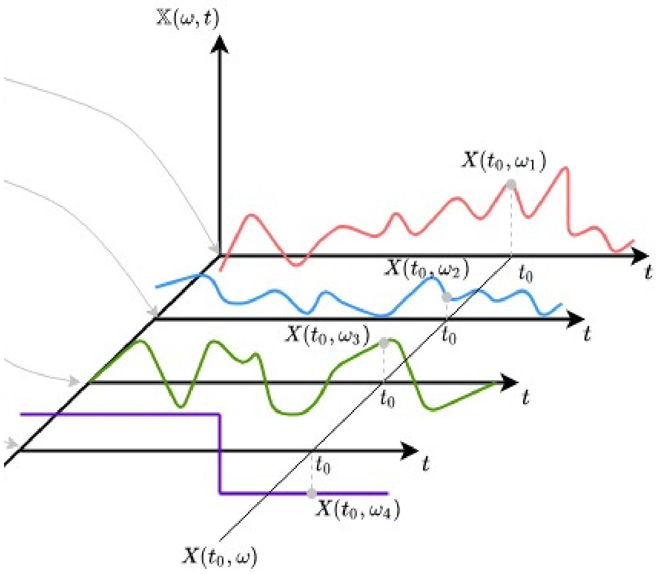
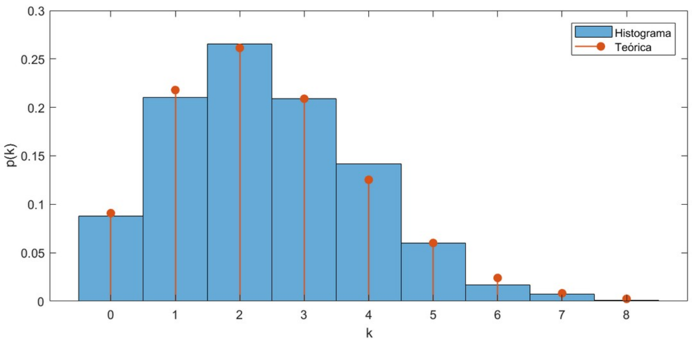
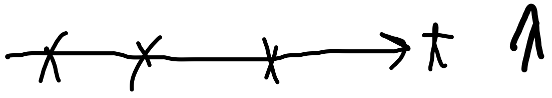
Procesos estocásticos (86.09)

- Procesos Poisson
- Correlación cruzada







ARRIBOS

3 variables importantes:

$N(t)$: ARRIBOS en $[0,t] \sim Poi(\lambda \cdot t)$

T_k : tiempo entre el arribo k y k+1 $\sim \mathcal{E}(\lambda)$

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} T_i \sim \Gamma(k, \lambda)$$

Proceso de Poisson

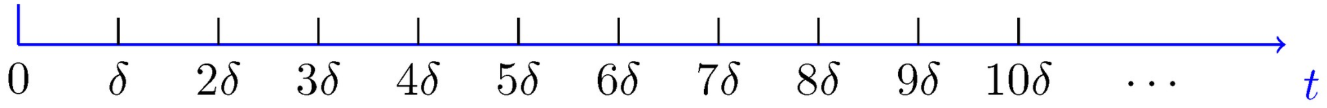
Proceso de Poisson

Sea $\lambda > 0$ fijo. El proceso de conteo $\{N(t), t \in [0, \infty)\}$ se llama **Proceso de Poisson** de tasa λ si se cumplen las siguientes condiciones:

1. $N(0) = 0$;
2. $N(t)$ tiene incrementos independientes;
3. $N(\tau) \sim \text{Poisson}(\lambda\tau)$, donde $N(\tau)$ es el número de arribos en un intervalo de longitud $\tau > 0$.

Construcción de un Proceso de Poisson

1. Dado un intervalo [0, T] dividido en n intervalos de duración $\delta = T/n$.



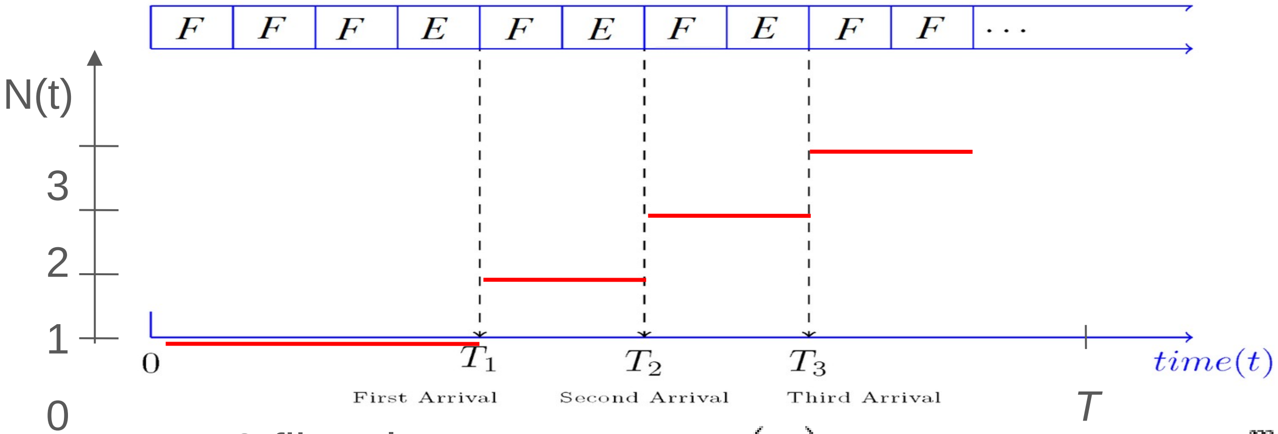
2. En cada intervalo podemos pensar que tiramos una moneda con probabilidad de cara $p = \lambda\delta$.

   Sea B_k : Ocurrencia en el k-ésimo intervalo. $B_k \sim Ber(p)$.

   Y_n : Cantidad de ocurrencia en n intervalos. $Y_n = \sum B_k \sim Bin(n, p)$

Proceso de Poisson

Defino N(T): número de arribos en el intervalo [0, T), N(t)~Bin(n, p)



Para un μ > 0 fijo tal que $np \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu$, $\binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{\mu^m e^{-\mu}}{m!}$

A medida que δ → 0 $\mathbb{P}(N(T) = m) = \dfrac{\mu^m e^{-m}}{m!}, \quad m \in \mathbb{Z}_0, \quad \mu = \lambda T$

Proceso de Poisson

1. Definir: - λ: tasa del proceso de Poisson.
   - T: tiempo total a simular.
   - δ: intervalo de tiempo ($\lambda\delta \lll 1$).

2. Calcular cantidad de intervalos $n = T/\delta$ (Cantidad de ensayos Bernoulli)

3. Definir un variable arribo = zeros(n).
4. Para cada paso i desde 1 hasta n:
   - Calcular tiempo actual $t = i*\delta$
   - Realizar un ensayo Bernoulli con probabilidad de éxito $p = \lambda\delta$.
   - Si el ensayo Bernoulli es exitoso:
     - arribo[i] = 1

Actividad 1

Actividad 1

Generar una aproximación del proceso de Poisson con $\lambda=0.5$ arribos por segundo, a partir de un proceso Bernoulli. Tomar un intervalo de $T=10$ segundos y dividirlo en $n=1000$ intervalos.

1. Simular 2000 realizaciones del proceso. Graficar las primeras 5 realizaciones del proceso.
2. Estimar la función de probabilidad de la cantidad de arribos en $[0,T]$. Comparar con la teórica.
3. Estimar la media del proceso y comparara con la teórica.
4. Estimar la función de densidad del tiempo hasta el primer arribo.

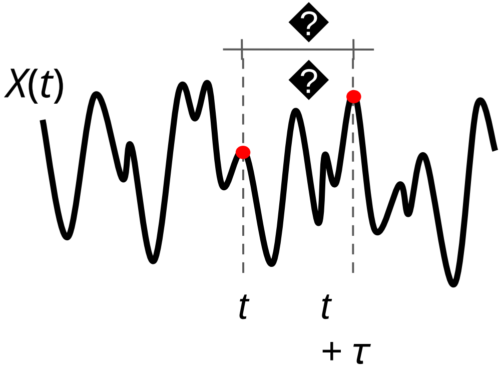
Función de autocorrelación

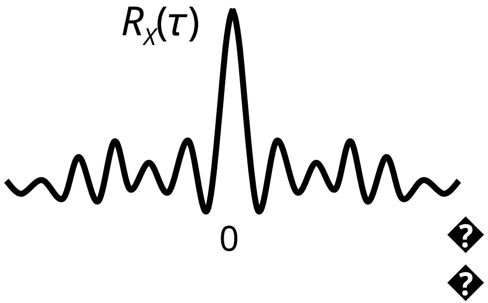
Función de autocorrelación – ESA

Función de autocorrelación de un proceso ESA

$R_X(\tau) = \mathbb{E}[\,X(t)X(t+\tau)\,]$ Tiempo continuo ($t_1 = t$; $t_2 = t+\tau$)

$R_X(k) = \mathbb{E}[\,X(n)X(n+k)\,]$ Tiempo discreto ($n_1 = n$; $n_2 = n+k$)



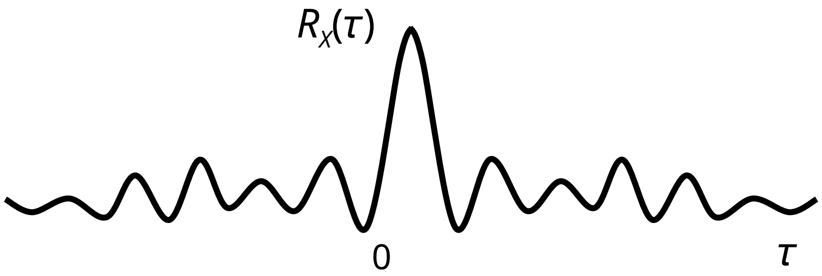


Función de autocorrelación – Propiedades

Sea X(t) un proceso ESA real con media μ_X, función de autocorrelación $R_X(\tau)$ y función de autocovarianza $C_X(\tau)$.

Propiedades:

- $R_X(\tau) = C_X(\tau) + \mu_X^2$
- $R_X(0) \geq 0$
- $R_X(\tau) = R_X(-\tau)$
- $|R_X(\tau)| \leq R_X(0)$
- *Si es periódica en T:* $R_X(0) = R_X(kT)$



Estimadores de la autocorrelación

Para el estimador sesgado de la autocorrelación de un proceso $X(n)$ se aplica nuevamente la media muestral:

$$\hat{R}_X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-k-1} X(n)X(n+k) \quad ; \; k \geq 0$$

$$\hat{R}_X(k) = \hat{R}_X(-k)$$

Estimador sesgado

Notar que el límite superior de la suma no es $N–1$, sino $N–k–1$, para no exceder el largo de la realización.

Estimadores de la autocorrelación

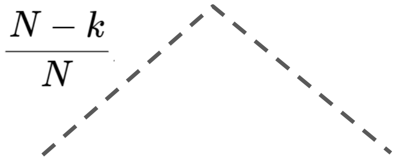
Análisis de sesgo:

$$\mathbb{E}[\hat{R}_X(k)] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-k-1} X(n)X(n+k)\right] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-k-1} \mathbb{E}\left[X(n)X(n+k)\right] =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-k-1} R_X(k) = \frac{N-k}{N} R_X(k)$$

Por lo tanto, como la media del estimador no es igual la autocorrelación verdadera, el **estimador es sesgado**.

$$\mathbb{E}[\hat{R}_X(k)] = \frac{N-k}{N} R_X(k)$$



Estimadores de la autocorrelación

Para el estimador insesgado de la autocorrelación de un proceso $X(n)$ se obtiene modificando el estimador sesgado para compensar el sesgo:

$$\hat{R}_X(k) = \frac{1}{N-k} \sum_{n=0}^{N-k-1} X(n)X(n+k) \quad ; \; k \geq 0$$

$$\hat{R}_X(k) = \hat{R}_X(-k)$$

Estimador insesgado

En este caso se verifica:

$$\mathbb{E}[\hat{R}_X(k)] = R_X(k)$$

Autocorrelación en MATLAB

Estimador sesgado de la autocorrelación en MATLAB (notar que por defecto no incluye el factor 1/N)

Código MATLAB

```
r_xy = xcorr(x)              % estimador sesgado (no incluye 1/N)
r_xy = xcorr(x,'biased')     % estimador sesgado (incluye 1/N)
```

Actividad 2

Actividad 2

Sean dos procesos aleatorios gaussianos blancos ESA, $X(n) \sim \mathcal{N}(0,20)$ y $Y(n) \sim \mathcal{N}(3,20)$ de largo $N = 1000$. Estime las funciones de autocorrelación $R_X(k)$ y $R_Y(k)$. Grafique cada función comparándola con las teóricas (recuerde que $R(k) = C(k) + \mu^2$), para los siguientes casos:

1. El estimador **sesgado**. Ayuda: xcorr(x, 'biased').
2. El estimador **insesgado**. Ayuda: xcorr(x, 'unbiased').
3. Grafique $R_Y(k)$ para el estimador **insesgado** multiplicado por una ventana de Bartlett $v_B(k) = (N - |k|) / N$.
4. Analice los resultados obtenidos y saque conclusiones.

Actividad 2

El estimador insesgado

- Representa mejor el valor medio
- Tiene mayor ruido de estimación conforme aumenta k

El estimador sesgado

- Posee un efecto de ventaneo debido al sesgo
- Posee menor error de estimación para k grandes
- Es el que se utiliza normalmente.

Función de correlación cruzada

Función de correlación cruzada

Dados dos procesos escalares $X(t)$ y $Y(t)$, la función de correlación cruzada es

$$R_{X,Y}(t_1, t_2) = \mathbb{E}[X(t_1)Y^*(t_2)].$$

Sean $X(t)$, $Y(t)$ dos procesos ESA. Decimos que son Conjuntamente Estacionarios en Sentido Amplio (CESA) si

$$R_{X,Y}(t, t+\tau) = f(\tau).$$

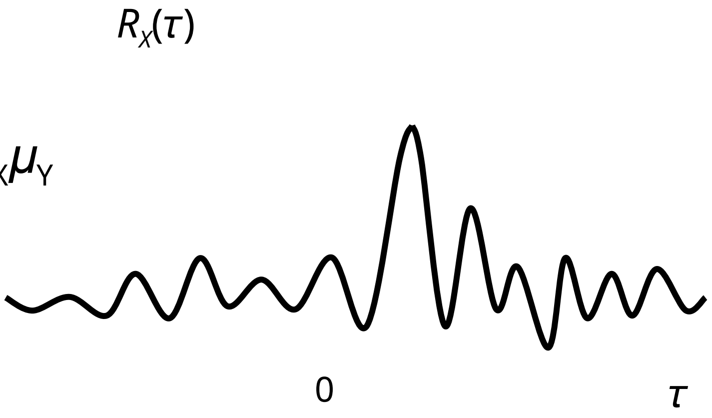
Función de correlación cruzada

Sean X(t) e Y(t) procesos CESA, con función de correlación cruzada $R_{XY}(\tau)$

Propiedades:

- *Si* $R_{XY}(\tau) = 0$, X e Y son procesos ortogonales
- *Si X e Y son independientes:* $R_{XY}(\tau) = \mu_X \mu_Y$
- $R_{XY}(\tau) = R^*_{YX}(-\tau)$

Notar los subíndices de la correlación cruzada (no es simétrica)!



Correlación cruzada en MATLAB

Estimador sesgado de correlación cruzada en MATLAB (notar que tampoco incluye el factor 1/N por defecto)

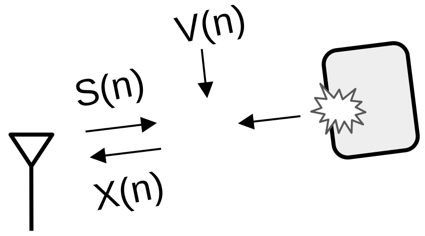
Código MATLAB

```
r_xy = xcorr(x,y)             % estimador sesgado (no incluye 1/N)
r_xy = xcorr(x,y,'biased')   % estimador sesgado (incluye 1/N)
```

Actividad 3

Actividad 3

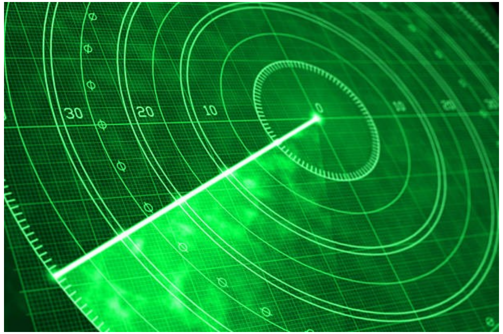
Re requiere identificar el tiempo de propagación de ida y vuelta entre la transmisión y recepción de una señal que se transmite y rebota en un objetivo lejano.



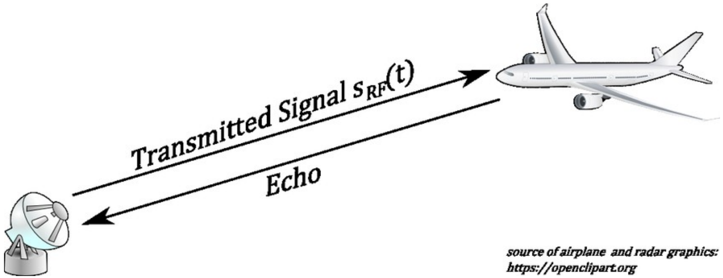
Supongamos que la señal recibida se modela como un proceso aleatorio $X(n) = 2S(n-2n_0) - 1 + V(n)$, donde S(n) es una secuencia binaria $B_n \sim$ Ber(p), n_0 es el tiempo de propagación que se desea medir (entre transmisor y objetivo, en muestras) y V(n) ruido blanco inmerso en la señal recibida.

Utilice la correlación cruzada para determinar n_0. Grafique la serie X(n), S(n) y la correlación cruzada.

Correlación cruzada - Ejemplos aplicados



Radares



GPS