

FIG. 5-15. Dibujar la autoinducción de una bobina que gira entre dos imanes en V fijados al suelo (5-23, cont.) situando el eje en el centro (5-24). A continuación, calcular el voltaje inducido en la bobina circular de radio r . Un pongo una expresión apropiada suponiendo que

CAPÍTULO 6

Ecuaciones fundamentales que rigen el modelo electrostático

Relación constitutiva para el modelo eléctrico

Ecuaciones fundamentales que rigen el modelo magnetostático

Relación constitutiva para el modelo magnético

6 - 1 DESCRIPCIÓN GENERAL Hasta ahora sólo hemos visto campos que no cambian con el tiempo. Al construir el modelo electrostático definimos un vector de intensidad de campo eléctrico, \mathbf{E} , y un vector de densidad de flujo eléctrico (desplazamiento eléctrico), \mathbf{D} . Las ecuaciones fundamentales son

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad (3-4)(6-1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v. \quad (3-63)(6-2)$$

En el caso de medios lineales e isótropos (aunque no necesariamente homogéneos), \mathbf{E} y \mathbf{D} están relacionados por la relación constitutiva

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}. \quad (3-67)(6-3)$$

Para el modelo magnetostático definimos un vector de densidad de flujo magnético, \mathbf{B} , y un vector de intensidad de campo magnético, \mathbf{H} . Las ecuaciones diferenciales fundamentales que rigen este modelo son

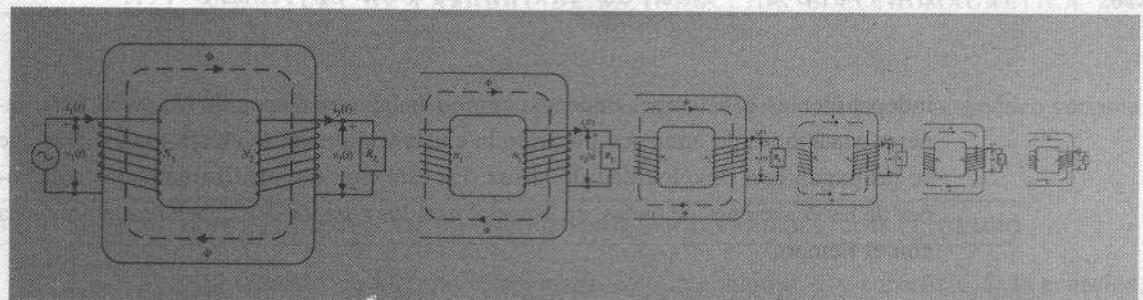
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (5-6)(6-4)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}. \quad (5-61)(6-5)$$

La relación constitutiva para \mathbf{B} y \mathbf{H} en un medio lineal e isótropo es

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}. \quad (5-66)(6-6)$$

Observamos que \mathbf{E} y \mathbf{D} en el modelo electrostático no están relacionados con \mathbf{B} y \mathbf{H} en el modelo magnetostático. En un medio conductor pueden existir campos eléctricos y magnéticos estáticos y formar un **campo electromagnetostático**. El campo



6-5 LEY DE FARADAY DE LA INDUCCIÓN ELECTROMAGNETICA

Campos variables con el tiempo y ecuaciones de Maxwell

Campo eléctrico y fuerza electromagnetostática

eléctrico estático en un medio conductor hace que fluya una corriente estacionaria, que a su vez produce un campo magnético estático. Sin embargo, es posible determinar completamente el campo eléctrico a partir de las cargas eléctricas estáticas o de las distribuciones de potencial. El campo magnético es una consecuencia, y no entra en el cálculo del campo eléctrico.

Los modelos estáticos son sencillos, pero inadecuados para explicar los fenómenos electromagnéticos variables con el tiempo. Los campos eléctricos y magnéticos estáticos no producen ondas que se propagan y transportan energía e información. Las ondas son la esencia de la acción electromagnética a distancia. En este capítulo veremos que un campo magnético variable induce un campo eléctrico y viceversa. En condiciones variables con el tiempo es necesario construir un modelo electromagnético donde los vectores de campo eléctrico **E** y **D** estén correctamente relacionados con los vectores de campo magnético **B** y **H**.

Comenzaremos con un postulado fundamental que modifica la ecuación $\nabla \times \mathbf{E}$ (6-1) y da lugar a la ley de Faraday de la inducción electromagnética. Analizaremos los conceptos de la fuerza electromotriz estática y la fuerza electromotriz cinética. Con el nuevo postulado es necesario modificar también la ecuación $\nabla \times \mathbf{H}$ para que las ecuaciones fundamentales sean consistentes con la ley de la conservación de la carga. Las dos ecuaciones de rotacional modificadas, junto con las dos ecuaciones de divergencia (6-2) y (6-4), se conocen como ecuaciones de Maxwell y son la base de la teoría electromagnética. Las ecuaciones que rigen la electrostática y la magnetostática son formas especiales de las ecuaciones de Maxwell cuando todas las cantidades son

independientes del tiempo. Podemos combinar las ecuaciones de Maxwell para generar ecuaciones de onda que predicen la existencia de ondas electromagnéticas que se propagan con la velocidad de la luz. En este capítulo analizaremos las soluciones de las ecuaciones de ondas, en especial para los campos con dependencia armónica con el tiempo.

6-2 LEY DE FARADAY DE LA INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA

Michael Faraday llevó a cabo uno de los mayores avances en la teoría electromagnética cuando en 1831 descubrió experimentalmente que se inducía una corriente en una espira conductora cuando cambiaba el flujo magnético que atravesaba la espira. La relación cuantitativa entre la fuerza electromotriz inducida y la razón de cambio del flujo ligado, basada en observaciones experimentales, se conoce como *ley de Faraday*. Es una ley experimental y puede considerarse como un postulado. Sin embargo, no usaremos como punto de partida la relación experimental relacionada con una espira finita. En lugar de ello seguiremos el enfoque que usamos en el capítulo 3 para la electrostática y en el capítulo 5 para la magnetostática, enunciando un postulado fundamental y desarrollando a partir de éste las formas integrales de la ley de Faraday.

El postulado fundamental de la inducción electromagnética es

Postulado fundamental de la inducción electromagnética

El vector intensidad de campo eléctrico en un campo magnético variable con el tiempo no es conservativo.

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (6-7)$$

La ecuación (6-7) representa una relación de funciones de punto; es decir, se aplica a todos los puntos en el espacio, ya sea éste el espacio libre o un medio material. *La intensidad de campo eléctrico en una región de densidad de flujo magnético variable con el tiempo es por consiguiente no conservativa y no puede expresarse como el gradiente negativo de un potencial escalar.*

Si tomamos la integral de superficie en ambos lados de la ecuación (6-7) sobre una superficie abierta y aplicamos el teorema de Stokes, obtenemos

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\ell = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}. \quad (6-8)$$

La ecuación (6-8) es válida para cualquier superficie S limitada por el contorno C , exista o no un circuito físico alrededor de C . Por supuesto, en un campo sin variación temporal, $\partial \mathbf{B} / \partial t = 0$ y las ecuaciones (6-7) y (6-8) se reducen a las ecuaciones (6-1) y (3-7), respectivamente, de la electrostática.

En las subsecciones siguientes analizaremos por separado los casos de un circuito estacionario en un campo magnético variable con el tiempo, un conductor moviéndose

en un campo magnético estático y un circuito móvil en un campo magnético variable con el tiempo.

6-2.1 CIRCUITO ESTACIONARIO EN UN CAMPO MAGNÉTICO VARIABLE CON EL TIEMPO

Si tenemos un circuito estacionario con un contorno C y superficie S , la ecuación (6-8) puede escribirse como

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\ell = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}. \quad (6-9)$$

Si definimos

$$\mathcal{V} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\ell = \text{fem inducida en el circuito con contorno } C \quad (V) \quad (6-10)$$

y

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \text{flujo magnético que atraviesa la superficie } S \quad (\text{Wb}), \quad (6-11)$$

la ecuación (6-9) se convierte en

$\mathcal{V} = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (V).$

(6-12)

La ecuación (6-12) establece que *la fuerza electromotriz inducida en un circuito cerrado estacionario es igual a la razón negativa de incremento del flujo magnético ligado al circuito*. Éste es un enunciado de la *ley de Faraday de la inducción electromagnética*. El signo negativo en la ecuación (6-12) afirma que la fuerza electromotriz inducida hará que fluya una corriente en el circuito cerrado, con dirección tal que se oponga al cambio del flujo magnético ligado. Esta afirmación se conoce como *ley de Lenz*. La fuerza electromotriz inducida en un circuito estacionario ocasionado por un campo magnético variable con el tiempo es una *fuerza electromotriz estática*.

Ley de Faraday de la inducción electromagnética

Ley de Lenz de la fuerza electromotriz estática

EJEMPLO 6-1

Un circuito circular formado por N vueltas de alambre conductor está en el plano xy con el centro en el origen de un campo magnético especificado por $\mathbf{B} = a_z B_0 \cos(\pi r/2b) \sin \omega t$, donde b es el radio del circuito y ω es la frecuencia angular. Determine la fuerza electromotriz inducida en el circuito.

SOLUCIÓN

El problema especifica un circuito estacionario en un campo magnético variable con el tiempo; por lo tanto, podemos usar la ecuación (6-12) para hallar la fuerza electromotriz inducida, \mathcal{V} . El flujo magnético ligado a cada vuelta de circuito circular es

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \\ &= \int_0^b \left[\mathbf{a}_z B_0 \cos \left(\frac{\pi r}{2b} \right) \sin \omega t \right] \cdot (\mathbf{a}_z 2\pi r dr) \\ &= \frac{8b^2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) B_0 \sin \omega t.\end{aligned}$$

Puesto que hay N vueltas, el flujo total ligado es $N\Phi$ y obtenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= -N \frac{d\Phi}{dt} \\ &= -\frac{8N}{\pi} b^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) B_0 \omega \cos \omega t \quad (\text{V}).\end{aligned}$$

Podemos ver que como la fase de $\cos \omega t$ está adelantada 90° respecto a la de $\sin \omega t$, la fase de la fuerza electromotriz inducida va 90° retrasada con respecto a la del flujo ligado.

- **EJERCICIO 6.1** Determine la fuerza electromotriz inducida en el circuito circular de N vueltas con radio b del ejemplo 6-1 si la densidad de flujo magnético es $\mathbf{B} = \mathbf{a}_z B_0(b - r) \cos \omega t$. ¿Cuál es la relación de fases entre la fuerza electromagnética inducida y el campo magnético?

RESPUESTA: $\mathcal{V} = N \frac{\pi}{3} \omega b^3 B_0 \sin \omega t$, fase retrasada 90° con respecto a \mathbf{B} .

6-2.2 TRANSFORMADORES

Funciones de un transformador

Un transformador es un dispositivo de corriente alterna (ca) que transforma voltajes, corrientes e impedancias. Normalmente consiste en dos o más bobinas acopladas magnéticamente a través de un núcleo ferromagnético común, como se ilustra en la figura 6-1. Para la trayectoria cerrada en el circuito magnético trazado por el flujo magnético Φ tenemos

$$N_1 i_1 - N_2 i_2 = \mathcal{R}\Phi, \quad (6-13)$$

donde N_1 , N_2 e i_1 , i_2 son el número de vueltas y la corriente en los circuitos primario y secundario, respectivamente. El lado izquierdo de la ecuación (6-13) es la integral de línea cerrada $\oint \mathbf{H} \cdot d\ell$ alrededor del núcleo del transformador, consecuencia de la ley circuital de Ampère expresada en la ecuación (5-63), y representa la *fuerza magnetomotriz* (fmm) neta (unidad en el SI: ampere-vuelta). Ya hemos señalado que, de acuerdo con la ley de Lenz, la fuerza magnetomotriz inducida en el circuito secundario, $N_2 i_2$, se opone al flujo magnético creado por la fuerza magnetomotriz en el circuito primario, $N_1 i_1$. El símbolo \mathcal{R} en el lado derecho de la ecuación (6-13) denota la *reluctancia* del

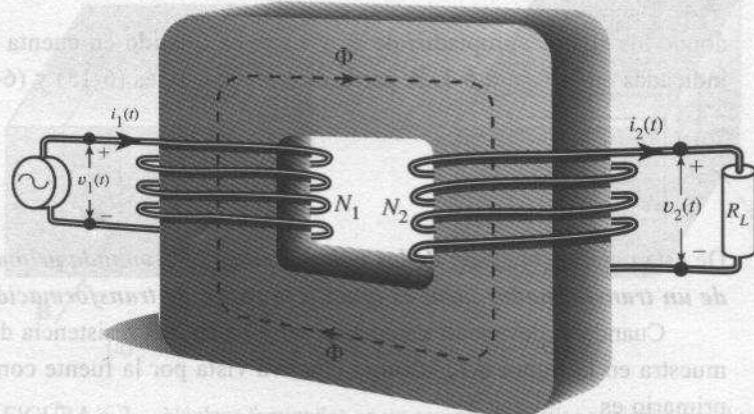


FIGURA 6-1 Diagrama esquemático de un transformador.

circuito magnético, la cual depende de la geometría y es inversamente proporcional a la permeabilidad del material del núcleo.[†] La ecuación (6-13) para un circuito magnético es análoga a una expresión de la ley del voltaje de Kirchhoff para un circuito eléctrico de corriente continua, y nos dice que la fuerza electromotriz neta alrededor de un circuito cerrado es igual a la suma de las resistencias multiplicada por la corriente. En este caso, \mathcal{R} y Φ son análogos a la resistencia y a la corriente, respectivamente.

En el caso de los transformadores ideales suponemos que no hay flujo de fuga y que $\mu \rightarrow \infty$, $\mathcal{R} = 0$. La ecuación (6-13) se convierte en

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{N_2}{N_1}. \quad (6-14)$$

La ecuación (6-14) establece que *la razón de las corrientes en los devanados primario y secundario de un transformador ideal es igual a la inversa de la razón de transformación*. La ley de Faraday nos dice que

$$v_1 = N_1 \frac{d\Phi}{dt} \quad (6-15)$$

$$v_2 = N_2 \frac{d\Phi}{dt}, \quad (6-16)$$

[†] El cálculo de la reluctancia de un circuito magnético es similar al de la resistencia en un circuito eléctrico, pero el resultado sólo puede ser aproximado debido a la existencia de flujo de fuga y a la no uniformidad de la sección transversal del núcleo del transformador. (El flujo de fuga es la parte del flujo magnético no ligada al circuito magnético.) No profundizaremos aquí en la determinación de \mathcal{R} . La unidad en el SI de la reluctancia es el inverso del henry (H^{-1}).

donde los signos apropiados de v_1 y v_2 se han tenido en cuenta por las polaridades indicadas en la figura 6-1. A partir de las ecuaciones (6-15) y (6-16) tenemos

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{N_1}{N_2}. \quad (6-17)$$

Relación de voltajes para un transformador ideal

De esta manera, *la razón de los voltajes entre el devanado primario y el secundario de un transformador ideal es igual a la razón de transformación*.

Cuando el devanado secundario termina en una resistencia de carga R_L , como se muestra en la figura 6-1, la carga efectiva vista por la fuente conectada al devanado primario es

$$(R_1)_{\text{efec}} = \frac{v_1}{i_1} = \frac{(N_1/N_2)v_2}{(N_2/N_1)i_2}, \quad (6-18)$$

o

Transformación de resistencias por un transformador ideal

$$(R_1)_{\text{efec}} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 R_L, \quad (6-19)$$

que es la resistencia de carga multiplicada por el cuadrado de la razón de transformación. En el caso de una fuente senoidal $v_1(t)$ y una impedancia de carga Z_L , la carga efectiva para la fuente es $(N_1/N_2)^2 Z_L$, una transformación de impedancia. Tenemos

$$(Z_1)_{\text{efec}} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 Z_L. \quad (6-20)$$

Transformación de impedancias por un transformador ideal

En la sección 5-10 señalamos que la inductancia de una bobina es proporcional a la permeabilidad del medio. Por lo tanto, la suposición de una μ infinita para un transformador ideal también implica inductancias infinitas.

Razón por la cual es difícil el análisis preciso de un transformador real

En los transformadores reales tenemos las siguientes condiciones: la existencia de flujo de fuga, inductancias finitas, resistencia distinta de cero en el devanado y la presencia de histéresis y pérdidas por corrientes parásitas. La naturaleza no lineal del núcleo ferromagnético (la dependencia de la permeabilidad con la intensidad del campo magnético) complica aún más el problema de un análisis exacto de los transformadores reales.

Definición de una corriente parásita

Cuando un flujo magnético variable con el tiempo fluye por el núcleo ferromagnético, se produce una fuerza electromotriz inducida de acuerdo con la ley de Faraday. Esta fuerza electromotriz inducida producirá corrientes locales en el núcleo conductor, normales al flujo magnético. Estas corrientes se denominan *corrientes parásitas*. Las corrientes parásitas producen pérdida óhmica de potencia y generan calor local. De hecho, éste es el principio del calentamiento por inducción. Se han construido hornos

Principio del calentamiento por inducción

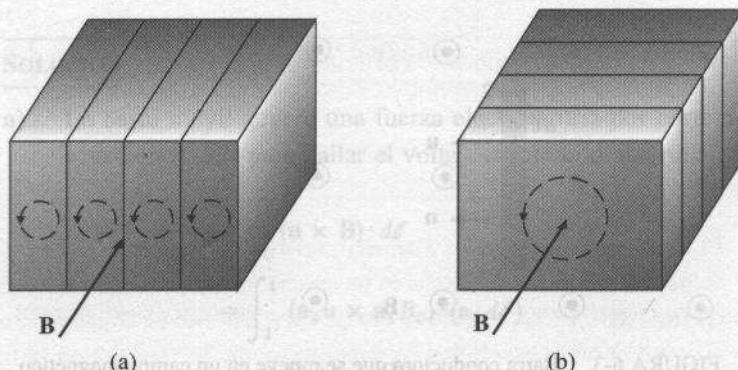


FIGURA 6-2 Núcleos laminados en un campo magnético variable con el tiempo.

Laminado del núcleo para reducir las pérdidas por corrientes parásitas

por inducción que generan temperaturas lo suficientemente altas como para fundir metales. Esta pérdida de potencia por las corrientes parásitas en los transformadores no es deseable y puede reducirse usando materiales para el núcleo que tengan alta permeabilidad pero baja conductividad (μ alta y σ baja). Las ferritas son este tipo de materiales. Una forma económica de reducir las pérdidas por corrientes parásitas en aplicaciones de baja frecuencia-alta potencia es usar núcleos laminados, es decir, formar los núcleos de los transformadores con láminas ferromagnéticas (de hierro) apiladas, cada una eléctricamente aislada de sus vecinas mediante una delgada capa de barniz u óxido. El recubrimiento aislante debe ser paralelo a la dirección del flujo magnético, como se ilustra en la figura 6-2(a), para que las corrientes parásitas normales al flujo estén restringidas a las láminas. Es evidente que la disposición de la figura 6-2(b), con capas aisladas normales al flujo magnético, tiene poco efecto en la reducción de las pérdidas por corrientes parásitas. Puede demostrarse que la pérdida total por corrientes parásitas se reduce al aumentar el número de láminas. La reducción en la pérdida de potencia depende de la forma y el tamaño de la sección transversal, además del método de laminado.

EJERCICIO 6.2 Hay que convertir una resistencia de $75\ \Omega$ a $300\ \Omega$ usando un transformador ideal. ¿Qué razón de transformación debe tener el transformador?

RESPUESTA: 2:1.

6-2.3 CONDUCTOR MÓVIL EN UN CAMPO MAGNÉTICO ESTÁTICO

Cuando un conductor se mueve con una velocidad \mathbf{u} en un campo magnético estático (no variable con el tiempo) \mathbf{B} , como se muestra en la figura 6-3, una fuerza $\mathbf{F}_m = q\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ hará que los electrones que se pueden mover libremente en el conductor se desplacen hacia un extremo del conductor y dejen el otro extremo cargado positivamente. Esta separación de cargas positivas y negativas crea una fuerza de atracción de Coulomb. El proceso de separación de cargas continuará hasta que las fuerzas magnéticas y eléctricas se

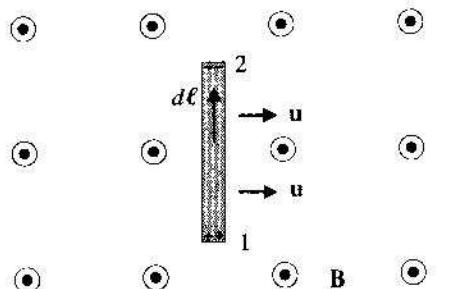


FIGURA 6-3 Barra conductora que se mueve en un campo magnético.

equilibren y se llegue a un estado de equilibrio. Un vez en el equilibrio, al cual se llega muy rápidamente, la fuerza neta sobre las cargas libres en el conductor móvil es cero.

Para un observador que se mueve a la par del conductor, no hay movimiento aparente y la fuerza magnética por unidad de carga $F_m/q = \mathbf{u} \times \mathbf{B}$ puede interpretarse como un campo eléctrico inducido que actúa a lo largo del conductor produciendo un voltaje

$$\text{fuerza electromotriz: } V_{21} = \int_1^2 (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\ell. \quad (6-21)$$

Si el conductor móvil forma parte de un circuito cerrado C , la fuerza electromotriz generada alrededor del circuito es

$$\mathcal{V}' = \oint_C (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\ell \quad (\text{V}). \quad (6-22)$$

Definición de la fuerza electromotriz cinética

Esto se conoce como *fuerza electromotriz por corte de flujo* o *fuerza electromotriz cinética*. Es obvio que sólo la parte del circuito que se mueve en una dirección no paralela al flujo magnético (y que, por consiguiente, lo “corta” en sentido figurado) contribuirá a \mathcal{V}' en la ecuación (6-22).

EJEMPLO 6-2

Una barra metálica se desliza con velocidad constante u sobre un par de rieles conductores en un campo magnético uniforme $\mathbf{B} = a_z B_0$, como se ilustra en la figura 6-4.

- Determine el voltaje en circuito abierto V_0 que aparece entre los terminales 1 y 2.
- Suponiendo que se conecta una resistencia R entre los terminales, calcule la potencia eléctrica disipada en R .
- Demuestre que esta potencia eléctrica es igual a la potencia mecánica necesaria para mover la barra deslizante con velocidad u . Ignore la resistencia eléctrica de la barra metálica y de los rieles conductores. Ignore también la fricción mecánica en los puntos de contacto.

SOLUCIÓN

- a) La barra móvil genera una fuerza electromotriz por corte de flujo. Usamos la ecuación (6-22) para hallar el voltaje en circuito abierto V_0 :

$$\begin{aligned} V_0 &= V_1 - V_2 = \oint_C (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\ell \\ &= \int_{2'}^{1'} (\mathbf{a}_x u \times \mathbf{a}_z B_0) \cdot (\mathbf{a}_y d\ell) \\ &= -u B_0 h \quad (\text{V}). \end{aligned} \quad (6-23)$$

- b) Cuando se conecta una resistencia R entre los terminales 1 y 2 fluye una corriente $I = u B_0 h / R$ desde el terminal 2 hasta el terminal 1, de manera que la potencia eléctrica, P_e , disipada en R es

$$P_e = I^2 R = \frac{(u B_0 h)^2}{R} \quad (\text{W}). \quad (6-24)$$

- c) La potencia mecánica, P_m , necesaria para mover la barra deslizante es

$$P_m = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} \quad (\text{W}), \quad (6-25)$$

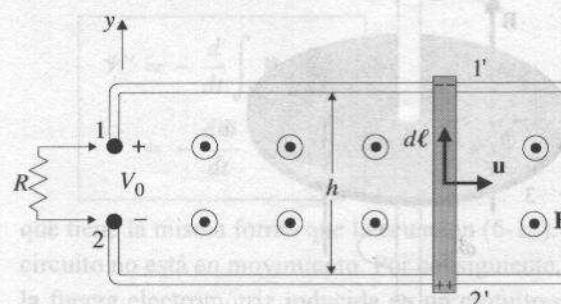
donde \mathbf{F} es la fuerza mecánica requerida para contrarrestar la fuerza magnética, F_m , que ejerce el campo magnético sobre la barra metálica por la que circula corriente. A partir de la ecuación (5-116) tenemos

$$\mathbf{F}_m = I \int_{2'}^{1'} d\ell \times \mathbf{B} = -\mathbf{a}_x I B_0 h \quad (\text{N}). \quad (6-26)$$

El signo negativo en la ecuación (6-26) se debe a que la corriente I fluye en dirección opuesta a la de $d\ell$. Por lo tanto,

$$\mathbf{F} = -\mathbf{F}_m = \mathbf{a}_x I B_0 h = \mathbf{a}_x u B_0^2 h^2 / R \quad (\text{N}). \quad (6-27)$$

FIGURA 6-4 Barra metálica que se desliza sobre rieles conductores (ejemplo 6-2).



Al sustituir la ecuación (6-27) en la ecuación (6-25) se demuestra que $P_m = P_e$, que confirma el principio de conservación de la energía.

EJEMPLO 6-3

Generador de disco de Faraday

El **generador de disco de Faraday** consiste en un disco circular de metal que gira con velocidad angular constante ω en un campo magnético constante y uniforme con densidad de flujo $\mathbf{B} = a_z B_0$ paralelo al eje de rotación. Sobre el eje y en el borde del disco se encuentran unas escobillas de contacto, como se muestra en la figura 6-5. Determine el voltaje en circuito abierto del generador si el radio del disco es b .

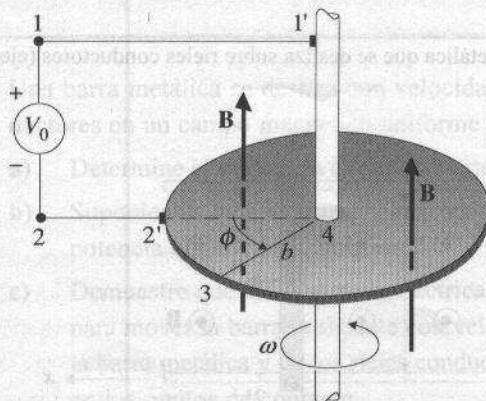
SOLUCIÓN

Consideremos únicamente el circuito 122'34'1. De la parte 2'34 que se mueve con el disco, únicamente la porción 34 "corta" el flujo magnético. A partir de la ecuación (6-22) tenemos

$$\begin{aligned} V_0 &= \oint (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\ell \\ &= \int_3^4 [(\mathbf{a}_\phi r\omega) \times \mathbf{a}_z B_0] \cdot (\mathbf{a}_z dr) \\ &= \omega B_0 \int_b^0 r dr = -\frac{\omega B_0 b^2}{2} \quad (\text{V}), \end{aligned} \quad (6-28)$$

que es la fuerza electromotriz del generador de disco de Faraday. Para medir V_0 debemos usar un voltímetro con resistencia muy alta, para que no fluya una corriente apreciable por el circuito y modifique el campo magnético aplicado.

FIGURA 6-5 Generador de disco de Faraday (ejemplo 6-3).



6-2.4 CIRCUITO MÓVIL EN UN CAMPO MAGNÉTICO VARIABLE CON EL TIEMPO

Cuando una carga q se mueve con velocidad \mathbf{u} en una región donde existe tanto un campo eléctrico \mathbf{E} como un campo magnético \mathbf{B} , la fuerza electromagnética \mathbf{F} sobre q , según lo medido por un observador de laboratorio, está dada por la ecuación de la fuerza de Lorentz:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad (5-5)(6-29)$$

Ecuación de la fuerza de Lorentz

Para un observador que se mueve con q no hay movimiento aparente y la fuerza sobre q puede interpretarse como debida a un campo eléctrico \mathbf{E}' , donde

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}, \quad (6-30)$$

O

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' - \mathbf{u} \times \mathbf{B}. \quad (6-31)$$

Por consiguiente, cuando un circuito conductor con contorno C y superficie S se mueve con velocidad \mathbf{u} en un campo (\mathbf{E}, \mathbf{B}) , usamos la ecuación (6-31) en la ecuación (6-8) para obtener

$$\oint_C \mathbf{E}' \cdot d\ell = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot ds + \oint_C (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\ell \quad (V). \quad (6-32)$$

Forma general de la ley de Faraday

La ecuación (6-32) es la forma general de la *ley de Faraday* para un circuito móvil en un campo magnético variable con el tiempo. La integral de línea en el lado izquierdo de la ecuación es la fuerza electromotriz inducida en el marco de referencia móvil. El primer término del lado derecho representa la fuerza electromotriz estática debida a la variación temporal de \mathbf{B} , y el segundo término representa la fuerza electromotriz cinética debida al movimiento del circuito en \mathbf{B} .

Si designamos el lado izquierdo de la ecuación (6-32) con

$$\mathcal{V}' = \oint_C \mathbf{E}' \cdot d\ell \quad (6-33)$$

= fuerza electromotriz inducida en el circuito C medida en el marco móvil, puede demostrarse que, en términos generales, la ecuación (6-32) es equivalente a

$$\begin{aligned} \mathcal{V}' &= - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot ds \\ &= - \frac{d\Phi}{dt} \quad (V), \end{aligned} \quad (6-34)$$

Otra forma de la ley de Faraday

que tiene la misma forma que la ecuación (6-12). Por supuesto, \mathcal{V}' se reduce a \mathcal{V} si el circuito no está en movimiento. Por consiguiente, la ley de Faraday, que establece que la fuerza electromotriz inducida en un circuito cerrado es igual a la razón temporal

negativa de incremento de flujo magnético ligado al circuito, es aplicable tanto a circuitos estacionarios como móviles. Podemos usar la ecuación (6-32) o la (6-34) para calcular la fuerza electromotriz inducida en el caso general.

EJEMPLO 6-4

Use la ecuación (6-34) para determinar el voltaje en circuito abierto del generador de disco de Faraday del ejemplo 6-3.

SOLUCIÓN

Resolvemos el problema del ejemplo 6-3 usando la ecuación (6-22), que es la ecuación (6-32) con $\partial\mathbf{B}/\partial t = 0$. Para poder usar la ecuación (6-34) primero hay que encontrar el flujo magnético ligado al circuito $122^{\circ}34'1$ en la figura 6-5, que es el flujo que atraviesa el área en forma de cuña $2'342'$.

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B_0 \int_0^b \int_0^{\omega t} r d\phi dr \\ &= B_0(\omega t) \frac{b^2}{2}\end{aligned}\quad (6-35)$$

y

$$V_0 = \mathcal{E}' = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\omega B_0 b^2}{2}, \quad (6-36)$$

que es el mismo resultado que el de la ecuación (6-28).

- **EJERCICIO 6.3** Use la ecuación (6-34) para determinar el voltaje en circuito abierto que aparece entre los terminales 1 y 2 del ejemplo 6-2.

RESPUESTA: $-uB_0h$.

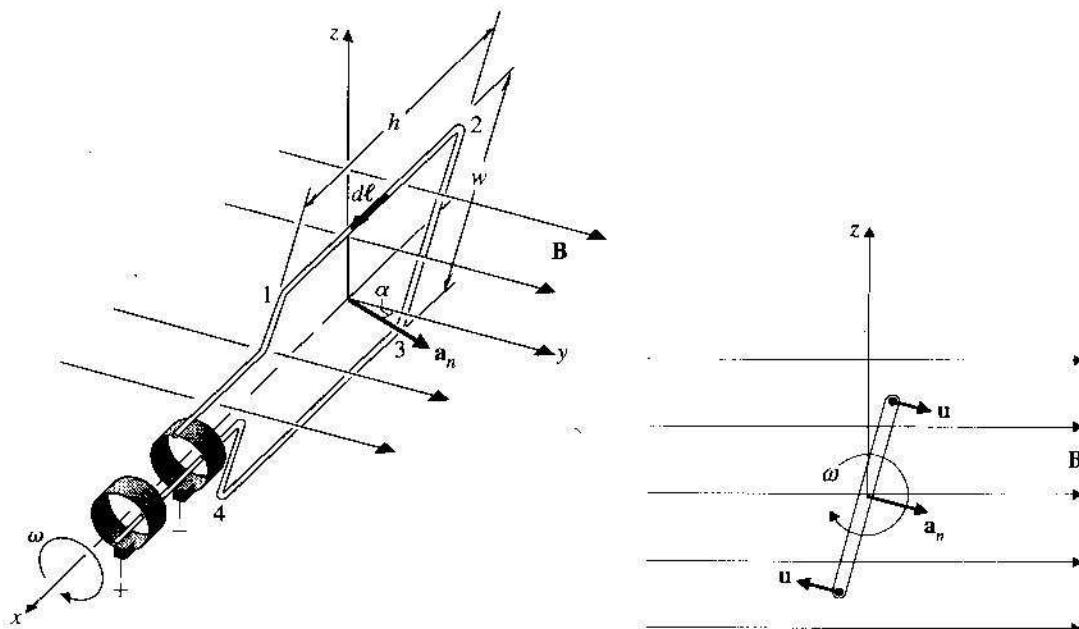
EJEMPLO 6-5

Una espira conductora rectangular de h por w está situada en un campo magnético variable $\mathbf{B} = \mathbf{a}_y B_0 \operatorname{sen} \omega t$. La normal a la espira forma inicialmente un ángulo α con \mathbf{a}_y , como se muestra en la figura 6-6. Calcule la fuerza electromotriz inducida en la espira: (a) cuando la espira está en reposo y (b) cuando la espira gira con una velocidad angular ω sobre el eje x .

SOLUCIÓN

- a) Cuando la espira está en reposo se emplea la ecuación (6-12):

$$\begin{aligned}\Phi &= \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \\ &= (\mathbf{a}_y B_0 \operatorname{sen} \omega t) \cdot (\mathbf{a}_n hw) \\ &= B_0 hw \operatorname{sen} \omega t \cos \alpha.\end{aligned}$$



(a) Vista en perspectiva.

(b) Vista desde la dirección $+x$.

FIGURA 6-6 Espira rectangular conductora que gira en un campo magnético variable (ejemplo 6-5).

Por lo tanto,

$$\mathcal{V}_a = - \frac{d\Phi}{dt} = - B_0 S \omega \cos \omega t \cos \alpha, \quad (6-37)$$

donde $S = hw$ es el área de la espira. Las polaridades relativas de los terminales son las que se indican. Si se cierra el circuito con una carga externa, \mathcal{V}_a producirá una corriente que se opondrá al cambio en Φ .

- b) Cuando la espira gira sobre el eje z la contribución de los dos términos de la ecuación (6-32) es: el primero da la fuerza electromotriz estática \mathcal{V}_a en la ecuación (6-37) y el segundo contribuye con una fuerza electromotriz cinética \mathcal{V}'_a , donde

$$\begin{aligned} \mathcal{V}'_a &= \oint_C (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\ell \\ &= \int_2^1 \left[\left(\mathbf{a}_n \frac{w}{2} \omega \right) \times (\mathbf{a}_y B_0 \sin \omega t) \right] \cdot (\mathbf{a}_x dx) \\ &\quad + \int_4^3 \left[\left(-\mathbf{a}_n \frac{w}{2} \omega \right) \times (\mathbf{a}_y B_0 \sin \omega t) \right] \cdot (\mathbf{a}_x dx) \\ &= 2 \left(\frac{w}{2} \omega B_0 \sin \omega t \sin \alpha \right) h. \end{aligned}$$

Observe que los lados 23 y 41 no contribuyen a \mathcal{V}_a' y que las contribuciones de los lados 12 y 34 son de igual magnitud y tienen la misma dirección. Si $\alpha = 0$ en $t = 0$, entonces $\alpha = \omega t$ y podemos escribir

$$\mathcal{V}_a' = B_0 S \omega \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} \omega t. \quad (6-38)$$

La fuerza electromotriz total inducida o generada en la espira que gira es la suma de \mathcal{V}_a en la ecuación (6-37) y \mathcal{V}_a' en la ecuación (6-38):

$$\mathcal{V}_t' = -B_0 S \omega (\cos^2 \omega t - \operatorname{sen}^2 \omega t) = -B_0 S \omega \cos 2\omega t, \quad (6-39)$$

que tiene una frecuencia angular de 2ω . Por consiguiente, la disposición ilustrada en la figura 6-6 es un generador de segundo armónico.

Podemos determinar la fuerza electromotriz total inducida \mathcal{V}_t' aplicando directamente la ecuación (6-34). El flujo magnético ligado a la espira en un instante t es

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= \mathbf{B}(t) \cdot [\mathbf{a}_n(t)S] = B_0 S \operatorname{sen} \omega t \cos \alpha \\ &= B_0 S \operatorname{sen} \omega t \cos \omega t = \frac{1}{2} B_0 S \operatorname{sen} 2\omega t.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_t' &= -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} B_0 S \operatorname{sen} 2\omega t \right), \\ &= -B_0 S \omega \cos 2\omega t\end{aligned}$$

como se obtuvo antes.

PREGUNTAS DE REPASO

P.6-1 ¿Qué constituye un *campo electromagnetostático*? ¿De qué manera se relacionan \mathbf{E} y \mathbf{B} en un medio conductor en condiciones estáticas?

P.6-2 Escriba el postulado fundamental de la inducción electromagnética.

P.6-3 Enuncie la ley de Lenz.

P.6-4 Escriba la expresión de la fuerza electromotriz estática.

P.6-5 En un transformador ideal, ¿cómo dependen las razones de corriente y de voltaje en el primario y secundario de la razón de transformación?

P.6-6 ¿Qué son las *corrientes parásitas*?

P.6-7 ¿Cuál es el principio del calentamiento por inducción?

P.6-8 ¿Qué materiales tienen alta permeabilidad y baja conductividad y por eso son los preferidos para los núcleos de los transformadores?

P.6-9 ¿Por qué están laminados los núcleos de los transformadores de potencia?

P.6-10 Escriba la forma general de la ley de Faraday.

P.6-11 ¿Qué es un generador de disco de Faraday?

COMENTARIOS

1. \mathbf{E} no es conservativo en una región de campo magnético variable con el tiempo y no puede expresarse como el gradiente de un potencial escalar.
2. Un campo magnético variable con el tiempo ligado a un circuito induce una fuerza electromotriz en el circuito.
3. Los transformadores son inherentemente dispositivos de corriente alterna.
4. En un transformador ideal se supone una permeabilidad infinita en su núcleo e inductancias infinitas en sus devanados.
5. Las láminas aisladas del núcleo de un transformador, usadas para reducir la pérdida de potencia por corrientes parásitas, deben ser paralelas a la dirección del flujo magnético.

6-3 ECUACIONES DE MAXWELL

El postulado fundamental de la inducción electromagnética nos asegura que un campo magnético variable con el tiempo origina un campo eléctrico. Esta aseveración ha sido verificada con numerosos experimentos. Por lo tanto, debemos reemplazar la ecuación $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ (Ec. 6-1) por la ecuación (6-7) para el caso variable con el tiempo. Tenemos ahora la siguiente colección de ecuaciones, dos de rotacional, (6-7) y (6-5), y dos de divergencia, (6-2) y (6-4):

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (6-7)(6-40a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad (6-5)(6-40b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v, \quad (6-2)(6-40c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (6-4)(6-40d)$$

Así mismo, sabemos que siempre debe satisfacerse el principio de conservación de la carga. La expresión matemática de este principio es la ecuación de continuidad:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = - \frac{\partial \rho_v}{\partial t}. \quad (6-41)$$

La pregunta crucial en este momento es si el conjunto de cuatro ecuaciones (6-40a, b, c y d) es consistente con el requisito establecido por la ecuación (6-41) en una situación variable con el tiempo. El que la respuesta es negativa es evidente si se toma la divergencia de la ecuación (6-40b),

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = 0 = \nabla \cdot \mathbf{J}. \quad (6-42)$$

La ecuación (6-42) se desprende de la identidad nula (Ec. (2-109)), la cual establece que la divergencia del rotacional de un campo vectorial que se comporta bien es cero.

Puesto que la ecuación (6-41) indica que $\nabla \cdot \mathbf{J}$ no se anula en una situación variable con el tiempo, la ecuación (6-40b) por lo general no es verdadera.

¿Cómo hay que modificar las ecuaciones (6-40a, b, c y d) para que sean consistentes con la ecuación (6-41)? En primer lugar hay que añadir un término $\partial \rho_v / \partial t$ en el lado derecho de la ecuación (6-42):

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = 0 = \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho_v}{\partial t}. \quad (6-43)$$

Al usar la ecuación (6-40c) en la ecuación (6-43) tenemos

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right),$$

lo cual implica que

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}} \quad (6-44)$$

La ecuación (6-44) indica que un campo eléctrico variable con el tiempo producirá un campo magnético, aunque no exista un flujo de corriente libre (es decir, incluso si $\mathbf{J} = 0$). El término adicional $\partial \mathbf{D} / \partial t$ es necesario para que la ecuación (6-44) sea consistente con el principio de conservación de la carga.

Es fácil comprobar que $\partial \mathbf{D} / \partial t$ tiene las dimensiones de una densidad de corriente (unidad en el SI: A/m²). El término $\partial \mathbf{D} / \partial t$ se denomina **densidad de corriente de desplazamiento** y su introducción en la ecuación $\nabla \times \mathbf{H}$ fue una de las contribuciones principales de James Clerk Maxwell (1831-1879). Para ser consistentes con la ecuación de continuidad en una situación variable con el tiempo hay que generalizar las ecuaciones de rotacional (6-1) y (6-5). El conjunto de cuatro ecuaciones consistentes que sustituye a las ecuaciones inconsistentes (6-40a, b, c y d) es

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},} \quad (6-45a)$$

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},} \quad (6-45b)$$

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v,} \quad (6-45c)$$

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{B} = 0.} \quad (6-45d)$$

La razón temporal de cambio de \mathbf{D} produce una densidad de corriente de desplazamiento.

Forma diferencial (operador) de las ecuaciones de Maxwell

Se conocen como **ecuaciones de Maxwell**. Observe que ρ_v en la ecuación (6-45c) es la densidad volumétrica de *cargas libres* y \mathbf{J} en la ecuación (6-45b) es la densidad de *corrientes libres*, que pueden comprender tanto corriente de convección ($\rho_v \mathbf{u}$) como corriente de conducción ($\sigma \mathbf{E}$). Estas cuatro ecuaciones, junto con la ecuación de continuidad de la ecuación (6-41) y la ecuación de la fuerza de Lorentz (Ec. 5-5), forman

Las cuatro ecuaciones de Maxwell no son todas independientes.

la base de la teoría electromagnética. Podemos usar estas ecuaciones para explicar y predecir *todos* los fenómenos electromagnéticos macroscópicos.

Aunque las cuatro ecuaciones de Maxwell (6-45a, b, c y d) son consistentes, no son del todo independientes. De hecho, las dos ecuaciones de divergencia, (6-45c y d), pueden derivarse de las dos ecuaciones de rotacional, (6-45a y b), usando la ecuación de continuidad, (6-41). Vea el ejercicio 6.4 a continuación.

- **EJERCICIO 6.4** Obtenga la divergencia de las dos ecuaciones de rotacional (6-45a) y (6-45b) y derive las dos ecuaciones de divergencia (6-45c) y (6-45d) con la ayuda de la ecuación de continuidad (6-41).

6-3.1 FORMA INTEGRAL DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL

Las cuatro ecuaciones de Maxwell (6-45a, b, c y d) son ecuaciones diferenciales válidas en todos los puntos del espacio. Al explicar los fenómenos electromagnéticos en un entorno físico debemos tratar con objetos finitos de formas y contornos determinados, por lo cual es conveniente convertir las formas diferenciales a sus equivalentes formas integrales. Tomamos la integral de superficie de ambos lados de las ecuaciones de rotacional (6-45a) y (6-45b) sobre una superficie abierta S con contorno C y aplicamos el teorema de Stokes para obtener

Forma integral de las ecuaciones de Maxwell

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\ell = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \quad (6-46a)$$

y

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\ell = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{s}. \quad (6-46b)$$

Al tomar la integral de volumen de ambos lados de las ecuaciones de divergencia (6-45c) y (6-45d) sobre un volumen V con superficie *cerrada* S y usar el teorema de divergencia tenemos

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \int_V \rho_v dv \quad (6-46c)$$

y

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0. \quad (6-46d)$$

TABLA 6-1 ECUACIONES DE MAXWELL Y SU IMPORTANCIA

Forma diferencial	Forma integral	Importancia
$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\ell = -\frac{d\Phi}{dt}$	Ley de Faraday
$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\ell = I + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$	Ley circuital de Ampère
$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$	$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = Q$	Ley de Gauss
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$	No hay carga magnética aislada

El conjunto de cuatro ecuaciones (6-46a, b, c y d) es la forma integral de las ecuaciones de Maxwell. En la tabla 6-1 se listan las formas diferenciales e integrales de las ecuaciones de Maxwell, así como su importancia.

EJEMPLO 6-6

Una fuente de corriente alterna de amplitud V_0 y frecuencia angular ω , $v_c = V_0 \operatorname{sen} \omega t$, está conectada a un condensador de placas paralelas C_1 , como se muestra en la figura 6-7. (a) Compruebe que la corriente de desplazamiento en el condensador es la misma que la corriente de conducción en los alambres. (b) Determine la intensidad de campo magnético a una distancia r del alambre.

SOLUCIÓN

- a) La corriente de conducción en el alambre de conexión es

$$i_c = C_1 \frac{dv_c}{dt} = C_1 V_0 \omega \cos \omega t.$$

Para un condensador de placas paralelas con área A , separación d entre placas y medio dieléctrico con permitividad ϵ , la capacitancia es

$$C_1 = \epsilon \frac{A}{d}.$$

Si aparece un voltaje v_C entre las placas, la intensidad de campo eléctrico uniforme E en el dieléctrico es igual a $E = v_C/d$ (ignorando los efectos marginales), de manera que

$$D = \epsilon E = \epsilon \frac{V_0}{d} \operatorname{sen} \omega t.$$

La corriente de desplazamiento es entonces

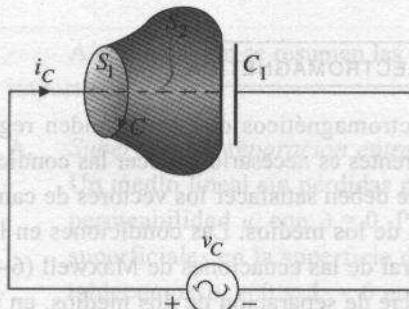


FIGURA 6-7 Condensador de placas paralelas conectado a una fuente de voltaje de corriente alterna (ejemplo 6-6).

$$\begin{aligned} i_D &= \int_A \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} = \left(\epsilon \frac{A}{d} \right) V_0 \omega \cos \omega t \\ &= C_1 V_0 \omega \cos \omega t = i_C, \end{aligned}$$

como queríamos comprobar.

- b) Podemos hallar la intensidad de campo magnético a una distancia r del alambre de conexión aplicando la ley circuital generalizada de Ampère, ecuación (6-46b), al contorno C de la figura 6-7. Podemos elegir dos superficies abiertas genericas con borde C : (1) una superficie circular plana S_1 , o (2) una superficie curva S_2 que pasa por el medio dieléctrico. La simetría alrededor del alambre asegura una H_ϕ constante a lo largo del contorno C . La integral de línea del lado izquierdo de la ecuación (6-46b) es

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\ell = 2\pi r H_\phi.$$

En el caso de la superficie S_1 , sólo el primer término del lado derecho de la ecuación (6-46b) es distinto de cero, ya que no se depositan cargas sobre el alambre y por consiguiente $\mathbf{D} = 0$.

$$\int_{S_1} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = i_C = C_1 V_0 \omega \cos \omega t.$$

No fluye corriente de conducción por la superficie S_2 , ya que ésta pasa por el medio dieléctrico. El lado derecho de la ecuación (6-46b) sería cero si no estuviera allí la segunda integral de superficie. Esto daría lugar a una contradicción, pero se elimina con la inclusión del término de corriente de desplazamiento de Maxwell. Como vimos en la parte (a), $i_D = i_C$. Por consiguiente, obtenemos el mismo resultado con la elección de la superficie S_1 o S_2 . Al igualar las dos integrales anteriores encontramos que

$$H_\phi = \frac{C_1 V_0}{2\pi r} \omega \cos \omega t.$$

6-3.2 CONDICIONES EN LA FRONTERA ELECTROMAGNÉTICA

Para resolver problemas electromagnéticos que comprenden regiones contiguas de parámetros constitutivos diferentes es necesario conocer las condiciones en la frontera (condiciones de contorno) que deben satisfacer los vectores de campo **E**, **D**, **B** y **H** en las superficies de separación de los medios. Las condiciones en la frontera se obtienen aplicando la forma integral de las ecuaciones de Maxwell (6-46a, b, c y d) a una región pequeña de la superficie de separación de dos medios, en una forma parecida a la que se usó para obtener las condiciones en la frontera de los campos eléctricos y magnéticos estáticos. Se supone que las ecuaciones integrales son válidas para regiones con medios discontinuos (deberá revisar los procedimientos de las secciones 3-8 y 5-9). En términos generales, la aplicación de la forma integral de la ecuación del rotacional a una trayectoria cerrada plana en la frontera, con los lados superior e inferior tocando los medios, da lugar a la condición en la frontera de las componentes tangenciales. Por otra parte, la condición en la frontera de las componentes normales se obtiene con la aplicación de la forma integral de la ecuación de la divergencia a una caja cilíndrica de muy poca altura en la superficie de separación, con las caras superior e inferior en los dos medios contiguos.

Las condiciones en la frontera de las componentes tangenciales de **E** y **H** se obtienen de las ecuaciones (6-46a) y (6-46b), respectivamente:

Condición en la frontera de la componente tangencial de E

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (\text{V/m}); \quad (6-47a)$$

Condición en la frontera de la componente tangencial de H

$$\mathbf{a}_{n2} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_s \quad (\text{A/m}). \quad (6-47b)$$

Observamos que las ecuaciones (6-47a) y (6-47b) para el caso variable con el tiempo son las mismas que la ecuación (3-72) para campos eléctricos estáticos y la ecuación (5-71) para campos magnéticos estáticos, respectivamente, a pesar de la existencia de términos variables con el tiempo en las ecuaciones (6-46a) y (6-46b).

De forma similar, las condiciones en la frontera de las componentes normales de **D** y **B** se obtienen de las ecuaciones (6-46c) y (6-46d):

Condición en la frontera de la componente normal de D

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_s \quad (\text{C/m}^2), \quad (6-47c)$$

donde la dirección normal de referencia es hacia fuera del medio 2; y

Condición en la frontera de la componente normal de B

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (\text{T}). \quad (6-47d)$$

Estas ecuaciones son, respectivamente, las mismas que la ecuación (3-75b) para los campos eléctricos estáticos y la ecuación (5-68) para los campos magnéticos estáticos, ya que partimos de las mismas ecuaciones de divergencia.

A continuación se resumen las condiciones en la frontera de dos casos especiales importantes.

A. Superficie de separación entre dos medios sin pérdidas

Un medio lineal sin pérdidas puede especificarse por una permitividad ϵ y una permeabilidad μ , con $\sigma = 0$. Por lo general no hay cargas libres ni corrientes superficiales en la superficie de separación entre dos medios sin pérdidas. Establecemos $\rho_s = 0$ y $J_s = 0$ en las ecuaciones (6-47c) y (6-47b) y obtenemos las condiciones en la frontera listadas en la tabla 6-2. Puede verse que en este caso E_n , H_n , D_n y B_n son continuos en la superficie de separación.

B. Superficie de separación entre un dieléctrico y un conductor perfecto

Un conductor perfecto es aquel que tiene una conductividad infinita. En el mundo físico tenemos abundantes "buenos conductores", como la plata, el cobre, el oro y el aluminio, con conductividades del orden de 10^7 (S/m) (vea la tabla del apéndice B-4). Los buenos conductores muchas veces se consideran como perfectos en lo que respecta a las condiciones en la frontera, con el fin de simplificar la solución analítica de problemas de campos. El campo eléctrico es cero en el *interior* de un conductor perfecto (de lo contrario produciría una densidad de corriente infinita) y todas las cargas que tenga el conductor residirán exclusivamente en la superficie. La interrelación entre (**E**, **D**) y (**B**, **H**) a través de las ecuaciones de Maxwell asegura que **B** y **H** también son cero en el *interior* de un conductor en una *situación variable con el tiempo*. Considere la superficie de separación entre un dieléctrico sin pérdidas (medio 1) y un conductor perfecto (medio 2). En el medio 2, $E_2 = 0$, $H_2 = 0$, $D_2 = 0$ y $B_2 = 0$. Las condiciones en la frontera generales de las ecuaciones (6-47a, b, c y d) se reducen a las que se listan en la tabla 6-3. En este caso, E_n y B_n son continuos, pero H_n y D_n son discontinuos en una cantidad igual a la densidad superficial de corriente J_s y la densidad superficial de carga ρ_s , respectivamente. Es importante señalar que al aplicar las ecuaciones (6-49b) y (6-49c), la normal de referencia se dirige hacia fuera de la superficie del conductor (medio 2).

TABLA 6-2 CONDICIONES EN LA FRONTERA ENTRE DOS MEDIOS SIN PÉRDIDAS

$$E_{1t} = E_{2t} \longrightarrow \frac{D_{1t}}{D_{2t}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \quad (6-48a)$$

$$H_{1t} = H_{2t} \longrightarrow \frac{B_{1t}}{B_{2t}} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad (6-48b)$$

$$D_{1n} = D_{2n} \longrightarrow \epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n} \quad (6-48c)$$

$$B_{1n} = B_{2n} \longrightarrow \mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n} \quad (6-48d)$$

TABLA 6-3 CONDICIONES EN LA FRONTERA ENTRE UN DIELÉCTRICO (MEDIO 1) Y UN CONDUCTOR PERFECTO (MEDIO 2) (PARA VARIACIÓN CON EL TIEMPO)

En el lado del medio 1	En el lado del medio 2	
$E_{1t} = 0$	$E_{2t} = 0$	(6-49a)
$\mathbf{a}_{n2} \times \mathbf{H}_1 = \mathbf{J}_s$	$H_{2t} = 0$	(6-49b)
$D_{1n} = \rho_s$	$D_{2n} = 0$	(6-49c)
$B_{1n} = 0$	$B_{2n} = 0$	(6-49d)

■ **EJERCICIO 6.5** Suponga que el plano $y = 0$ separa el aire en el semiespacio superior ($y > 0$) de un buen conductor y que en la superficie de separación existen una densidad superficial de carga $\rho_s = C_1 \operatorname{sen} \beta x$ y una densidad superficial de corriente $\mathbf{J}_s = \mathbf{a}_y C_2 \cos \beta x$. (C_1 , C_2 y β son constantes.) Determine \mathbf{E} y \mathbf{H} en el aire en la superficie de separación.

RESPUESTA: $\mathbf{E} = \mathbf{a}_y (C_1 / \epsilon_0) \operatorname{sen} \beta x$, $\mathbf{H} = \mathbf{a}_z C_2 \cos \beta x$.

PREGUNTAS DE REPASO

- P.6-12 Escriba la forma diferencial de las ecuaciones de Maxwell.
- P.6-13 Explique la importancia de la *corriente de desplazamiento*.
- P.6-14 Escriba la forma integral de las ecuaciones de Maxwell y relacione cada ecuación con la ley experimental apropiada.
- P.6-15 Enuncie las condiciones en la frontera de E , y B_n .
- P.6-16 Enuncie las condiciones en la frontera de H , y D_n .
- P.6-17 ¿Por qué es perpendicular a la superficie del conductor el campo \mathbf{E} que está inmediatamente afuera de un conductor perfecto?
- P.6-18 ¿Por qué es tangencial a la superficie del conductor el campo \mathbf{H} que está inmediatamente afuera de un conductor perfecto?
- P.6-19 ¿Puede existir un campo magnético estático en el interior de un conductor perfecto? Explique. ¿Puede existir un campo magnético variable con el tiempo? Explique.

COMENTARIOS

1. Un campo magnético variable produce un campo eléctrico y un campo eléctrico variable produce una corriente de desplazamiento que contribuye al campo magnético. En situaciones variables con el tiempo, los campos eléctricos y magnéticos se acoplan a través de las ecuaciones del rotacional de Maxwell.
2. Las cuatro ecuaciones de Maxwell no son todas independientes.
3. La componente tangencial de \mathbf{E} y la componente normal de \mathbf{B} son continuas en la superficie de separación de dos medios cualesquiera.

6-4 FUNCIONES DE POTENCIAL

En la sección 5-3 presentamos el concepto del potencial magnético vector \mathbf{A} debido a la naturaleza solenoidal de \mathbf{B} ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$):

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (\text{T}). \quad (6-50)$$

Si sustituimos la ecuación (6-50) en la forma diferencial de la ley de Faraday (Ec. 6-7) obtenemos

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}), \quad (6-51)$$

o

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (6-52)$$

Puesto que la suma de las dos cantidades vectoriales entre paréntesis en la ecuación (6-52) es irrotacional, puede expresarse como el gradiente de un escalar. Para ser consistentes con la definición del potencial eléctrico escalar V de la ecuación (3-26) para la electrostática, escribimos

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla V,$$

de lo cual obtenemos

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (\text{V/m}). \quad (6-53)$$

En el caso variable con el tiempo, \mathbf{E} es una función tanto del potencial eléctrico escalar V como del potencial magnético vector \mathbf{A} .

En el caso estático, $\partial \mathbf{A} / \partial t = 0$ y la ecuación (6-53) se reduce a $\mathbf{E} = -\nabla V$. Por consiguiente, podemos determinar \mathbf{E} usando solamente V , y \mathbf{B} a partir de \mathbf{A} usando la ecuación (6-50). Para campos variables con el tiempo \mathbf{E} depende tanto de V como de \mathbf{A} ; es decir, la intensidad de campo eléctrico puede ser el resultado de las acumulaciones de carga a través del término $-\nabla V$ y de campos magnéticos variables con el tiempo por medio del término $-\partial \mathbf{A} / \partial t$. Puesto que \mathbf{B} también depende de \mathbf{A} , \mathbf{E} y \mathbf{B} están acoplados.

Sustituyamos las ecuaciones (6-50) y (6-53) en la ecuación (6-45b) y usemos las relaciones constitutivas $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$ y $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$. Tenemos

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu \mathbf{J} + \mu \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(\underbrace{-\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}}_{\tilde{\mathbf{E}}} \right), \quad \frac{\partial \tilde{\mathbf{D}}}{\partial \tau} = \epsilon \frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}}{\partial \tau} \quad (6-54)$$

donde se ha supuesto un medio homogéneo. Recordando la identidad vectorial para $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$ dada por la ecuación (5-16a), podemos escribir la ecuación (6-54) como

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu \mathbf{J} - \nabla\left(\mu \epsilon \frac{\partial V}{\partial t}\right) - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2},$$

o

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J} + \nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu \epsilon \frac{\partial V}{\partial t}\right). \quad (6-55)$$

marítimo el etdem de ▽ y 2/2t

La definición de un vector requiere la especificación de su rotacional y su divergencia. Aunque el rotacional de \mathbf{A} se designó como \mathbf{B} en la ecuación (6-50), tenemos la libertad de elegir la divergencia de \mathbf{A} . Sea

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu \epsilon \frac{\partial V}{\partial t} = 0,$$

¿Xq?

(6-56)

Condición de Lorentz de los potenciales

que hace nulo el segundo término del lado derecho de la ecuación (6-55) y ésta se reduce a la forma más simple posible. Tenemos entonces

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J}. \quad (6-57)$$

Ecuación de onda para el potencial vector \mathbf{A}

La ecuación (6-57) es la **ecuación de onda no homogénea para el potencial vector \mathbf{A}** . Se denomina ecuación de onda porque sus soluciones representan ondas que se propagan con velocidad igual a $1/\sqrt{\mu\epsilon}$. Esto se verá mejor en la sección 6-4.1, donde se analiza la solución de las ecuaciones de onda. La relación entre \mathbf{A} y V en la ecuación (6-56) se conoce como **condición de Lorentz** (*o gauge de Lorentz*) de los potenciales. En el caso de campos estáticos se reduce a la condición $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ de la ecuación (5-19).

La ecuación de onda correspondiente al potencial escalar V es

$$\nabla^2 V - \mu \epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho_o}{\epsilon}, \quad (6-58)$$

Ecuación de onda para el potencial escalar V

que es la **ecuación de onda no homogénea para el potencial escalar V** . De esta manera, la condición de Lorentz en la ecuación (6-56) separa las ecuaciones de onda de \mathbf{A} y V . Observe la similitud entre las ecuaciones (6-57) y (6-58) y la analogía entre las cantidades: $\mathbf{A} \sim V$, $\mathbf{J} \sim \rho_o$ y $\mu \sim 1/\epsilon$.

- **EJERCICIO 6.6** Obtenga la ecuación de onda (6-58) correspondiente a V usando la ecuación (6-40c) en la ecuación

PREGUNTAS DE REPASO

P.6-20 ¿Cómo se definen el potencial eléctrico escalar V y el potencial magnético vector \mathbf{A} ?

P.6-21 ¿Qué es una ecuación de onda?

COMENTARIOS

Las funciones de potencial variables con el tiempo V y \mathbf{A} satisfacen la ecuación de onda.

6-4.1 RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE ONDA

Consideremos ahora la solución de la ecuación de onda no homogénea (6-58) para un potencial escalar V debido a una distribución de carga ρ_v en una región finita. Situemos una carga puntual elemental $\rho_v d\mathbf{v}'$ en el origen en el instante t . A una distancia R lejos del origen podemos suponer una simetría esférica (es decir, V depende únicamente de R y t , no de θ ni de ϕ). Con base en la ecuación (3-129), podemos escribir la ecuación (6-58) como

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial V}{\partial R} \right) - \mu\epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0. \quad \text{Lo mismo que hicimos en clase} \quad (6-59)$$

Introducimos ahora una nueva variable

$$V(R, t) = \frac{1}{R} U(R, t), \quad \text{que malo q' es este libro} \quad (6-60)$$

que simplifica la ecuación (6-59) a

$$\frac{\partial^2 U}{\partial R^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0. \quad (6-61)$$

La ecuación (6-61) es una ecuación de onda unidimensional homogénea. Puede comprobarse por sustitución directa (véase el Prob. P.6-11) que *cualquier* función de $(t - R\sqrt{\mu\epsilon})$ que sea diferenciable dos veces será una solución de la ecuación (6-61). Escribimos

$$U(R, t) = f(t - R\sqrt{\mu\epsilon}). \quad (6-62)$$

La función a la nueva distancia $R + \Delta R$ en un instante posterior $t + \Delta t$ es

$$U(R + \Delta R, t + \Delta t) = f[t + \Delta t - (R + \Delta R)\sqrt{\mu\epsilon}]$$

que es igual a $f(t - R\sqrt{\mu\epsilon})$ y conserva su forma si $\Delta t = \Delta R \sqrt{\mu\epsilon} = \Delta R/u_p$. La cantidad

La velocidad de propagación de la onda en un medio con parámetros constitutivos ϵ y μ es $1/\sqrt{\mu\epsilon}$.

$$u_p = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (6-63)$$

es la **velocidad de propagación de la onda**, una característica del medio. En el aire es igual a $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$. A partir de las ecuaciones (6-60) y (6-62) tenemos

$$V(R, t) = \frac{1}{R} f(t - R/u_p). \quad (6-64)$$

Para determinar cuál debe ser la función $f(t - R/u_p)$ específica, hay que observar en la ecuación (3-29) que para una carga puntual estática $\rho_v(t)\Delta v'$ en el origen,

$$\Delta V(R) = \frac{\rho_v(t)\Delta v'}{4\pi\epsilon R}. \quad (6-65)$$

Al comparar las ecuaciones (6-64) y (6-65) podemos identificar

$$\Delta f(t - R/u_p) = \frac{\rho_v(t - R/u_p)\Delta v'}{4\pi\epsilon}. \quad (6-66)$$

El potencial debido a una distribución de carga en un volumen V' es entonces

Determinación del potencial escalar V retardado a partir de la distribución de carga

$$V(R, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\rho_v(t - R/u_p)}{R} dv' \quad (V). \quad (6-67)$$

La ecuación (6-67) indica que el potencial escalar a una distancia R de la fuente en un instante t depende del valor de la densidad de carga en un instante anterior $(t - R/u_p)$. Por esta razón, $V(R, t)$ en la ecuación (6-67) se denomina **potencial escalar retardado**.

La solución de la ecuación de onda no homogénea (Ec. 6-57) para el potencial magnético vector \mathbf{A} puede realizarse exactamente de la misma manera que hicimos con V . La ecuación vectorial (6-57) de \mathbf{A} puede descomponerse en tres ecuaciones escalares, cada una de éstas similar a la ecuación (6-58) de V . El **potencial vector retardado** está expresado entonces por

$$\mathbf{A}(R, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(t - R/u_p)}{R} dv' \quad (\text{Wb/m}). \quad (6-68)$$

Determinación del potencial vector \mathbf{A} retardado a partir de la distribución de corriente

En la teoría de circuitos se ignora el efecto del retardo temporal.

Los campos eléctrico y magnético derivados por diferenciación de \mathbf{A} y V serán evidentemente funciones de $(t - R/u_p)$ y, por consiguiente, retardados en el tiempo. Se requiere tiempo para que las ondas electromagnéticas se propaguen y se sientan los efectos de las cargas y las corrientes variables con el tiempo en puntos distantes. En la teoría de circuitos se ignora este efecto de retardo temporal y se supone una respuesta instantánea.

■ **EJERCICIO 6.7** Una señal de radar enviada desde la Tierra a la Luna se recibe de vuelta en la Tierra tras un retardo de 2.562 (s). Determine la distancia entre las superficies de la Tierra y la Luna en ese momento, en kilómetros y en millas.

RESPUESTA: 3.843×10^5 (km) o 238 844 millas.

■ **EJERCICIO 6.8** ¿Cuál es la distancia equivalente a un año luz?

RESPUESTA: 9.46×10^{12} (km) o 5.88 billones de millas.

PREGUNTAS DE REPASO

P.6-22 ¿Qué significa el *potencial retardado* en el electromagnetismo?

P.6-23 ¿De qué manera dependen el tiempo de retardo y la velocidad de propagación de la onda de los parámetros constitutivos del medio?

COMENTARIOS

1. La respuesta a distancia de los cambios en las distribuciones de corriente y carga *no es instantánea*, sino *retardada* con el tiempo. Esto es lo único q. situa de este libro
2. La velocidad de propagación de la onda es una característica del medio y es *independiente de la frecuencia*. de este libro

6-5 CAMPOS CON DEPENDENCIA ARMÓNICA CON EL TIEMPO

Las ecuaciones de Maxwell y todas las ecuaciones derivadas de ellas que hemos presentado en este capítulo son válidas para cantidades electromagnéticas con una dependencia con el tiempo arbitraria. La forma real de las funciones temporales que toman las cantidades de campo depende de las funciones fuente ρ_v y \mathbf{J} . Las funciones temporales senoidales ocupan una posición única en la ingeniería. Son fáciles de generar; las funciones temporales periódicas arbitrarias pueden desarrollarse fácilmente en series de Fourier de componentes senoidales armónicas; y las funciones transitorias no periódicas pueden expresarse como integrales de Fourier. Por lo tanto, en el caso de funciones fuente con una dependencia temporal arbitraria, los campos electrodinámicos pueden determinarse en términos de los originados por las diversas componentes en frecuencia de las funciones fuente. La aplicación del principio de superposición (suma de los resultados producidos por las diversas frecuencias) nos proporciona los campos totales. En esta sección examinaremos las relaciones de campo *con dependencia armónica con el tiempo* (estado estacionario senoidal).

Los campos con dependencia armónica con el tiempo son campos senoidales.

6-5.1 USO DE FASORES: REPASO

Es conveniente usar fasores para los campos con dependencia armónica con el tiempo. Al llegar a este punto haremos una breve digresión para repasar el uso de los fasores. Conceptualmente, es más sencillo analizar un fasor escalar. La expresión instantánea

(dependiente del tiempo) de una cantidad escalar senoidal, como una corriente i , puede escribirse como función coseno o seno. Si elegimos una función coseno como *referencia* (que normalmente está fijada por la forma funcional de la excitación), todos los resultados derivados harán referencia a la función coseno. La especificación de una cantidad senoidal requiere el conocimiento de tres parámetros: amplitud, frecuencia y fase. Por ejemplo,

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi), \quad (6-69)$$

donde I_0 es la amplitud, ω es la frecuencia angular (rad/s) (ω siempre es igual a $2\pi f$, donde f es la frecuencia en hertz); y ϕ es el ángulo de fase con respecto a la función coseno. Si lo descarmos, también podemos escribir $i(t)$ en la ecuación (6-69) como función seno: $i(t) = I_0 \sin(\omega t + \phi')$, con $\phi' = \phi + \pi/2$. Es importante decidir desde el principio si la referencia será una función coseno o seno, y después seguir ese criterio durante todo el problema.

Trabajar directamente con una expresión instantánea como la función coseno es poco conveniente cuando hay que hacer diferenciaciones o integraciones de $i(t)$, ya que dan lugar tanto a funciones seno (diferenciación o integración de primer grado) como a funciones coseno (diferenciación o integración de segundo grado), y porque es tedioso combinar funciones seno y coseno. Por ejemplo, la ecuación de malla de un circuito RLC serie con voltaje aplicado $v(t) = V_0 \cos \omega t$ es

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = v(t). \quad (6-70)$$

Si escribimos la corriente resultante $i(t)$ en la forma de la ecuación (6-69), la ecuación (6-70) da

$$\begin{aligned} I_0 & \left[-\omega L \sin(\omega t + \phi) + R \cos(\omega t + \phi) + \frac{1}{\omega C} \sin(\omega t + \phi) \right] \\ & = V_0 \cos \omega t. \end{aligned} \quad (6-71)$$

Es evidente que hay que realizar complicadas manipulaciones matemáticas para determinar las incógnitas I_0 y ϕ a partir de la ecuación (6-71).

Es mucho más sencillo emplear funciones exponenciales[†], escribiendo el voltaje aplicado como

$$\begin{aligned} v(t) & = V_0 \cos \omega t = \Re e[(V_0 e^{j0}) e^{j\omega t}] \\ & = \Re e(V_s e^{j\omega t}) \end{aligned} \quad (6-72)$$

y $i(t)$ en la ecuación (6-69) como

$$\begin{aligned} i(t) & = \Re e[(I_0 e^{j\phi}) e^{j\omega t}] \\ & = \Re e(I_s e^{j\omega t}), \end{aligned} \quad (6-73)$$

donde $\Re e$ significa "la parte real de". En las ecuaciones (6-72) y (6-73),

[†] $e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$, $\cos \omega t = \Re e(e^{j\omega t})$, $\sin \omega t = \Im e(e^{j\omega t})$

$$V_s = V_0 e^{j\theta} = V_0 \quad (6-74)$$

$$I_s = I_0 e^{j\phi} \quad (6-75)$$

Fasores: formas polares de cantidades complejas que contienen información de amplitud y fase

son **fasores** (escalares) que contienen información de la amplitud y fase pero son *independientes de t*. El fasor V_s de la ecuación (6-74), con ángulo de fase cero, es el fasor de referencia. A partir de la ecuación (6-73) tenemos

$$\frac{di}{dt} = \Re e(j\omega I_s e^{j\omega t}), \quad y \quad (6-76)$$

$$\int i dt = \Re e \left(\frac{I_s}{j\omega} e^{j\omega t} \right). \quad (6-77)$$

Sustituyendo las ecuaciones (6-72) a (6-77) en la ecuación (6-70) se obtiene

$$\left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] I_s = V_s, \quad (6-78)$$

de donde se puede obtener fácilmente el fasor de corriente I_s . Observe que el factor de dependencia temporal $e^{j\omega t}$ desaparece de la ecuación (6-78) porque está presente en cada uno de los términos después de la sustitución en la ecuación (6-70), de manera que se cancela. Una vez determinada I_s , podemos hallar la respuesta instantánea en corriente $i(t)$ a partir de la ecuación (6-73), multiplicando I_s por $e^{j\omega t}$ y tomando la parte real del producto.

Si el voltaje aplicado ha sido expresado como *función seno*, tal como $v(t) = V_0 \operatorname{sen} \omega t$, el problema del circuito RLC serie se resuelve en términos de fasores, exactamente de la misma manera; la única diferencia es que las expresiones instantáneas se obtienen tomando la *parte imaginaria* del producto de los fasores por $e^{j\omega t}$. Los fasores complejos representan las magnitudes y los cambios de fase de las cantidades en la solución de problemas con dependencia armónica con el tiempo.

Conversión de fasores en funciones temporales senoidales instantáneas

EJEMPLO 6-7

Escriba la expresión fasorial I_s de las siguientes funciones de corriente, usando la referencia coseno.

- a) $i(t) = -I_0 \cos(\omega t - 30^\circ)$, y
- b) $i(t) = I_0 \operatorname{sen}(\omega t + 0.2\pi)$.

SOLUCIÓN

Para una referencia coseno escribimos

$$i(t) = \Re e(I_s e^{j\omega t}).$$

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad i(t) &= -I_0 \cos(\omega t - 30^\circ) \\ &= \Re e [(-I_0 e^{-j30^\circ}) e^{j\omega t}]. \end{aligned}$$

Por consiguiente, $I_s = -I_0 e^{-j30^\circ} = -I_0 e^{-j\pi/6} = I_0 e^{j5\pi/6}$.

b) $i(t) = I_0 \sin(\omega t + 0.2\pi)$
 $= \Re e[(I_0 e^{j0.2\pi})e^{-j\pi/2} \cdot e^{j\omega t}],$

donde se requiere el factor $e^{-j\pi/2}$ porque la fase de $\sin \omega t$ está retrasada 90° o $\pi/2$ (rad) con respecto a $\cos \omega t$. Tenemos

$$I_s = (I_0 e^{j0.2\pi})e^{-j\pi/2} = I_0 e^{-j0.3\pi}.$$

- **EJERCICIO 6.9** Determine las expresiones fasoriales I'_s de las funciones de corriente del ejemplo 6-7, usando la referencia seno, $i(t) = \Im e(I'_s e^{j\omega t})$.

RESPUESTA: (a) $-I_0 e^{j\pi/3}$, o $I_0 e^{-j2\pi/3}$. (b) $I_0 e^{j0.2\pi}$.

EJEMPLO 6-8

Escriba las expresiones instantáneas $v(t)$ para los siguientes fasores, usando una referencia coseno:

- a) $V_s = V_0 e^{j\pi/4}$, y
 b) $V_s = 3 - j4$.

SOLUCIÓN

a) $v(t) = \Re e[V_s e^{j\omega t}]$
 $= \Re e[(V_0 e^{j\pi/4})e^{j\omega t}]$
 $= V_0 \cos(\omega t + \pi/4).$

b) $V_s = 3 - j4 = \sqrt{3^2 + 4^2} e^{j \tan^{-1}(-4/3)}$
 $= 5e^{-j53.1^\circ}.$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} v(t) &= \Re e[(5e^{-j53.1^\circ})e^{j\omega t}] \\ &= 5 \cos(\omega t - 53.1^\circ). \end{aligned}$$

- **EJERCICIO 6.10** Escriba la expresión fasorial V_s del voltaje $v(t) = 10 \cos(\omega t - 45^\circ)$.

RESPUESTA: $10e^{-j\pi/4}$.

- **EJERCICIO 6.11** Escriba la expresión instantánea $v(t)$ para el falso $V_s = 4 + j3$ usando una referencia coseno.

RESPUESTA: $5 \cos(\omega t + 36.9^\circ)$.

- **EJERCICIO 6.12** Escriba la expresión instantánea $v(t)$ para el falso $V_s = 4 + j3$ usando una referencia seno.

RESPUESTA: $5 \sin(\omega t + 126.9^\circ)$.

PREGUNTAS DE REPASO

P.6-24 ¿Qué es un *fasor*? ¿Los fasores son funciones de t ? ¿Son funciones de ω ?

P.6-25 ¿Cuál es la diferencia entre un fasor y un vector?

COMENTARIOS

1. Los fasores son cantidades complejas (expresadas en forma polar) que representan la magnitud y la fase de funciones senoidales.
2. Los ángulos de fase pueden expresarse en radianes o en grados. *No olvide el signo ° cuando los exprese en grados.*
3. Nunca combine factores que contengan j con funciones temporales instantáneas. Las expresiones como $j \cos \omega t$, $e^{j\phi} \sin \omega t$ y $(1-j)i(t)$ son incorrectas.

6-5.2 ELECTROMAGNETISMO CON DEPENDENCIA ARMÓNICA CON EL TIEMPO

Los vectores de campo que varían con las coordenadas espaciales y son funciones senoidales del tiempo pueden representarse de forma similar mediante fasores que dependen de las coordenadas espaciales pero no del tiempo. Como ejemplo, podemos escribir un campo **E** con dependencia armónica con el tiempo *con referencia a* $\cos \omega t$ como

$$\mathbf{E}(x, y, z; t) = \Re e[\mathbf{E}(x, y, z)e^{j\omega t}], \quad (6-79)$$

donde **E**(x, y, z) es un *fasor vectorial* que contiene información sobre la dirección, magnitud y fase. A partir de las ecuaciones (6-76) y (6-77) podemos ver que, si **E**($x, y, z; t$) está representado por el fasor vectorial **E**(x, y, z), entonces $\partial \mathbf{E}(x, y, z; t)/\partial t$ y $\int \mathbf{E}(x, y, z; t)dt$ estarían representados por los fasores vectoriales $j\omega \mathbf{E}(x, y, z)$ y $\mathbf{E}(x, y, z)/j\omega$, respectivamente. Las diferenciaciones y las integraciones de orden superior con respecto a t estarían representadas por multiplicaciones y divisiones, respectivamente, del fasor **E**(x, y, z) por potencias superiores de $j\omega$.

A continuación se presentan las ecuaciones de Maxwell con dependencia armónica con el tiempo (6-45a, b, c y d) en términos de los fasores vectoriales de campo (**E**, **H**) y los fasores fuente (ρ_v , **J**) en un medio simple (lineal, isotropo y homogéneo).

Ecuaciones de Maxwell con dependencia armónica con el tiempo en términos de fasores

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}, \quad (6-80a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega\epsilon\mathbf{E}, \quad (6-80b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_v/\epsilon, \quad (6-80c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0. \quad (6-80d)$$

Para simplificar las expresiones hemos omitido los argumentos de las coordenadas espaciales y el subíndice s que indican una cantidad fasorial. El hecho de que se usen

[†] Si la referencia temporal no se especifica de forma explícita, por costumbre se toma como $\cos \omega t$.

las mismas notaciones para fasores y para sus cantidades correspondientes dependientes del tiempo no debe crear mucha confusión, ya que en lo que queda del libro trataremos casi exclusivamente con campos con dependencia armónica con el tiempo (y por consiguiente con fasores). Cuando sea necesario distinguir una cantidad instantánea de un fasor, la dependencia temporal de la cantidad instantánea se indicará de forma explícita con la inclusión de t en el argumento.

PREGUNTA DE REPASO

P.6-26 Analice las ventajas y desventajas del uso de fasores en el electromagnetismo.

Soy um belotudo Chegaa

COMENTARIOS

1. Las cantidades fasoriales no son funciones de t .
2. Las funciones temporales instantáneas no pueden contener números complejos.
3. Toda expresión electromagnética que contenga j debe ser necesariamente una relación de fasores.

Podemos escribir la ecuación de onda con dependencia armónica con el tiempo (6-58) de un potencial escalar V en términos de fasores, de la siguiente manera

$$\nabla^2 V - \mu\epsilon(j\omega)^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon},$$

o

$$\nabla^2 V + k^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon}, \quad (6-81)$$

Ecuación de Helmholtz para un potencial escalar V

donde

$$k = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = \frac{\omega}{u_p}, \quad \text{¿ } 2\pi \text{ qué?} \quad (6-82a)$$

o

$$k = \frac{2\pi f}{u_p} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (6-82b)$$

Definición del número de onda

se denomina **número de onda**. Es una medida del número de longitudes de onda en un intervalo de 2π . De manera análoga, la forma fasorial de una ecuación de onda con dependencia armónica con el tiempo (6-57) para el potencial vector \mathbf{A} es

$$\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}. \quad (6-83)$$

Ecuación de Helmholtz para un potencial vector \mathbf{A}

Las ecuaciones (6-81) y (6-83) se conocen como *ecuaciones no homogéneas de Helmholtz*.

■ **EJERCICIO 6.13** Escriba la forma fasorial de la condición de Lorentz para los potenciales, ecuación (6-56).

PREGUNTA DE REPASO

P.6-27 Defina el *número de onda*. ¿Cuál es su unidad en el SI?

COMENTARIOS

1. Las ecuaciones de Helmholtz son ecuaciones de onda con dependencia armónica con el tiempo en términos de fasores.
2. El número de onda depende de las características del medio y de la frecuencia de la onda, pero siempre es igual a 2π dividido por la longitud de onda.

La solución de la ecuación no homogénea de Helmholtz (6-81) para V puede obtenerse a partir de la ecuación (6-67). El potencial $V(R, t)$ implica un adelanto temporal R/u_p para ρ_v , que es equivalente a un adelanto en fase de $\omega(R/u_p)$ o kR . Esto requiere un factor multiplicador e^{-jkR} en notación fasorial. Por consiguiente, la *forma fasorial* de la ecuación (6-67) es

$$V(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\rho_v e^{-jkR}}{R} dv' \quad (\text{V}). \quad (6-84)$$

De forma similar, la solución fasorial de la ecuación (6-83) para \mathbf{A} es

$$\mathbf{A}(R) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J} e^{-jkR}}{R} dv' \quad (\text{Wb/m}). \quad (6-85)$$

Éstas son las expresiones de los potenciales escalar y vector retardados debido a fuentes con dependencia armónica con el tiempo. El desarrollo en serie de Taylor del factor exponencial e^{-jkR} es

$$e^{-jkR} = 1 - jkR + \frac{k^2 R^2}{2} + \dots \quad \text{Caso estático} \quad (6-86)$$

Por lo tanto, si

Por lo menos es consistente...

$$kR = 2\pi \frac{R}{\lambda} \ll 1, \quad \uparrow \quad (6-87)$$

o si la distancia R es muy pequeña en comparación con la longitud de onda λ , e^{-jkR} puede aproximarse a 1. Las ecuaciones (6-84) y (6-85) se simplifican entonces a las expresiones estáticas de las ecuaciones (3-39) y (5-22), respectivamente.

Forma fasorial del potencial escalar retardado

Forma fasorial del potencial vector retardado

Procedimiento para determinar los campos eléctricos y magnéticos instantáneos

El procedimiento formal para determinar los campos eléctricos y magnéticos debidos a distribuciones de carga y corriente con dependencia armónica con el tiempo es el siguiente:

1. Halle los fasores $V(R)$ y $\mathbf{A}(R)$ a partir de las ecuaciones (6-84) y (6-85).
2. Calcule los fasores $\mathbf{E}(R) = -\nabla V - j\omega \mathbf{A}$ y $\mathbf{B}(R) = \nabla \times \mathbf{A}$.
3. Determine los valores instantáneos $\mathbf{E}(R, t) = \Re[\mathbf{E}(R)e^{j\omega t}]$ y $\mathbf{B}(R, t) = \Re[\mathbf{B}(R)e^{j\omega t}]$ para una referencia coseno.

El grado de dificultad de un problema depende de lo difícil que sea realizar las integraciones del paso 1. En el capítulo 10 usaremos este procedimiento para determinar las propiedades de radiación de las antenas.

EJEMPLO 6-9

Si la intensidad de campo eléctrico de una onda electromagnética en un medio dieléctrico no conductor con permitividad $\epsilon = 9\epsilon_0$ y permeabilidad μ_0 es

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{a}_y 5 \cos(10^9 t - \beta z) \quad (\text{V/m}), \quad (6-88)$$

calcule la intensidad de campo magnético \mathbf{H} y el valor de β .

SOLUCIÓN

La $\mathbf{E}(z, t)$ dada en la ecuación (6-88) es una función con dependencia armónica con el tiempo con frecuencia angular $\omega = 10^9$ (rad/s). Al usar fasores con referencia coseno tenemos

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{a}_y 5 e^{-j\beta z}. \quad (6-89)$$

Podemos calcular la intensidad de campo magnético a partir de la ecuación (6-80a).

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(z) &= -\frac{1}{j\omega\mu_0} \nabla \times \mathbf{E} \\ &= -\frac{1}{j\omega\mu_0} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 5e^{-j\beta z} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{j\omega\mu_0} \left(-\mathbf{a}_x \frac{\partial}{\partial z} E_y \right) \\ &= -\frac{1}{j\omega\mu_0} (\mathbf{a}_x j\beta 5e^{-j\beta z}) = -\mathbf{a}_x \frac{\beta}{\omega\mu_0} 5e^{-j\beta z}. \end{aligned} \quad (6-90)$$

Para determinar β se usa la ecuación (6-80b). En el caso de un medio no conductor tenemos $\sigma = 0$, $\mathbf{J} = 0$ y, por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(z) &= \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \left(\mathbf{a}_y \frac{\partial}{\partial z} H_x \right) \\ &= \mathbf{a}_y \frac{\beta^2}{\omega^2 \mu_0 \epsilon} 5e^{-j\beta z}. \end{aligned} \quad (6-91)$$

Al igualar las ecuaciones (6-89) y (6-91) hacemos

$$\begin{aligned}\beta &= \omega\sqrt{\mu_0\epsilon} = 3\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = \frac{3\omega}{c} \\ &= \frac{3 \times 10^9}{3 \times 10^8} = 10 \quad (\text{rad/m}).\end{aligned}$$

A partir de la ecuación (6-90) se obtiene

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(z) &= -\mathbf{a}_x \frac{5(10)}{(10^9)(4\pi 10^{-7})} e^{-j10z} \\ &= -\mathbf{a}_x 0.0398 e^{-j10z}.\end{aligned}\tag{6-92}$$

El fasor $\mathbf{H}(z)$ de la ecuación (6-92) corresponde a la siguiente función temporal instantánea:

$$\mathbf{H}(z, t) = -\mathbf{a}_x 0.0398 \cos(10^9 t - 10z) \quad (\text{A/m}).\tag{6-93}$$

PREGUNTAS DE REPASO

P-6-28 Escriba la expresión fasorial del potencial eléctrico escalar $V(R)$ en función de la distribución de carga ρ_s .

P-6-29 Escriba la expresión fasorial del potencial magnético vector $\mathbf{A}(R)$ en términos de la distribución de corriente J .

COMENTARIOS

Las intensidades de campo eléctrico y magnético de una onda electromagnética en un medio están claramente relacionadas. Deben satisfacer las ecuaciones de Maxwell y no es posible especificar de manera independiente sus amplitudes y fases.

6-5.3 EL ESPECTRO ELECTROMAGNÉTICO

En *medios no conductores libres de fuentes*, caracterizados por ϵ y $\mu(\sigma = 0)$, las ecuaciones de Maxwell (6-45a, b, c y d) se reducen a

Ecuaciones de Maxwell en medios no conductores libres de fuentes

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},\tag{6-94a}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},\tag{6-94b}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0,\tag{6-94c}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0.\tag{6-94d}$$

Las ecuaciones (6-94a, b, c y d) son ecuaciones diferenciales de primer grado en las dos variables \mathbf{E} y \mathbf{H} . Pueden combinarse para producir una ecuación de segundo grado que contenga únicamente \mathbf{E} o \mathbf{H} . Para esto, tomamos el rotacional de la ecuación (6-94a) y usamos la ecuación (6-94b):

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}) = -\mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Sin embargo, $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E}$, por la ecuación (6-94c). Por lo tanto, tenemos

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0; \quad (6-95)$$

o, dado que $u_p = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{u_p^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0.} \quad (6-96)$$

Ecuación de onda homogénea para \mathbf{E}

Ecuación de onda homogénea para \mathbf{H}

También podemos obtener una ecuación para \mathbf{H} de forma similar:

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{H} - \frac{1}{u_p^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0.} \quad (6-97)$$

Las ecuaciones (6-96) y (6-97) son las *ecuaciones de onda vectoriales homogéneas*.

En coordenadas cartesianas podemos descomponer las ecuaciones (6-96) y (6-97) en tres ecuaciones de ondas escalares, homogéneas y unidimensionales. Cada componente de \mathbf{E} y \mathbf{H} satisfará una ecuación exactamente igual a la (6-61), cuya solución representa ondas. En el capítulo siguiente analizaremos con detalle el comportamiento ondulatorio en distintos ambientes.

Para campos con dependencia armónica con el tiempo es conveniente usar fasores. De esta manera, la ecuación (6-96) se convierte en

$$\nabla^2 \mathbf{E}_s + \frac{\omega^2}{u_p^2} \mathbf{E}_s = 0,$$

o

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{E}_s + k^2 \mathbf{E}_s = 0,} \quad (6-98)^*$$

Ecuación homogénea de Helmholtz para el fasor \mathbf{E}_s

utilizando la ecuación (6-82a). De forma similar, la ecuación (6-97) conduce a

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{H}_s + k^2 \mathbf{H}_s = 0.} \quad (6-99)^*$$

Ecuación homogénea de Helmholtz para el fasor \mathbf{H}_s

* Se ha añadido el subíndice s para subrayar que \mathbf{E}_s y \mathbf{H}_s son fasores y que no son lo mismo que \mathbf{E} y \mathbf{H} dependientes del tiempo de las ecuaciones (6-96) y (6-97).

Las soluciones de las ecuaciones (6-98) y (6-99) representan ondas propagantes, las cuales serán el tema de estudio del capítulo siguiente.

PREGUNTA DE REPASO

P.6-30 Explique por qué puede haber soluciones no nulas de los campos eléctricos y magnéticos en regiones libres de fuentes.

COMENTARIOS

1. En medios no conductores libres de fuentes, \mathbf{E} y \mathbf{H} satisfacen la misma ecuación de onda homogénea, como lo muestran las ecuaciones (6-96) y (6-97).
2. Para ondas con dependencia armónica con el tiempo en una región libre de fuentes, los fasores \mathbf{E}_s y \mathbf{H}_s satisfacen la misma ecuación homogénea de Helmholtz, como lo muestran las ecuaciones (6-98) y (6-99).
3. Las ecuaciones de Maxwell, y por consiguiente las ecuaciones de onda y de Helmholtz, no imponen límite a la frecuencia de las ondas.

El espectro electromagnético que se ha investigado experimentalmente se extiende desde frecuencias muy bajas pasando por las de la radio, televisión, microondas, infrarrojo, luz visible, ultravioleta, rayos X y frecuencias de rayos gamma (γ) hasta frecuencias que exceden 10^{24} (Hz). En la figura 6-8 se muestra el espectro electromagnético dividido en intervalos de frecuencia y longitud de onda en escalas logarítmicas, de acuerdo con su aplicación y su existencia natural.

El término “microonda” es un poco nebuloso e impreciso; puede significar ondas electromagnéticas por encima de una frecuencia de 1 (GHz) hasta el límite inferior de la banda infrarroja, abarcando las regiones UHF, SHF, EHF y la región de ondas milimétricas. El intervalo de longitudes de onda de la luz visible va del rojo profundo en 720 (nm) al violeta en 380 (nm), o de 0.72 (μm) a 0.38 (μm), correspondiente a un intervalo de frecuencias de 4.2×10^{14} (Hz) a 7.9×10^{14} (Hz). También se presentan las bandas usadas para radar, comunicación vía satélite, ayudas para la navegación, televisión (TV), radio FM y AM, radio de banda ciudadana (CB), sonar y otras aplicaciones. Las frecuencias por debajo del intervalo VLF pocas veces se emplean para transmisión sin hilos, ya que se requerirían antenas enormes para la radiación eficiente de las ondas electromagnéticas y porque estas frecuencias bajas tienen una razón de datos muy reducida. Se ha propuesto el uso de estas frecuencias para la comunicación global estratégica con submarinos inmersos en agua de mar conductora. En el trabajo con radar se ha encontrado conveniente asignar letras del alfabeto a las diferentes bandas de frecuencia de microondas; éstas se listan en la tabla 6-4.

En el capítulo siguiente analizaremos las características de las ondas electromagnéticas planas y examinaremos su comportamiento al propagarse por fronteras discontinuas.

El espectro electromagnético y sus aplicaciones

El espectro de luz visible

Transmisión sin hilos

Bandas de radar de microondas

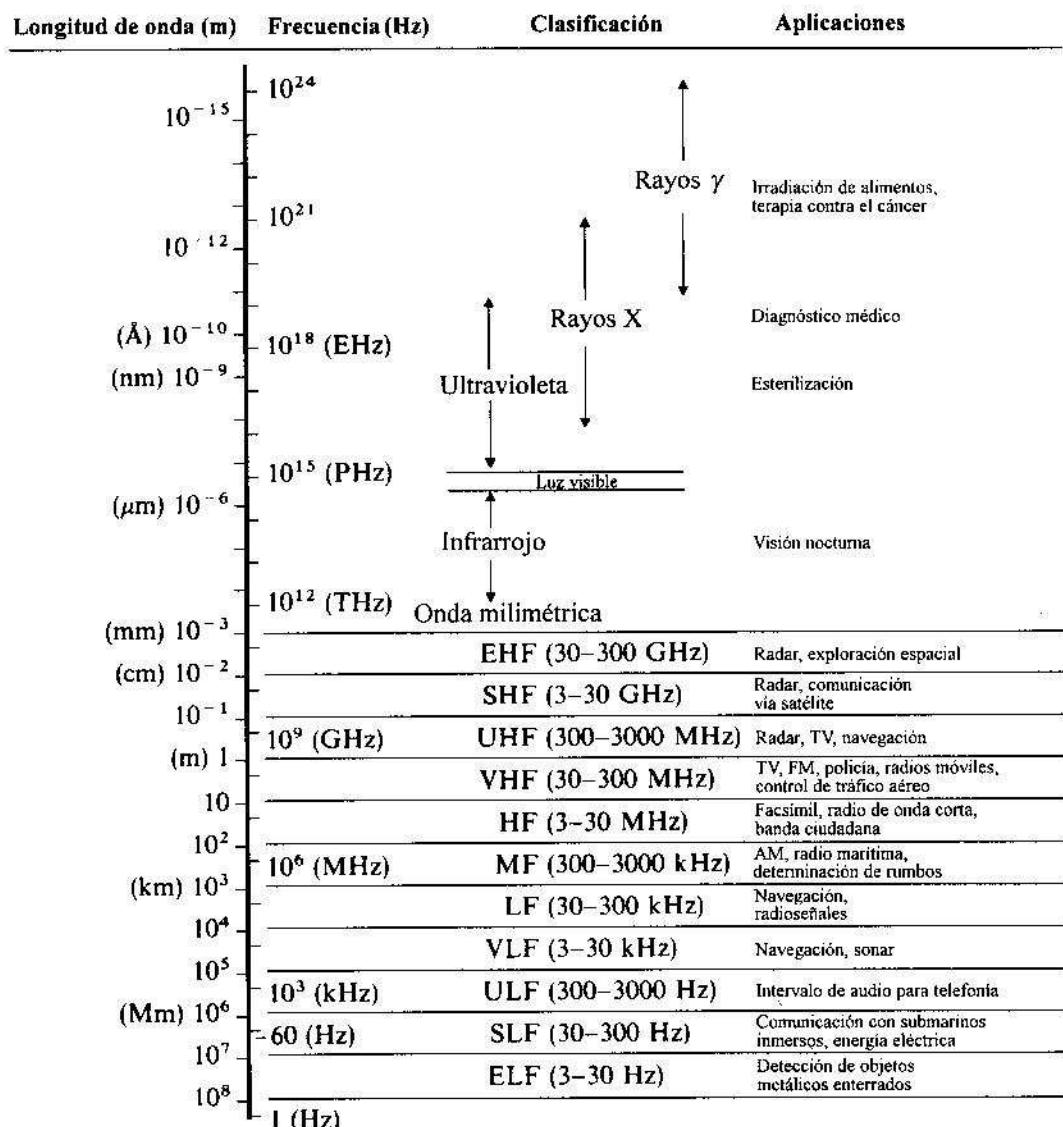


FIGURA 6-8 Espectro de las ondas electromagnéticas.

PREGUNTAS DE REPASO

P.6-31 ¿Cuál es el intervalo de longitudes de onda de la luz visible?

P.6-32 ¿Por qué rara vez se usan en la transmisión sin hilos las frecuencias por debajo del intervalo VLF?

TABLA 6-4 DESIGNACIONES DE LAS BANDAS DE RADAR A FRECUENCIAS DE MICROONDAS

Banda	Intervalo de frecuencias (GHz)	Intervalo de longitudes de onda (cm)
U	40–60	0.75–0.50
Ka	26.5–40	1.13–0.75
K	18–26.5	1.67–1.13
Ku	12.4–18	2.42–1.67
X	8–12.4	3.75–2.42
C	4–8	7.5–3.75
S	2–4	15–7.5
L	1–2	30–15

COMENTARIOS

- 1. Las ondas electromagnéticas de *cualquier frecuencia* se propagan en un medio con la misma velocidad, $v_p = 1 / \sqrt{\mu\epsilon}$
- 2. La frecuencia de funcionamiento de los hornos de microondas es de unos 2.45 (GHz).

RESUMEN

En situaciones variables con el tiempo, los campos eléctricos y magnéticos están acoplados y ya no son suficientes los postulados que presentamos en los capítulos anteriores para los campos estáticos. En este capítulo

- agregamos un postulado fundamental para la inducción electromagnética;
- presentamos la ley de Faraday que relaciona cuantitativamente la fuerza electromotriz inducida en un circuito y la razón temporal de cambio del flujo ligado;
- explicamos que la fuerza electromotriz inducida puede descomponerse en dos partes: una fuerza electromotriz estática y una fuerza electromotriz cinética (por corte de flujo);
- analizamos las características de los transformadores ideales;
- obtuvimos un conjunto de cuatro ecuaciones de Maxwell (dos de divergencia y dos de rotacional) consistentes con la ecuación de continuidad;
- consideramos las condiciones generales en la frontera de los vectores de campo en la superficie de separación de regiones contiguas con parámetros constitutivos diferentes;
- expresamos las intensidades de campo eléctrico y magnético en términos de una función de potencial eléctrico escalar V y una función de potencial magnético vector \mathbf{A} ;
- a) la ecuación no homogénea de Helmholtz para \mathbf{E} , y

- derivamos las ecuaciones de onda no homogéneas para V y \mathbf{A} ;
- presentamos el concepto de los potenciales retardados,
- convertimos las ecuaciones de onda en ecuaciones de Helmholtz para los campos con dependencia armónica con el tiempo, y
- analizamos el espectro electromagnético en el espacio libre de fuentes.

PROBLEMAS

P.6-1 Exprese la fuerza electromotriz estática inducida en una espira estacionaria en términos del potencial vector variable con el tiempo \mathbf{A} .

P.6-2 El circuito de la figura 6-9 está situado en un campo magnético

$$\mathbf{B} = \mathbf{a}_x 3 \cos(5\pi 10^7 t - \frac{1}{3}\pi y) \quad (\mu\text{T}).$$

Suponga que $R = 15 \Omega$ y calcule la corriente i .

P.6-3 Una espira conductora rectangular estacionaria de anchura w y altura h está situada cerca de un alambre muy largo por el que circula una corriente i_1 , como se ilustra en la figura 6-10. Suponga que $i_1 = I_0 \sin \omega t$ y que la autoinductancia de la espira rectangular es L . Calcule la corriente inducida i_2 en la espira.

SUGERENCIA: Use fasores

 **P.6-4** Suponga en la figura 6-10 que hay una corriente constante $i_1 = I_0$, pero que la espira rectangular se aleja a velocidad constante $\mathbf{u} = \mathbf{a}_y u_0$. Determine i_2 cuando la espira está en la posición indicada en la figura.

P.6-5 Una espira conductora cuadrada de 10 (cm) por 10 (cm) y resistencia $R = 0.5 \Omega$ gira sobre uno de sus lados en un campo magnético constante $\mathbf{B} = \mathbf{a}_y 0.04 \text{ T}$ con

FIGURA 6-9 Circuito en un campo magnético variable con el tiempo (Prob. P.6-2).

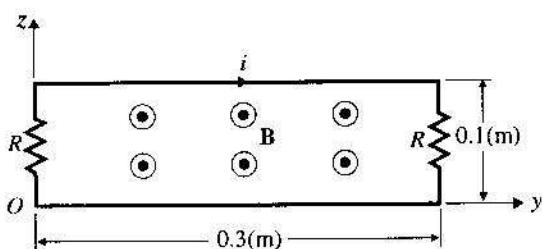
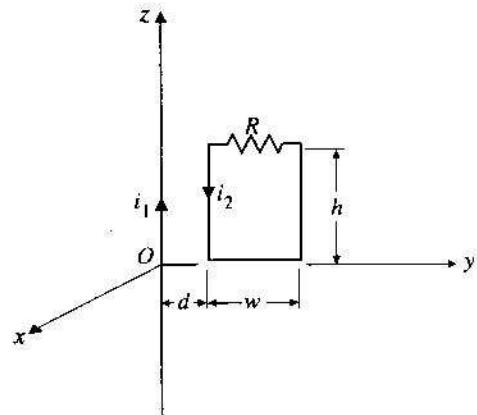


FIGURA 6-10 Espira rectangular cerca de un alambre muy largo por el que circula una corriente (para los problemas P.6-3 y P.6-4).



frecuencia angular $\omega = 100\pi$ (rad/s), como se ilustra en la figura 6-11. Suponga que la espira está inicialmente en el plano xz y calcule la corriente inducida i

- si se ignora la autoinductancia de la espira, y
- si la autoinductancia de la espira es 3.5 (mH).

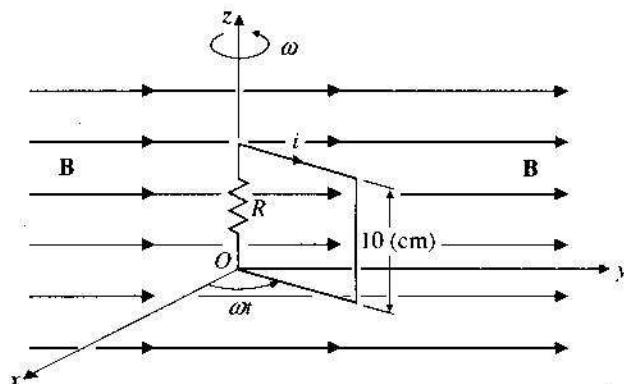


FIGURA 6-11 Espira rectangular giratoria en un campo magnético constante (Prob. P.6-5).

- P.6-6 Una barra conductora deslizante oscila sobre dos rieles conductores paralelos en un campo magnético que varía senoidalmente

$$\mathbf{B} = \mathbf{a}_z 5 \cos \omega t \quad (\text{mT}),$$

como se muestra en la figura 6-12. La posición de la barra deslizante está expresada por $x = 0.35(1 - \cos \omega t)$ (m) y los rieles terminan en una resistencia $R = 0.2$ (Ω). Calcule i .

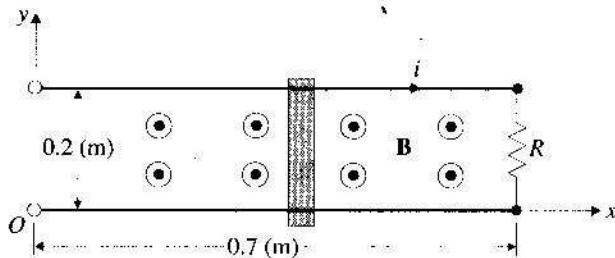


FIGURA 6-12 Barra conductora que se desliza sobre rieles paralelos en un campo magnético variable con el tiempo (Prob. P.6-6).

- P.6-7 Determine la frecuencia a la cual la intensidad de un campo eléctrico con dependencia armónica con el tiempo causa una densidad de corriente de conducción y una densidad de corriente de desplazamiento de igual magnitud en

- el agua de mar con $\epsilon_r = 72$ y $\sigma = 4$ (S/m), y
- la tierra húmeda con $\epsilon_r = 2.5$ y $\sigma = 10^{-3}$ (S/m).

P.6-8 En los cálculos concernientes al efecto electromagnético de las corrientes en un buen conductor generalmente se ignora la corriente de desplazamiento, incluso a frecuencias de microondas.

- a) Suponiendo $\epsilon_r = 1$ y $\sigma = 5.70 \times 10^7$ (S/m) para el cobre, compare la magnitud de la densidad de corriente de desplazamiento con la densidad de corriente de conducción a 100 (GHz).

- b) Escriba la ecuación diferencial que rige la intensidad de campo magnético \mathbf{H} en un buen conductor libre de fuentes.

P.6-9 Una lámina infinita con corriente $\mathbf{J} = a_x 5$ (A/m), coincidente con el plano xy , separa el aire (región 1, $z > 0$) de un medio con $\mu_{r2} = 2$ (región 2, $z < 0$). Si $\mathbf{H}_1 = a_x 30 + a_y 40 + a_z 20$ (A/m), calcule

a) \mathbf{H}_2 ,

b) \mathbf{B}_2 ,

c) el ángulo α_1 que forma \mathbf{B}_1 con el eje z , y

d) el ángulo α_2 que forma \mathbf{B}_2 con el eje z .

P.6-10 Escriba las condiciones en la frontera que existen en la superficie de separación del espacio libre y un material magnético con permeabilidad infinita (una aproximación).

P.6-11 Demuestre por sustitución directa que cualquier función de $(t - R \sqrt{\mu\epsilon})$ diferenciable dos veces es una solución de la ecuación de onda homogénea (Ec. (6-61)).

P.6-12 Escriba las ecuaciones escalares para las componentes del conjunto de las cuatro ecuaciones de Maxwell (6-80a, b, c y d):

- a) en coordenadas cartesianas si los fasores de campo son únicamente funciones de z , y

- b) en coordenadas esféricas si los fasores de campo son únicamente funciones de R .

P.6-13 Suponga $E(z, t) = 50 \cos(2\pi 10^9 t - kz)$ (V/m) en el aire. Dibuje las siguientes formas de onda y calcule las abscisas:

- a) $E(t)$ en función de t en $z = 100.125\lambda$, donde λ es la longitud de onda,

- b) $E(t)$ en función de t en $z = -100.125\lambda$, y

- c) $E(z)$ en función de z en $t = T/4$, donde T es el periodo de la onda.

P.6-14 El campo eléctrico de una onda electromagnética

$$\mathbf{E}(z, t) = a_x E_0 \cos \left[10^8 \pi \left(t - \frac{z}{c} \right) + \psi \right] \quad (\text{V/m})$$

es la suma de

$$\mathbf{E}_1(z, t) = a_x 0.03 \sin 10^8 \pi \left(t - \frac{z}{c} \right) \quad (\text{V/m})$$

y

$$\mathbf{E}_2(z, t) = a_x 0.04 \cos \left[10^8 \pi \left(t - \frac{z}{c} \right) - \frac{\pi}{3} \right]. \quad (\text{V/m}).$$

Calcule E_0 y ψ .

P.6-15 La intensidad de campo magnético de una onda electromagnética

$$\mathbf{H}(R, t) = \mathbf{a}_\phi H_0 \cos(\omega t - kR) \quad (\text{A/m})$$

es la suma de

$$\mathbf{H}_1(R, t) = \mathbf{a}_\phi 10^{-4} \sin(\omega t - kR) \quad (\text{A/m})$$

y

$$\mathbf{H}_2(z, t) = \mathbf{a}_\phi 2 \times 10^{-4} \cos(\omega t - kR + \alpha) \quad (\text{A/m}).$$

Calcule H_0 y α .

P.6-16 Comience con las ecuaciones fasoriales de Maxwell (6-80a, b, c y d) en un medio simple con distribuciones de carga y corriente con dependencia armónica con el tiempo y obtenga

- a) la ecuación no homogénea de Helmholtz para \mathbf{E} , y
- b) la ecuación no homogénea de Helmholtz para \mathbf{H} .

P.6-17 Un alambre conductor corto por el que circula una corriente con dependencia armónica con el tiempo es una fuente de ondas electromagnéticas. Suponiendo que fluye una corriente uniforme $i(t) = I_0 \cos \omega t$ en un alambre muy corto $d\ell$ colocado sobre el eje z ,

- a) determine en coordenadas esféricas el potencial vector fasorial retardado \mathbf{A} a una distancia R , y
- b) calcule la intensidad de campo magnético \mathbf{H} a partir de \mathbf{A} .

P.6-18 En un cable coaxial con aire como dieléctrico que tiene un conductor interior de radio a y conductor exterior de radio interior b existe una onda electromagnética de 60 (MHz). Suponiendo que los conductores son perfectos y que la forma fasorial de la intensidad de campo eléctrico es

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}_r \frac{E_0}{r} e^{-jkz} (\text{V/m}), \quad a < r < b,$$

- a) calcule k ,
- b) determine \mathbf{H} a partir de la ecuación $\nabla \times \mathbf{E}$, y
- c) calcule las densidades superficiales de corriente en los conductores interior y exterior.

P.6-19 Se sabe que la intensidad de campo eléctrico de una onda esférica en el espacio libre es

$$\mathbf{E}(R, \theta; t) = \mathbf{a}_\theta \frac{10^{-3}}{R} \sin \theta \cos(2\pi 10^9 t - kR) \quad (\text{V/m}).$$

Determine la intensidad de campo magnético $\mathbf{H}(R, \theta; t)$ y el valor de k .

P.6-20 Dado

$$\mathbf{E}(x, z; t) = \mathbf{a}_y 0.1 \sin(10\pi x) \cos(6\pi 10^9 t - \beta z) \quad (\text{V/m})$$

en el aire, determine $\mathbf{H}(x, z; t)$ y β .

P.6-21 Dado

$$\mathbf{H}(x, z; t) = \mathbf{a}_y 2 \cos(15\pi x) \sin(6\pi 10^9 t - \beta z) \quad (\text{A/m})$$

en el aire, determine $\mathbf{E}(x, z; t)$ y β .