Vectores Aleatorios

Cecilia Galarza

Procesos Estocásticos
Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires

2do cuatrimestre 2024

Vector aleatorio

- Un *espacio de probabilidad* queda definido por $(\Xi, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
  - Ξ: *espacio muestral* que contiene a todos los posibles resultados del experimento
  - $\mathcal{F}$: conjunto de eventos donde cada evento es un subconjunto de Ξ
  - $\mathbb{P}$: función de probabilidad.
- En algunos experimentos aleatorios, nos interesa analizar más de una característica del resultado. Por ejemplo
  - Experimento: seleccionar una persona en la calle.
  - Observación: peso, altura, ancho de cintura.
- El resultado del experimento está caracterizado por 3 VA distintas. Resulta conveniente agruparlas en un *Vector Aleatorio* (VeA).

Vector aleatorio

Formalmente, un *vector aleatorio* de dimensión n es una función (medible)

$$\mathbf{X} : \Xi \to \mathbb{R}^n$$
$$\mathbf{X}(\xi) = [X_1(\xi), \ldots, X_n(\xi)]^T.$$

$\mathbf{X}$ es un vector aleatorio de dimensión n si $X_i, i = 1, \cdots n$, son todas variables aleatorias.

Función de distribución

Función de distribución multivariable

La *función de distribución cumulativa multivariable* (CDF, *Cumulative Distribution Function*) se define como:

$$F_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{x}) = F_{X_1,X_2,\ldots X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \ldots, X_n \leq x_n),$$

donde $\boldsymbol{x} = [x_1, \ \ldots, \ x_n]^T \in \mathbb{R}^n$.

Podemos utilizar la siguiente notación para simplificar la escritura:

$$F_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{x}) = \mathbb{P}(\mathbf{X} \leq \boldsymbol{x}).$$

$\mathbf{X} \leq \boldsymbol{x}$ debe leerse como una desigualdad simultánea en todas las componentes del vector aleatorio.

Propiedades de la función de distribución

- *Monótona en cada uno de sus argumentos.* Si $x_i \leq x_i'$, $i = 1, ..., n$

$$F_{X_1,...,X_n}(x_1, ..., x_n) \leq F_{X_1,...,X_n}(x_1', ..., x_n').$$

- *Límite inferior*
  - Si algún argumento toma el valor $-\infty$, la CDF se anula.

$$\lim_{x_i \to -\infty} F_{X_1,...,X_n}(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = \lim_{x_i \to -\infty} \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \ldots, X_i \leq x_i, \ldots, X_n \leq x_n) = 0,$$

  - Si algún argumento toma el valor $+\infty$, la CDF se *marginaliza*. Por ejemplo, en el caso bivariable:

$$F_{X_1,X_2}(\infty, x_2) = F_{X_2}(x_2), \quad F_{X_1,X_2}(x_1, \infty) = F_{X_1}(x_1)$$

  Claramente, $F_{X_1,X_2}(\infty, \infty) = 1$.

Función de densidad

Vector aleatorio continuo

$\mathbf{X}$ es un vector aleatorio continuo (VeAC) si $F_{\mathbf{X}}$ es continua y existen sus derivadas parciales de orden n. Su *función de densidad de probabilidad* (PDF, *Probability Density Function*) resulta:

$$f_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{x}) = f_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) = \frac{\partial^n F_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n}.$$

Función de densidad multivariable: Propiedades

$\mathbf{X}$ es un VeAC. Su PDF, $f_{\mathbf{X}}$, satisface las siguientes propiedades:

- *No negativa.* $f_{X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n) \geq 0, \ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.
- *Integra a uno.* $\int_{\mathbb{R}^n} f_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{x}) dx_1 \ldots dx_n = 1$.
- *Obtención de la CDF.* $F_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{x}) = \int_{-\infty}^{x_1} ... \int_{-\infty}^{x_n} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{u}) \, d\mathbf{u}$ para $\boldsymbol{x} = [x_1, ..., x_n]^T$, $\mathbf{u} = [u_1, ..., u_n]^T$.
- *Probabilidad de una región* $\mathbb{P}(\mathbf{X} \in A) = \int_{\mathbf{u} \in A} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{u}) \, d\mathbf{u}$.
- *Probabilidad de un punto.* Si $\mathbf{X}$ es un vector aleatorio continuo, entonces $\mathbb{P}(\mathbf{X} = \boldsymbol{x}_0) = 0, \ \forall \boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.

Funciones de densidad de probabilidad marginales

A partir de la PDF $f_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{x})$ podemos obtener las PDFs *marginales*, integrando con respecto al resto de las variables. Por ejemplo:

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{\mathbb{R}} f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)\, dx_2.$$

$$f_{X_3}(x_3) = \int_{\mathbb{R}^2} f_{X_1,X_2,X_3}(x_1, x_2, x_3)\, dx_1\, dx_2.$$

$$f_{X_1,X_3}(x_1, x_3) = \int_{\mathbb{R}^2} f_{X_1,X_2,X_3,X_4}(x_1, x_2, x_3, x_4)\, dx_2\, dx_4.$$

Función de masa de probabilidad

Vector aleatorio discreto

$\mathbf{X}$ es un vector aleatorio discreto (VeAD) si $F_{\mathbf{X}}$ es constante por regiones y tiene un número finito o infinito numerable de discontinuidades. Su *función de masa de probabilidad* (PMF *Probability Mass Function*) resulta:

$$p_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{x}) = p_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathbb{P}(\mathbf{X} = \boldsymbol{x}),$$

donde $\boldsymbol{x}$ es uno de los puntos de discontinuidad de $F_{\mathbf{X}}$. Llamamos $\mathcal{X}$ al conjunto que contiene a todos los puntos de discontinuidad de $F_{\mathbf{X}}$.

Vectores aleatorios discretos y funciones de masa de probabilidad

La PMF de $\mathbf{X}$ satisface las siguientes propiedades:

- *No negativa.* $p_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{x}) \geq 0, \ \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$.
- *Suma a uno.* $\sum_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}} p_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{x}) = 1$.
- *Obtención de la CDF.* $F_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{x}) = \sum_{\mathbf{u} \in \mathcal{X} : \mathbf{u} \leq \boldsymbol{x}} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{u})$.
- *Probabilidad de una región.* $\mathbb{P}(\mathbf{X} \in A) = \sum_{\mathbf{u} \in \mathcal{X} \cap A} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{u})$.
- *Probabilidad de un punto.* Por definición $\mathbb{P}(\mathbf{X} = \boldsymbol{x}) = p_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{x}), \ \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$. En este caso, $\mathbb{P}(\mathbf{X} = \boldsymbol{x})$ puede ser no nula.

Funciones de masa de probabilidad marginales

De forma análoga al caso continuo, podemos marginalizar la PMF conjunta para obtener las *PMFs marginales*. Por ejemplo:

$$p_{X_1}(x_1) = \sum_{x_2:(x_1,x_2)\in\mathcal{X}} p_{X_1,X_2}(x_1,x_2).$$

$$p_{X_3}(x_3) = \sum_{(x_1,x_2):(x_1,x_2,x_3)\in\mathcal{X}} p_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3).$$

$$p_{X_1,X_3}(x_1,x_3) = \sum_{(x_2,x_4):(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathcal{X}} p_{X_1,X_2,X_3,X_4}(x_1,x_2,x_3,x_4).$$

Función de densidad generalizada

En general, para no tener que diferenciar entre VeA continuo y discreto vamos a considerar una función de densidad generalizada

- Si $\mathbf{X}$ está compuesto por V.A. continuas, entonces $f_{\mathbf{X}}$ sigue la definición vista.
- Si $\mathbf{X}$ está compuesto por V.A discretas que toman valores en $\boldsymbol{x} = \xi_i$, $i = 1, 2, \cdots$ entonces la función de densidad generalizada toma la siguiente forma

$$f_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{x}) = \sum_i p_{\mathbf{X}}(\xi_i)\delta(\boldsymbol{x} - \xi_i)$$

Utilizando esta generalización, podemos trabajar las fórmulas en forma más genérica, sin tener que diferenciar entre la existencia de una función de densidad o no.

Condicionalidad

Distribuciones condicionales

Al analizar varias VA en forma conjunta es interesante introducir el concepto de condicionalidad. Para ello, definimos la CDF condicionada a un evento A que caracteriza el comportamiento de $\mathbf{X}$ cuando sabemos que A ocurrió. Si $\mathbb{P}(A) > 0$, tenemos:

$$F_{\mathbf{X}|A}(\boldsymbol{x}) = \mathbb{P}(\mathbf{X} \leq \boldsymbol{x}|A) = \frac{\mathbb{P}(\mathbf{X} \leq \boldsymbol{x}, A)}{\mathbb{P}(A)}.$$

PDF condicional

Si el VeA es de tipo continuo, nos interesa analizar las PDF condicionales del vector. Para hacer el tratamiento más concreto tomamos $n = 3$. Entonces, queremos obtener $F_{X2,X3|X1=x1}(x_2, x_3|x_1)$. Partimos de $F_{X2,X3|A}(x_2, x_3|A)$, donde

$$A = \{x_1 < X_1 \leq x_1 + \Delta\}.$$

Entonces,

$$\mathbb{P}(X_1 \in A) = \int_{u \in A} f_{X_1}(u)du = \int_{x_1}^{x_1+\Delta} f_{X_1}(u)du = F_{X_1}(x_1 + \Delta) - F_{X_1}(x_1)$$

y

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 \in A, X_2 \leq x_2, X_3 \leq x_3) &= \int_{x_1}^{x_1+\Delta} \int_{-\infty}^{x_2} \int_{-\infty}^{x_3} f_{X_1X_2X_3}(u, v, w)dudvdw \\ &= F_{X_1,X_2,X_3}(x_1 + \Delta, x_2, x_3) - F_{X_1,X_2,X_3}(x_1, x_2, x_3)\end{aligned}$$

PDF condicional

Luego,

$$F_{X2,X3|A}(x_2, x_3|A) = \frac{F_{X_1,X_2,X_3}(x_1+\Delta, x_2, x_3) - F_{X_1,X_2,X_3}(x_1, x_2, x_3)}{F_{X_1}(x_1+\Delta) - F_{X_1}(x_1)}$$

$$= \frac{\frac{F_{X_1,X_2,X_3}(x_1+\Delta,x_2,x_3)-F_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3)}{\Delta}}{\frac{F_{X_1}(x_1+\Delta)-F_{X_1}(x_1)}{\Delta}}.$$

Usando límites, tenemos

$$F_{X_2,X_3|\{X_1=x_1\}}(x_2, x_3|x_1) =$$

$$\lim_{\Delta\to 0} F_{X_2,X_3|\{x_1\leq X_1\leq x_1+\Delta\}}(x_2, x_3|x_1 \leq X_1 \leq x_1+\Delta) =$$

$$\frac{\frac{\partial F_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_1}}{\frac{dF_{X_1}(x_1)}{dx_1}}.$$

PDF condicional

Finalmente, la PDF condicional resulta

$$
\begin{aligned}
f_{X_2,X_3|X_1=x_1}(x_2, x_3|x_1) &= \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} F_{X_2,X_3|\{X_1=x_1\}}(x_2, x_3|x_1) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} \frac{\frac{\partial F_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_1}}{\frac{dF_{X_1}(x_1)}{dx_1}} \\
&= \frac{\frac{\partial^3 F_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3}}{f_{X_1}(x_1)} = \frac{f_{X_1,X_2,X_3}(x_1, x_2, x_3)}{f_{X_1}(x_1)}.
\end{aligned}
$$

En forma general

PDF condicional

$$
f_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{f_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{f_{\mathbf{Y}}(\boldsymbol{y})}
$$

PMF condicional

Cuando **X** es un VeAD es posible condicionar en un valor específico de una VA. Luego, la *PMF condicional* se define directamente a partir de la definición de probabilidad condicional. Por ejemplo:

$$p_{X_1,X_3|X_2=x_2}(x_1,x_3) = \frac{p_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3)}{p_{X_2}(x_2)}.$$

$$p_{X_1|X_2=x_2,X_3=x_3}(x_1) = \frac{p_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3)}{p_{X_2,X_3}(x_2,x_3)}.$$

En este caso nuevamente,

PMF condicional

$$p_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{p_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{p_{\mathbf{Y}}(\boldsymbol{y})}$$

Notación

Vamos a utilizar la siguiente notación en forma equivalente para determinar condicionalidad en distribuciones, densidades, y funciones de masa de probabilidad:

$$F_{\mathbf{X}_1|\mathbf{X}_2=\boldsymbol{x}_2}(\boldsymbol{x}_1) = F_{\mathbf{X}_1}(\boldsymbol{x}_1|\mathbf{X}_2 = \boldsymbol{x}_2) = F(\boldsymbol{x}_1|\boldsymbol{x}_2)$$
$$f_{\mathbf{X}_1|\mathbf{X}_2=\boldsymbol{x}_2}(\boldsymbol{x}_1) = f_{\mathbf{X}_1}(\boldsymbol{x}_1|\mathbf{X}_2 = \boldsymbol{x}_2) = f(\boldsymbol{x}_1|\boldsymbol{x}_2)$$
$$p_{\mathbf{X}_1|\mathbf{X}_2=\boldsymbol{x}_2}(\boldsymbol{x}_1) = p_{\mathbf{X}_1}(\boldsymbol{x}_1|\mathbf{X}_2 = \boldsymbol{x}_2) = p(\boldsymbol{x}_1|\boldsymbol{x}_2)$$

Regla de la cadena

Podemos hallar la PDF y la PMF conjuntas a partir de las condicionadas. Por ejemplo:

$$
\begin{aligned}
& f_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3) = \\
& = f_{X_1}(x_1) f_{X_2,X_3}(x_2,x_3|X_1=x_1) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) f_{X_3}(x_3|X_1=x_1,X_2=x_2) \\
& = f_{X_3}(x_3) f_{X_1,X_2}(x_1,x_2|X_3=x_3) = f_{X_3}(x_3) f_{X_2}(x_2) f_{X_1}(x_1|X_2=x_2,X_3=x_3) \\
& = f_{X_2}(x_2) f_{X_1,X_3}(x_1,x_3|X_2=x_2) = f_{X_2}(x_2) f_{X_3}(x_3) f_{X_1}(x_1|X_2=x_2,X_3=x_3)
\end{aligned}
$$

En forma similar, tenemos las PMF conjunta de 3 VAD:

$$
\begin{aligned}
& p_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3) = \\
& = p_{X_1}(x_1) p_{X_2,X_3}(x_2,x_3|X_1=x_1) = p_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) p_{X_3}(x_3|X_1=x_1,X_2=x_2) \\
& = p_{X_3}(x_3) p_{X_1,X_2}(x_1,x_2|X_3=x_3) = p_{X_3}(x_3) p_{X_2}(x_2) p_{X_1}(x_1|X_2=x_2,X_3=x_3) \\
& = p_{X_2}(x_2) p_{X_1,X_3}(x_1,x_3|X_2=x_2) = p_{X_2}(x_2) p_{X_3}(x_3) p_{X_1}(x_1|X_2=x_2,X_3=x_3)
\end{aligned}
$$

Independencia entre variables aleatorias

Dos VA X e Y son *independientes* si

$$F_{X,Y}(x,y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Y \leq y) = F_X(x)F_Y(y).$$

- Si X, Y son VAD, la condición es equivalente a

$$p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)p_Y(y).$$

- Si X, Y son VAC la condición es equivalente a

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y).$$

- En general, las componentes de un vector aleatorio **X** son mutuamente independientes si $F_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i)$.
- Dos VeAs **X** e **Y** son independientes si $F_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = F_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{x})F_{\mathbf{Y}}(\boldsymbol{y})$.

Ejercicios

Ejercicio

Sea $Y = X + N$, con X y N variables aleatorias independientes.

1. Demostrar que $f_Y(y) = f_X(y) * f_N(y)$.
2. Demostrar que $f_{Y|X}(y|x) = f_N(y - x)$.
3. Si $X \in \{0, 1\}$ es una variable aleatoria Bernoulli con $\mathbb{P}(X = 0) = p$ y $\mathbb{P}(X = 1) = q = 1 - p$, expresar y representar $f_Y(y)$ y $f_{Y|X}(y|x)$.

Ejercicio

Sea $\mathbf{X} = [X_1, X_2]$ un vector aleatorio continuo. Si $f_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{x})$ fuera conocida, cómo haría para calcular las siguientes probabilidades?

- $\mathbb{P}(X_1 - X_2 \leq 2)$
- $\mathbb{P}(\text{máx}(X_1, X_2) \leq -1)$
- $\mathbb{P}(\text{mín}(|X_1|, |X_2|) \geq 2)$
- $\mathbb{P}(XY \geq 0)$

Ejercicio

Sean X, Y, y Z V.A independientes. Hallar las siguientes probabilidades en función de $F_X(x)$, $F_Y(y)$, $F_Z(z)$

- $\mathbb{P}(|X| \leq 5, Y > 3, Z^2 \leq 2)$
- $\mathbb{P}(\max(X, Y, Z) \leq -1)$

Ejercicio

Sea $\mathbf{X} = [X_1, X_2]$ un vector aleatorio continuo cuya PDF es

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) = k(x_1 + x_2) \qquad 0 < x_1 < 1 \quad 0 < x_2 < 1$$

.

- Hallar k
- Hallar $F_{\mathbf{X}}$
- Hallar $f_{X_1}(x_1)$ y $f_{X_2}(x_2)$.