Estimador Lineal de Menor Error Cuadrático Medio (LMMSE)

$$\hat{\mathbf{X}}_{lmmse} = \mu_{\mathbf{X}} + \mathbf{C}_{\mathbf{XY}}\mathbf{C}_{\mathbf{Y}}^{-1}\left(\mathbf{Y} - \mu_{\mathbf{Y}}\right). \tag{2}$$

Cuando **X** e **Y** son dos vectores conjuntamente gaussianos,

$$\hat{\mathbf{X}}_{lmmse} = \hat{\mathbf{X}}_{mmse}$$

$\hat{\mathbf{X}}_{lmmse}$ es un estimador *insesgado*. Se lo conoce también como el estimador BLU (Best Linear Unbiased).

$$\mathbb{E}[\hat{\mathbf{X}}_{lmmse}] = \mathbb{E}[\mu_{\mathbf{X}} + \mathbf{C}_{\mathbf{XY}}\mathbf{C}_{\mathbf{Y}}^{-1}\left(\mathbf{Y} - \mu_{\mathbf{Y}}\right)] = \mu_{\mathbf{X}}$$

El error de estimación es:

$$\mathbf{E}_{lmmse} = \mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}_{lmmse} = \underbrace{\left(\mathbf{X} - \mu_{\mathbf{X}}\right)}_{\delta_{\mathbf{X}}} - \mathbf{C}_{\mathbf{XY}}\mathbf{C}_{\mathbf{Y}}^{-1}\underbrace{\left(\mathbf{Y} - \mu_{\mathbf{Y}}\right)}_{\delta_{\mathbf{Y}}}.$$

Su covarianza,

$$\begin{aligned}
\mathbf{Cov}[\mathbf{E}_{lmmse}] &= \mathbf{Cov}[\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}_{lmmse}] = \mathbb{E}[\mathbf{E}_{lmmse}\mathbf{E}_{lmmse}^{*}] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\delta_{\mathbf{X}} - \mathbf{C}_{\mathbf{XY}}\mathbf{C}_{\mathbf{Y}}^{-\mathbf{1}}\delta_{\mathbf{Y}}\right)\left(\delta_{\mathbf{X}} - \mathbf{C}_{\mathbf{XY}}\mathbf{C}_{\mathbf{Y}}^{-\mathbf{1}}\delta_{\mathbf{Y}}\right)^{*}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\delta_{\mathbf{X}}\delta_{\mathbf{X}}^{*}\right] - \mathbb{E}\left[\delta_{\mathbf{X}}\delta_{\mathbf{Y}}^{*}\right]\mathbf{C}_{\mathbf{Y}}^{-1}\mathbf{C}_{\mathbf{XY}}^{*} - \mathbf{C}_{\mathbf{XY}}\mathbf{C}_{\mathbf{Y}}^{-1}\mathbb{E}\left[\delta_{\mathbf{Y}}\delta_{\mathbf{X}}^{*}\right] \\
&\qquad + \mathbf{C}_{\mathbf{XY}}\mathbf{C}_{\mathbf{Y}}^{-1}\mathbb{E}\left[\delta_{\mathbf{Y}}\delta_{\mathbf{Y}}^{*}\right]\mathbf{C}_{\mathbf{Y}}^{-1}\mathbf{C}_{\mathbf{XY}}^{*} \\
&= \mathbf{C}_{\mathbf{X}} - \mathbf{C}_{\mathbf{XY}}\mathbf{C}_{\mathbf{Y}}^{-1}\mathbf{C}_{\mathbf{YX}}
\end{aligned}$$

Finalmente, el error cuadrático medio es

$$\begin{aligned}
MMSE &= \mathbb{E}\left[\|\mathbf{E}_{lmmse}\|^{2}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbf{E}_{lmmse}^{*}\mathbf{E}_{lmmse}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathrm{tr}(\mathbf{E}_{lmmse}^{*}\mathbf{E}_{lmmse})\right] = \mathbb{E}\left[\mathrm{tr}(\mathbf{E}_{lmmse}\mathbf{E}_{lmmse}^{*})\right] \\
&= \mathrm{tr}\left\{\mathbb{E}\left[\mathbf{E}_{lmmse}\mathbf{E}_{lmmse}^{*}\right]\right\} \\
&= \mathrm{tr}\left\{\mathbf{Cov}[\mathbf{E}_{lmmse}]\right\}
\end{aligned}$$

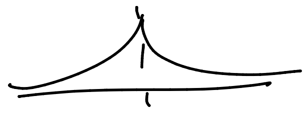
$$\hat{\mathbf{X}}_{lmmse} = \mu_{\mathbf{X}} + \mathbf{C}_{\mathbf{XY}}\mathbf{C}_{\mathbf{Y}}^{-1}\left(\mathbf{Y} - \mu_{\mathbf{Y}}\right).$$

$$\mathbb{E}[\hat{\mathbf{X}}_{lmmse}] = \mu_{\mathbf{X}}.$$

$$\mathbf{Cov}[\mathbf{E}_{lmmse}] = \mathbf{C}_{\mathbf{X}} - \mathbf{C}_{\mathbf{XY}}\mathbf{C}_{\mathbf{Y}}^{-1}\mathbf{C}_{\mathbf{YX}}.$$

$E[X(n)] - E[\hat{X}(n)]$

$$MMSE = \mathrm{tr}\left\{\mathbf{C}_{\mathbf{X}} - \mathbf{C}_{\mathbf{XY}}\mathbf{C}_{\mathbf{Y}}^{-1}\mathbf{C}_{\mathbf{YX}}\right\}.$$



Ejercicio 1

Considere un proceso ESA en tiempo continuo $Y(t)$ de media nula y autocorrelación $R_Y(\tau) = e^{-|\tau|}$.

1. Halle el mejor estimador lineal en el sentido MSE de $X = \int_0^1 Y(t)dt$ utilizando las muestras $Y(0), Y(1)$ de Y.
2. Halle la varianza del error de estimación.

1. Voy a llevar $X = \underbrace{\int_0^1 Y(t)dt}_{\text{algo aleatorio}}$ al dominio transformado por comodidad, veamos si funciona

$X_\Delta = \underbrace{\frac{1}{\Delta} Y(\Delta)}_{\int_0^t Y(t)dt}$ $\qquad MSE(\underbrace{\hat{X}}_{\text{El estimador}}) = E[\|X-\hat{X}\|^2]$; $\hat{X}_{MMSE} = E[X|Y]$

$R_Y(\tau) = e^{-\tau}u(\tau) + e^{\tau}u(-\tau)$

No es ruido blanco, obviamente

$\mu_Y = 0 \quad \therefore \; C_Y = R_Y$ (con $\tau = t_2 - t_1$)

Busco el estimador lineal: $\hat{X} = g(Y) = AY + b$; Minimizando por principio de ortogonalidad

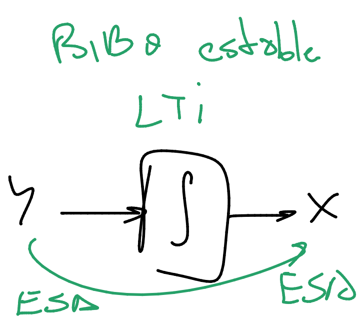
$E[X^* Y] = 0 \to X \perp Y$; queremos $\hat{X}$ ortogonal al error $X - \hat{X}_{MMSE}$

$\longrightarrow \quad E[\hat{X}^*(X-\hat{X})] = 0 = E[(AY+B)^*(X-AY-B)] = 0$

Se llega a que $\quad A|_{MMSE} = [R_{XY} - \mu_X \mu_Y^*][R_Y - \mu_Y\mu_Y^*]^{-1} = C_{XY} C_Y^{-1}$

$b|_{MMSE} = \mu_X - [R_{XY} - \mu_X\mu_Y^*][R_Y - \mu_Y\mu_Y^*]^{-1}\mu_Y = \mu_X - C_{XY}C_Y^{-1}\mu_Y$

$b = 0$



$\to \mu_X = \mu_Y \cdot H(0) = 0$

media nula

$A = C_{XY} C_Y^{-1}$

$Y(0)$ e $Y(1)$

Lo conocemos

Vector de corr. cruzado

$C_{XY} = E[X Y^t] = R_{XY} = E\left[X \cdot \begin{bmatrix} Y(0) \\ Y(1) \end{bmatrix}\right] = [X Y(0) \quad X Y(1)] = E\left[Y(0)\int_0^1 Y(t)dt \quad Y(1)\int_0^1 Y(t)\right]$

Esperanza lineal

$= \left[\int_0^1 E[Y(0)Y(t)]dt \quad \int_0^1 E[Y(1)Y(t)]dt\right] = \left[\int_0^1 R(t)dt \quad \int_0^1 R(t-1)dt\right] = \left[\int_0^1 e^{-|t|}dt \quad \int_0^1 e^{-|t-1|}dt\right]$

autocorr

$$\left[\int_0^1 e^{-|t|}dt \quad \int_0^1 e^{-|t-1|}dt\right] = \left[1-e^{-1} \quad \frac{(e-1)}{e}\right]$$

$$C_y^{-1} = E\left[(y-\mu_y)(y-\mu_y)^t\right]^{-1} = \begin{vmatrix} E[y(0)y(0)] & E[y(0)y(1)] \\ E(y(1)y(0)) & E[y(1)y(1)] \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} R_y(0) & R_y(1) \\ R_y(-1) & R_y(0) \end{vmatrix}^{-1}$$

$C_y = R_y$

$\mu_y = 0$

$$\hookrightarrow y = \begin{vmatrix} y(0) \\ y(1) \end{vmatrix}^0$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & e^{-1} \\ e^{-1} & 1 \end{vmatrix}^{-1} =$$

$$A = C_{xy} C_y^{-1} = \left[1-e^{-1} \quad \frac{(e-1)}{e}\right] \begin{vmatrix} \frac{1}{e^2-1}+1 & \frac{-1}{2\sinh(1)} \\ \frac{-1}{2\sinh(1)} & \frac{e^2}{e^2-1} \end{vmatrix} = \left[0{,}462117 \quad 0{,}462117\right]$$

$$\hat{x} = 0{,}462117\left[y(0)+y(1)\right]$$

2.

Error de estimación es $\mathcal{E} = x(n) - \hat{x}(n)$

$$\operatorname{Var}(\mathcal{E}) = E\left[(\mathcal{E}-\mathcal{E}_0)^2\right] = E\left[\left(x(n)-\hat{x}(n)-\mu_x+\mu_{\hat{x}}\right)^2\right] = E\left[\left(x(n)-\hat{x}(n)\right)^2\right]$$

Lmmse es insesgado, lo $\mu_{\hat{x}} = \mu_x$; $\mathcal{E}_0 = 0$

$$E\left[x(n)^2 - 2x(n)\hat{x}(n) + \hat{x}^2(n)\right] = \operatorname{Var}(x) - 2E\left[x\hat{x}(n)\right] + E\left[\hat{x}^2\right]$$

$$\operatorname{Var}(\mathcal{E}) = \sigma_x^2 - 2\cdot 0{,}462117\, \underbrace{E\left[x\,y(0) + x\,y(1)\right]}_{\int_0^1 R_y(t)dt + \int_0^1 R_y(t+1)dt} + 0{,}462117^2\, E\left[\left(y(0)+y(1)\right)^2\right]$$

$$\operatorname{Var}(\mathcal{E}) = \sigma_x^2 - 1{,}16845 + 0{,}462117^2\left(2R(0)+2R(1)\right)$$

$$\boxed{\operatorname{Var}(\mathcal{E}) = \sigma_x^2 - 0{,}584223}$$

Ejercicio 2

Considere la medicion ruidosa $Y = (1+V)X$ donde X y V son variables independientes y de media nula. Suponga que sólo conoce la varianza del ruido σ^2. Halle el mejor estimador lineal en sentido MSE de X dada Y. Demuestre que la varianza del error es menor a la varianza de X.

$$y = (1+V)\,x \quad ; \; V \text{ ruido } \sigma^2$$

$$\mu_y = E\left[(1+V)x\right] = \mu_x + \underbrace{E[V.x]}_{0} = \mu_x = 0$$

indep ∴ descorr

media nula

$$\hat{x}_{lmmse} = Ay + B \; ; \quad A = C_{xy}C_y^{-1}$$

$$B = \mu_x - C_{xy}C_y^{-1}\mu_y$$

$$\hat{x}_{lmmse} = C_{xy}C_y^{-1}y + \mu_x - C_{xy}C_y^{-1}\mu_y$$

$$\hat{x}_{lmmse} = C_{xy}C_y^{-1}(y-\mu_y) + \mu_x = C_{xy}C_y^{-1}(y-\mu_y)$$

$\mu_x = 0$ consigna

$$\hat{x}_{lmmse} = C_{xy}C_y^{-1}y$$

$$\boxed{y = x + Vx}$$

$$C_{xy} = E\left[(x-\mu_x)(y-\mu_y)\right] = E\left[x.(x+Vx)\right] \quad E[x.x] + E[x(Vx)] = \sigma_x^2 + \sigma_x^2 . \underbrace{\mu_V}_{0} = \sigma_x^2$$

$$C_y = E[y.y] = E\left[(x+Vx)^2\right] = E[x^2 + \underbrace{2x^2V}_{2E[x^2]E[V]=0} + V^2x^2] = \sigma_x^2 + \sigma_V^2\sigma_x^2 = \sigma_x^2(1+\sigma_V^2)$$

$$\hat{x} = C_{xy}C_y^{-1}y = \frac{\sigma_x^2\, y}{\sigma_x^2(1+\sigma_V^2)} = \frac{y}{1+\sigma_V^2}$$

$$\varepsilon = x - \hat{x} \longrightarrow Var(\varepsilon) = E\left[\left[(x-\hat{x}) - (\cancel{\mu_x - \mu_{\hat{x}}})\right]^2\right] = E\left[(x-\hat{x})^2\right] = E\left[x^2 - 2x\hat{x} + \hat{x}^2\right]$$

0

lmmse es insesgado ∴ $\mu_{\hat{x}} \longrightarrow \mu_x$

$$E\left[x^2 - 2x\hat{x} + \hat{x}^2\right] = \sigma_x^2 - 2E\left[x\frac{y}{1+\sigma_V^2}\right] + E\left[\frac{y^2}{(1+\sigma_V)^2}\right] = \sigma_x^2 - \frac{2}{1+\sigma_V^2}\underbrace{C_{xy}}_{\sigma_x^2} + \frac{\overbrace{C_y}^{\sigma_x^2(1+\sigma_V^2)}}{(1+\sigma_V)^2}$$

$$Var(\varepsilon) = \sigma_x^2 - \frac{2\sigma_x^2}{1+\sigma_V^2} + \frac{\sigma_x^2}{1+\sigma_V^2} = \sigma_x^2 - \frac{\sigma_x^2}{1+\sigma_V^2} = \sigma_x^2\left(1 - \frac{1}{1+\sigma_V^2}\right)$$

Como $\sigma_V^2 > 0 \rightarrow 1 - \dfrac{1}{1+\sigma_V^2} < 1 \; \therefore \; Var(\varepsilon) < \sigma_x^2$

Ejercicio 3

Se desea estimar una variable aleatoria X, para lo cual se utilizan 2 sensores que arrojan mediciones Y_1 e Y_2.

$$Y_i = X + W_i, \quad i = 1, 2,$$

donde W_i son ruidos de los sensores. Se sabe que $\begin{bmatrix} X & W_1 & W_2 \end{bmatrix}^T$ es un vector Gaussiano de media nula y covarianza:

$$E\left[\begin{bmatrix} x & w_1 & w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \right] = C = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

$\to Var(x)$ $\to C_{xw_1}$ $\to C_{xw_2}$ $\to Var(w_1)$ $\to Var(w_2)$

Halle el mejor estimador de X basado en Y, la matriz de covarianza del error y su varianza.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

$E[[x\, w_1\, w_2]^t] = \vec{0} \quad \therefore \mu_x = \mu_{w_1} = \mu_{w_2} = 0$

$E[y] = E[x + w_i] = \mu_x + \mu_{w_i} = \begin{bmatrix} \cancel{\mu_x + \mu_{w_1}} \\ \mu_x + \mu_{w_2} \end{bmatrix}$ 0

$= 0 = \mu_y$

$$\hat{X}_{lmmse} = C_{xy} C_y^{-1} (y_i - \cancel{\mu_y}^{\,0}) + \cancel{\mu_x}^{\,0}$$

$$\hat{x} = C_{xy} C_y^{-1} y_i = C_{xy} C_y^{-1} y_i$$

$$C_{xy} = E[\underbrace{x \cdot y_i^t}_{\text{medias nulas}}] = E\left[x \cdot \begin{bmatrix} x + w_1 \\ x + w_2 \end{bmatrix}^t\right] = E\left[\begin{bmatrix} x^2 \\ x^2 \end{bmatrix}^t + \begin{bmatrix} xw_1 \\ xw_2 \end{bmatrix}^t\right] = E\left[\begin{vmatrix} x^2 \\ x^2 \end{vmatrix}\right]^t + E\left[\begin{vmatrix} xw_1 \\ xw_2 \end{vmatrix}\right]^t$$

$$\underbrace{E\left[\begin{vmatrix} x^2 \\ x^2 \end{vmatrix}^t\right]}_{\substack{\text{Varianza} \\ (\mu_x = 0)}} + \underbrace{E\left[\begin{vmatrix} xw_1 \\ xw_2 \end{vmatrix}^t\right]}_{\substack{R_{xw_i} = C_{xw_i} \\ (\mu_x = 0,\ \mu_w = 0)}} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}^t + \begin{vmatrix} 1/2 \\ 1/4 \end{vmatrix}^t = \begin{vmatrix} 3/2 \\ 5/4 \end{vmatrix}^t$$

los tenemos

$y_1 = x + w_1$

$y_2 = x + w_2$

$$C_y^{-1} = E[y \cdot y^t]^{-1} = E\left[\begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \end{vmatrix}\right]^{-1} = E\left[\begin{vmatrix} y_1^2 & y_1 y_2 \\ y_2 y_1 & y_2^2 \end{vmatrix}\right]^{-1} = E\left[\begin{vmatrix} (x+w_1)^2 & (x+w_1)(x+w_2) \\ (x+w_1)(x+w_2) & (x+w_2)^2 \end{vmatrix}\right]^{-1}$$

$$E[(x+w_1)^2] = \sigma_x^2 + \sigma_{w_1}^2 + 2C_{xw_1} = 1 + 1 + 2 \cdot 1/2 = 3$$

$$E[(x+w_2)^2] = \sigma_x^2 + \sigma_{w_2}^2 + 2C_{xw_2} = 1 + 1/3 + 2/4 = 11/6$$

$$E[(x+w_1)(x+w_2)] = \sigma_x^2 + C_{xw_1} + C_{xw_2} + C_{w_1 w_2} = 1 + 1/2 + 1/4 + 0 = 7/4$$

$$\therefore\ C_y^{-1} = \begin{vmatrix} 3 & 7/4 \\ 7/4 & 11/6 \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} 88/117 & -28/39 \\ -28/39 & 16/13 \end{vmatrix}$$

$$\hat{x} = \underbrace{\begin{vmatrix} 3/2 \\ 5/4 \end{vmatrix}^t}_{C_{xy}} \underbrace{\begin{vmatrix} 88/117 & -28/39 \\ -28/39 & 16/13 \end{vmatrix}}_{C_y^{-1}} \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{vmatrix} = \boxed{\begin{vmatrix} 3/13 & 6/13 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{vmatrix} = \hat{x}}$$

$$\mathcal{E} = x - \hat{x} \longrightarrow \operatorname{cov}(\mathcal{E}) = C_x - C_{xy} C_y^{-1} C_{yx}$$

$$1 - \begin{vmatrix} 3/13 & 6/13 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3/2 \\ 5/4 \end{vmatrix} = 1 - 12/13 = 1/13$$

sino expandir a mano.

Ejercicio 4

Suponga que se tienen muestras de una señal

$$Y(n) = X(n) + W(n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Dicha señal tiene dos componentes: una señal de interés X, modelada como un proceso ESA, y una componente de ruido W, también modelada como un proceso ESA, descorrelacionado de X. Suponga que tiene acceso a muestras de un proceso ESA $U(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, tal que dicha señal está descorrelacionada de W pero correlacionada con X. Asuma que todas las variables tienen media nula para simplificar el problema.

El objetivo del problema es eliminar la componente de ruido de $Y(n)$ utilizando las muestras de la señal $U(n)$. Para ello se propone estimar la señal Y mediante un estimador lineal de la forma:

$$\hat{Y}(n) = \mathbf{w}(n)^T \mathbf{u}(n),$$

donde $\mathbf{u}(n) = [U(n), \ldots, U(n-N+1)]^T$ y $\mathbf{w}(n)$ es un vector (a determinar) de N elementos.

1. Analice la implementacion del cancelador de ruido y realice un diagrama en bloques donde se vean las entradas del sistema y la señal de error:

$$e(n) = Y(n) - \hat{Y}(n).$$

2. Escriba la expresión $\mathbf{w}(n)$ óptimo para estimar Y en el sentido MSE y la varianza del error de estimación, mostrando que ninguno de los dos depende de n.
3. Determine por qué al estimar Y en realidad estamos obteniendo el mejor estimador MSE de X, lo que determina que el sistema funcione como un cancelador de ruido.
4. ¿Cómo implementaría el sistema en la práctica si tuviera acceso a las muestras de Y y de U?

$Y = X + W$; U ESA correlacionado con X pero no con W.

descorr

$\mu_X = \mu_W = \mu_Y = \mu_U = 0$

queremos eliminar la W de Y usando muestras de U.

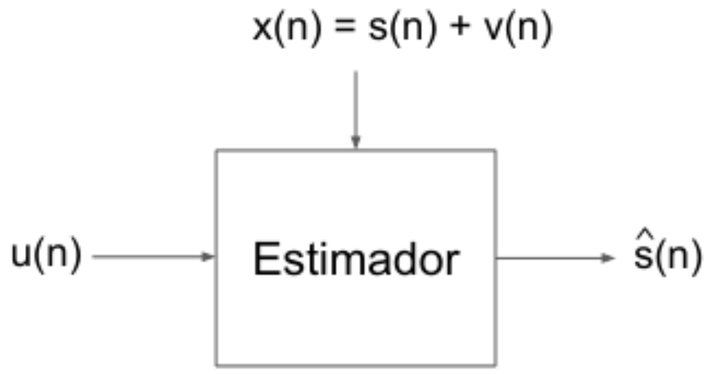
$\hat{Y}(n) = \beta(n)^T U(n)$; $U(n) = [U(n) \ \ldots \ U(n-N+1)]^t$

coefs del filtro

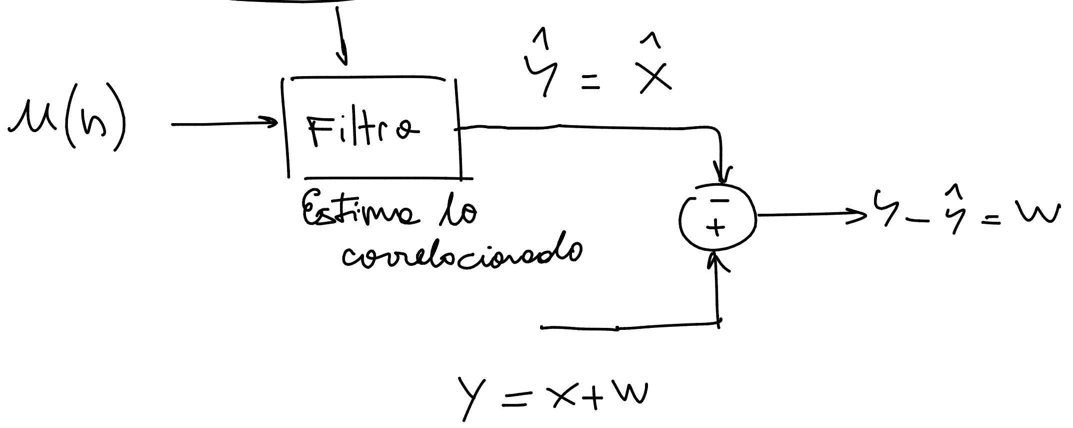
Filtro de Wiener – Cancelador de ruido

Problema

- Medimos x(n): señal s(n) contaminada con ruido v(n).
- Queremos limpiarla para obtener una estimación de s(n)
- Usamos un proceso u(n) disponible (correlacionado con v(n))



1. $\hat{y}(n) = \underbrace{\sum_{i=0}^{N} \beta_i \, u(n-i)}$ (Filtro de wiener)



2. $U = \begin{bmatrix} u(0) \\ \vdots \\ u(N) \end{bmatrix}$ Cada $n \in [0; N]$ es un problema de estimación.

Para cada $n \longrightarrow \hat{y}_{lmmse} = C_{yu} C_u^{-1} (u - \mu_u) + \mu_y$; medias nulas

Estimo $y(n)$ con u de $(n-N)$ a (0).

$$\underset{\mu_u = 0}{C_u^{-1} = R_u^{-1}} = E\left[\begin{vmatrix} u(-N) \\ u(0) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u(-N) \cdots u(0) \end{vmatrix} \right] = \begin{vmatrix} R_u(0) & \cdots & R_u(N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_u(N) & \cdots & R_u(0) \end{vmatrix}$$

escalar

$$C_{yu} = E[y \, U(n)] = E[R_{yu}(N) \cdots R_{yu}(0)]$$

No depende de n, solo del lag.

$$W = R_u^{-1} R_{yu}^{*} = \begin{bmatrix} w(N) \\ \vdots \\ w(0) \end{bmatrix} \longrightarrow \hat{y}(n) = \underbrace{R_{yu} R_u^{-1}}_{w^{*}} U.$$

conj. n trasp.

$$\hat{y} = \mu_y + C_{yu} C_u^{-1}(u-\mu_u) \longrightarrow \mathcal{E} = \underbrace{y-\mu_y}_{y} - C_{yu}C_u^{-1}\underbrace{(u-\mu_u)}_{u}$$

$$\mu_E = E[y-\hat{y}] = \underbrace{\mu_y-\mu_y}_{0} - C_{yu}C_u^{-1}\underbrace{\mu_u}_{0}$$

$$= 0 \quad \text{insesgado}$$

$$C_\varepsilon = E\left[(y - \underbrace{C_{yu}C_u^{-1}}_{\text{cte para } E} u)(y - \underbrace{C_{yu}C_u^{-1}}_{\text{cte para } E} u)^*\right]$$

$$C_y - \underbrace{E[yu^*]}_{C_{uy}} C_{yu}^* C_u^{-1*} - C_{yu}C_u^{-1}\underbrace{E[uy^*]}_{C_{yu}} + C_{yu}C_u^{-1}E[uu^*]C_u^{-1}C_{yu}^*$$

$$= C_y - C_{yu}C_u^{-1}C_{uy}$$

3) Sea u corr x $\wedge$ u decorr w ; medias nulas:

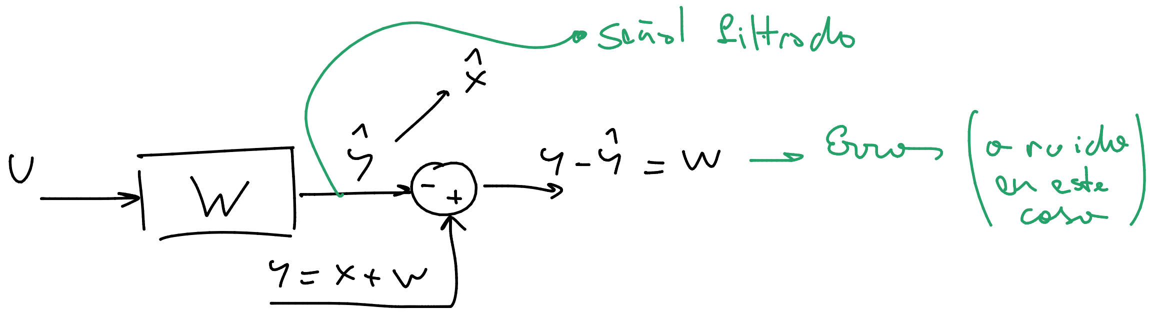
Entonces $\hat{y} = \cancel{\mu_y} + C_{yu}C_u^{-1}(u-\cancel{\mu_u})$

$$C_{yu} = \text{Cov}(y,u) = E[y \cdot u^*] = E[(x+w)u^*] = E[xu^*] + E[wu^*] = \underbrace{R_{x,u}}_{\text{algo}} + \underbrace{\cancel{R_{w,u}}}_{0} = C_{xu}$$

$\therefore$ $\hat{y} = C_{yu}C_u^{-1}u = C_{xu}C_u^{-1}u$ se parece a $\hat{x} = C_{xu}C_u^{-1}u$

$\therefore$ Estimamos la x en $\hat{y}$

4.



Ejercicio 5

Se desea estimar un vector aleatorio gaussiano $\mathbf{X} = [X_1, ..., X_n]^T$ con media nula y matriz de correlación R_X. Para eso se realizan n mediciones $Y_1, ..., Y_n$ del siguiente modo:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = H\mathbf{X} + \mathbf{W},$$

donde H es una matriz de $n \times n$ determinística, conocida e inversible, y $\mathbf{W}$ es un vector de ruido blanco gaussiano de media nula y varianza unitaria, descorrelacionado de $\mathbf{X}$.

1. Halle la función de densidad conjunta entre $\mathbf{X}$ y $\mathbf{Y}$ en términos de R_X y H.
2. Demuestre que el mejor estimador lineal en el sentido del ECM de $\mathbf{X}$ en función de la observación $\mathbf{Y}$ es:

$$\hat{\mathbf{X}} = R_X H^T (H R_X H^T + I)^{-1} \mathbf{Y}.$$

X y W gaussianos $\therefore$ Y gaussiano.

Vale que $\quad E[Y] = E[HX] + E[W] = H\mu_x + \mu_w = 0$

$$C_Y = E[YY^*] = E[(HX+W)(HX+W)^*] = HC_xH^* + W\,E[WX^*]H^* + H\,E[XW^*] + C_W$$

como X, W descorr eso vale cero

$C_Y = HC_XH^* + C_W \quad$ Como $\mu_x = 0$, $C_X(t_1,t_2) = R_X(t_2 - t_1)$

$\mu_w = 0$

$\to C_Y = HR_XH^* + R_W$

La función de densidad cjta se puede obtener usando C_{XY}, la media de X e Y es cero $\therefore$ la media de la cjta será cero

$f_{X,Y}(x,y) \longrightarrow$ Para definirla x completo necesito μ_x, μ_y, C_X, C_Y, C_{XY}

x que es en base al vector $Z = \begin{vmatrix} X \\ Y \end{vmatrix}$

Sea $Z = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \to f_Z$ es $f_{X,Y}$

$$E[Z] = E\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} E[X] \\ E[Y] \end{vmatrix}}^{\text{Vector}} = \begin{bmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Cov = \begin{vmatrix} C_{x_1} & C_{x_1 x_2} & \cdots & C_{x_1 x_n} \\ C_{x_2 x_1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ C_{x_n x_1} & \cdots & & C_{x_n} \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} C_x & C_{xy} \\ C_{xy} & C_y \end{vmatrix}$$

(C_x es R_x $\qquad Hx + w$

$$C_y = E[yy^*] = H \underbrace{E[xx^*]}_{} H^* + H \underbrace{E[xw^*]}_{} + \underbrace{E[wx^*]}_{} H^* + \underbrace{E[ww^*]}_{I}$$

$(\mu_y = 0)$ $\qquad H R_x H^*$ $\qquad$ $\overset{0}{\text{discorr}}$ $\qquad$ Ruido blanco gauss.

$$C_y = H R_x H^* + I$$

$$C_{xy} = E[xy^*] = E[xx^*]H^* + E[\cancel{xw^*}]_{0} = R_x H^*$$

$$C_{yx} = E[yx^*] = HE[xx^*] + \underbrace{E[\cancel{wx^*}]}_{0} = H R_x$$

$$\therefore\; Cov_z = \begin{vmatrix} C_x & C_{xy} \\ C_{yx} & C_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R_x & R_x H^* \\ H R_x & H R_x H^* + I \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} I & 0 \\ 0 & H \end{vmatrix} \begin{vmatrix} R_x & R_x \\ R_x & R_x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I & 0 \\ 0 & H^* \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} R_x & R_x \\ H R_x & H R_x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I & 0 \\ 0 & H^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R_x & R_x H^* \\ H R_x & H R_x H^* \end{vmatrix}$$

2) $\hat{x}_{lmmse} = C_{xy} C_y^{-1} y = R_x H^* . (H R_x H^* + I)^{-1} y$

ya lo había obtenido antes

Ejercicio 6

Se desea estimar la temperatura instantánea de una batería, para lo cual se dispone de un sensor que arroja muestras

$$Y(n) = T(n) + W(n), \tag{1}$$

donde $T(n)$ es la verdadera temperatura, un proceso Gaussiano ESA de media nula y autocovarianza $C_T(k) = \sigma_T^2 10^{-|k|}$, y W es ruido Gaussiano ESA de media nula y autocovarianza $C_W(k) = \sigma_W^2 10^{-|k|}$, descorrelacionado de T.

1. Indique qué clase de proceso es Y, si es ESA o no, y halle sus distribuciones finito-dimensionales.
2. Halle la distribución conjunta del vector $[T(n), Y(n)]$.
3. Suponga que se desea estimar la temperatura del siguiente modo:

$$\hat{T}(n) = aY^3(n) + bY(n) + c, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Halle los coeficientes a, b y c de modo de que $\hat{T}(n)$ sea el mejor estimador de $T(n)$ en el sentido del ECM. ¿Tiene sentido usar Y^3 en el estimador de T? ¿Por qué?

4. Halle el ECM mínimo cuando $\sigma_W = \sigma_T = 1$.

1. Veamos si Y es ESA.

$$E[Y] = E[T+W] = \mu_T + \mu_W = 0 \quad (\text{cte})$$

$$R_Y = E[YY^*] = E[(T+W)(T+W)^*] = E[TT^* + \underbrace{TW^* + WT^*}_{=0 \text{ xque } W,T \text{ descorr}} + WW^*] = R_T + R_W$$

Si T y W son ESA, $R_T \wedge R_W$ son función del lag $\therefore$ R_Y depende de lag

$$Y \begin{cases} \to \text{Media cte} \\ \to R_Y(n_2 - n_1) \end{cases} \quad \therefore \ Y \text{ es ESA.}$$

Distribuciones finito-dimensionales $\longrightarrow$ T, W gaussianas $\therefore$ $T + W \sim$ gaussiana

$\Longrightarrow Y \sim \text{Normal}(\mu_Y, C_Y)$

Todas las distribuciones unívocas $C_Y(n_1, n_2) \wedge \mu_Y(n) = 0 \ \forall n$

$$C_Y(n_1, n_2) = R_Y(n_1, n_2) = R_T(n_1, n_2) + R_W(n_1, n_2)$$

$$\text{Cov} = \begin{vmatrix} \sigma_Y(n_1) & C_Y(n_1, n_2) \\ C_Y(n_2, n_1) & \sigma_Y(n_2) \end{vmatrix}$$

$$R_Y(n_1, n_2) = C_Y(n_1, n_2) + \mu_Y(n_1)\mu_Y(n_2)$$

$$\sigma_y^2(n) = Var(y(n)) = E[(T+w)^2] = \sigma_T^2 + \sigma_w^2 \quad (C_y(0))$$

$$Cov = \begin{vmatrix} \sigma_T^2 + \sigma_w^2 & R_T(n_2-n_1) + R_w(n_2-n_1) \\ R_T(n_2-n_1) + R_w(n_2-n_1) & \sigma_T^2 + \sigma_w^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_T^2 + \sigma_w^2 & \sigma_T^2\, 10^{-|\tau|} + \sigma_w^2 . 10^{-|\tau|} \\ \sigma_T^2\, 10^{-|\tau|} + \sigma_w^2 . 10^{-|\tau|} & \sigma_T^2 + \sigma_w^2 \end{vmatrix}$$

$\therefore$ la densidad cjta para $y(n_1), y(n_2)$ será $\mathcal{N}\left(0, \begin{vmatrix} \sigma_T^2 + \sigma_w^2 & \sigma_T^2\, 10^{-|\tau|} + \sigma_w^2 . 10^{-|\tau|} \\ \sigma_T^2\, 10^{-|\tau|} + \sigma_w^2 . 10^{-|\tau|} & \sigma_T^2 + \sigma_w^2 \end{vmatrix}\right)$

$y(n) \sim \mathcal{N}(0, Var(y)) = \mathcal{N}(0, \sigma_T^2 + \sigma_w^2)$

Distribución cjta $[T(n)\ y(n)]^t$

2 maneras: Escribo esto de forma matricial y obtengo la cov. o la hago fácil:

1) $E\left[\begin{bmatrix} T \\ y \end{bmatrix}\right] = \vec{0}$

real $\therefore$ solo traspongo

$$Cov\left(\begin{bmatrix} T \\ y \end{bmatrix}\right) = E\left[\begin{pmatrix} T \\ y \end{pmatrix} [T \quad y]\right] = E\begin{bmatrix} T(n)T(n) & T(n)y(n) \\ y(n)T(n) & y(n)y(n) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sigma_T^2 & \sigma_T^2 \\ \sigma_T^2 & \sigma_T^2 + \sigma_w^2 \end{vmatrix} =$$

Varianzas

Mismo n

Varianzas dey

2) fácil

$$cov\begin{bmatrix} T \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_T & C_{Ty} \\ C_{yT} & C_y \end{bmatrix}$$

$E\begin{bmatrix} T \\ y \end{bmatrix} = \vec{0}$

$C_T = \sigma_T^2\, 10^{-|\tau|}$

Mismo n $\quad C_y = (\sigma_T^2 + \sigma_w^2)\, 10^{-|\tau|}$

ambas $\quad C_{yT} = E[y . T^*] = E[T T^* + w T^*] = R_T = C_T \Big|_{\tau=0}$

cuidado $\quad C_{T,y} = E[T . y^*] = E[T T^* + T w^*] = R_T = C_T \Big|_{\tau=0}$

$$Cov_{T,y} = \begin{vmatrix} \sigma_T^2\, 10^{-|\tau|} & \sigma_T^2\, 10^{-|\tau|} \\ \sigma_T^2\, 10^{-|\tau|} & (\sigma_T^2 + \sigma_w^2)\, 10^{-|\tau|} \end{vmatrix}_{\tau=0}$$

$T(n)$ y $y(n)$

$$Cov_{T,y} = \begin{vmatrix} \sigma_T^2 & \sigma_T^2 \\ \sigma_T^2 & \sigma_T^2 + \sigma_w^2 \end{vmatrix}$$

3) $\hat{T} = a y^3(n) + b y(n) + c$

si es lineal $\rightarrow$ linealizo por Taylor

$\hat{T} = \underbrace{T(n)}_{cte} + \underbrace{(a . 3 y^2(n) + b)}_{cte}\, y(n)$

$\hat{T} = \alpha y(n) + \beta \rightarrow$ esa es lineal

y^3 desaparece al linealizar, no tiene sentido usarla

$$\hat{T}_{lmmse} = C_{Ty} C_y^{-1}(y - \cancel{\mu_y}) + \cancel{\mu_T} = E[T(n) y^*(n)] . \frac{1}{\sigma_T^2 + \sigma_w^2} = \boxed{\frac{\sigma_T^2}{\sigma_T^2 + \sigma_w^2} . y = \hat{T}}$$

$\mu_y = 0$, $\mu_T = 0$

$\hookrightarrow C_y^{-1}(n,n) = Var(y) = \sigma_T^2 + \sigma_w^2$

$C_T \big|_{(0,0)}$

4. $\frac{1}{2} Y = \hat{T}$

ECM mínimo $\longrightarrow$ $ECM = \left| T - \hat{T} \right|^2 = \left| T - \frac{1}{2} Y \right|^2 = E \left| T - \frac{T+W}{2} \right|^2$

$$E \left| \frac{T-W}{2} \right|^2 = E\left[\left(\frac{T-W}{2} \right)^* \left(\frac{T-W}{2} \right) \right] = \frac{E}{4} \left[T^* T - W^* T - T^* W + W^* W \right]$$

producto interno

$$\frac{1}{4} \left(\underbrace{\sigma_T^2 + \sigma_W^2}_{2} \right) = \frac{2}{4} = 1/2$$

Sino que MMSE $= tr\left(Cov\left(E_{mmse} \right) \right)$
↓
mínimo

$$Cov_E = C_T - C_{TY} C_Y^{-1} C_{YT}$$

$$1 - 1 \cdot 1/2 \cdot 1 = 1/2$$

$$\boxed{tr\{1/2\} = 1/2}$$