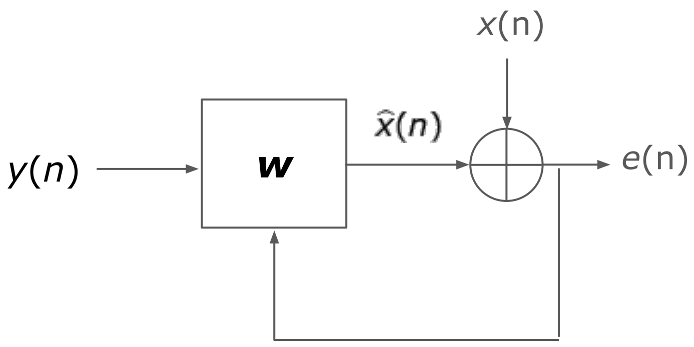
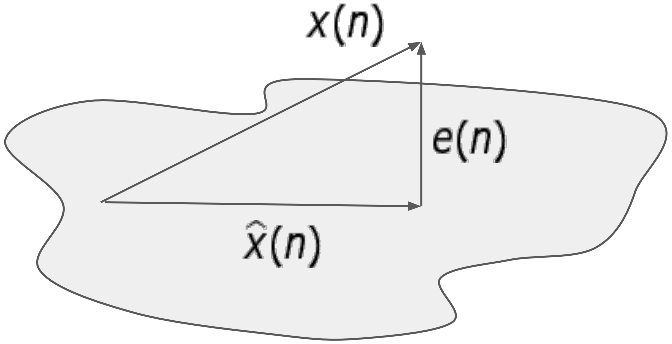
Procesos estocásticos (86.09)

- Estimación lineal
- Filtro de Wiener
- Filtros adaptativos
- Problemas aplicados





Estimador lineal para procesos aleatorios

Estimador lineal para procesos aleatorios

Sean X(n) e Y(n) son procesos aleatorios conjuntamente ESA. Queremos un estimador lineal para inferir X(n) a partir de observaciones de Y(n).

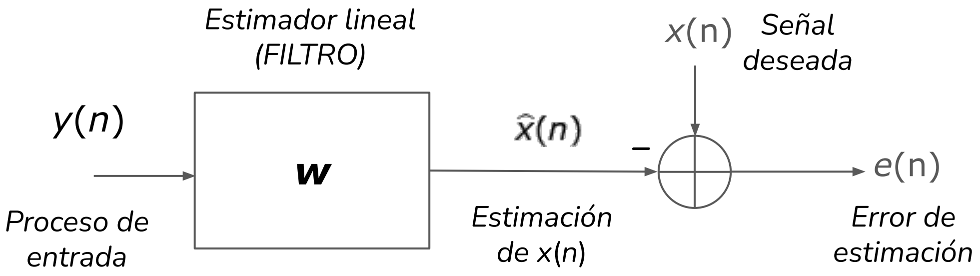
Si nos limitamos a estimadores de longitud finita, con coeficientes **w** = $\{w_0, w_1, \ldots, w_{M-1}\}$, podemos expresar el estimador como:

$$\hat{X}(n) = \sum_{i=0}^{M-1} w_i^* \, Y(n-i)$$

Filtro de Wiener

Filtro de Wiener

- $x(n)$ e $y(n)$ dos procesos CESA y de media nula
- $\boldsymbol{w}$ un estimador lineal



Problema de optimización MMSE:

Encontrar los coeficientes $\boldsymbol{w} = \{w_0, w_1, \ldots, w_{M-1}\}$ *que minimizan la* ***potencia del error*** $J(\boldsymbol{w})$:

$$J(\boldsymbol{w}) = E[|e(n)|^2] \quad \rightarrow \quad J\min$$

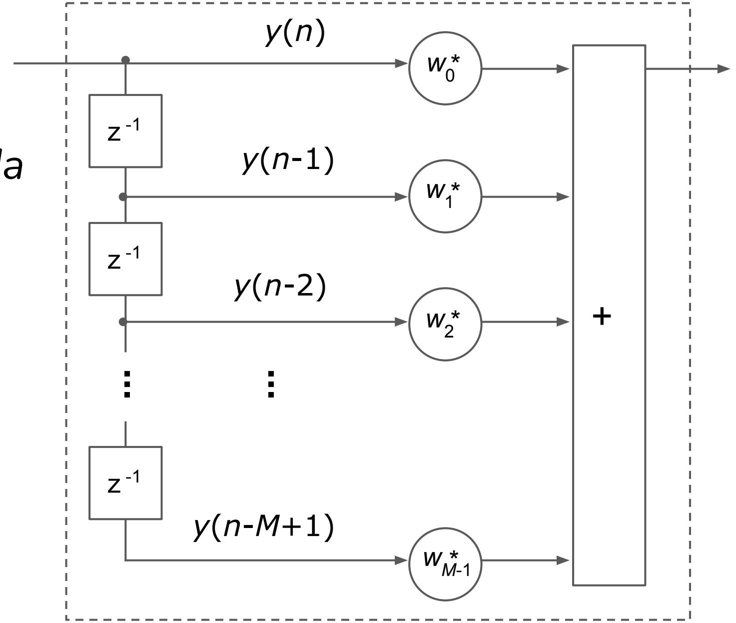
donde $e(n) = x(n) - \hat{x}(n)$ es el error de estimación

Filtro de Wiener – Para un único proceso de entrada

Filtro de Wiener de *M* coeficientes

$y(n)$

Proceso de entrada



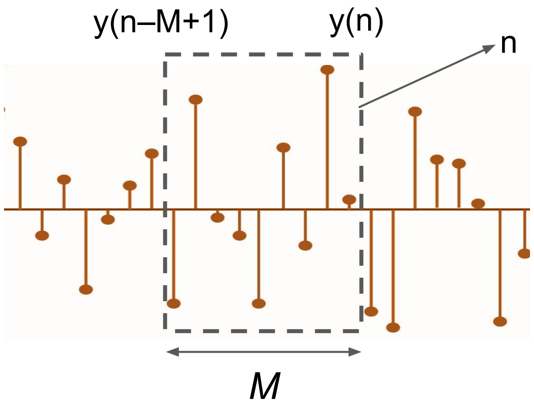
$$\hat{x}(n) = \sum_{i=0}^{M-1} w_i^* \, y(n-i)$$

Estimación de $x(n)$

Filtro de Wiener – Notación

Estimador del filtro de Wiener FIR de largo M

$$\hat{x}(n) = \sum_{i=0}^{M-1} w_i^* \, y(n-i)$$



Expresión vectorial

$$\hat{x}(n) = \underbrace{\begin{bmatrix} w_0^* & w_1^* & \cdots & w_{M-1}^* \end{bmatrix}}_{\mathbf{w}^H} \underbrace{\begin{bmatrix} y(n) \\ y(n-1) \\ \vdots \\ y(n-M+1) \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}(n)} = \mathbf{w}^H \mathbf{y}(n)$$

H: hermítico (transpuesto conjugado)

Filtro de Wiener – Notación

Vector de correlación cruzada entre **y**(n) y x(n)

$$\mathbf{R}_{yx} = \mathbf{R}_{xy}^{\ H} = \mathrm{E}[\boldsymbol{y}(n)x(n)^{*}]$$

$$\mathbf{R}_{yx} = \begin{bmatrix} R_{yx}(0) \\ R_{yx}(1) \\ \vdots \\ R_{yx}(M\text{-}1) \end{bmatrix}$$

Matriz de autocorrelación de **y**(n)

$$\mathbf{R}_{y} = \mathrm{E}[\boldsymbol{y}(n)\boldsymbol{y}(n)^{\mathrm{H}}]$$

$$\mathbf{R}_{y} = \begin{bmatrix} R_{y}(0) & R_{y}(1)^{*} & \dots & R_{y}(M\text{-}1)^{*} \\ R_{y}(1) & R_{y}(0) & \dots & R_{y}(M\text{-}2)^{*} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_{y}(M\text{-}1) & R_{y}(M\text{-}2) & \dots & R_{y}(0) \end{bmatrix}$$

Filtro de Wiener

Potencia del error

$$J(\mathbf{w}) = \sigma_x^2 - \mathbf{R}_{yx}^H \mathbf{w} - \mathbf{w}^H \mathbf{R}_{yx} + \mathbf{w}^H \mathbf{R}_y \mathbf{w}$$

Coeficientes **w** óptimos de Wiener ($\mathbf{w}_o$) que minimizan $J(\mathbf{w})$ (MMSE)

$$\mathbf{w}_o = \mathbf{R}_y^{-1} \mathbf{R}_{yx}$$

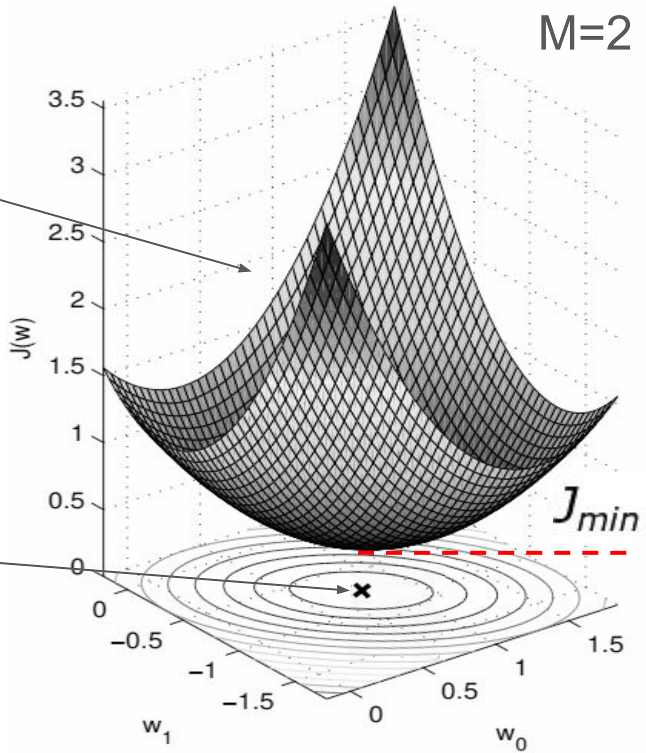
Filtro de Wiener – Cálculo de los coeficientes óptimos

Potencia del error

$$J(\mathbf{w}) = \sigma_x^2 - \mathbf{R}_{yx}^H \mathbf{w} - \mathbf{w}^H \mathbf{R}_{yx} + \mathbf{w}^H \mathbf{R}_y \mathbf{w}$$

Coeficientes óptimos del filtro de Wiener FIR

$$\mathbf{w}_o = \mathbf{R}_y^{-1} \mathbf{R}_{yx}$$



Steepest descent

Steepest descent

- *Resuelve el Filtro de Wiener de forma iterativa:*

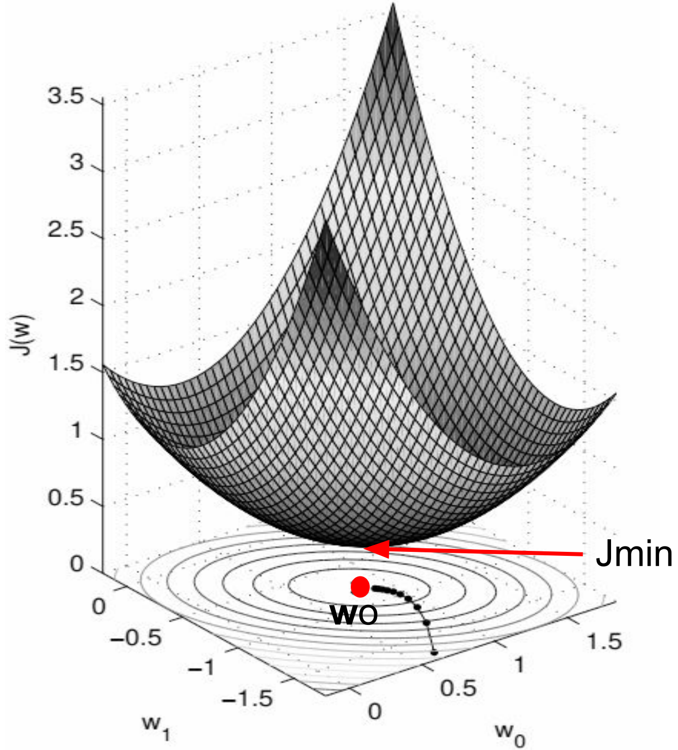
$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{w}_n - \tfrac{1}{2}\mu\nabla J(\mathbf{w}_n) \quad ; \quad \mathbf{w}_{inicial}$$

- *Gradiente determinístico*

$$\nabla J(\mathbf{w}_n) = -2(\mathbf{R}_{yx} - \mathbf{R}_y\,\mathbf{w}_n)$$

- *Se requiere conocer* $\boldsymbol{R_y}$ *y* $\boldsymbol{R_{yx}}$

- *Para* $n \rightarrow \infty$: $\mathbf{w} \rightarrow \mathbf{w}_o = \mathbf{R}_{\mathbf{y}}^{-1}\,\mathbf{R}_{yx}$



Least Mean Square (LMS)

Least Mean Square (LMS)

Steepest descent

$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{w}_n - \frac{1}{2}\mu \, \nabla J(\mathbf{w}_n)$$

Aproximación del gradiente

Algoritmo LMS

$$\hat{\mathbf{w}}_{n+1} = \hat{\mathbf{w}}_n + \mu \mathbf{y}(n) e(n)^*$$

Least Mean Square (LMS)

Algoritmo LMS

- $\mathbf{w}(0) = \mathbf{w}_{INICIAL}$
- Repetir desde n = 0
  - $\mathbf{y}(n) = [y(n)\ y(n-1)\ \ldots\ y(n-M+1)]^T$
  - $e(n) = x(n) - \mathbf{w}(n)^H \mathbf{y}(n)$
  - $\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \mu\, \mathbf{y}(n) e(n)^*$

Hay que tener en cuenta que para representar las primeras componentes de y(n) (que tendrán índices negativos) hay que interpretar donde comienza el instante 0 en esa realización.

M samples?

y = [2 1 1 6 2 3 5 3 4 ...]

n = 0

Least Mean Square (LMS)

Algoritmo LMS

- $\mathbf{w}(0) = \mathbf{w}_{INICIAL}$
- Repetir desde n = M hasta N-1
    - $\mathbf{y}(n) = [y(n)\ y(n-1)\ \ldots\ y(n-M+1)]^T$
    - $e(n) = x(n) - \mathbf{w}(n)^H \mathbf{y}(n)$
    - $\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \mu\, \mathbf{y}(n) e(n)^*$

Para una realización de largo N, dado un filtro de largo M, podemos arrancar la iteración desde n = M

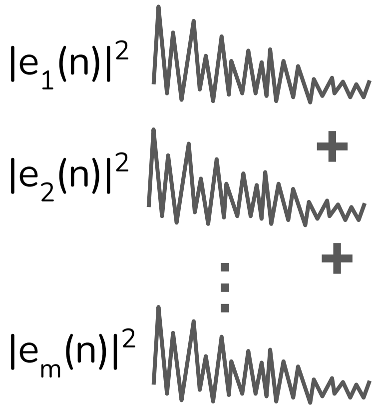
$y = [2\ \ 1\ \ 1\ \ 6\ \ 2\ \ 3\ \ 5\ \ 3\ \ 4 \ldots]$

n = M: índice inicial

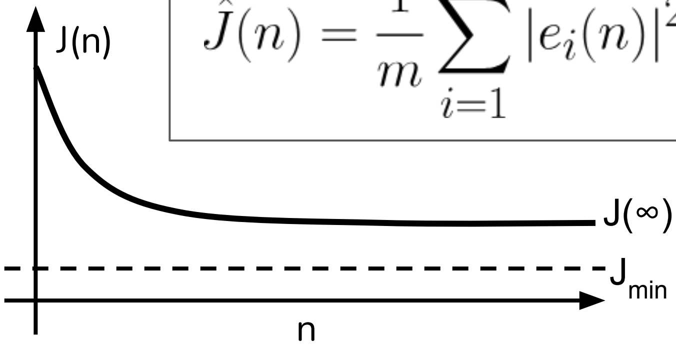
Least Mean Square (LMS) - Curva de aprendizaje

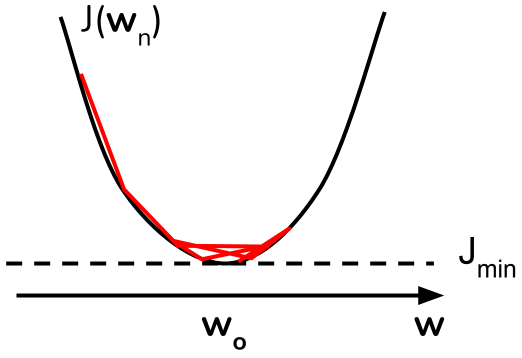
Es una estimación de la función costo *J* en función de las iteraciones. Donde i es una realización en particular, *m* son las realizaciones totales y $e_i(n)$ el error de estimación para la i-ésima realización,

$$e_i(n) = x_i(n) - \hat{x}_i(n)$$



$$\boxed{\hat{J}(n) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} |e_i(n)|^2}$$





Aplicaciones típicas

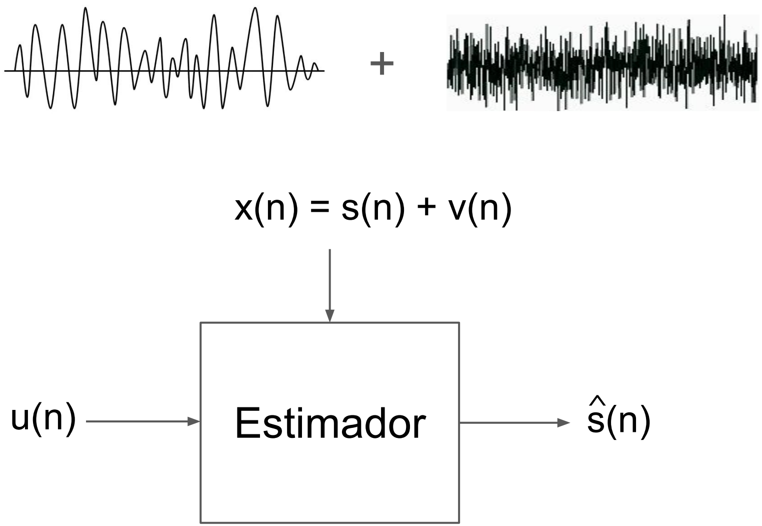
Filtro de Wiener – Aplicaciones típicas

- Cancelación de ruido
- Cancelación de interferencias
- Ecualizador
- Identificador de un sistema

Filtro de Wiener – Cancelador de ruido

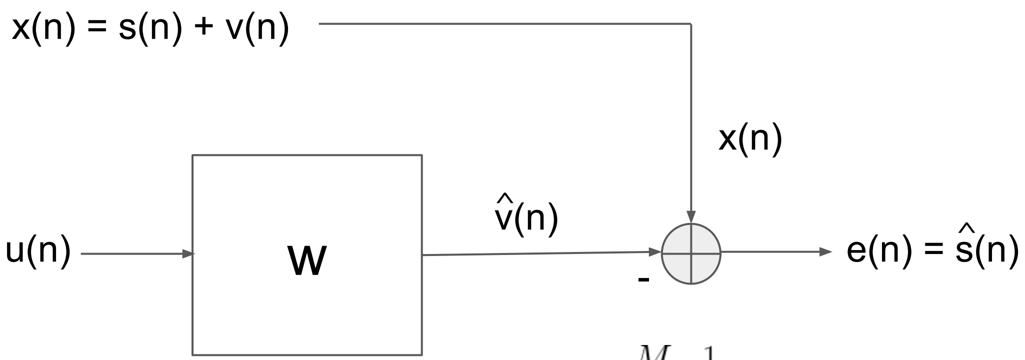
Problema

- Medimos x(n): señal s(n) contaminada con ruido v(n).
- Queremos limpiarla para obtener una estimación de s(n)
- Usamos un proceso u(n) disponible (correlacionado con v(n))



Filtro de Wiener – Cancelador de ruido

s(n): proceso de interés
v(n): ruido (blanco, AR, MA)
u(n): proceso CESA con v(n)
e(n): estimación de s(n)
$\hat{x}$(n): estimación de v(n)



Hipótesis

E[u(n-k)s*(n)] = 0

E[u(n-k)v*(n)] ≠ 0

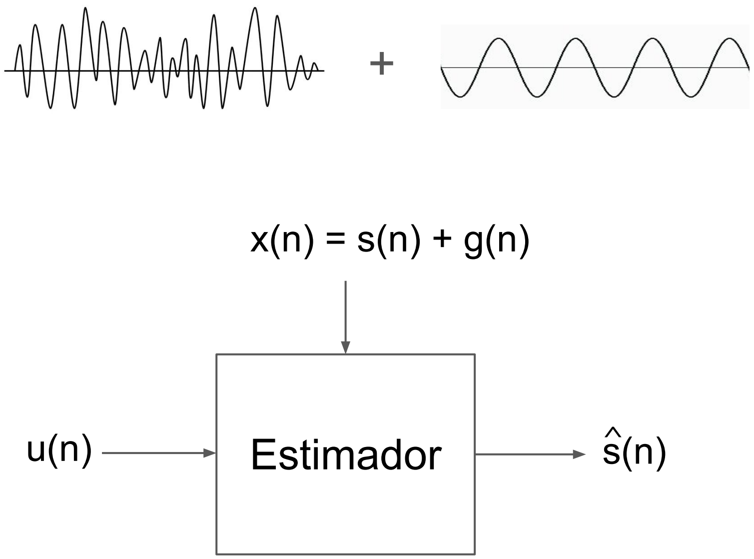
$$\hat{x}(n) = \sum_{i=0}^{M-1} w_i^* \, u(n-i)$$

En este problema, $J(n) = \sigma_s^2 + K(n)$ converge a la potencia de señal s(n) (dado que e(n) estima s(n)) mas la potencia de error sobre s(n): $K(n) = E(|s(n)-s_{est}(n)|^2)$

Filtro de Wiener – Cancelador de interferencias

Problema

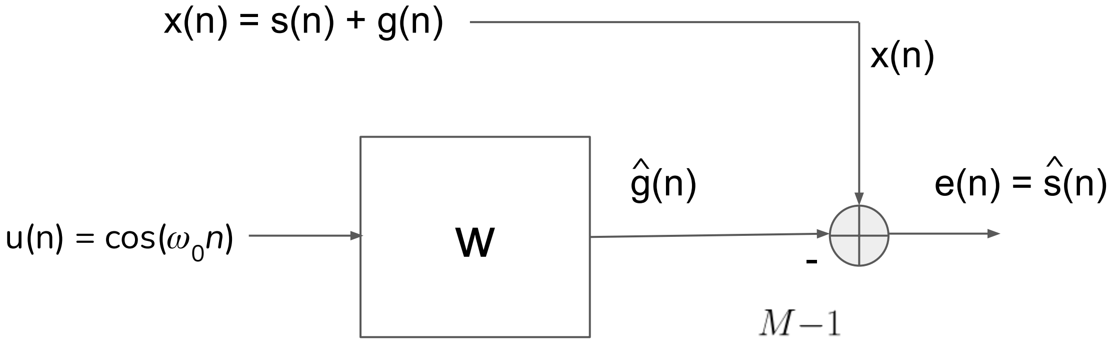
- Medimos x(n): señal s(n) contaminada con un proceso de banda angosta (senoidal) g(n).
- Queremos limpiarla para obtener una estimación de s(n)
- Usamos un proceso u(n) disponible (correlacionado con g(n))



Filtro de Wiener – Cancelador de interferencias (1)

s(n): proceso de interés
g(n): interferencia
u(n): proceso CESA con g(n)
e(n): estimación de s(n)
$\hat{x}(n)$: estimación de g(n)

Modelo de la interferencia:
$g(n) = A \cos(\omega_0 n+\Theta)$ (A y Θ VAs)



$$\hat{x}(n) = \sum_{i=0}^{M-1} w_i^* \, u(n-i)$$

Hipótesis

E[u(n-k)s*(n)] = 0

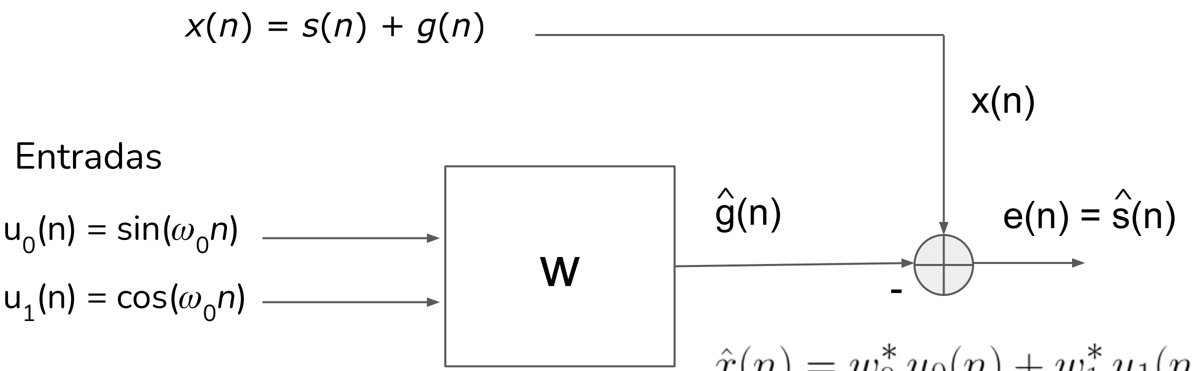
E[u(n-k)g*(n)] ≠ 0

En este problema, también e(n) estima s(n)
Entonces podemos considerar nuevamente el error $K(n) = E(|s(n)-s_{est}(n)|^2)$

Filtro de Wiener – Cancelador de interferencias (2)

$s(n)$: proceso de interés
$g(n)$: interferencia
$u_i(n)$: proceso CESA con $g(n)$
$e(n)$: estimación de $s(n)$
$\hat{x}(n)$: estimación de $g(n)$

Modelo de la interferencia:
$g(n) = A\cos(\omega_0 n + \Theta) = A\cos(\Theta)\cos(\omega 0 n) + A\sin(\Theta)\sin(\omega 0 n)$



$$\hat{x}(n) = w_0^* u_0(n) + w_1^* u_1(n)$$

Hipótesis

$E[\, u_0(n-k)s^*(n) \,] = 0$

$E[\, u_1(n-k)s^*(n) \,] = 0$

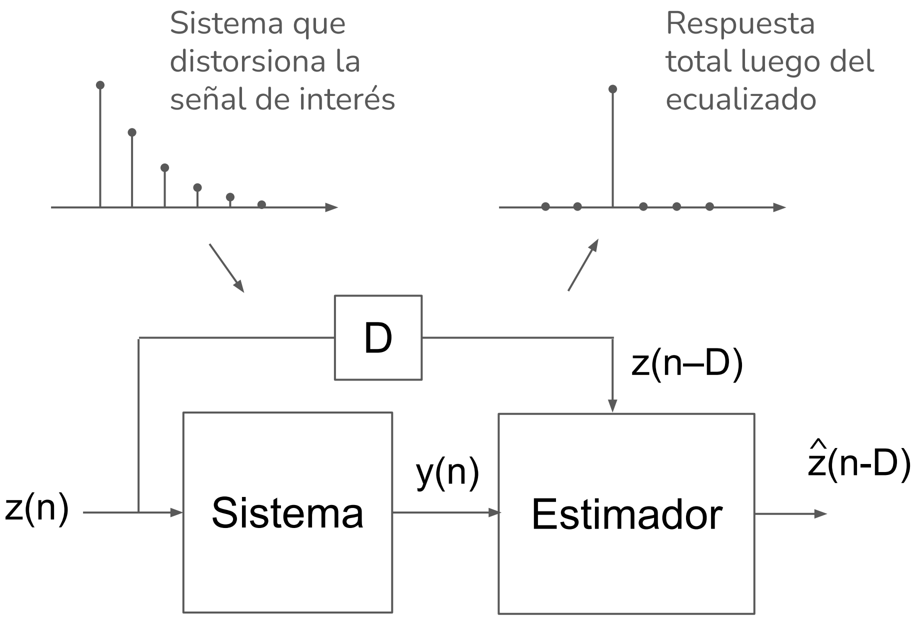
$E[\, u_0(n-k)g^*(n) \,] \neq 0$

$E[\, u_1(n-k)g^*(n) \,] \neq 0$

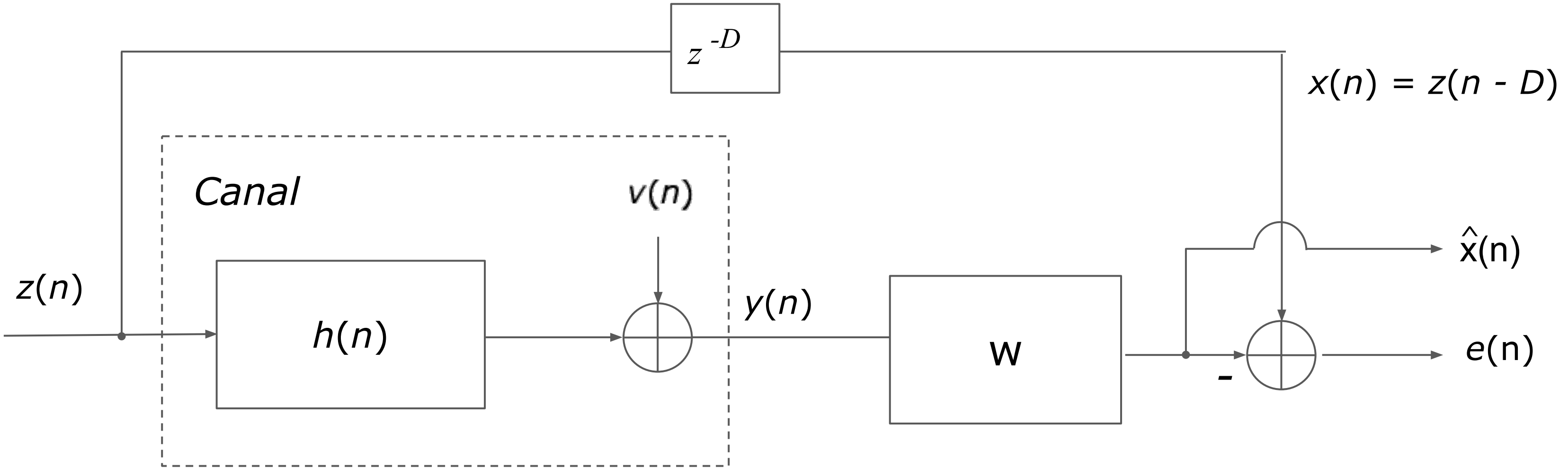
Filtro de Wiener – Ecualizador

Problema

- Medimos y(n): proceso distorsionado por un sistema LTI h(n) más ruido v(n).
- Queremos compensar la distorsión del canal para obtener una estimación de z(n).
- Usamos la salida y(n) del sistema y una versión desplazada de z(n-D) en una fase de entrenamiento para obtener el filtro óptimo



Filtro de Wiener – Ecualizador



z(n): proceso de interés
v(n): ruido blanco
y(n): proceso CESA con z(n)
e(n): estimación de s(n)
$\hat{x}$(n): estimación de z(n)

h(n): sistema LTI FIR
D: retardo ajustable

Hipótesis

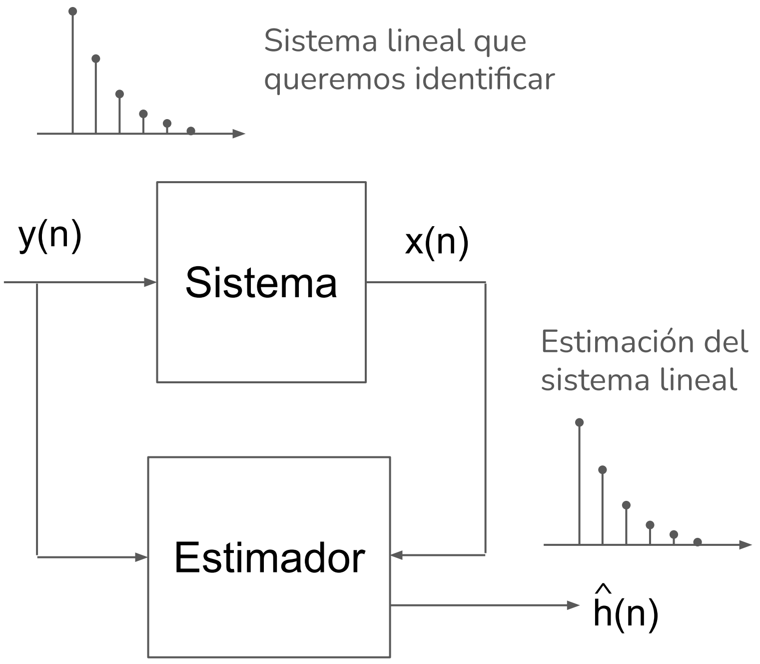
$E[\ y(n-k)v^*(n)\ ] = 0$

$E[\ y(n-k)x^*(n)\ ] \neq 0$

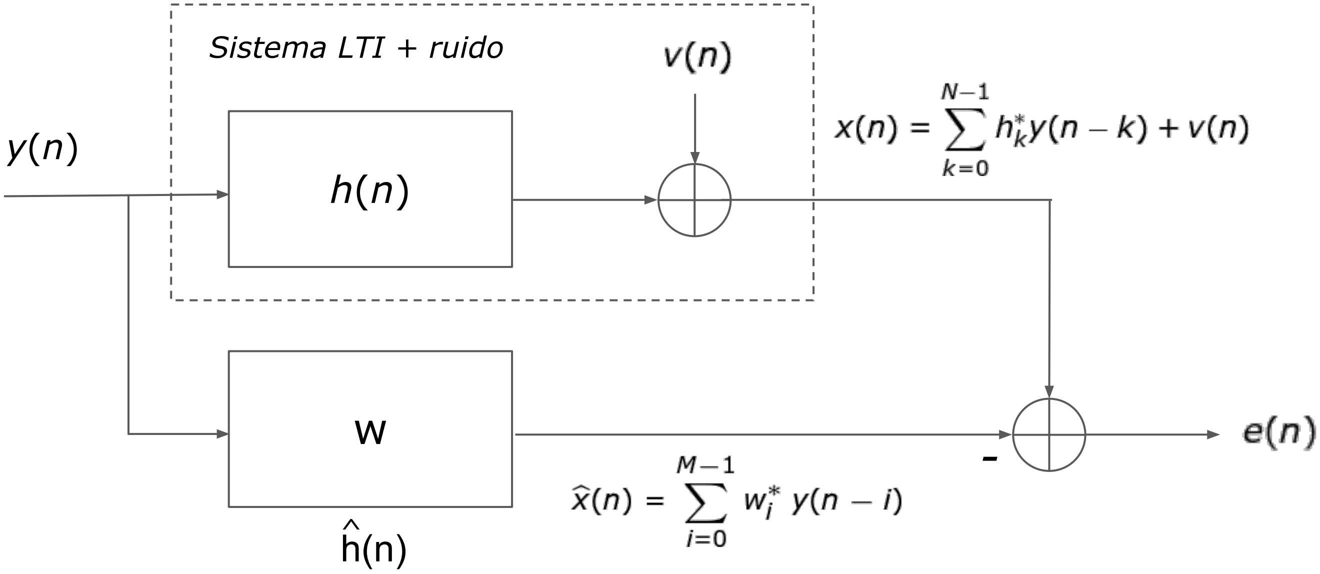
Filtro de Wiener – Identificación de un sistema LTI

Problema

- Medimos x(n): proceso de salida de un sistema LTI h(n) más ruido v(n).
- Queremos estimar los coeficientes del sistema, h(n).
- Usamos un proceso de referencia para excitar tanto el sistema LTI como el filtro de Wiener



Identificación de un sistema LTI



h(n): sistema LTI de interés
v(n): ruido blanco
y(n): proceso de referencia
e(n): estimación de s(n)

$w_o(n)$: estimación de h(n)

$\hat{x}(n)$: estimación de x(n)

Hipótesis

E[y(n-k)v*(n)] = 0

E[y(n-k)x*(n)] ≠ 0

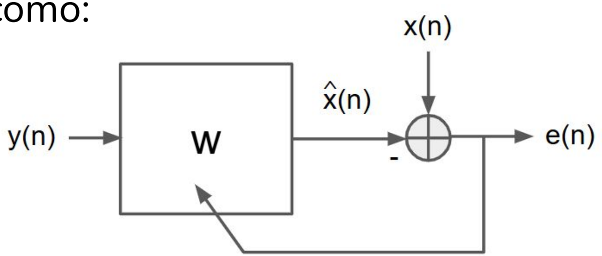
Actividad 1

Actividad 1

Se requieren estimar los coeficientes **w** de un filtro LMS cuya entrada es una secuencia y(n), de modo tal que su salida se ajuste lo mejor posible a una señal deseada x(n). Para generar los procesos x(n) e y(n) considere que éstos pueden obtenerse como:

$$y(n) = f(n) + 0.5\, f(n-1) + 0.25\, f(n-2)$$

$$x(n) = f(n) + 1.2\, f(n-1) + 0.6\, f(n-2) + 0.3\, f(n-3) + v(n)$$

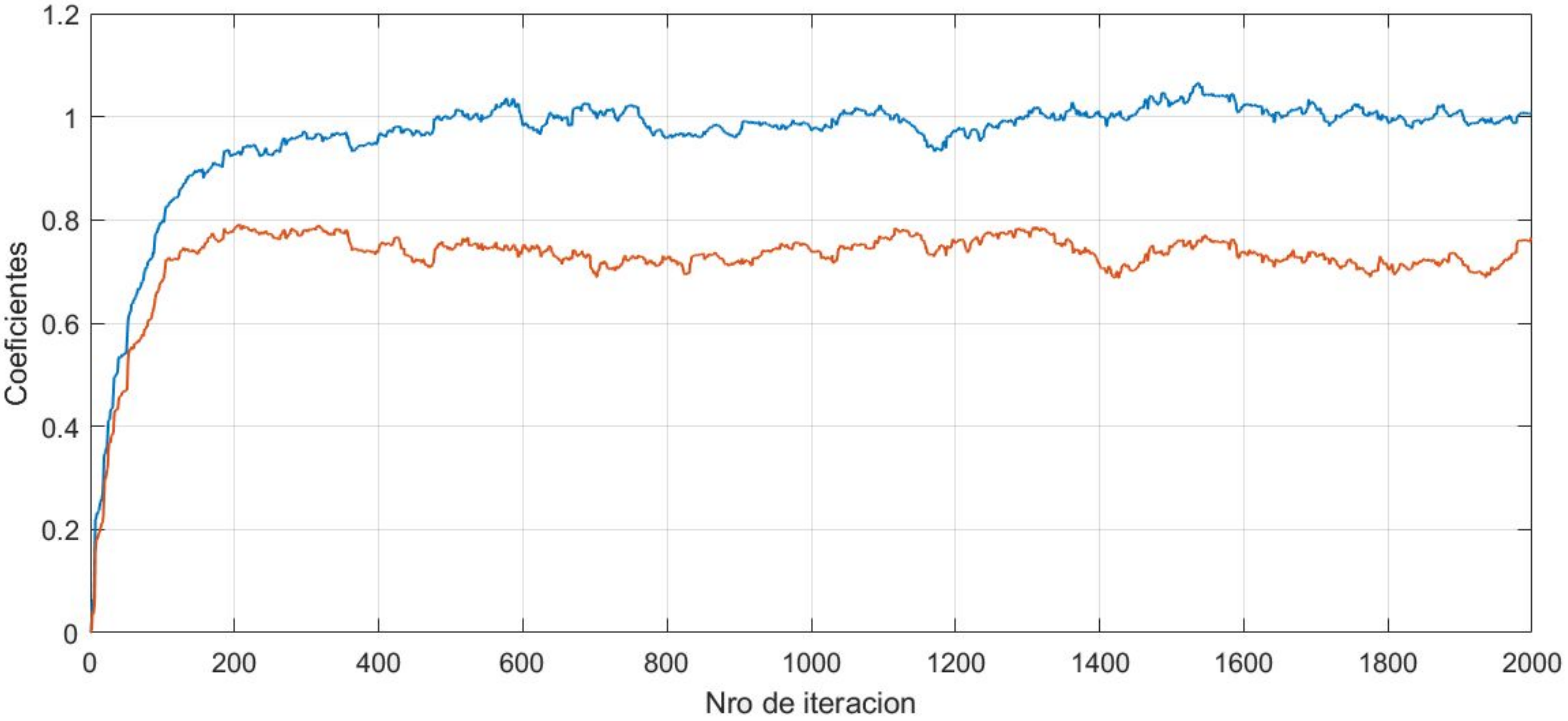


donde f(n) ~ $N(0,1)$ y v(n) ~ N(0, 0.1), ambos de largo L = 2000 e independientes

1. Implemente el filtro LMS (con $\mathbf{w}(0) = \mathbf{0}$)y obtenga los coeficientes **w** para un largo M = 2 y μ = 0.01, de modo tal que la salida del filtro sea una estimación del proceso x(n).

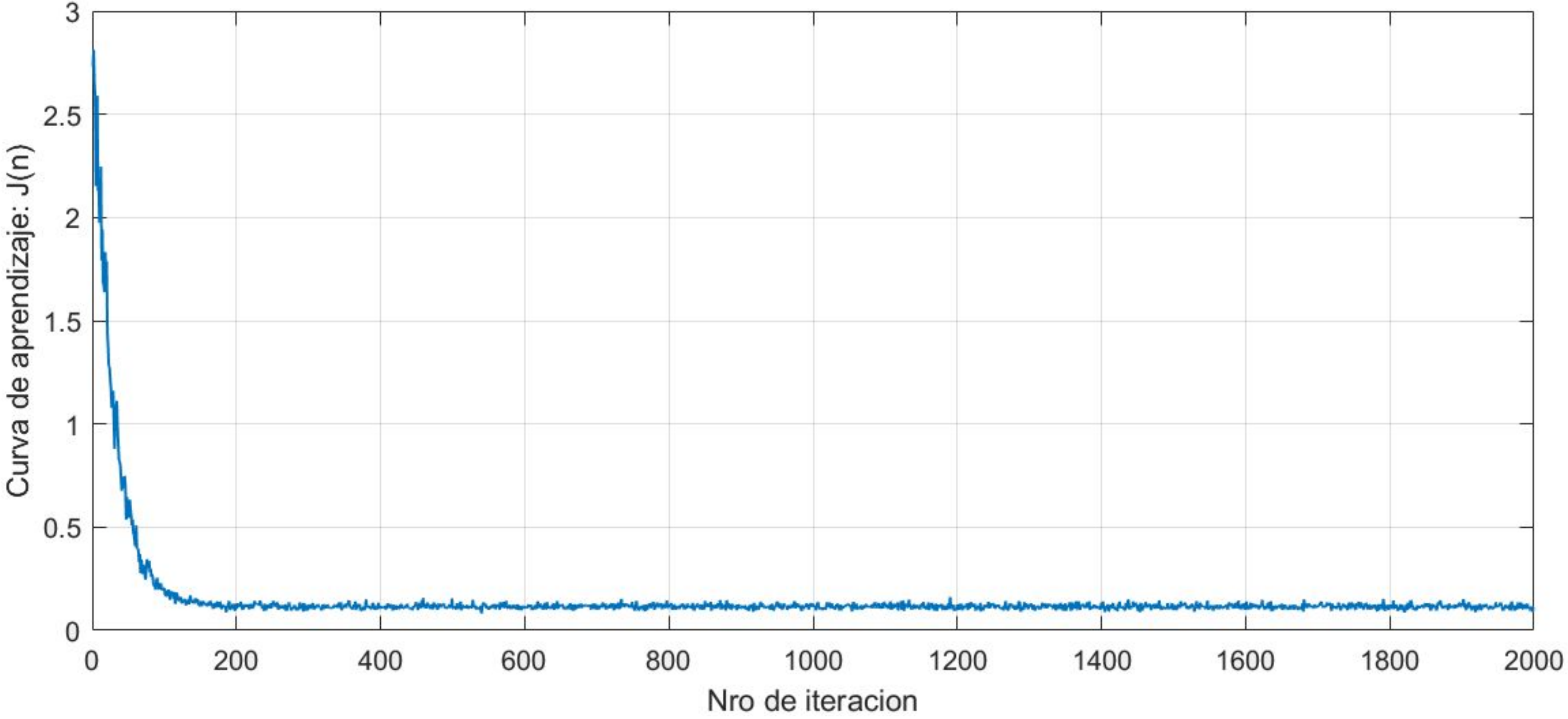
2. Grafique los coeficientes $\mathbf{w}_n$ acumulados en función de las iteraciones (para una realización). Luego simule 200 realizaciones y grafique la curva de aprendizaje J(n) obtenida como promedio de todas las realizaciones.

Actividad 1



1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
Coeficientes
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600
1800
2000
Nro de iteracion

Actividad 1



Curva de aprendizaje: J(n)
Nro de iteracion
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600
1800
2000

Actividad 2

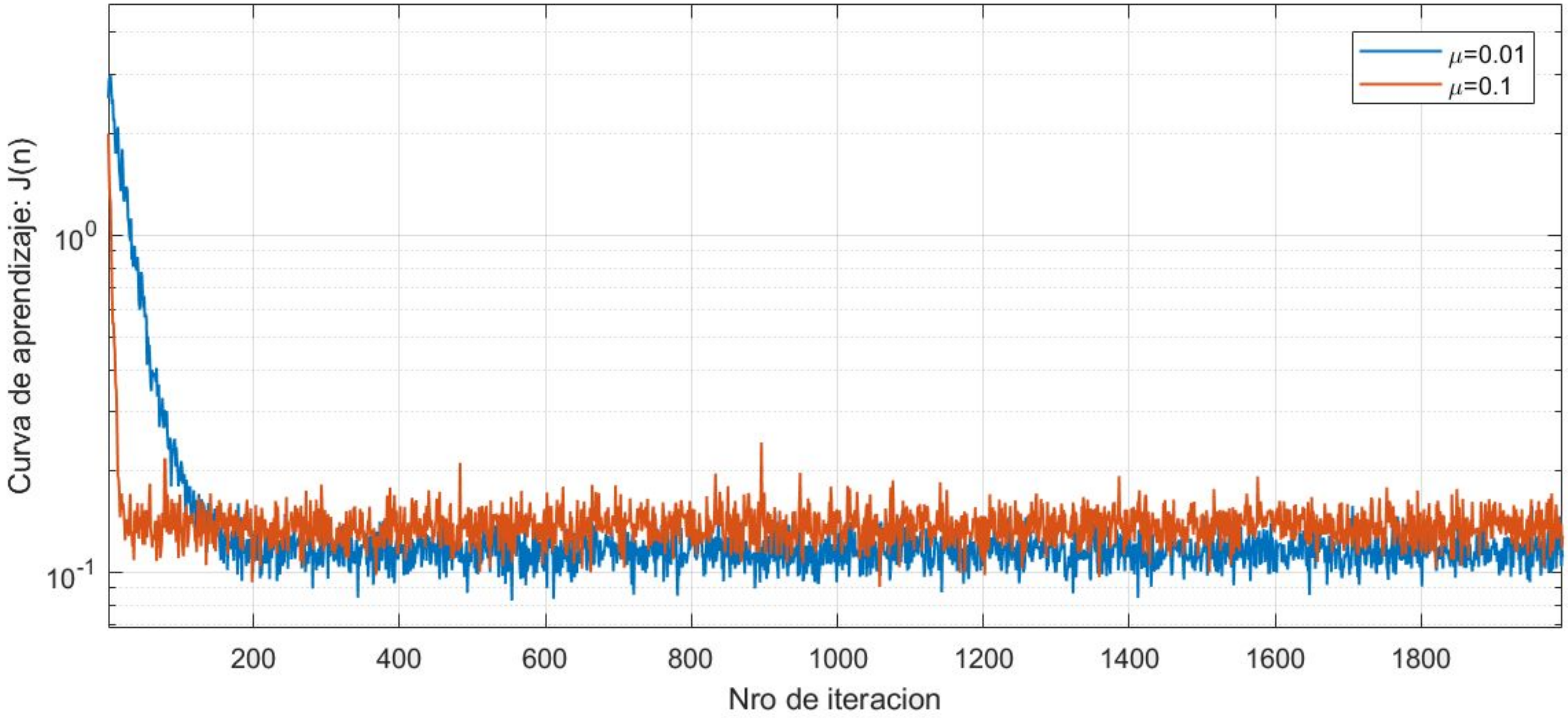
Actividad 2

Para el mismo problema de la actividad anterior, grafique la curvas de aprendizaje J(n), con 200 realizaciones, para distintos pasos:

1. $\mu = 0.01$
2. $\mu = 0.1$

Los gráficos deben estar en escala logarítmica y superpuestos para comparar los tres casos.

Actividad 2



μ=0.01
μ=0.1
Curva de aprendizaje: J(n)
10^0
10^{-1}
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600
1800
Nro de iteracion

Actividad 3

Actividad 3

Considere el problema de la actividad 1. Para una única realización, grafique en un plano (w_0, w_1) la trayectoria de los pesos (w_1 vs w_0). También grafique ambos pesos en función de las iteraciones. Considere $\mu = 0.01$ y las siguientes condiciones iniciales:

a. $\mathbf{w}_0 = [-3.19 \;\; 4.47]^T$

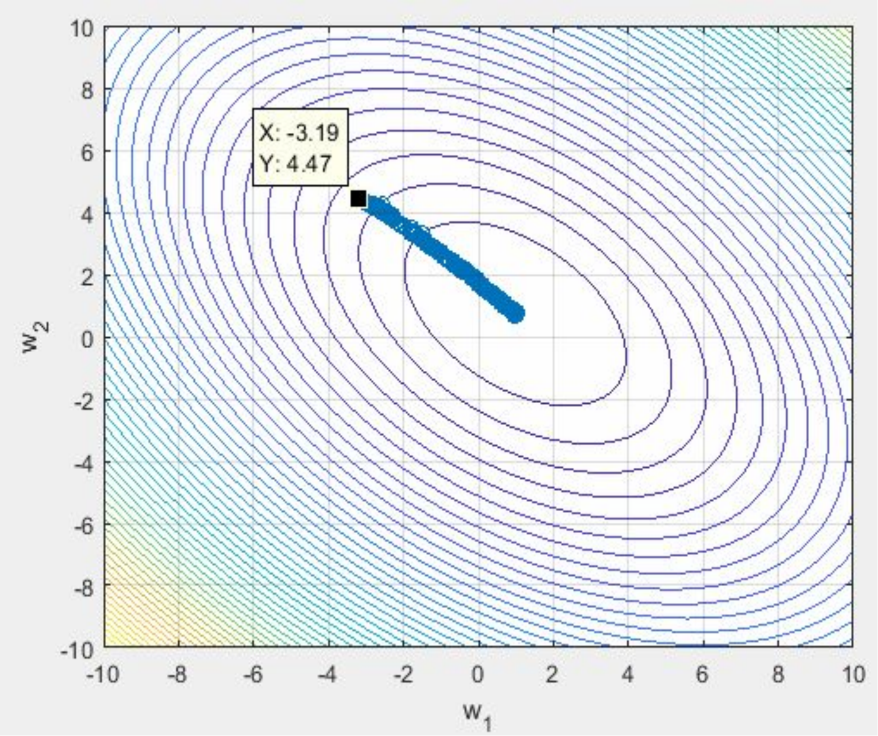
b. $\mathbf{w}_0 = [4.84 \;\; 4.52]^T$

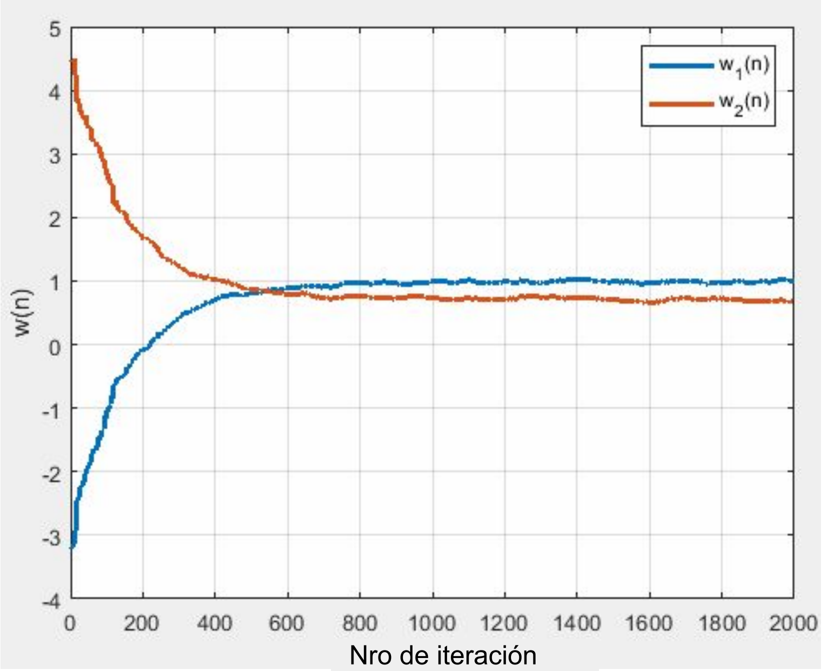
c. $\mathbf{w}_0 = [1.65 \;\; 8.99]^T$

Ayuda: para los gráficos en el plano (w_0, w_1) defina los límites **axis([-10 10 -10 10])**

Actividad 3

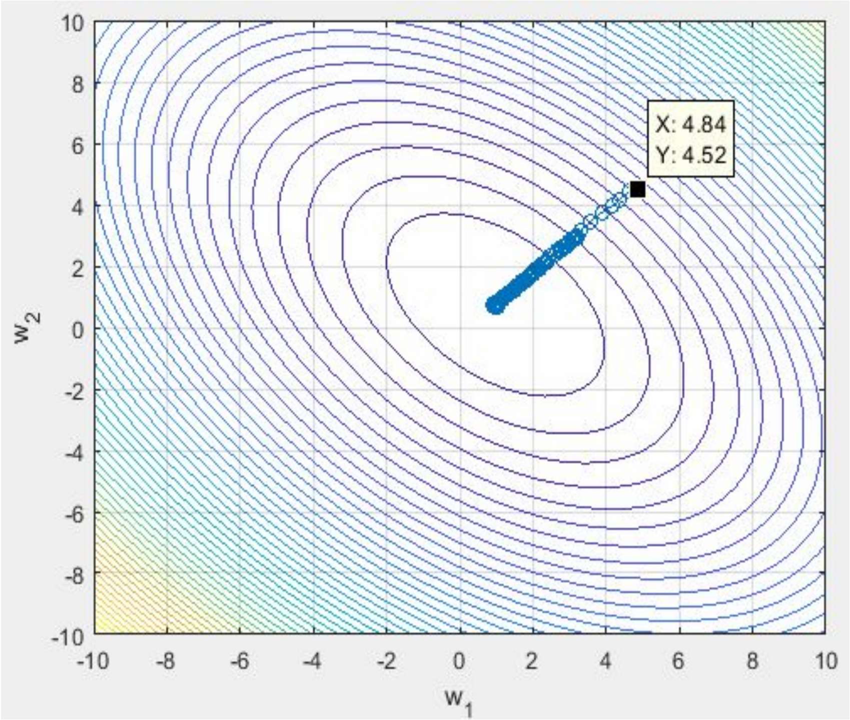
1.a) $\mathbf{w}_0 = [-3.19 \;\; 4.47]^T$, $\mu = 0.12$.

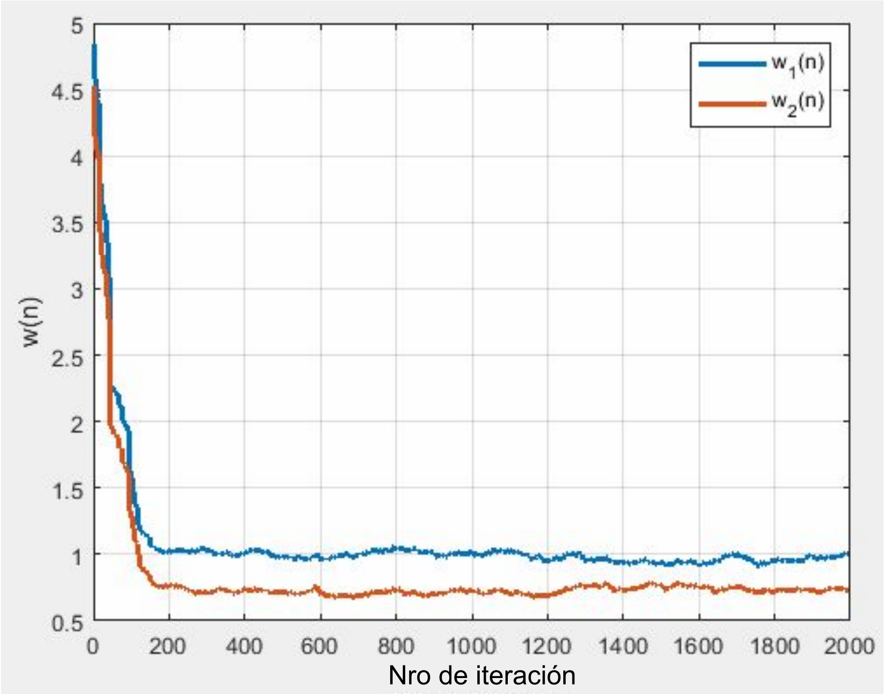




Actividad 3

1.b) $\mathbf{w}_0 = [4.84 \;\; 4.52]^T$, $\mu = 0.12$.





Actividad 3

1.c) $\mathbf{w}_0 = [1.65 \ \ 8.99]^T$, $\mu = 0.12$.