a partir del enunciado del problema.

- b) La expresión instantánea de \mathbf{H} es

$$\mathbf{H} = a_y H_y = a_y \frac{E_x}{\eta},$$

donde

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon_r}} = 60\pi \quad (\Omega).$$

Por consiguiente,

$$\mathbf{H}(z, t) = a_y \frac{10^{-4}}{60\pi} \cos\left[2\pi 10^8 t - \frac{4\pi}{3}\left(z - \frac{1}{8}\right)\right] \quad (\text{A/m}).$$

- c) En $t = 10^{-8}$, igualamos el argumento de la función coseno a $\pm 2n\pi$ para que E_x sea un máximo positivo:

$$2\pi 10^8 (10^{-8}) - \frac{4\pi}{3} \left(z_m - \frac{1}{8}\right) = \pm 2n\pi,$$

de lo cual obtenemos

$$z_m = \frac{13}{8} \pm \frac{3}{2} n \quad (\text{m}), \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad z_m > 0.$$

Si examinamos con mayor detenimiento este resultado, observaremos que la longitud de onda en el medio es

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{3}{2} \quad (\text{m}).$$

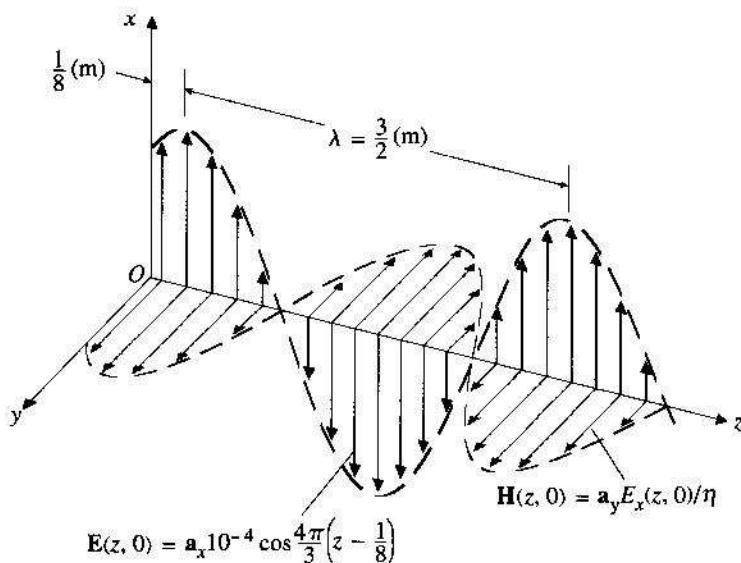


FIGURA 7-2 Campos **E** y **H** de una onda plana uniforme en $t = 0$ (ejemplo 7-1).

Por lo tanto, el valor máximo positivo de E_x ocurre en

$$z_m = \frac{13}{8} \pm n\lambda \quad (\text{m}).$$

En la figura 7-2 se muestran los campos **E** y **H** como funciones de z para el tiempo de referencia $t = 0$.

7-2.1 EFECTO DOPPLER

Cuando hay movimiento relativo entre una fuente con dependencia armónica con el tiempo y un receptor, la frecuencia de la onda detectada por el receptor tiende a ser diferente de la que emite la fuente. Este fenómeno se conoce como *efecto Doppler*[†]. El efecto Doppler se manifiesta en la acústica y en el electromagnetismo. Es probable que usted haya experimentado los cambios en frecuencia del silbato de una locomotora que se mueve a gran velocidad. A continuación se explica el efecto Doppler.

Supongamos que la fuente (transmisor) T de una onda con dependencia armónica con el tiempo de frecuencia f se mueve con velocidad \mathbf{u} en una dirección que forma

Significado del efecto Doppler

[†] C. Doppler (1803-1853).

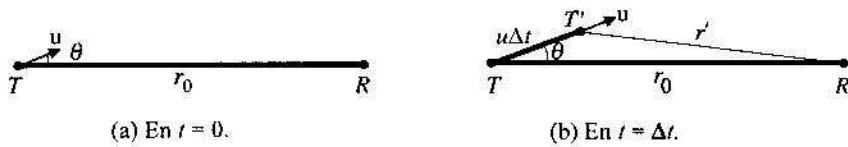


FIGURA 7-3 Ilustración del efecto Doppler.

un ángulo θ relativo a la línea recta entre el transmisor y un receptor estacionario, R , como se ilustra en la figura 7-3(a). La onda electromagnética emitida por T en el aire en un tiempo de referencia $t = 0$ llegará a R en

$$t_1 = \frac{r_0}{c}. \quad (7-16)$$

En un instante posterior $t = \Delta t$, T se ha movido a una posición nueva T' y la onda emitida por T' en ese instante llegará a R en

$$\begin{aligned} t_2 &= \Delta t + \frac{r'}{c} \\ &= \Delta t + \frac{1}{c} [r_0^2 - 2r_0(u\Delta t)\cos\theta + (u\Delta t)^2]^{1/2}. \end{aligned} \quad (7-17)$$

Si $(u\Delta t)^2 \ll r_0^2$, la ecuación (7-17) se convierte en

$$t_2 \cong \Delta t + \frac{r_0}{c} \left(1 - \frac{u\Delta t}{r_0} \cos\theta \right).$$

Por lo tanto, el tiempo transcurrido en R , $\Delta t'$, correspondiente a Δt en T es

$$\begin{aligned} \Delta t' &= t_2 - t_1 \\ &= \Delta t \left(1 - \frac{u}{c} \cos\theta \right), \end{aligned} \quad (7-18)$$

que es diferente de Δt .

Si Δt representa un periodo de la fuente con dependencia armónica con el tiempo (es decir, si $\Delta t = 1/f$), la frecuencia de la onda que recibe R es

$$\begin{aligned} f' &= \frac{1}{\Delta t'} = \frac{f}{\left(1 - \frac{u}{c} \cos\theta \right)} \\ &\cong f \left(1 + \frac{u}{c} \cos\theta \right) \end{aligned} \quad (7-19)$$

para el caso usual de $(u/c)^2 \ll 1$. La ecuación (7-19) indica de manera clara que la frecuencia percibida por R es más alta que la frecuencia transmitida cuando T se mueve hacia R . A la inversa, la frecuencia percibida es más baja que la transmitida si T se aleja de R . Se obtienen resultados similares si R se mueve y T permanece estacionario.

Principio de funcionamiento de un radar de vigilancia de velocidad

Fenómeno del desplazamiento hacia el rojo en la astronomía

El efecto Doppler es la base de funcionamiento del radar (Doppler) empleado por la policía para conocer la velocidad con la que se mueve un vehículo. El desplazamiento en frecuencia de la onda recibida, que se refleja en un vehículo en movimiento, es proporcional a la velocidad del vehículo y puede detectarse y presentarse en una unidad manual. El efecto Doppler es también la causa del efecto observado en astronomía del **desplazamiento hacia el rojo** de las rayas de absorción en el espectro de la luz emitida por una estrella lejana. A medida que la estrella se *aleja* a alta velocidad del observador en tierra, la frecuencia recibida se desplaza hacia el extremo *más bajo en frecuencia (rojo)* del espectro.

- **EJERCICIO 7.2** Un tren viaja a 130 (km/hr) hacia un observador que se encuentra en una posición que forma un ángulo de 20° con la línea de visión. El tren hace sonar un silbato de 800 (Hz). ¿Cuál es la frecuencia percibida por el observador? (La velocidad del sonido es aproximadamente 340 (m/s).

RESPUESTA : 880 (Hz).

PREGUNTAS DE REPASO

P.7-6 ¿Qué es el efecto Doppler?

COMENTARIOS

La frecuencia de una onda detectada por un receptor es mayor que la que emitió el transmisor si éste se aproxima al receptor, y es menor si el transmisor se aleja de él.

7-2.2 ONDAS TRANSVERSALES ELECTROMAGNÉTICAS

Onda TEM

Hemos visto que una onda plana uniforme caracterizada por $\mathbf{E} = \mathbf{a}_x E_x$ que se propaga en la dirección $+z$ tiene asociado un campo magnético $\mathbf{H} = \mathbf{a}_y H_y$. Por lo tanto, \mathbf{E} y \mathbf{H} son perpendiculares entre sí y ambos son *transversales* a la dirección de propagación. Éste es el caso específico de una **onda transversal electromagnética (TEM)**. A continuación examinaremos la propagación de una onda plana uniforme en una dirección arbitraria que no coincide necesariamente con un eje de las coordenadas.

En lugar de $\mathbf{E}(z)$ en la ecuación (7-8), consideremos

$$\mathbf{E}(x, z) = \mathbf{a}_y E_0 e^{-jk_xx - jk_z z}, \quad (7-20)$$

que representa la intensidad eléctrica en la dirección y de una onda plana uniforme que se propaga en las direcciones $+x$ y $+z$. Si definimos un *vector de número de onda*, \mathbf{k} , como

$$\mathbf{k} = \mathbf{a}_x k_x + \mathbf{a}_z k_z = \mathbf{a}_k k, \quad (7-21)$$

y un vector de posición \mathbf{R} del origen a un punto arbitrario

$$\mathbf{R} = \mathbf{a}_x x + \mathbf{a}_y y + \mathbf{a}_z z, \quad (7-22)$$

Expresión del vector de número de onda en coordenadas cartesianas

la ecuación (7-20) puede escribirse en forma escueta como

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}_y E_0 e^{-jk\mathbf{R}} = \mathbf{a}_y E_0 e^{-jk\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{R}}. \quad (7-23)$$

Esta situación se ilustra en la figura 7-4. La relación

$$\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{R} = \text{longitud } \overline{OP} \quad (\text{una constante})$$

es la ecuación del plano (lugar geométrico de los puntos extremos del vector de posición \mathbf{R}) normal a \mathbf{a}_k , la dirección de propagación, y es un plano de fase constante y amplitud uniforme.

El campo magnético \mathbf{H} asociado con el campo eléctrico de la ecuación (7-23) es, a partir de la ecuación (6-80a),

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{j\omega\mu} \nabla \times \mathbf{E} = \frac{E_0}{\omega\mu} (-\mathbf{a}_x k_z + \mathbf{a}_z k_x) e^{-jk_xx - jk_z z}. \quad (7-24)$$

Podemos expresar la ecuación (7-24) en forma más general:

Determinación de \mathbf{H}
a partir de \mathbf{E} de una
onda plana
uniforme

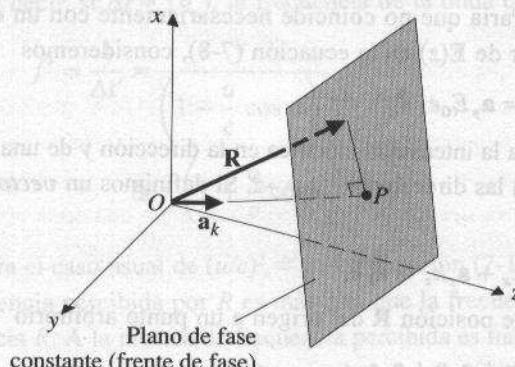
$$\mathbf{H} = \frac{k}{\omega\mu} \mathbf{a}_k \times \mathbf{E} = \frac{1}{\eta} \mathbf{a}_k \times \mathbf{E}. \quad (7-25)$$

De esta manera es fácil determinar \mathbf{H} usando la ecuación (7-25), si se conoce el valor de \mathbf{E} de una onda plana uniforme que se propaga en una dirección determinada.

- **EJERCICIO 7.3**
- Escriba la expresión fasorial del campo eléctrico en dirección z de una onda plana uniforme en el aire con amplitud E_0 y frecuencia f , que se propaga en dirección $-y$.
 - Escriba la expresión del campo magnético asociado.

RESPUESTA : (a) $\mathbf{E} = \mathbf{a}_z E_0 e^{j2\pi f t/c}$.

FIGURA 7-4 Vector de posición y vector unitario de onda normal al frente de fase de una onda plana uniforme.



7-2.3 POLARIZACIÓN DE ONDAS PLANAS

Significado de la polarización de una onda uniforme

La **polarización** de una onda plana uniforme describe el comportamiento variable con el tiempo del vector de intensidad de campo eléctrico en un punto determinado del espacio. Por ejemplo, si el vector \mathbf{E} de una onda plana permanece fijo en la dirección x ($\mathbf{E} = \mathbf{a}_x E_x$, donde E_x puede ser positivo o negativo), se dice que la onda está **polarizada linealmente** en la dirección x . No se requiere una descripción aparte del comportamiento del campo magnético, ya que la dirección de \mathbf{H} está relacionada con la de \mathbf{E} .

En algunos casos la dirección de \mathbf{E} de una onda plana en un punto determinado puede cambiar con el tiempo. Considere la superposición de dos ondas polarizadas linealmente, una en la dirección x y la otra en la dirección y y retardada 90° (o $\pi/2$ rad) en la fase temporal. Usando la notación fasorial tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(z) &= \mathbf{a}_x E_1(z) + \mathbf{a}_y E_2(z) \\ &= \mathbf{a}_x E_{10} e^{-jkz} - \mathbf{a}_y j E_{20} e^{-jkz},\end{aligned}\quad (7-26)$$

donde E_{10} y E_{20} son números reales que denotan las amplitudes de las dos ondas polarizadas. La expresión instantánea de \mathbf{E} es

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(z, t) &= \Re \{ [\mathbf{a}_x E_1(z) + \mathbf{a}_y E_2(z)] e^{j\omega t} \} \\ &= \mathbf{a}_x E_{10} \cos(\omega t - kz) + \mathbf{a}_y E_{20} \cos\left(\omega t - kz - \frac{\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

Es conveniente asignar $z = 0$ al examinar el cambio de dirección de \mathbf{E} en un punto determinado a medida que varía t . Tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(0, t) &= \mathbf{a}_x E_1(0, t) + \mathbf{a}_y E_2(0, t) \\ &= \mathbf{a}_x E_{10} \cos \omega t + \mathbf{a}_y E_{20} \sin \omega t.\end{aligned}\quad (7-27)$$

Conforme ωt aumenta de 0 a $\pi/2$, π y $3\pi/2$, completando el ciclo en 2π , la punta del vector $\mathbf{E}(0, t)$ describirá una trayectoria geométrica elíptica en sentido contrario al de las agujas del reloj. En forma analítica tenemos

$$\cos \omega t = \frac{E_1(0, t)}{E_{10}}$$

y

$$\begin{aligned}\sin \omega t &= \frac{E_2(0, t)}{E_{20}} \\ &= \sqrt{1 - \cos^2 \omega t} = \sqrt{1 - \left[\frac{E_1(0, t)}{E_{10}} \right]^2},\end{aligned}$$

que nos conduce a la siguiente ecuación de una elipse:

$$\left[\frac{E_2(0, t)}{E_{20}} \right]^2 + \left[\frac{E_1(0, t)}{E_{10}} \right]^2 = 1. \quad (7-28)$$

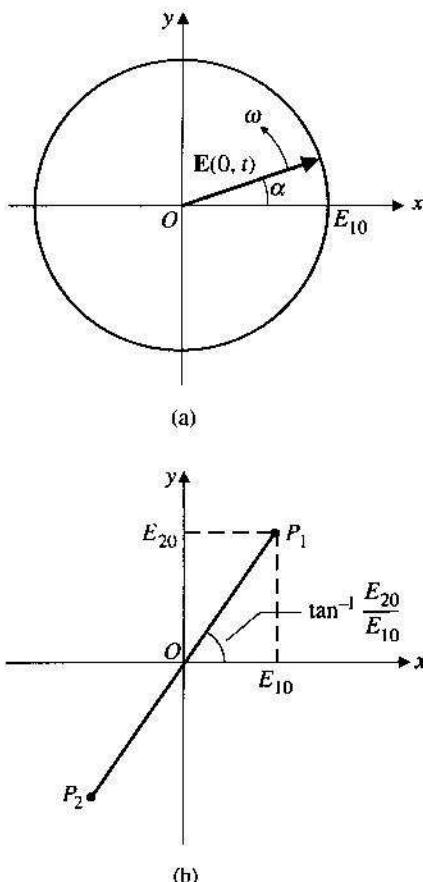


FIGURA 7-5 Diagrama de polarización para la suma de dos ondas polarizadas linealmente en cuadratura espacial en $z = 0$: (a) polarización circular, $\mathbf{E}(0, t) = E_{10}(\mathbf{a}_x \cos \omega t + \mathbf{a}_y \sin \omega t)$; (b) polarización lineal, $\mathbf{E}(0, t) = (\mathbf{a}_x E_{10} + \mathbf{a}_y E_{20}) \cos \omega t$.

Significado de las ondas polarizadas elíptica y circularmente.

De esta manera, \mathbf{E} , la suma de dos ondas polarizadas linealmente en cuadratura tanto espacial como temporal, estará **elípticamente polarizada** si $E_{20} \neq E_{10}$ y **circularmente polarizada** si $E_{20} = E_{10}$. En la figura 7-5(a) se muestra un círculo de polarización genérico.

Cuando $E_{20} = E_{10}$, el ángulo instantáneo α que forma \mathbf{E} con el eje x en $z = 0$ es

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{E_2(0, t)}{E_1(0, t)} = \omega t, \quad (7-29)$$

lo que indica que \mathbf{E} gira a una razón uniforme con una velocidad angular ω en sentido contrario al de giro de las agujas del reloj. Si los dedos de la mano derecha siguen el sentido de giro de \mathbf{E} , el pulgar apunta en la dirección de propagación de la onda.

Ésta es una **onda circularmente polarizada positiva o de mano derecha**.

Si comenzamos con un $E_2(z)$, que va 90° ($\pi/2$ rad) por delante de $E_1(z)$ en fase temporal, las ecuaciones (7-26) y (7-27) serían, respectivamente,

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{a}_x E_{10} e^{-jkz} + \mathbf{a}_y j E_{20} e^{-jkz} \quad (7-30)$$

y

$$\mathbf{E}(0, t) = \mathbf{a}_x E_{10} \cos \omega t - \mathbf{a}_y E_{20} \sin \omega t. \quad (7-31)$$

Al comparar las ecuaciones (7-31) y (7-27) vemos que \mathbf{E} todavía estará polarizado elípticamente. Si $E_{20} = E_{10}$, \mathbf{E} estará polarizado circularmente y el ángulo con respecto al eje x en $z = 0$ será $-\omega t$, lo cual indica que \mathbf{E} girará con velocidad angular ω en el sentido de las agujas del reloj; ésta es una **onda circularmente polarizada negativa o de mano izquierda**.

Si $E_2(z)$ y $E_1(z)$ están en cuadratura espacial pero en fase temporal, la expresión instantánea de \mathbf{E} en $z = 0$ es

$$\mathbf{E}(0, t) = (\mathbf{a}_x E_{10} + \mathbf{a}_y E_{20}) \cos \omega t. \quad (7-32)$$

La punta de $\mathbf{E}(0, t)$ estará en el punto P_1 de la figura 7-5(b) cuando $\omega t = 0$. Su magnitud disminuirá hacia cero conforme ωt aumente hacia $\pi/2$. Tras esto, $\mathbf{E}(0, t)$ comenzará a aumentar gradualmente en dirección opuesta, hacia el punto P_2 donde $\omega t = \pi$. Decimos que el \mathbf{E} suma está linealmente polarizado a lo largo de una línea que forma un ángulo $\tan^{-1}(E_{20}/E_{10})$ con el eje x .

En el caso general donde $E_2(z)$ y $E_1(z)$ están en cuadratura espacial, pueden tener amplitudes diferentes ($E_{20} \neq E_{10}$) y pueden diferir en fase en una cantidad arbitraria (distinta de cero y que no sea un múltiplo entero de $\pi/2$). Su \mathbf{E} suma estará polarizado elípticamente.

Onda polarizada circularmente de mano derecha (o positiva)

Onda polarizada circularmente de mano izquierda (o negativa)

Onda polarizada linealmente

EJEMPLO 7-2

Demuestre que una onda plana linealmente polarizada puede descomponerse en una onda polarizada circularmente de mano derecha y una onda polarizada circularmente de mano izquierda de igual amplitud.

SOLUCIÓN

Considere una onda plana polarizada linealmente que se propaga en la dirección $+z$. Podemos suponer, sin perder generalidad, que \mathbf{E} está polarizado en la dirección x . Si empleamos la notación fasorial tenemos

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{a}_x E_0 e^{-jkz}. \quad (7-33)$$

Pero esto puede escribirse como

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{E}_{rc}(z) + \mathbf{E}_{lc}(z), \quad (7-34)$$

donde

$$\mathbf{E}_{rc}(z) = \frac{E_0}{2} (\mathbf{a}_x - j\mathbf{a}_y) e^{-jkz} \quad (7-34a)$$

y

$$\mathbf{E}_{lc}(z) = \frac{E_0}{2} (\mathbf{a}_x + j\mathbf{a}_y) e^{-jkz}. \quad (7-34b)$$

Podemos descomponer una onda plana polarizada linealmente en dos ondas polarizadas circularmente de igual magnitud.

Basándonos en el análisis previo, podemos reconocer que $\mathbf{E}_{rc}(z)$ en la ecuación (7-34a) y $\mathbf{E}_{lc}(z)$ en la ecuación (7-34b) representan las ondas polarizadas circularmente de mano derecha y mano izquierda, respectivamente, cada una con amplitud $E_0/2$. Así hemos demostrado el enunciado de este problema. Por supuesto, también es verdadero el enunciado inverso: la suma de dos ondas polarizadas circularmente de igual magnitud que giran en sentido opuesto es una onda polarizada linealmente.

- **EJERCICIO 7.4** Describa la polarización de una onda cuya intensidad eléctrica está descrita por $\mathbf{E}(x, t) = (\mathbf{a}_y E_{10} - \mathbf{a}_z E_{20}) \sin(\omega t - kx)$.

PREGUNTAS DE REPASO

P.7-7 ¿Qué es una onda TEM?

P.7-8 ¿La impedancia intrínseca de un medio sin pérdidas es una función de la frecuencia? Explique.

P.7-9 ¿Qué quiere decir la *polarización* de una onda? ¿Cuándo está polarizada linealmente una onda? ¿Cuándo está polarizada circularmente?

P.7-10 Se combinan dos ondas ortogonales polarizadas linealmente que tienen la misma frecuencia. Enuncie las condiciones en las cuales la resultante será (a) otra onda polarizada linealmente, (b) una onda polarizada circularmente y (c) una onda polarizada elípticamente.

COMENTARIOS

1. En una onda TEM en un medio sin pérdidas ilimitado: (a) \mathbf{E} y \mathbf{H} están en fase, y (b) $|\mathbf{E}| = \eta |\mathbf{H}|$.
2. El campo \mathbf{E} de las estaciones de radio AM está polarizado linealmente, con el campo \mathbf{E} perpendicular a la tierra. La antena receptora debe estar en posición vertical para lograr la máxima recepción.
3. El campo \mathbf{E} de las señales de televisión está polarizado linealmente en dirección horizontal. Observe la posición horizontal de las antenas receptoras de señales de televisión en el techo de las casas.
4. La onda radiada por las estaciones de radio FM usualmente tiene polarización circular.

7-3 ONDAS PLANAS EN MEDIOS CON PÉRDIDAS

Hasta ahora hemos considerado la propagación de ondas en medios simples sin pérdidas y sin fuentes ($\rho_v = 0, \mathbf{J} = 0$). Si un medio es conductor ($\sigma \neq 0$), fluirá una corriente $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ debido a la existencia de \mathbf{E} . En este caso debemos cambiar la ecuación con dependencia armónica con el tiempo $\nabla \times \mathbf{H}$ (6-80b) a

$$\nabla \times \mathbf{H} = (\sigma + j\omega\epsilon)\mathbf{E} = j\omega \left(\epsilon + \frac{\sigma}{j\omega} \right) \mathbf{E}$$

$$= j\omega\epsilon_c \mathbf{E}$$

con

$$\epsilon_c = \epsilon - j \frac{\sigma}{\omega} \quad (\text{F/m}). \quad (7-36)$$

Las otras tres ecuaciones (6-80a, c y d) no cambian. Por lo tanto, las ecuaciones previamente presentadas para medios no conductores serán aplicables a medios conductores si se sustituye ϵ por la **permitividad compleja** ϵ_c de la ecuación (7-36).

En la sección 3-6.2 vimos que, al aplicar a cuerpos materiales un campo eléctrico externo variable con el tiempo, se producen pequeños desplazamientos de cargas ligadas que a su vez originan una densidad de volumen de polarización. Este vector de polarización variará con la misma frecuencia que el campo aplicado. Al aumentar la frecuencia, la inercia de las partículas cargadas tiende a evitar que el desplazamiento de partículas se mantenga en fase con los cambios del campo, lo cual produce un mecanismo de amortiguamiento de vibraciones que produce pérdida de potencia debido al trabajo necesario para superar las fuerzas de amortiguamiento. Este fenómeno de polarización fuera de fase puede caracterizarse por una susceptibilidad eléctrica compleja y por consiguiente por una permitividad compleja. Si el cuerpo o medio material tiene además una cantidad importante de portadores de carga libres, como los electrones en un conductor, los electrones y huecos en un semiconductor o los iones en un electrólito, también se presentarán pérdidas óhmicas. Al estudiar estos medios es costumbre incluir los efectos de las pérdidas óhmicas y por amortiguamiento en la parte imaginaria de la permitividad compleja ϵ_c :

$$\epsilon_c = \epsilon' - j\epsilon'' \quad (\text{F/m}), \quad (7-37)$$

donde ϵ' y ϵ'' pueden ser funciones de la frecuencia. Alternativamente, podemos definir una conductividad equivalente que represente todas las pérdidas y escribir

$$\sigma = \omega\epsilon'' \quad (\text{S/m}). \quad (7-38)$$

Al combinar las ecuaciones (7-37) y (7-38) se obtiene la ecuación (7-36).

La razón ϵ''/ϵ' se denomina **tangente de pérdidas** porque es una medida de la pérdida de potencia en el medio:

$$\tan \delta_c = \frac{\epsilon''}{\epsilon'} \cong \frac{\sigma}{\omega\epsilon}. \quad (7-39)$$

la cantidad δ_c en la ecuación (7-39) se conoce como **ángulo de pérdidas**.

Diferencia entre un buen conductor y un buen aislante

Se dice que un medio es un **buen conductor** si $\sigma \gg \omega\epsilon$ y un **buen aislante** si $\omega\epsilon \gg \sigma$. Así, un material puede ser un buen conductor a frecuencias bajas pero tener las propiedades de un dieléctrico con pérdidas a frecuencias muy altas. Por ejemplo, la tierra húmeda tiene una constante dieléctrica ϵ_r y una conductividad σ del orden de 10 y 10^{-2} (S/m), respectivamente. La tangente de pérdidas $\sigma/\omega\epsilon$ de la tierra húmeda es igual a 1.8×10^4 a 1 (kHz), de manera que es un conductor bastante bueno. Sin embargo, $\sigma/\omega\epsilon$ es 1.8×10^{-3} a 10 (GHz) y la tierra húmeda se comporta como un aislante.

EJEMPLO 7-3

En un medio dieléctrico con pérdidas cuya permitividad relativa es 2.5 y cuya tangente de pérdidas es 0.001 existe una intensidad de campo eléctrico senoidal de amplitud 250 (V/m) y frecuencia 1 (GHz). Calcule la potencia media disipada en el medio por metro cúbico.

SOLUCIÓN

Primero hay que hallar la conductividad eficaz del medio con pérdidas:

$$\begin{aligned}\tan \delta_c &= 0.001 = \frac{\sigma}{\omega\epsilon_0\epsilon}, \\ \sigma &= 0.001(2\pi 10^9) \left(\frac{10^{-9}}{36\pi} \right) (2.5) \\ &= 1.39 \times 10^{-4} \text{ (S/m)}.\end{aligned}$$

La potencia media disipada por unidad de volumen es

$$\begin{aligned}p &= \frac{1}{2}JE = \frac{1}{2}\sigma E^2 \\ &= \frac{1}{2} \times (1.39 \times 10^{-4}) \times 250^2 = 4.34 \quad (\text{W/m}^3).\end{aligned}$$

EJERCICIO 7.5

Un horno de microondas cocina los alimentos irradiándolos con potencia de microondas generada por un magnetrón. Suponga que la constante dieléctrica de un filete de vaca es 40 y que su tangente de pérdidas es de 0.35 a la frecuencia de funcionamiento de 2.45 (GHz). Use la amplitud de campo eléctrico indicada en el ejemplo 7-3 para calcular la potencia media por metro cúbico. (Ignore el *efecto de penetración*, el cual se analizará en la subsección 7.3-2.)

RESPUESTA : 59.6 (kW/m³).

Basándonos en el análisis anterior, el estudio del comportamiento para una dependencia armónica con el tiempo de un medio con pérdidas puede realizarse a partir de la ecuación (7-3) con sólo sustituir la k real por un número de onda complejo k_c :

$$k_c = \omega\sqrt{\mu\epsilon_c}. \tag{7-40}$$

Ahora hay que examinar la solución de la siguiente ecuación homogénea de Helmholtz:

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k_c^2 \mathbf{E} = 0. \quad (7-41)$$

Para seguir el convenio de notación usado en la teoría de las líneas de transmisión, se acostumbra definir una **constante de propagación**, γ , tal que

$$\boxed{\gamma = jk_c = j\omega\sqrt{\mu\epsilon_c} \quad (\text{m}^{-1})}. \quad (7-42)$$

Como γ es compleja, usamos la ecuación (7-36) para escribir

$$\gamma = \alpha + j\beta = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\left(1 + \frac{\sigma}{j\omega\epsilon}\right)^{1/2}, \quad (7-43)$$

o, a partir de la ecuación (7-37),

$$\gamma = \alpha + j\beta = j\omega\sqrt{\mu\epsilon'}\left(1 - j\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)^{1/2}, \quad (7-44)$$

donde α y β son las partes real e imaginaria de γ , respectivamente. En breve explicaremos su importancia física. En un medio sin pérdidas, $\sigma = 0$ ($\epsilon'' = 0$, $\epsilon = \epsilon'$), $\alpha = 0$ y $\beta = k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$.

Usando la ecuación (7-42), la ecuación (7-41) se convierte en

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \gamma^2 \mathbf{E} = 0. \quad (7-45a)$$

En el caso de una onda plana uniforme que se propaga en la dirección $+z$ y que está caracterizada por $\mathbf{E} = \mathbf{a}_x E_x$ y $\mathbf{H} = \mathbf{a}_y H_y$, la ecuación (7-45a) se reduce a

$$\frac{d^2 E_x}{dz^2} = \gamma^2 E_x. \quad (7-45b)$$

La solución de la ecuación (7-45b) es

$$E_x = E_0 e^{-\gamma z} = E_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}, \quad (7-46)$$

donde α y β son cantidades positivas. El primer factor, $e^{-\alpha z}$ se reduce al aumentar z y y por consiguiente es un factor de atenuación; α se denomina **constante de atenuación**. La unidad en el SI de la constante de atenuación es el neper por metro (Np/m).[†] El segundo factor, $e^{-j\beta z}$, es un factor de fase; β se conoce como **constante de fase** y se expresa en radianes por metro (rad/m). La constante de fase expresa la magnitud del cambio de fase que se produce cuando la onda viaja un metro.

Relación entre la constante de propagación y el número de onda

Constante de atenuación y su unidad en el SI

Constante de fase y su unidad en el SI

EJERCICIO 7.6 Suponga que la amplitud de la intensidad eléctrica de una onda plana que se propaga en un medio con pérdidas es 1 (mV/m) en P_1 y 0.8 (mV/m) en P_2 a 50 (m) de distancia. Encuentre

[†] Un neper es una cantidad sin dimensiones. Si $\alpha = 1$ (Np/m), entonces una amplitud unidad de una onda se reduce al valor e^{-1} (= 0.368) al propagarse una distancia de 1 (m). Una atenuación de 1 (Np/m) equivale a 20 $\log_{10} e = 8.69$ (dB/m).

- a) la atenuación total entre los puntos P_1 y P_2 , tanto en nepers como en decibeles, y
 b) α en (Np/m) y en (dB/m).

RESPUESTA : (a) 0.223 (Np), 1.94 (dB), (b) 0.00446 (Np/m), 0.0388 (dB/m).

7-3.1 DIELÉCTRICOS CON PEQUEÑAS PÉRDIDAS

Un dieléctrico con pequeñas pérdidas es un buen aislante pero imperfecto, con una conductividad equivalente distinta de cero, de manera que $\epsilon'' \ll \epsilon'$ o $\sigma/\omega\epsilon \ll 1$. Si se presenta esta condición podemos aproximar mediante el desarrollo del binomio la expresión de γ de la ecuación (7-44) a:

Constante de propagación de un dieléctrico con pérdidas

$$\gamma = \alpha + j\beta \cong j\omega\sqrt{\mu\epsilon'} \left[1 - j\frac{\epsilon''}{2\epsilon'} + \frac{1}{8} \left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'} \right)^2 \right],$$

de donde obtenemos la constante de atenuación

$$\alpha = \Re(\gamma) \cong \frac{\omega\epsilon''}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}} \quad (\text{Np/m}) \quad (7-47)$$

y la constante de fase

$$\beta = \Im(\gamma) \cong \omega\sqrt{\mu\epsilon'} \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'} \right)^2 \right] \quad (\text{rad/m}). \quad (7-48)$$

En la ecuación (7-47) podemos ver que la constante de atenuación de un dieléctrico con pequeñas pérdidas es una cantidad positiva y aproximadamente proporcional a la frecuencia. La constante de fase de la ecuación (7-48) varía muy poco con respecto al valor $\omega\sqrt{\mu\epsilon'}$ correspondiente a un dieléctrico perfecto (sin pérdidas).

La impedancia intrínseca de un dieléctrico con pequeñas pérdidas es una cantidad compleja.

Impedancia intrínseca de un dieléctrico con pérdidas

$$\begin{aligned} \eta_c &= \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}} \left(1 - j\frac{\epsilon''}{\epsilon'} \right)^{-1/2} \\ &\cong \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}} \left(1 + j\frac{\epsilon''}{2\epsilon'} \right) \quad (\Omega). \end{aligned} \quad (7-49)$$

La impedancia intrínseca es la razón de E_x y H_y de una onda plana uniforme, por lo que las intensidades de campo eléctrico y magnético en un dieléctrico con pérdidas no están en fase temporal, como lo están en un medio sin pérdidas.

La velocidad de fase u_p se obtiene de la razón ω/β . Usando la ecuación (7-48) tenemos

$$u_p = \frac{\omega}{\beta} \cong \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon'}} \left[1 - \frac{1}{8} \left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'} \right)^2 \right] \quad (\text{m/s}), \quad (7-50)$$

que es ligeramente menor que su valor cuando el medio no tiene pérdidas.

PREGUNTAS DE REPASO

- P.7-11 ¿Por qué la permitividad de un medio dieléctrico es una cantidad compleja?
- P.7-12 Defina la *tangente de pérdidas* de un medio.
- P.7-13 ¿Cuál es la relación entre la *constante de propagación* y el número de onda?
- P.7-14 Defina la *constante de atenuación* y la *constante de fase* de una onda que se propaga en un medio. ¿Cuáles son sus unidades en el SI?

COMENTARIOS

1. Los campos eléctrico y magnético de las ondas planas uniformes en medios *con pérdidas* están en cuadratura espacial y tienen distinta fase temporal.
2. Tanto α como β son cantidades reales y ambas son, por lo general, funciones de la frecuencia.
3. La atenuación de la amplitud de la onda en nepers es el logaritmo natural de la razón de la amplitud en el punto inicial y la amplitud en el punto final.
4. 1 (Np) = 8.69 (dB).

7-3.2 BUENOS CONDUCTORES

Un buen conductor es un medio en el cual $\sigma/\omega\epsilon \gg 1$. En esta situación es conveniente usar la ecuación (7-43) e ignorar 1 en comparación con $\sigma/\omega\epsilon$. Escribimos

$$\gamma \cong j\omega\sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{\frac{\sigma}{j\omega\epsilon}} = \sqrt{j}\sqrt{\omega\mu\sigma} = \frac{1+j}{\sqrt{2}}\sqrt{\omega\mu\sigma},$$

o

$$\gamma = \alpha + j\beta \cong (1+j)\sqrt{\pi f \mu \sigma}, \quad (7-51)$$

donde se han usado las relaciones

$$\sqrt{j} = (e^{j\pi/2})^{1/2} = e^{j\pi/4} = (1+j)/\sqrt{2}$$

y $\omega = 2\pi f$. La ecuación (7-51) indica que α y β son aproximadamente iguales en un buen conductor y ambos aumentan con \sqrt{f} y $\sqrt{\sigma}$. En un buen conductor,

$$\alpha = \beta = \sqrt{\pi f \mu \sigma}. \quad (7-52)$$

Constante de propagación de un buen conductor

La constante de atenuación y la constante de fase de un buen conductor son iguales.

Relación entre la impedancia intrínseca y la constante de atenuación de un buen conductor

Velocidad de fase en un buen conductor

Longitud de onda en un buen conductor

Profundidad de penetración

La impedancia intrínseca de un buen conductor es

$$\eta_c = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_c}} \cong \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} = (1+j)\sqrt{\frac{\pi f\mu}{\sigma}} = (1+j)\frac{\alpha}{\sigma} \quad (\Omega), \quad (7-53)$$

que tiene un ángulo de fase de 45° . Por consiguiente, la intensidad de campo magnético está 45° retrasada con respecto a la intensidad de campo eléctrico.

La velocidad de fase en un buen conductor es

$$u_p = \frac{\omega}{\beta} \cong \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}} \quad (\text{m/s}), \quad (7-54)$$

que es proporcional a \sqrt{f} y $1/\sqrt{\sigma}$. Tomemos como ejemplo el cobre:

$$\sigma = 5.80 \times 10^7 \quad (\text{S/m}),$$

$$\mu = 4\pi \times 10^{-7} \quad (\text{H/m}),$$

$$u_p = 720 \text{ (m/s)} \quad \text{a} \quad 3 \text{ (MHz)},$$

que es muchos órdenes de magnitud más lenta que la velocidad de la luz en el aire. La longitud de onda de una onda plana en un buen conductor es

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{u_p}{f} = 2\sqrt{\frac{\pi}{f\mu\sigma}} \quad (\text{m}). \quad (7-55)$$

En el caso del cobre a 3 (MHz) tenemos $\lambda = 0.24$ (mm). Como punto de comparación, una onda electromagnética de 3 (MHz) tiene una longitud de onda de 100 (m) en el aire.

La constante de atenuación α de un buen conductor a frecuencias muy altas tiende a ser muy grande, de acuerdo con la ecuación (7-52). En el caso del cobre a 3 (MHz),

$$\alpha = \sqrt{\pi(3 \times 10^6)(4\pi \times 10^{-7})(5.80 \times 10^7)} = 2.62 \times 10^4 \quad (\text{Np/m}).$$

Puesto que el factor de atenuación es $e^{-\alpha z}$, la amplitud de la onda estará atenuada con un factor de $e^{-1} = 0.368$ cuando se propague una distancia $\delta = 1/\alpha$. Esta distancia es de $(1/2.62) \times 10^{-4}$ (m) o 0.038 (mm) en el caso del cobre a 3 (MHz). A 10 (GHz) es sólo de 0.66 (μm), una distancia muy pequeña. Entonces, una onda electromagnética de alta frecuencia se atenúa con gran rapidez al propagarse en un buen conductor. La distancia δ a la cual la amplitud de una onda plana viajera se reduce en un factor de e^{-1} o 0.368 se conoce como *profundidad de piel* o *profundidad de penetración* del conductor.

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\pi f\mu\sigma}} \quad (\text{m}).$$

(7-56)

Como $\alpha = \beta$ en un buen conductor, también podemos escribir δ como

Determinación de la profundidad de penetración a partir de la conductividad y de la permeabilidad del conductor y de la frecuencia

$$\delta = \frac{1}{\beta} = \frac{\lambda}{2\pi} \quad (\text{m}). \quad (7-57)$$

La profundidad de penetración de un buen conductor a frecuencias de microondas es tan pequeña que podemos considerar, para fines prácticos, que los campos y las corrientes están confinados a una capa muy delgada (esto es, en la *piel*) de la superficie del conductor.

EJEMPLO 7-4

La intensidad de campo eléctrico de una onda plana uniforme polarizada linealmente que se propaga en el agua de mar en la dirección $+z$ es $\mathbf{E} = \mathbf{a}_x 100 \cos(10^7 \pi t)$ (V/m) en $z = 0$. Los parámetros constitutivos del agua de mar son $\epsilon_r = 72$, $\mu_r = 1$ y $\sigma = 4$ (S/m).

- Determine la constante de atenuación, la constante de fase, la impedancia intrínseca, la velocidad de fase, la longitud de onda y la profundidad de penetración.
- Calcule la distancia a la cual la amplitud de \mathbf{E} es el 1% de su valor en $z = 0$.
- Escriba las expresiones de $\mathbf{E}(z, t)$ y $\mathbf{H}(z, t)$ en $z = 0.8$ (m) como funciones de t .

SOLUCIÓN

$$\omega = 10^7 \pi \quad (\text{rad/s}),$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 5 \times 10^6 \text{ (Hz)} = 5 \text{ (MHz)},$$

$$\frac{\alpha}{\omega\epsilon} = \frac{\sigma}{\omega\epsilon_0\epsilon_r} = \frac{4}{10^7 \pi \left(\frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}\right) 72} = 200 \gg 1.$$

Podemos usar entonces las fórmulas de buenos conductores.

- Constante de atenuación:

$$\alpha = \sqrt{\pi f \mu \sigma} = \sqrt{5\pi 10^6 (4\pi 10^{-7}) 4} = 8.89 \quad (\text{Np/m}).$$

Constante de fase:

$$\beta = \sqrt{\pi f \mu \sigma} = 8.89 \quad (\text{rad/m}).$$

Impedancia intrínseca:

$$\begin{aligned} \eta_e &= (1 + j) \sqrt{\frac{\pi f \mu}{\sigma}} \\ &= (1 + j) \sqrt{\frac{\pi (5 \times 10^6) (4\pi \times 10^{-7})}{4}} = \pi e^{j\pi/4} \quad (\Omega). \end{aligned}$$

Velocidad de fase:

$$u_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{10^7 \pi}{8.89} = 3.53 \times 10^6 \quad (\text{m/s}).$$

Longitud de onda:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{8.89} = 0.707 \quad (\text{m}).$$

Profundidad de penetración:

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{8.89} = 0.112 \quad (\text{m}).$$

- b) Distancia z_1 a la cual la amplitud de la onda decrece al 1% de su valor en $z = 0$:

$$e^{-\alpha z_1} = 0.01 \quad 0 \quad e^{\alpha z_1} = \frac{1}{0.01} = 100,$$

$$z_1 = \frac{1}{\alpha} \ln 100 = \frac{4.605}{8.89} = 0.518 \quad (\text{m}).$$

- c) En notación fasorial,

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{a}_x 100 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}.$$

La expresión instantánea de \mathbf{E} es

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(z, t) &= \Re[\mathbf{E}(z)e^{j\omega t}] \\ &= \Re[\mathbf{a}_x 100 e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)}] = \mathbf{a}_x 100 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z). \end{aligned}$$

En $z = 0.8$ (m) tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(0.8, t) &= \mathbf{a}_x 100 e^{-0.8\alpha} \cos(10^7 \pi t - 0.8\beta) \\ &= \mathbf{a}_x 0.082 \cos(10^7 \pi t - 7.11) \\ &= \mathbf{a}_x 0.082 \cos(10^7 \pi t - 47.5^\circ)^* \quad (\text{V/m}). \end{aligned}$$

Sabemos que una onda plana uniforme es una onda TEM con $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$ y que ambos son normales a la dirección de propagación de la onda \mathbf{a}_z . Por lo tanto, $\mathbf{H} = \mathbf{a}_y H_y$. Para hallar $\mathbf{H}(z, t)$, la expresión instantánea de \mathbf{H} en función de t , no debemos cometer el error de escribir $H_y(z, t) = E_x(z, t)/h_c$, ya que esto sería una mezcla de las funciones temporales reales $E_x(z, t)$ y $H_x(z, t)$ con la cantidad compleja h_c . Es necesario emplear cantidades fasoriales $E_x(z)$ y $H_y(z)$; es decir,

$$H_y(z) = \frac{E_x(z)}{\eta_c},$$

[†] $7.11 \text{ (rad)} = 7.11 \times (180/\pi) = 407.4^\circ$, lo que equivale a $407.4^\circ - 360^\circ = 47.5^\circ$ en las relaciones de fase.

de donde obtenemos la relación entre las cantidades instantáneas

$$H_y(z, t) = \Re e \left[\frac{E_x(z)}{\eta_c} e^{j\omega t} \right].$$

En nuestro problema tenemos, en notación fasorial,

$$H_y(0.8) = \frac{100e^{-0.8\alpha} e^{-j0.8\beta}}{\pi e^{j\pi/4}} = \frac{0.082e^{-j7.11}}{\pi e^{j\pi/4}} = 0.026e^{-j1.61}.$$

Observe que *ambos* ángulos deben estar en radianes antes de combinarlos. La expresión instantánea de \mathbf{H} en $z = 0.8$ (m) es entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(0.8, t) &= \mathbf{a}_y 0.026 \cos(10^7 \pi t - 1.61) \\ &= \mathbf{a}_y 0.026 \cos(10^7 \pi t - 92.3^\circ) \quad (\text{A/m}). \end{aligned}$$

Vemos que una onda plana de 5 (MHz) se atenúa con gran rapidez en el agua de mar y se hace insignificantemente débil a muy corta distancia de la fuente. (Las amplitudes de los campos a una profundidad de 0.8 (m) se reducen a 0.082/100 = 0.00082 veces su valor en la superficie.) La comunicación a larga distancia con submarinos sumergidos es muy difícil, incluso a muy bajas frecuencias.

EJERCICIO 7.7 Determine la frecuencia a la cual la profundidad de penetración en el agua de mar es de diez metros. Calcule la longitud de onda correspondiente en el agua de mar y compárela con la del aire.

RESPUESTA : 633 (Hz), 62.8 (m), 474 (km).

PREGUNTAS DE REPASO

P.7-15 ¿Qué distingue un buen conductor de un buen aislante a una frecuencia determinada?

P.7-16 ¿Qué significa la *profundidad de penetración* de un buen conductor?

COMENTARIOS

- La constante de atenuación y la constante de fase de un buen conductor son numéricamente iguales.
- La impedancia intrínseca de un buen conductor tiene un ángulo de fase de 45° .
- La profundidad de penetración de un buen conductor es numéricamente igual al inverso de su constante de atenuación e inversamente proporcional a \sqrt{f} y $\sqrt{\sigma}$.
- La profundidad de penetración de los buenos conductores es menor que 1 (μm) a 10 (GHz).

7-4 VELOCIDAD DE GRUPO

Definición de la velocidad de fase

En la ecuación (7-10) definimos la velocidad de fase, u_p , de una onda plana de frecuencia única, como la velocidad de propagación de un frente de onda de fase constante. La relación entre u_p y la constante de fase, β , es

$$u_p = \frac{\omega}{\beta} \quad (\text{m/s}). \quad (7-58)$$

$\beta = k = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$ es una función lineal de ω para las ondas planas en un medio sin pérdidas. Por lo tanto, la velocidad de fase $u_p = 1/\sqrt{\mu \epsilon}$ es una constante independiente de la frecuencia. Sin embargo, en algunos casos (como la propagación de onda en un dieléctrico con pérdidas, como vimos antes, o en una línea de transmisión o en una guía de ondas) la constante de fase no es una función lineal de ω ; las ondas de distinta frecuencia se propagarán con diferente velocidad de fase. Ya que todas las señales que transportan información consisten en una banda de frecuencias, las ondas a las distintas componentes en frecuencia se propagarán con velocidades de fase diferentes, produciendo una distorsión en la forma de onda de la señal; la señal se “dispersa”. El fenómeno de la distorsión de la señal causado por el hecho de que la velocidad de fase dependa de la frecuencia se conoce como **dispersión**. A partir de las ecuaciones (7-50) y (7-39) llegamos a la conclusión de que un dieléctrico con pérdidas es un **medio dispersor**.

Dispersión

Definición de la velocidad de grupo

Una señal que transmite información normalmente tiene un intervalo de frecuencias (bandas laterales) muy pequeño alrededor de una portadora de alta frecuencia. Esta señal constituye un “grupo” de frecuencias y forma un paquete de ondas. La **velocidad de grupo** es la velocidad de propagación de la envolvente del paquete de ondas (o de un grupo de frecuencias).

Considere el más sencillo de los casos: un paquete de ondas que consiste en dos ondas viajeras de igual amplitud y frecuencias angulares ligeramente distintas $\omega_0 + \Delta\omega$ y $\omega_0 - \Delta\omega$ ($\Delta\omega \ll \omega_0$). Las constantes de fase también serán un poco diferentes, ya que son funciones de la frecuencia. Sean $\beta_0 + \Delta\beta$ y $\beta_0 - \Delta\beta$ las constantes de fase correspondientes a las dos frecuencias. Tenemos entonces

$$\begin{aligned} E(z, t) &= E_0 \cos [(\omega_0 + \Delta\omega)t - (\beta_0 + \Delta\beta)z] \\ &\quad + E_0 \cos [(\omega_0 - \Delta\omega)t - (\beta_0 - \Delta\beta)z] \\ &= 2E_0 \cos (t \Delta\omega - z \Delta\beta) \cos (\omega_0 t - \beta_0 z). \end{aligned} \quad (7-59)$$

Como $\Delta\omega \ll \omega_0$, la expresión en la ecuación (7-59) representa una onda que oscila rápidamente con frecuencia angular ω_0 y con una amplitud que varía lentamente con una frecuencia angular $\Delta\omega$. Esta estructura de onda se ilustra en la figura 7-6.

La onda dentro de la envolvente se propaga con una velocidad de fase determinada al poner $\omega_0 t - \beta_0 z = \text{constante}$:

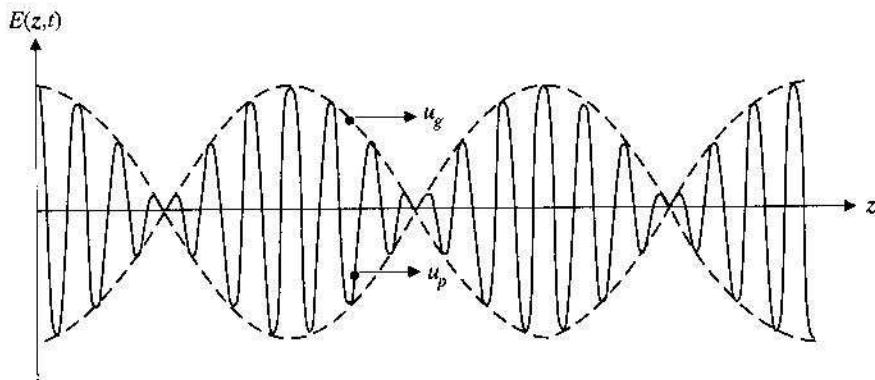


FIGURA 7-6 Suma de dos ondas viajeras con dependencia armónica con el tiempo, con igual amplitud y frecuencias ligeramente distintas en un instante t determinado.

$$u_p = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega_0}{\beta_0}.$$

Podemos determinar la velocidad de la envolvente (la *velocidad de grupo* u_g) igualando a una constante el argumento del primer factor coseno de la ecuación (7-58):

$$t \Delta\omega - z \Delta\beta = \text{constante},$$

de lo cual obtenemos

$$u_g = \frac{dz}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta} = \frac{1}{\Delta\beta/\Delta\omega}.$$

En el límite donde $\Delta\omega \rightarrow 0$ tenemos la fórmula para calcular la velocidad de grupo en un medio dispersivo:

$$u_g = \frac{1}{d\beta/d\omega} \quad (\text{m/s}).$$

(7-60)

Fórmula de la velocidad de grupo en medios dispersivos

Ésta es la velocidad de un punto en la envolvente del paquete de ondas, como se ilustra en la figura 7-6 y se identifica como la velocidad de una señal de banda estrecha. La velocidad de grupo en un medio dispersivo puede ser mayor o menor que la velocidad de fase. Se dice que un medio presenta dispersión normal si $u_g < u_p$, y dispersión anómala si $u_g > u_p$. No hay dispersión cuando $u_g = u_p$.

PREGUNTAS DE REPASO

P.7-17 ¿Qué significa la *dispersión* de una señal? Proporcione un ejemplo de un medio dispersivo.

P.7-18 Defina la *velocidad de grupo*. ¿Cómo difiere la velocidad de grupo de la velocidad de fase?

COMENTARIOS

- Las señales que transportan información se propagan sin dispersión únicamente en medios no dispersivos.
- Un medio es no dispersivo si β es una función lineal (directamente proporcional) de ω .

7-5 FLUJO DE POTENCIA ELECTROMAGNÉTICA Y VECTOR DE POYNTING

Las ondas electromagnéticas transportan energía electromagnética. La energía se transporta por el espacio a puntos receptores distantes a través de ondas electromagnéticas. A continuación derivaremos una relación entre la razón de transferencia de tal energía y las intensidades de campos eléctricos y magnéticos asociados con la onda electromagnética que se propaga.

Comenzamos con las ecuaciones de rotacional:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (6-45a)(7-61)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (6-45b)(7-62)$$

Podemos comprobar directamente la siguiente identidad de operaciones vectoriales si usamos coordenadas cartesianas:

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}). \quad (7-63)$$

Al sustituir las ecuaciones (7-61) y (7-62) en la ecuación (7-63) se obtiene

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}. \quad (7-64)$$

Para un medio simple cuyos parámetros constitutivos ϵ , μ y σ no cambian con el tiempo, tenemos

$$\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{H} \cdot \frac{\partial(\mu \mathbf{H})}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial(\mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H})}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mu H^2 \right),$$

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial(\epsilon \mathbf{E})}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial(\epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E})}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon E^2 \right),$$

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = \mathbf{E} \cdot (\sigma \mathbf{E}) = \sigma E^2.$$

Podemos escribir entonces la ecuación (7-64) como sigue:

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 \right) - \sigma E^2. \quad (7-65)$$

que es una relación de función puntual. Al integrar ambos lados sobre el volumen que nos interesa se obtiene una forma integral de la ecuación 7-65:

$$\oint_s (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 \right) dv - \int_V \sigma E^2 dv, \quad (7-66)$$

donde se ha aplicado el teorema de la divergencia para convertir la integral de volumen de $\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$ en la integral de superficie cerrada de $(\mathbf{E} \times \mathbf{H})$.

Vemos que el primero y el segundo términos del lado derecho de la ecuación (7-66) representan la razón de cambio temporal de la energía almacenada en los campos eléctrico y magnético, respectivamente (compare con las ecuaciones (3-106) y (5-106)). El último término es la potencia óhmica disipada en el volumen como resultado del flujo de la densidad de corriente de conducción σE en presencia de un campo eléctrico \mathbf{E} . Podemos entonces interpretar el lado derecho de la ecuación (7-66) como la *razón de reducción* de las energías eléctrica y magnética almacenadas, menos la potencia óhmica disipada en forma de calor en el volumen V . Esto debe ser igual a la potencia (razón de energía) que *sale* del volumen a través de su superficie, para ser consistentes con la ley de la conservación de la energía. Por consiguiente, la cantidad $(\mathbf{E} \times \mathbf{H})$ es un vector que representa el flujo de potencia por unidad de área. Definamos

$$\mathcal{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (\text{W/m}^2). \quad (7-67)$$

Definición del vector de Poynting

La cantidad \mathcal{P} se conoce como **vector de Poynting**, y es un vector de densidad de potencia asociado con el campo electromagnético. La afirmación de que la integral de superficie de \mathcal{P} sobre una superficie cerrada, dada por el lado izquierdo de la ecuación (7-66), es igual a la potencia que sale del volumen encerrado, se conoce como **teorema de Poynting**. Esta afirmación no está limitada a ondas planas.

Podemos escribir la ecuación (7-66) de otra manera:

$$-\oint_s \mathcal{P} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V (w_e + w_m) dv + \int_V p_\sigma dv, \quad (7-68)$$

donde

$$w_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* = \text{densidad de energía magnética}, \quad (7-69)$$

$$w_m = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} \mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* = \text{densidad de energía eléctrica}, \quad (7-70)$$

$$p_\sigma = \sigma E^2 = J^2/\sigma = \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* = \mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^*/\sigma = \text{densidad de potencia óhmica}. \quad (7-71)$$

Dicho con palabras, la ecuación (7-68) establece que la potencia total que fluye *hacia dentro* de una superficie cerrada en un instante cualquiera será igual a la suma de las razones de incremento de las energías eléctrica y magnética almacenadas y de la potencia óhmica disipada dentro del volumen limitado por la superficie. Un asterisco en una cantidad denota el conjugado complejo de dicha cantidad.

Teorema de Poynting

EJEMPLO 7-5

Encuentre el vector de Poynting sobre la superficie de un alambre conductor recto, muy largo (de radio b y conductividad σ) por el que circula una corriente continua I . Verifique el teorema de Poynting.

SOLUCIÓN

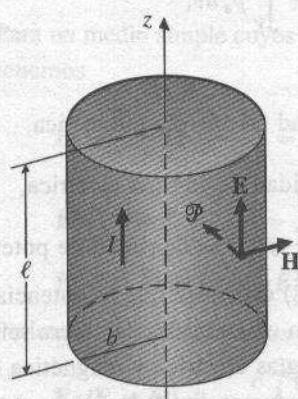
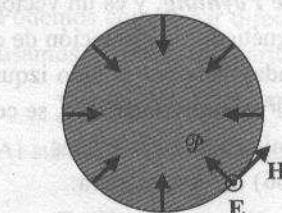
Puesto que se trata de una situación de corriente continua, la corriente en el alambre se distribuye de manera uniforme sobre su sección transversal. Supongamos que el eje del alambre coincide con el eje z . En la figura 7-7 se muestra un segmento de longitud ℓ del alambre largo. Tenemos

$$\mathbf{J} = \mathbf{a}_z \frac{I}{\pi b^2}$$

y

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}}{\sigma} = \mathbf{a}_z \frac{I}{\sigma \pi b^2}.$$

FIGURA 7-7 Ilustración del teorema de Poynting (ejemplo 7.5).



En la superficie del alambre,

$$\mathbf{H} = \mathbf{a}_\phi \frac{I}{2\pi b}.$$

Por lo tanto, el vector de Poynting en la superficie del alambre es

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \mathbf{E} \times \mathbf{H} = (\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_\phi) \frac{I^2}{2\sigma\pi^2 b^3} \\ &= -\mathbf{a}_r \frac{I^2}{2\sigma\pi^2 b^3},\end{aligned}$$

dirigido en todos los puntos hacia el interior de la superficie del alambre.

Para verificar el teorema de Poynting integramos \mathcal{P} sobre la pared del segmento de alambre de la figura 7-7:

$$\begin{aligned}-\oint_S \mathcal{P} \cdot d\mathbf{s} &= -\oint_S \mathcal{P} \cdot \mathbf{a}_r ds = \left(\frac{I^2}{2\sigma\pi^2 b^3} \right) 2\pi b \ell \\ &= I^2 \left(\frac{\ell}{\sigma\pi b^2} \right) = I^2 R,\end{aligned}$$

donde hemos usado la fórmula de la resistencia de un alambre recto presentada en la ecuación (4-16), $R = \ell/\sigma S$. El resultado anterior confirma que la integral de superficie negativa del vector de Poynting es exactamente igual a la pérdida de potencia óhmica $I^2 R$ en el alambre conductor. Así queda verificado el teorema de Poynting.

7-5.1 DENSIDADES DE POTENCIA INSTANTÁNEA Y MEDIA

Hemos visto la conveniencia de usar la notación fasorial al manejar ondas electromagnéticas con dependencia armónica con el tiempo. El valor instantáneo de una cantidad es entonces la parte real del producto de la cantidad fasorial por $e^{j\omega t}$ cuando se usa $\cos \omega t$ como referencia. Por ejemplo, si tenemos el fasor

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{a}_x E_x(z) = \mathbf{a}_x E_0 e^{-(\alpha + j\beta)z}, \quad (7-72)$$

la expresión instantánea es

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(z, t) &= \Re e[\mathbf{E}(z)e^{j\omega t}] = \mathbf{a}_x E_0 e^{-\alpha z} \Re e[e^{j(\omega t - \beta z)}] \\ &= \mathbf{a}_x E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z).\end{aligned} \quad (7-73)$$

Ecritura de la expresión instantánea a partir de un fasor

En el caso de una onda plana uniforme que se propaga en la dirección $+z$ en un medio con pérdidas, el fasor de intensidad de campo magnético asociado es

$$\mathbf{H}(z) = \mathbf{a}_y H_y(z) = \mathbf{a}_y \frac{E_0}{|\eta_c|} e^{-\alpha z} e^{-j(\beta z + \theta_y)}, \quad (7-74)$$

donde $\theta\eta$ es el ángulo de fase de la impedancia intrínseca $\eta_c = |\eta_c| e^{j\theta\eta}$ del medio. La correspondiente expresión instantánea de $\mathbf{H}(z)$ es

$$\mathbf{H}(z, t) = \Re[\mathbf{H}(z)e^{j\omega t}] = \mathbf{a}_y \frac{E_0}{|\eta_c|} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z - \theta_\eta). \quad (7-75)$$

La expresión instantánea del vector de Poynting o vector de densidad de potencia es, basándose en las ecuaciones (7-72) y (7-74),

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(z, t) &= \mathbf{E}(z, t) \times \mathbf{H}(z, t) = \Re[\mathbf{E}(z)e^{j\omega t}] \times \Re[\mathbf{H}(z)e^{j\omega t}] \\ &= \mathbf{a}_z \frac{E_0^2}{|\eta_c|} e^{-2\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \cos(\omega t - \beta z - \theta_\eta) \\ &= \mathbf{a}_z \frac{E_0^2}{2|\eta_c|} e^{-2\alpha z} [\cos \theta_\eta + \cos(2\omega t - 2\beta z - \theta_\eta)]. \end{aligned} \quad (7-76)^*$$

En lo que se refiere a la potencia transmitida por una onda electromagnética, su valor medio es una cantidad más relevante que su valor instantáneo. Utilizando la ecuación (7-76) obtenemos el promedio temporal del vector de Poynting, $\mathcal{P}_{av}(z)$:

Densidad de potencia media transmitida por una onda plana uniforme en la dirección z

$$\mathcal{P}_{av}(z) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{P}(z, t) dt = \mathbf{a}_z \frac{E_0^2}{2|\eta_c|} e^{-2\alpha z} \cos \theta_\eta \quad (\text{W/m}^2), \quad (7-77)$$

donde $T = 2\pi/\omega$ es el período temporal de la onda. El segundo término del lado derecho de la ecuación (7-76) es una función coseno de frecuencia doble cuyo valor medio es cero en un período fundamental. En el caso de la propagación de ondas en un medio con pérdidas, $\eta_c \rightarrow \eta$ es real, $\sigma = 0$ y $\theta\eta = 0$; entonces, la ecuación (7-77) se reduce a

$$\mathcal{P}_{av}(z) = \mathbf{a}_z \frac{E_0^2}{2\eta} \quad (\text{W/m}^2). \quad (7-78)$$

Es probable que en el caso general no estemos tratando con una onda que se propaga en la dirección z , así que escribimos

$$\mathcal{P}_{av} = \frac{1}{2} \Re(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \quad (\text{W/m}^2), \quad (7-79)$$

Fórmula general para la densidad de potencia media en una onda que se propaga

que es una fórmula general para calcular la densidad de potencia media en una onda que se propaga.

- **EJERCICIO 7.8** Sustituya en la ecuación (7-79) las expresiones fasoriales de $\mathbf{E}(z)$ y $\mathbf{H}(z)$ dadas por las ecuaciones (7-72) y (7-74) para verificar el valor de \mathcal{P}_{av} obtenido en la ecuación (7-77).

* Aquí hemos usado la identidad trigonométrica $\cos \theta_1 \cos \theta_2 = \frac{1}{2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + \cos(\theta_1 + \theta_2)]$.

EJEMPLO 7-6

Las expresiones fasoriales del campo lejano a una distancia R de un pequeño elemento vertical de corriente $I d\ell$, situado en el origen de un sistema de coordenadas esféricas en el espacio libre, son

$$\mathbf{E}(R, \theta) = \mathbf{a}_\theta E_\theta(R, \theta) = \mathbf{a}_\theta \left(j \frac{60\pi I d\ell}{\lambda R} \sin \theta \right) e^{-j\beta R} \quad (\text{V/m}) \quad (7-80)$$

y

$$\mathbf{H}(R, \theta) = \mathbf{a}_\phi \frac{E_\theta(R, \theta)}{\eta_0} = \mathbf{a}_\phi \left(j \frac{I d\ell}{2\lambda R} \sin \theta \right) e^{-j\beta R} \quad (\text{A/m}), \quad (7-81)$$

donde $\lambda = 2\pi/\beta$ es la longitud de onda.

- Escriba la expresión del vector de Poynting instantáneo.
- Calcule la potencia media total radiada por el elemento de corriente.

SOLUCIÓN

- a) Observamos que $E_\theta/H_\phi = \eta_0 = 120\pi (\Omega)$. El vector de Poynting instantáneo es

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(R, \theta; t) &= \Re[e[\mathbf{E}(R, \theta)e^{j\omega t}] \times \Re[e[\mathbf{H}(R, \theta)e^{j\omega t}]] \\ &= (\mathbf{a}_\theta \times \mathbf{a}_\phi) 30\pi \left(\frac{I d\ell}{\lambda R} \right)^2 \sin^2 \theta \sin^2(\omega t - \beta R) \\ &= \mathbf{a}_R 15\pi \left(\frac{I d\ell}{\lambda R} \right)^2 \sin^2 \theta [1 - \cos 2(\omega t - \beta R)] \quad (\text{W/m}^2). \end{aligned}$$

- b) El vector de densidad de potencia media es, a partir de la ecuación (7-79),

$$\mathcal{P}_{av}(R, \theta) = \mathbf{a}_R 15\pi \left(\frac{I d\ell}{\lambda R} \right)^2 \sin^2 \theta, \quad (7-82)$$

que, como podemos ver, es igual al valor medio temporal de $\mathcal{P}(R, \theta; t)$ expresado en el apartado (a) de esta solución. La potencia media total radiada se obtiene integrando $\mathcal{P}_{av}(R, \theta)$ sobre la superficie de la esfera de radio R :

$$\begin{aligned} \text{Total } P_{av} &= \oint_S \mathcal{P}_{av}(R, \theta) \cdot d\mathbf{s} \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[15\pi \left(\frac{I d\ell}{\lambda R} \right)^2 \sin^2 \theta \right] R^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= 40\pi^2 \left(\frac{d\ell}{\lambda} \right)^2 I^2 \quad (\text{W}), \end{aligned} \quad (7-83)$$

donde I es la amplitud ($\sqrt{2}$ veces el valor eficaz) de la corriente senoidal en $d\ell$.

- **EJERCICIO 7.9** Remítase al ejemplo 7-6. Suponga $I = 5$ (A) y $d\ell = \lambda/20$; determine la potencia interceptada en el campo lejano a una distancia de 9 (m) por una superficie esférica enfrentada al elemento de corriente y definida por $80^\circ \leq \theta \leq 100^\circ$ y $0^\circ \leq \phi \leq 20^\circ$.

RESPUESTA : 0.354 (W).

PREGUNTAS DE REPASO

P.7-19 Defina el *vector de Poynting*. ¿Cuál es la unidad en el SI de este vector?

P.7-20 Enuncie el teorema de Poynting.

P.7-21 Escriba las expresiones de (a) el vector de Poynting instantáneo y (b) el vector de Poynting promedio temporal; en ambos casos refiérase a un campo electromagnético con dependencia armónica con el tiempo y escriba las expresiones en términos de los vectores de intensidad de campo eléctrico y magnético.

COMENTARIOS

1. El vector de Poynting \mathcal{P} tiene dirección normal a \mathbf{E} y \mathbf{H} .
2. El teorema de Poynting es una manifestación del principio de conservación de la energía.
3. Observe que $\mathcal{P}(z, t) = \Re[\mathbf{E}(z)e^{j\omega t}] \times \Re[\mathbf{H}(z)e^{j\omega t}]$
 $\neq \Re[\mathbf{E}(z) \times \mathbf{H}(z)]e^{j\omega t}$;

es decir, no es correcto obtener primero el producto cruz de \mathbf{E} por \mathbf{H} y luego tomar la parte real del producto.

7-6 INCIDENCIA NORMAL DE ONDAS PLANAS SOBRE PLANOS DE DISCONTINUIDAD

Hasta ahora sólo hemos visto la propagación de ondas planas uniformes en un medio homogéneo ilimitado. Lo más común en la práctica es que las ondas se propaguen en regiones limitadas donde están presentes varios medios con parámetros constitutivos diferentes. Una onda electromagnética que se propaga en un medio experimenta una reflexión cuando llega a otro medio con impedancia intrínseca diferente. A menos que el segundo medio sea un conductor perfecto, parte de la potencia incidente se transmite a éste. En esta sección estudiaremos el caso más simple de la incidencia normal de ondas planas uniformes sobre una superficie de discontinuidad plana. En la sección siguiente veremos el caso más general de la incidencia oblicua.

Considere la situación ilustrada en la figura 7-8, donde la onda incidente ($\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i$) en el medio 1 (ϵ_1, μ_1) se propaga en la dirección $+z$ hacia el medio 2 (ϵ_2, μ_2). La superficie de separación es el plano $z = 0$. Suponemos que ninguno de los medios presenta pérdidas. Los fasores de intensidad de campo eléctrico y magnético incidentes son ($\mathbf{a}_{ki} = \mathbf{a}_z$):

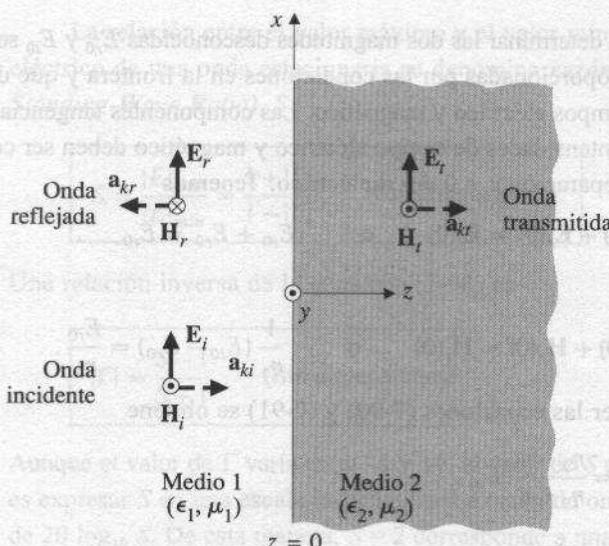


FIGURA 7-8 Onda plana que incide normalmente sobre la frontera de un dieléctrico plano.

$$\mathbf{E}_i(z) = \mathbf{a}_x E_{i0} e^{-j\beta_1 z}, \quad (7-84)$$

$$\mathbf{H}_i(z) = \mathbf{a}_y \frac{E_{i0}}{\eta_1} e^{-j\beta_1 z}. \quad (7-85)$$

Debido a la discontinuidad del medio en $z = 0$, parte de la onda incidente es reflejada de nuevo hacia el medio 1 y parte se transmite al medio 2. Tenemos entonces

- a) *Para la onda reflejada ($\mathbf{E}_r, \mathbf{H}_r$): $\mathbf{a}_{kr} = -\mathbf{a}_z$*

$$\mathbf{E}_r(z) = \mathbf{a}_x E_{r0} e^{j\beta_1 z}, \quad (7-86)$$

$$\mathbf{H}_r(z) = (-\mathbf{a}_z) \times \frac{1}{\eta_1} \mathbf{E}_r(z) = -\mathbf{a}_y \frac{E_{r0}}{\eta_1} e^{j\beta_1 z}. \quad (7-87)$$

- b) *Para la onda transmitida ($\mathbf{E}_t, \mathbf{H}_t$): $\mathbf{a}_{kt} = \mathbf{a}_z$*

$$\mathbf{E}_t(z) = \mathbf{a}_x E_{t0} e^{-j\beta_2 z}, \quad (7-88)$$

$$\mathbf{H}_t(z) = \mathbf{a}_z \times \frac{1}{\eta_2} \mathbf{E}_t(z) = \mathbf{a}_y \frac{E_{t0}}{\eta_2} e^{-j\beta_2 z}, \quad (7-89)$$

donde E_{i0} es la magnitud de \mathbf{E}_i en $z = 0$ y β_2 y η_2 son la constante de fase y la impedancia intrínseca del medio 2, respectivamente. Observe que las direcciones de las flechas de \mathbf{E} y \mathbf{H} en la figura 7-8 se han dibujado de forma arbitraria, ya que \mathbf{E}_{r0} y \mathbf{E}_{t0} pueden ser positivos o negativos, dependiendo de la magnitud relativa de los parámetros constitutivos de los dos medios.

Para determinar las dos magnitudes desconocidas E_{r0} y E_{i0} se requieren dos ecuaciones, proporcionadas por las condiciones en la frontera y que deben ser satisfechas por los campos eléctrico y magnético. Las componentes tangenciales (componentes en x) de las intensidades de campo eléctrico y magnético deben ser continuas en la superficie de separación $z = 0$ del dieléctrico. Tenemos

$$\mathbf{E}_i(0) + \mathbf{E}_r(0) = \mathbf{E}_t(0) \quad \text{o} \quad E_{i0} + E_{r0} = E_{t0} \quad (7-90)$$

y

$$\mathbf{H}_i(0) + \mathbf{H}_r(0) = \mathbf{H}_t(0) \quad \text{o} \quad \frac{1}{\eta_1} (E_{i0} - E_{r0}) = \frac{E_{t0}}{\eta_2}. \quad (7-91)$$

Al resolver las ecuaciones (7-90) y (7-91) se obtiene

$$E_{r0} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} E_{i0}, \quad (7-92)$$

$$E_{i0} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} E_{t0}. \quad (7-93)$$

Las razones E_{r0}/E_{i0} y E_{i0}/E_{t0} se denominan **coeficiente de reflexión** y **coeficiente de transmisión**, respectivamente. En términos de las impedancias intrínsecas son

$$\Gamma = \frac{E_{r0}}{E_{i0}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \quad (\text{Incidencia normal}) \quad (7-94)$$

y

$$\tau = \frac{E_{i0}}{E_{t0}} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \quad (\text{Incidencia normal}) \quad (7-95)$$

Las definiciones de Γ y τ que aparecen en las ecuaciones (7-94) y (7-95) son aplicables incluso si los medios son disipativos, es decir, incluso cuando η_1 y/o η_2 sean complejos. Por consiguiente, Γ y τ pueden ser complejos en el caso general. Los coeficientes de reflexión y transmisión están relacionados por la siguiente ecuación:

$$1 + \Gamma = \tau \quad (\text{Incidencia normal}) \quad (7-96)$$

El campo total en el medio 1 ($\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$) es la suma de los campos incidentes y reflejados. A partir de las ecuaciones (7-84) y (7-86) tenemos

$$\mathbf{E}_1(z) = \mathbf{a}_x E_{i0} e^{-j\beta_1 z} (1 + \Gamma e^{j2\beta_1 z}), \quad (7-97)$$

que es una función de z . $|\mathbf{E}_1(z)|$ tendrá valores máximo y mínimo en las posiciones donde el factor $(1 + \Gamma e^{j2\beta_1 z})$ sea máximo y mínimo, respectivamente. (La magnitud de $e^{-2\beta_1 z}$ es la unidad.) De hecho, se tiene una onda estacionaria en el medio 1.

Coefficientes de reflexión y de transmisión

Relación entre los coeficientes de reflexión y de transmisión para la incidencia normal

Onda incidente más onda reflejada → onda estacionaria

La relación entre el valor máximo y el valor mínimo de la intensidad de campo eléctrico de una onda estacionaria se denomina **razón de onda estacionaria (SWR, Standing-Wave Ratio), S**.

Razón de onda estacionaria

Determinación de la magnitud del coeficiente de reflexión a partir de la razón de onda estacionaria

Intervalo de valores de $|\Gamma| : 0 \text{ a } +1$

Intervalo de valores de S: 1 a ∞

$$S = \frac{|E|_{\max}}{|E|_{\min}} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} \quad (\text{Sin dimensiones}). \quad (7-98)$$

Una relación inversa de la ecuación (7-98) es

$$|\Gamma| = \frac{S - 1}{S + 1} \quad (\text{Sin dimensiones}). \quad (7-99)$$

Aunque el valor de Γ varía entre -1 y $+1$, el valor de S puede ir de 1 a ∞ . Lo más usual es expresar S en una escala logarítmica. La razón de onda estacionaria en decibeles es de $20 \log_{10} S$. De esta manera, $S = 2$ corresponde a una razón de onda estacionaria de $20 \log_{10} 2 = 6.02$ (dB) y $|\Gamma| = (2 - 1)/(2 + 1) = \frac{1}{3}$. Una razón de onda estacionaria de 2 (dB) es equivalente a $S = 1.26$ y $|\Gamma| = 0.115$.

- **EJERCICIO 7.10** a) Convierta $\Gamma = 0.20$ en S en (dB).
b) Convierta $S = 3$ (dB) en el coeficiente de reflexión $|\Gamma|$.

RESPUESTA : (a) 3.52 (dB), (b) 0.17.

La intensidad de campo magnético en el medio 1 se obtiene considerando las ecuaciones (7-85) y (7-87) para $\mathbf{H}_1(z)$ y $\mathbf{H}_r(z)$, respectivamente:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1(z) &= \mathbf{a}_y \frac{E_{i0}}{\eta_1} (e^{-j\beta_1 z} - \Gamma e^{j\beta_1 z}) \\ &= \mathbf{a}_y \frac{E_{i0}}{\eta_1} e^{-j\beta_1 z} (1 - \Gamma e^{j2\beta_1 z}). \end{aligned} \quad (7-100)$$

Hay que comparar esto con $\mathbf{E}_1(z)$ en la ecuación (7-97). Γ es real en un medio no disipativo; $|\mathbf{H}_1(z)|$ será un mínimo en las posiciones donde $|\mathbf{E}_1(z)|$ sea un máximo, y viceversa.

$(\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i)$ constituye la onda transmitida que se propaga en la dirección $+z$ en el medio 2. A partir de las ecuaciones (7-88) y (7-95) tenemos

$$\mathbf{E}_i(z) = \mathbf{a}_x \tau E_{i0} e^{-j\beta_2 z}. \quad (7-101)$$

Además, de la ecuación (7-89) obtenemos

$$\mathbf{H}_i(z) = \mathbf{a}_y \frac{\tau}{\eta_2} E_{i0} e^{-j\beta_2 z}. \quad (7-102)$$

EJEMPLO 7-7

Una onda plana uniforme en un medio sin pérdidas con impedancia intrínseca η_1 incide normalmente sobre otro medio sin pérdidas con impedancia intrínseca η_2 , a través de una superficie de separación plana.

- Obtenga la expresión de las densidades de potencia media temporal en ambos medios.
- Encuentre la razón de onda estacionaria en el medio 1 si $\eta_2 = 2\eta_1$.

SOLUCIÓN

- La ecuación (7-79) nos proporciona la fórmula para calcular la densidad de potencia media temporal o el vector de Poynting medio temporal:

$$\mathcal{P}_{av} = \frac{1}{2}\Re e(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \quad (7-103)$$

Usamos las ecuaciones (7-97) y (7-100) para el medio 1:

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_{av})_1 &= \mathbf{a}_z \frac{E_{i0}^2}{2\eta_1} \Re e[(1 + \Gamma e^{j2\beta_1 z})(1 - \Gamma e^{-j2\beta_1 z})] \\ &= \mathbf{a}_z \frac{E_{i0}^2}{2\eta_1} \Re e[(1 - \Gamma^2) + \Gamma(e^{j2\beta_1 z} - e^{-j2\beta_1 z})] \\ &= \mathbf{a}_z \frac{E_{i0}^2}{2\eta_1} \Re e[(1 - \Gamma^2) + j2\Gamma \sin 2\beta_1 z] \\ &= \mathbf{a}_z \frac{E_{i0}^2}{2\eta_1} (1 - \Gamma^2) \quad (\text{W/m}^2), \end{aligned} \quad (7-104)$$

donde Γ es un número real porque los dos medios no tienen pérdidas.

En el medio 2 usamos las ecuaciones (7-101) y (7-102) para obtener

$$(\mathcal{P}_{av})_2 = \mathbf{a}_z \frac{E_{i0}^2}{2\eta_2} \tau^2 \quad (\text{W/m}^2). \quad (7-105)$$

Como estamos tratando con medios sin pérdidas, el flujo de potencia en el medio 1 debe ser igual al del medio 2; es decir,

$$(\mathcal{P}_{av})_1 = (\mathcal{P}_{av})_2, \quad (7-106)$$

o

$$1 - \Gamma^2 = \frac{\eta_1}{\eta_2} \tau^2. \quad (7-107)$$

Es fácil comprobar que la ecuación (7-107) es correcta, usando las ecuaciones (7-94) y (7-95).

- Si $\eta_2 = 2\eta_1$,

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{1}{3}.$$

Entonces, a partir de la ecuación (7-98),

$$S = \frac{1 + 1/3}{1 - 1/3} = 2.$$

Expresado en decibeles, $S = 20 \log_{10} 2 = 6.02$ (dB).

- EJERCICIO 7.11** Dado un campo $\mathbf{E}_i(z, t) = \mathbf{a}_y 24 \cos(10^8 t - \beta z)$ (V/m) en el aire, que incide normalmente sobre un medio sin pérdidas con $\epsilon_{r2} = 2.25$, $\mu_{r2} = 1$ en la región $z \geq 0$, calcule (a) β , Γ , S , τ ; (b) $\mathbf{E}_o(z, t)$; (c) $\mathbf{E}_2(z, t)$; (d) $\mathbf{H}_2(z, t)$; y (e) $(\mathcal{P}_{av})_z$.

RESPUESTA : (a) $1/3$ (rad/m), -0.2 , 1.5 , 0.8 ; (b) $-\mathbf{a}_y 4.8 \cos(10^8 t + z/3)$ (V/m); (c) $\mathbf{a}_y 19.2 \cos(10^8 t - z/2)$ (V/m); (d) $-\mathbf{a}_z 0.0764 \cos(10^8 t - z/2)$ (A/m); (e) 0.733 (W/m²).

7-6.1 INCIDENCIA NORMAL SOBRE UN BUEN CONDUCTOR

Nuestro análisis de la incidencia normal de ondas planas sobre fronteras planas se ha limitado hasta ahora a medios sin pérdidas. En la práctica es común encontrar situaciones donde uno de los medios es un buen conductor, $\sigma/\omega\epsilon \gg 1$. Como ejemplos están los reflectores metálicos y las guías de ondas. En estos casos generalmente podemos usar la aproximación de conductor perfecto ($\sigma \rightarrow \infty$) y obtener buenos resultados. Esta aproximación simplifica todas nuestras fórmulas.

Considere el fasor vectorial de campo incidente dado por las ecuaciones (7-84) y (7-85):

$$\mathbf{E}_i(z) = \mathbf{a}_x E_{i0} e^{-j\beta_1 z}, \quad (7-84)(7-108)$$

$$\mathbf{H}_i(z) = \mathbf{a}_y \frac{E_{i0}}{\eta_1} e^{-j\beta_1 z}. \quad (7-85)(7-109)$$

Esta onda incide sobre una frontera plana perfectamente conductora en $z = 0$. Si sustituimos σ por ∞ en la ecuación (7-53) tenemos $\eta_2 = 0$. Esto era de esperarse y la frontera conductora actúa como un cortocircuito. A partir de las ecuaciones (7-94) y (7-95) podemos ver que $\Gamma = -1$ y $\tau = 0$. Por consiguiente, $\mathbf{E}_{r0} = \Gamma \mathbf{E}_{i0} = -\mathbf{E}_{i0}$, y $E_{r0} = \tau E_{i0} = 0$. La onda incidente es totalmente reflejada, con una inversión de fase, y no se transmite potencia a través de una frontera perfectamente conductora. Tenemos

$$\mathbf{E}_r(z) = -\mathbf{a}_x E_{i0} e^{j\beta_1 z}, \quad (7-110)$$

$$\mathbf{H}_r(z) = -\mathbf{a}_y \times \frac{\mathbf{E}_r(z)}{\eta_1} = \mathbf{a}_y \frac{E_{i0}}{\eta_1} e^{j\beta_1 z}, \quad (7-111)$$

y

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_t(z) &= \mathbf{E}_i(z) + \mathbf{E}_r(z) = \mathbf{a}_x E_{i0} (e^{-j\beta_1 z} - e^{j\beta_1 z}) \\ &= -\mathbf{a}_x j 2 E_{i0} \sin \beta_1 z, \end{aligned} \quad (7-112)$$

Valores de Γ y τ para la incidencia normal sobre una frontera conductora plana: $\Gamma = -1$, $\tau = 0$

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_1(z) &= \mathbf{H}_i(z) + \mathbf{H}_r(z) = \mathbf{a}_y \frac{E_{i0}}{\eta_1} (e^{-j\beta_1 z} + e^{j\beta_1 z}) \\ &= \mathbf{a}_y 2 \frac{E_{i0}}{\eta_1} \cos \beta_1 z.\end{aligned}\quad (7-113)$$

Las ecuaciones (7-112) y (7-113) muestran que $\mathbf{E}_1(z)$ y $\mathbf{H}_1(z)$ están en cuadratura temporal (\mathbf{E}_1 está retrasado 90° con respecto a \mathbf{H}_1 debido al factor $-j$). Ambas expresiones representan ondas estacionarias y, teniendo en cuenta la ecuación (7-79), llegamos a la conclusión de que no hay potencia media asociada con la onda electromagnética total en el medio 1.

Para examinar el comportamiento espacio-temporal del campo total en el medio 1, escribimos primero las expresiones instantáneas correspondientes a los fasores de intensidad de campo eléctrico y magnético, que obtuvimos en las ecuaciones (7-112) y (7-113):

$$\mathbf{E}_1(z, t) = \Re[e^{\mathbf{E}_1(z)} e^{j\omega t}] = \mathbf{a}_x 2E_{i0} \sin \beta_1 z \sin \omega t, \quad (7-114)$$

$$\mathbf{H}_1(z, t) = \Re[e^{\mathbf{H}_1(z)} e^{j\omega t}] = \mathbf{a}_y 2 \frac{E_{i0}}{\eta_1} \cos \beta_1 z \cos \omega t. \quad (7-115)$$

Los campos totales, \mathbf{E} y \mathbf{H} , exhiben ondas estacionarias para la incidencia normal sobre una frontera conductora plana.

$\mathbf{E}_1(z, t)$ y $\mathbf{H}_1(z, t)$ poseen ceros y máximos a distancias fijas de la frontera conductora, para todo t . Para un t determinado, tanto \mathbf{E}_1 como \mathbf{H}_1 varían senoidalmente con la distancia medida desde el plano frontera (z es negativa en el medio 1). En la figura 7-9 se muestran las ondas estacionarias de $\mathbf{E}_1 = \mathbf{a}_x E_1$ y $\mathbf{H}_1 = \mathbf{a}_y H_1$ para varios valores de ωt . Podemos ver que \mathbf{E}_1 se anula en la superficie infinitamente conductora; así mismo, es cero en los puntos que son múltiplos de $\lambda_1/2$ desde la frontera. La onda estacionaria de \mathbf{H}_1 está desplazada un cuarto de longitud de onda ($\lambda_1/4$) con respecto a la de \mathbf{E}_1 .

EJEMPLO 7-8

Una onda plana uniforme con polarización y ($\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i$), cuya frecuencia es de 100 (MHz), se propaga en el aire en dirección $+x$ e incide normalmente sobre un plano perfectamente conductor en $x = 0$. Suponiendo que la amplitud de \mathbf{E}_i es 6 (mV/m), escriba las expresiones fasoriales e instantáneas de

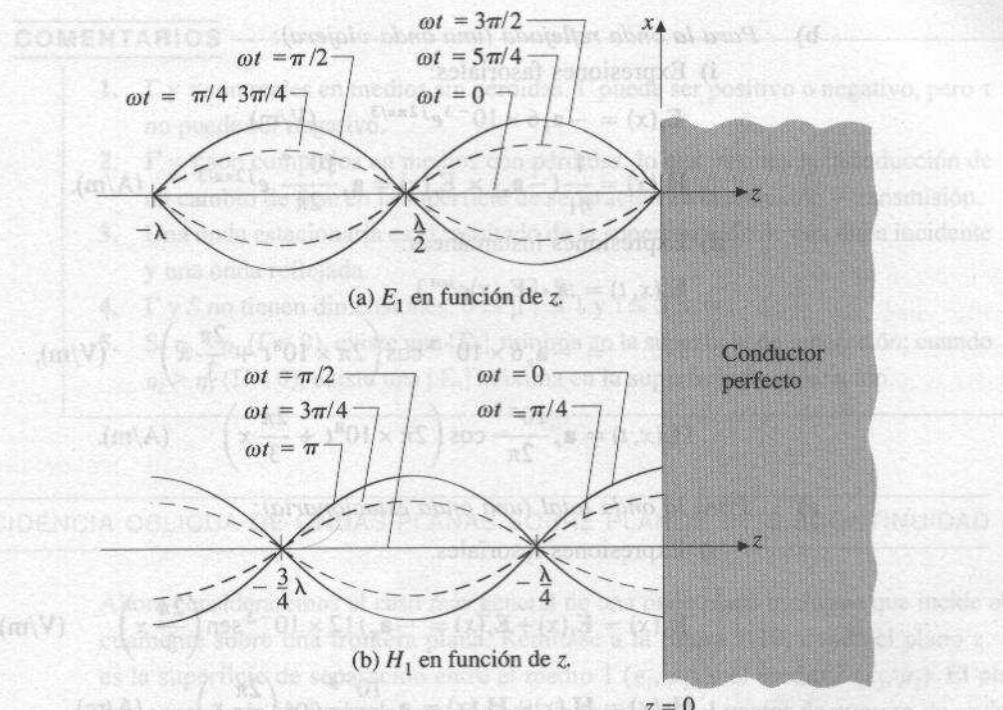
- \mathbf{E}_i y \mathbf{H}_i de la onda incidente,
- \mathbf{E}_r y \mathbf{H}_r de la onda reflejada, y
- \mathbf{E}_t y \mathbf{H}_t de la onda total en el aire.

SOLUCIÓN

A la frecuencia de 100 (MHz),

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \times 10^8 \quad (\text{rad/s}),$$

$$\beta_1 = k_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi \times 10^8}{3 \times 10^8} = \frac{2\pi}{3} \quad (\text{rad/m}),$$

FIGURA 7-9 Ondas estacionarias de $\mathbf{E}_1 = \mathbf{a}_x E_1$ y $\mathbf{H}_1 = \mathbf{a}_y H_1$ para distintos valores de ωt .

$$\eta_1 = \eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi \quad (\Omega)$$

a) Para la onda incidente (una onda viajera):

i) Expresiones fasoriales:

$$\mathbf{E}_i(x) = \mathbf{a}_y 6 \times 10^{-3} e^{-j2\pi x/3} \quad (\text{V/m}),$$

$$\mathbf{H}_i(x) = \frac{1}{\eta_1} \mathbf{a}_x \times \mathbf{E}_i(x) = \mathbf{a}_z \frac{10^{-4}}{2\pi} e^{-j2\pi x/3} \quad (\text{A/m}).$$

ii) Expresiones instantáneas:

$$\mathbf{E}_i(x, t) = \Re[\mathbf{E}_i(x)e^{j\omega t}]$$

$$= \mathbf{a}_y 6 \times 10^{-3} \cos\left(2\pi \times 10^8 t - \frac{2\pi}{3} x\right) \quad (\text{V/m}),$$

$$\mathbf{H}_i(x, t) = \mathbf{a}_z \frac{10^{-4}}{2\pi} \cos\left(2\pi \times 10^8 t - \frac{2\pi}{3} x\right) \quad (\text{A/m}).$$

b) Para la onda reflejada (una onda viajera):

i) Expresiones fasoriales:

$$\mathbf{E}_r(x) = -\mathbf{a}_y 6 \times 10^{-3} e^{j2\pi x/3} \quad (\text{V/m}),$$

$$\mathbf{H}_r(x) = \frac{1}{\eta_1} (-\mathbf{a}_x) \times \mathbf{E}_r(x) = \mathbf{a}_z \frac{10^{-4}}{2\pi} e^{j2\pi x/3} \quad (\text{A/m}).$$

ii) Expresiones instantáneas:

$$\mathbf{E}_r(x, t) = \mathcal{R}e[\mathbf{E}_r(x)e^{j\omega t}]$$

$$= -\mathbf{a}_y 6 \times 10^{-3} \cos\left(2\pi \times 10^8 t + \frac{2\pi}{3} x\right) \quad (\text{V/m}),$$

$$\mathbf{H}_r(x, t) = \mathbf{a}_z \frac{10^{-4}}{2\pi} \cos\left(2\pi \times 10^8 t + \frac{2\pi}{3} x\right) \quad (\text{A/m}).$$

c) Para la onda total (una onda estacionaria):

i) Expresiones fasoriales:

$$\mathbf{E}_t(x) = \mathbf{E}_i(x) + \mathbf{E}_r(x) = -\mathbf{a}_y j 12 \times 10^{-3} \sin\left(\frac{2\pi}{3} x\right) \quad (\text{V/m}),$$

$$\mathbf{H}_t(x) = \mathbf{H}_i(x) + \mathbf{H}_r(x) = \mathbf{a}_z \frac{10^{-4}}{\pi} \cos\left(\frac{2\pi}{3} x\right) \quad (\text{A/m}).$$

ii) Expresiones instantáneas:

$$\mathbf{E}_t(x, t) = \mathcal{R}e[\mathbf{E}_t(x)e^{j\omega t}]$$

$$= \mathbf{a}_y 12 \times 10^{-3} \sin\left(\frac{2\pi}{3} x\right) \sin(2\pi \times 10^8 t) \quad (\text{V/m}),$$

$$\mathbf{H}_t(x, t) = \mathbf{a}_z \frac{10^{-4}}{\pi} \cos\left(\frac{2\pi}{3} x\right) \cos(2\pi \times 10^8 t) \quad (\text{A/m}).$$

■ EJERCICIO 7.12 Encuentre las posiciones de $|E_{||}|_{\max}$ y $|H_{||}|_{\max}$ en el problema del ejemplo 7-8.

RESPUESTA : $|E_{||}|_{\max}$ en $x = -(2n + 1)3/4$ (m), $|H_{||}|_{\max}$ en $x = -3n/2$ (m), $n = 0, 1, 2, \dots$

PREGUNTAS DE REPASO

P.7-22 Defina el *coeficiente de reflexión* y el *coeficiente de transmisión*. ¿Cuál es la relación entre ambos para la incidencia normal?

P.7-23 ¿Cuáles son los valores de los coeficientes de reflexión y transmisión en una superficie de separación con una frontera perfectamente conductora?

P.7-24 ¿Qué es una *onda estacionaria*?

P.7-25 Defina la *razón de onda estacionaria*. ¿Cuál es su relación con el coeficiente de reflexión?

P.7-26 ¿Cuál es la razón de onda estacionaria de la combinación de ondas incidente y reflejada en una frontera perfectamente conductora para incidencia normal?

COMENTARIOS

1. Γ y τ son reales en medios sin pérdidas. Γ puede ser positivo o negativo, pero τ no puede ser negativo.
2. Γ y τ son complejos en medios con pérdidas, lo que implica la introducción de un cambio de fase en la superficie de separación en la reflexión y transmisión.
3. Una onda estacionaria es el resultado de la superposición de una onda incidente y una onda reflejada.
4. Γ y S no tienen dimensiones: $0 \leq |\Gamma| \leq 1$ y $1 \leq S \leq \infty$.
5. Si $\eta_2 < \eta_1$ ($\Gamma < 0$), existe una $|E_1|$ mínima en la superficie de separación; cuando $\eta_2 > \eta_1$ ($\Gamma > 0$), existe una $|E_1|$ máxima en la superficie de separación.

7-7 INCIDENCIA OBLICUA DE ONDAS PLANAS SOBRE PLANOS DE DISCONTINUIDAD

Ahora consideraremos el caso más general de una onda plana uniforme que incide oblicuamente sobre una frontera plana. Remítase a la figura 7-10, donde el plano $z = 0^+$ es la superficie de separación entre el medio 1 (ϵ_1, μ_1) y el medio 2 (ϵ_2, μ_2). El plano que contiene la normal a la superficie de la frontera y el vector de número de onda a_k se denomina *plano de incidencia*. Están en juego tres ángulos: el *ángulo de incidencia* θ_i , el *ángulo de reflexión* θ_r , y el *ángulo de refracción* (o *ángulo de transmisión*) θ_t , que representan respectivamente los ángulos que forman las ondas incidente, reflejada y transmitida con la normal a la frontera. Las líneas AO , $O'A'$ y $O'B$ son las intersecciones de los frentes de onda (superficies de fase constante) de las ondas incidente, reflejada y transmitida, respectivamente, con el plano de incidencia. Puesto que las ondas incidente y reflejada se propagan con la misma velocidad de fase u_{p1} en el medio 1, las distancias $\overline{OA'}$ y $\overline{AO'}$ deben ser iguales. Así,

$$\overline{OO'} \operatorname{sen} \theta_r = \overline{OO'} \operatorname{sen} \theta_i.$$

o

$$\theta_r = \theta_i.$$

(7-116)

La ecuación (7-116) nos asegura que *el ángulo de reflexión es igual al ángulo de incidencia*, que es la *ley de Snell de la reflexión*.

[†] No se pierde generalidad, ya que siempre es posible asignar el sistema de coordenadas de manera que el eje z sea perpendicular al plano frontera.

Plano de incidencia**Todos los ángulos se miden relativos a la normal a la frontera.****Ley de Snell de la reflexión**

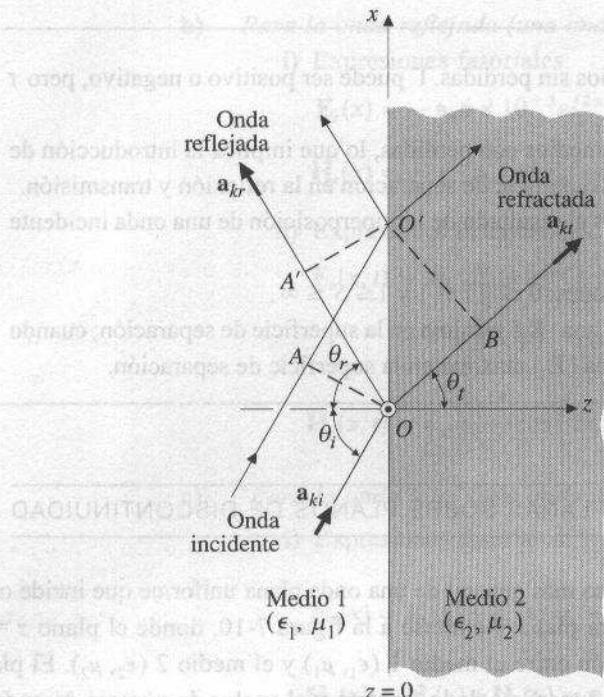


FIGURA 7-10 Onda plana uniforme que incide oblicuamente sobre una frontera dieléctrica plana.

El tiempo necesario para que la onda transmitida se propague de O a B en el medio 2 es igual al tiempo que requiere la onda incidente para propagarse de A a O' . Tenemos

$$\frac{\overline{OB}}{u_{p2}} = \frac{\overline{AO'}}{u_{p1}},$$

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{AO'}} = \frac{\overline{OO'} \operatorname{sen} \theta_t}{\overline{OO'} \operatorname{sen} \theta_i} = \frac{u_{p2}}{u_{p1}},$$

de donde obtenemos

Ley de Snell de la refracción

$$\frac{\operatorname{sen} \theta_t}{\operatorname{sen} \theta_i} = \frac{u_{p2}}{u_{p1}} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{n_1}{n_2}, \quad (7-117)$$

índice de refracción en un medio

donde n_1 y n_2 son los índices de refracción de los medios 1 y 2, respectivamente. El **índice de refracción** de un medio es la razón de la velocidad de la luz (onda electromagnética) en el espacio libre a la velocidad en el medio; es decir, $n = c/u_p$. La relación de la ecuación (7-117) se conoce como **ley de Snell de la refracción**.

Si los medios tienen la misma permeabilidad, $\mu_1 = \mu_2$, la ecuación (7-117) se convierte en

$$\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\eta_2}{\eta_1} = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} = \sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}} \quad (\mu_1 = \mu_2) \quad (7-118)$$

Ley de Snell de la refracción para $\mu_1 = \mu_2$

donde n_1 y n_2 son las impedancias intrínsecas del medio.

Observe que obtuvimos la ley de Snell de la reflexión y la ley de Snell de la refracción a partir de las trayectorias de los haces de las ondas incidente, reflejada y refractada. No se ha mencionado para nada la polarización de las ondas. Por consiguiente, las leyes de Snell son independientes de la polarización de las ondas.

7-7.1 REFLEXIÓN TOTAL

Fenómeno de la reflexión total cuando $\epsilon_2 < \epsilon_1$

Ángulo crítico

Examinemos ahora la ley de Snell de la ecuación (7-118) para el caso $\epsilon_1 > \epsilon_2$, o sea, cuando la onda en el medio 1 incide sobre un medio 2 menos denso. En esta situación, $\theta_t > \theta_i$. Como θ_t aumenta con θ_i , surge una situación interesante si $\theta_i = \pi/2$, ángulo para el cual la onda refractada se deslizará sobre la superficie de discontinuidad; un incremento adicional en θ_i dará lugar a la ausencia de onda refractada y se dice entonces que la onda incidente es totalmente reflejada. El ángulo de incidencia θ_c (que corresponde al umbral de la **reflexión total** $\theta_i = \pi/2$) se denomina **ángulo crítico**. Si asignamos $\theta_i = \pi/2$ en la ecuación (7-118), tenemos

$$\sin \theta_c = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}, \quad (7-119)$$

o

$$\theta_c = \sin^{-1} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \sin^{-1} \left(\frac{n_2}{n_1} \right) \quad (\mu_1 = \mu_2). \quad (7-120)$$

Fórmula del ángulo crítico

Esta situación se ilustra en la figura 7-11, donde \mathbf{a}_{ki} , \mathbf{a}_{kr} y \mathbf{a}_{kt} son los vectores unitarios que denotan la dirección de propagación de las ondas incidente, reflejada y transmitida, respectivamente.

¿Qué sucede desde el punto de vista matemático si θ_i es mayor que el ángulo crítico θ_c ($\sin \theta_i > \sin \theta_c = \sqrt{\epsilon_2 / \epsilon_1}$)? A partir de la ecuación (7-118) tenemos

$$\sin \theta_t = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \sin \theta_i > 1, \quad (7-121)$$

lo cual no corresponde a una solución real para θ_t . Aunque $\sin \theta_t$ es real en la ecuación (7-121), $\cos \theta_t$ es imaginario cuando $\sin \theta_t > 1$:

$$\cos \theta_t = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_t} = \pm j \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \sin^2 \theta_i - 1}. \quad (7-122)$$

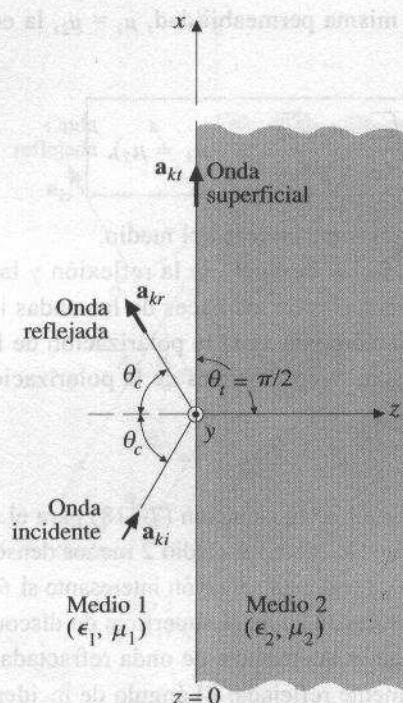


FIGURA 7-11 Onda plana que incide con un ángulo crítico, $\epsilon_1 > \epsilon_2$.

En el medio 2, el vector unitario \mathbf{a}_{kt} en la dirección de propagación de una onda transmitida (refractada) genérica, como se ilustra en la figura 7-10, es

$$\mathbf{a}_{kt} = \mathbf{a}_x \operatorname{sen} \theta_t + \mathbf{a}_z \cos \theta_t. \quad (7-123)$$

Tanto \mathbf{E}_t como \mathbf{H}_t varían espacialmente de acuerdo con el siguiente factor:

$$e^{-j\beta_2 \mathbf{a}_{kt} \cdot \mathbf{R}} = c = j\beta_2(x \operatorname{sen} \theta_t + z \cos \theta_t), \quad (7-124)$$

(donde \mathbf{R} es un vector de posición como en la ecuación 7-22). Al usar las ecuaciones (7-118) y (7-119) para $\theta_t > \theta_c$, la expresión de la ecuación (7-124) se convierte en

$$e^{-\alpha_2 z} e^{-j\beta_2 x}, \quad (7-125)$$

donde

$$\alpha_2 = \beta_2 \sqrt{(\epsilon_1/\epsilon_2) \operatorname{sen}^2 \theta_t - 1} \quad (7-125a)$$

y

$$\beta_{2x} = \beta_2 \sqrt{\epsilon_1/\epsilon_2} \operatorname{sen} \theta_t. \quad (7-125b)$$

Hemos abandonado el signo superior de la ecuación (7-122) porque generaría el resultado imposible de un campo creciente al aumentar z . A partir de la ecuación (7-125)

podemos llegar a la conclusión de que si $\theta_i > \theta_c$, existe una **onda evanescente** a lo largo de la superficie de discontinuidad (en dirección x), que se atenúa exponencialmente (con rapidez) en el medio 2, en la dirección normal (dirección z). Esta onda está fuertemente ligada a la superficie de discontinuidad y se denomina **onda superficial**; se ilustra en la figura 7-11. Se trata de una onda plana no uniforme y no se transmite potencia al medio 2 en estas condiciones (véase el Prob. P.7-27).

EJEMPLO 7-9

La permitividad del agua a frecuencias ópticas es $1.75\epsilon_0$. Se sabe que una fuente de luz isótropa a una distancia d bajo el agua produce un área circular iluminada de radio 5 (m). Determine d .

SOLUCIÓN

El índice de refracción del agua es $n_w = \sqrt{1.75} = 1.32$. Remítase a la figura 7-12. El radio del área iluminada, $O'P = 5$ (m), corresponde al ángulo crítico

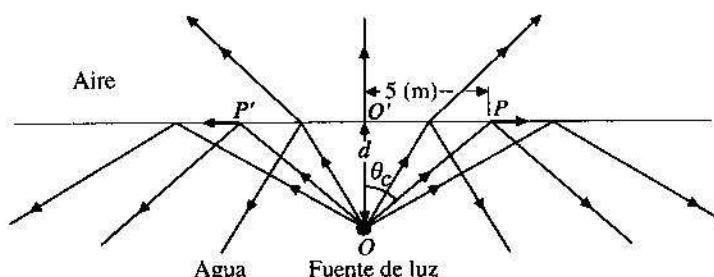
$$\theta_c = \sin^{-1} \left(\frac{1}{n_w} \right) = \sin^{-1} \left(\frac{1}{1.32} \right) = 49.2^\circ.$$

Por lo tanto,

$$d = \frac{\overline{OP}}{\tan \theta_c} = \frac{5}{\tan 49.2^\circ} = 4.32 \quad (\text{m}).$$

Como puede verse en la figura 7-12, un rayo que incide con $\theta_i = \theta_c$ en P produce un rayo reflejado y un rayo refractado tangencial. Una parte de las ondas incidentes con $\theta_i < \theta_c$ se refleja de nuevo en el agua y otra parte se refracta en el aire; las ondas para las cuales $\theta_i > \theta_c$ son totalmente reflejadas (no se muestran las ondas superficiales evanescentes).

FIGURA 7-12 Fuente luminosa subacuática (ejemplo 7-9).



EJEMPLO 7-10

Se puede usar una varilla dieléctrica o fibra de material transparente para guiar la luz o una onda electromagnética en condiciones de reflexión interna total. Determine la mínima constante dieléctrica del medio que sirve de guía para que una onda que incida con cualquier ángulo sobre un extremo quede confinada dentro de la varilla hasta que salga por el extremo opuesto.

SOLUCIÓN

Remítase a la figura 7-13. Para que haya reflexión interna total, θ_i debe ser mayor o igual que θ_c para el medio dieléctrico que sirve de guía; es decir,

$$\operatorname{sen} \theta_i \geq \operatorname{sen} \theta_c. \quad (7-126)$$

Como $\theta_i = \pi/2 - \theta_p$, la ecuación (7-126) se convierte en

$$\cos \theta_i \geq \operatorname{sen} \theta_c. \quad (7-127)$$

A partir de la ley de Snell de la refracción (Ec. 7-118), tenemos

$$\operatorname{sen} \theta_i = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{r1}}} \operatorname{sen} \theta_i. \quad (7-128)$$

(Observe que los papeles de ϵ_1 y ϵ_2 en la figura 7-13 están intercambiados con respecto a la figura 7-10.) Al sustituir la ecuación (7-128) en la ecuación (7-127) y usando la ecuación (7-119) se obtiene

$$\sqrt{1 - \frac{1}{\epsilon_{r1}} \operatorname{sen}^2 \theta_i} \geq \operatorname{sen} \theta_c = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\epsilon_1}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{r1}}},$$

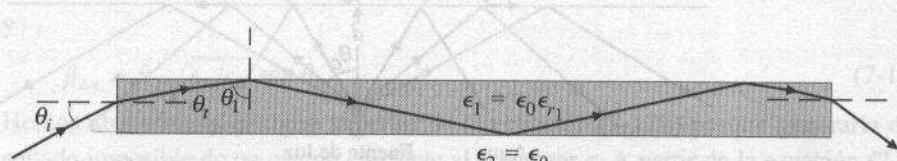
para lo cual se requiere

$$\epsilon_{r1} \geq 1 + \operatorname{sen}^2 \theta_i. \quad (7-129)$$

Puesto que el mayor valor del lado derecho de la ecuación (7-129) se alcanza cuando $\theta_i = \pi/2$, es necesario que la constante dieléctrica del medio que sirve de guía sea al menos 2, que corresponde a un índice de refracción $n_1 = \sqrt{2}$. El vidrio y el cuarzo satisfacen este requisito.

Constante dieléctrica mínima para la fibra óptica

FIGURA 7-13 Varilla dieléctrica o fibra que guía una onda electromagnética por reflexión interna total.



EJERCICIO 7.13 Una onda plana uniforme de 30 (MHz) emerge de un medio dieléctrico sin pérdidas ($\epsilon = 2.25\epsilon_0$, $\mu = \mu_0$) al aire a través de una superficie de separación plana en $z = 0$. El ángulo de incidencia es de 30° . Calcule el ángulo de refracción y las constantes de fase tanto en el medio dieléctrico como en el aire.

RESPUESTA : 48.6° , 0.94 (rad/m), 0.63 (rad/m).

EJERCICIO 7.14 Encuentre el ángulo crítico del ejercicio 7.13. Determine las constantes de atenuación y fase en el aire si el ángulo de incidencia es 60° .

RESPUESTA : 41.8° , 0.52 (Np/m), 0.82 (rad/m).

PREGUNTAS DE REPASO

P.7-27 Defina el *plano de incidencia*.

P.7-28 Enuncie con palabras la *ley de Snell de la reflexión*.

P.7-29 Enuncie la *ley de Snell de la refracción* en términos de los índices de refracción de los medios y en términos de las impedancias intrínsecas de dos medios contiguos no magnéticos.

P.7-30 Defina el *ángulo crítico*. ¿Qué significa la *reflexión total*?

P.7-31 Defina la *onda superficial*.

COMENTARIOS

1. Las leyes de Snell son independientes de la polarización.
2. Las leyes de Snell son independientes de la frecuencia de la onda si los parámetros constitutivos del medio son independientes de la frecuencia.
3. Todos los ángulos de las leyes de Snell se miden a partir de la normal a la superficie de separación.
4. La reflexión total sólo es posible si $\epsilon_2 < \epsilon_1$.
5. No se transmite potencia a través de la superficie de discontinuidad cuando $\theta_i > \theta_c$.

7-7.2 LA IONOSFERA

Composición de la ionosfera

En la atmósfera superior de la Tierra, aproximadamente entre los 50 y 500 (km) de altitud, hay capas de gases ionizados conocidas como la *ionosfera*. La ionosfera consiste en electrones libres e iones positivos que se producen cuando los átomos y las moléculas de la atmósfera superior absorben la radiación ultravioleta del Sol. Las partículas cargadas tienden a ser atrapadas por el campo magnético de la Tierra. La altitud y el carácter de las capas ionizadas dependen de la naturaleza de la radiación solar y de la composición de la atmósfera. Cambian de manera muy complicada de acuerdo con el ciclo de las manchas solares, la época del año y la hora del día. Las densidades de iones y electrones en las capas ionizadas son prácticamente iguales. Los gases ionizados con densidades iguales de iones y electrones se llaman *plasmas*.

Plasmas

La ionosfera juega un papel muy importante en la propagación de las ondas electromagnéticas y afecta las telecomunicaciones. Como los electrones son mucho más ligeros que los iones positivos, están más acelerados por los campos eléctricos de las ondas electromagnéticas que pasan por la ionosfera. Los análisis efectuados muestran que se puede estudiar el efecto de la ionosfera o el plasma en la propagación de las ondas considerando una permitividad efectiva ϵ_p :

Permitividad efectiva del plasma

$$\begin{aligned}\epsilon_p &= \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \\ &= \epsilon_0 \left(1 - \frac{f_p^2}{f^2} \right) \quad (\text{F/m}),\end{aligned}\tag{7-130}$$

donde ω_p es la *frecuencia angular del plasma* y

$$\omega_p = 2\pi f_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{me_0}}.\tag{7-131}$$

En la ecuación (7-131), N es el número de electrones por unidad de volumen y e y m son, respectivamente, la carga y la masa electrónica.

La constante de propagación se obtiene de las ecuaciones (7-42) y (7-130):

$$\gamma = \alpha + j\beta = j\omega \sqrt{\mu\epsilon_0} \sqrt{1 - \left(\frac{f_p}{f}\right)^2}.\tag{7-132}$$

γ se vuelve real cuando $f < f_p$, lo que indica una atenuación sin propagación. Por otra parte, si $f > f_p$, γ es imaginaria y las ondas electromagnéticas se propagarán sin atenuación por la ionosfera (suponiendo pérdidas insignificantes por colisiones).

Si sustituimos los valores de e , m y ϵ_0 en la ecuación (7-131), llegamos a una fórmula muy sencilla para determinar la frecuencia (de corte) del plasma:

$$f_p \cong 9\sqrt{N} \quad (\text{Hz}).\tag{7-133}$$

Fórmula de la frecuencia del plasma

Como mencionamos antes, N no es constante para una determinada altitud; varía de acuerdo con la hora del día, la temporada y otros factores. La densidad de electrones en la ionosfera varía desde $10^{10}/\text{m}^3$ en la capa más baja hasta $10^{12}/\text{m}^3$ en la más alta. Empleando estos valores de N en la ecuación (7-133) se encuentra que f_p varía de 0.9 a 9 (MHz). Por lo tanto, hay que usar frecuencias muy superiores a 9 (MHz) para comunicarse con un satélite o con una estación espacial más allá de la ionosfera, para asegurar que la onda atraviese la capa con el mayor valor de N para cualquier ángulo de incidencia. Las señales con frecuencias inferiores a 0.9 (MHz) no pueden penetrar ni siquiera en la capa más baja de la ionosfera, pero pueden propagarse a grandes distancias alrededor de la Tierra debido a las reflexiones múltiples entre la frontera de la ionosfera y la superficie de la Tierra. Las señales con frecuencias entre 0.9 y 9 (MHz) penetrarán parcialmente en las capas inferiores de la ionosfera, pero serán reflejadas cuando N sea muy grande.

EJEMPLO 7-11

Cuando una nave espacial reingresa en la atmósfera de la Tierra, su velocidad y temperatura ionizan los átomos y las moléculas circundantes y crean un plasma. Se ha estimado que la densidad de electrones es de unos 2×10^8 por (cm^3) . Analice el efecto del plasma en las frecuencias que se pueden usar para la comunicación por radio entre la nave espacial y los controladores de la misión en la Tierra.

SOLUCIÓN

Para

$$\begin{aligned} N &= 2 \times 10^8 \text{ por } (\text{cm}^3) \\ &= 2 \times 10^{14} \text{ por } (\text{m}^3), \end{aligned}$$

la ecuación (7-133) nos da $f_p = 9 \times \sqrt{2} \times 10^{14} = 12.7 \times 10^7$ (Hz) o 127 (MHz). Por lo tanto, no es posible establecer la comunicación por radio a frecuencias inferiores a 127 (MHz).

PREGUNTAS DE REPASO

P.7-32 ¿Cuál es la composición de la *ionosfera*?

P.7-33 ¿Cuál es la importancia de la *frecuencia del plasma*?

Ya antes señalamos que las leyes de Snell y, por consiguiente, el ángulo crítico de la reflexión total son independientes de la polarización del campo eléctrico incidente. Sin embargo, las fórmulas de los coeficientes de reflexión y transmisión dependen de la polarización. En las dos subsecciones siguientes analizaremos de forma separada el comportamiento de la polarización perpendicular y de la polarización paralela.

7-7.3 POLARIZACIÓN PERPENDICULAR

Significado de la polarización perpendicular

En el caso de incidencia oblicua con polarización perpendicular, \mathbf{E}_i es perpendicular al plano de incidencia, como se muestra en la figura 7-14. Al observar que

$$\mathbf{a}_{ki} = \mathbf{a}_x \sin \theta_i + \mathbf{a}_z \cos \theta_i, \quad (7-134)$$

tenemos, a partir de las ecuaciones (7-23) y (7-25),

$$\mathbf{E}_i(x, z) = \mathbf{a}_y E_{i0} e^{-j\beta_i(x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)} \quad (7-135)$$

$$\mathbf{H}_i(x, z) = \frac{E_{i0}}{\eta_1} (-\mathbf{a}_x \cos \theta_i + \mathbf{a}_z \sin \theta_i) e^{-j\beta_i(x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)}, \quad (7-136)$$

donde se ha usado β_i en lugar de k_i en un medio sin pérdidas.

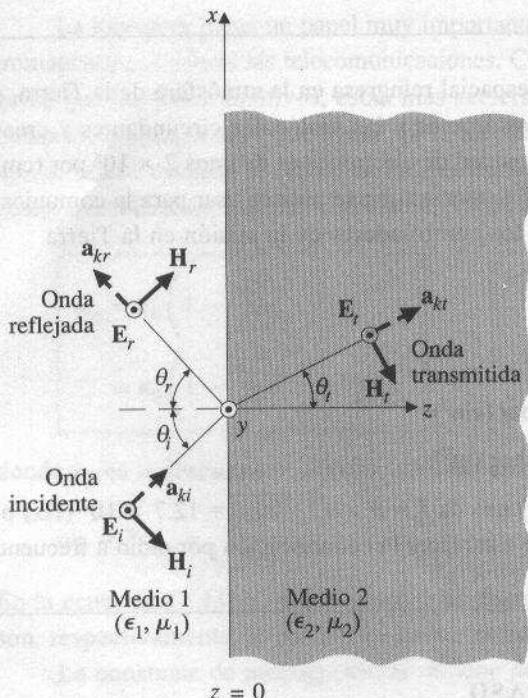


FIGURA 7-14 Onda plana que incide oblicuamente sobre una frontera dieléctrica plana (polarización perpendicular).

Para la onda reflejada,

$$\mathbf{a}_{kr} = \mathbf{a}_x \sin \theta_r - \mathbf{a}_z \cos \theta_r. \quad (7-137)$$

Los campos eléctrico y magnético reflejados son

$$\mathbf{E}_r(x, z) = \mathbf{a}_y E_{r0} e^{-j\beta_1(x \sin \theta_r - z \cos \theta_r)} \quad (7-138)$$

$$\mathbf{H}_r(x, z) = \frac{E_{r0}}{\eta_1} (\mathbf{a}_x \cos \theta_r + \mathbf{a}_z \sin \theta_r) e^{-j\beta_1(x \sin \theta_r - z \cos \theta_r)}. \quad (7-139)$$

Para la onda transmitida,

$$\mathbf{a}_{kt} = \mathbf{a}_x \sin \theta_t + \mathbf{a}_z \cos \theta_t, \quad (7-140)$$

tenemos

$$\mathbf{E}_t(x, z) = \mathbf{a}_y E_{t0} e^{-j\beta_2(x \sin \theta_t + z \cos \theta_t)} \quad (7-141)$$

$$\mathbf{H}_t(x, z) = \frac{E_{t0}}{\eta_2} (-\mathbf{a}_x \cos \theta_t + \mathbf{a}_z \sin \theta_t) e^{-j\beta_2(x \sin \theta_t + z \cos \theta_t)}. \quad (7-142)$$

En las ecuaciones anteriores hay cuatro incógnitas: E_{r0} , E_{t0} , θ_r y θ_t . Su determinación es posible a partir de los requisitos de que las componentes tangenciales de \mathbf{E} y \mathbf{H} sean continuas en la frontera $z = 0$.

De $E_{iy}(x, 0) + E_{ry}(x, 0) = E_{ty}(x, 0)$ tenemos

$$E_{i0}e^{-j\beta_1 x \operatorname{sen} \theta_i} + E_{r0}e^{-j\beta_1 x \operatorname{sen} \theta_r} = E_{t0}e^{-j\beta_2 x \operatorname{sen} \theta_t}. \quad (7-143)$$

En forma similar, de $H_{ix}(x, 0) + H_{rx}(x, 0) = H_{tx}(x, 0)$ tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta_1} (-E_{i0} \cos \theta_i e^{-j\beta_1 x \operatorname{sen} \theta_i} + E_{r0} \cos \theta_r e^{-j\beta_1 x \operatorname{sen} \theta_r}) \\ = -\frac{E_{i0}}{\eta_2} \cos \theta_i e^{-j\beta_2 x \operatorname{sen} \theta_t}. \end{aligned} \quad (7-144)$$

Puesto que es necesario satisfacer las ecuaciones (7-143) y (7-144) para todo x , los tres factores exponenciales que son funciones de x deben ser iguales ("igualdad de fase"). Por lo tanto,

$$\beta_1 x \operatorname{sen} \theta_i = \beta_1 x \operatorname{sen} \theta_r = \beta_2 x \operatorname{sen} \theta_t,$$

lo cual nos lleva a la ley de Snell de la reflexión ($\theta_r = \theta_i$) y a la ley de Snell de la refracción ($\operatorname{sen} \theta_r / \operatorname{sen} \theta_i = \beta_1 / \beta_2 = n_1 / n_2$). Con esto podemos escribir las ecuaciones (7-143) y (7-144) de una forma mucho más sencilla:

$$E_{i0} + E_{r0} = E_{t0} \quad (7-145)$$

y

$$\frac{1}{\eta_1} (E_{i0} - E_{r0}) \cos \theta_i = \frac{E_{i0}}{\eta_2} \cos \theta_t, \quad (7-146)$$

a partir de las cuales podemos hallar E_{r0} y E_{t0} en términos de E_{i0} . Los coeficientes de reflexión y transmisión son

$$\Gamma_{\perp} = \frac{E_{r0}}{E_{i0}} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} \quad (7-147)^{\dagger}$$

y

$$\tau_{\perp} = \frac{E_{t0}}{E_{i0}} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t}. \quad (7-148)^{\dagger}$$

Si $\theta_i = 0$, con lo cual $\theta_r = \theta_t = 0$, estas expresiones se reducen a las correspondientes para la incidencia normal (Ecs. (7-94) y (7-95)), como debería de ser. Así mismo, Γ_{\perp} y τ_{\perp} están relacionados de la siguiente manera:

$$1 + \Gamma_{\perp} = \tau_{\perp}, \quad (7-149)$$

que es similar a la ecuación (7-96) para la incidencia normal.

[†] Estas ecuaciones se conocen también como *ecuaciones de Fresnel*.

Coeficiente de reflexión para la polarización perpendicular

Coeficiente de transmisión para la polarización perpendicular

Relación entre los coeficientes de reflexión y de transmisión para la polarización perpendicular

Si el medio 2 es un conductor perfecto, $\eta_2 = 0$, tenemos $\Gamma_{\perp} = -1$ ($E_{r0} = -E_{i0}$) y $\tau_{\perp} = 0$ ($E_{i0} = 0$). El campo \mathbf{E} tangencial sobre la superficie del conductor se anula y no se transmite energía a través de una frontera perfectamente conductora.

EJEMPLO 7-12

La expresión instantánea del campo eléctrico de una onda plana uniforme en el aire es

$$\mathbf{E}_i(x, z; t) = \mathbf{a}_y 10 \cos(\omega t + 3x - 4z) \quad (\text{V/m}).$$

La onda incide sobre una frontera plana perfectamente conductora en $z = 0$.

- Calcule la constante de fase β_1 , la frecuencia angular ω y el ángulo de incidencia θ_i .
- Determine $\mathbf{E}_r(x, z)$.
- Analice el comportamiento de $\mathbf{E}_1(x, z; t)$.

SOLUCIÓN

- La expresión fasorial de \mathbf{E}_i es

$$\mathbf{E}_i(x, z) = \mathbf{a}_y 10 e^{j(3x - 4z)},$$

que representa una onda polarizada perpendicularmente que se propaga en las direcciones $-x$ y $+z$. Basándonos en las ecuaciones (7-20) y (7-21) tenemos

$$\mathbf{k}_i = \mathbf{a}_k k_i = -\mathbf{a}_x (\beta_1 \sin \theta_i) + \mathbf{a}_z (\beta_1 \cos \theta_i),$$

donde ya hemos hecho la observación de que $k_i = \beta_1$ en el medio sin pérdidas.

Entonces,

$$\beta_1 \sin \theta_i = 3, \text{ y}$$

$$\beta_1 \cos \theta_i = 4,$$

de lo cual se obtiene

$$\beta_1 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \quad (\text{rad/m}), \text{ y}$$

$$\theta_i = \tan^{-1} \frac{3}{4} = 36.9^\circ.$$

Así mismo, $\beta_1 = \omega/c$ y $\omega = \beta_1 c = 5 \times (3 \times 10^8) = 1.5 \times 10^9 \text{ (rad/s)}$.

- Se sabe que para una superficie de discontinuidad perfectamente conductora, $\Gamma_{\perp} = -1$, $E_{r0} = -E_{i0} = -10$, y $\mathbf{E}_r(x, z) = -\mathbf{a}_y 10 e^{j(3x + 4z)}$, que se propaga en las direcciones $-x$ y $-z$.

$$\mathbf{E}_1(x, z) = \mathbf{E}_i(x, z) + \mathbf{E}_r(x, z)$$

$$= \mathbf{a}_y 10 (e^{-j4z} - e^{j4z}) e^{j3x}$$

$$= -\mathbf{a}_y 20 j (\sin 4z) e^{j3x},$$

que corresponde a la expresión instantánea

$$\mathbf{E}_i(x, z; t) = \mathbf{a}_y 20 (\operatorname{sen} 4z) \cos (1.5 \times 10^9 t + 3x - \pi/2).$$

Por consiguiente, $\mathbf{E}_i(x, z; t)$ está compuesto por una onda estacionaria en la dirección $-z$ y una onda viajera en la dirección $-x$. La onda estacionaria tiene un valor de cero en $4z = n\pi$ o $z = n\pi/4$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). La onda viajera es una onda plana no uniforme, pues su amplitud no es constante en la dirección z .

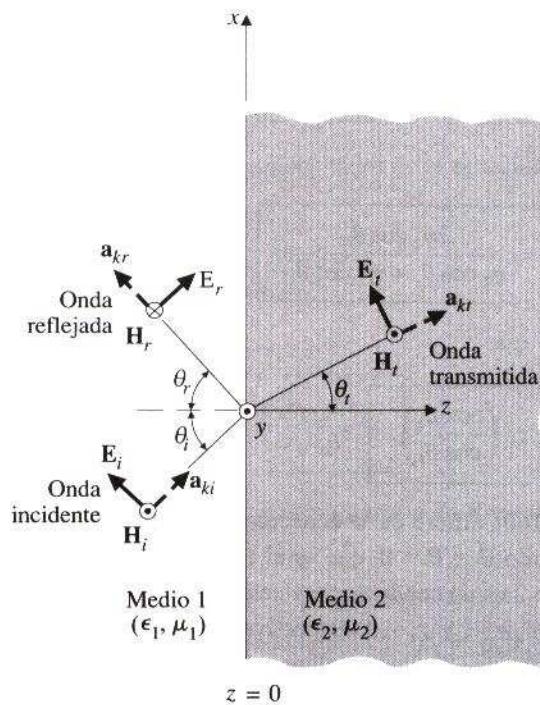
7-7.4 POLARIZACIÓN PARALELA

Significado de la polarización paralela

Cuando una onda plana uniforme con polarización paralela incide de manera oblicua sobre una frontera plana, \mathbf{E}_i está en el plano de incidencia (\mathbf{H}_i es perpendicular al plano de incidencia), como se ilustra en la figura 7-15. Los fasores de intensidad de campo eléctrico y magnético incidentes y reflejados en el medio 1 son:

$$\mathbf{E}_i(x, z) = E_{i0}(\mathbf{a}_x \cos \theta_i - \mathbf{a}_z \operatorname{sen} \theta_i) e^{-j\beta_1(x \operatorname{sen} \theta_i + z \cos \theta_i)}, \quad (7-150)$$

FIGURA 7-15 Onda plana que incide oblicuamente sobre una frontera dieléctrica plana (polarización paralela).



$$\mathbf{H}_i(x, z) = \mathbf{a}_y \frac{E_{i0}}{\eta_1} e^{-j\beta_1(x \operatorname{sen} \theta_i + z \cos \theta_i)}, \quad (7-151)$$

$$\mathbf{E}_r(x, z) = E_{r0}(\mathbf{a}_x \cos \theta_r + \mathbf{a}_z \operatorname{sen} \theta_r) e^{-j\beta_1(x \operatorname{sen} \theta_r - z \cos \theta_r)}, \quad (7-152)$$

$$\mathbf{H}_r(x, z) = -\mathbf{a}_y \frac{E_{r0}}{\eta_1} e^{-j\beta_1(x \operatorname{sen} \theta_r - z \cos \theta_r)}. \quad (7-153)$$

Los fasores de intensidad de campo eléctrico y magnético transmitidos en el medio 2 son

$$\mathbf{E}_t(x, z) = E_{t0}(\mathbf{a}_x \cos \theta_t - \mathbf{a}_z \operatorname{sen} \theta_t) e^{-j\beta_2(x \operatorname{sen} \theta_t + z \cos \theta_t)}, \quad (7-154)$$

$$\mathbf{H}_t(x, z) = \mathbf{a}_y \frac{E_{t0}}{\eta_2} e^{-j\beta_2(x \operatorname{sen} \theta_t + z \cos \theta_t)}. \quad (7-155)$$

Los requisitos de continuidad de las componentes tangenciales de \mathbf{E} y \mathbf{H} en $z = 0$ nos llevan de nuevo a las leyes de Snell de la reflexión y de la refracción, así como a las dos ecuaciones siguientes:

$$(E_{i0} + E_{r0}) \cos \theta_i = E_{t0} \cos \theta_t, \quad (7-156)$$

$$\frac{1}{\eta_1} (E_{i0} - E_{r0}) = \frac{1}{\eta_2} E_{t0}. \quad (7-157)$$

Resolviendo para E_{r0} y E_{t0} en términos de E_{i0} obtenemos

$$\boxed{\Gamma_{\parallel} = \frac{E_{r0}}{E_{i0}} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_i}} \quad (7-158)^{\dagger}$$

Coefficiente de reflexión para la polarización paralela

y

$$\boxed{\tau_{\parallel} = \frac{E_{t0}}{E_{i0}} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_i}} \quad (7-159)^{\dagger}$$

Coefficiente de transmisión para la polarización paralela

Es fácil verificar que

$$\boxed{1 + \Gamma_{\parallel} = \tau_{\parallel} \left(\frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} \right)}. \quad (7-160)$$

Relación entre los coeficientes de reflexión y de transmisión para la polarización paralela

La ecuación (7-160) difiere de la ecuación (7-149) para la polarización perpendicular, excepto cuando $\theta_i = \theta_t = 0$, que es el caso para la incidencia normal.

Si el medio 2 es un conductor perfecto ($\eta_2 = 0$), las ecuaciones (7-158) y (7-159) se simplifican a $\Gamma_{\parallel} = -1$ y $\tau_{\parallel} = 0$, respectivamente, con lo que se anula la componente

[†] Estas ecuaciones se conocen también como *ecuaciones de Fresnel*.

tangencial del campo \mathbf{E} total sobre la superficie del conductor, como era de esperarse. Observe que las direcciones de referencia que se eligieron para \mathbf{E}_r y \mathbf{H}_r en las figuras 7-14 y 7-15 son todas arbitrarias. Las direcciones reales de \mathbf{E}_r y \mathbf{H}_r pueden o no ser iguales a las que se muestran, dependiendo de si Γ_{\perp} en la ecuación (7-147) y Γ_{\parallel} en la ecuación (7-158) es positivo o negativo, respectivamente.

Si se representa gráficamente $|\Gamma_{\perp}|^2$ y $|\Gamma_{\parallel}|^2$ en función de θ_i , vemos que el primero siempre es mayor que el segundo, excepto cuando $\theta_i = 0$, donde son iguales. Esto significa que cuando una onda no polarizada incide sobre una superficie de separación dieléctrica plana, la onda reflejada tendrá mayor potencia en la componente con polarización perpendicular que en aquella con polarización paralela. Una aplicación conocida de este hecho es el diseño de las gafas de sol Polaroid que reducen los reflejos del sol. Gran parte de la luz solar que reciben los ojos ha sido reflejada en superficies horizontales sobre la tierra. Como $|\Gamma_{\perp}|^2 > |\Gamma_{\parallel}|^2$, la luz que llega a los ojos es predominantemente perpendicular al plano de reflexión (el mismo que el plano de incidencia) y por lo tanto el campo eléctrico es paralelo a la superficie terrestre. Las gafas de sol Polaroid están diseñadas para filtrar esta componente.

Principio en el que se basan las gafas de sol Polaroid para reducir los reflejos solares

7-7.5 ÁNGULO DE BREWSTER DE NO REFLEXIÓN

A partir de la expresión del coeficiente de reflexión (Ec. (7-158)) podemos observar que el numerador es la diferencia de dos términos. Con esto surge la duda de si hay una combinación de η_1 , η_2 y θ_i que hace que $\Gamma_{\parallel} = 0$ y no haya reflexión. Si denotamos este valor particular de θ_i con $\theta_{B\parallel}$, se tiene que satisfacer

$$\eta_2 \cos \theta_i = \eta_1 \cos \theta_{B\parallel}. \quad (7-161)$$

Elevando al cuadrado ambos lados de la ecuación (7-161) y usando la ecuación (7-117) se obtiene

$$\sin^2 \theta_{B\parallel} = \frac{1 - (\eta_2/\eta_1)^2}{1 - (\eta_2 \beta_1 / \eta_1 \beta_2)^2},$$

O

$$\boxed{\sin^2 \theta_{B\parallel} = \frac{1 - \mu_2 \epsilon_1 / \mu_1 \epsilon_2}{1 - (\epsilon_1 / \epsilon_2)^2}}. \quad (7-162)$$

El ángulo $\theta_{B\parallel}$ se conoce como **ángulo de Brewster** de no reflexión para el caso de polarización paralela.

$$\boxed{\sin \theta_{B\parallel} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\epsilon_1 / \epsilon_2)}}, \quad (\mu_1 = \mu_2).} \quad (7-163)$$

Ángulo de Brewster de no reflexión

Fórmula del ángulo de Brewster

Fórmula alternativa
del ángulo de
Brewster

Una forma alternativa de la ecuación (7-163) es

$$\theta_{B\parallel} = \tan^{-1} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \tan^{-1} \left(\frac{n_2}{n_1} \right), \quad (\mu_1 = \mu_2).$$

(7-164)

■ **EJERCICIO 7.15** Compruebe que las ecuaciones (7-163) y (7-164) son equivalentes.

Al llegar a este punto es probable que el lector se pregunte por qué no se examinó el ángulo de Brewster de no reflexión para el caso de polarización perpendicular. Matemáticamente podríamos hallar una fórmula para $\theta_{B\perp}$, el ángulo de incidencia θ_i con el cual se anularía Γ_\perp . Si asignamos cero al numerador de la ecuación (7-147), la condición

$$\eta_2 \cos \theta_{B\perp} = \eta_1 \cos \theta_i, \quad (7-165)$$

junto con la ley de Snell de la reflexión (Ec. (7-117)) produciría

$$\sin^2 \theta_{B\perp} = \frac{1 - \mu_1 \epsilon_2 / \mu_2 \epsilon_1}{1 - (\mu_1 / \mu_2)^2}. \quad (7-166)$$

Es evidente que $\theta_{B\perp}$ no existe si $\mu_1 = \mu_2$, como sucede usualmente para los medios donde se propagan las ondas.

Debido a la diferencia en las fórmulas de los ángulos de Brewster correspondientes a las polarizaciones perpendicular y paralela, es posible separar estos dos tipos de polarización en una onda no polarizada. Cuando una onda no polarizada, como la luz aleatoria, incide sobre una frontera con el ángulo de Brewster $\theta_{B\parallel}$ dado por la ecuación (7-164), sólo se reflejará la componente con polarización perpendicular. Por lo tanto, el ángulo de Brewster también se conoce como **ángulo de polarización**. En este principio se basa el uso de las ventanas de cuarzo montadas dormando el ángulo de Brewster en los extremos de un tubo láser para controlar la polarización del haz luminoso emitido.

EJEMPLO 7-13

Una onda electromagnética incide desde el aire sobre una superficie de agua, que tiene una constante dieléctrica de 80.

- Determiné el ángulo de Brewster para la polarización paralela, $\theta_{B\parallel}$, el ángulo de transmisión correspondiente.
- Si la onda tiene polarización perpendicular e incide desde el aire sobre la superficie de agua con un ángulo $\theta_i = \theta_{B\parallel}$, determine los coeficientes de reflexión y transmisión.

SOLUCIÓN

- El ángulo de Brewster de no reflexión para la polarización paralela puede obtenerse directamente de la ecuación (7-163):

$$\begin{aligned}\theta_{B\parallel} &= \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{1+(1/\epsilon_r)}} \\ &= \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{1+(1/80)}} = 81.0^\circ.\end{aligned}$$

El ángulo de transmisión correspondiente es, a partir de la ecuación (7-118),

$$\begin{aligned}\theta_t &= \sin^{-1} \left(\frac{\sin \theta_{B\parallel}}{\sqrt{\epsilon_r}} \right) = \sin^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon_r + 1}} \right) \\ &= \sin^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{81}} \right) = 6.38^\circ.\end{aligned}$$

- b) Si la onda incide con polarización perpendicular, se usan las ecuaciones (7-147) y (7-148) para determinar Γ_\perp y τ_\perp en $\theta_i = 81.0^\circ$ y $\theta_t = 6.38^\circ$ ($\eta_1 = 377 \Omega$, $\eta_2 = 377\epsilon\sqrt{\epsilon_r} = 40.1 \Omega$):

$$\Gamma_\perp = \frac{40.1 \cos 81^\circ - 377 \cos 6.38^\circ}{40.1 \cos 81^\circ + 377 \cos 6.38^\circ} = -0.967,$$

$$\tau_\perp = \frac{2 \times 377 \times \cos 81^\circ}{40.1 \cos 81^\circ + 377 \cos 6.38^\circ} = 0.033.$$

Observamos que se satisface la relación entre Γ_\perp y τ_\perp expresada en la ecuación (7-149).

PREGUNTAS DE REPASO

P.7-34 Defina la polarización perpendicular y la polarización paralela para la incidencia oblicua de ondas planas sobre una frontera plana.

P.7-35 ¿En qué condiciones los coeficientes de reflexión y transmisión para la polarización perpendicular serán iguales a los de la polarización paralela?

P.7-36 Defina el *ángulo de Brewster*. ¿Cuándo existe en la superficie de separación de dos medios no magnéticos?

P.7-37 ¿Por qué el ángulo de Brewster también se conoce como *ángulo de polarización*?

COMENTARIOS

- Los coeficientes de reflexión y transmisión en una superficie de discontinuidad dependen de la polarización de la onda incidente, de los parámetros constitutivos de los medios y del ángulo de incidencia.
- A diferencia del ángulo crítico de reflexión total, que sólo existe cuando $\epsilon_2 < \epsilon_1$, siempre existe el ángulo de Brewster de no reflexión para polarización paralela para dos medios no magnéticos, tanto si $\epsilon_2 < \epsilon_1$ como si $\epsilon_2 > \epsilon_1$.

R E S U M E N

A grandes distancias de una fuente finita que irradia ondas electromagnéticas, una pequeña porción del frente de onda es casi un plano; por lo tanto, el estudio de las ondas planas uniformes tiene especial importancia. En este capítulo

- examinamos el comportamiento de las ondas planas uniformes en medios con y sin pérdidas;
 - explicamos el efecto Doppler que se presenta cuando hay movimiento relativo entre una fuente con dependencia armónica con el tiempo y un receptor;
 - analizamos la polarización de las ondas planas y mostramos la relación entre las ondas de polarización lineal y circular;
 - explicamos el significado de un número de onda complejo y una constante de propagación compleja en un medio con pérdidas;
 - estudiamos el efecto de penetración en los conductores y obtuvimos la fórmula para la profundidad de penetración;
 - presentamos el concepto de dispersión de la señal y explicamos la diferencia entre las velocidades de fase y de grupo;
 - analizamos el flujo de potencia electromagnética y el teorema de Poynting;
 - estudiamos la reflexión y la refracción de ondas electromagnéticas en fronteras planas, con incidencia tanto normal como oblicua;
 - obtuvimos las leyes de Snell de la reflexión y de la refracción;
 - explicamos el efecto de la ionosfera en la propagación de ondas, y
 - examinamos las condiciones de reflexión total y de no reflexión.
-

P R O B L E M A S

P.7-1 (a) Obtenga las ecuaciones de onda que rigen los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} en un medio conductor sin fuentes cuyos parámetros constitutivos son ϵ , μ y σ . (b) Obtenga las ecuaciones de Helmholtz correspondientes para campos con dependencia armónica con el tiempo.

P.7-2 Se usa un radar Doppler de 1 (GHz) en tierra para determinar la posición y velocidad de un aeroplano que se aproxima. Suponga que la señal reflejada por el aeroplano a un ángulo de elevación de 15.5° presentó un retardo temporal de 0.3 (ms) y un cambio en frecuencia de 2.64 (kHz); determine la distancia, altura y velocidad del aeroplano.

P.7-3 Obtenga una fórmula general que exprese el fasor $\mathbf{E}(\mathbf{R})$ en términos del fasor $\mathbf{H}(\mathbf{R})$ para una onda transversal electromagnética y la impedancia intrínseca del medio, siendo \mathbf{R} el vector de posición.

P.7-4 La expresión de la intensidad de campo magnético instantáneo de una onda plana uniforme que se propaga por el aire en dirección $+y$ está dada por

$$\mathbf{H} = \mathbf{a}_z 4 \times 10^{-6} \cos \left(10^7 \pi t - k_0 y + \frac{\pi}{4} \right) \quad (\text{A/m}).$$

- a) Determine k_0 y la posición donde se anula H_z en $t = 3$ (ms).
- b) Escriba la expresión de \mathbf{E} instantáneo.

P.7-5 El campo \mathbf{E} de una onda plana que se propaga en un medio dieléctrico está dado por

$$\mathbf{E}(t, z) = \mathbf{a}_x 2 \cos(10^8 t - z/\sqrt{3}) - \mathbf{a}_y \sin(10^8 t - z/\sqrt{3}) \quad (\text{V/m}).$$

- a) Determine la frecuencia y la longitud de onda de la onda.
- b) ¿Cuál es la constante dieléctrica del medio?
- c) Describa la polarización de la onda.
- d) Encuentre el campo \mathbf{H} correspondiente.

P.7-6 Demuestre que una onda plana con la siguiente expresión del campo eléctrico instantáneo

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{a}_x E_{10} \sin(\omega t - kz) + \mathbf{a}_y E_{20} \sin(\omega t - kz + \psi)$$

tiene polarización elíptica.

P.7-7 Una onda plana uniforme de 3 (GHz), polarizada en y , se propaga en la dirección $+x$ en un medio no magnético con constante dieléctrica de 2.5 y tangente de pérdidas de 0.05.

- a) Determine la distancia a la cual se reducirá a la mitad la amplitud de la onda viajera.
- b) Determine la impedancia intrínseca, la longitud de onda, la velocidad de fase y la velocidad de grupo de la onda en el medio.
- c) Suponiendo $\mathbf{E} = \mathbf{a}_y 50 \sin(6\pi 10^9 t + \pi/3)$ (V/m) en $x = 0$, escriba la expresión de \mathbf{H} instantáneo para todo t y x .

P.7-8 Determine y compare la impedancia intrínseca, la constante de atenuación (tanto en Np/m como en dB/m) y la profundidad de penetración del cobre ($\sigma_{cu} = 5.80 \times 10^7$ (S/m)) y el bronce ($\sigma_{br} = 1.59 \times 10^7$ (S/m)) a las siguientes frecuencias: (a) 1 (MHz) y (b) 1 (GHz).

P.7-9 Si la profundidad de penetración del grafito a 100 (MHz) es 0.16 (mm), determine (a) la conductividad del grafito y (b) la distancia que se propaga una onda de 1 (GHz) en el grafito antes de que su intensidad de campo se reduzca en 30 (dB).

P.7-10 Hay un continuo debate sobre los riesgos de la radiación para la salud del ser humano. Los cálculos siguientes sirven para una comparación a grandes rasgos.

- a) En Estados Unidos la norma de seguridad personal para trabajo con equipos de microondas es que la densidad de potencia sea inferior a 10 (mW/cm²). Calcule la norma correspondiente en términos de la intensidad de campo eléctrico y en términos de la intensidad de campo magnético.

- b) Se estima que la Tierra recibe energía radiante del Sol a razón de unos 1.3 (kW/m²) en un día soleado. Suponga que se trata de una onda monocromática plana (que no lo es) y calcule las amplitudes equivalentes de los vectores de intensidad de campo eléctrico y magnético.

P.7-11 Demuestre que el vector de Poynting instantáneo de una onda plana con polarización circular que se propaga en un medio sin pérdidas es una constante independiente del tiempo y de la distancia.

P.7-12 Suponga que la intensidad de campo eléctrico de radiación de un sistema de antenas es

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}_\theta E_\theta + \mathbf{a}_\phi E_\phi,$$

y determine la expresión de la intensidad del flujo de potencia media que parte por unidad de área.

P.7-13 Desde el punto de vista del electromagnetismo, la potencia transmitida por un cable coaxial sin pérdidas puede calcularse en términos del vector de Poynting dentro del medio dieléctrico que hay entre el conductor interno y el revestimiento externo. Suponga que la aplicación de un voltaje de corriente continua V_0 entre el conductor interno (de radio a) y el revestimiento externo (de radio interior b) ocasiona el flujo de una corriente I por una resistencia de carga. Compruebe que la integración del vector de Poynting sobre la sección transversal del medio dieléctrico es igual a la potencia $V_0 I$ que se transmite a la carga.

P.7-14 Una onda plana uniforme en el aire con $\mathbf{E}_i(x, t) = \mathbf{a}_y 50 \operatorname{sen}(10^8 t - \beta x)$ (V/m) incide normalmente sobre un medio sin pérdidas ($\epsilon_r = 2$, $\mu_r = 8$, $\sigma = 0$) en la región $x \geq 0$. Determine

- a) \mathbf{E}_r y \mathbf{H}_r ,
- b) Γ , τ y S , y
- c) \mathbf{E}_t y \mathbf{H}_t .

P.7-15 Una onda plana uniforme se propaga en la dirección $+z$ (hacia abajo) hacia el océano ($\epsilon_r = 72$, $\mu_r = 1$, $\sigma = 4$ S/m). El campo magnético en la superficie del océano ($z = 0$) es $\mathbf{H}(0, t) = \mathbf{a}_y 0.3 \cos 10^8 t$ (A/m).

- a) Determine la profundidad de penetración y la impedancia intrínseca del agua del océano.
- b) Determine las expresiones de $\mathbf{E}(z, t)$ y $\mathbf{H}(z, t)$ en el océano.
- c) Calcule la pérdida de potencia media por unidad de área en el océano, como función de z .

P.7-16 Obtenga las razones siguientes para ondas planas uniformes en un medio 1 que inciden normalmente sobre una superficie de separación plana con un medio 2:

- a) H_{r0}/H_{i0} y compare el resultado con el coeficiente de reflexión de la ecuación (7-94), y
- b) H_{t0}/H_{i0} y compare el resultado con el coeficiente de transmisión de la ecuación (7-95).

P.7-17 Una onda plana con polarización circular de mano derecha, representada por el fasor $\mathbf{E}(z) = E_0(\mathbf{a}_x - j\mathbf{a}_y)e^{-j\beta z}$

incide normalmente sobre una pared conductora perfecta en $z = 0$.

- Determine la polarización de la onda reflejada.
- Calcule la corriente inducida sobre la pared conductora.
- Obtenga la expresión de la intensidad eléctrica total instantánea utilizando una referencia de tiempo coseno.

P.7-18 Determine la condición en la cual la magnitud del coeficiente de reflexión es igual al coeficiente de transmisión de una onda plana uniforme que incide normalmente sobre una superficie de separación entre dos medios dieléctricos sin pérdidas. ¿Cuál es la razón de onda estacionaria en dB para esta condición?

P.7-19 Una onda plana uniforme en el aire con $\mathbf{E}_i(z) = \mathbf{a}_x 10e^{-j6z}$ (V/m) incide normalmente sobre una superficie de separación en $z = 0$ con un medio con pérdidas que tiene constante dieléctrica de 2.25 y tangente de pérdidas de 0.3. Encuentre lo siguiente:

- Las expresiones fasoriales de $\mathbf{E}_r(z)$, $\mathbf{H}_r(z)$, $\mathbf{E}_t(z)$ y $\mathbf{H}_t(z)$.
- La razón de onda estacionaria para la onda en el aire.
- Las expresiones de los vectores de Poynting de media temporal en el aire y en el medio con pérdidas.

P.7-20 Una onda plana senoidal uniforme en el aire tiene la siguiente expresión fasorial para la intensidad eléctrica:

$$\mathbf{E}_i(x, z) = \mathbf{a}_y 10e^{-j(6x + 8z)} \text{ (V/m).}$$

La onda incide sobre un plano conductor perfecto en $z = 0$.

- Calcule la frecuencia y la longitud de onda.
- Escriba las expresiones de $\mathbf{E}_r(x, z; t)$ y $\mathbf{H}_r(x, z; t)$ instantáneos.
- Determine el ángulo de incidencia.
- Determine $\mathbf{E}_r(x, z)$ y $\mathbf{H}_r(x, z)$ de la onda reflejada.
- Determine $\mathbf{E}_t(x, z)$ y $\mathbf{H}_t(x, z)$ del campo total en el aire.

P.7-21 Una onda plana uniforme con polarización perpendicular incide oblicuamente sobre una frontera plana con $\epsilon_1 = \epsilon_0$, $\epsilon_2 = 2.25\epsilon_0$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$, como se ilustra en la figura 7-14. Suponga $E_{i0} = 20$ (V/m), $f = 100$ (MHz) y $\theta_i = 30^\circ$.

- Calcule los coeficientes de reflexión y de transmisión.
- Escriba la expresión de $\mathbf{E}_r(x, z; t)$ y $\mathbf{H}_r(x, z; t)$ instantáneos.

P.7-22 Una onda plana uniforme con polarización paralela incide oblicuamente sobre una frontera plana con $\epsilon_1 = \epsilon_0$, $\epsilon_2 = 2.25\epsilon_0$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$, como se ilustra en la figura 7-15. Suponga $H_{i0} = 0.053$ (A/m), $f = 100$ (MHz) y $\theta_i = 30^\circ$.

- Calcule los coeficientes de reflexión y transmisión.
- Escriba la expresión de $\mathbf{E}_r(x, z; t)$ y $\mathbf{H}_r(x, z; t)$ instantáneos.

P.7-23

- Proponga un método para medir la densidad máxima de electrones en la ionosfera.
- Suponiendo $N_{\max} = 8 \times 10^{11}$ por metro cúbico, analice la frecuencia mínima que puede usarse en la comunicación con una estación espacial más allá de la ionosfera.

c) ¿Qué sucede para una incidencia oblicua sobre la ionosfera si se emplea una frecuencia más baja?

P.7-24 Una onda plana uniforme incide en la ionosfera con un ángulo de incidencia $\theta_i = 60^\circ$. Suponga una densidad constante de electrones y una frecuencia de la onda igual a la mitad de la frecuencia del plasma de la ionosfera. Determine

a) Γ_\perp y τ_\perp , y

b) Γ_\parallel y τ_\parallel .

Interprete el significado de estas cantidades complejas.

P.7-25 Una onda electromagnética de 10 (kHz) en el aire, con polarización paralela, incide oblicuamente sobre la superficie del océano con un ángulo casi rasante $\theta_i = 88^\circ$. Usando $\epsilon_r = 81$, $\mu_r = 1$ y $\sigma = 4$ (S/m) para el agua de mar, encuentre (a) el ángulo de refracción θ_r , (b) el coeficiente de transmisión τ_\parallel , y (c) la distancia bajo la superficie del océano donde la intensidad de campo ha disminuido en 30 (dB).

P.7-26 Un rayo de luz incide oblicuamente desde el aire sobre una lámina transparente de grosor d cuyo índice de refracción es n , como se muestra en la figura 7-16. El ángulo de incidencia es θ_i . Encuentre (a) θ_r , (b) la distancia ℓ_1 al punto de salida y (c) la cantidad de desplazamiento lateral ℓ_2 del rayo emergente.

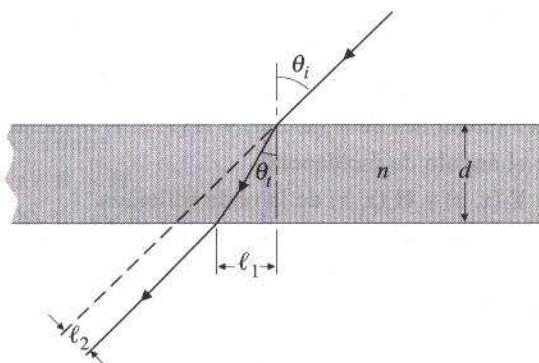


FIGURA 7-16 Rayo de luz que incide oblicuamente sobre una lámina transparente con índice de refracción n (Prob. P.7-26).

P.7-27 Una onda plana uniforme con polarización perpendicular, representada por las ecuaciones (7-135) y (7-136), incide sobre una superficie de discontinuidad plana en $z = 0$, como se ilustra en la figura 7-14. Suponga $\epsilon_2 < \epsilon_1$ y $\theta_i > \theta_c$. (a) Obtenga las expresiones fasoriales del campo transmitido (\mathbf{E}_t , \mathbf{H}_t) y (b) compruebe que la potencia media transmitida en el medio 2 es cero.

P.7-28 Una onda plana uniforme con frecuencia angular ω en el medio 1 e índice de refracción n_1 incide con el ángulo crítico sobre una superficie de discontinuidad plana en $z = 0$ del medio 2 con índice de refracción $n_2 (< n_1)$. Sean E_{i0} y E_{r0} las amplitudes de las intensidades de los campos eléctrico y magnético incidentes y refractados, respectivamente.

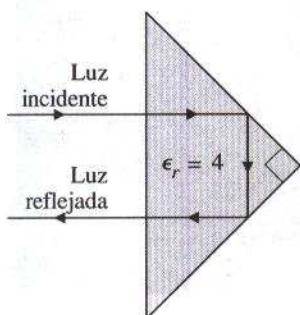


FIGURA 7-17 Reflexión luminosa por un prisma triangular isósceles en ángulo recto (Prob. P.7-30).

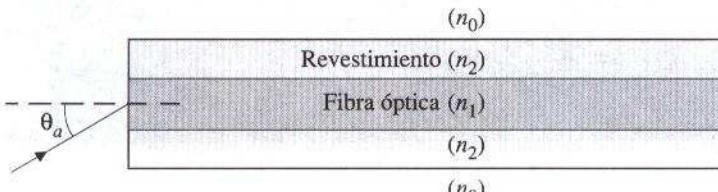


FIGURA 7-18 Fibra óptica con núcleo revestido (Prob. P.7-31).

- Determine la razón E_{r0}/E_{i0} para polarización perpendicular.
- Determine la razón E_{r0}/E_{i0} para polarización paralela.
- Escriba las expresiones de $\mathbf{E}_i(x, z; t)$ y $\mathbf{E}_r(x, z; t)$ instantáneos para polarización perpendicular, en términos de los parámetros ω , n_1 , n_2 , θ_i y E_{i0} .

P.7-29 Una onda electromagnética que surge con polarización perpendicular de una fuente subacuática incide sobre una superficie de separación agua–aire con un ángulo $\theta_i = 20^\circ$. Usando $\epsilon_r = 81$ y $\mu_r = 1$ para el agua dulce, calcule (a) el ángulo crítico θ_c , (b) el coeficiente de reflexión Γ_\perp , (c) el coeficiente de transmisión τ_\perp y (d) la atenuación en dB para cada longitud de onda en el aire.

P.7-30 Los prismas triangulares isósceles de vidrio, como el que se muestra en la figura 7-17, se usan comúnmente en los instrumentos ópticos. Suponiendo $\epsilon_r = 4$ para el vidrio, calcule el porcentaje de potencia luminosa incidente que refleja el prisma.

P.7-31 Es costumbre revestir las fibras ópticas con un material de bajo índice de refracción para evitar la interferencia procedente de ondas en las fibras vecinas y como protección mecánica, como puede verse en la figura 7-18, donde $n_2 < n_0$.

- Exprese el ángulo de incidencia máximo θ_a en términos de n_0 , n_1 y n_2 para que los rayos meridionales que inciden sobre la cara abierta del núcleo queden atrapados por reflexión interna total dentro del núcleo. (Los **rayos meridionales** son aquellos que pasan por el eje de la fibra. El ángulo θ_a se denomina **ángulo de aceptación** y $\operatorname{sen} \theta_a$ es la **abertura numérica** (A. N.) de la fibra.)
- Encuentre θ_a y la apertura numérica si $n_1 = 2$, $n_2 = 1.74$ y $n_0 = 1$.

P.7-32 Demuestre que en la condición de no reflexión en una superficie de separación, la suma del ángulo de Brewster y el ángulo de refracción es $\pi/2$ para:

- polarización perpendicular ($\mu_1 \neq \mu_2$), y
- polarización paralela ($\epsilon_1 \neq \epsilon_2$).

P.7-33 Para una onda incidente con polarización paralela, determine la relación entre el ángulo crítico θ_c y el ángulo de Brewster $\theta_{B\parallel}$ para dos medios contiguos de la misma permeabilidad.