Procesos Estocásticos

Caracterización de Procesos Aleatorios

Ejercicio 1 - Variable aleatoria como proceso aleatorio

Sea $g(t)$ un pulso determinístico, definido como

$$g(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{para otro } t \end{cases}$$

Considere el proceso aleatorio $X(t) = Ag(t)$, donde $A \in \{-1, 1\}$ es una variable aleatoria binaria con $\mathbb{P}(A = 1) = p$ y $\mathbb{P}(A = -1) = 1 - p$.

1. Identifique qué tipo de proceso es $X(t)$ y grafique el conjunto de realizaciones $\mathcal{S}$.
2. Halle la función de distribución de primer y segundo orden de $X(t)$.
3. Determine $\mu_X(t) = \mathbb{E}[X(t)]$ y $R_X(t_1, t_2) = \mathbb{E}[X(t_1)X(t_2)]$.
4. Analice si el proceso es estacionario tanto en sentido estricto como en sentido amplio.

Ejercicio 2 - Familia infinita de funciones

Considere el proceso aleatorio $X(t) = e^{At}, t \geq 0$, donde $A \sim \mathcal{U}[-2, -1]$.

1. Identifique qué tipo de proceso es $X(t)$ y grafique el conjunto de realizaciones $\mathcal{S}$.
2. Halle la función de distribución de primer y segundo orden de $X(t)$.
3. Determine $\mu_X(t) = \mathbb{E}[X(t)]$ y $R_X(t_1, t_2) = \mathbb{E}[X(t_1)X(t_2)]$.
4. Analice si el proceso es estacionario tanto en sentido estricto como en sentido amplio.

Ejercicio 3 - Información de segundo orden

Sea $X(t)$ un proceso aleatorio tal que

$$\mathbb{E}[X(t)] = 3, \qquad \mathbb{E}[X(t_1)X(t_2)] = 9 + 4e^{-2|t_1 - t_2|}.$$

1. Encuentre la media, la varianza y la covarianza de las variables aleatorias $X(5)$ y $X(8)$.
2. ¿Es $X(t)$ un proceso ESA?

Ejercicio 4 - Random walk

El objetivo de este ejercicio es analizar un proceso aleatorio particular conocido como *random walk*. Sea $U(n)$ un proceso aleatorio en tiempo discreto que a cada instante n puede tomar los valores $\{-1, +1\}$ de modo independiente, con

$$p_U(+1) = p, \qquad p_U(-1) = 1 - p.$$

A cada instante n, definimos $X(n) = X(n-1) + U(n)$, con $X(0) = 0$ para todas las realizaciones del proceso. El proceso $X(n)$ es un *random walk*.

1. Identifique qué tipo de proceso es $X(n)$ y grafique dos posibles realizaciones.
2. Encuentre la función de distribución de primer orden de $X(n)$.
3. Calcule la media, la varianza, y la función de autocorrelación de $X(n)$.
4. Genere $N = 10^4$ realizaciones de $X(n)$ para $p = 0, 1; 0{,}5; 0{,}9$ y verifique numéricamente los resultados anteriores.

Ejercicio 5 - Proceso Bernoulli con memoria

En este ejercicio vamos a considerar la generación de procesos aleaotorios a partir de un proceso Bernoulli con muestras independientes. Sea $B(n)$ un proceso Bernoulli de parámetro λ, es decir, $\mathbb{P}(B(n) = 1) = \lambda$, $\mathbb{P}[B(n) = 0] = 1 - \lambda$, i.i.d.

1. Considere $X(n) = B(n)^2$. ¿Es éste un proceso estacionario? Calcule $\mathbb{E}[X(n)]$.
2. Ahora $X(n) = (-1)^n B(n)$.¿ Es éste un proceso estacionario? Calcule $\mathbb{E}[X(n)]$.
3. Considere ahora 2 procesos Bernoulli independientes, $B_1(n)$, con parámetro λ_1 y $B_2(n)$, con parámetro λ_2. Forme ahora el siguiente proceso

$$X(n) = \begin{cases} B_1(n) & \text{si } X(n-1) = 0 \\ B_2(n) & \text{si } X(n-1) = 1 \end{cases} \qquad n = 1, 2, \cdots$$

   con $\mathbb{P}\left[X(0) = 1\right] = p$. Grafique distintas realizaciones de dicho proceso para $\lambda_1 = 0{,}5$ y $\lambda_2 = 0{,}1$. Determine si $X(n)$ es estacionario o no y analice el comportamiento asintótico, es decir, cuando $n \to \infty$.

Ejercicio 6 - Líneas espectrales

Sea $X(n)$ un proceso complejo definido como

$$X(n) = \sum_{i=1}^{p} A_i e^{j\omega_i n},$$

donde A_i son variables aleatorias complejas.

1. Determine la media y la función de autocorrelación del proceso.
2. Demuestre que si las variables A_i son de media nula y descorrelacionadas, el proceso $X(n)$ es ESA.
3. Muestre que la densidad espectral de potencia de dicho proceso es una combinación lineal de deltas de Dirac. Se dice que esta clase de procesos es predecible. ¿Puede justificar por qué?

Ejercicio 7 - Proceso Gaussiano

Sea $X(t)$ un proceso Gaussiano.

1. Determine la fdp conjunta de orden n del proceso.

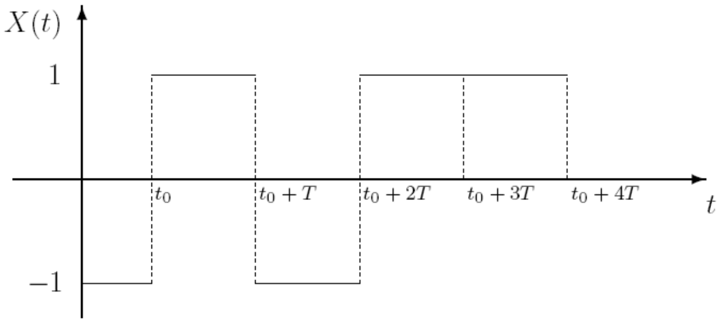

Figura 1: Ejemplo de transmisión de la secuencia de datos 1011

2. Demuestre que el proceso es ESE si y sólo si es ESA.

Ejercicio 8 - Modulación PAM

Un módem transmite una secuencia de datos del siguiente modo: transmite un 1 enviando un pulso de duración T segundos y amplitud 1; transmite un 0 enviando el mismo pulso con amplitud -1. En la figura se muestra como ejemplo la transmisión de la secuencia de datos 1011. La señal transmitida $X(t)$ responde a la ecuación siguiente

$$X(t) = \sum_n A_n p(t - nT - T_0),$$

donde $p(t)$ es un pulso de amplitud unitaria y duración T, A_n son variables aleatorias i.i.d. que toman el valor 1 o -1 según los datos a transmitir, y T_0 es una variable aleatoria uniforme en el intervalo $[0, T]$ que representa la fase de la señal transmitida. Se asume que T_0 y A_n son variables aleatorias independientes entre sí. Éste es un ejemplo de una señal binaria aleatoria.

1. Calcular $\mathbb{E}[X(t)]$.
2. Calcular la función de autocorrelación de $X(t)$. Para ello, suponga que $\mu_P = 0$.
3. Determinar si $X(t)$ es ESA o no.
4. ¿Varían los resultados si siempre $T_0 = 0$?
5. Simular una trayectoria de N períodos independientes, de la señal $X(t)$ binaria aleatoria, con fase inicial T_0 uniforme en el intervalo $[0, T]$. Estimar la media y la función de autocorrelación de la misma. Comparar los resultados en un mismo gráfico con los resultados teóricos.
6. Halle la media y la autocorrelación si no se incluye la variable aleatoria T_0, y analice si el proceso es ESA en ese caso.