

CAPÍTULO 2

Escalar

Vector

Independencia del sistema de coordenadas

2 - 1 DESCRIPCIÓN GENERAL Algunas de las cantidades de nuestro modelo electromagnético (como la carga, la corriente y la energía) son escalares; otras (como las intensidades de campos magnético y eléctrico) son vectores. Tanto los escalares como los vectores pueden ser funciones del tiempo y de la posición. En un instante y posición determinados, un *escalar* está totalmente definido por su magnitud (positiva o negativa, junto con su unidad). De esta manera podemos especificar, por ejemplo, una carga de $-1(\mu\text{C})$ en cierta posición en $t = 0$. Por otra parte, la especificación de un *vector* en un instante y posición específicos requiere una magnitud y una dirección. ¿Cómo se especifica la dirección de un vector? En el espacio tridimensional se requieren tres números, los cuales dependen del sistema de coordenadas elegido.

Es importante señalar que las leyes y los teoremas físicos que relacionan diversas cantidades escalares y vectoriales deben ser válidos sin importar el sistema de coordenadas. *Las expresiones generales de las leyes del electromagnetismo no requieren la especificación de un sistema de coordenadas.* Se elige un sistema de coordenadas específico sólo cuando hay que analizar un problema con una determinada geometría. Por ejemplo, si vamos a determinar el campo magnético en el centro de una espira de alambre que transporta corriente, es más conveniente emplear coordenadas rectangulares si la espira es rectangular o polares si la espira tiene forma circular. La relación electromagnética básica que rige la solución de este problema es la misma en ambas geometrías.

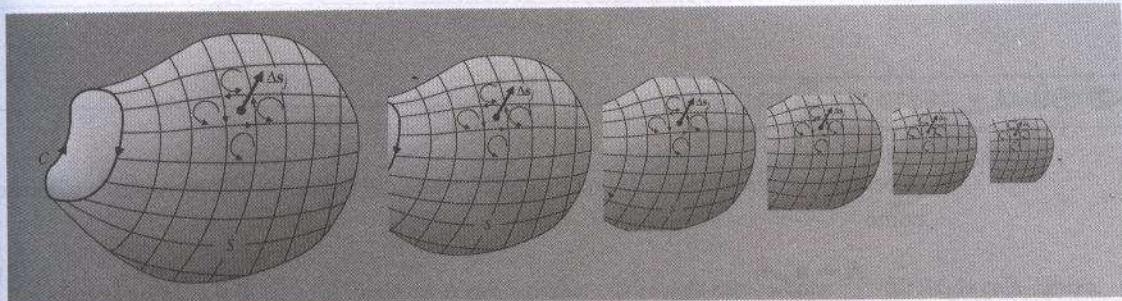


FIGURA 2.2 Suma de vectores. $C = A + B = B + A = |\vec{A}| = R$

Análisis vectorial

Puesto que muchas cantidades electromagnéticas son vectores, debemos ser capaces de manejar (sumar, restar y multiplicar) estos vectores fácilmente. Para expresar resultados específicos en un espacio tridimensional es necesario elegir un sistema de coordenadas apropiado. En este capítulo analizaremos los tres sistemas de coordenadas ortogonales más comunes: coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas. Veremos cómo expresar un vector en sus componentes en estas coordenadas y cómo efectuar transformaciones de un sistema de coordenadas a otro.

Gracias a ciertos operadores diferenciales, podemos expresar los postulados fundamentales y otras fórmulas del electromagnetismo de manera sucinta y general. Analizaremos la importancia de las operaciones de gradiente, divergencia y rotacional y demostraremos los teoremas de la divergencia y de Stokes.

En este capítulo sobre análisis vectorial se abordan tres temas principales:

1. Álgebra vectorial: suma, resta y multiplicación de vectores.
2. Sistemas de coordenadas ortogonales: coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas.
3. Cálculo vectorial: diferenciación e integración de vectores; operaciones de gradiente, divergencia y rotacional.

También demostraremos dos identidades nulas importantes que implican repetidas aplicaciones de los operadores diferenciales.

2-2 SUMA Y RESTA DE VECTORES

Sabemos que un vector tiene una magnitud y una dirección. Un vector \mathbf{A} puede escribirse como

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_A A, \quad (2-1)$$

donde A es la magnitud (y tiene la unidad y la dimensión) de \mathbf{A} :

$$A = |\mathbf{A}|, \quad (2-2)$$

que es un escalar. \mathbf{a}_A es un vector sin dimensiones con magnitud unidad; especifica la dirección de \mathbf{A} . Podemos hallar \mathbf{a}_A a partir del vector \mathbf{A} dividiéndolo por su magnitud.

$$\mathbf{a}_A = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \frac{\mathbf{A}}{A}. \quad (2-3)$$

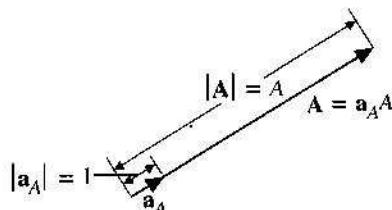
El vector \mathbf{A} puede representarse gráficamente como un segmento de línea recta dirigida de longitud $|\mathbf{A}| = A$, con la punta de la flecha apuntando en la dirección de \mathbf{a}_A , como se ilustra en la figura 2-1.

Dos vectores son iguales si tienen la misma magnitud y la misma dirección, aunque puedan estar desplazados en el espacio. Puesto que es difícil escribir a mano letras en negritas, en la escritura es común usar una flecha o una barra sobre una letra (\bar{A} o \hat{A}) o una línea sinuosa debajo de la letra (\underline{A}) para distinguir un vector de un escalar. *Una vez elegida esta marca distintiva, no deberá omitirse nunca cuando se escriban vectores.*

Dos vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} que no tengan la misma dirección y que no estén en direcciones opuestas, como los de la figura 2-2(a), determinan un plano. Su suma es otro vector \mathbf{C} en el mismo plano. $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ puede obtenerse gráficamente de dos maneras:

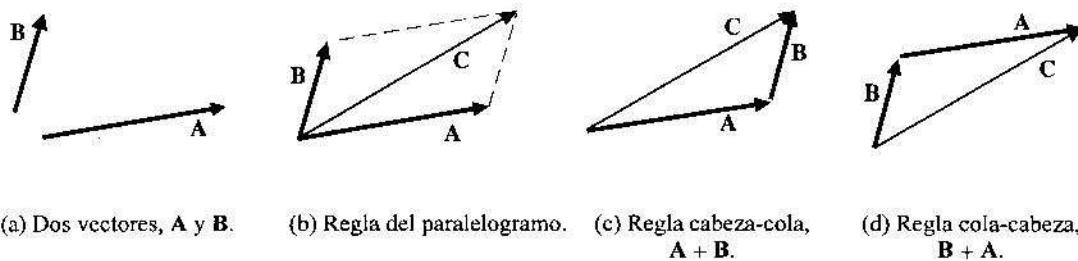
1. Por la regla del paralelogramo: El vector \mathbf{C} resultante es el vector diagonal del paralelogramo formado por \mathbf{A} y \mathbf{B} dibujados desde el mismo punto, como se ilustra en la figura 2-2(b).

FIGURA 2-1 Representación gráfica del vector \mathbf{A} .



Determinación del vector unitario a partir de un vector

Marcas distintivas de los vectores

FIGURA 2-2 Suma de vectores, $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$.

2. Por la regla cabeza-cola: La cabeza de \mathbf{A} se conecta con la cola de \mathbf{B} . Su suma \mathbf{C} es el vector dibujado de la cola de \mathbf{A} a la cabeza de \mathbf{B} ; los vectores \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{C} forman un triángulo, como se muestra en la figura 2-2(c). En la figura 2-2(d) se ilustra gráficamente $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$.

La resta de vectores puede definirse en términos de la suma de vectores, de la siguiente manera:

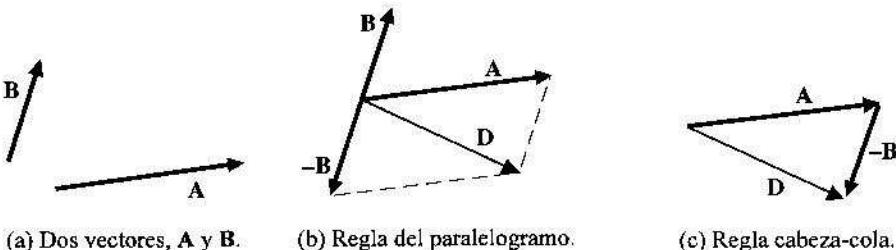
$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}), \quad (2-4)$$

donde $-\mathbf{B}$ es el negativo del vector \mathbf{B} . Esto se ilustra en la figura 2-3.

NOTA: No tiene sentido sumar o restar un escalar a un vector ni sumar o restar un vector a un escalar.

- **EJERCICIO 2.1** Tres vectores, \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{C} , dibujados en forma cabeza-cola, forman los tres lados de un triángulo. ¿Cuánto es $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$? ¿Cuánto es $\mathbf{A} + \mathbf{B} - \mathbf{C}$?

RESPUESTA: 0, $-2\mathbf{C}$.

FIGURA 2-3 Resta de vectores, $\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$.

2-3 MULTIPLICACIÓN DE VECTORES

La multiplicación de un vector \mathbf{A} por un escalar positivo k cambia la magnitud de \mathbf{A} por k veces sin modificar su dirección (k puede ser mayor o menor que 1).

$$k\mathbf{A} = \mathbf{a}_A(kA). \quad (2-5)$$

No es posible decir simplemente “la multiplicación de un vector por otro” ni “el producto de dos vectores”, ya que hay dos tipos muy diferentes de productos de dos vectores. Éstos son (1) el producto escalar o punto y (2) el producto vectorial o cruz. Definiremos estos productos en las subsecciones siguientes.

2-3.1 PRODUCTO PUNTO O ESCALAR

El producto escalar o punto de dos vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} se denota $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ (“ \mathbf{A} punto \mathbf{B} ”). El resultado del producto punto de dos vectores es un escalar igual al producto de las magnitudes de \mathbf{A} y \mathbf{B} y el coseno del ángulo entre éstos. De esta manera,

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \triangleq AB \cos \theta_{AB}.$

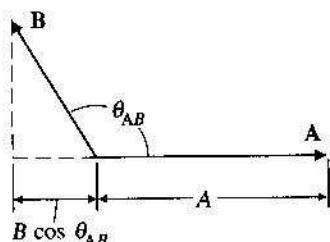
(2-6)

Definición del producto punto o escalar de dos vectores

El símbolo \triangleq en la ecuación (2-6) significa “igual por definición”; θ_{AB} es el ángulo más pequeño entre \mathbf{A} y \mathbf{B} y es menor que π radianes (180°), como se ilustra en la figura 2-4.

A partir de la definición de la ecuación (2-6) podemos ver que el producto punto de dos vectores: (1) es menor o igual que el producto de sus magnitudes; (2) puede ser una cantidad positiva o negativa, dependiendo de si el ángulo entre ellos es menor o mayor que $\pi/2$ radianes (90°); (3) es igual al producto de la magnitud de un vector y la proyección del otro vector sobre el primero; y (4) es cero cuando los vectores son perpendiculares entre sí.

FIGURA 2-4 Ilustración del producto punto de \mathbf{A} y \mathbf{B} .



A partir de la ecuación (2-6) podemos ver que

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}. \quad (2-7)$$

El producto punto es conmutativo.

Por consiguiente, el orden de los vectores en el producto punto no tiene importancia (el producto punto es conmutativo). Así mismo,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2 \quad (2-8)$$

o

$$A = |\mathbf{A}| = +\sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}}. \quad (2-9)$$

Determinación de la magnitud de un vector

La ecuación (2-9) nos permite determinar la magnitud de un vector cuando la expresión del vector se presenta en *cualquier sistema de coordenadas*. Basta formar el producto punto del vector por sí mismo ($\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$) y obtener la raíz cuadrada positiva del resultado escalar.

EJEMPLO 2-1

Use vectores para demostrar la ley de los cosenos de un triángulo.

SOLUCIÓN

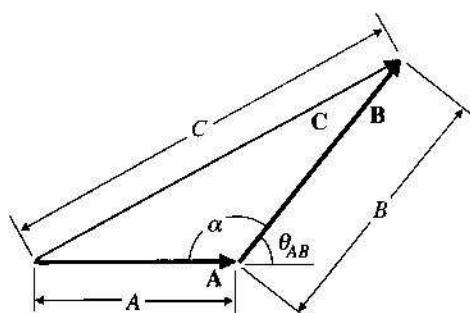
La ley de los cosenos es una relación escalar que expresa la longitud de un lado de un triángulo en términos de las longitudes de los otros dos lados y el ángulo entre ellos. Para la figura 2-5, la ley de los cosenos establece que

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos \alpha}. \quad (2-10)$$

Demostramos lo anterior considerando los lados como vectores; es decir,

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}.$$

FIGURA 2-5 Ilustración del ejemplo 2-1.



Para obtener la magnitud de \mathbf{C} realizamos el producto punto de \mathbf{C} por sí mismo, como en la ecuación (2-8).

$$\begin{aligned} C^2 &= \mathbf{C} \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \\ &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} + 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \\ &= A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta_{AB}. \end{aligned}$$

Como θ_{AB} es, por definición, el ángulo *más pequeño* entre \mathbf{A} y \mathbf{B} e igual a $(180^\circ - \alpha)$, sabemos que $\cos \theta_{AB} = \cos (180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$. Por lo tanto,

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos \alpha. \quad (2-11)$$

Tomando la raíz cuadrada en ambos lados de la ecuación (2-11) se obtiene la ley de los cosenos de la ecuación (2-10). Observe que en este problema no es necesario especificar ningún sistema de coordenadas.

2-3.2 PRODUCTO CRUZ O VECTORIAL

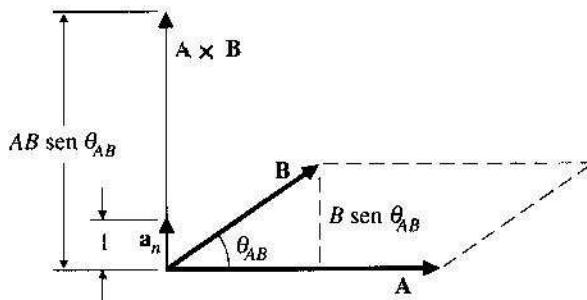
Otro tipo de multiplicación de vectores es el producto vectorial o cruz. Dados dos vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} , el producto cruz, denotado $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ ("A cruz B") es otro vector definido por

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \triangleq \mathbf{a}_n AB \sin \theta_{AB}, \quad (2-12)$$

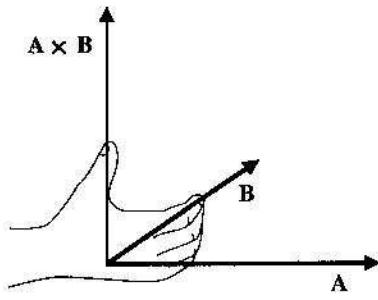
Definición del producto cruz o vectorial de dos vectores

donde θ_{AB} es el ángulo *más pequeño* entre los vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} ($\leq \pi$) y \mathbf{a}_n es un vector unitario normal (perpendicular) al plano que contiene \mathbf{A} y \mathbf{B} . La dirección de \mathbf{a}_n sigue la del dedo pulgar de la *mano derecha* cuando los dedos giran de \mathbf{A} a \mathbf{B} siguiendo el ángulo θ_{AB} (*regla de la mano derecha*). Esta regla se ilustra en la figura 2-6. En esta figura podemos ver que $B \sin \theta_{AB}$ es la altura del paralelogramo formado por los vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} . También se observa que la cantidad $AB \sin \theta_{AB}$, que es no negativa

FIGURA 2-6 Producto cruz de \mathbf{A} y \mathbf{B} , $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$



(a) $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{a}_n AB \sin \theta_{AB}$



(b) Regla de la mano derecha.

(positiva o cero), es numéricamente igual al área del paralelogramo. Por lo tanto, el producto cruz $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ produce otro vector cuya dirección \mathbf{a}_n se obtiene por la regla de la mano derecha al girar de \mathbf{A} a \mathbf{B} , y cuya magnitud es igual al área del paralelogramo formado por \mathbf{A} y \mathbf{B} .

A partir de la definición de la ecuación (2-12) y con la regla de la mano derecha, tenemos que

$$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -\mathbf{A} \times \mathbf{B}. \quad (2-13)$$

El producto vectorial no es conmutativo.

Por lo tanto, el producto cruz *no* es conmutativo y la inversión del orden de los vectores en el producto cruz cambia el signo del producto.

2-3.3 PRODUCTOS DE TRES VECTORES

Hay dos tipos de productos de tres vectores: (1) producto escalar triple y (2) producto vectorial triple.

1. Producto escalar triple. Es el producto punto de un vector con el resultado del producto cruz de otros dos vectores. Una forma típica de este producto es

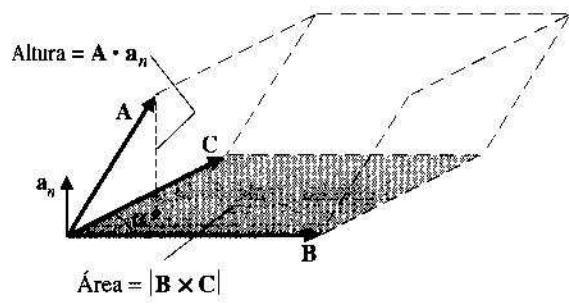
$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}),$$

donde \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{C} son tres vectores arbitrarios, como se ilustra en la figura 2-7(a).

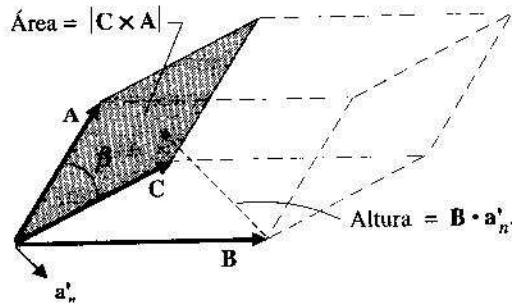
De acuerdo con la ecuación (2-12), el producto cruz $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ tiene magnitud $BC \sin \alpha$, igual al área del paralelogramo sombreado que forman los lados \mathbf{B} y \mathbf{C} . La dirección de $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ es \mathbf{a}_n , un vector unitario normal perpendicular al plano que contiene \mathbf{B} y \mathbf{C} , como puede observarse en la figura. El producto triple es entonces

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_n) BC \sin \alpha. \quad (2-14)$$

FIGURA 2-7 Ilustración de productos escalares triples.



(a) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$.



(b) $\mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A})$.

En la ecuación (2-14), $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_n)$ es un escalar cuya magnitud es la proyección de \mathbf{A} en la dirección del vector unitario normal \mathbf{a}_n . Por lo tanto, $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_n)$ es numéricamente igual a la altura del paralelepípedo formado por los vectores \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{C} , y el producto escalar triple es igual al volumen del paralelepípedo.

2. Producto vectorial triple. Es el producto cruz de un vector con el resultado del producto cruz de otros dos. Una forma típica de este producto es

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}).$$

Este caso es más complicado y aquí no presentaremos una derivación general. Sin embargo, es bastante fácil de desarrollar si se especifica un sistema de coordenadas (véase el Prob. 2-9). Analizaremos su aplicación cuando sea necesario más adelante.

EJEMPLO 2-2

Dados tres vectores, \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{C} , demuestre la siguiente relación de los productos escalares triples:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}). \quad (2-15)$$

SOLUCIÓN

Hemos visto que el primer producto escalar triple $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$, de acuerdo con la ecuación (2-14), es igual al volumen del paralelepípedo formado por los tres vectores \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{C} . Veamos ahora el segundo producto escalar triple $\mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A})$. A partir de la figura 2-7(b) y la ecuación (2-12), tenemos

$$\mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}'_n) CA \sin \beta, \quad (2-16)$$

donde \mathbf{a}'_n y $CA \sin \beta$ representan, respectivamente, la dirección y la magnitud del producto cruz $\mathbf{C} \times \mathbf{A}$. Visualice ahora el paralelepípedo formado por los tres vectores \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{C} como si estuviera sobre la base sombreada con área igual a $|\mathbf{C} \times \mathbf{A}| = CA \sin \beta$. La altura del paralelepípedo es $(\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}'_n)$. Por lo tanto, el producto escalar triple de la ecuación (2-16) tiene magnitud igual al volumen del paralelepípedo, el cual es idéntico al de la ecuación (2-14). Entonces,

$$\mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}). \quad (2-17)$$

Se aplican argumentos similares al tercer producto escalar triple de la ecuación (2-15), $\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$, ya que las tres formas producen el volumen del paralelepípedo.

CUIDADO: Para las igualdades de la ecuación (2-15) se requiere que el orden de los vectores del producto escalar triple tenga una permutación cíclica. Esto significa que debe mantenerse la secuencia $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$, $\{\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{A}\}$ o $\{\mathbf{C}, \mathbf{A}, \mathbf{B}\}$ al obtener el producto

punto del primer vector con el resultado del producto cruz de los otros dos vectores. $\mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{C})$, que no sigue la secuencia cíclica, no es lo mismo que $\mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A})$ de la ecuación (2-16) (aunque si es igual a su valor negativo).

PREGUNTAS DE REPASO

- P.2-1** ¿En qué condiciones puede ser negativo el producto punto de dos vectores?
- P.2-2** Escriba los resultados de $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ y $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ si (a) $\mathbf{A} \parallel \mathbf{B}$ y (b) $\mathbf{A} \perp \mathbf{B}$.
- P.2-3** ¿Es lo mismo $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$ que $\mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$? Explique.
- P.2-4** Dados dos vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} , ¿cómo calcula (a) la componente de \mathbf{A} en la dirección de \mathbf{B} y (b) la componente de \mathbf{B} en la dirección de \mathbf{A} ?
- P.2-5** ¿ $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$ implica $\mathbf{B} = \mathbf{C}$? Explique.
- P.2-6** ¿ $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times \mathbf{C}$ implica $\mathbf{B} = \mathbf{C}$? Explique.

COMENTARIOS

1. Al escribir un vector, *nunca* omita la marca que lo distingue de un escalar.
2. No sume o reste un vector y un escalar, o viceversa.
3. La división por un vector no está definida. No intente dividir una cantidad por un vector.
4. Dos vectores son perpendiculares entre sí si su producto punto es cero, y viceversa. ($\theta = \pi/2$, $\cos \theta = 0$. Ec. 2-6.)
5. Dos vectores son paralelos entre sí si su producto cruz es cero, y viceversa. ($\theta = 0$, $\sin \theta = 0$. Ec. 2-10.)

■ **EJERCICIO 2.2** Compare los valores de los siguientes productos escalares triples de vectores:
 (a) $(\mathbf{A} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{B}$, (b) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{B})$, (c) $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$ y (d) $\mathbf{B} \cdot (\mathbf{a}_x \times \mathbf{A})$.

■ **EJERCICIO 2.3** ¿Cuáles de las siguientes expresiones no tienen sentido?
 (a) $\mathbf{A} \times \mathbf{B}/|\mathbf{B}|$, (b) $\mathbf{C} \cdot \mathbf{D}/(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$, (c) \mathbf{AB}/\mathbf{CD} , (d) $\mathbf{A} \times \mathbf{B}/(\mathbf{C} \cdot \mathbf{D})$,
 (e) \mathbf{ABC} , (f) $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \times \mathbf{C}$.

2-4 SISTEMAS DE COORDENADAS ORTOGONALES

Ya indicamos que, aunque las leyes del electromagnetismo son independientes del sistema de coordenadas, para la resolución de problemas prácticos se requiere que las expresiones derivadas de estas leyes se expresen en un sistema de coordenadas apropiado para la geometría del problema. Por ejemplo, para determinar el campo eléctrico en

cierto punto del espacio es necesario que al menos describamos la posición de la fuente y la situación de este punto con respecto a un sistema de coordenadas. En un espacio tridimensional, un punto puede localizarse como la intersección de tres superficies. Suponga que las tres familias de superficies se describen con $u_1 = \text{constante}$, $u_2 = \text{constante}$ y $u_3 = \text{constante}$, donde las u no tienen que ser todas longitudes y algunas pueden ser ángulos. (En el conocido sistema de coordenadas cartesianas o rectangulares, u_1 , u_2 y u_3 corresponden a x , y y z , respectivamente.) Cuando las tres superficies son mutuamente perpendiculares se tiene un *sistema de coordenadas ortogonales*.

Sistemas de coordenadas ortogonales

Existen muchos sistemas de coordenadas ortogonales, pero en este libro sólo nos interesan los tres más útiles y de uso más común:

1. Coordenadas cartesianas (o rectangulares).†
2. Coordenadas cilíndricas.
3. Coordenadas esféricas.

Analizaremos cada uno de estos sistemas en las subsecciones siguientes.

2-4.1 COORDENADAS CARTESIANAS

Un punto $P(x_1, y_1, z_1)$ en coordenadas cartesianas es la intersección de *tres planos* especificados por $x = x_1$, $y = y_1$ y $z = z_1$, como se ilustra en la figura 2-8. Tenemos

$$(u_1, u_2, u_3) = (x, y, z).$$

Los tres vectores mutuamente perpendiculares, \mathbf{a}_x , \mathbf{a}_y y \mathbf{a}_z , en dirección de las tres coordenadas, se denominan *vectores base*. En el caso de un sistema de mano derecha tenemos las siguientes propiedades cíclicas:

$$\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z \quad (2-18a)$$

$$\mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_x \quad (2-18b)$$

$$\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_y \quad (2-18c)$$

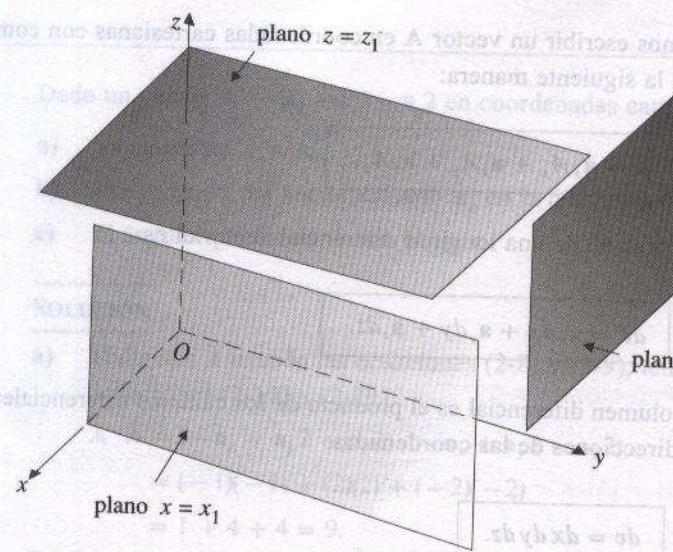
Las siguientes relaciones se deducen directamente,

$$\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_z = 0 \quad (2-19)$$

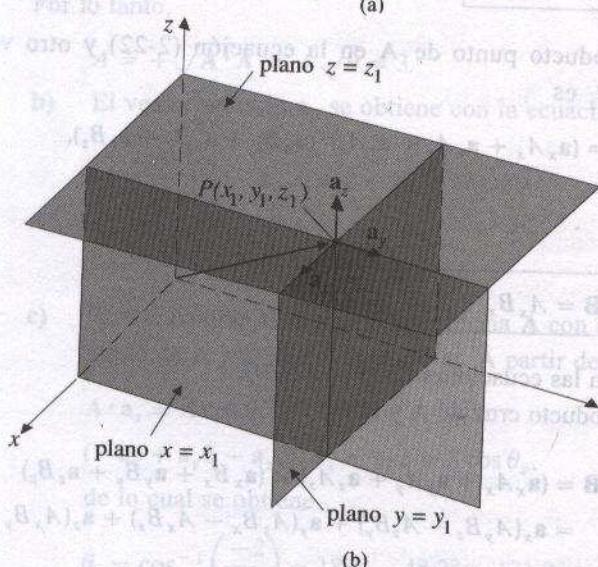
y

$$\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z = 1. \quad (2-20)$$

† Preferimos usar el término "coordenadas cartesianas" porque el término "coordenadas rectangulares" usualmente se asocia con la geometría bidimensional. El adjetivo "cartesiano" se emplea en honor del filósofo y matemático francés Renatus Cartesius (forma latinizada de René Descartes, 1596-1650), quien inició la geometría analítica.



(a)



(b)

FIGURA 2-8 Coordenadas cartesianas. (a) Tres planos mutuamente perpendiculares. (b) La intersección de los tres planos de (a) define la posición de un punto P .

El vector de posición del punto $P(x_1, y_1, z_1)$ es el vector trazado desde el origen O hasta P ; sus componentes en las direcciones \mathbf{a}_x , \mathbf{a}_y y \mathbf{a}_z son, respectivamente, x_1 , y_1 , z_1 .[†]

$$\overrightarrow{OP} = \mathbf{a}_x x_1 + \mathbf{a}_y y_1 + \mathbf{a}_z z_1. \quad (2-21)$$

[†] Al escribir vectores en este libro usaremos el convenio de escribir primero la dirección (de un vector unitario) y luego la magnitud.

Podemos escribir un vector \mathbf{A} en coordenadas cartesianas con componentes A_x , A_y y A_z , de la siguiente manera:

Vector \mathbf{A} en coordenadas cartesianas

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_x A_x + \mathbf{a}_y A_y + \mathbf{a}_z A_z. \quad (2-22)$$

La expresión de una longitud diferencial vectorial es

Longitud diferencial vectorial en coordenadas cartesianas

$$d\ell = \mathbf{a}_x dx + \mathbf{a}_y dy + \mathbf{a}_z dz. \quad (2-23)$$

Un volumen diferencial es el producto de los cambios diferenciales en longitud en las tres direcciones de las coordenadas:

Diferencial de volumen en coordenadas cartesianas

$$dv = dx dy dz. \quad (2-24)$$

El producto punto de \mathbf{A} en la ecuación (2-22) y otro vector $\mathbf{B} = \mathbf{a}_x B_x + \mathbf{a}_y B_y + \mathbf{a}_z B_z$ es

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{a}_x A_x + \mathbf{a}_y A_y + \mathbf{a}_z A_z) \cdot (\mathbf{a}_x B_x + \mathbf{a}_y B_y + \mathbf{a}_z B_z),$$

o sea

Producto escalar de \mathbf{A} y \mathbf{B} en coordenadas cartesianas

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z, \quad (2-25)$$

con base en las ecuaciones (2-19) y (2-20).

El producto cruz de \mathbf{A} y \mathbf{B} es

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (\mathbf{a}_x A_x + \mathbf{a}_y A_y + \mathbf{a}_z A_z) \times (\mathbf{a}_x B_x + \mathbf{a}_y B_y + \mathbf{a}_z B_z) \\ &= \mathbf{a}_x (A_y B_z - A_z B_y) + \mathbf{a}_y (A_z B_x - A_x B_z) + \mathbf{a}_z (A_x B_y - A_y B_x), \end{aligned} \quad (2-26)$$

con base en las ecuaciones (2-28a, b y c). La ecuación (2-26) puede escribirse más convenientemente en forma de determinante, para que sea más fácil memorizarla:

Producto vectorial de \mathbf{A} y \mathbf{B} en coordenadas cartesianas

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (2-27)$$

EJEMPLO 2-3

Dado un vector $\mathbf{A} = -\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y 2 - \mathbf{a}_z 2$ en coordenadas cartesianas, encuentre

- su magnitud $A = |\mathbf{A}|$,
- la expresión del vector unitario \mathbf{a}_A en la dirección de \mathbf{A} , y
- el ángulo que forma \mathbf{A} con el eje z .

SOLUCIÓN

- Hallamos A usando las ecuaciones (2-8) y (2-9), teniendo en cuenta las ecuaciones (2-19) y (2-20).

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} &= (-\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y 2 - \mathbf{a}_z 2) \cdot (-\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y 2 - \mathbf{a}_z 2) \\ &= (-1)(-1) + (2)(2) + (-2)(-2) \\ &= 1 + 4 + 4 = 9.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$A = +\sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}} = +\sqrt{9} = 3.$$

- El vector unitario \mathbf{a}_A se obtiene con la ecuación (2-3). Tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_A &= \frac{\mathbf{A}}{A} = \frac{1}{3}(-\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y 2 - \mathbf{a}_z 2) \\ &= -\mathbf{a}_x \frac{1}{3} + \mathbf{a}_y \frac{2}{3} - \mathbf{a}_z \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

- Para encontrar el ángulo θ_z que forma \mathbf{A} con el eje $+z$, obtenemos el producto punto de \mathbf{A} y el vector unitario \mathbf{a}_z . A partir de la ecuación (2-6) tenemos

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_z = A \cos \theta_z,$$

$$(-\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y 2 - \mathbf{a}_z 2) \cdot \mathbf{a}_z = -2 = 3 \cos \theta_z.$$

de lo cual se obtiene

$$\theta_z = \cos^{-1}\left(\frac{-2}{3}\right) = 180^\circ - 48.2^\circ = 131.8^\circ.$$

PREGUNTA: ¿Por qué la respuesta no es -48.2° o 228.2° ($180^\circ + 48.2^\circ$)?

EJEMPLO 2-4

Dado $\mathbf{A} = \mathbf{a}_x 5 - \mathbf{a}_y 2 + \mathbf{a}_z$ y $\mathbf{B} = -\mathbf{a}_x 3 + \mathbf{a}_z 4$, calcule

- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$,
- $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, y
- θ_{AB} .

SOLUCIÓN

- a) A partir de la ecuación (2-25) tenemos

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (5)(-3) + (-2)(0) + (1)(4) = -11.$$

- b) De la ecuación (2-27) tenemos

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ 5 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -\mathbf{a}_x 8 - \mathbf{a}_y 23 - \mathbf{a}_z 6.$$

- c) Podemos encontrar θ_{AB} , el ángulo entre los vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} , con base en la definición de $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ de la ecuación (2-6). Las magnitudes A de \mathbf{A} y B de \mathbf{B} son:

$$A = |\mathbf{A}| = +\sqrt{5^2 + (-2)^2 + 1^2} = +\sqrt{30}$$

y

$$B = |\mathbf{B}| = +\sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5.$$

De la ecuación (2-6),

$$\cos \theta_{AB} = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{AB} = \frac{-11}{5\sqrt{30}} = -0.402.$$

Por lo tanto,

$$\theta_{AB} = \cos^{-1}(-0.402) = 180^\circ - 66.3^\circ = 113.7^\circ.$$

EJEMPLO 2-5

- a) Escriba la expresión del vector que va desde el punto $P_1(1, 3, 2)$ hasta el punto $P_2(3, -2, 4)$ en coordenadas cartesianas.
 b) Determine la longitud de la línea $\overline{P_1P_2}$.
 c) Encuentre la distancia perpendicular desde el origen hasta esta línea.

SOLUCIÓN

- a) En la figura 2-9 podemos ver que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_1P_2} &= \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} \\ &= (\mathbf{a}_x 3 - \mathbf{a}_y 2 + \mathbf{a}_z 4) - (\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y 3 + \mathbf{a}_z 2) \\ &= \mathbf{a}_x 2 - \mathbf{a}_y 5 + \mathbf{a}_z 2. \end{aligned}$$

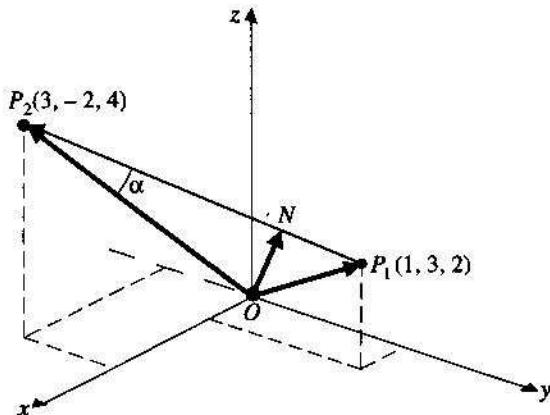


FIGURA 2-9 Ilustración del ejemplo 2-5.

- b) La longitud de la línea $\overline{P_1P_2}$ es

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_1P_2} &= |\overrightarrow{P_1P_2}| \\ &= \sqrt{2^2 + (-5)^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{33}.\end{aligned}$$

- c) La distancia perpendicular (más corta) desde el origen hasta la línea es

$|\overrightarrow{ON}|$, que es igual a $|\overrightarrow{OP_2}| \sin \alpha = |\overrightarrow{OP_2} \times \mathbf{a}_{P_1P_2}|$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{ON}| &= \frac{|\overrightarrow{OP_2} \times \overrightarrow{P_1P_2}|}{|\overrightarrow{P_1P_2}|} \\ &= \frac{|(\mathbf{a}_x 3 - \mathbf{a}_y 2 + \mathbf{a}_z 4) \times (\mathbf{a}_x 2 - \mathbf{a}_y 5 + \mathbf{a}_z 2)|}{\sqrt{33}} \\ &= \frac{|\mathbf{a}_x 16 + \mathbf{a}_y 2 - \mathbf{a}_z 11|}{\sqrt{33}} = \frac{\sqrt{381}}{\sqrt{33}} = 3.40.\end{aligned}$$

NOTA: En este ejemplo se han omitido las unidades por cuestiones de sencillez.

Dado un vector $\mathbf{B} = \mathbf{a}_x 2 - \mathbf{a}_y 6 + \mathbf{a}_z 3$, encuentre

■ EJERCICIO 2.4

- a) la magnitud de \mathbf{B} ,
- b) la expresión de \mathbf{a}_B ,
- c) los ángulos que forma \mathbf{B} con los ejes x , y y z .

RESPUESTA: (a) 7, (b) $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_x 0.296 - \mathbf{a}_y 0.857 + \mathbf{a}_z 0.429$, (c) 73.4° , 149.0° , 64.6° .

■ **EJERCICIO 2.5** Dados dos puntos $P_1(1, 2, 0)$ y $P_2(-3, 4, 0)$ en coordenadas cartesianas con origen O , calcule

- la longitud de la proyección de $\overrightarrow{OP_2}$ sobre $\overrightarrow{OP_1}$, y
- el área del triángulo OP_1P_2 .

RESPUESTA: (a) 2.236, (b) 5.

2-4.2 COORDENADAS CILÍNDRICAS

En coordenadas cilíndricas, un punto $P(r_1, \phi_1, z_1)$ es la intersección de una superficie cilíndrica circular $r = r_1$, un semiplano con el eje z como arista y que forma un ángulo $\phi = \phi_1$ con el plano xy , y un plano paralelo al plano xy en $z = z_1$. Tenemos

$$(u_1, u_2, u_3) = (r, \phi, z).$$

Como se ilustra en la figura 2-10, r es la distancia radial medida desde el eje z , y el ángulo ϕ se mide a partir del eje x positivo. El vector base \mathbf{a}_ϕ es tangente a la superficie cilíndrica. Las direcciones de \mathbf{a}_r y \mathbf{a}_ϕ cambian de acuerdo con la posición del punto P . Las siguientes relaciones de mano derecha se aplican a \mathbf{a}_r , \mathbf{a}_ϕ y \mathbf{a}_z :

$$\mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_\phi = \mathbf{a}_z, \quad (2-28a)$$

$$\mathbf{a}_\phi \times \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_r, \quad (2-28b)$$

$$\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_r = \mathbf{a}_\phi. \quad (2-28c)$$

Coefficiente métrico

Dos de las tres coordenadas, r y z (u_1 y u_2) son longitudes, pero ϕ (u_3) es un ángulo, por lo que se requiere un coeficiente de multiplicación (un *coeficiente métrico*) r para convertir un cambio diferencial de ángulo $d\phi$ en un cambio diferencial de longitud. Esto se ilustra en la figura 2-11.

Los coeficientes métricos para dr y dz son unitarios. Si denotamos los coeficientes métricos en las tres direcciones de coordenadas \mathbf{a}_r , \mathbf{a}_ϕ y \mathbf{a}_z con h_1 , h_2 y h_3 , respectivamente, tenemos que para las coordenadas cilíndricas, $h_1 = 1$, $h_2 = r$, $h_3 = 1$; éstos se indican en la tabla 2-1. Los coeficientes métricos en coordenadas cartesianas en las tres direcciones de coordenadas son unitarios ($h_1 = h_2 = h_3 = 1$), ya que las tres coordenadas (x, y, z) son longitudes.

La expresión general para una longitud diferencial vectorial en coordenadas cilíndricas es la suma vectorial de los cambios diferenciales en longitud en las tres direcciones de coordenadas.

Longitud diferencial vectorial en coordenadas cilíndricas

$$d\ell = \mathbf{a}_r dr + \mathbf{a}_\phi r d\phi + \mathbf{a}_z dz. \quad (2-29)$$

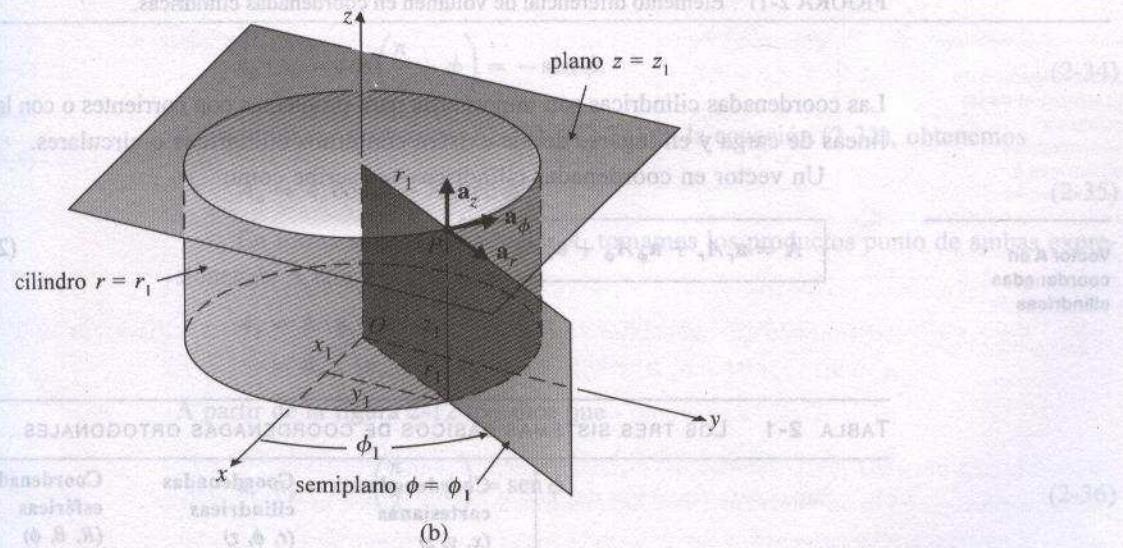
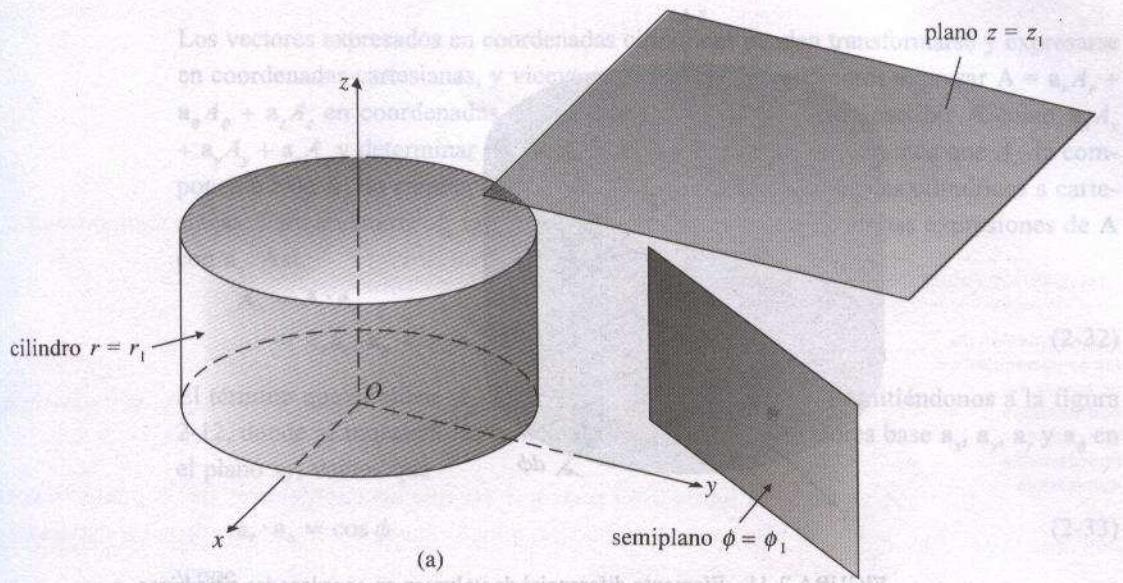


FIGURA 2-10 Coordenadas cilíndricas. (a) Superficie cilíndrica circular, un semiplano con el eje z como arista y un plano perpendicular al eje z . (b) La intersección de la superficie cilíndrica y los dos planos de (a) especifica la situación del punto P .

Un volumen diferencial es el producto de los cambios diferenciales en longitud en las tres direcciones de coordenadas. En coordenadas cilíndricas es

$$dv = r dr d\phi dz.$$

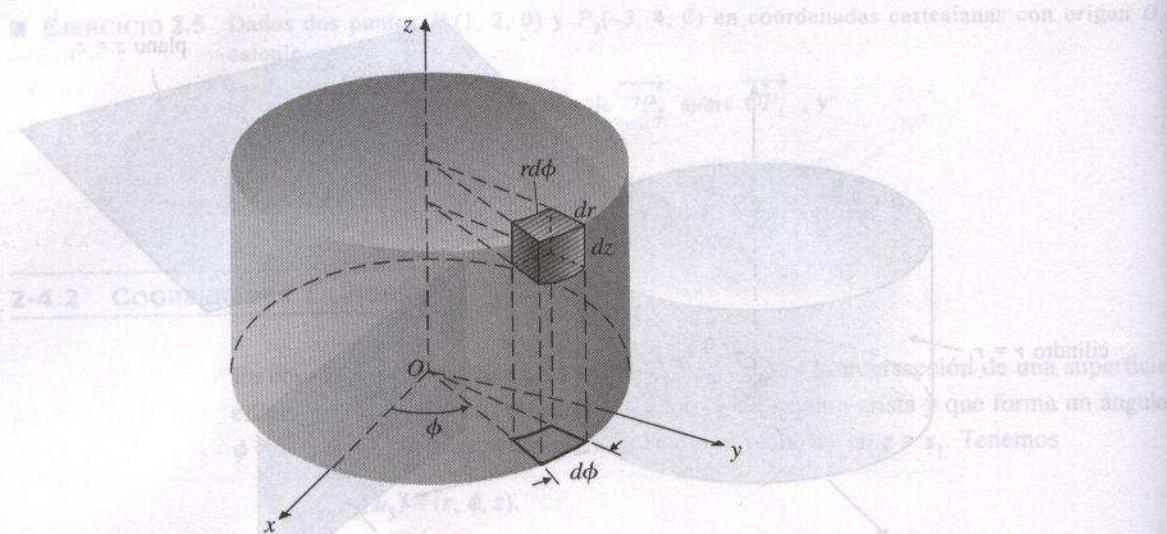


FIGURA 2-11 Elemento diferencial de volumen en coordenadas cilíndricas.

Las coordenadas cilíndricas son importantes para problemas con corrientes o con largas líneas de carga y en lugares donde existen contornos cilíndricos o circulares.

Un vector en coordenadas cilíndricas se escribe como

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_r A_r + \mathbf{a}_\phi A_\phi + \mathbf{a}_z A_z. \quad (2-31)$$

Vector A en coordenadas cilíndricas

Coeficiente métrico

TABLA 2-1 LOS TRES SISTEMAS BÁSICOS DE COORDENADAS ORTOGONALES

	Coordenadas cartesianas (x, y, z)	Coordenadas cilíndricas (r, φ, z)	Coordenadas esféricas (R, θ, φ)
Vectores base	\mathbf{a}_{u_1} , \mathbf{a}_{u_2} , \mathbf{a}_{u_3}	\mathbf{a}_x , \mathbf{a}_y , \mathbf{a}_z	\mathbf{a}_r , \mathbf{a}_ϕ , \mathbf{a}_z
Coeficientes métricos	h_1 , h_2 , h_3	1 , 1 , 1	1 , R , $R \sin \theta$
Diferencial de volumen	dv	$dx dy dz$	$r dr d\phi dz$
			$R^2 \sin \theta dR d\theta d\phi$

Los vectores expresados en coordenadas cilíndricas pueden transformarse y expresarse en coordenadas cartesianas, y viceversa. Suponga que queremos expresar $\mathbf{A} = \mathbf{a}_r A_r + \mathbf{a}_\phi A_\phi + \mathbf{a}_z A_z$ en coordenadas cartesianas; es decir, queremos escribir \mathbf{A} como $\mathbf{a}_x A_x + \mathbf{a}_y A_y + \mathbf{a}_z A_z$ y determinar A_x, A_y y A_z . En primer lugar, observamos que A_z , la componente z de \mathbf{A} , no cambia con la transformación de coordenadas cilíndricas a cartesianas. Para encontrar A_x igualamos los productos punto de ambas expresiones de \mathbf{A} con \mathbf{a}_x . Así,

$$\begin{aligned} A_x &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_x \\ &= A_r \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_x + A_\phi \mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_x. \end{aligned} \quad (2-32)$$

El término que contiene A_z desaparece porque $\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_x = 0$. Remitiéndonos a la figura 2-12, donde se muestran las posiciones relativas de los vectores base $\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y, \mathbf{a}_r$ y \mathbf{a}_ϕ en el plano xy , vemos que

$$\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_x = \cos \phi \quad (2-33)$$

y que

$$\mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_x = \cos \left(\frac{\pi}{2} + \phi \right) = -\sin \phi. \quad (2-34)$$

Al sustituir las ecuaciones (2-33) y (2-34) en la ecuación (2-32), obtenemos

$$A_x = A_r \cos \phi - A_\phi \sin \phi. \quad (2-35)$$

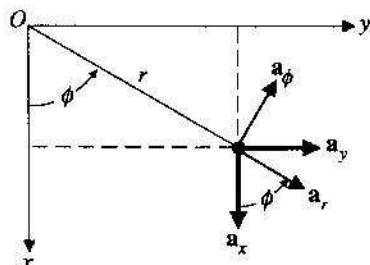
En forma similar, para hallar A_y tomamos los productos punto de ambas expresiones de \mathbf{A} con \mathbf{a}_y :

$$\begin{aligned} A_y &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_y \\ &= A_r \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_y + A_\phi \mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_y. \end{aligned}$$

A partir de la figura 2-12 tenemos que

$$\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_y = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \phi \right) = \sin \phi \quad (2-36)$$

FIGURA 2-12 Relaciones entre $\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y, \mathbf{a}_r$ y \mathbf{a}_ϕ .



y

$$\mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_y = \cos \phi. \quad (2-37)$$

De esto se desprende que

$$A_y = A_r \sin \phi + A_\phi \cos \phi. \quad (2-38)$$

Es conveniente escribir en forma de matriz las relaciones entre las componentes de un vector en coordenadas cartesianas y cilíndricas:

Transformación de las componentes de un vector de coordenadas cilíndricas a coordenadas cartesianas

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix}. \quad (2-39)$$

A partir de la figura 2-12 podemos ver que las coordenadas de un punto en coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z) pueden transformarse en las de coordenadas cartesianas (x, y, z) , de la siguiente manera:

$$x = r \cos \phi, \quad (2-40a)$$

$$y = r \sin \phi, \quad (2-40b)$$

$$z = z. \quad (2-40c)$$

Transformación de la situación de un punto en coordenadas cilíndricas a coordenadas cartesianas

EJEMPLO 2-6

Suponiendo que un campo vectorial expresado en coordenadas cilíndricas es

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_r(3 \cos \phi) - \mathbf{a}_\phi 2r + \mathbf{a}_z z,$$

a) ¿Cuál es el campo en el punto $P(4, 60^\circ, 5)$?

b) Exprese el campo \mathbf{A}_P en P en coordenadas cartesianas.

c) Exprese la situación del punto P en coordenadas cartesianas.

SOLUCIÓN

a) En el punto $P(r = 4, \phi = 60^\circ, z = 5)$, el campo es

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_P &= \mathbf{a}_r(3 \cos 60^\circ) - \mathbf{a}_\phi(2 \times 4) + \mathbf{a}_z 5 \\ &= \mathbf{a}_r(3/2) - \mathbf{a}_\phi 8 + \mathbf{a}_z 5. \end{aligned}$$

b) Usando la ecuación (2-39) tenemos

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ & 0 \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/2 \\ -8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/2 \\ -8 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.68 \\ -2.70 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{A}_P = \mathbf{a}_x 7.68 - \mathbf{a}_y 2.70 + \mathbf{a}_z 5.$$

- c) Usando las ecuaciones (2-40a, b y c) podemos obtener las coordenadas cartesianas del punto P como $(4 \cos 60^\circ, 4 \sin 60^\circ, 5)$ o $(2, 2\sqrt{3}, 5)$.

■ **EJERCICIO 2.6** Exprese el vector de posición \overrightarrow{OQ} desde el origen O hasta el punto $Q(3, 4, 5)$ en coordenadas cilíndricas.

RESPUESTA: $\mathbf{a}_r 5 + \mathbf{a}_\theta 5$.

■ **EJERCICIO 2.7** Las coordenadas cilíndricas de dos puntos P_1 y P_2 son: $P_1(4, 60^\circ, 1)$ y $P_2(3, 180^\circ, -1)$. Determine la distancia entre estos dos puntos.

RESPUESTA: $\sqrt{41}$.

2-4.3 COORDENADAS ESFÉRICAS

Un punto $P(R_1, \theta_1, \phi_1)$ en coordenadas esféricas se especifica como la intersección de las tres superficies siguientes: una superficie esférica centrada en el origen con radio $R = R_1$; un cono circular recto con su vértice en el origen, su eje coincidente con el eje $+z$ y con un ángulo mitad $\theta = \theta_1$; y un semiplano con el eje z como arista y que forma un ángulo $\phi = \phi_1$ con el plano xz . Tenemos

$$(u_1, u_2, u_3) = (R, \theta, \phi).$$

Las tres superficies intersecantes se ilustran en la figura 2-13. Observe que el vector base \mathbf{a}_R en P es radial desde el origen y bastante diferente de \mathbf{a}_r en coordenadas cilíndricas, ya que este último es perpendicular al eje z . El vector base \mathbf{a}_θ está en el plano $\phi = \phi_1$ y es tangencial a la superficie esférica, mientras que el vector base \mathbf{a}_ϕ es el mismo que en las coordenadas cilíndricas. Los vectores base se ilustran en la figura 2-11. En un sistema de mano derecha tenemos

$$\mathbf{a}_R \times \mathbf{a}_\theta = \mathbf{a}_\phi, \quad (2-41a)$$

$$\mathbf{a}_\theta \times \mathbf{a}_\phi = \mathbf{a}_R, \quad (2-41b)$$

$$\mathbf{a}_\phi \times \mathbf{a}_R = \mathbf{a}_\theta. \quad (2-41c)$$

\mathbf{a}_R y \mathbf{a}_θ son muy diferentes.

Las coordenadas esféricas son importantes en problemas que comprenden fuentes puntuales y regiones con contornos esféricos. Cuando un observador está muy lejos de una

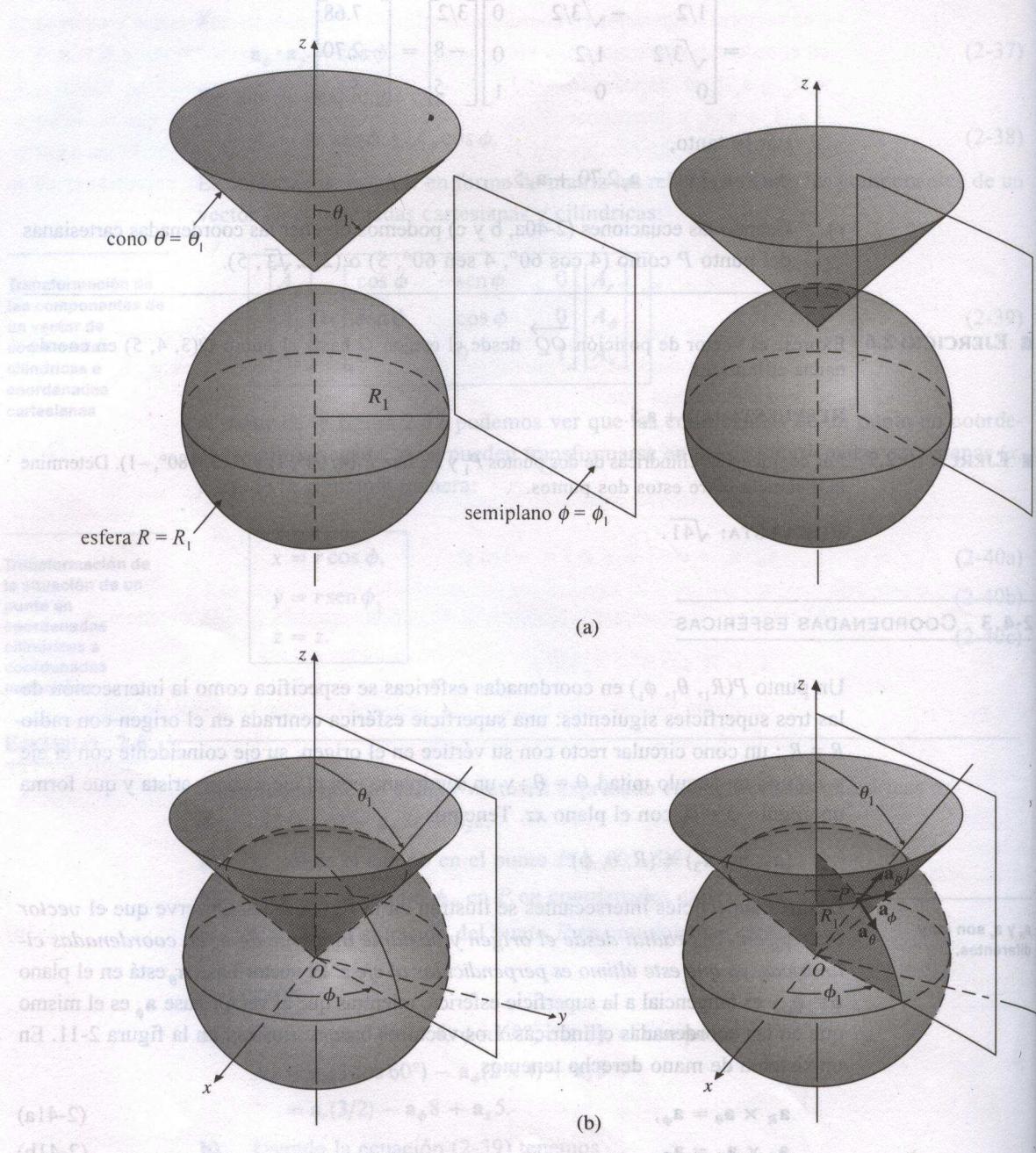


FIGURA 2-13 (a) Superficie esférica, un cono circular recto y un semiplano que contiene el eje z . (b) La intersección de la esfera, el cono y el semiplano de (a) especifica el punto P .

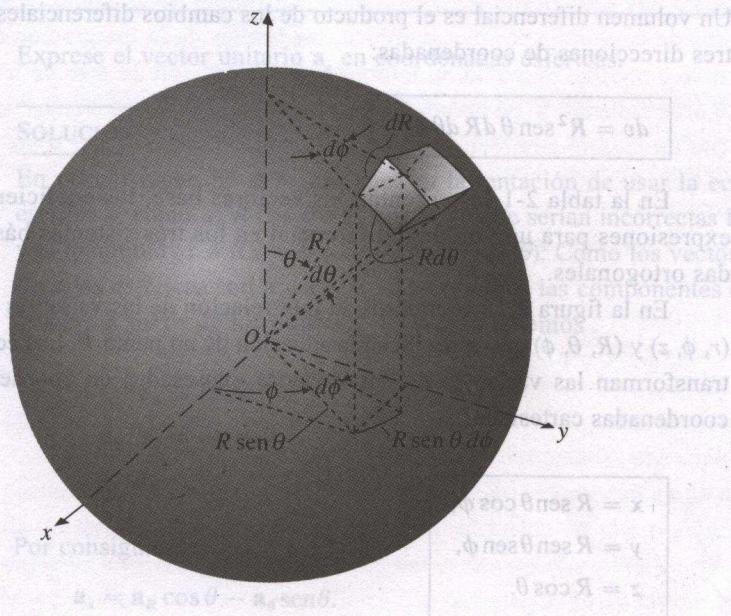


FIGURA 2-14 Elemento diferencial de volumen en coordenadas esféricas.

Supongamos que una fuente de electricidad esférica ocupa una región entre dos esferas con región fuente de extensión finita, esta fuente puede considerarse aproximadamente como un punto. Por lo tanto, podría elegirse como el origen de un sistema de coordenadas esféricas para que se puedan efectuar aproximaciones apropiadas que simplifiquen el problema. Es por esto que se usan coordenadas esféricas para resolver problemas de antenas en el campo lejano.

Un vector en coordenadas esféricas se escribe como

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_R A_R + \mathbf{a}_\theta A_\theta + \mathbf{a}_\phi A_\phi. \quad (2-42)$$

Vector \mathbf{A} en coordenadas esféricas

En coordenadas esféricas sólo R es una longitud. Las otras dos coordenadas, θ y ϕ , son ángulos. Remitiéndonos a la figura 2-14, donde se muestra un elemento de volumen diferencial típico, vemos que se requieren los coeficientes métricos $h_2 = R$ y $h_3 = R \sin \theta$ para convertir $d\theta$ y $d\phi$, respectivamente, en longitudes diferenciales (R) $d\theta$ y $(R \sin \theta) d\phi$. La expresión general para una longitud diferencial vectorial es

$$d\ell = \mathbf{a}_R dR + \mathbf{a}_\theta R d\theta + \mathbf{a}_\phi R \sin \theta d\phi. \quad (2-43)$$

Longitud diferencial vectorial en coordenadas esféricas

Un volumen diferencial es el producto de los cambios diferenciales en longitud en las tres direcciones de coordenadas:

Diferencial de volumen en coordenadas esféricas

$$dv = R^2 \sin \theta \, dR \, d\theta \, d\phi. \quad (2-44)$$

En la tabla 2-1 se presentan los vectores base, los coeficientes métricos y las expresiones para un volumen diferencial en los tres sistemas básicos de coordenadas ortogonales.

En la figura 2-15 se muestra la interrelación de las variables espaciales (x, y, z) , (r, θ, z) y (R, θ, ϕ) que especifican la situación de un punto P . Las ecuaciones siguientes transforman las variables de coordenadas expresadas en coordenadas esféricas en coordenadas cartesianas.

Transformación de la situación de un punto en coordenadas esféricas a coordenadas cartesianas

$$x = R \sin \theta \cos \phi, \quad (2-45a)$$

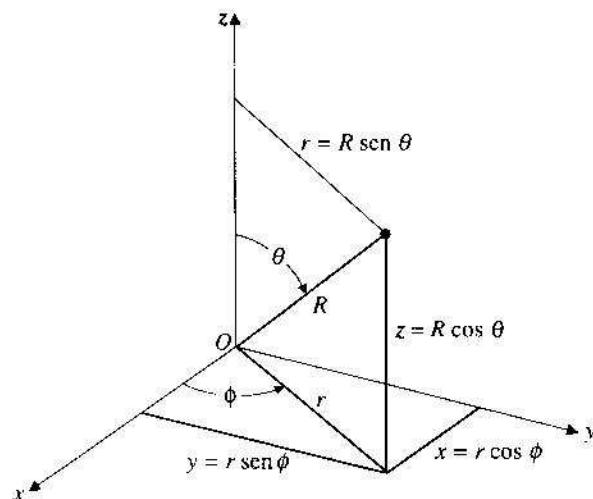
$$y = R \sin \theta \sin \phi, \quad (2-45b)$$

$$z = R \cos \theta. \quad (2-45c)$$

EJERCICIO 2.8 Transforme las coordenadas cartesianas $(4, -6, 12)$ en coordenadas esféricas.

RESPUESTA: $(14, 31^\circ, 303.7^\circ)$.

FIGURA 2-15 Ilustración de la interrelación de las variables espaciales (x, y, z) , (r, θ, z) y (R, θ, ϕ) .



EJEMPLO 2-7

Exprese el vector unitario \mathbf{a}_z en coordenadas esféricas.

SOLUCIÓN

En primer lugar, no debemos caer en la tentación de usar la ecuación (2-45c) para escribir \mathbf{a}_z como $\mathbf{a}_R R \cos \theta$ o $\mathbf{a}_R \cos \theta$, ya que serían incorrectas la dirección ($\mathbf{a}_z \neq \mathbf{a}_R$) y la magnitud ($1 \neq R \cos \theta$ o $\cos \theta$ para toda θ). Como los vectores base de las coordenadas esféricas son \mathbf{a}_R , \mathbf{a}_θ y \mathbf{a}_ϕ , encontremos las componentes de \mathbf{a}_z en estas direcciones. A partir de las figuras 2-13 y 2-14 tenemos

$$\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_R = \cos \theta, \quad (2-46a)$$

$$\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\theta = -\sin \theta, \quad (2-46b)$$

$$\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\phi = 0. \quad (2-46c)$$

Por consiguiente,

$$\mathbf{a}_z = \mathbf{a}_R \cos \theta - \mathbf{a}_\theta \sin \theta. \quad (2-47)$$

EJEMPLO 2-8

Suponiendo que una nube de electrones confinada en una región entre dos esferas con radios de 2 y 5 (cm) tiene una densidad de carga de

$$\frac{-3 \times 10^{-8}}{R^4} \cos^2 \phi \quad (\text{C/m}^3),$$

encuentre la carga total contenida en la región.

SOLUCIÓN

Tenemos

$$\rho_v = -\frac{3 \times 10^{-8}}{R^4} \cos^2 \phi,$$

$$Q = \int \rho_v dv.$$

Las condiciones especificadas para el problema apuntan de manera obvia al uso de coordenadas esféricas. Utilizando la expresión de dv de la ecuación (2-44) efectuamos una integración triple:

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{0.02}^{0.05} \rho_v R^2 \sin \theta dR d\theta d\phi.$$

Aquí hay dos cuestiones importantes. En primer lugar, como ρ_v se expresa en unidades de coulombs por metro cúbico, los límites de la integración de R deben convertirse a metros. Segundo, el intervalo de integración de θ es de 0 a π radianes, *no* de 0 a 2π radianes. Si pensamos en esto un poco nos convenceremos de que un semicírculo (no un círculo completo) girado 2π radianes (ϕ de 0 a 2π) sobre el eje z genera una esfera. Tenemos

$$\begin{aligned} Q &= -3 \times 10^{-8} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_{0.02}^{0.05} \frac{1}{R^2} \cos^2 \phi \sin \theta dR d\theta d\phi \\ &= -3 \times 10^{-8} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(-\frac{1}{0.05} + \frac{1}{0.02} \right) \sin \theta d\theta \cos^2 \phi d\phi \\ &= -0.9 \times 10^{-6} \int_0^{2\pi} (-\cos \theta) \Big|_0^{\pi} \cos^2 \phi d\phi \\ &= -1.8 \times 10^{-6} \left(\frac{\phi}{2} + \frac{\sin 2\phi}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} = -1.8\pi \quad (\mu\text{C}). \end{aligned}$$

EJERCICIO 2.9 Obtenga la fórmula de la superficie de una esfera con radio R_0 integrando el área superficial diferencial en coordenadas esféricas.

RESPUESTA: $4\pi R_0^2$.

PREGUNTAS DE REPASO

P.2-7 Explique qué es lo que hace que un sistema de coordenadas sea (a) ortogonal, (b) de mano derecha.

P.2-8 ¿Qué son los coeficientes métricos?

P.2-9 Escriba $d\ell$ y $d\omega$ (a) en coordenadas cartesianas, (b) en coordenadas cilíndricas y (c) en coordenadas esféricas.

P.2-10 Dados dos puntos $P_1(1, 2, 3)$ y $P_2(-1, 0, 2)$ en coordenadas cartesianas, escriba las expresiones de los vectores $\overrightarrow{P_1P_2}$ y $\overrightarrow{P_2P_1}$.

P.2-11 ¿Cuáles son las expresiones de $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ y $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ en coordenadas cartesianas?

COMENTARIOS

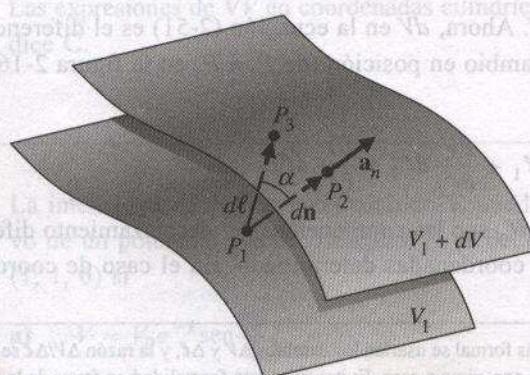
1. Hay que usar coeficientes métricos apropiados al convertir cambios de ángulo a cambios de longitud.
2. No confunda la distancia cilíndrica, r , medida a partir del eje z , con la distancia esférica, R , medida desde el origen.
3. Los productos cruz de los vectores base de cada sistema de coordenadas siguen la regla de la mano derecha en orden cíclico.

2-5 GRADIENTE DE UN CAMPO ESCALAR

En el electromagnetismo es común tratar con cantidades que dependen tanto del tiempo como de la posición. Puesto que las tres variables de coordenadas tienen lugar en un espacio tridimensional, es de esperar encontrarse campos escalares y vectoriales que sean funciones de cuatro variables (t, u_1, u_2, u_3). En términos generales, los campos pueden cambiar al variar una cualquiera de las cuatro variables. Veremos ahora el método para describir la razón de cambio espacial de un campo escalar en un instante determinado. Es necesario usar derivadas parciales con respecto a las tres variables de coordenadas espaciales y, puesto que la razón de cambio puede ser diferente dependiendo de la dirección, se requiere también un vector para definir la razón de cambio espacial de un campo escalar en un punto y en un instante determinados.

Consideremos una función escalar de coordenadas espaciales $V(u_1, u_2, u_3)$, que puede representar, por ejemplo, la distribución de temperatura en un edificio, la altitud de un terreno montañoso o el potencial eléctrico en una región. La magnitud de V depende en general de la posición del punto en el espacio, pero puede ser constante sobre ciertas líneas o superficies. En la figura 2-16 se muestran dos superficies en las cuales la magnitud de V es constante y tiene los valores V_1 y $V_1 + dV$, respectivamente, donde dV indica un cambio pequeño en V . Debemos señalar que las superficies de V constante no tienen por qué coincidir con cualquiera otra de las superficies que define el sistema de coordenadas. El punto P_1 está en la superficie V_1 ; P_2 es el punto correspondiente sobre la superficie $V_1 + dV$ determinado por el vector normal $d\mathbf{n}$; y P_3 es un punto cercano a P_2 determinado por otro vector $d\ell \neq d\mathbf{n}$. Para el mismo cambio dV en V , la razón de cambio espacial, $dV/d\ell$, es obviamente más grande a lo largo de $d\mathbf{n}$ que a lo largo de $d\ell$.

FIGURA 2-16 Relativo al gradiente de un escalar.



**El gradiente de un campo escalar:
definición física**

**El gradiente de un campo escalar:
definición
matemática**

largo de $d\ell$ porque dn es la distancia más corta entre las dos superficies.[†] Puesto que la magnitud de $dV/d\ell$ depende de la dirección de $d\ell$, $dV/d\ell$ es una derivada direccional. **Definimos el vector que representa la magnitud y la dirección de la razón de incremento espacial máximo de un escalar como el gradiente de dicho escalar.** Escribimos entonces

$$\text{grad } V \triangleq \mathbf{a}_n \frac{dV}{dn}. \quad (2-48)$$

Por cuestiones de brevedad, es costumbre emplear el operador $d\ell$, representado por el símbolo ∇ ,[‡] y escribir ∇V en lugar de **grad** V . De esta manera,

$$\nabla V \triangleq \mathbf{a}_n \frac{dV}{dn}. \quad (2-49)$$

Hemos supuesto que dV es positivo (un incremento en V); si dV fuera negativo (una disminución en V de P_1 a P_2), ∇V sería negativo en la dirección \mathbf{a}_n .

La derivada direccional a lo largo de $d\ell$ es

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d\ell} &= \frac{dV}{dn} \frac{dn}{d\ell} = \frac{dV}{dn} \cos \alpha \\ &= \frac{dV}{dn} \mathbf{a}_n \cdot \mathbf{a}_\ell = (\nabla V) \cdot \mathbf{a}_\ell. \end{aligned} \quad (2-50)$$

La ecuación (2-50) establece que la razón de incremento espacial de V en la dirección \mathbf{a}_ℓ es igual a la proyección (la componente) del gradiente de V en esa dirección. También podemos escribir la ecuación (2-50) como

$$dV = (\nabla V) \cdot d\ell, \quad (2-51)$$

donde $d\ell = \mathbf{a}_\ell d\ell$. Ahora, dV en la ecuación (2-51) es el diferencial total de V como resultado de un cambio en posición (de P_1 a P_3 en la figura 2-16) y puede expresarse como

$$dV = \frac{\partial V}{\partial \ell_1} d\ell_1 + \frac{\partial V}{\partial \ell_2} d\ell_2 + \frac{\partial V}{\partial \ell_3} d\ell_3, \quad (2-52)$$

donde $d\ell_1$, $d\ell_2$ y $d\ell_3$ son las componentes del desplazamiento diferencial vectorial $d\ell$ en un sistema de coordenadas determinado. En el caso de coordenadas cartesianas,

[†] En un tratamiento más formal se usarían los cambios ΔV y $\Delta\ell$, y la razón $\Delta V/\Delta\ell$ se convertiría en la derivada $dV/d\ell$ conforme $\Delta\ell$ se aproxime a cero. Evitaremos esta formalidad en favor de la sencillez.

[‡] ∇ también se conoce como operador *nabla*.

$(u_1, u_2, u_3) = (x, y, z)$ y $d\ell_1, d\ell_2$ y $d\ell_3$ son, respectivamente, dx, dy y dz (véase la Ec. 2-23). Podemos escribir dV en la ecuación (2-52) como el producto punto de dos vectores, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} dV &= \left(\mathbf{a}_x \frac{\partial V}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial V}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{\partial V}{\partial z} \right) \cdot (\mathbf{a}_x dx + \mathbf{a}_y dy + \mathbf{a}_z dz) \\ &= \left(\mathbf{a}_x \frac{\partial V}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial V}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{\partial V}{\partial z} \right) \cdot d\ell. \end{aligned} \quad (2-53)$$

Al comparar la ecuación (2-53) con la ecuación (2-51) tenemos

∇V en coordenadas cartesianas

$$\nabla V = \mathbf{a}_x \frac{\partial V}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial V}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{\partial V}{\partial z}, \quad (2-54)$$

o sea

$$\nabla V = \left(\mathbf{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) V. \quad (2-55)$$

Con base en la ecuación (2-55), es conveniente considerar ∇ en coordenadas cartesianas como un operador diferencial vectorial,

$$\nabla \equiv \mathbf{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (2-56)$$

En coordenadas ortogonales generales (u_1, u_2, u_3) con coeficientes métricos (h_1, h_2, h_3) , podemos definir ∇ como

$$\nabla \equiv \left(\mathbf{a}_{u_1} \frac{\partial}{h_1 \partial u_1} + \mathbf{a}_{u_2} \frac{\partial}{h_2 \partial u_2} + \mathbf{a}_{u_3} \frac{\partial}{h_3 \partial u_3} \right). \quad (2-57)$$

Las expresiones de ∇V en coordenadas cilíndricas y esféricas se presentan en el Apéndice C.

EJEMPLO 2-9

La intensidad de campo electrostático \mathbf{E} puede derivarse como el gradiente negativo de un potencial eléctrico escalar V ; es decir, $\mathbf{E} = -\nabla V$. Determine \mathbf{E} en el punto $(1, 1, 0)$ si

a) $V = V_0 e^{-x} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{4}$,

b) $V = E_0 R \cos \theta$.

SOLUCIÓN

a) Usamos la ecuación (2-54) para evaluar $\mathbf{E} = \nabla V$ en coordenadas cartesianas.

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\left[\mathbf{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{\partial}{\partial z}\right] V_0 e^{-x} \sin \frac{\pi y}{4} \\ &= \left(\mathbf{a}_x \sin \frac{\pi y}{4} - \mathbf{a}_y \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi y}{4}\right) V_0 e^{-x}.\end{aligned}$$

$$\text{Por lo tanto, } \mathbf{E}(1, 1, 0) = \left(\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y \frac{\pi}{4}\right) \frac{V_0}{\sqrt{2}} = \mathbf{a}_E E,$$

donde

$$\begin{aligned}E &= V_0 \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\pi^2}{16}\right)}, \\ \mathbf{a}_E &= \frac{1}{\sqrt{1 + (\pi^2/16)}} \left(\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y \frac{\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

b) Aquí, V aparece como función de la coordenada esférica θ . En el caso de coordenadas esféricas tenemos $(u_1, u_2, u_3) = (R, \theta, \phi)$ y $(h_1, h_2, h_3) = (1, R, R \sin \theta)$; véase la tabla 2-1. Tenemos entonces, a partir de la ecuación (2-57),

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\nabla V = -\left[\mathbf{a}_R \frac{\partial}{\partial R} + \mathbf{a}_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{a}_\phi \frac{\partial}{\partial R \sin \theta \partial \phi}\right] E_0 R \cos \theta \\ &= -(\mathbf{a}_R \cos \theta - \mathbf{a}_\theta \sin \theta) E_0.\end{aligned}$$

Con base en la ecuación (2-47), la ecuación anterior se convierte de manera muy sencilla en $\mathbf{E} = -\mathbf{a}_z E_0$ en coordenadas cartesianas. Esto tiene sentido, ya que un examen cuidadoso de V revela que $E_0 R \cos \theta$ es, de hecho, igual a $E_0 z$. En coordenadas cartesianas,

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\mathbf{a}_z \frac{\partial}{\partial z} (E_0 z) = -\mathbf{a}_z E_0.$$

■ **EJERCICIO 2.10** Suponiendo $V = xy - 2yz$, encuentre, en el punto $P(2, 3, 6)$,

- a) la dirección y la magnitud del máximo incremento de V , y
- b) la razón espacial de disminución de V en la dirección hacia el origen.

RESPUESTA: (a) $\mathbf{a}_x 3 - \mathbf{a}_y 10 + \mathbf{a}_z 6$, (b) $-60/7$.

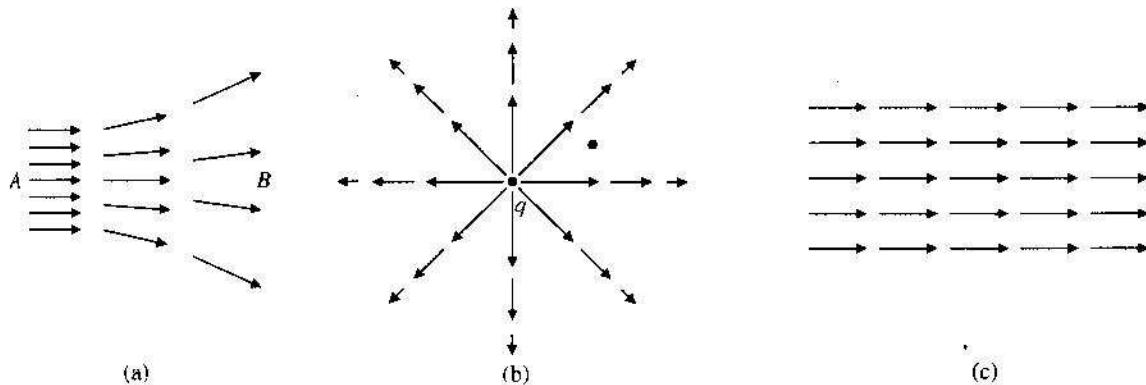
2-6 DIVERGENCIA DE UN CAMPO VECTORIAL

En la sección previa consideramos las derivadas espaciales de un campo escalar, de lo cual obtuvimos la definición del gradiente. Pasamos ahora a las derivadas espaciales de un campo vectorial, de lo cual surgirán las definiciones de la *divergencia* y del *rotacional* de un vector. Analizaremos el significado de la divergencia en esta sección y el del rotacional en la sección 2-8. Ambos conceptos son muy importantes en el estudio del electromagnetismo.

En el estudio de campos vectoriales es conveniente representar gráficamente las variaciones de los campos mediante líneas de campo dirigidas, llamadas *líneas de flujo*. Son líneas o curvas dirigidas que indican en cada punto la dirección del campo vectorial, como se ilustra en la figura 2-17. La magnitud del campo en un punto se representa o bien con la densidad o bien con la longitud de las líneas dirigidas en la vecindad del punto. En la figura 2-17(a) se muestra que el campo en la región *A* es más fuerte que en la región *B*, ya que hay mayor densidad de líneas dirigidas de igual longitud en la región *A*. En la figura 2-17(b), la reducción en la longitud de las flechas al alejarse del punto *q* indica un campo radial que es más fuerte en la región cercana a *q*. En la figura 2-17(c) se ilustra un campo uniforme.

La fuerza del campo vectorial de la figura 2-17(a) se mide con el número de líneas de flujo que pasan por una superficie unidad normal al vector. El flujo de un campo vectorial es análogo al flujo de un fluido incompresible, como el agua. En el caso de un volumen con una superficie cerrada, habrá un exceso de flujo que sale o entra por la superficie si el volumen contiene una fuente o un sumidero, respectivamente. Es decir, una divergencia neta positiva indica la presencia de una fuente de fluido en el interior del volumen, mientras que una divergencia neta negativa indica

FIGURA 2-17 Líneas de flujo de campos vectoriales.



la presencia de un sumidero. El flujo de salida neto del fluido por unidad de volumen es entonces una medida de la fuerza de la fuente encerrada. En el campo uniforme ilustrado en la figura 2-17(c) hay cantidades iguales de flujo de entrada y salida que pasan por cualquier volumen cerrado que no contiene fuentes ni sumideros, produciendo una divergencia nula.

La divergencia de un campo vectorial A: definición física

Definimos la divergencia de un campo vectorial A en un punto, abreviada div A, como el flujo neto de salida de A por unidad de volumen conforme el volumen alrededor del punto tiende a cero.

La divergencia de un campo vectorial A: definición matemática

$$\text{div } \mathbf{A} \triangleq \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}}{\Delta v}. \quad (2-58)$$

El numerador en la ecuación (2-58) es una integral de superficie. En realidad se trata de una integral doble en dos dimensiones, pero se escribe con el signo de una integral sencilla por cuestiones de sencillez. El círculo pequeño en el signo de la integral indica que la integral debe aplicarse a *toda* la superficie S que encierra un volumen. En el integrando, el elemento diferencial de superficie vectorial, $d\mathbf{s} = \mathbf{a}_n ds$, tiene una magnitud ds y una dirección indicada por el vector unitario normal \mathbf{a}_n que apunta *hacia fuera* del volumen encerrado. La integral de superficie encerrada representa el flujo de salida neto del campo vectorial A. La ecuación (2-58) es la definición general de div A, una *cantidad escalar* cuya magnitud puede variar de un punto a otro al variar A. Esta definición es válida para cualquier sistema de coordenadas; por supuesto, la expresión de div A, como la de A, dependerá de la elección del sistema de coordenadas. Derivaremos ahora la expresión de div A en coordenadas cartesianas.

Considere un volumen diferencial con lados Δx , Δy y Δz centrado alrededor de un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ en el campo de un vector A, como se ilustra en la figura 2-18. En coordenadas cartesianas, $\mathbf{A} = \mathbf{a}_x A_x + \mathbf{a}_y A_y + \mathbf{a}_z A_z$. Queremos encontrar div A en el punto (x_0, y_0, z_0) . Dado que el volumen diferencial tiene seis caras, la superficie integral del numerador de la ecuación (2-58) puede descomponerse en seis partes:

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \left[\int_{\text{cara anterior}} + \int_{\text{cara posterior}} + \int_{\text{cara derecha}} + \int_{\text{cara izquierda}} + \int_{\text{cara superior}} + \int_{\text{cara inferior}} \right] \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}. \quad (2-59)$$

En la cara anterior,

$$\begin{aligned} \int_{\text{cara anterior}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} &= \mathbf{A}_{\text{cara anterior}} \cdot \Delta \mathbf{s}_{\text{cara anterior}} = \mathbf{A}_{\text{cara anterior}} \cdot \mathbf{a}_x (\Delta y \Delta z) \\ &= A_x \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0 \right) \Delta y \Delta z. \end{aligned} \quad (2-60)$$

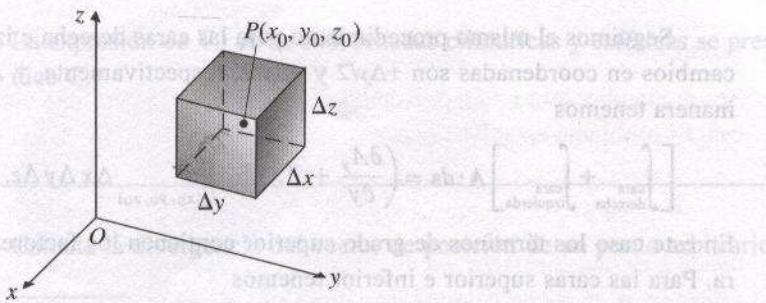


FIGURA 2-18 Volumen diferencial en coordenadas cartesianas.

La cantidad $A_x(x_0 + (\Delta x/2), y_0, z_0)$ puede desarrollarse en serie de Taylor alrededor de su valor en (x_0, y_0, z_0) , de la siguiente manera:

$$A_x\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0\right) = A_x(x_0, y_0, z_0) + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial A_x}{\partial x}\Big|_{(x_0, y_0, z_0)} + \text{términos de grado superior,} \quad (2-61)$$

donde los términos de grado superior (T.G.S.) contienen los factores $(\Delta x/2)^2$, $(\Delta x/2)^3$, etcétera. De forma similar, para la cara posterior,

$$\begin{aligned} \int_{\text{cara posterior}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} &= \mathbf{A}_{\text{cara posterior}} \cdot \Delta \mathbf{s}_{\text{cara posterior}} = \mathbf{A}_{\text{cara posterior}} \cdot (-\mathbf{a}_x \Delta y \Delta z) \\ &= -A_x\left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0\right) \Delta y \Delta z. \end{aligned} \quad (2-62)$$

El desarrollo en serie de Taylor de $A_x\left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0\right)$ es

$$A_x\left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0\right) = A_x(x_0, y_0, z_0) - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial A_x}{\partial x}\Big|_{(x_0, y_0, z_0)} + \text{T.G.S.} \quad (2-63)$$

Sustituyendo la ecuación (2-61) en la ecuación (2-60) y la ecuación (2-63) en la ecuación (2-62), para luego sumar las contribuciones, tenemos

$$\left[\int_{\text{cara anterior}} + \int_{\text{cara posterior}} \right] \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \text{T.G.S.} \right) \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} \Delta x \Delta y \Delta z. \quad (2-64)$$

En este caso se ha eliminado por factorización una Δx de los términos de grado superior de las ecuaciones (2-61) y (2-63), pero todos los términos de grado superior de la ecuación (2-64) aún contienen potencias de Δx .

Seguimos el mismo procedimiento para las caras derecha e izquierda, donde los cambios en coordenadas son $+\Delta y/2$ y $-\Delta y/2$, respectivamente, y $\Delta s = \Delta x \Delta z$; de esta manera tenemos

$$\left[\int_{\text{cara derecha}} + \int_{\text{cara izquierda}} \right] \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \left(\frac{\partial A_y}{\partial y} + \text{T.G.S.} \right) \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} \Delta x \Delta y \Delta z. \quad (2-65)$$

En este caso los términos de grado superior contienen los factores Δy , $(\Delta y)^2$, etcétera. Para las caras superior e inferior tenemos

$$\left[\int_{\text{cara superior}} + \int_{\text{cara inferior}} \right] \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial z} + \text{T.G.S.} \right) \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} \Delta x \Delta y \Delta z, \quad (2-66)$$

donde los términos de grado superior contienen los factores Δz , $(\Delta z)^2$, etcétera. Despues combinamos los resultados de las ecuaciones (2-64), (2-65) y (2-66) en la ecuación (2-59) para obtener

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} \Delta x \Delta y \Delta z + \text{términos de grado superior en } \Delta x, \Delta y \text{ y } \Delta z. \quad (2-67)$$

Puesto que $\Delta v = \Delta x \Delta y \Delta z$, la sustitución de la ecuación (2-67) en la ecuación (2-58) produce la expresión de $\text{div } \mathbf{A}$ en coordenadas cartesianas:

$$\boxed{\text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.} \quad (2-68)$$

Los términos de grado superior desaparecen conforme el volumen diferencial $\Delta x \Delta y \Delta z$ se aproxima a cero. El valor de $\text{div } \mathbf{A}$ generalmente depende de la posición del punto donde se calcula. En la ecuación (2-68) eliminamos la notación (x_0, y_0, z_0) porque se aplica a cualquier punto donde están definidos \mathbf{A} y sus derivadas parciales.

Con el operador diferencial vectorial del, ∇ , definido por la ecuación (2-56), podemos escribir de otra manera la ecuación (2-68) como $\nabla \cdot \mathbf{A}$ (léase "del punto \mathbf{A} "); es decir,

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} \equiv \text{div } \mathbf{A}.} \quad (2-69)$$

En un sistema general de coordenadas ortogonales (u_1, u_2, u_3) , la ecuación (2-58) nos lleva a

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2} (h_1 h_3 A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 h_2 A_3) \right].} \quad (2-70)$$

La expresión de $\nabla \cdot \mathbf{A}$ en coordenadas cilíndricas y esféricas se presenta en el Apéndice C.

EJEMPLO 2-10

Calcule la divergencia del vector de posición de un punto arbitrario.

SOLUCIÓN

Calcularemos la solución en coordenadas cartesianas y esféricas.

- a) *Coordenadas cartesianas.* La expresión del vector de posición de un punto arbitrario (x, y, z) es

$$\overrightarrow{OP} = \mathbf{A} = \mathbf{a}_x x + \mathbf{a}_y y + \mathbf{a}_z z. \quad (2-71)$$

Si usamos la ecuación (2-68) tenemos

$$\nabla \cdot (\overrightarrow{OP}) = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3.$$

- b) *Coordenadas esféricas.* En este caso, el vector de posición es simplemente

$$\overrightarrow{OP} = \mathbf{A} = \mathbf{a}_R R. \quad (2-72)$$

Su divergencia en coordenadas esféricas (R, θ, ϕ) puede obtenerse usando la ecuación (2-70) y la tabla 2-1, de la siguiente manera:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 A_R) + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}. \quad (2-73)$$

Sustituyendo la ecuación (2-72) en la ecuación (2-73) también obtenemos $\nabla \cdot (\overrightarrow{OP}) = 3$, como se esperaba.

**$\nabla \cdot \mathbf{A}$ en
coordenadas
esféricas**

EJERCICIO 2.11 Resuelva el ejemplo 2-10 en coordenadas cilíndricas.

EJEMPLO 2-11

La densidad de flujo magnético \mathbf{B} alrededor de un alambre muy largo que transporta una corriente es circunferencial e inversamente proporcional a la distancia al eje del alambre. Calcule $\nabla \cdot \mathbf{B}$.

SOLUCIÓN

Sea el alambre largo coincidente con el eje z en un sistema de coordenadas cilíndricas. El problema establece que

$$\mathbf{B} = \mathbf{a}_\phi \frac{k}{r},$$

donde k es una constante. La divergencia de un campo vectorial en coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z) puede determinarse con la ecuación (2-70) y la tabla 2-1.

$\nabla \cdot \mathbf{A}$ en
coordenadas
cilíndricas

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial B_z}{\partial z}} \quad (2-74)$$

Ahora $B_\phi = k/r$ y $B_r = B_z = 0$. La ecuación (2-74) nos indica que

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$

Campo solenoideal

En este caso tenemos un vector que no es constante pero cuya divergencia es cero. Un campo cuya divergencia es nula se denomina **campo solenoideal**. En el capítulo 5 veremos que el campo magnético es solenoideal.

2-7 TEOREMA DE LA DIVERGENCIA

Teorema de la
divergencia

En la sección anterior definimos la divergencia de un campo vectorial como el flujo de salida neto por unidad de volumen. Podríamos esperar de manera intuitiva que *la integral de volumen de la divergencia de un campo vectorial es igual al flujo de salida total del vector a través de la superficie que limita el volumen*; es decir,

$$\boxed{\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dv = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}.} \quad (2-75)$$

Esta identidad, que demostraremos en el párrafo siguiente, se conoce como **teorema de la divergencia**.[†] Se aplica a cualquier volumen V limitado por una superficie S . La dirección de $d\mathbf{s}$ es siempre la de la *normal hacia el exterior*, perpendicular a la superficie $d\mathbf{s}$ y dirigida hacia fuera del volumen.

En el caso de un elemento de volumen diferencial muy pequeño Δv_j , limitado por una superficie s_j , la definición de $\nabla \cdot \mathbf{A}$ en la ecuación (2-58) da directamente

$$(\nabla \cdot \mathbf{A})_j \Delta v_j = \oint_{s_j} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}. \quad (2-76)$$

[†] También se conoce como **teorema de Gauss**.

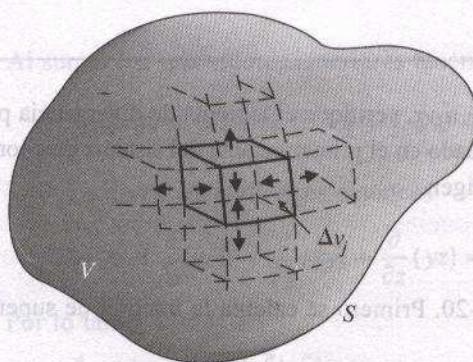


FIGURA 2-19 Volumen subdividido para la demostración del teorema de la divergencia.

En el caso de un volumen arbitrario V , podemos subdividirlo en muchos, digamos N , volúmenes diferenciales pequeños, de los cuales Δv_j es típico. Este procedimiento se ilustra en la figura 2-19. Combinemos ahora las contribuciones de estos volúmenes diferenciales en ambos lados de la ecuación (2-76), para obtener

$$\lim_{\Delta v_j \rightarrow 0} \left[\sum_{j=1}^N (\nabla \cdot \mathbf{A})_j \Delta v_j \right] = \lim_{\Delta v_j \rightarrow 0} \left[\sum_{j=1}^N \oint_{S_j} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \right]. \quad (2-77)$$

El lado izquierdo de la ecuación (2-77) es, por definición, la integral de volumen de $\nabla \cdot \mathbf{A}$:

$$\lim_{\Delta v_j \rightarrow 0} \left[\sum_{j=1}^N (\nabla \cdot \mathbf{A})_j \Delta v_j \right] = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{A}) dv \quad (2-78)$$

Las integrales de superficie en el lado derecho de la ecuación (2-77) se suman para todas las caras de los elementos de volumen diferencial. Sin embargo, las contribuciones de las superficies internas de elementos adyacentes se cancelan, ya que en una superficie interna común las normales de salida de los elementos adyacentes apuntan en direcciones opuestas. Por lo tanto, la contribución neta del lado derecho de la ecuación (2-77) se debe únicamente a la superficie exterior S que encierra el volumen V ; es decir,

$$\lim_{\Delta v_j \rightarrow 0} \left[\sum_{j=1}^N \oint_{S_j} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \right] = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}. \quad (2-79)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2-78) y (2-79) en la ecuación (2-77) se obtiene el teorema de divergencia de la ecuación (2-75).

El teorema de la divergencia es una identidad importante en el análisis vectorial. *Convierte una integral de volumen de la divergencia de un vector en una integral de superficie cerrada del vector, y viceversa.* La usamos con frecuencia para establecer otros teoremas y relaciones en el electromagnetismo. Queremos destacar que, *aunque por cuestiones de sencillez se usa un signo de integral simple en ambos lados de la ecuación (2-75), las integrales de volumen y superficie representan en realidad integraciones triple y doble, respectivamente.*

EJEMPLO 2-12

Dado $\mathbf{A} = \mathbf{a}_x x^2 + \mathbf{a}_y xy + \mathbf{a}_z yz$, verifique el teorema de divergencia para un cubo de lado unidad. El cubo está situado en el primer octante del sistema de coordenadas cartesianas, con un vértice en el origen.

SOLUCIÓN

Remítase a la figura 2-20. Primero se calcula la integral de superficie en las seis caras del cubo.

1. Cara anterior: $x = 1$, $d\mathbf{s} = \mathbf{a}_x dy dz$;

$$\int_{\substack{\text{cara} \\ \text{anterior}}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 \int_0^1 dy dz = 1.$$

2. Cara posterior: $x = 0$, $d\mathbf{s} = -\mathbf{a}_x dy dz$;

$$\int_{\substack{\text{cara} \\ \text{posterior}}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

3. Cara izquierda: $y = 0$, $d\mathbf{s} = -\mathbf{a}_y dx dz$;

$$\int_{\substack{\text{cara} \\ \text{izquierda}}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

4. Cara derecha: $y = 1$, $d\mathbf{s} = \mathbf{a}_y dx dz$;

$$\int_{\substack{\text{cara} \\ \text{derecha}}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 \int_0^1 z dx dz = \frac{1}{2}.$$

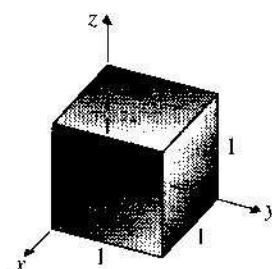
5. Cara superior: $z = 1$, $d\mathbf{s} = \mathbf{a}_z dx dy$;

$$\int_{\substack{\text{cara} \\ \text{superior}}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 \int_0^1 y dx dy = \frac{1}{2}.$$

6. Cara inferior: $z = 0$, $d\mathbf{s} = -\mathbf{a}_z dx dy$;

$$\int_{\substack{\text{cara} \\ \text{inferior}}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

FIGURA 2-20 Cubo unidad (ejemplo 2-12).



Al sumar los seis valores anteriores tenemos

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = 1 + 0 + 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 = 2. \quad (2-80)$$

La divergencia de \mathbf{A} es entonces

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(xy) + \frac{\partial}{\partial z}(yz) = 3x + y.$$

Por lo tanto,

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dv = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (3x + y) dx dy dz = 2, \quad (2-81)$$

lo que es igual al resultado de la integral de superficie cerrada de la ecuación (2-80). Por consiguiente, el teorema de la divergencia ha sido verificado.

EJEMPLO 2-13

Dado $\mathbf{F} = a_R k R$, determine si el teorema de la divergencia es válido para la capa encerrada por las superficies esféricas en $R = R_1$ y $R = R_2$ ($R_2 > R_1$), con centro en el origen, como se ilustra en la figura 2-21.

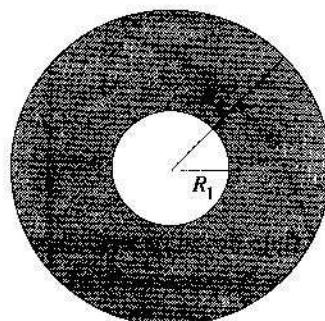
SOLUCIÓN

En este ejemplo, la región especificada tiene dos superficies, en $R = R_1$ y $R = R_2$.

En la superficie exterior: $R = R_2$, $d\mathbf{s} = a_R R_2^2 \sin \theta d\theta d\phi$;

$$\int_{\text{superficie exterior}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (kR_2) R_2^2 \sin \theta d\theta d\phi = 4\pi k R_2^3.$$

FIGURA 2-21 Región de una capa esférica (ejemplo 2-13).



En la superficie interior: $R = R_1$, $d\mathbf{s} = -\mathbf{a}_R R_1^2 \sin \theta d\theta d\phi$:

$$\int_{\text{superficie interior}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = - \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (kR_1) R_1^2 \sin \theta d\theta d\phi = -4\pi k R_1^3.$$

En realidad, puesto que en ambos casos el integrando es independiente de θ o ϕ , la integral de una constante en una superficie esférica es simplemente la constante multiplicada por el área de la superficie ($4\pi R_2^2$ para la superficie externa y $4\pi R_1^2$ para la superficie interna), y no se requiere la integración. Al sumar los dos resultados obtenemos

$$\oint_s \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 4\pi k(R_2^3 - R_1^3). \quad (2-82)$$

Para encontrar la integral de volumen, primero determinamos $\nabla \cdot \mathbf{F}$ para una \mathbf{F} que sólo tenga una componente F_R . A partir de la ecuación (2-73) tenemos

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 F_R) = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (kR^3) = 3k.$$

Puesto que $\nabla \cdot \mathbf{F}$ es una constante, su integral de volumen es igual al producto de la constante por el volumen. El volumen de la capa entre las dos superficies esféricas con radios R_1 y R_2 es $4\pi(R_2^3 - R_1^3)/3$. Por consiguiente,

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dv = (\nabla \cdot \mathbf{F})V = 4\pi k(R_2^3 - R_1^3), \quad (2-83)$$

que es el mismo resultado de la ecuación (2-82).

Este ejemplo muestra que el teorema de la divergencia es válido incluso si el volumen tiene agujeros; es decir, aunque el volumen esté encerrado por una superficie con conexiones múltiples.

EJERCICIO 2.12 Dado un campo vectorial $\mathbf{A} = \mathbf{a}_r r + \mathbf{a}_z z$,

- encuentre el flujo de salida total a través de un cilindro circular alrededor del eje z con radio 2 y altura 4 centrado en el origen.
- repita (a) para el mismo cilindro con la base coincidiendo con el plano xy .
- encuentre $\nabla \cdot \mathbf{A}$ y verifique el teorema de la divergencia.

RESPUESTA: (a) 48π , (c) 3.

2-8 ROTACIONAL DE UN CAMPO VECTORIAL

Hay otro tipo de fuente, llamada *fuente de vórtice*, que ocasiona la circulación de un campo vectorial a su alrededor. La *circulación neta* (o simplemente *circulación*) de un campo vectorial alrededor de una *trayectoria cerrada* se define como la integral de línea escalar del vector a lo largo de la trayectoria. Tenemos

$$\text{Circulación de } \mathbf{A} \text{ alrededor del contorno } C \triangleq \oint_C \mathbf{A} \cdot d\ell. \quad (2-84)$$

La ecuación (2-87) es una definición matemática. El significado físico de la circulación depende de qué tipo de campo representa el vector \mathbf{A} . Si \mathbf{A} es una fuerza que actúa sobre un objeto, su circulación será el trabajo realizado por la fuerza para mover el objeto una vez alrededor del contorno; si \mathbf{A} representa una intensidad de campo eléctrico, la circulación será una fuerza electromotriz alrededor de la trayectoria cerrada. El fenómeno familiar del agua que gira al salir por el desagüe de un lavabo es un ejemplo de un *sumidero vórtice* que ocasiona una circulación de la velocidad del fluido. Puede existir una circulación de \mathbf{A} aunque $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ (cuando no hay fuente de flujo).

EJEMPLO 2-14

Dado un campo vectorial $\mathbf{F} = \mathbf{a}_x xy - \mathbf{a}_y 2x$, encuentre su circulación alrededor de la trayectoria $OABO$ mostrada en la figura 2-22.

SOLUCIÓN

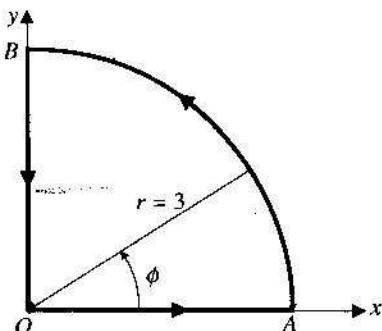
Dividamos la integral de circulación en tres partes:

$$\oint_{OABO} \mathbf{F} \cdot d\ell = \int_O^A \mathbf{F} \cdot d\ell + \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\ell + \int_B^O \mathbf{F} \cdot d\ell.$$

A lo largo de la trayectoria OA : $y = 0$, $\mathbf{F} = -\mathbf{a}_y 2x$, $d\ell = \mathbf{a}_x dx$, $\mathbf{F} \cdot d\ell = 0$.

$$\int_O^A \mathbf{F} \cdot d\ell = 0.$$

FIGURA 2-22 Trayectoria para la integral de línea (ejemplos 2-14 y 2-16).



A lo largo de la trayectoria BO : $x = 0$, $\mathbf{F} = \mathbf{0}$. $\int_B^O \mathbf{F} \cdot d\ell = 0$.

A lo largo de la trayectoria AB : $d\ell = \mathbf{a}_x dx + \mathbf{a}_y dy$ (véase la Ec. 2-23).

$$\mathbf{F} \cdot d\ell = xy dx - 2x dy.$$

La ecuación del cuarto de círculo es $x^2 + y^2 = 9$ ($0 \leq x, y \leq 3$). Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\ell &= \int_3^0 x \sqrt{9 - x^2} dx - 2 \int_0^3 \sqrt{9 - y^2} dy \\ &= -\frac{1}{3}(9 - x^2)^{3/2} \Big|_3^0 - \left[y \sqrt{9 - y^2} + 9 \operatorname{sen}^{-1} \frac{y}{3} \right]_0^3 \\ &= -9 \left(1 + \frac{\pi}{2} \right).\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\oint_{OABO} \mathbf{F} \cdot d\ell = -9 \left(1 + \frac{\pi}{2} \right).$$

- **EJERCICIO 2.13** Encuentre la circulación en el sentido de las agujas del reloj del campo vectorial \mathbf{F} presentado en el ejemplo 2-14, alrededor de una trayectoria cuadrada en el plano xy , centrada en el origen y con cuatro unidades en cada lado ($-2 \leq x \leq 2$ y $-2 \leq y \leq 2$).

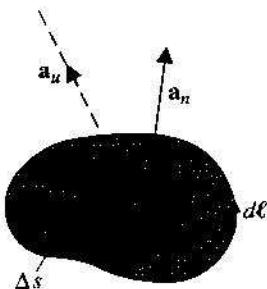
RESPUESTA: 32.

Definición
matemática de un
campo vectorial \mathbf{A}

La circulación se definió en la ecuación (2-84) como una integral de línea de un producto punto, de manera que su valor depende de la orientación del contorno C relativa al vector \mathbf{A} . Para definir una función puntual, que es una medida de la fuerza de la fuente de vórtice, C debe ser muy pequeño y hay que orientarlo de manera que la circulación sea máxima. Definimos[†]

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{A} &\equiv \nabla \times \mathbf{A} \\ &\triangleq \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s} \left[\mathbf{a}_n \oint_C \mathbf{A} \cdot d\ell \right]_{\max}.\end{aligned}$$

[†] En algunos libros, el rotacional de \mathbf{A} se conoce como *curl* de \mathbf{A} y se escribe $\operatorname{curl} \mathbf{A}$. $\nabla \times \mathbf{A}$ se lee “del cruz \mathbf{A} ”.

FIGURA 2-23 Relación entre a_n y $d\ell$ al definir el rotacional.

Definición física de $\nabla \times A$, una medida de la fuerza de la fuente de vórtice de A

En forma textual, la ecuación (2-85) establece que *el rotacional de un campo vectorial A, denotado por $\text{rot } A$ o $\nabla \times A$, es un vector cuya magnitud es la circulación neta máxima de A por unidad de área conforme el área tiende a cero y cuya dirección es la dirección de la normal al área cuando ésta está orientada de manera que la circulación neta sea máxima*. Puesto que la normal a un área puede apuntar en dos direcciones opuestas, seguimos la regla de la mano derecha: cuando los dedos de la mano derecha siguen la dirección de $d\ell$, el pulgar apunta en la dirección a_n ; esto se ilustra en la figura 2-23. El rotacional de A es una función puntual vectorial. Su componente en cualquier otra dirección a_u es $a_u \cdot (\nabla \times A)$ y puede determinarse a partir de la circulación por unidad de área normal a a_u conforme el área se aproxima a cero.

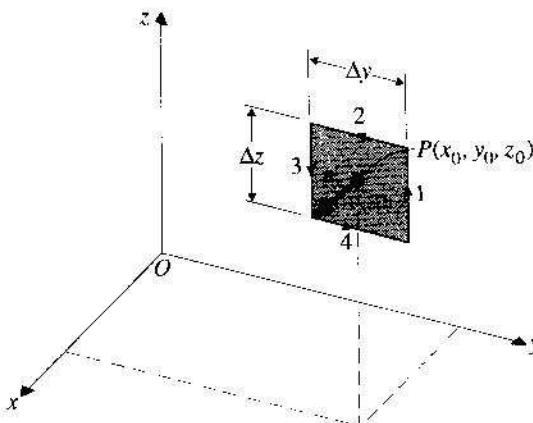
$$(\nabla \times A)_u = a_u \cdot (\nabla \times A) = \lim_{\Delta s_u \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s_u} \left(\oint_{C_u} A \cdot d\ell \right), \quad (2-86)$$

donde la dirección de la integración de línea alrededor del contorno C_u que limita el área Δs_u y la dirección a_u siguen la regla de la mano derecha.

Usamos ahora la ecuación (2-86) para hallar las tres componentes de $\nabla \times A$ en coordenadas cartesianas. Remítase a la figura 2-24, donde se muestra un área rectangular diferencial paralelo al plano yz con lados Δy y Δz dibujados alrededor de un punto genérico $P(x_0, y_0, z_0)$. Tenemos $a_u = a_x$ y $\Delta s_u = \Delta y \Delta z$ y el contorno C_u consiste en los cuatro lados 1, 2, 3 y 4. De esta manera,

$$(\nabla \times A)_x = \lim_{\Delta y \Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta y \Delta z} \left(\oint_{\substack{\text{lados} \\ 1, 2, 3, 4}} A \cdot d\ell \right). \quad (2-87)$$

En coordenadas cartesianas, $A = a_x A_x + a_y A_y + a_z A_z$. Las contribuciones de los cuatro lados a la integral de línea son las siguientes:

FIGURA 2-24 Determinación de $(\nabla \times \mathbf{A})_x$

$$\text{Lado 1: } d\ell = \mathbf{a}_z \Delta z, \mathbf{A} \cdot d\ell = A_z \left(x_0, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0 \right) \Delta z,$$

donde $A_z \left(x_0, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0 \right)$ puede desarrollarse en serie de Taylor:

$$\begin{aligned} A_z \left(x_0, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0 \right) \\ = A_z(x_0, y_0, z_0) + \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial A_z}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} + \text{T.G.S.}, \end{aligned} \quad (2-88)$$

donde T.G.S. (términos de grado superior) contiene los factores $(\Delta y)^2$, $(\Delta y)^3$, etcétera.

De esta manera,

$$\int_{\text{lado 1}} \mathbf{A} \cdot d\ell = \left\{ A_z(x_0, y_0, z_0) + \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial A_z}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} + \text{T.G.S.} \right\} \Delta z. \quad (2-89)$$

$$\text{Lado 3: } d\ell = -\mathbf{a}_z \Delta z, \mathbf{A} \cdot d\ell = A_z \left(x_0, y_0 - \frac{\Delta y}{2}, z_0 \right) \Delta z,$$

donde

$$A_z \left(x_0, y_0 - \frac{\Delta y}{2}, z_0 \right) = A_z(x_0, y_0, z_0) - \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial A_z}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} + \text{T.G.S.};$$

(2-90)

$$\int_{\text{lados } 3} \mathbf{A} \cdot d\ell = \left\{ A_z(x_0, y_0, z_0) - \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial A_z}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} + \text{T.G.S.} \right\} (-\Delta z). \quad (2-91)$$

Al combinar las ecuaciones (2-89) y (2-91) tenemos

$$\int_{\text{lados } 1 \text{ y } 3} \mathbf{A} \cdot d\ell = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} + \text{T.G.S.} \right) \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} \Delta y \Delta z. \quad (2-92)$$

Los T.G.S. de la ecuación (2-92) aún contienen potencias de Δy . De forma similar, puede verse que

$$\int_{\text{lados } 2 \text{ y } 4} \mathbf{A} \cdot d\ell = \left(-\frac{\partial A_y}{\partial z} + \text{T.G.S.} \right) \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} \Delta y \Delta z. \quad (2-93)$$

Si sustituimos las ecuaciones (2-92) y (2-93) en la ecuación (2-87) y observamos que los términos de grado superior tienden a cero cuando Δx y $\Delta y \rightarrow 0$, obtenemos la componente en x de $\nabla \times \mathbf{A}$:

$$(\nabla \times \mathbf{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}. \quad (2-94)$$

Una revisión más cuidadosa de la ecuación (2-94) revela un orden cíclico de x , y y z , el cual nos permite escribir las componentes en y y z de $\nabla \times \mathbf{A}$. La expresión completa del rotacional de \mathbf{A} en coordenadas cartesianas es

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{a}_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \mathbf{a}_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \mathbf{a}_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right).}$$

(2-95)

un escalar. Le será fácil recordar la ecuación (2-95) si la organiza en forma de determinante al igual que en el producto cruz de la ecuación (2-27).

Expresión de $\nabla \times \mathbf{A}$
en coordenadas
cartesianas

Otra forma de $\nabla \times \mathbf{A}$
en coordenadas
cartesianas

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}.} \quad (2-96)$$

Para la derivación de $\nabla \times \mathbf{A}$ en otros sistemas de coordenadas se sigue el mismo procedimiento, pero los pasos son más complejos. La expresión de $\nabla \times \mathbf{A}$ en un sistema general de coordenadas ortogonales curvilíneas (u_1, u_2, u_3) es:

Expresión de $\nabla \times \mathbf{A}$
en un sistema
general de
coordenadas
ortogonales

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{u_1} h_1 & \mathbf{a}_{u_2} h_2 & \mathbf{a}_{u_3} h_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}. \quad (2-97)$$

Las expresiones de $\nabla \times \mathbf{A}$ en coordenadas cilíndricas y esféricas pueden obtenerse fácilmente a partir de la ecuación (2-97) usando los valores apropiados de u_1 , u_2 y u_3 y sus coeficientes métricos h_1 , h_2 , h_3 listados en la tabla 2-1. Estas expresiones se presentan en el Apéndice C.

EJEMPLO 2-15

Demuestre que $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ si

- a) $\mathbf{A} = \mathbf{a}_\phi(k/r)$ en coordenadas cilíndricas, donde k es una constante, o
- b) $\mathbf{A} = \mathbf{a}_R f(R)$ en coordenadas esféricas, donde $f(R)$ es cualquier función de la distancia radial R .

SOLUCIÓN

- a) En las coordenadas esféricas se aplica lo siguiente: $(u_1, u_2, u_3) = (r, \theta, \phi)$; $h_1 = 1$, $h_2 = r$ y $h_3 = 1$. A partir de la ecuación (2-97) tenemos

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_r & \mathbf{a}_\theta r & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_r & r A_\theta & A_z \end{vmatrix}, \quad (2-98)$$

que para la \mathbf{A} especificada, da

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_r & \mathbf{a}_\theta r & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & k & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

- b) En las coordenadas esféricas se aplica lo siguiente: $(u_1, u_2, u_3) = (R, \theta, \phi)$; $h_1 = 1$, $h_2 = R$ y $h_3 = R \operatorname{sen} \theta$. Por lo tanto,

Expresión de $\nabla \times \mathbf{A}$
en coordenadas
cilíndricas

Expresión de $\nabla \times \mathbf{A}$
en coordenadas
esféricas

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{R^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_R & \mathbf{a}_\theta R & \mathbf{a}_\phi R \sin \theta \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_R & RA_\theta & (R \sin \theta) A_\phi \end{vmatrix}, \quad (2-99)$$

y, para la \mathbf{A} especificada,

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{R^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_R & \mathbf{a}_\theta R & \mathbf{a}_\phi R \sin \theta \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ f(R) & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Un campo vectorial cuyo rotacional es nulo se denomina **campo irrotacional** o **conservativo**. Por consiguiente, los dos tipos de campos presentados en este ejemplo son conservativos. En el capítulo siguiente veremos que un campo electrostático es conservativo.

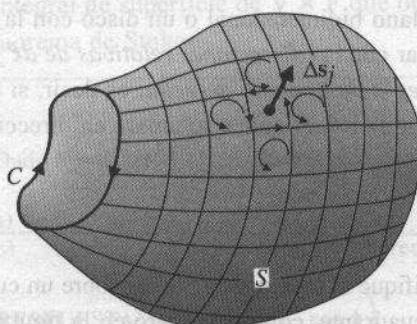
2-9 TEOREMA DE STOKES

En el caso de un área diferencial muy pequeña Δs_j , limitada por un contorno c_j , la definición de $\nabla \times \mathbf{A}$ en la ecuación (2-86) nos lleva a

$$(\nabla \times \mathbf{A})_j \cdot (\Delta s_j) = \oint_{c_j} \mathbf{A} \cdot d\ell. \quad (2-100)$$

Para obtener la ecuación (2-100) hemos realizado el producto punto en ambos lados de la ecuación (2-85) por $\mathbf{a}_n \Delta s_j$ o Δs_j . En el caso de una superficie arbitraria S , podemos subdividirla en varias, digamos N , áreas diferenciales pequeñas. En la figura 2-25 se muestra este esquema con Δs_j como elemento diferencial típico. El lado izquierdo de

FIGURA 2-25 Área subdividida para la demostración del teorema de Stokes.



la ecuación (2-100) es el flujo del vector $\nabla \times \mathbf{A}$ por el área Δs_j . Al sumar la contribución al flujo de todas las áreas diferenciales tenemos

$$\lim_{\Delta s_j \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N (\nabla \times \mathbf{A})_j \cdot (\Delta s_j) = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s}. \quad (2-101)$$

Sumamos las integrales de línea alrededor de los contornos de todos los elementos superficiales representados por el lado derecho de la ecuación (2-100). Puesto que la parte común de los contornos de dos elementos adyacentes es recorrida en direcciones opuestas por dos contornos, la contribución neta a la integral de línea total de todas las partes comunes en el interior es cero y después de la sumatoria sólo queda la contribución del contorno exterior C que limita toda el área S :

$$\lim_{\Delta s_j \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N \left(\oint_{c_j} \mathbf{A} \cdot d\ell \right) = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\ell. \quad (2-102)$$

Al combinar las ecuaciones (2-101) y (2-102) obtenemos el **teorema de Stokes**:

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\ell,$$

(2-103)

Teorema de Stokes

el cual establece que *la integral de superficie del rotacional de un campo vectorial sobre una superficie abierta es igual a la integral de línea cerrada del vector a lo largo del contorno que limita la superficie*.

El teorema de Stokes convierte una integral de superficie del rotacional de un vector en una integral de línea del vector, y viceversa. El teorema de Stokes, al igual que el teorema de la divergencia, es una identidad importante en el análisis vectorial y lo usaremos con frecuencia para establecer otros teoremas y relaciones del electromagnetismo.

Si aplicamos la integral de superficie de $\nabla \times \mathbf{A}$ a una superficie cerrada, no habrá un contorno externo que limite la superficie, y la ecuación (2-103) nos indica que

$$\oint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (2-104)$$

para cualquier superficie cerrada S . La geometría arbitraria de la figura 2-25 se ha elegido a propósito para destacar el hecho de que una aplicación no trivial del teorema de Stokes siempre implica una *superficie abierta con un borde*. La superficie abierta más sencilla sería un plano bidimensional o un disco con la circunferencia como contorno. Debemos recordar que las *direcciones relativas de $d\ell$ y $d\mathbf{s}$* (su dirección denotada por \mathbf{a}_n) *siguen la regla de la mano derecha*; es decir, si los dedos de la mano derecha siguen la dirección de $d\ell$, el pulgar apuntará en dirección de \mathbf{a}_n .

EJEMPLO 2-16

Dado $\mathbf{F} = \mathbf{a}_x xy - \mathbf{a}_y 2x$, verifique el teorema de Stokes sobre un cuarto de disco circular con radio 3 en el primer cuadrante, como se ilustró en la figura 2-22.

SOLUCIÓN

Usamos la ecuación (2-96) para encontrar $\nabla \times \mathbf{F}$ en coordenadas cartesianas.

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & -2x & 0 \end{vmatrix} = -\mathbf{a}_z(2+x).$$

Para la geometría indicada y la dirección designada de $d\ell$, $d\mathbf{s} = \mathbf{a}_z ds = \mathbf{a}_z dx dy$. Tenemos entonces

$$\begin{aligned} \int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{s} &= \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot (\mathbf{a}_z dx dy) \\ &= \int_0^3 \left[\int_0^{\sqrt{9-y^2}} -(2+x) dx \right] dy \\ &= - \int_0^3 [2\sqrt{9-y^2} + \frac{1}{2}(9-y^2)] dy \\ &= - \left[y\sqrt{9-y^2} + 9 \operatorname{sen}^{-1} \frac{y}{3} + \frac{9}{2}y - \frac{y^3}{6} \right]_0^3 \\ &= -9 \left(1 + \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

Es *importante* usar los límites apropiados para las dos variables de integración. Podemos intercambiar el orden de la integración como

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{s} = \int_0^3 \left[\int_0^{\sqrt{9-x^2}} -(2+x) dy \right] dx$$

y obtener el mismo resultado; sin embargo, sería un error emplear 0 a 3 como intervalo de integración de x y y . (¿Sabe por qué?)

La integral de línea de \mathbf{F} alrededor de la trayectoria $OABO$ del cuarto de disco circular, $\int \mathbf{F} \cdot d\ell$, es la circulación determinada en el ejemplo 2-14, que es igual a la integral de superficie de $\nabla \times \mathbf{F}$ que obtuvimos previamente. Así queda verificado el teorema de Stokes.

■ **EJERCICIO 2.14** Dado $\mathbf{F} = \mathbf{a}_r \operatorname{sen} \phi + \mathbf{a}_\theta 3 \cos \phi$ y la región de cuarto de círculo presentada en la figura 2-22,

- determine $\oint_{OABO} \mathbf{F} \cdot d\ell$, y
- calcule $\nabla \times \mathbf{F}$ y verifique el teorema de Stokes

RESPUESTA: (a) 6, (b) $\mathbf{a}_z \left(\frac{2}{r} \cos \phi \right)$

2-10 DOS IDENTIDADES NULAS

En el estudio del electromagnetismo son muy importantes dos identidades que implican repetidas operaciones del operador *del*, sobre todo al introducir las funciones de potencial. Analizaremos estas identidades a continuación.

2-10.1 IDENTIDAD I

$$\nabla \times (\nabla V) = 0$$

No existen gradientes que hagan esto (2-105)

Una importante identidad nula

De forma textual, *el rotacional del gradiente de cualquier campo escalar es idénticamente cero*. (La existencia de V y sus primeras derivadas en todos los puntos está implícita en esta identidad.)

La ecuación (2-105) puede demostrarse fácilmente en coordenadas cartesianas si usamos la ecuación (2-56) para ∇ y realizamos las operaciones indicadas. En términos generales, si se toma la integral de superficie de $\nabla \times (\nabla V)$ sobre cualquier superficie, el resultado es igual a la integral de línea de ∇V (o *circulación* de ∇V) a lo largo de la trayectoria cerrada que limita la superficie, como lo establece el teorema de Stokes:

$$\int_S [\nabla \times (\nabla V)] \cdot d\mathbf{s} = \oint_C (\nabla V) \cdot d\mathbf{r}. \quad (2-106)$$

Sin embargo, con base en la ecuación (2-51),

$$\oint_C (\nabla V) \cdot d\mathbf{r} = \oint_C dV = 0. \quad (2-107)$$

La combinación de las ecuaciones (2-106) y (2-107) establece que la integral de superficie de $\nabla \times (\nabla V)$ sobre *cualquier* superficie es cero. Por consiguiente, el integrando debe anularse y se obtiene la identidad de la ecuación (2-105). Puesto que en la derivación no se especifica un sistema de coordenadas, la identidad es general e invariable para cualquier sistema de coordenadas.

La identidad I puede enunciarse también como sigue: *Si el rotacional de un campo vectorial es nulo, entonces el campo vectorial puede expresarse como el gradiente de un campo escalar*. Sea \mathbf{E} un campo vectorial. Entonces, si $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, podemos definir un campo escalar V tal que

$$\mathbf{E} = -\nabla V. \quad (2-108)$$

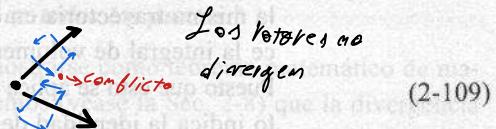
El signo negativo no tiene importancia en lo que se refiere a la identidad I. (Se incluye en la ecuación (2-108) porque la relación va de acuerdo con una relación básica entre la *intensidad de campo eléctrico* \mathbf{E} y el *potencial escalar eléctrico* V de la electrostática, algo que veremos en el siguiente capítulo. Por el momento no tiene importancia lo que representan \mathbf{E} y V .) A partir de la sección 2-8 sabemos que un campo vectorial cuyo rotacional es nulo es un campo conservativo; por lo tanto, *un campo vectorial irrotacional (conservativo) siempre puede expresarse como el gradiente de un campo escalar*.

■ **EJERCICIO 2.15** Demuestre la identidad de la ecuación (2-105) en coordenadas cartesianas.

2-10.2 IDENTIDAD II

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \equiv 0$$

Otra importante
identidad nula



$$(2-109)$$

De forma textual, *la divergencia del rotacional de cualquier campo vectorial es idénticamente cero*.

Podemos demostrar esta identidad sin hacer referencia a un sistema de coordenadas si tomamos la integral de volumen de $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A})$ en el lado izquierdo. Al aplicar el teorema de la divergencia tenemos

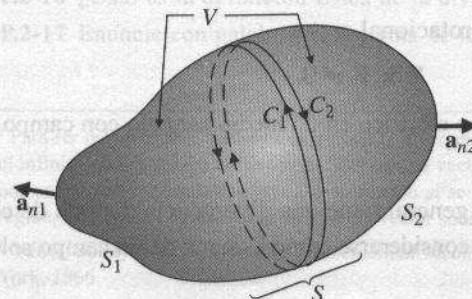
$$\int_V \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dv = \oint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s}. \quad (2-110)$$

Escojamos, por ejemplo, el volumen arbitrario V encerrado por una superficie S , como se ilustra en la figura 2-26. La superficie cerrada S puede dividirse en dos superficies abiertas, S_1 y S_2 , conectadas por una frontera común que se ha dibujado dos veces como C_1 y C_2 . Despues se aplica el teorema de Stokes a la superficie S_1 limitada por C_1 y a la superficie S_2 limitada por C_2 , escribiendo el lado derecho de la ecuación (2-110) como

$$\begin{aligned} \oint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} &= \int_{S_1} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{a}_{n1} ds + \int_{S_2} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{a}_{n2} ds \\ &= \oint_{C_1} \mathbf{A} \cdot d\ell + \oint_{C_2} \mathbf{A} \cdot d\ell. \end{aligned} \quad (2-111)$$

Las normales \mathbf{a}_{n1} y \mathbf{a}_{n2} a las superficies S_1 y S_2 son normales *hacia afuera* y sus relaciones con las direcciones de las trayectorias de C_1 y C_2 siguen la regla de la mano derecha. Puesto que los contornos de C_1 y C_2 de hecho son la misma frontera común

FIGURA 2-26 Volumen arbitrario V encerrado por una superficie S .



entre S_1 y S_2 , las dos integrales de línea en el lado derecho de la ecuación (2-111) siguen la misma trayectoria en direcciones opuestas. Su suma es entonces cero y desaparece la integral de volumen de $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A})$ del lado izquierdo de la ecuación (2-110). Puesto que esto se aplica a cualquier volumen arbitrario, la integral debe ser cero, como lo indica la identidad de la ecuación (2-109).

Otra forma de enunciar la identidad II es como sigue: *Si la divergencia de un campo vectorial es nula, entonces el campo vectorial es solenoideal y puede expresarse como el rotacional de otro campo vectorial.* Sea \mathbf{B} un campo vectorial. Este enunciado alternativo establece que si $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, podemos definir un campo vectorial \mathbf{A} tal que

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad \text{Sólo si: } A = \frac{1}{\mu_0} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \quad \text{(2-112)}$$

■ **EJERCICIO 2.16** Demuestre la identidad de la ecuación (2-109) en coordenadas cartesianas.

2-11 CLASIFICACIÓN DE CAMPOS Y TEOREMA DE HELMHOLTZ

Campo cuya divergencia es nula
↔ campo solenoideal

En secciones anteriores mencionamos que un *campo cuya divergencia es nula es solenoideal* y que *un campo cuyo rotacional es nulo es irrotacional (conservativo)*. Podemos clasificar los campos vectoriales de acuerdo con el hecho de que sean solenoideales o irrotacionales. Un campo vectorial \mathbf{F} es

1. Solenoideal e irrotacional si

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 0 \quad \text{y} \quad \nabla \times \mathbf{F} = 0.$$

EJEMPLO: Un campo eléctrico estático en una región libre de carga.

2. Solenoideal pero no irrotacional si

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 0 \quad \text{y} \quad \nabla \times \mathbf{F} \neq 0.$$

EJEMPLO: Un campo magnético estático en un conductor que transporta corriente.

3. Irrotacional pero no solenoideal si

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0 \quad \text{y} \quad \nabla \cdot \mathbf{F} \neq 0.$$

EJEMPLO: Un campo eléctrico estático en una región con carga.

4. Ni solenoideal ni irrotacional si

$$\nabla \cdot \mathbf{F} \neq 0 \quad \text{y} \quad \nabla \times \mathbf{F} \neq 0.$$

EJEMPLO: Un campo eléctrico en un medio cargado con campo magnético variable con el tiempo.

El campo vectorial más general tiene una divergencia distinta de cero y un rotacional distinto de cero, y puede considerarse como la suma de un campo solenoideal y un campo irrotacional.

Campo cuyo rotacional es nulo
↔ campo irrotacional (conservativo)

Teorema de Helmholtz: *Un campo vectorial está determinado si su divergencia y su rotacional están especificados en todos los puntos.[†]*

Teorema

El teorema de Helmholtz puede demostrarse como teorema matemático de manera general.[†] Para nuestros fines, recordemos (véase la Sec. 2-8) que la divergencia de un vector es una medida de la fuerza de la fuente de flujo y que el rotacional de un vector es una medida de la fuerza de la fuente de vórtice. Cuando están especificadas la fuerza de la fuente de flujo y de la fuente de vórtice, es de esperar que el campo vectorial esté determinado. *Solo hay 2 fuentes: flujo y vórtice*

En los capítulos siguientes nos apoyaremos en el teorema de Helmholtz como elemento básico del desarrollo axiomático del electromagnetismo. Para cada uno de los temas de estudio (campos eléctricos estáticos, campos magnéticos estáticos y campos electromagnéticos variables con el tiempo), enunciaremos los postulados fundamentales (específicaremos la divergencia y el rotacional) de los vectores de campo básicos necesarios para el modelo electromagnético. A partir de los postulados fundamentales se desarrollarán otros teoremas y otras relaciones.

EJERCICIO 2.17

Determine si los campos vectoriales siguientes son irrotacionales, solenoidales, ambos o ninguno.

- $\mathbf{A} = \mathbf{a}_x xy - \mathbf{a}_y y^2 + \mathbf{a}_z xz,$
- $\mathbf{B} = r(\mathbf{a}_r \sin\phi + \mathbf{a}_\theta 2 \cos\phi),$
- $\mathbf{C} = \mathbf{a}_r x - \mathbf{a}_\theta 2y + \mathbf{a}_z z,$
- $\mathbf{D} = \mathbf{a}_r k/R.$

RESPUESTA: (a) ninguno, (b) solenoidal, (c) ambos, (d) irrotacional.

PREGUNTAS DE REPASO

P.2-12 ¿Cuál es la diferencia entre una cantidad escalar y un campo escalar? ¿Entre una cantidad vectorial y un campo vectorial?

P.2-13 ¿Cuál es la definición física del gradiente de un campo escalar?

P.2-14 Expresa la razón de cambio espacial de un escalar en una dirección en términos de su gradiente.

P.2-15 ¿Cuál es la expresión del operador del, ∇ , en coordenadas cartesianas?

P.2-16 ¿Cuál es la definición física de la divergencia de un campo vectorial?

P.2-17 Enuncie con palabras el teorema de la divergencia.

^{*} Para ser más precisos, debemos exigir que la divergencia y el rotacional de un campo vectorial se anulen en el infinito en una región no limitada. Si el campo vectorial está confinado al interior de una región limitada por una superficie, entonces estará determinado si se especifican su divergencia y su rotacional en toda la región, así como la componente normal del vector sobre la superficie limitadora.

[†] Véase, por ejemplo, G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, Sec. 1.15, Academic Press, Nueva York, 1966.

P.2-18 ¿Cuál es la definición física del rotacional de un campo vectorial?

P.2-19 Enuncie con palabras el teorema de Stokes.

P.2-20 ¿Cuál es la diferencia entre un campo irrotacional y un campo solenoidal?

P.2-21 Enuncie con palabras el teorema de Helmholtz.

COMENTARIOS

1. Las reglas básicas del álgebra vectorial (suma, resta, producto punto y producto cruz de vectores) son independientes del sistema de coordenadas.
2. El gradiente de un campo escalar es una función puntual vectorial.
3. La divergencia de un campo vectorial es una función puntual escalar.
4. El rotacional de un campo vectorial es una función puntual vectorial.
5. No olvide dibujar un pequeño círculo en el signo de integración (\oint) al escribir una integral de línea cerrada o una integral de superficie sobre toda la superficie que encierra una región.
6. Las dos identidades nulas presentadas en las ecuaciones (2-105) y (2-109) y sus implicaciones son las bases para definir funciones de potencial en capítulos posteriores. Aprenda bien estas identidades.

RESUMEN

El análisis vectorial es una herramienta matemática esencial en el electromagnetismo. Proporciona una forma concisa de representar y expresar las relaciones de diversas cantidades en el modelo electromagnético. En este capítulo

- repasamos las reglas básicas de la suma y la resta de vectores y de los productos de vectores;
- explicamos las propiedades de los sistemas de coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas;
- presentamos el operador diferencial *del* (∇) y definimos el gradiente de un campo escalar, y la divergencia y el rotacional de un campo vectorial;
- presentamos el teorema de la divergencia que convierte la integral de volumen de la divergencia de un campo vectorial en una integral de superficie cerrada del campo vectorial, y viceversa;
- presentamos el teorema de Stokes que transforma la integral de superficie del rotacional de un campo vectorial en la integral de línea cerrada de un campo vectorial, y viceversa;
- introdujimos dos identidades nulas importantes de los campos vectoriales, y

- analizamos la clasificación de vectores y presentamos el teorema de Helmholtz, que usaremos como elemento básico en el desarrollo axiomático de los diversos temas del electromagnetismo.

PROBLEMAS

P.2-1 Un rombo es un paralelogramo equilátero. Denote dos lados vecinos del rombo con los vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} .

- Verifique que las dos diagonales sean $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ y $\mathbf{A} - \mathbf{B}$.
- Demuestre que las diagonales son perpendiculares entre sí.

P.2-2 Si los tres lados de un triángulo arbitrario se denotan con los vectores \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{C} en el sentido de las agujas del reloj o en sentido contrario, entonces la ecuación $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = 0$ es válida. Demuestre la ley de los senos.

SUGERENCIA: Obtenga el producto cruz de la ecuación separadamente por \mathbf{A} y por \mathbf{B} y examine las relaciones de magnitud de los productos.

P.2-3 Dados los tres vectores \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{C} siguientes:

$$\mathbf{A} = a_x 6 + a_y 2 - a_z 3,$$

$$\mathbf{B} = a_x 4 - a_y 6 + a_z 12,$$

$$\mathbf{C} = a_x 5 - a_z 2,$$

calcule

- a_B ,
- $|\mathbf{B} - \mathbf{A}|$,
- la componente de \mathbf{A} en la dirección de \mathbf{B} ,
- $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$,
- la componente de \mathbf{B} en la dirección de \mathbf{A} ,
- θ_{AB} ,
- $\mathbf{A} \times \mathbf{C}$, y
- $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ y $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$.

P.2-4 Los vectores unitarios \mathbf{a}_A y \mathbf{a}_B denotan las direcciones de los vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} en el plano xy que forman ángulos α y β , respectivamente, con el eje x .

- Obtenga una fórmula para desarrollar el coseno de la diferencia de dos ángulos, $\cos(\alpha - \beta)$ realizando el producto escalar $\mathbf{a}_A \cdot \mathbf{a}_B$.
- Obtenga una fórmula para $\sin(\alpha - \beta)$ realizando el producto vectorial $\mathbf{a}_B \times \mathbf{a}_A$.

✓ **P.2-5** Los tres vértices de un triángulo rectángulo están en $P_1(1, 0, 2)$, $P_2(-3, 1, 5)$ y $P_3(3, -4, 6)$.

- Determine cuál de los vértices corresponde a un ángulo recto.
- Encuentre el área del triángulo.

P.2-6 Dados dos puntos $P_1(-2, 0, 3)$ y $P_2(0, 4, -1)$, encuentre

- la longitud de la línea que une P_1 y P_2 y
- la distancia perpendicular desde el punto $P_3(3, 1, 3)$ hasta la línea.

P.2-7 Dado el vector $\mathbf{A} = \mathbf{a}_x 5 - \mathbf{a}_y 2 + \mathbf{a}_z$, encuentre la expresión de

- un vector unitario \mathbf{a}_B tal que $\mathbf{a}_B \parallel \mathbf{A}$ y
- un vector unitario \mathbf{a}_C en el plano xy tal que $\mathbf{a}_C \perp \mathbf{A}$.

P.2-8 Descomponga el vector $\mathbf{A} = \mathbf{a}_x 2 - \mathbf{a}_y 5 + \mathbf{a}_z 3$ en dos componentes, \mathbf{A}_1 y \mathbf{A}_2 , que sean respectivamente perpendicular y paralela a otro vector $\mathbf{B} = -\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y 4$.

P.2-9 La ecuación (2-15) del ejemplo 2-2 describe los *productos escalares triples* de tres vectores \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{C} . Hay otro tipo importante de producto de tres vectores: el *producto vectorial triple*, $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$. Demuestre la siguiente relación desarrollando en coordenadas cartesianas:

$$\boxed{\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}).} \quad (2-113)$$

La ecuación (2-113) se conoce como *regla "BAC-CAB"*.

P.2-10 Encuentre la componente del vector $\mathbf{A} = \mathbf{a}_x z - \mathbf{a}_z x$ en el punto $P_1(-1, 0, -2)$ que esté dirigida hacia el punto $P_2(\sqrt{3}, 150^\circ, 1)$.

P.2-11 La posición de un punto en coordenadas cilíndricas está indicada por $(3, 4\pi/3, -4)$. Especifique la situación del punto

- en coordenadas cartesianas, y
- en coordenadas esféricas.

P.2-12 Calcule los resultados de los siguientes productos de vectores unitarios:

- $\mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_x$,
- $\mathbf{a}_R \cdot \mathbf{a}_y$,
- $\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_R$,
- $\mathbf{a}_\phi \times \mathbf{a}_x$,
- $\mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_R$,
- $\mathbf{a}_\theta \times \mathbf{a}_z$.

P.2-13 Exprese la componente r, A_r , de un vector \mathbf{A} en (r_1, ϕ_1, z_1)

- en función de A_x y A_y en coordenadas cartesianas, y
- en función de A_R y A_θ en coordenadas esféricas.

P.2-14 Exprese la componente θ, E_θ , de un vector \mathbf{E} en (R_1, θ_1, ϕ_1)

- en función de E_x , E_y y E_z en coordenadas cartesianas, y
- en función de E_r y E_z en coordenadas cilíndricas.

P.2-15 Dado un campo vectorial en coordenadas esféricas $\mathbf{F} = \mathbf{a}_R(12/R^2)$,

- encuentre F y F_y en el punto $P(-2, -4, 4)$ y

- b) encuentre el ángulo que forma \mathbf{F} con el vector $\mathbf{A} = \mathbf{a}_x 2 - \mathbf{a}_y 3 - \mathbf{a}_z 6$ en P .
- P.2-16** Dado un campo vectorial $\mathbf{F} = \mathbf{a}_x y + \mathbf{a}_y x$, calcule la integral $\int \mathbf{F} \cdot d\ell$ desde $P_1(2, 1, -1)$ hasta $P_2(8, 2, -1)$
- a lo largo de una línea recta que une los dos puntos, y
 - a lo largo de una parábola $x = 2y^2$.
- ¿ \mathbf{F} es un campo conservativo? Explique.
- P.2-17** Denote con \mathbf{R} el vector de posición de un punto $P(x, y, z)$. Determine $\nabla (1/R)$
- en coordenadas cartesianas, y
 - en coordenadas esféricas.
- P.2-18** Dado el campo escalar $V = 2xy - yz + xz$,
- determine el vector que representa la dirección y la magnitud de la razón de incremento máxima de V en el punto $P(2, -1, 0)$, y
 - determine la razón de incremento de V en el punto P en la dirección hacia el punto $Q(0, 2, 6)$.
- P.2-19** En un sistema de coordenadas curvilíneas, la diferenciación de un vector base puede producir un nuevo vector en otra dirección.
- Determine $\partial \mathbf{a}_r / \partial \phi$ y $\partial \mathbf{a}_\theta / \partial \phi$ en coordenadas cilíndricas.
 - Use los resultados de (a) para encontrar la fórmula de $\nabla \cdot \mathbf{A}$ en coordenadas cilíndricas, usando las ecuaciones (2-57) y (2-31).
- P.2-20** Calcule la divergencia de los siguientes campos radiales:
- $f_1(\mathbf{R}) = \mathbf{a}_R R^n$,
 - $f_2(\mathbf{R}) = \mathbf{a}_R k/R^2$, donde k es una constante.
- P.2-21** Dado un campo vectorial $\mathbf{F} = \mathbf{a}_x xy + \mathbf{a}_y yz + \mathbf{a}_z zx$,
- calcule el flujo de salida total a través de la superficie de un cubo unidad en el primer octante con un vértice en el origen, y
 - encuentre $\nabla \cdot \mathbf{F}$ y verifique el teorema de la divergencia.
- P.2-22** Para una función vectorial $\mathbf{A} = \mathbf{a}_r r^2 + \mathbf{a}_z 2z$, verifique el teorema de la divergencia para la región cilíndrica circular encerrada por $r = 5$, $z = 0$ y $z = 4$.
- P.2-23** Para una función vectorial $\mathbf{A} = \mathbf{a}_z z$,
- calcule $\oint \mathbf{A} \cdot ds$ sobre la superficie de una región semiesférica que es la mitad superior de una esfera de radio 3 centrada en el origen, con la base plana coincidente con el plano xy ,
 - encuentre $\nabla \cdot \mathbf{A}$, y
 - verifique el teorema de la divergencia.
- P.2-24** Un campo vectorial $\mathbf{D} = \mathbf{a}_R (\cos^2 \phi)/R^3$ existe en la región comprendida entre dos capas esféricas definidas por $R = 2$ y $R = 3$. Calcule
- $\oint \mathbf{D} \cdot ds$, y
 - $\int \nabla \cdot \mathbf{D} dv$.

P.2-25 Para una función escalar f y una función vectorial \mathbf{A} , demuestre que

$$\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla f \quad (2-114)$$

en coordenadas cartesianas.

P.2-26 Suponga un campo vectorial $\mathbf{A} = \mathbf{a}_x(2x^2 + y^2) + \mathbf{a}_y(xy - y^2)$.

- Calcule $\oint \mathbf{A} \cdot d\ell$ a lo largo del contorno triangular ilustrado en la figura 2-27.
- Calcule $\oint (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot ds$ sobre el área triangular.
- ¿Puede expresarse \mathbf{A} como el gradiente de un escalar? Explique.

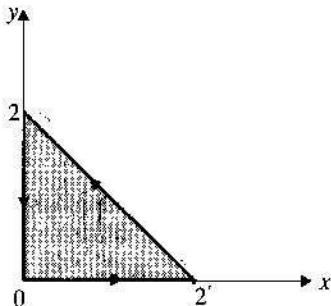


FIGURA 2-27 Gráfica para el problema P.2-26.

P.2-27 Suponga una función vectorial $\mathbf{F} = \mathbf{a}_r 5r \sin \phi + \mathbf{a}_\theta r^2 \cos \phi$.

- Calcule $\oint \mathbf{F} \cdot d\ell$ a lo largo del contorno $ABCDA$ en la dirección indicada en la figura 2-28.
- Calcule $\nabla \times \mathbf{F}$.
- Calcule $\int (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot ds$ sobre el área sombreada y compare el resultado con el que obtuvo en la parte (a).

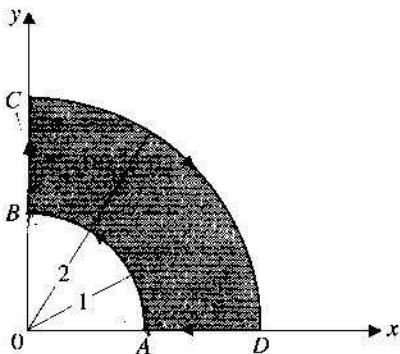


FIGURA 2-28 Gráfica para el problema P.2-27.

P.2-28 Dada una función vectorial $\mathbf{A} = \mathbf{a}_\phi 3 \operatorname{sen}(\phi/2)$, verifique el teorema de Stokes sobre la superficie de una semiesfera de radio 4 y su borde circular.

P.2-29 Para una función escalar f y una función vectorial \mathbf{G} , demuestre que

$$\nabla \times (f \mathbf{G}) = f(\nabla \times \mathbf{G}) + (\nabla f) \times \mathbf{G} \quad (2-115)$$

en coordenadas cartesianas.

P.2-30 Dada una función vectorial

$$\mathbf{F} = \mathbf{a}_x(x + 3y - c_1z) + \mathbf{a}_y(c_2x + 5z) + \mathbf{a}_z(2x - c_3y + c_4z),$$

- determine c_1 , c_2 y c_3 si \mathbf{F} es irrotacional, y
- determine c_4 si \mathbf{F} también es solenoidal.