Respuesta de Sistemas Dinámicos

Sistemas LTI

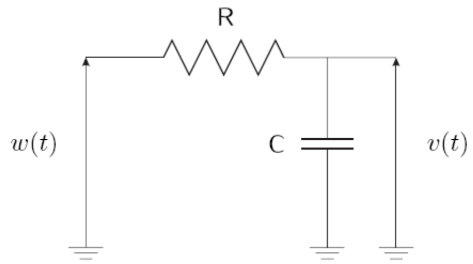
Ejercicio 1 - Senoidal ruidosa

Sea $X(n) = A\cos(2\pi\omega n + \Phi) + N(n)$, donde A y ω_0 son constantes, Φ se encuentra uniformemente distribuida en $[0; 2\pi)$ y $N(n)$ es ruido blanco de densidad de potencia σ^2.

1. Obtenga la media $\mathbb{E}[X(n)]$.
2. Si $X(n)$ es un proceso ESA, obtenga la densidad espectral de potencia del mismo.
3. Suponga que $X(n)$ es la señal de entrada a un filtro pasabanda de respuesta en frecuencia
$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega - \omega_0| \leq \frac{W}{2} \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$
Compare la relación señal a ruido (SNR) a la entrada y a la salida del filtro. Extraiga conclusiones.

Ejercicio 2 - Circuito RC

El circuito RC de la figura es excitado por una señal de ruido blanco con densidad espectral de potencia constante e igual a $N_0/2$. Calcule y grafique la densidad espectral de potencia de la salida del filtro y el valor de potencia total.



Ejercicio 3 - Promediador en tiempo continuo

Supongamos que $X(t)$ es un proceso integrable. La integral

$$Y(t) = \frac{1}{2T}\int_{t-T}^{t+T} X(u)du$$

representa el promedio del proceso $X(t)$ en el intervalo $(t - T, t + T)$.

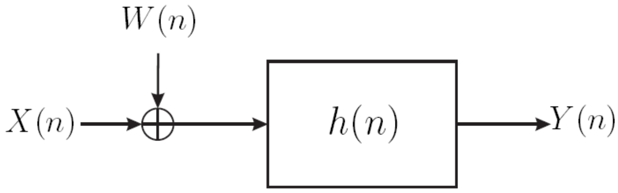
1. Identifique la respuesta en frecuencia $H(\omega)$ del sistema que al ser excitado por $X(t)$ produce a $Y(t)$ como salida.

2. Encuentre la media, la función de autocorrelación y la densidad espectral de potencia de $Y(t)$.

3. ¿Qué tipo de filtrado representa el promediador?

Ejercicio 4 - Escalamiento de señal ruidosa

Considere el sistema LTI mostrado en la figura, donde $X(n)$ y $W(n)$ son procesos ESA descorrelacionados entre sí. La varianza de $W(n)$ es σ_W^2 y la de $X(n)$ es σ_X^2.



1. Hallar la función de autocorrelación del proceso $Y(n)$.

2. Definiendo $E(n) = Y(n) - X(n)$, determine su función de autocorrelación.

3. Si $h(n) = \alpha\,\delta(n)$, elija el valor de α que minimice la varianza de $E(n)$.

Ejercicio 5 - Sistema no lineal

Considere el proceso aleatorio en tiempo continuo $X(t)$ definido por las siguientes 4 realizaciones, todas ellas equiprobables:

$$x_1(t) = -1, \qquad x_2(t) = -2, \qquad x_3(t) = \sin(t), \qquad x_4(t) = \cos(t).$$

1. Calcule la media y la función de autocorrelación del proceso. Determine si el proceso es ESA.

2. Suponga que el proceso $X(t)$ ingresa a un sistema rectificador cuya salida es $Y(t) = X^2(t)$. Calcule la media y la autocorrelación del proceso de salida e indique si el proceso es ESA.

Ejercicio 6 - Superposición de procesos

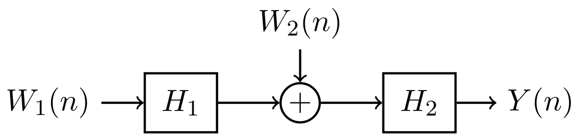
Sea $X(t)$ un proceso ESA en tiempo continuo con media μ_X y autocovarianza $C_X(\tau)$. Sea W un proceso ESA de media nula y autocovarianza $C_W(\tau)$. Demuestre que si W y X están descorrelacionados la densidad espectral de potencia de $Y(t) = aX(t) + bW(t)$ es

$$S_Y(\omega) = a^2 S_X(\omega) + b^2 S_W(\omega),$$

donde S_X y S_W son las densidades espectrales de potencia de X y W, respectivamente. a y b son constantes cualesquiera.

Ejercicio 7

Considere el siguiente sistema en tiempo discreto:



donde W_1 y W_2 son ruidos blancos independientes de media nula y varianza unitaria. Halle la autocorrelación de Y sabiendo que H_1 y H_2 tienen las siguientes transferencias:

$$H_1(z) = 1 + \frac{1}{2}z^{-1} \qquad\qquad H_2(z) = 1 + \frac{1}{4}z^{-1}.$$

Sugerencia: utilice el Ejercicio 6 para calcular en forma separada las densidad de potencia obtenidas por cada proceso.

Ejercicio 8 - Modulación de fase

Sea $X(t)$ un proceso Gaussiano ESA con media nula y autocorrelación $R_X(\tau) = \frac{1}{1+|\tau|}$ y sea U un variable aleatoria uniforme en $(0,\ 2\pi)$, independiente de X. Halle la media y autocorrelación del proceso:

$$Y(t) = \cos(X(t) + U)$$

y analice si es ESA.

Ayuda: exprese el coseno como exponenciales complejas y utilice la función característica.

Procesos ARMA

Ejercicio 9 - Procesos MA-m con entrada blanca

Un proceso $Y(n)$ es un proceso MA-m (*moving average*) si responde a la recursión:

$$Y(n) = a_0 X(n) + a_1 X(n-1) + ... + a_m X(n-m),$$

donde $a_0, ..., a_m$ son constantes y $X(n)$ es un proceso ESA, típicamente un proceso de ruido blanco[1].

1. Demuestre que el proceso MA-m puede escribirse matricialmente como:

$$Y(n) = \mathbf{a}^T \mathbf{x}(n),$$

donde

$$\mathbf{a} = [a_0, \ldots, a_m]^T,$$

$$\mathbf{x}(n) = [X(n), ..., X(n-m)]^T.$$

2. Suponga que el proceso X es un proceso blanco de media nula, es decir,

$$\mathbb{E}[X(n)X(n+k)] = \sigma_x^2 \delta(k).$$

[1]Estrictamente se trata de un sistema LTI causal representado por la ecuación en diferencias indicada.

Demuestre que la autocorrelación del proceso MA-m, $R_Y(k) = \mathbb{E}[Y(n)Y(n+k)]$, para $k > 0$ puede escribirse como:

$$R_Y(k) = \mathbf{a}^T \mathbb{E}\left[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}(n+k)^T\right]\mathbf{a}$$
$$= \mathbf{a}^T \begin{bmatrix} a_k \\ \vdots \\ a_m \\ \mathbf{0}_k \end{bmatrix} \sigma_x^2,$$

donde $\mathbf{0}_k$ es una columna de ceros de largo k. Deduzca entonces que si el MA-m es excitado por ruido blanco entonces $|R_Y(k)| = 0$ si $|k| > m$.

3. Utilizando el inciso anterior, halle la media y la autocorrelación de un proceso MA-3 dado por la siguiente recursión:

$$Y(n) = X(n) + \frac{1}{2}X(n-2) + \frac{1}{3}X(n-3),$$

cuando es excitado por un proceso blanco de media nula y varianza σ_X^2. ¿Cómo hallaría la autocovarianza si la media del proceso X fuese no nula?

Ejercicio 10 - Relación de recurrencia de primer orden

Suponga que tiene la siguiente relación de recurrencia:

$$y(n) = ay(n-1) + b, \quad n = 1, 2, ...,$$

donde a y b son constantes ($|a| < 1$), y la condición inicial $y(0) = y_0$.

1. Demuestre que la solución de la ecuación es de la forma:

$$y(n) = c_1 + c_2 r^n,$$

donde c_1, c_2 y r son constantes a determinar.

2. Halle las constantes c_1, c_2 y r en función de a, b e y_0.
3. ¿Qué sucede si $|a| > 1$?

Ejercicio 11 - MA Uniforme y Gaussiano

Considere $U(n)$, un proceso i.i.d. de media nula y varianza σ^2, a partir del cual se obtiene un nuevo proceso $X(n) = U(n) + U(n-1)$.

1. Obtenga la función de autocorrelación del proceso $X(n)$ cuando $U(n)$ tiene una distribución uniforme en el intervalo $[-\sqrt{3}\sigma, +\sqrt{3}\sigma]$.

2. ¿Cómo varía su respuesta si $U(n) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$?

3. Obtenga realizaciones de los dos procesos definidos en los puntos anteriores y explique sus diferencias.

Ejercicio 12 - Cascada de MAs

Sea $X(n)$ ruido blanco de media nula y potencia σ_X^2. La señal $X(n)$ es filtrada por una realización en serie de dos filtros.

$$\begin{aligned} Y(n) &= 0{,}5\,[X(n) + X(n-1)] \\ Z(n) &= Y(n) - Y(n-1). \end{aligned}$$

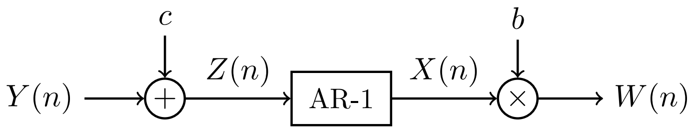
Calcular $\mathbb{E}[Z]$, σ_Z^2, $R_Z(k)$ y $S_Z(\omega)$.

Ejercicio 13 - Sistema blanqueador

Se dispone de muestras de un proceso ESA gaussiano $Y(n)$ con media $\mu_Y = \frac{1}{2}$ y autocovarianza:

$$C_Y(k) = \delta(k) + \frac{1}{4}\left[\delta(k-1) + \delta(k+1)\right].$$

Se desea procesar a Y de modo de transformarlo en un proceso blanco $W(n)$ de media nula y varianza $\sigma_W^2 = 1$. Para ellos se implementa el siguiente sistema:



La constante c se elige de modo que el proceso $Z(n)$ tenga media nula. El proceso AR-1 es de la forma:

$$X(n) = aX(n-1) + Z(n),$$

es utilizado para eliminar la correlación entre las muestras (a es una constante a determinar tal que $|a| < 1$). Por último, la constante b es utilizada para ajustar la varianza de $X(n)$ al valor deseado.

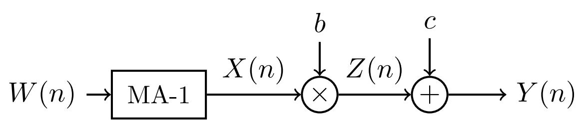
1. Determine la constante c de modo que el proceso $Z(n)$ tenga media nula, y halle la autocorrelación de Z.
2. Determine a y b de modo que W cumpla las especificaciones pedidas.
3. ¿Qué puede concluir de la relación entre los procesos MA-1 y un proceso AR-1? ¿Y en el caso del MA-m y el AR-m?

Ejercicio 14 - Generación de muestras de un proceso

Se desea generar muestras de un proceso ESA $Y(n)$ con media $\mu_Y = \frac{1}{2}$ y autocovarianza:

$$C_Y(k) = \delta(k) + \frac{1}{4}\left[\delta(k-1) + \delta(k+1)\right].$$

Para ello se tienen muestras de un proceso de ruido blanco $W(n)$ de media nula y varianza unitaria. Para generar las muestras de Y se utiliza el siguiente sistema:



El proceso MA-1 es de la forma:

$$X(n) = aW(n-1) + W(n).$$

Las constantes a, b y c deben determinarse de modo que el proceso Y cumpla lo pedido.

1. Utilice lo aprendido en el ejercicio 9 para justificar que la estructura propuesta tiene sentido.
2. Halle $\mathbb{E}[Z(n)]$ y verifique que no depende de a ni de b. Elija c de modo que $\mathbb{E}[Y(n)] = \mu_Y = \frac{1}{2}$.
3. Determine las constantes a y b de modo que la covarianza de Z sea igual a la de Y, es decir: $C_Z(k) = C_Y(k)$ para todo k. Elija a de modo que $|a| < 1$.

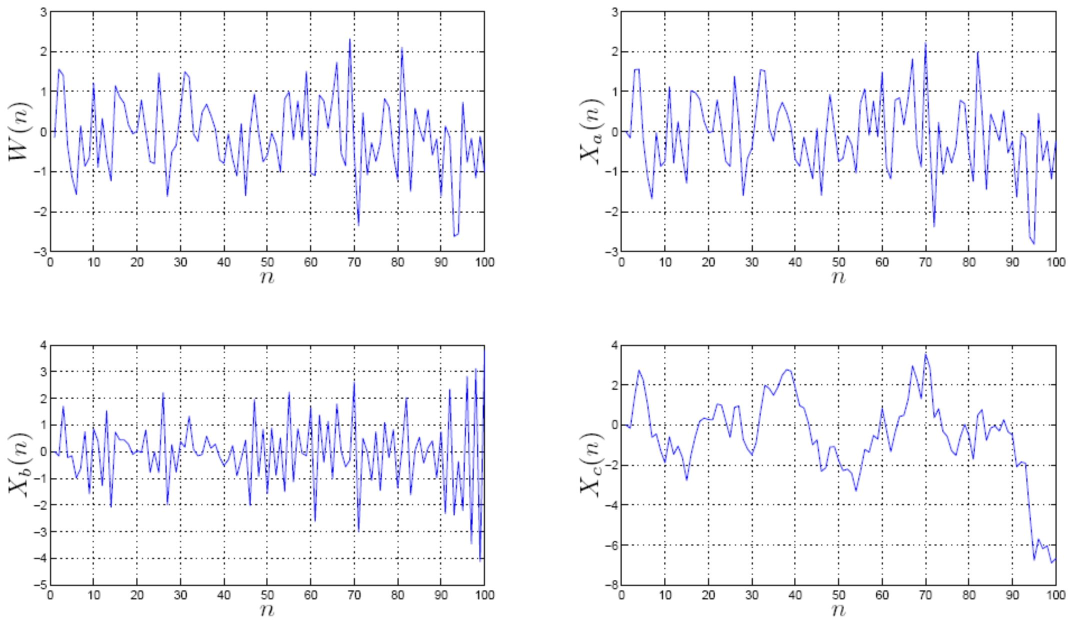
Ejercicio 15 - Realizaciones de procesos AR-1

Se simula numéricamente un proceso autoregresivo de primer orden

$$X(n) = \alpha X(n-1) + W(n)$$

excitado por un ruido blanco de media nula y varianza unitaria. Se realizan tres simulaciones diferentes mostradas en la figura utilizando los siguientes valores del parámetro α:

$$\alpha_1 = 0{,}95 \quad \alpha_2 = 0{,}1 \quad \alpha_3 = -0{,}95$$



1. Asigne el coeficiente α que corresponde a cada uno de los gráficos de la figura.
2. Grafique la autocorrelación del proceso $X(k)$ en cada caso.

Ejercicio 16 - Procesos AR-2

El modelo del proceso AR2, $X(n)$ es:

$$X(n) = a_1X(n-1) + a_2X(n-2) + W(n)$$

donde $W(n)$ es una secuencia de ruido blanco y a_1 y a_2 son coeficientes reales.

1. Expresar la función de transferencia $H(z)$ del sistema lineal que, excitado por la secuencia de ruido blanco, entrega como salida el proceso AR2.

2. Obtener y resolver la ecuación en diferencias que debe satisfacer la secuencia de autocorrelación.

3. Verifique analíticamente las siguientes propiedades:

   a) En el caso de polos reales y distintos, la secuencia de autocorrelación decae exponencialmente. Analizar el caso en que ambos polos son positivos, ambos negativos y uno positivo y otro negativo.

   b) En el caso de polos complejos conjugados, la secuencia de autocorrelación es pseudoperiódica.

Ejercicio 17

Se sabe que cierto proceso ESA gaussiano X tiene media nula y se conocen 3 valores de su autocorrelación $R_X(0) = 1$, $R_X(1) = 0$ y $R_X(2) = \frac{1}{4}$.

1. Halle un sistema AR-2:

   $$Y(n) + aY(n-1) + bY(n-2) = W(n)$$

   donde W es ruido blanco de media nula, varianza σ^2, tal que la autocorrelación de Y coincida con los valores conocidos de R_X. Luego de hallar a, b, σ^2, obtenga la correlación completa de Y.
2. Halle la densidad espectral de potencia del proceso Y, expresándola como una función real, y realice un gráfico de la misma.
   Ayuda: halle la transferencia del sistema y use la expresión de la PSD a la salida de un sistema lineal, no haga la transformada de la autocorrelación de Y.

Ejercicio 18 - Modelos AR-m

Suponga que se estima la función de autocorrelación de un proceso ESA $X(n)$ alrededor de $k = 0$ y se obtienen los siguientes valores:

$$R_X(0) = 2, \qquad R_X(1) = 0{,}8 \qquad R_X(2) = 0{,}82 \qquad R_X(3) = 0{,}728 \qquad R_X(4) = 0{,}6562$$

Determine modelos AR de orden 1, 2, 3 y 4 para el proceso $X(n)$ considerando las condiciones anteriores. ¿Qué conclusiones puede extraer?