Ejercicio: Señal del telégrafo

Sea $N(t)$ un proceso Poisson de media $\mathbb{E}[N(t)] = \lambda t$. Se construye un nuevo proceso $X(t)$ tal que

- $X(t) \in \{-1, +1\}$ para todo t
- $\mathbb{P}[X(0) = +1] = \mathbb{P}[X(0) = -1] = \frac{1}{2}$
- $X(t)$ cambia de polaridad si $N(t)$ se incrementa en 1. Es decir, $X(t)$ cambia de polaridad cuando ocurre un evento Poisson

Hallar $\mathbb{P}[X(t) = +1]$ y $\mathbb{P}[X(t) = -1]$.

Ayuda: Recuerde que

$$\mathbb{P}[X(t) = a] = \mathbb{P}[X(t) = a|X(0) = +1]\mathbb{P}[X(0) = +1] + \mathbb{P}[X(t) = a|X(0) = -1]\mathbb{P}[X(0) = -1]$$

$$\mathbb{P}(X(t)=1) = \mathbb{P}(X(t)=1 \mid X(0)=1) + \mathbb{P}(X(t)=1 \mid X(0)=-1)$$

$X(t)$ cambia de polaridad en cada evento

$\therefore$ si inicia positivo en $n=0$ es 1

$\wedge$ si inicia en impares en $n=0$ es -1.

$$X(t)|X(0)=1 = (-1)^{2n} \qquad X(t)|X(0)=-1 = (-1)^{2n+1}$$

Buscamos la probabilidad de que $N(t)$ sea par e impar

Ahora podemos calcular la probabilidad de $X(t)=1$

$$\mathbb{P}(X(t)=1) = \mathbb{P}(X(t)=1 \mid \underbrace{X(0)=1}_{\text{lo tenemos}}) + \mathbb{P}(X(t)=1 \mid \underbrace{X(0)=-1}) = \frac{1}{2}\underbrace{\mathbb{P}(X(t)=1)}_{\text{que } N(t) \text{ sea par}} + \frac{1}{2}\underbrace{\mathbb{P}(X(t)=-1)}_{\text{que } N(t) \text{ sea impar}} = \frac{\mathbb{P}(N(t)\text{ par}) + \mathbb{P}(N(t)\text{ impar})}{2}$$

$X(t)$ es 1 cuando

$X(0)=1 \wedge N(t)$ par

$X(0)=-1 \wedge N(t)$ impar

Si tenemos un conjunto de numeros $\in \mathbb{N}$ (infinito) $\wedge$ se separa en pares e impares se obtienen 2 particiones iguales en tamaño.

Planteo $\mathbb{P}(N(t) \in \mathbb{N}) = 1$; $\mathbb{P}(N(t)\text{ par}) = \mathbb{P}(\mathbb{N}\text{ par}) \cdot \mathbb{P}(N(t) \in \mathbb{N}) = \dfrac{\#\text{pares en } \mathbb{N}}{\forall \mathbb{N}} \cdot 1 = \dfrac{1}{2}$

Entonces por geometría se da que $\mathbb{P}(N(t)\text{ par}) = 1/2 \wedge \mathbb{P}(N(t)\text{ impar}) = 1/2$ (conjugadas)

$$\therefore \mathbb{P}(X(t)=1) = \frac{1/2 + 1/2}{2} = 1/2 \longrightarrow \mathbb{P}(X(t)=-1) = 1 - \mathbb{P}(X(t) \neq -1) = 1 - \mathbb{P}(X(t)=1) = 1/2$$

$$\boxed{f_X(x) = \tfrac{1}{2}\delta(x-1) + \tfrac{1}{2}\delta(x+1)}$$

$$E(X(t)) = 1 \cdot \mathbb{P}(X(t)=1) + (-1)\,\mathbb{P}(X(t)=-1) = 0$$

Ejercicio: Shot Noise

Vimos cómo construir el ruido de disparo a partir de un tren de impulsos con ocurrencias aleatorias. Sea $h(t)$ la respuesta impulsiva de un sistema LTI causal, luego

$$N(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow X(t)$$

$$X(t) = \sum_{k} h(t - T_k).$$

Calcular $\mathbb{E}[X(t)]$.

Poisson alternativa $\rightarrow$ $N(t) = \sum_{t=0}^{K} u(t - T_k)$; $T_k \sim \mathcal{U}(0, T)$

Ayuda: Puede ser útil incorporar el proceso Poisson implícito en $X(t)$. Para ello, recuerde que $\mathbb{E}[X(t)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X(t)|N(t)]]$.

La probabilidad de que llegue un $\delta(t)$ al sistema está dada por una V.A. Poisson cuya media va a ser la tasa de arribos T_k^{-1}. La media del proceso de salida del sist. LTI es la media de entrada . $H(0)$.

$H(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\} = \mathcal{F}\{\sum h(t - t_k)\}$ $\therefore$ la media a la salida es $\mathcal{F}\{h(t)\}(0) \cdot \mu_N$

Ejercicio

Sea H un sistema promediador en tiempo continuo que es alimentado con ruido blanco gaussiano W cuya PSD es $S_W(\omega) = N_0/2$ W/(rad/s):

$$W(t) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{T}\int_{t-T}^{t}} \longrightarrow Y(t)$$

Hallar $S_Y(\omega)$ y $R_Y(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_Y(\omega)d\omega$.

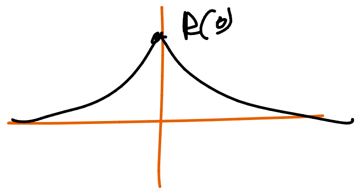
$N_1(t)$ y $N_2(t)$ son dos procesos de Poisson independientes entre sí con tasas λ_1 y λ_2 respectivamente. Justifique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas

$E[N_1 + N_2) = \mu_1 + \mu_2 = \mu_3$

- $N_1(t) + N_2(t)$ es Poisson $\longrightarrow$ Verdadero $\longrightarrow$ $Var(N_1 + N_2) = Var(N_1) + Var(N_2) = \mu_1 + \mu_2 = \mu_3$
- $N_1(t) - N_2(t)$ es Poisson $\longrightarrow$ Falso
- La tasa de $N_1(t) + N_2(t)$ es $\lambda_1 + \lambda_2$. V
- La media de $N_1(t) - N_2(t)$ es proporcional a $\lambda_1 - \lambda_2$. Verdadero

5. Sea X un proceso estocástico gaussiano en tiempo continuo con media nula y autocorrelación:

$$C_X = e^{-|t_1 - t_2|} \longleftrightarrow R_X(\tau) = e^{-|\tau|}.$$



Considere la señal modulada en frecuencia:

$$Y(t) = \sin(X(t)t)$$

Halle la media y la autocorrelación del proceso Y y determine si es ESA.

$$E[Y] = E[\operatorname{sen}(X.t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen}(x.t) . f_x(x)\, dx$$

$f_x(x)$ la tengo $\rightarrow X$ gaussiana $\quad \mu_x = 0 \ \wedge \quad R_X(0) = C_X(t,t) + \mu_X^2 = Var(x) = 1$

$$X \sim N(0,1) \quad \longrightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen}(x.t)\, f_x(x)\, dx$$

Esto es feo, vamos por otro lado.

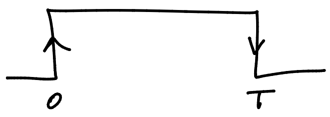
$$Y = \operatorname{sen}(X.t) = \frac{e^{jX(t).t} - e^{-jX(t).t}}{2j} \xrightarrow{E[\,]} \frac{1}{2j} E\left[e^{jX(t)t}\right] - \frac{1}{2j} E\left[e^{-jX(t)t}\right]$$

$$\frac{1}{2j} E\left[e^{jXt}\right] - \frac{1}{2j} E\left[e^{-jXt}\right] = \frac{1}{2j}\left(\phi_X(t) - \phi_X(-t)\right) = \frac{1}{2j}\left[\underbrace{e^{-\frac{t^2}{2}} - e^{-\frac{t^2}{2}}}_{\text{se cancela}}\right] = 0$$

Autocorrelación $\quad R_Y = E[Y(t)Y(t+\tau)] = E\left[\operatorname{sen}\left(\overset{A}{X(t)}\, t\right) \operatorname{sen}\left(\overset{B}{X(t+\tau)}(t+\tau)\right)\right] =$

guía "Ejs 6"

1) $g(t)$ es una ventana de 0 a T $\begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \rightarrow g(t) = u(t) - u(t-T)$



A binaria: $P(A=1) = p$; $P(A=-1) = 1-p$ $\therefore$ $f_A(a) = p\,\delta(a-1) + (1-p)\,\delta(a+1)$

$$E[A] = \sum_{a=-1}^{1} a\, f_A(a) = -1(1-p) + 1p = 2p-1$$

$$X(t) = A\,g(t) = A\big(u(t) - u(t-T)\big)$$

Para ver que proceso es X vemos su media ^ autocorrelación.

$$E[X(t)] = E[A\,g(t)] = \underbrace{g(t)}_{Cte}\, E[A] = g(t)\cdot(2p-1) \rightarrow \text{Depende de } t$$

, no va a ser ESA.

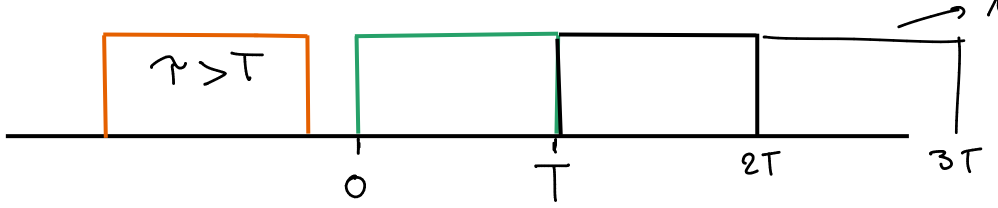
Autocorrelación

$$R_X = E[X(t)\,X(t+\tau)] = E[g(t)\cdot A\cdot g(t+\tau) A] = E[A^2\, g(t)\, g(t+\tau)]$$

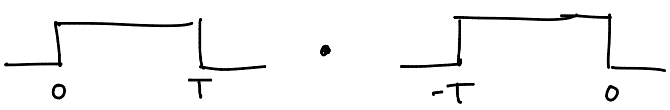
$g(t) = u(t) - u(t-T)$
$g(t+\tau) = u(t+\tau) - u(t-T+\tau)$

$\tau = -T$: $u(t-T) - u(t-2T)$

$\tau = -2T$: $u(t-2T) - u(t-3T)$



si $\tau > T \longrightarrow \big(u(t) - u(t-T)\big)\big(u(t+T) - u(t)\big)$



$= 0$

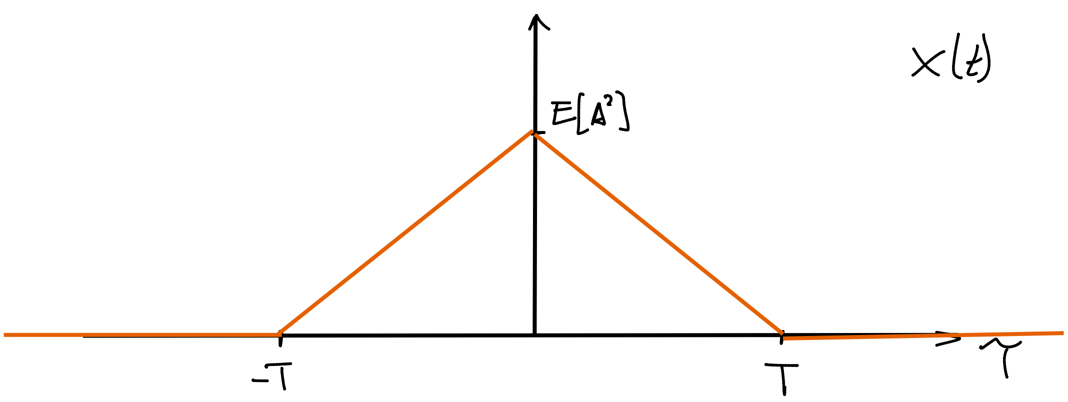
si $\tau < -T \longrightarrow 0$, para lo mismo.

Entonces $R_X = 0$ si $\tau > T$ o $\tau < -T$, o $|\tau| > T$

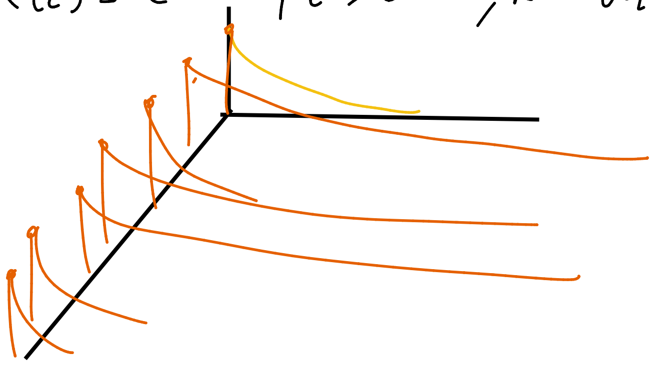
Adentro: $\tau = 0 \rightarrow g(t)\,g(t) = 1$

$R_X = E[A^2]$ si $\tau = 0$

De ahí baja linealmente hasta cero, es una ventana triangular. (Hay convolución implícita)



2) $X(t)=e^{At}$, $t\geq 0$, $A\sim \mathcal{U}[-2,-1]$ 1) Proceso de tiempo continuo de estado continuo



2) $F_X(x)=\mathbb{P}(X\leq x)=\mathbb{P}(e^{At}\leq x)=\mathbb{P}\left(A\leq \frac{\ln(x)}{t}\right)=F_A\left(\frac{\ln(x)}{t}\right)$

Solo tiene sentido para valores de x entre 0 y 1.

$$F_X(x)\begin{cases}0 & \text{si } x>1 \wedge x<0\\ \frac{\ln(x)}{t} & \text{otro caso}\end{cases}$$

Falta algo

↳ El tiempo en el que evalues

$F_{X_1X_2}(t_1,t_2)=\mathbb{P}(X_1\leq x_1, X_2\leq x_2)$

COMO SE HACE?

matlab ✓

Media y autocorr

$$E[X(t)]=E[e^{At}]=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{At}f_A(a)\,da=\int_{-2}^{-1}e^{At}\frac{1}{-1-(-2)}\,dA=\int_{-2}^{-1}e^{At}\,dA=\left.\frac{e^{At}}{t}\right|_{-2}^{-1}=\frac{e^{-t}}{t}-\frac{e^{-2t}}{t}$$

$$=\frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}\longrightarrow \underline{\text{Depende de } t}$$ (tiene sentido, son todo exp. decreciente)

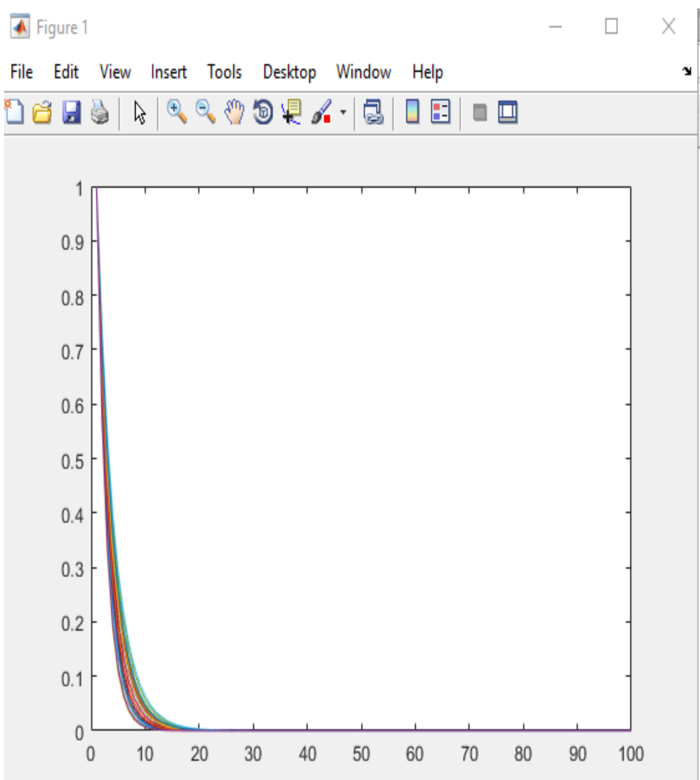
$$R_X=E[X(t_1)X(t_2)]=E[e^{At_1}\cdot e^{At_2}]=E[e^{At_1+At_2}]=E[e^{A(t_1+t_2)}]=\int_{-2}^{-1}e^{A(t_1+t_2)}\,dA=\frac{e^{-t_1-t_2}-e^{-2(t_1+t_2)}}{t_1+t_2}$$

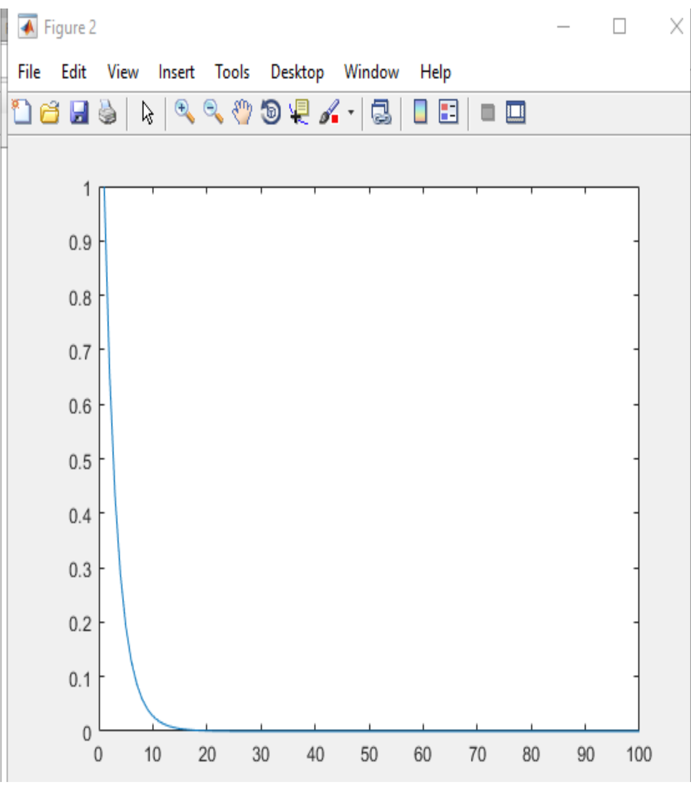
si $t_1=t \wedge t_2-t_1=\tau$

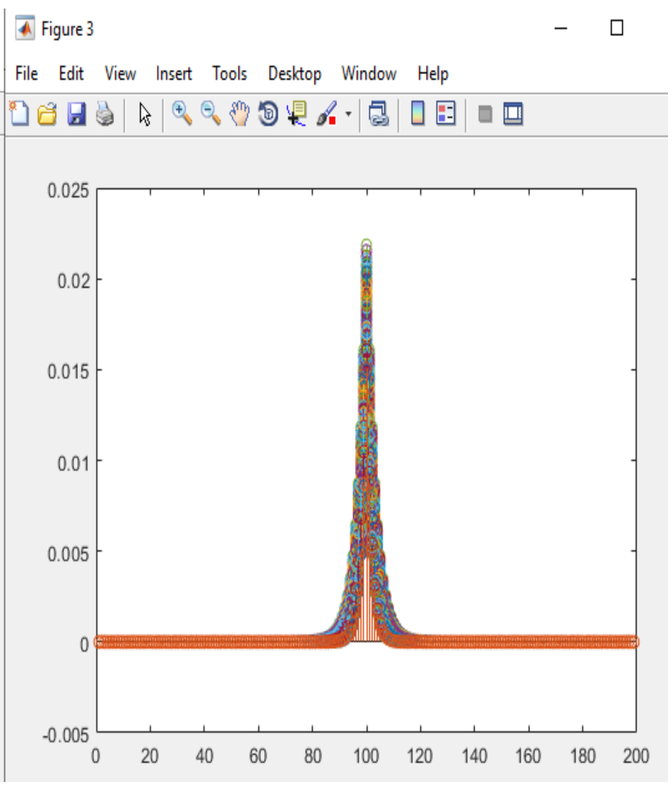
$$\frac{e^{-t_1-t_2}-e^{-2(t_1+t_2)}}{t_1+t_2}=\frac{e^{-2t-\tau}-e^{-2(2t+\tau)}}{2t+\tau}$$

$\left.\begin{array}{l}t_1+t_2=t+t_2\\ t_2=\tau+t\end{array}\right\}2t+\tau$

Depende de t, no solo de τ. No es ESA.







3) Es ESA aque μ_x cte en el tiempo $\wedge$ $R_X(t_1,t_2) = R_x(\underbrace{\tau}_{t_2-t_1}) = 9 + 4e^{-2|\tau|}$

$E[X(5)] = 3 \qquad Var(X(5)) = C_x(5,5) = R_x(5,5) - 9 = 4 \qquad \tau = 0$

$E[X(8)] = 3 \qquad Var(X(8)) = C_x(8,8) = R_x(8,8) - 9 = 4$

$R_x(t_1,t_2) = C_x(t_1,t_2) + \mu_x^2 \longrightarrow C_x(t_1,t_2) = R_x(t_1,t_2) - 9$

4) Random walk

Es un random step que simula

$x(n) = x(n-1) + U(n)$ $\qquad \underline{\mathbb{P}(U=1)=p} \qquad \overline{\mathbb{P}(U=-1)=1-p}$

Si $U(n)$ proceso aleatorio del tipo $\quad p_U(u) = p\,\delta(u-1) + (1-p)\,\delta(u+1)$

Entra al sistema que hace $\quad Y(n) = X(n) - Y(n-1)$

1. El proceso es de $\underbrace{\text{tiempo discreto}}_{\text{en base a } n}$ $\wedge$ $\underbrace{\text{estado discreto}}_{\text{la VA es discreta}}$

$U(n) \longrightarrow \boxed{h} \longrightarrow x(n)$

2. $X(n) = U(n) + X(n-1)$

$X(1) = U(1)$

$X(1) = U(2) + X(1)$

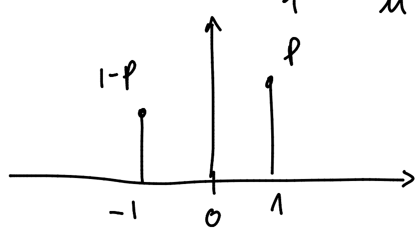
$X(2) = U(3) + X(2) = U(3) + U(2) + U(1)$

generalizo $\longrightarrow$ $X(n) = \sum_{k=1}^{n} U(k)$

$X(n) = \sum_{k=1}^{n} U(n) \qquad \mathbb{P}(X(n) \leq x) = \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n} U(n) \leq x\right)$

$\sum U(n)$ iid $\longrightarrow F_{X(n)}(x) = F_{\sum_U}(z_U) = \prod_{k=1}^{n} F_{U(n)}(u)$

$$F_{U(n)}(u) = \begin{cases} 0 & u < -1 \\ 1-p & -1 \leq u < 1 \\ 1 & u > 1 \end{cases}$$



2) $E[X(n)] = E\left[\sum_{k=1}^{n} U(k)\right] = n\,E[U(k)] = n \cdot \sum_{-1}^{1} U(k)\, p_{U(k)}(u) = n\,.\,(1.p + (-1)(1-p))$

$n\,.\,(2p-1)$ ✓

No es ESA a menos que $p = 1/2$

autocorrelación:

$R_x = E[X(n)\,X(n+\alpha)] = E\left[\sum_{k=1}^{n} U(k) \sum_{k=1}^{n+\alpha} U(k)\right]$ las $U(k)$ iid $\therefore$ las sumas & su producto

deben ser independiente $\quad E\left[\sum^{n} U(k)\right] E\left[\sum^{n+\alpha} U(k)\right] = \underbrace{n\,.\,(n+k)\,(2p-1)^2}_{\text{No es ESA}}$

$R_x(t_1,t_2) = C_x(t_1,t_2) + \mu_x(t_1)\,\mu_x(t_2)$

$n_1 n_2 (2p-1)^2 = C_x(n_1,n_2) + n_1 n_2 (2p-1)^2 \longrightarrow C_x(n_1,n_2) = 0$, bueno, asumimos que eran indep.

$\hookrightarrow$ la autocorrelación

$$Var(x(n)) \overset{iid}{=} Var\left[\sum^{n} U(n)\right] = n\, Var(U(n))$$

$$f_U(u) = p\,\delta(u-1) + (1-p)\,\delta(u+1)$$

$$E[U] = (2p-1)$$

$$Var(U(1)) = 4np(1-p)$$

Pregunta

A partir del random step

$$U(n) = 2z(n) - 1$$

$\llcorner Ber(p)$

$$Var(x(n)) = n\, E\left[\left(U(n) - (2p-1)\right)^2\right]$$

$$n\left[p.\underbrace{(1-2p+1)^2}_{(2-2p)^2} + (1-p)\underbrace{(-1-2p+1)^2}_{(2p)^2}\right]$$

$$n\left[4p(1-p)^2 + 4(1-p)(p)^2\right]$$

$$4n\left[p(1-2p+p^2) + p^2 - p^3\right]$$

$$4n\left[p - 2p^2 + p^3 + p^2 - p^3\right]$$

$$4n\left[p - p^2\right] = 4np(1-p) = Var(x(n)) \checkmark$$

5) $B(n) \longrightarrow$ Bernoulli parámetro p

$$P_{B(n)}(b) = \underbrace{\lambda\,\delta(b-1)}_{\mathbb{P}(B=1)=\lambda} + \underbrace{(1-\lambda)\,\delta(b)}_{\mathbb{P}(B=0)=1-\lambda}$$

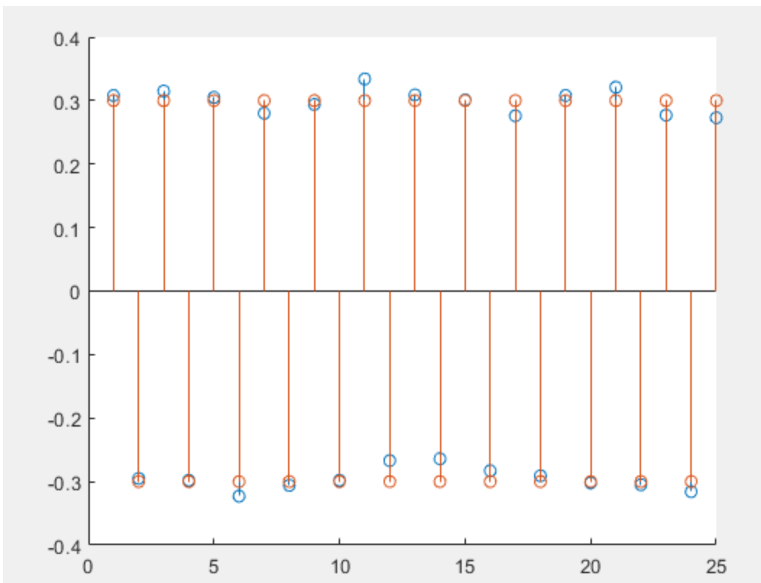
1. $B(n)^2 \longrightarrow E[B(n)^2] = \sum_0^1 b^2 P_B(b) = 0.(1-\lambda) + 1^2\lambda = \lambda$, es Est. 1ª orden

$\llcorner\!\!\rightarrow R_B = E[\underbrace{B(n)B(m)}_{\text{son indep por definición}}] = E[B(n)]^2 = \lambda^2 \longrightarrow$ no depende ni de n ni de m.

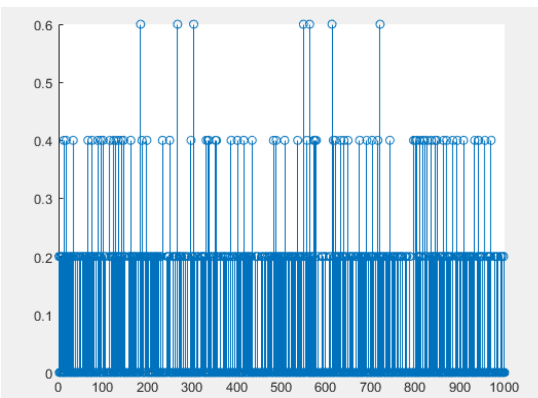
Diría que es ESA.

2. $(-1)^n B(n) \longrightarrow E[\underbrace{(-1)^n}_{\text{no depende de } B} B(n)] = (-1)^n E[B] = (-1)^n \lambda \longrightarrow$ depende de n, no es ESA

si, da así, simulado



3. $x(n) = B_1(n)\,\delta(x(n-1)) + B_2(n)\,\delta(x(n-1)-1)$



la media varia con n.

no veo que sea ESA

6) $x(n) = \sum_{i=1}^{p} A_i e^{j\omega_i n}$

↳ VA compleja

1. $E[x(n)] = E\left[\sum_{i=1}^{p} A_i e^{j\omega_i n}\right] = p\,E\left[A_i e^{j\omega_i n}\right] = p\,E[A_i]\, e^{j\omega_i n}$ → depende de n, no ESA

Me olvido conjugado

$A_i A_i^* = |A|^2 \longrightarrow (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2$

$$R_x = E\left[X(n)X^*(k)\right] = E\left[\sum_{i=1}^{p} A_i e^{j\omega_i n} \sum_{j=1}^{p} A_i^* e^{-j\omega_j k}\right] = E\left[\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\left(A_i A_i^* e^{j\omega_i n} e^{-j\omega_i k}\right)\right] =$$

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} e^{j\omega_i n - j\omega_j k}\, E[A_i A_i^*] =$$

acá no es ESA

2. Si $E[A_i] = 0$ $\longrightarrow$ $E[x] = 0$

$\wedge$ A_i iid descorr ($Var[A_i] \neq 0$)

acá si es ESA, si wi=wj queda en función de la dif de tiempos

$$R_x = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} e^{j\omega_i n - j\omega_j k}\, E\left[|A_i|^2\right]$$

3. la PSD van a ser deltas pq $S_x = \mathcal{F}\{R_x\} = \mathcal{F}\left\{\sum e^{j\omega_i(n-k)}\right\} \cdot Var(A_i)$

$\underbrace{\sum \text{Exp complejos}} \xrightarrow{\mathcal{F}}$ tren de deltas

Predecible ¿? → Debe ser porque la frec no es aleatoria, solo la amplitud.

$$X(t) = \sum_{k=1}^{p} A_k e^{\jmath(\omega_k t + \Theta_k)} = \sum_{k=1}^{p} B_k e^{\jmath\omega_k t}, \qquad B_k = A_k\, e^{j\Theta_k} \text{ VAs complejas}$$

$$\mathbb{E}[X(t)] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{p} B_k e^{\jmath\omega_k t}\right] = \sum_{k=1}^{p} \mathbb{E}[B_k] e^{\jmath\omega_k t}.$$

$$R_X(t, t+\tau) = \mathbb{E}[X(t)X^*(t+\tau)] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{p} B_k e^{\jmath\omega_k t} \sum_{l=1}^{p} B_l^* e^{-\jmath\omega_l(t+\tau)}\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{p} \mathbb{E}[B_k B_l^*] e^{-\jmath\omega_l(t+\tau)} e^{\jmath\omega_k t}.$$

X no es necesariamente ESA.

- Si $\mathbb{E}[B_k] = 0$ (e.g., $\Phi_k \sim \mathcal{U}[0, 2\pi]$ independiente de A_k),

$$\mathbb{E}[X(t)] = \sum_{k=1}^{p} \mathbb{E}[B_k] e^{\jmath\omega_k t} = 0.$$

- Si B_k descorrelacionadas entre sí, y $\sigma_k^2 = \mathbb{E}[|B_k|^2]$,

$$R_X(t, t+\tau) = \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{p} \mathbb{E}[B_k B_l^*] e^{-\jmath\omega_l(t+\tau)} e^{\jmath\omega_k t} = \sum_{k=1}^{p} \sigma_k^2 e^{\jmath\omega_k \tau} = R_X(\tau),$$

Entonces, $X(t)$ es ESA.

7) $X(t)$ proceso gaussiano

1. La fdp conjunta es una gaussiana de orden n. $\left[2\pi^{n/2}\sqrt{det(C_x)}\right] \exp\left[-\frac{1}{2}(x-\mu_x)^T C_x^{-1}(x-\mu_x)\right]$

$C_x = E\left[(x-\mu_x)(x-\mu_x)^T\right]$

2. Si es ESA → $E[X(n)] = cte$

$C_x = C_x(t_1 - t_2)$

Pero ESE → toda dist solo depende de dif. → tomo la densidad gto a la derecha por T a ver que pasa

cte

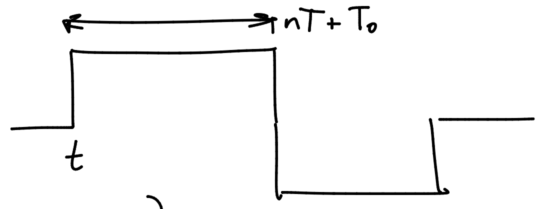
$\left[2\pi^{n/2}\sqrt{det(C_x)}\right] \exp\left[-\frac{1}{2}(x-\mu_x)^T C_x^{-1}(x-\mu_x)\right]$

↳ función de τ ✓

La media ∧ C_x definen x completo a la dist normal. Como esos momentos son solo dependientes de τ entonces es ESE ya que la dist. se define según τ a no t_1 a t_2.

8) $x(t) = \sum_n A_n P(t - nt - T_0)$

↳ pulso



$E[x(t)] = E\left[\sum_n A_n P(t-nt-T_0)\right]$ $\quad n\, E[A_n]\, E[P(t-nt-T_0)] = 0$ ¿?

depende de los datos

↳ 0 por consigna

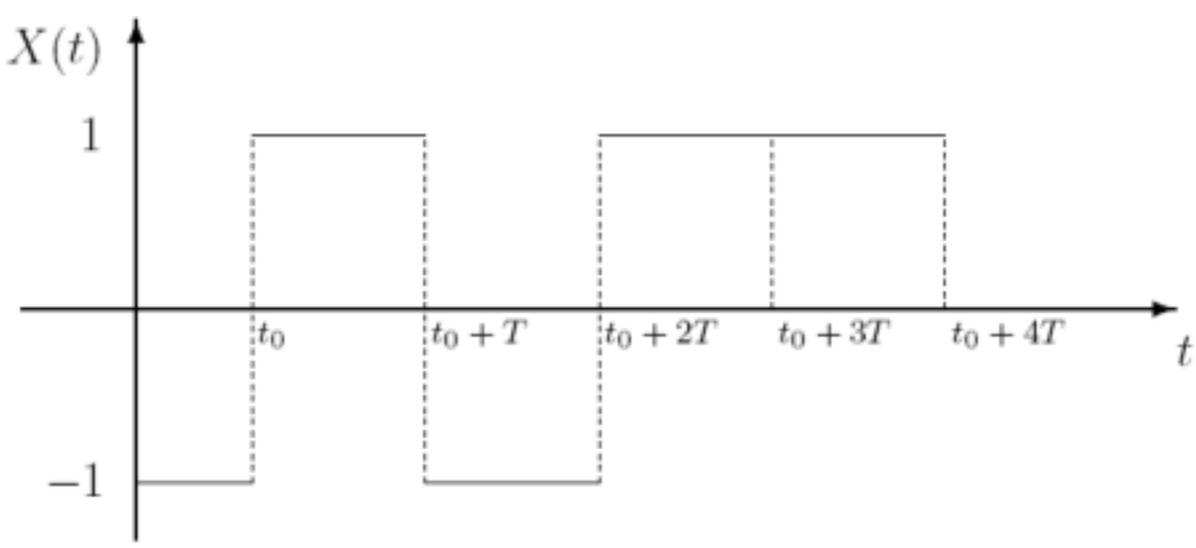
Ejercicio 8 - Modulación PAM

Un módem transmite una secuencia de datos del siguiente modo: transmite un 1 enviando un pulso de duración T segundos y amplitud 1; transmite un 0 enviando el mismo pulso con amplitud -1. En la figura se muestra como ejemplo la transmisión de la secuencia de datos 1011. La señal transmitida $X(t)$ responde a la ecuación siguiente

$$X(t) = \sum_n A_n p(t - nT - T_0),$$

donde $p(t)$ es un pulso de amplitud unitaria y duración T, A_n son variables aleatorias i.i.d. que toman el valor 1 o -1 según los datos a transmitir, y T_0 es una variable aleatoria uniforme en el intervalo $[0, T]$ que representa la fase de la señal transmitida. Se asume que T_0 y A_n son variables aleatorias independientes entre sí. Éste es un ejemplo de una señal binaria aleatoria.

1. Calcular $\mathbb{E}[X(t)]$.
2. Calcular la función de autocorrelación de $X(t)$. Para ello, suponga que $\mu_P = 0$.
3. Determinar si $X(t)$ es ESA o no.
4. ¿Varían los resultados si siempre $T_0 = 0$?
5. Simular una trayectoria de N períodos independientes, de la señal $X(t)$ binaria aleatoria, con fase inicial T_0 uniforme en el intervalo $[0, T]$. Estimar la media y la función de autocorrelación de la misma. Comparar los resultados en un mismo gráfico con los resultados teóricos.
6. Halle la media y la autocorrelación si no se incluye la variable aleatoria T_0, y analice si el proceso es ESA en ese caso.



Sistemas LTI

Ejercicio 1 - Senoidal ruidosa

Sea $X(n) = A\cos(2\pi\omega n + \Phi) + N(n)$, donde A y ω_0 son constantes, Φ se encuentra uniformemente distribuida en $[0; 2\pi)$ y $N(n)$ es ruido blanco de densidad de potencia σ^2.

1. Obtenga la media $\mathbb{E}[X(n)]$.
2. Si $X(n)$ es un proceso ESA, obtenga la densidad espectral de potencia del mismo.
3. Suponga que $X(n)$ es la señal de entrada a un filtro pasabanda de respuesta en frecuencia

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega - \omega_0| \leq \frac{W}{2} \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Compare la relación señal a ruido (SNR) a la entrada y a la salida del filtro. Extraiga conclusiones.

Ruido blanco σ^2

$$x(n) = A\cos(2\pi\omega n + \phi) + N(n) \qquad \phi \sim \mathcal{U}[0, 2\pi)$$

$$E[x(n)] = A\,E[\cos(2\pi\omega n + \phi)] + E[N(n)] = \frac{A}{2\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{\cos(2\pi\omega_0 + \phi)\,d\phi}_{\text{Valor medio del cos} \to 0} + 0 = 0$$

cte

$f_\phi(\phi)$

$$R_x(t, t+\tau) = E[A\cos(2\pi\omega t + \phi)\,A\cos(2\pi\omega(t+\tau) + \phi)]$$

$$= A^2 E[\cos(2\pi\omega t + \phi)\cos(2\pi\omega(t+\tau) + \phi)] = \frac{A^2}{2}E[\cos(2\pi\omega t + \phi + 2\pi\omega t + 2\pi\omega\tau + \phi)$$
$$+ \cos(\cancel{2\pi\omega t} + \phi - \cancel{2\pi\omega t} - 2\pi\omega\tau - \phi)] =$$

prop: $\cos(x)\cos(y) = \cos(x+y) + \sin(x)\sin(y)$

$\cos(x)\cos(y) = \cos(x-y) - \sin(x)\sin(y)$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$= \frac{A^2}{2}E[\cos(4\pi\omega t + 2\pi\omega\tau + \phi) + \cos(2\pi\omega\tau)]$$

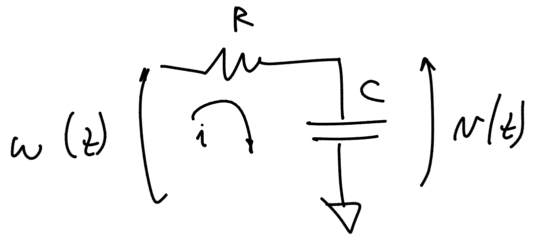
$$= \frac{A^2}{2}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\underbrace{\cos(4\pi\omega t + 2\pi\omega\tau + 2\phi)\,d\phi}_{\emptyset\text{, medio de 1 ciclo}} + E[\underbrace{\cos(2\pi\omega\tau)}_{\text{cte para la } E[\,]}]\right)$$

$f_\phi(\phi)$

$$\therefore R_x = \frac{A^2}{2}\cos(2\pi\omega\tau) \quad \text{Es ESA}$$

$$S_x = \mathcal{F}\{R_x\} = \frac{A^2}{2}\mathcal{F}\{\cos(\underbrace{2\pi\omega}_{\omega_0}\tau)\} = \boxed{\frac{A^2}{2}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega \pm 2\pi\omega_0 \pm 2\pi l)}$$

2) La RTA $H(\omega)$ del circuito es



$w(t) = Ri + V_c$ ← $v(t)$

$i_c = i = C\dot{v}_c$

$\xrightarrow{\mathcal{L}}$ $W(s) = RCVs + V$

$\frac{W}{V} = H(s)^{-1} = RCs + 1$

$H(s) = \frac{1}{RCs+1}$

$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{F}$

$s \longrightarrow j\omega$

(sobre eje $j\omega$)

$\longrightarrow H(j\omega) = \frac{1}{j\omega RC+1}$

LTI
Estable

Ruido blanco a entrada $\longrightarrow R_N = \delta(n)\frac{N_0}{2} \longrightarrow S_N = \frac{N_0}{2}$

Prop sist LTI: $S_y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_x(\omega) = \left|\frac{1}{jRC\omega+1}\right|^2 \frac{N_0}{2} = \frac{1}{|jRC\omega+1|^2}\frac{N_0}{2} = \frac{1}{\sqrt{1^2+R^2C^2\omega^2}^2}\frac{N_0}{2} = \boxed{\frac{N_0}{2+2R^2C^2\omega^2}}$

la potencia total es $\int_{-\infty}^{+\infty} S_y(\omega)\,d\omega$

3) 1. $y(t) = \frac{1}{2T}\int_{t-T}^{t+T} X(u)\,du = \frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\overbrace{\left[u(t+T_0)-u(t-T_0)\right]}^{\text{Va a dar una sinc}}du \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2T}\frac{1}{j\omega}\left[X(j\omega) * \frac{2\,\text{sen}(\omega T)}{\omega}\right]\cdot\frac{1}{2\pi}$

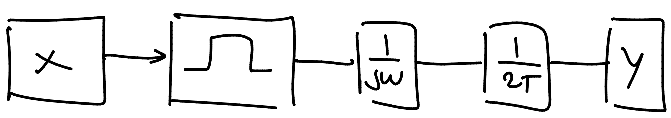
Para obtener $H(j\omega)$ podemos transformar. El sistema integra la ventana de $t-T$ a $t+T$ así que si en tiempo hay una ventana, en frec aparece la sinc.

$Y(j\omega) = \frac{1}{2T}\frac{1}{j\omega}\left[X(j\omega) * \frac{2\,\text{sen}(\omega T)}{\omega}\right]\cdot\frac{1}{2\pi}$ ¿?

No tengo idea

2. $E(y) = H(0)\,\mu_x$ $S_y(\omega) = |H(j\omega)|^2 S_x(\omega)$

$E[y] = \frac{1}{2T} E\left[\int_{t-T}^{t+T} x(u)\,du\right]$ Promediador es pasa-bajos



5) $E[X] = \sum_{x \in X} p_x X = \frac{1}{4}\left(-1-2+\sin(t)+\cos(t)\right) \to$ depende de t. No es ESA

requipro.

1. $R_X = E\left[\left(-1-2+\cancel{\sin(t)+\cos}(t)\right)\left(-1-2+\sin(\cancel{t+\tau})+\cos(t+\tau)\right)\right]$ mal, uso Σ no es el proceso $X(t)$ es mezcla

$E[\cos(t)\cos(t+\tau)] + E[\cos(t)\sin(t+\tau)] - 3E[\cos(t)] + E[\sin(t)\sin(t+\tau)] - 3E[\sin(t)] - 3E[\cos(t+\tau)]$

$-3E[\sin(t+\tau)] + 9 = 2\cos(\tau)\pi + 18\pi$

$E = \sum_{x_i} p_{x_i} \cdot x_i$

$R_X = E[X(t)X(t+\tau)] = E[X(t)Y(t)] = \sum_{x_i y_i} \underbrace{p_{x_i y_i}}_{\text{cjto}} x_i y_i = \sum_{x_i}\sum_{y_i} p_{x_i y_i} x_i y_i$

$\frac{1}{16}\left(\left(-1-2+\sin(t)+\cos(t)\right)\left(-1-2+\sin(t+\tau)+\cos(t+\tau)\right)\right)$

$\frac{1}{16}\left[\cos(t)\cos(t+\tau) + \sin(t)\cos(t+\tau) - 3\cos(t+\tau) + \cos(t)\sin(t+\tau) + \sin(t)\sin(t+\tau) - 3\sin(t+\tau) - 3\cos(t) - 3\sin(t) + 9\right]$

No hay chance

2. $x^2 \longrightarrow 1,\ 4,\ \sin^2,\ \cos^2$

$E[x^2] = \frac{1}{4}\left(1+4+\underbrace{\sin^2+\cos^2}_{1}\right) = 6/4 \quad \xrightarrow{6} \quad$ ESA

$R_X = \sum_{x_i}\sum_{y_i} \frac{1}{16} x_i y_i = \frac{\underbrace{\left(1+4+\underbrace{\sin^2+\cos^2}_{1}\right)}_{6}\left(1+4+\underbrace{\sin^2+\cos^2}_{1}\right)}{16} \cdot \frac{36}{16} = \frac{9}{4}$

6) Si X, W descorr $\to Y(t) = aX(t) + bW(t) \to Y(t)Y(t+\tau) = \left(aX(t)+bW(t)\right)\left(aX(t+\tau)+bW(t+\tau)\right)$

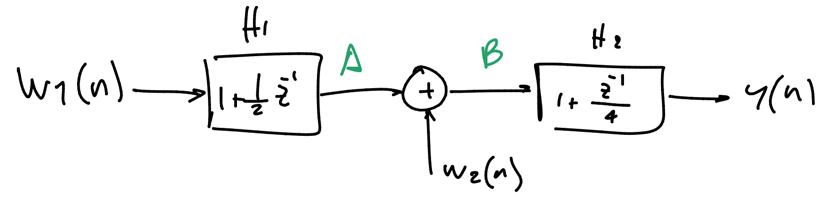
$R_Y = E\left[a^2X(t)X(t+\tau) + b^2W(t)W(t+\tau) + ab\underbrace{\left(X(t)W(t+\tau) + W(t)X(t+\tau)\right)}_{\text{Descorr}}\right]$

$R_Y = a^2 R_X + b^2 R_W + 0 + 0$

De ahí $Y = aX + bW$ es LTI y estable así que

$S_Y = \mathcal{F}\{R_Y\} = a^2\mathcal{F}\{R_X\} + b^2\mathcal{F}\{R_W\} = \underline{a^2 S_X + b^2 S_W}$

7) Planteamos:



Podemos trabajar en el dominio transformado ya que $S_y = \mathcal{F}\{R_y\}$

(A) $S_A = \left|1+\frac{1}{2}z^{-1}\right|^2 S_{w_1} \longrightarrow$ $y(n)$ $\quad S_y = \left|1+\frac{z^{-1}}{4}\right|^2 S_B$

(B) $S_B = S_A + S_{w_2}$

Junto todo: $\qquad S_{w_1} = S_{w_2} = 1 \quad$ ya que $R_{w_1} = R_{w_2} = \delta(k).1$

$$S_y = \left|1+\tfrac{1}{4}z^{-1}\right|^2 S_{w_2} + \left|1+\tfrac{1}{4}z^{-1}\right|^2\left|1+\tfrac{1}{2}z^{-1}\right|^2 S_{w_1} = \left|1+\tfrac{1}{4}z^{-1}\right|^2 + \left|1+\tfrac{1}{4}z^{-1}\right|^2\left|1+\tfrac{1}{2}z^{-1}\right|^2$$

Finjo demencia con $|\;|$ y planteo: $\left(1+\tfrac{1}{4}z^{-1}\right)^2 + \left(1+\tfrac{1}{4}z^{-1}\right)^2\left(1+\tfrac{1}{2}z^{-1}\right)^2 = \frac{z^{-4}}{64} + \frac{3z^{-3}}{16} + \frac{7z^{-2}}{8} + 2z^{-1} + 2$

$$= 2 + 2\delta(k-1) + \tfrac{7}{8}\delta(k-2) + \tfrac{3}{16}\delta(k-3) + \tfrac{1}{64}\delta(k-4)$$

Por prop de autocorrelación $R(k) = R(-k)$ (par)

8) $y(t) = \cos(x(t)+U) = \dfrac{e^{j(x(t)+U)} + e^{-j(x(t)+U)}}{2} = \frac{1}{2}\left[e^{jx(t)}\cdot e^{jU} + e^{-jx(t)}\cdot e^{-jU}\right]$

$$E[y] = \frac{1}{2}E\Big[\underbrace{e^{jx(t)}e^{jU}}_{\text{indep}} + \underbrace{e^{-jx(t)}e^{-jU}}_{\text{indep}}\Big] = \frac{1}{2}E\left[e^{jx(t)}\right]E\left[e^{jU}\right] + \frac{1}{2}E\left[e^{-jx(t)}\right]E\left[e^{-jU}\right]$$

$f_{x,U} = f_x \cdot f_U \;\therefore\; E[x\,U] = E[x]E[U]$ $\qquad$ Si $x(t)$ proceso Gaussiano ESA, $R_x = \dfrac{1}{1+|\tau|}$

A ver: $y = \frac{1}{2}\left[e^{jx(t)}\cdot e^{jU} + e^{-jx(t)}\cdot e^{-jU}\right]$ (indep, indep) $\qquad$ veamos la función caracteristica de la U

$$E[y] = \frac{1}{2}\left(E\left[e^{jx(t)}\right]E\left[e^{jU}\right] + E\left[e^{-jx(t)}\right]E\left[e^{-jU}\right]\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\phi_x(1)\phi_U(1) + \phi_x(-1)\phi_U(-1)\right) = 0$$

$\phi_U(1) = 0 \;;\; \phi_U(-1) = 0$

U = Uniforme de 0 a 2π escala $\frac{1}{2\pi}$

$$\phi_U = \frac{1}{2\pi}\underbrace{\frac{\operatorname{sen}(\pi w)}{w}}_{\text{sinc}}\underbrace{e^{jw\pi}}_{\text{desfase de }\pi\text{ a izq}}$$

$$R_y = \frac{E}{4}\left[\left(e^{jx(t)}\cdot e^{jU} + e^{-jx(t)}\cdot e^{-jU}\right)\left(e^{jx(t+\tau)}\cdot e^{jU} + e^{-jx(t+\tau)}\cdot e^{-jU}\right)\right] \qquad \text{Distribuimos}$$

x y U descorr

$$\frac{E}{4}\left[e^{jx(t)}\cdot e^{jU}e^{jx(t+\tau)}\cdot e^{jU} + e^{jx(t)}\cdot e^{jU}\cdot e^{-jx(t+\tau)}\cdot e^{-jU} + e^{-jx(t)}\cdot e^{-jU}\cdot e^{jx(t+\tau)}\cdot e^{jU} + e^{-jx(t+\tau)}\cdot e^{-jU}\cdot e^{-jx(t)}\cdot e^{-jU}\right]$$

$$\frac{E}{4}\Big[\underbrace{e^{2jU}}_{\phi_U(2)=0}.\text{algo} + e^{j(x(t)-x(t+\tau))} + e^{-j(x(t)-(x(t+\tau))} + \underbrace{e^{-2jU}}_{\phi_U(-2)=0}.\text{algo}\Big]$$

$$\underline{R_y = \frac{1}{4}\left(\phi_{x(t)-x(t+\tau)}(1) + \phi_{x(t)-x(t+\tau)}(-1)\right)}$$

$\beta = x(t) - x(t+\tau) \sim \mathcal{N} \longrightarrow \beta = [1\ -1] \begin{vmatrix} x(t) \\ x(t+\tau) \end{vmatrix} \longrightarrow E[\beta] = |1\ -1| \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} = 0$

$C_\beta = Var(\beta) = \sigma_\beta^2 = A\, C_x A^t = |1 -1| \begin{vmatrix} 1 & R_x \\ R_x & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix} = \underbrace{2 - 2R_x(\tau)}_{\sigma_\beta^2}$

$C_x(0) = \sigma_x^2$ ∧ la media es nula

$\beta \rightarrow \phi_\beta = e^{j\mu\omega \to 0} \cdot e^{\frac{(2R_x - 2)\,\omega^2}{2}} = \exp\left(\omega^2 \left(\frac{1}{1+|\tau|} - 1\right)\right)$

$\phi_\beta = \phi_{x(t)+x(t+\tau)}(\omega) \longrightarrow \phi(\pm 1) = \exp\left((\pm 1)^2 \left(\frac{1}{1+|\tau|} - 1\right)\right)$

$R_y = \frac{1}{4}\left(\phi_{x(t)-x(t+\tau)}(1) + \phi_{x(t)-x(t+\tau)}(-1)\right) \quad \therefore \quad R_y = \frac{1}{2} \exp\left(\frac{1}{1+|\tau|} - 1\right)$

ESA.

9) $y(n) = \sum_{i=0}^{K} a_i\, x(n-i)$

1. Lo hago para $k = 1, 2, 3, \ldots n$

$k=1 \quad a_0 x(n) + a_1 x(n-1) = y(n) = [a_0\ a_1]\,[x(n)\ x(n-1)]^t$

$k=2 \quad [a_0\ a_1\ a_2] \cdot [x(n)\ x(n-1)\ x(n-2)]^t$

$k=3 \quad [a_0\ a_1\ a_2\ a_3] \cdot [x(n)\ x(n-1)\ x(n-2)\ x(n-3)]^t$

$k=k_0 \quad [a_0\ a_1\ a_3 \cdots a_{k_0}] [x(n)\ x(n-1)\ x(n-2)\ x(n-3) \ldots x(n-k_0)]^t$

2. $R_x(k) = \sigma_x^2\, \delta(k)$, $\mu_x = 0$

$R_y = h * h_b * R_x \longrightarrow R_y = \sum a_i\, \delta(n-i) * \sum a_i\, \delta(n-i)_b * \sigma_x^2\, \delta(k) =$

si $y = \sum_{i=0}^{K} a_i\, x(n-i) \rightarrow y = h * x|_{x=\delta}$ $\quad [a_1 \ldots a_n] * [a_n \ldots a_1] \cdot \sigma_x^2$

$h = \sum_{i=0}^{K} a_i\, \delta(n-i)$ → Deltas desplazadas

$|R_y(k)| = 0$ si $|k| > m$ porque la long. de R_y depende de la long. de la rta impulsiva del sist, que en el caso de AR-m es m (es FIR).

3) $E[y] = 0$

$y = x(n) + \frac{1}{2} x(n-2) + \frac{1}{3} x(n-3)$

$R_y = E\left[\left(x(n) + \frac{1}{2} x(n-2) + \frac{1}{3} x(n-3)\right)\left(x(n+\tau) + \frac{1}{2} x(n+\tau-2) + \frac{1}{3} x(n-3+\tau)\right)\right]$

$= R_x(\tau) + \frac{1}{4} R_x(\tau) + \frac{1}{9} R_x(\tau)$

los iguales dan τ

$\frac{1}{2} x(n) x(n+\tau-2) \wedge \frac{1}{2} x(n-2) x(n+\tau) \longrightarrow \frac{1}{2} R_x(\tau \pm 2)$

$\tau - 2$ $\qquad n' = n-2 \;/\; x(n') x(n' + \underbrace{2+\tau}_{\tau+2})$

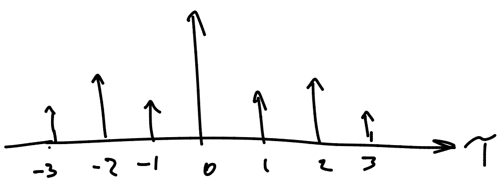
$\begin{pmatrix} x(n) x(n-3+\tau) \\ x(n-3) x(n+\tau) \end{pmatrix} \to \frac{1}{3} R_x(\tau \pm 3)$

de $\frac{1}{2} x(n-2) \frac{1}{3} x(n-3+\tau) \wedge \frac{1}{3} x(n-3) \frac{1}{2} x(n-2+\tau)$

$\frac{1}{6} R_x(\tau \pm 1)$

$\therefore R_y = \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right) R_x(\tau) + \frac{1}{6} R_x(\tau \pm 1) + \frac{1}{2} R_x(\tau \pm 2) + \frac{1}{3} R_x(\tau \pm 3)$

$R_y = \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right) \sigma_x^2 \delta(\tau) + \frac{\sigma_x^2}{6} \delta(\tau \pm 1) + \frac{1}{2} \sigma_x^2 \delta(\tau \pm 2) + \frac{1}{3} \sigma_x^2 \delta(\tau \pm 3)$



PAR ✓ MAX en $\tau = 0$ ✓

10) $y(n) = \alpha\, y(n-1) + b \xrightarrow{Z} Y(z) = \alpha\, Y(z)\, z^{-1} + b$

$Y(z)\left(1 - \alpha z^{-1}\right) = b$

$Y(z) = \frac{b}{1 - \alpha z^{-1}} \xrightarrow{Z^{-1}} \underbrace{\alpha^n . b + C_i}$

Crece

Demostrado

2. Ya lo mostré $\to \alpha^n . b + y(0)$

preguntar cuando aparece la CI

si $|\alpha| > 1$ el sistema no es estable, su ROC no cumple $|z| > |\alpha|$ entonces será la parte externa del círculo unitario $\wedge$ como no lo incluye no es estable (es causal).

Eso o va a ser anticausal

1) $x(n) = U(n) + U(n-1)$

$\times x(n+\tau)$: $x(n)x(n+\tau) = (U(n) + U(n-1))(u(n+\tau) + u(n-1+\tau))$

$E[\,]$: $R_x(n,n+\tau) = E[u(n)u(n+\tau) + u(n)u(n-1+\tau) + u(n-1)u(n+\tau) + u(n-1)u(n-1+\tau)]$

$$= \underbrace{R_U(n,n+\tau)}_{R_U(\tau)} + \underbrace{R_U(n,n-1+\tau)}_{R_U(\tau-1)} + \underbrace{R_U(n-1,n+\tau)}_{R_U(\tau+1)} + \underbrace{R_U(n-1,n-1+\tau)}_{R_U(\tau)}$$

$U \sim \mathcal{U}[-\sqrt{3}\sigma, \sqrt{3}\sigma)$

$E[U] = 0$; $R_U(n_1,n_2) = C_x(n_1,n_2) + \underbrace{\mu(n_1)\mu(n_2)}_{0} = R_U(n_1,n_2) = C_x(n_1,n_2)$

$$C_x = E[(U(n_1)-\mu(n_1))(U(n_2)-\mu(n_2))] = E[U(n_1)U(n_2)] = \frac{1}{2\sqrt{3}\sigma}\int_{-\sqrt{3}\sigma}^{\sqrt{3}\sigma} u^2\,du = \underline{\sigma^2 = Var(U)}$$

iid

$$Var(U) = \frac{(\sqrt{3}\sigma + \sqrt{3}\sigma)^2}{12} = \frac{4\cdot 3\sigma^2}{12} = \sigma^2$$

como $C_x = \sigma^2 \to R_U = \underbrace{\sigma^2\delta(\tau)}_{\text{porque son indep}} \to R_x = 2R_U(\tau) + \cancel{R_U(\tau\pm1)} = \cancel{2\sigma^2}$

0

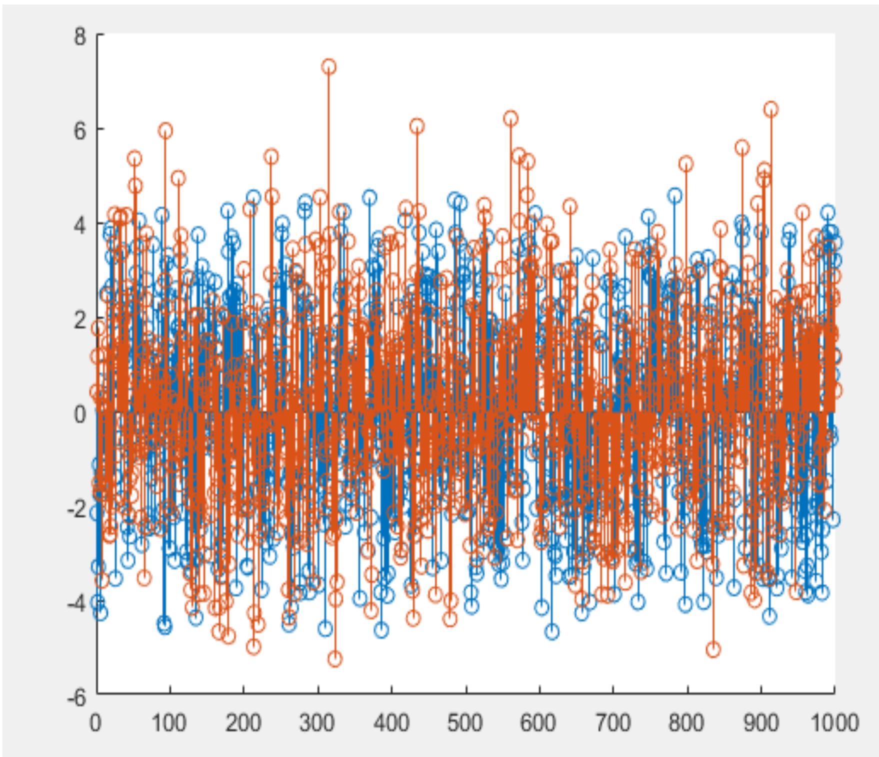
osea para $\underline{\tau > 0 \text{ la } R_U = 0}$

verificado matlab

Name	Value
MU	5.2703e-04
MX	0.0010
teoricaVX	4
U	1x100000 double
varianza	2
VU	2.0024
VX	4.0142
X	1x100000 double

2) No varía porque la $R_U = \sigma^2\delta(\tau)$ como la anterior

3) no veo mucha dif



17) Con los datos es suficiente para hacer yule-walker
Es AR-2

$$X(n) + a X(n-1) + b X(n-2) = W(n)$$

$$R_x(p) + \sum_{i=1}^{2} a_i R_x(p-i) = \sigma^2 \delta(p)$$

$a_1 = a$
$a_2 = b$

$\nearrow R_x(k) = R_x(-k)$ (Es par)

$p=0 \longrightarrow R_x(0) + a R_x(-1) + b R_x(-2) = \sigma^2 \delta(0)$

$1 + a \cdot 0 + b \cdot \frac{1}{4} = \sigma^2 \longrightarrow 1 + \frac{b}{4} = \sigma^2 \longrightarrow 1 + \frac{-1}{16} = \sigma^2$

$\boxed{\sigma^2 = \frac{15}{16}}$

$p=1 \longrightarrow R_x(1) + a R_x(0) + b R_x(-1) = 0$

$0 + a + = 0$

$a = 0$

$p=2 \quad R_x(2) + a \cancel{R_x(1)} + b R_x(0) = 0$

$\frac{1}{4} + b = 0 \rightarrow b = -\frac{1}{4}$

para obtener la autocorr entera iteramos por la fórmula de yule walker

$$R_x(p) + \sum_{i=1}^{2} a_i R_x(p-i) = \sigma^2 \delta(p)$$

$R_x(0) = 1 \qquad R_x(1) = 0 \qquad R_x(2) = \frac{1}{4}$

$R_x(3) + \underbrace{0}_{a} R_x(3-1) \underbrace{-\frac{1}{4}}_{b} R_x(3-2) = \sigma^2 \underbrace{\cancel{\delta(3)}}_{0}$

$R_x(3) = \frac{1}{4} \cdot R_x(1) = 0$

$R_x(4) - \frac{1}{4} R(2) = 0 \longrightarrow R_x(4) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$

$$R_x = \begin{cases} \left(\frac{1}{4}\right)^{\left|\frac{\tau}{2}\right|} & \text{si } \tau \text{ par} \\ 0 & \text{si } \tau \text{ impar} \end{cases}$$

$\longrightarrow R_x(\tau) = \left(\frac{1}{4}\right)^{\left|\frac{\tau}{2}\right|} \cdot \delta\left(-1^{|\tau|} - 1\right)$

$1 = -1^{|\tau|}$

$|\tau|$ par

R_x es Σ de $\delta(\tau - k)$ así que su trasformada son deltas.

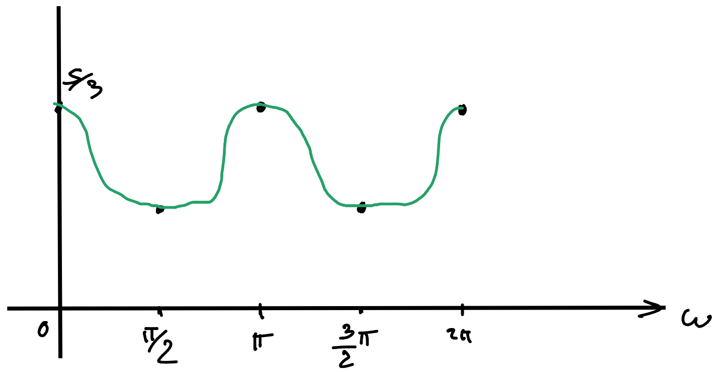
Buscamos la H del sist $\longrightarrow y(n) - \frac{1}{4} y(n-2) = X(n) \longrightarrow \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4} z^{-2}}$

$$S_y = |H|^2 \cdot S_x = \left| \frac{1}{1 - \frac{1}{4} z^{-2}} \right|^2 \cdot \sigma^2 \quad \sigma^2 \to \frac{15}{16} \longrightarrow z = e^{j\Omega} \longrightarrow \frac{1}{\left|1 - \frac{1}{4} e^{-2j\omega}\right|^2} \cdot \frac{15}{16}$$

$S_y = \dfrac{-15}{8\cos(2\omega)-17}$ $\quad \omega \in (0, 2\pi)$ (discreto a periódico)

$\omega = 0 \quad 5/3$

$\omega = \pi/2 \quad 3/5$



12) 2 filtros

$y(n) = \frac{1}{2} x(n) + \frac{1}{2} x(n-1)$ $\quad$ MA - 2

$z(n) = y(n) - y(n-1)$ $\quad$ MA - 2

$y(n-1) = \frac{1}{2} x(n-1) + \frac{1}{2} x(n-2)$

$$z(n) = \overbrace{\frac{1}{2} x(n) + \cancel{\frac{1}{2} x(n-1)}}^{y(n)} \overbrace{\cancel{-\frac{1}{2} x(n-1)} - \frac{1}{2} x(n-2)}^{y(n-1)}$$

$$z(n) = \frac{1}{2} x(n) - \frac{1}{2} x(n-2)$$

$\delta(n)$ $\quad \delta(n-2)$

Si $z(n) = \frac{1}{2}\left(x(n) - x(n-2) \right) \longrightarrow Z(j\omega) = \frac{1}{2}\left(X(j\omega) - X(j\omega) e^{-2j\omega} \right)$

$$\frac{Z(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{1 e^{j0}}{2} - \frac{1}{2} e^{-2j\omega} = H(j\omega)$$

$$E[z] = \frac{1}{2}\left(\underset{0}{\cancel{\mu_x}} - \underset{0}{\cancel{\mu_{x-2}}} \right) = 0$$

$$S_z = |H(j\omega)|^2 S_x = \sigma^2 \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2j\omega} \right|^2$$

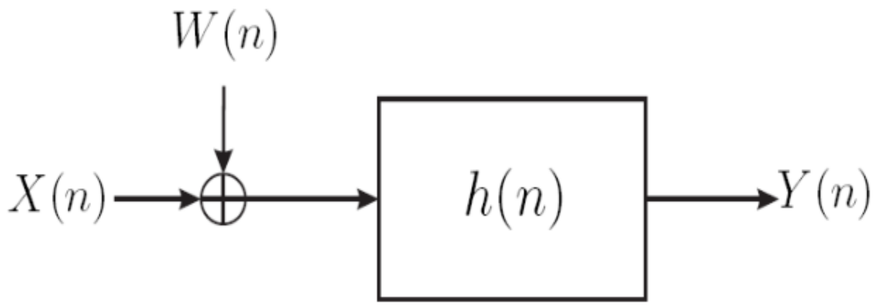
$$R_z = \mathcal{F}^{-1}\{S_z\} = \frac{\sigma^2}{2} \delta(\tau) - \frac{\sigma^2}{4} \delta(\tau \pm 2)$$

$$\boxed{S_z = \sigma^2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{e^{2j\omega} + e^{-2j\omega}}{4} \right)}$$

$R_z = C_z - \underset{0}{\cancel{\mu^2}}$ $\quad C_z = R_z$ $\quad C_z(n,n) = R_z(0) = \frac{\sigma^2}{2}$

Ejercicio 4 - Escalamiento de señal ruidosa

Considere el sistema LTI mostrado en la figura, donde $X(n)$ y $W(n)$ son procesos ESA descorrelacionados entre sí. La varianza de $W(n)$ es σ_W^2 y la de $X(n)$ es σ_X^2.



1. Hallar la función de autocorrelación del proceso $Y(n)$.
2. Definiendo $E(n) = Y(n) - X(n)$, determine su función de autocorrelación.
3. Si $h(n) = \alpha\,\delta(n)$, elija el valor de α que minimice la varianza de $E(n)$.

Indep → Descorrelacionados

1) $Y(n) = h(n) * (W(n) + X(n)) = h(n) * W(n) + X(n) * h(n)$

1ero: $R_{X+W} = E[(X(n)+W(n))(X(n+\tau)+W(n+\tau))] = E[X(n)X(n+k) + W(n)W(n+k) + \underbrace{X(n)W(n+k)}_{0} + \underbrace{W(n)X(n+k)}_{0}]$

1. $R_{X+W} = R_X + R_W$ $\quad \xrightarrow{\text{Prop LTI}}$ $R_Y = h * h_b * (R_X + R_W) = \boxed{h * h_b * R_X + h * h_b * R_W}$

2. $R_E = R_{Y-X} = E[(Y(n) - X(n))(Y(n+\tau) - X(n+\tau))] =$

$= E[Y(n)Y(n+\tau) + X(n)X(n+\tau) - X(n)Y(n+\tau) - Y(n)X(n+\tau)]$

$R_E = R_Y + R_X - E[X(n)Y(n+\tau)] - E[Y(n)X(n+\tau)]$

$Y = h*X + h*W \to - E[X(n).h*X(n+\tau) + \underbrace{X(n).h*W(n+\tau)}_{0}] - E[X(n)*h.X(n+\tau) + \underbrace{W(n)*h.X(n+\tau)}_{0}]$

$R_E = R_Y + R_X - h * 2R_X$

2. $E(n)E(n+\tau) = [Y(n) - X(n)][Y(n+\tau) - X(n+\tau)]^*$

$R_E = E[Y(n)Y^*(n+\tau) - Y(n)X^*(n+\tau) - X(n)Y^*(n+\tau) + X(n)X^*(n+\tau)]$

① $R_E = R_Y(\tau) + R_X(\tau) - \boxed{E[Y(n)X^*(n+\tau)]} - \boxed{E[X(n)Y^*(n+\tau)]}$

① $Y(t) = h*X(t) + h*W(t) \to E[Y(t)X^*(t+\tau)] = h*E[X(t)X^*(t+\tau)] + h*E[\underbrace{W(t)X^*(t+\tau)}_{0}] = h*R_X$ ②

② $\begin{cases} Y(t) = h*X(t) + h*W(t) \longrightarrow E[Y(t)Y^*(t+\tau)] = h*E[X(t)Y^*(t+\tau)] + h*E[W(t)Y^*(t+\tau)] \\ Y(t+\tau) = h*X(t+\tau) + h*W(t+\tau) \end{cases}$

$\hookrightarrow R_X*h*h^* + R_W*h*h^* = h*E[X(t)Y^*(t+\tau)] + h*E[W(t)\cancel{h^* * X^*(t+\tau)} + W(t).h^* * W(t+\tau)]$

$\cancel{h}*E[X(t)Y^*(t+\tau)] = R_X \cancel{*h} * h^* + \cancel{R_W * h * h^*} - \cancel{h}*E[\cancel{h^* *} W(t)W(t+\tau)]$

$E[X(t)Y^*(t+\tau)] = R_X * h^*$

$$R_E = R_y(\tau) + R_x(\tau) \underbrace{- h * R_x - R_x * h^*}_{- R_x * (h + h^*)} = R_y(\tau) + R_x(\tau) - R_x * (h + h^*)$$

$$h + h^* = \alpha\delta(n) + \alpha\delta(n) = 2\alpha\delta(n)$$

3) $h = \delta(n)\alpha$

a priori de antes

$\longrightarrow R_y = \alpha^2 (R_x + R_w)$

$$R_E = \alpha^2 R_w + \alpha^2 R_x + R_x - 2\alpha R_x$$

$$\boxed{R_E = \alpha^2 R_w + R_x(\alpha^2 - 2\alpha + 1)}$$

$$y = \alpha x + \alpha w$$

$$E = y - x \longrightarrow \alpha x + \alpha w - x = E = \alpha w + x(\alpha - 1)$$

$$R_E = E\left[\left(\alpha w(n) + (\alpha-1)x(n)\right)\left(\alpha w(n+k) + (\alpha-1)x(n+k)\right)\right]$$

$$= \alpha^2 R_w + (\alpha-1)^2 R_x + E\left[\alpha(\alpha-1)\cancel{w(n)x(n+k)}\right] + E\left[\alpha(\alpha-1)\cancel{x(n)w(n+k)}\right]$$

$$\alpha^2 R_w + (\alpha-1)^2 R_x = \boxed{\alpha^2 R_w + (\alpha^2 - 2\alpha + 1) R_x}$$

$$R_E = C_E + \mu_E^2 \quad ; \quad E[E] = E[y - x] = E[\alpha x + \alpha w - x] = \alpha(0 + 0) - 0 = 0$$

$$\therefore R_E(n,n) = R_E(k=0) = C_E(n,n) = Var(E) = \alpha^2 R_w(0) + (\alpha^2 - 2\alpha + 1) R_x(0)$$

$R_x(0) = \sigma_x^2 + \mu_x^2 = A$ $\wedge$ $R_w(0) = \sigma_w^2 + \mu_w^2 = B$ $\longrightarrow$ $Var(E) = \alpha^2 B + (\alpha^2 - 2\alpha + 1) A$

$d/d\alpha$ $\quad 2\alpha B + (2\alpha - 2) A = 0$

$d/d\alpha$ $\quad 2B + 2A = 0 \quad > 0$ min

$$\alpha(2B + 2A) - 2\sigma_x^2 = 0$$

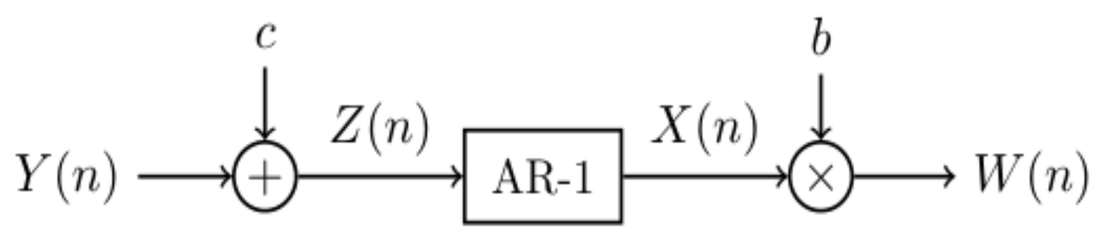
$$\alpha = \frac{2A}{2B + 2A} \rightarrow \text{min}$$

Ejercicio 13 - Sistema blanqueador

Se dispone de muestras de un proceso ESA gaussiano $Y(n)$ con media $\mu_Y = \frac{1}{2}$ y autocovarianza:

$$C_Y(k) = \delta(k) + \frac{1}{4}\left[\delta(k-1) + \delta(k+1)\right].$$

Se desea procesar a Y de modo de transformarlo en un proceso blanco $W(n)$ de media nula y varianza $\sigma_W^2 = 1$. Para ellos se implementa el siguiente sistema:



La constante c se elige de modo que el proceso $Z(n)$ tenga media nula. El proceso AR-1 es de la forma:

$$X(n) = aX(n-1) + Z(n),$$

es utilizado para eliminar la correlación entre las muestras (a es una constante a determinar tal que $|a| < 1$). Por último, la constante b es utilizada para ajustar la varianza de $X(n)$ al valor deseado.

1. Determine la constante c de modo que el proceso $Z(n)$ tenga media nula, y halle la autocorrelación de Z.
2. Determine a y b de modo que W cumpla las especificaciones pedidas.
3. ¿Qué puede concluir de la relación entre los procesos MA-1 y un proceso AR-1? ¿Y en el caso del MA-m y el AR-m?

1. Bueno: $\mu_Z = H(j0)\cdot \mu_{entrada}$

Entonces si $\mu_{entrada} = 0 = \mu_Z$.

$E[Z] = E[Y - 1/2] = 0$

$E[Y(n) + c] = 0 = \frac{1}{2} + c = 0 \to \boxed{c = -1/2}$

Conviene por dom transformado

$(\mu_Y - 1/2)^2 = 0$

Buscamos $R_X(\tau) = \delta(\tau)\sigma^2 \wedge R_Z = C_Y = \delta(k) + 1/4\,\delta(k\pm1)$

sist) $x(n) - a\,x(n-1) = z(n) \xrightarrow{\mathcal{Z}} X(z)(1 - az^{-1}) = Z(z)$

$H(z) = \frac{salida}{entrada} = \frac{1}{1-az^{-1}}$

Planteamos que $S_X(j\omega) = |H(j\omega)|^2 S_Z(j\omega)$

$\sigma^2 = \left|\frac{1}{1-az^{-1}}\right|^2 \mathcal{Z}\{\delta(k) + 1/4\,\delta(k\pm1)\} \to \sigma^2 = \frac{1}{|1-az^{-1}|^2}\left(1 + 1/4\,z + 1/4\,z^{-1}\right)$

si $z = e^{j\omega} \to \sigma^2 = \frac{1}{|1-ae^{-j\omega}|^2}\left(1 + 1/4\,e^{j\omega} + 1/4\,e^{-j\omega}\right) = \frac{1 + 1/2\cos(j\omega)}{-2a\cos(j\omega) + a^2 + 1}$

si la función es cte $\frac{\partial}{\partial x} = 0 \longrightarrow \frac{-(a^2+4a+1)\,\text{sen}(j\omega)}{2(2\,a\cos(j\omega)-a^2-1)^2} = 0$

$a = \sqrt{3} - 2 \quad (< 1)$

Veamos $\longrightarrow \left.\frac{1+\frac{1}{2}\cos(j\omega)}{-2\,a\cos(j\omega)+a^2+1}\right|_{a=\sqrt{3}-2} = \frac{\sqrt{3}+2}{4} = \sigma^2 = S_x$

Entonces el filtro queda

$x(n) - (\sqrt{3}-2)\,x(n-1) = z(n)$

$R_z = C_y \quad \wedge \quad R_x = \delta(k)\left(\frac{\sqrt{3}+2}{4}\right)$

Sabemos que $\quad W = b \cdot X$

puedo decir $h = b\,\delta(k) \quad \therefore \quad R_w = b^2 \delta(k) * R_x$

$R_w = b^2 R_x = b^2\left(\frac{\sqrt{3}+2}{4}\right) = 1$ consigna

$b = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}+2}{4}\right)^{-1}} = \sqrt{6} - \sqrt{2}$

$\frac{w(n)}{b} - \frac{a}{b} w(n-1) = z(n)$

$W(j\omega)\left(\frac{1}{b} - \frac{a}{b} e^{-j\omega}\right) = Z(j\omega)$

$\frac{W(j\omega)}{Z(j\omega)} = H(j\omega) = \left.\frac{1}{\frac{1}{b} - \frac{a}{b} e^{-j\omega}}\right|_{\substack{b=\sqrt{6}-\sqrt{2} \\ a=\sqrt{3}-\sqrt{2}}} \quad \wedge \quad |H(j\omega)|^2 = \frac{2}{\cos(j\omega)+2}$

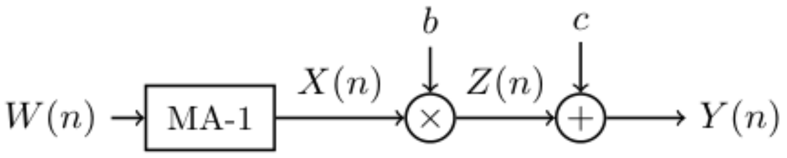
$S_w(j\omega) = \frac{2}{\cos(j\omega)+2} \cdot S_z(j\omega) = \frac{2}{\cos(j\omega)+2} \cdot \left(1 + \frac{1}{4}e^{j\omega} + \frac{1}{4}e^{-j\omega}\right) = 1 = S_w \therefore R_y = \sigma_w^2 = 1$

Ejercicio 14 - Generación de muestras de un proceso

Se desea generar muestras de un proceso ESA $Y(n)$ con media $\mu_Y = \frac{1}{2}$ y autocovarianza:

$$C_Y(k) = \delta(k) + \frac{1}{4}\left[\delta(k-1) + \delta(k+1)\right].$$

Para ello se tienen muestras de un proceso de ruido blanco $W(n)$ de media nula y varianza unitaria. Para generar las muestras de Y se utiliza el siguiente sistema:



El proceso MA-1 es de la forma:

$$X(n) = aW(n-1) + W(n).$$

Las constantes a, b y c deben determinarse de modo que el proceso Y cumpla lo pedido.

1. Utilice lo aprendido en el ejercicio 9 para justificar que la estructura propuesta tiene sentido.
2. Halle $\mathbb{E}[Z(n)]$ y verifique que no depende de a ni de b. Elija c de modo que $\mathbb{E}[Y(n)] = \mu_Y = \frac{1}{2}$.
3. Determine las constantes a y b de modo que la covarianza de Z sea igual a la de Y, es decir: $C_Z(k) = C_Y(k)$ para todo k. Elija a de modo que $|a| < 1$.

2. $E[Y] = E[Z+c] = E[Z]+c = b\,E[X(n)]+c = b\,E[aW(n-1)+W(n)] + c$

como $E[W(n)]=0$ $\underline{\wedge \text{ ESA}}$ $\longrightarrow$ $b E[aW(n-1)+W(n)]+c = (ab+1)\cancel{E[W(n)]}_{0}+c = \boxed{\tfrac{1}{2} = c = E[Y]}$

3. $Y = \frac{1}{2} + Z$ $\qquad x(n) = W(n) + aw(n-1)$ $\qquad S_x = |1+a e^{-jw}|^2 =$

$S_W = 1$ $\qquad \dfrac{X(jw)}{W(jw)} = 1 + a e^{-jw}$ $\qquad 2a\cos(w) + a^2 + 1$

$S_x = |H(jw)|^2 S_W$ $\qquad = a e^{jw} + a e^{-jw} + a^2 + 1$

tengo que obtener una R_x que sea como la R_y con un factor de escalamiento de diferencia.

Condiciones de adelante para atrás

$R_Z = E\left[(Y(t)-\tfrac{1}{2})(Y(t+\tau)-\tfrac{1}{2})\right] = C_Y = \underbrace{\delta(k) + \tfrac{1}{4}\delta(k\pm 1)}_{R_Z} \xrightarrow{F} \left(1 + \dfrac{\cos(w)}{2}\right) S_Z$

$S_Z = |b|^2 S_x$

pensando el multiplicador: $x \rightarrow \boxed{b.\delta(n)} \rightarrow z$

$=$

$x \rightarrow \otimes \rightarrow z$, $\uparrow b$

$S_x = \left(1 + \dfrac{\cos(w)}{2}\right)\dfrac{1}{|b|^2}$

$$a e^{j\omega} + a e^{-j\omega} + a^2+1 = \left(1+\frac{\cos(\omega)}{2}\right)\frac{1}{|b|^2}$$

$$2a\cos(\omega) + a^2+1 = \frac{1}{|b|^2} + \frac{1}{2|b|^2}\cos(\omega)$$

$$\begin{cases} 2a = \dfrac{1}{2|b|^2} \\ a^2+1 = \dfrac{1}{|b|^2} \end{cases} \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} a = 2-\sqrt{3} \\ b = \dfrac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}}{4} \end{array}$$

Probemos: $S_x = \left|1 + a e^{-j\omega}\right|^2 = -2(\sqrt{3}-2)(\cos(\omega)+2)$

$$S_z = b^2 S_x = \frac{\cos(\omega)+1}{2} \longrightarrow \underline{R_z = \tfrac{1}{4}\delta(\tau\pm1) + \delta(\tau)}$$

(El multiplicador)

Como $E[z] = 0$ $\quad \boxed{R_z = C_z = C_y}$ ✓

Ahora $z + 1/2 \longrightarrow \underline{E[z+1/2] = E[u] = 1/2}$

Yule - Walker

$$R_y(n) + \sum_{i=1}^{m} a_i R_y(n-i) = \sigma_n^2 \delta_{n,0} \quad n \geq 0$$

$$R_y(n) = R_y(-n) \quad n < 0$$

Se propone una solucion de p^k, p construir

$$p^{n-m}\left(p^m + \sum_{i=1}^{m} a_i p^{m-i}\right) = 0 \quad n \geq 0$$

equivalente $p^m + \sum_{i=1}^{m} a_i p^{m-i} = 0$ polinomio de m raices.

Cada raiz p_i da lugar a una solución $S_i(n)$

$$R_y(n) = \sum_i A_i S_i(n)$$

A_i se determinan a partir de condiciones iniciales.

- Raices distintas (reales y complejas)

$$R_y(n) = \sum_{i=1}^{m} A_i p_i^n \quad n \geq 0 \rightarrow R_y(n) = \sum_{i=1}^{m} A_i p_i^{|n|}, \; n \in \mathbb{Z}$$

- Raices Repetidas

Si p_1 tiene multiplicidad q_1 la solución asociada a p_1

$$p_1^n \left(A_1 + A_2 n + A_3 n^2 + \dots + A_{q_1-1} p_1^{q_1-1}\right).$$

Si hay raices $p_1, \dots, p_l$ con multiplicidades $q_1, \dots, q_l$

$$R_y(n) = \sum_{i=1}^{l} p_i^{|n|} \sum_{j=0}^{q_i-1} A_{i,j} |n|^j \quad n \in \mathbb{Z}$$

Para el caso de Raíces distintas.

$$R_Y(n) = \sum_{j=1}^{m} A_j \, p_j^{|n|} \quad n \in \mathbb{Z}$$

Reemplazando en la ecuación en diferencias.

$$\sum_{j=1}^{m} A_j \, p_j^{|n|} + \sum_{i=1}^{m} a_i \sum_{j=1}^{m} A_j \, p_j^{|n-i|} = \sigma_X^2 \, \delta_{n,0}$$

Defino $a_0 = 1 \rightarrow \displaystyle\sum_{j=1}^{m} A_j \sum_{i=0}^{m} a_i \, p_j^{|n-i|} = \sigma_X^2 \, \delta_{n,0}$

Considerando las ecuaciones $n = 0, \dots, m-1$

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{m} a_i \, p_1^{|i|} & \cdots & \cdots & \sum_{i=0}^{m} a_i \, p_m^{|i|} \\ \vdots & & & \\ \sum_{i=0}^{m} a_i \, p_1^{|m-1-i|} & \cdots & \cdots & \sum_{i=0}^{m} a_i \, p_m^{|m-1-i|} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_X^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 1

Se desea un vector aleatorio $\mathbf{X} = [X_1, X_2, X_3]^t$ cuyas componentes son independientes entre sí y están distribuidas de acuerdo a

$$X_1 \sim U[0,1] \quad X_2 \sim U[1,2] \quad X_3 \sim U[2,3]$$

1. Hallar la función de densidad conjunta $f_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3)$
2. Obtenga $\mathbb{E}[\mathbf{X}]$.
3. Sea la variable aleatoria $Y = \mathbf{a}^t\mathbf{X}$ donde $\mathbf{a} = [1, 1, 0]^t$. Obtenga la función de densidad de Y.
4. Finalmente, se construye $\mathbf{V} = [V_1, V_2, V_3]^t$ donde

$$V_1 = X_1 \quad V_2 = X_1 + X_2 \quad V_3 = X_2 + X_3.$$

Obtenga la matriz de covarianza de $\mathbf{V}$, C_V.

Ejercicio 15 - Realizaciones de procesos AR-1

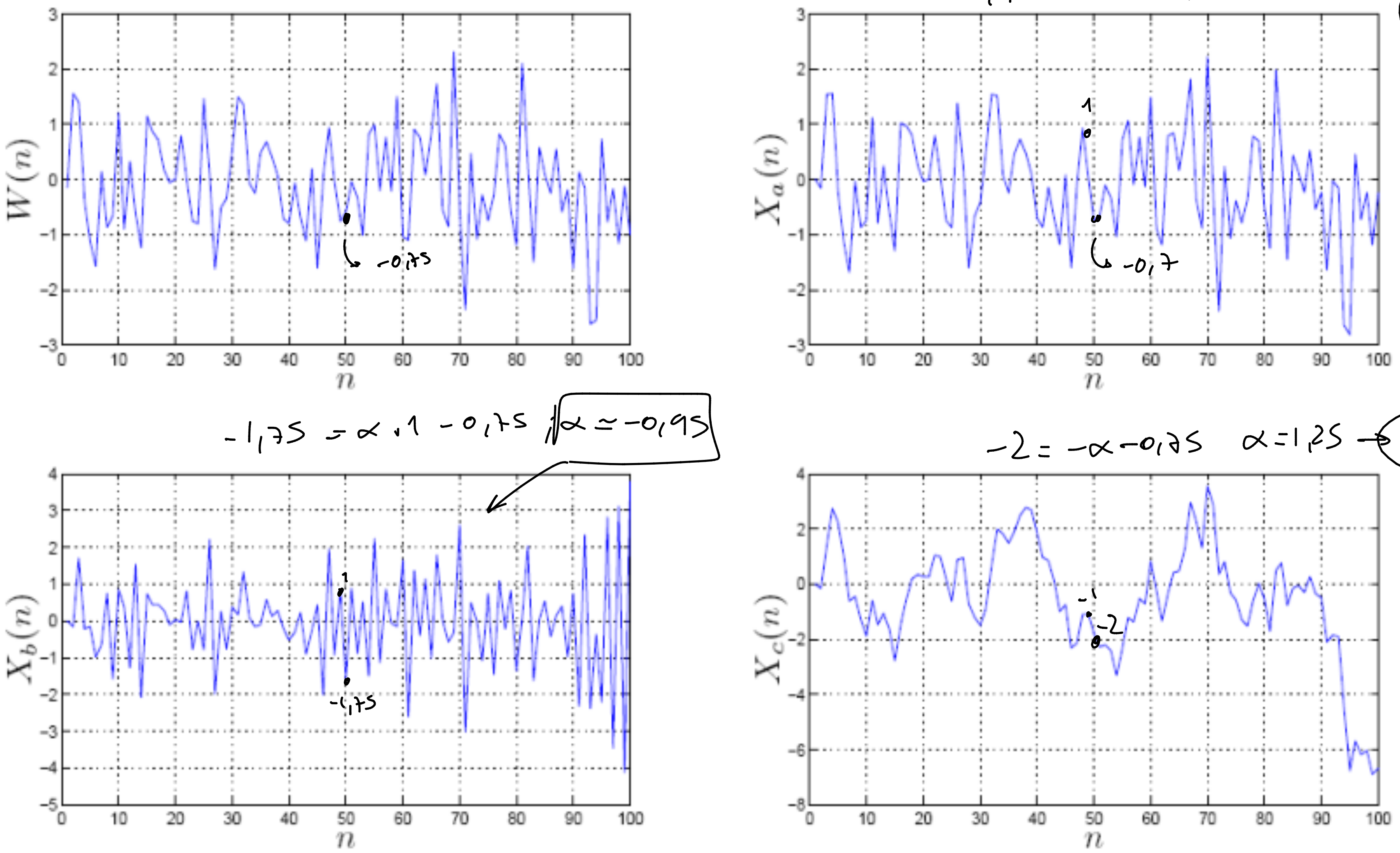
Se simula numéricamente un proceso autoregresivo de primer orden

$$X(n) = \alpha X(n-1) + W(n)$$

excitado por un ruido blanco de media nula y varianza unitaria. Se realizan tres simulaciones diferentes mostradas en la figura utilizando los siguientes valores del parámetro α:

$$\alpha_1 = 0{,}95 \quad \alpha_2 = 0{,}1 \quad \alpha_3 = -0{,}95$$

$-0{,}7 = \alpha \cdot 1 - 0{,}75 \quad \alpha \simeq 0 \to 0{,}1$



$-1{,}75 = \alpha \cdot 1 - 0{,}75 \quad \boxed{\alpha \simeq -0{,}95}$

$-2 = -\alpha - 0{,}75 \quad \alpha = 1{,}25 \to 0{,}95$

1. Asigne el coeficiente α que corresponde a cada uno de los gráficos de la figura.

2. Grafique la autocorrelación del proceso $X(k)$ en cada caso. $\to$ ¿?

Y_W

$R_x(k) + 0{,}1\, R_x(k-1) = \sigma^2 \delta(k)$

$k=0$: $R_x(0) + 0{,}1\, R_x(-1) = 1$

$k=1$: $R_x(1) + 0{,}1\, R_x(0) = 0$

$R_x(0) = 100/99 \quad R_x(\pm 1) = -10/99$

$R_x(2) = 1/99$

$k>1$: $R_x(k) = -0{,}1\, R_x(k-1)$

$R_x = \frac{100}{99} \cdot (-0{,}1)^{|k|}, \quad k \in \mathbb{Z}$ (enteros)

$R_x(k) + 0{,}95\, R_x(k-1) = \sigma^2 \delta(k)$

$R_x(0) = 1 - 0{,}95\, R_x(1)$

$R_x(1) = 0 - 0{,}95\, R_x(0)$

$R_x(0) = 400/39$

$R_x(1) = -\frac{380}{39}$

$R_x(k) = \frac{400}{39} (-0{,}95)^{|k|}; \quad k \in \mathbb{Z}$

$R_x(k) - 0{,}95\, R_x(k-1) = \sigma^2 \delta(k)$

$R_x(0) = 100/99$

$R_x(1) = 10/99$

$R_x(2) = 0{,}95 \cdot R_x(1) = 19/198$

$R_x(k) = \frac{100}{99} (0{,}95)^{|k|}; \quad k \in \mathbb{Z}$

Ejercicio 16 - Procesos AR-2

El modelo del proceso AR2, $X(n)$ es:

$$X(n) = a_1 X(n-1) + a_2 X(n-2) + W(n)$$

donde $W(n)$ es una secuencia de ruido blanco y a_1 y a_2 son coeficientes reales.

1. Expresar la función de transferencia $H(z)$ del sistema lineal que, excitado por la secuencia de ruido blanco, entrega como salida el proceso AR2.

2. Obtener y resolver la ecuación en diferencias que debe satisfacer la secuencia de autocorrelación.

3. Verifique analíticamente las siguientes propiedades:

   a) En el caso de polos reales y distintos, la secuencia de autocorrelación decae exponencialmente. Analizar el caso en que ambos polos son positivos, ambos negativos y uno positivo y otro negativo.

   b) En el caso de polos complejos conjugados, la secuencia de autocorrelación es pseudoperiódica.

1. $X(j\omega) - a_1 X(j\omega) e^{-j\omega} - a_2 X(j\omega) e^{-2j\omega} = W(j\omega)$

$$\frac{X(j\omega)}{W(j\omega)} = H(j\omega) = \frac{1}{1 - a_1 e^{-j\omega} - a_2 e^{-2j\omega}} \rightarrow S_x = \left|\frac{1}{1 - a_1 e^{-j\omega} - a_2 e^{-2j\omega}}\right|^2 \sigma^2$$

2. $x(n) - a_1 x(n-1) - a_2 x(n-2) = w(n)$

$$E\left[\left(x(n) - a_1 x(n-1) - a_2 x(n-2)\right)\left(x(n+k) - a_1 x(n+k-1) - a_2 x(n+k-2)\right)\right] = R_w$$

$$R_x + a_1^2 R_x + a_2^2 R_x - a_1 R(k-1) - a_2 R(k-2) - a_1 R(k+1) + a_1 a_2 R_x(k-1) - a_2 R_x(k+2) + a_1 a_2 R_x(k+1)$$

$$R_x(1 + a_1^2 + a_2^2) + R_x(k-1)(a_1 a_2 - a_1) + R_x(k+1)(a_1 a_2 - a_1) - a_2 R(k+2) - a_2 R(k-2) = \sigma^2 \delta(k)$$

$$x(1 + a_1^2 + a_2^2) + x z^{-1}(a_1 a_2 - a_1) + x z (a_1 a_2 - a_1) - a_2 x z^{-2} - a_2 x z^2 = \sigma^2$$

$$x = \frac{\sigma^2}{(1 + a_1^2 + a_2^2) + (a_1 a_2 - a_1)(z^{-1} + z) - a_2(z^2 + z^{-2})}$$

la antitransformada de eso es la solución

$$S_x = \left|\frac{1}{1 - a_1 e^{-j\omega} - a_2 e^{-2j\omega}}\right|^2 \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{2a_2(a_1\cos(\omega) - 1)\cos(2\omega) + 2a_1 a_2 \sin(\omega)\sin(2\omega) - 2a\cos(\omega) + a_1^2 + a_2^2 + 1}$$

y-w: $R_x(k) - a_1 R_x(k-1) - a_2 R_x(k-2) = \sigma^2 \delta(k)$

$$R_x(1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}) = \sigma^2$$

$$R_x = \frac{\sigma^2}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}} \longrightarrow \frac{z^2 \sigma^2}{z^2 - a_1 z - a_2}$$

polos = $\dfrac{\mp\sqrt{a^2 + 4b} \pm a}{2}$

$\frac{z^2\sigma^2}{z^2 - a_1 z - a_2}$ polos $\frac{\mp\sqrt{a^2+4b} \pm a}{2}$

Aprox

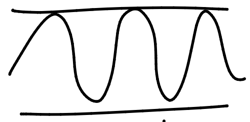
$$\frac{\cancel{z^2}\,\sigma^2}{(\cancel{z}-p_1)(\cancel{z}-p_2)} = \frac{A}{1-p_1 z^{-1}} + \frac{B}{1-p_2 z^{-1}}$$

si son polos reales escribe

$\xrightarrow{Z^{-1}} p_1^n u(n) + p_2^n u(n)$, Σ exp decreciente.

si los polos son CC $\rightarrow \frac{\sigma^2}{z^2+p} \rightarrow$ sen$(w_0 t)\,u(t)$ senoidal

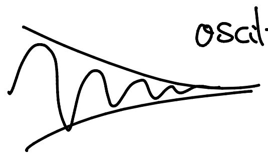
↳ si está en círculo unitario



constante cíclica

si $|\text{polos}| < 1$ ↳ sen$(w_0 t)e^{-\alpha t}u(t)$

oscila



Autocorrelación del AR-m

Para el caso general, procedemos como para el AR-1, partiendo de la ecuación en diferencias:

$$Y(k) + \sum_{i=1}^{m} a_i Y(k-i) = X(k),$$

$$\mathbb{E}[Y(k)Y(k-n)] + \sum_{i=1}^{m} a_i \mathbb{E}[Y(k-i)Y(k-n)] = \mathbb{E}[X(k)Y(k-n)].$$

$$R_Y(n) + \sum_{i=1}^{m} a_i R_Y(n-i) = \mathbb{E}[X(k)Y(k-n)].$$

Analizando como antes el término $\mathbb{E}[X(k)Y(k-n)]$, obtenemos las ecuaciones de Yule-Walker.

Ejercicio 18 - Modelos AR-m

Suponga que se estima la función de autocorrelación de un proceso ESA $X(n)$ alrededor de $k = 0$ y se obtienen los siguientes valores:

$$R_X(0) = 2, \qquad R_X(1) = 0{,}8 \qquad R_X(2) = 0{,}82 \qquad R_X(3) = 0{,}728 \qquad R_X(4) = 0{,}6562$$

Determine modelos AR de orden 1, 2, 3 y 4 para el proceso $X(n)$ considerando las condiciones anteriores. ¿Qué conclusiones puede extraer?

$$R_X(k) + \sum_{i=1}^{n} a_i R_X(k-i) = \sigma^2 \delta(k)$$

orden 1) $R_X(k) + a_1 R_X(k-1) = \sigma^2 \delta(k)$

$k=0 \quad 2 + a_1 0{,}8 = 1 \longrightarrow a_1 = -5/4$

orden 2) $R_X(k) + a_1 R_X(k-1) = \sigma^2 \delta(k)$

$k=0 \quad 2 + a_1 0{,}8 + 0{,}82\, a_2 = 1 \qquad a_1 = 1/6$

$k=1 \quad 0{,}8 + a_1 2 + 0{,}8\, a_2 = 0 \qquad a_2 = -170/123$

3) $\underline{3\ EC}$

Ejercicio 3. *Sean $X(n)$ e $Y(n)$ dos procesos en tiempo discreto independientes entre si. Se forma el procesos multiplicador $z(n) = X(n)Y(n)$. Se sabe que*

- $E[X(n)] = \alpha n$, $\alpha \neq 0$ *una constante;* $\mathbb{E}[Y(n)] = 0$*;*
- $R_X(n_1, n_2) = f(n_1 - n_2)$, *y* $f(\cdot)$ *es una función determinística;* $R_y(n_1, n_2) = \delta(n_1 - n_2)$.

Indique si este nuevo proceso es ESA y obtenga la autocorrelación de $Z(n)$.

$E[z] = 0 \cdot \alpha n = 0$ ES 1° orden

$R_z = E[(x(n)\, y(n))(x(n+k)\, y(n+k))]$

$R_x(n, n+k) + R_y(n, n+k) + E[x(n) \ldots]$ Cruzada → indep → decorr ∴ 0

$R_z = f(n_1 - n_2) + \delta(n_1 - n_2)$ → ES 2do orden

∴ Nuevo proceso Z es ESA