Convergencia y Teoremas Límite

Cecilia Galarza

Procesos Estocásticos
Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires

2do cuatrimestre 2024

Advertencia

El material que vamos a desarrollar en este tema es general para distribuciones multivariables. Para simplificar el tratamiento y la notación, vamos a plantear los desarrollos para Variables Aleatorias que tomas valores en $\mathbb{R}$. Sin embargo, todos los resultados son generalizables a Vectores Aleatorios en $\mathbb{R}^n$, p or ejemplo, reemplazando el módulo de una variable $X \in \mathbb{R}$ por la norma de un vector $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$.

Sucesiones y convergencia

- En Análisis fue muy útil definir el concepto de *convergencia* de una secuencia o sucesión de números reales. La secuencia a_n converge a un punto a si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \ : \ \forall n > N, |a_n - a| < \varepsilon.$$

- Usando esta definición, se introdujo el concepto de convergencia puntual de una secuencia de funciones $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \cdots$. Decimos que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a f si la secuencia $a_n = f_n(x)$ converge a $a = f(x)$ para cada valor de x, es decir

$$f_n \xrightarrow[n \to \infty]{} f \iff \forall x \in \mathbb{R} : \lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$$

Sucesiones y convergencia

Una VA es una función entre el espacio muestral y el conjunto de reales. Planteamos la *Convergencia Segura* de la secuencia $X_1, X_2, \cdots$ donde cada $X_n : \Xi \to \mathbb{R}$ cuando

$$\forall \xi \in \Xi : \; X_n(\xi) \xrightarrow[n \to \infty]{} X(\xi)$$

Pero, esta definición de convergencia es muy restrictiva y poco útil.

Sucesiones y convergencia: Ejemplo

Un experimento consiste en tirar una moneda y observar el resultado $\{Ca, Ce\}$. Se define la VA

$$X_n = \frac{\text{cantidad de caras en } n \text{ tiradas}}{n}.$$

Es esperable que X_n converja a $1/2$ si la moneda está equilibrada, es decir, de acuerdo a la definición anterior, esperamos que

$$\forall \xi \in \Xi : \; X_n(\xi) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}.$$

Sin embargo, para $\xi_0 = Ce, Ce, Ce......$ tenemos que $X_n(\xi_0) = 0$ y

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\xi_0) = 0.$$

Lo mismo sucede para los eventos $\xi_k = Ce, Ce, Ca, Ce, Ca......$ donde sólo se observa una cantidad k finita de caras. La pregunta es *qué tan probable son estos eventos?*

Convergencia casi segura

Convergencia casi segura

- En el ejemplo anterior, vimos que para los eventos ξ_k la convergencia segura de X_n fallaba. Sin embargo, es posible probar que $\mathbb{P}[\xi_k] = 0$. Por ende resulta atractivo no considerar a estos eventos al analizar la convergencia de X_n. Así surge el criterio de convergencia *casi segura* .
- Decimos que la secuencia de VAs $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a la VA X de forma casi segura o con probabilidad 1 si

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} X_n = X\right) = \mathbb{P}\left(\{\xi \in \Xi : \lim_{n\to\infty} X_n(\xi) = X(\xi)\}\right) = 1.$$

  Notación: $X_n \overset{\text{a.s.}}{\to} X$ (a.s *almost sure*).

- Este criterio admite que no todas las realizaciones de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deban converger, pero el conjunto de realizaciones que no convergen debe tener probabilidad cero.

Ejemplo de convergencia casi segura

- Para cada n, elegimos al azar un punto ξ en el intervalo $[0,1] = \Xi$. Se define la secuencia de VAs

$$X_n(\xi) = \mathbb{1}\left\{0 \leq \xi < \frac{n+1}{2n}\right\} = \begin{cases} 1 & X_n(\xi) \in [0, \frac{n+1}{2n}) \\ 0 & X_n(\xi) \notin [0, \frac{n+1}{2n}) \end{cases}$$

- Analizamos primero la secuencia de experimentos

$$\begin{array}{ll} n = 1 & \text{Punto en el intervalo } [0,1) \text{ ?} \\ n = 2 & \text{Punto en el intervalo } [0,3/4) \text{ ?} \\ n = 3 & \text{Punto en el intervalo } [0,2/3) \text{ ?} \\ n = 4 & \text{Punto en el intervalo } [0,5/8) \text{ ?} \end{array}$$

Claramente, para $n > 0$,

$$\frac{1}{2} < \frac{n+1}{2n} < \frac{5}{8} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < 1$$

Ejemplo de convergencia casi segura

Sea $X(\xi) = \mathbb{1}\left\{0 \leq \xi < \frac{1}{2}\right\}$. Queremos ver si $X_n \stackrel{\text{a.s.}}{\to} X$

- Cuando
  - $0 \leq \xi < \frac{1}{2}$, $X_n(\xi) = 1 = X(\xi)$ para todo n
  - $\frac{1}{2} < \xi \leq 1$, $\lim_{n\to\infty} X_n(\xi) = 0 = X(\xi)$
  - $\xi = 1/2$, $\forall n$: $X_n(\frac{1}{2}) = 1$, pero $X(\frac{1}{2}) = 0$.
- Luego

$$\mathbb{P}\left(\{\xi \in \Xi : \lim_{n\to\infty} X_n(\xi) = X(\xi)\}\right) = \mathbb{P}\left(\Xi \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}\right) = 1.$$

Por lo tanto, $X_n \stackrel{\text{a.s.}}{\to} X$.

Ejemplo de convergencia en forma casi segura(otro) I

- *Enunciado:* Una urna contiene 2 bolillas negras (bb) y 2 bolillas blancas (ww). En el momento n se separa al azar una bolilla de la urna y se anota su color. Si la cantidad de bolillas de este color en la urna es mayor o igual que el número de bolillas del otro color, la bolilla se vuelve a introducir en la urna; en caso contrario, la bolilla se deja fuera. Sea X_n el número de bolillas negras en la urna después de la enésima extracción.
- *Desarrollo:*
  - Supongamos que en $n = 1$, la bolilla extraida es negra. Luego en la urna quedan $2w$ y $1b$, entonces la bolilla extraida queda fuera de la urna y $X_1 = 1$. A partir de entonces, cada vez que se seleccione una bolilla blanca se volverá a restituir a la urna, y cuando se seleccione la bolilla negra restante, se dejará fuera. Eventualmente, las bolillas negras serán eliminadas de la urna, y X_n convergerá a 0 con probabilidad 1.

Ejemplo de convergencia en forma casi segura(otro) II

- Por otro lado, en $n = 1$ se selecciona una bolilla blanca, en la urna quedará sólo una bolilla blanca. Si en algún momento se selecciona una bolilla negra, la misma se restituye a la urna. Eventualemente, la urna se quedará sin bolillas blancas y con probabilidad uno, X_n convergerá a 2.
- Como inicialmente en la urna todas las bolillas son equiprobables, en $n = 1$ tenemos la misma probabilidad de seleccionar una b o una w. Luego, X_n tiene la misma probabilidad de converger a 0 o a 2, es decir, la convergencia es con probabilidad 1 y

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X \qquad \text{donde} \qquad \mathbb{P}[X = 0] = \mathbb{P}[X = 2] = \frac{1}{2}.$$

Ley fuerte de los grandes números (LFGN)

- *LFGN.* Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia de VAs i.i.d. con media $\mu = \mathbb{E}[X_n]$ tales que $\mathbb{E}[|X_n|] < \infty$. Consideremos la secuencia definida en base a las medias muestrales de las X_n:

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

  Entonces, tenemos que

$$S_n \overset{\text{a.s.}}{\to} \mu.$$

- La LFGN nos dice que las realizaciones de S_n convergen a μ con probabilidad 1 o bien que el conjunto de realizaciones de S_n que no converge a μ tienen probabilidad 0.

Aplicación de la LFGN:Método Monte Carlo

- El método de Monte Carlo es una aplicación de la ley de los grandes números.
- Monte Carlo básicamente consiste en utilizar un generador de números aleatorios para aproximar ciertas cantidades de interés, resolver un problema de optimización u obtener muestras de una distribución particularmente compleja.

Aproximación de una integral mediante Monte Carlo

Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función integrable y $[a, b]$ un intervalo finito

$$I = \int_a^b g(u)du.$$

Recordemos que si $U \sim \mathcal{U}[a, b]$, entonces $f_U(u) = \frac{1}{b-a}$. Vamos a demostrar que $I = (b-a)\mathbb{E}[g(U)]$. Para ello, operamos del siguiente modo:

$$\begin{aligned} I &= (b-a)\frac{1}{b-a}\int_a^b g(u)du = (b-a)\int_a^b g(u)f_U(u)du \\ &= (b-a)\mathbb{E}[g(U)]. \end{aligned}$$

Vamos a utilizar la LFGN para aproximar $\mathbb{E}[g(U)]$ numéricamente.

Aproximación de una integral mediante Monte Carlo

- Sea $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ VAs i.i.d. con distribución $\mathcal{U}(a, b)$. Entonces, $(g(U_n))_{n\in\mathbb{N}}$ también es una secuencia i.i.d. y por la LFGN

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(U_i) \overset{\text{a.s.}}{\to} \mathbb{E}[g(U)].$$

  Luego,

$$\hat{I}_n = (b-a)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(U_i) \overset{\text{a.s.}}{\to} (b-a)\mathbb{E}[g(U)] = I.$$

- Este estimador no requiere del cálculo explícito de la integral. Su debilidad es el valor de n necesario.

Aproximación de una Prob. mediante Monte Carlo

Sea X una VA, nos interesa estimar $p = \mathbb{P}(X \in A)$, donde $A \subseteq \mathbb{R}$.

- $\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{E}[\mathbb{1}\{X \in A\}]$.
- Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia de VAs i.i.d. $X_n \sim X$. Definimos

$$Y_n = \mathbb{1}\{X_n \in A\}.$$

- $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una secuencia de VAs i.i.d.
- $\mathbb{E}[Y_n] = \mathbb{P}(X_n \in A) = \mathbb{P}(X \in A) = p$.
- A partir de la LFGN tenemos que

$$\hat{p}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \overset{\text{a.s.}}{\to} \mathbb{E}[Y] = p.$$

Nuevamente hemos definido un estimador $\hat{p}_n$ de la probabilidad deseada p que converge en forma casi segura.

Convergencia en probabilidad

Convergencia en probabilidad

- El criterio de convergencia casi segura discrimina aquellos eventos para los cuales no hay convergencia puntual de la VA y pide que estos eventos tengan probabilidad de ocurrencia nula. Un modo de relajar esta condición es solicitar que dichos eventos sean cada vez menos probables a medida que $n \to \infty$.
- Decimos que la secuencia de VAs $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a la VA X en probabilidad si para cualquier $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\big(\{\xi : |X_n(\xi) - X(\xi)| > \varepsilon\} \big) = 0.$$

Notación: $X_n \overset{\mathrm{p}}{\to} X$.

- La convergencia en probabilidad nos dice que sin importar que tan pequeño sea $\varepsilon > 0$, la secuencia $p_n(\varepsilon) = \mathbb{P}\big(\{\xi : |X_n(\xi) - X(\xi)| > \varepsilon\} \big)$ converge a cero

Convergencia en probabilidad: Resultado interesante I

Teorema

$$(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[n\to\infty]{p} X \iff \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left\{\frac{|X_n - X|}{1+|X_n - X|}\right\} = 0$$

- Este teorema es útil al momento de verificar si una secuencia converge (p).
- Para su demostración, formamos una nueva secuencia $Y_n = X_n - X$. Luego, analizamos

$$Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} 0 \quad \text{si y sólo si} \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left\{\frac{|Y_n|}{1+|Y_n|}\right\} = 0.$$

Convergencia en probabilidad: Resultado interesante II

- ($\Rightarrow$) Por definición, si $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} 0$, entonces $\forall \epsilon > 0, \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[|Y_n| > \epsilon] = 0$. Como $\frac{|Y_n|}{1+|Y_n|} \leq 1$ tenemos que para todo valor de Y_n

$$\frac{|Y_n|}{1+|Y_n|} \leq \frac{|Y_n|}{1+|Y_n|} \mathbb{1}_{\{|Y_n|>\epsilon\}} + \epsilon \mathbb{1}_{\{|Y_n|\leq\epsilon\}} \leq \mathbb{1}_{\{|Y_n|>\epsilon\}} + \epsilon \mathbb{1}_{\{|Y_n|\leq\epsilon\}}$$

Luego,

$$\mathbb{E}\left[\frac{|Y_n|}{1+|Y_n|}\right] \leq \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{|Y_n|>\epsilon\}}\right] + \epsilon \underbrace{\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{|Y_n|\leq\epsilon\}}\right]}_{\leq 1} \leq \mathbb{P}\left[\{|Y_n| > \epsilon\}\right] + \epsilon.$$

Esto es válido $\forall \epsilon \geq 0$. Luego, tomando límites a ambos lados, obtenemos $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left\{\frac{|Y_n|}{1+|Y_n|}\right\} = 0$.

Convergencia en probabilidad: Resultado interesante III

- ($\Leftarrow$) Partimos de $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left\{\frac{|Y_n|}{1+|Y_n|}\right\} = 0$. Como $f(x) = x/(1+x)$ es monótona creciente para $x \geq 0$ tenemos $\forall \epsilon \geq 0$

$$\frac{\epsilon}{1+\epsilon} \mathbb{1}_{\{|Y_n|>\epsilon\}} \leq \frac{|Y_n|}{1+|Y_n|} \mathbb{1}_{\{|Y_n|>\epsilon\}} \leq \frac{|Y_n|}{1+|Y_n|}$$

Luego,

$$\frac{\epsilon}{1+\epsilon} \underbrace{\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{|Y_n|>\epsilon\}}\right]}_{\mathbb{P}[|Y_n|>\epsilon]} \leq \mathbb{E}\left[\frac{|Y_n|}{1+|Y_n|}\right].$$

Tomando límites a ambos lados obtenemos $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\{|Y_n| > \epsilon\}\right] = 0$.

Ejemplos de convergencia en probabilidad

Supongamos que $X_n \sim \text{Exp}(n)$. Para cualquier $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - 0| > \varepsilon) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n > \varepsilon) = \lim_{n\to\infty} e^{-n\varepsilon} = 0.$$

Por lo tanto, $X_n \xrightarrow{\text{p}} X$, donde $X(\xi) = 0$ para todo $\xi \in \Xi$.

Ejemplos de convergencia en probabilidad

Sea $X_n \sim \text{Exp}(\lambda)$ y consideremos la secuencia de VAs

$$Y_n = \text{mín}(X_1, \ldots, X_n).$$

La función de distribución de Y_n se puede hallar como

$$F_{Y_n}(y) = \mathbb{P}(Y_n \leq y) = 1 - \mathbb{P}(Y_n > y) = 1 - [1 - F_{X_1}(y)]^n = 1 - e^{-n\lambda y}.$$

Observamos que para cualquier $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|Y_n - 0| > \varepsilon) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Y_n > \varepsilon) = \lim_{n\to\infty} e^{-n\lambda\varepsilon} = 0.$$

Por lo tanto, nuevamente vemos que $Y_n \xrightarrow{\text{p}} X$, donde $X(\xi) = 0$ para todo $\xi \in \Xi$.

Convergencia (a.s) y (p): Propiedades

- Si $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{a.s.} X$, entonces $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.} X$
- Si $f(.)$ es una función continua y $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{a.s.} X$, entonces $f(X_n) \xrightarrow[n\to\infty]{a.s} f(X)$
- En forma similar, si $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.} Y$, entonces $f(Y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{p} f(Y)$

Convergencia en media cuadrática

Convergencia en media cuadrática

- Hasta ahora, planteamos criterios de convergencia que consideraban la VA como una función real. Es posible explotar otros aspectos de una VA para analizar convergencia. Una alternativa es la convergencia *en media cuadrática*.

- Definimos el espacio de VAs con energía acotada
$$\mathcal{L}^2 = \{X : \mathbb{E}[X^2] < \infty\}.$$

- La secuencia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en media cuadrática a X si
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n - X|^2] = 0.$$
Notación: $X_n \overset{\text{m.s.}}{\to} X$ (m.s. *mean square*).

- Este criterio de convergencia se respalda sobre la convergencia de la secuencia de números $e_n = \mathbb{E}[|X_n - X|^2]$.

Ejemplos de convergencia en media cuadrática

- Supongamos que $X_n \sim U(0, \frac{1}{n})$. Observamos que

$$\mathbb{E}[|X_n - 0|^2] = \int_{\mathbb{R}} x^2 \, f_{X_n}(x) \, dx = \int_0^{\frac{1}{n}} x^2 \, n \, dx = \frac{n}{3n^3} = \frac{1}{3n^2} \to 0.$$

Por lo tanto, $X_n \overset{\text{m.s.}}{\to} 0$.

- Veamos un ejemplo similar con otra distribución. Supongamos que $X_n \sim \mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$ donde $\mu_n \to \mu$ y $\sigma_n^2 \to 0$. Observamos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|X_n - \mu|^2] &= \mathbb{E}[(X_n - \mu_n + \mu_n - \mu)^2] \\
&= \mathbb{E}[(X_n - \mu_n)^2] + (\mu_n - \mu)^2 + 2(\mu_n - \mu)\mathbb{E}[X_n - \mu_n] \\
&= \sigma_n^2 + (\mu_n - \mu)^2 \to 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $X_n \overset{\text{m.s.}}{\to} \mu$.

Convergencia en distribución

Convergencia en distribución

- Los criterios que vimos hasta ahora tienen se basan de un modo u otro en las realizaciones de las VA. La *convergencia en distribución* plantea un criterio que no presta atención a los valores específicos que toma cada VA. Este tipo de convergencia se la llama convergencia *débil*.
- Decimos que una secuencia de VAs $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a X en distribución si para todos los puntos de continuidad de F_X,

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x),$$

  Notacion: $X_n \overset{\mathrm{d}}{\to} X$.

- Este criterio sólo analiza la secuencia de funciones de distribución pero no impone ninguna restricción sobre X_n o X. De hecho, podríamos tener que X_n y X sean VAs de distinto tipo (!!).

Ejemplo de convergencia en distribución

Sea $X_n \sim \text{Bin}(n, p_n = \frac{\lambda}{n})$ una secuencia de VAs. La PMF de X_n se puede escribir como

$$p_{X_n}(k) = \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} \frac{n \cdots (n-k+1)}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}.$$

Tomando $n \to \infty$ para k fijo resulta

$$\lim_{n \to \infty} p_{X_n}(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Por lo tanto, se tiene que

$$X_n \xrightarrow{\text{d}} X.$$

La secuencia de PMFs converge a la PMF de una VA $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$. Este resultado se conoce como teorema límite de Poisson.

Teorema de continuidad de Lévy

Teorema (Continuidad de Lévy)

Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia de VAs y $\Phi_{X_n}(\omega) = \mathbb{E}[e^{\jmath\omega X_n}]$ la secuencia de FC resultante. Si

$$\Phi_{X_n}(\omega) \to \Phi(\omega), \qquad \forall\omega \in \mathbb{R},$$

entonces,

$$X_n \xrightarrow{d} X,$$

donde X es una VA que tiene como función característica a $\Phi(\omega)$.

Teorema central del límite (TCL)

Teorema (TCL)

Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una secuencia de VAs i.i.d. con* $\mathbb{E}[X_n] = \mu$ *y* $\mathbb{V}(X_n) = \sigma^2 < \infty$*. Consideremos la secuencia de VAs*

$$Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i - \mu}{\sigma}.$$

Entonces,

$$Z_n \xrightarrow{d} Z \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

En la práctica, se suele usar este resultado para justificar la aproximación de la distribución de Z_n mediante una normal para n suficientemente grande. Desafortunadamente, el TCL no dice nada sobre el error de esta aproximación.

Breve demostración del TCL I

- Consideremos la FC de Z_n:

$$\begin{aligned}
\Phi_{Z_n}(\omega) &= \mathbb{E}[e^{\jmath\omega Z_n}] = \mathbb{E}\left[e^{\jmath\omega \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i-\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}}\right] && X_i \text{ independientes} \\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[e^{\jmath\omega \frac{X_i-\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}}\right] && X_i \text{ identicamente distribuidas} \\
&= \left(\mathbb{E}\left[e^{\jmath\omega \frac{X_1-\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}}\right]\right)^n .
\end{aligned}$$

- Utilizando el desarrollo en serie de la exponencial resulta:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{\jmath\omega \frac{X_1-\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}}\right] &= 1 + j\omega\mathbb{E}\left[\frac{X_1-\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right] + \frac{(j\omega)^2}{2}\mathbb{E}\left[\frac{(X_1-\mu)^2}{n\sigma^2}\right] + O(n^{-3/2}) \\
&\approx 1 - \frac{\omega^2}{2n}.
\end{aligned}$$

Breve demostración del TCL II

- Por lo tanto, $\Phi_{Z_n}(\omega) \approx \left(1 - \frac{\omega^2}{2n}\right)^n \to e^{-\frac{1}{2}\omega^2}$. Es decir, Φ_{Z_n} converge a la FC de una normal estándar. Luego, por el teorema de continuidad de Lévy,

$$Z_n \xrightarrow{\text{d}} Z \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Teorema de Berry-Esseen (TBE)

Teorema (Berry-Esseen)

Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una secuencia de VAs i.i.d. con* $\mathbb{E}[X_n] = \mu$*,* $\mathbb{V}(X_n) = \sigma^2 < \infty$ *y* $\mathbb{E}[|X_n - \mu|^3] = \rho < \infty$*. Armamos muevamente la secuencia de VAs* Z_n*. Sea* $F_{\mathcal{N}}(z)$ *la CDF de la VA normal estándar. Luego,*

$$|F_{Z_n}(z) - F_{\mathcal{N}}(z)| \leq \frac{C\rho}{\sigma^3}\frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad \forall z \in \mathbb{R},$$

donde C *es una constante que verifica* $0{,}41 < C < 0{,}48$*.*

Si bien el valor de C es incierto, el TBE nos permite establecer una velocidad de convergencia. En particular, establece que la función de distribución de Z_n converge a Φ con una velocidad proporcional a $1/\sqrt{n}$.

Ejemplo de aplicación de TBE I

- Sean $X_n \sim \text{Exp}(\lambda)$ VAs i.i.d. para todo $n \in \mathbb{N}$. Queremos una aproximación para la distribución de $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
- El TCL en este caso nos sugiere que la distribución de Y_n se puede aproximar mediante la normal $\mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$, donde $\mu = \mathbb{E}[X_n] = \lambda^{-1}$ y $\sigma^2 = \mathbb{V}(X_n) = \lambda^{-2}$.
- Para poder aplicar el TBE, observamos que

$$F_{Y_n}(x) = \mathbb{P}(Y_n \leq x) = \mathbb{P}\left(\sqrt{n\sigma^2} Z_n + n\mu \leq x\right) = F_{Z_n}\left(\frac{x - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right).$$

Por otro lado, es fácil verificar que $\mathbb{E}[(X - \mu)^3] = 2\lambda^{-3}$.

Ejemplo de aplicación de TBE II

- Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned}\left|F_{Y_n}(y) - F_{\mathcal{N}}\left(\frac{y-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right)\right| &= \left|F_{Z_n}\left(\frac{y-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) - F_{\mathcal{N}}\left(\frac{y-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right)\right| \\ &\leq C\frac{2\lambda^{-3}}{\lambda^{-3}\sqrt{n}} = \frac{2C}{\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

- Por lo tanto, la distribución de $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$ se puede aproximar mediante

$$F_{Y_n}(y) \approx F_{\mathcal{N}}\left(\frac{y-n\lambda^{-1}}{\sqrt{n\lambda^{-2}}}\right),$$

con un error menor a $1/\sqrt{n}$.

Relaciones entre los distintos tipos de convergencia