Ejercicio 1

Se desea un vector aleatorio $\mathbf{X} = [X_1, X_2, X_3]^t \sim \mathcal{N}(\mu_\mathbf{X}, C_\mathbf{X})$ donde

$$\mu_\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad , \quad C_\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 3/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

X_1, X_2 indep.

X_2, X_3 indep

X_1, X_3 No indep

1. Hallar $f_{X_1}(x_1)$.

$$\Gamma = \vec{X} \qquad f_\Gamma(\gamma) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{|C_X|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\gamma^t C_X^{-1}\gamma\right\}$$

$$f_{X_1}(x_1) = \iint_{\forall x_2, x_3} f_\Gamma(\gamma)\, dx_2\, dx_3 \qquad f_\Gamma(\gamma) = f_{X_2}(x_2) \cdot f_{X_1 X_3}(x_1, x_3)$$

$$= \int f_{X_1, X_3}(x_1, x_3)\, dx_3 \qquad f_{X_1 X_3}(x_1, x_3) = f_{X_1|X_3}(x_1|x_3)\, f_{X_3}(x_3)$$

$$= f_{X_3|X_1}(x_3|x_1) \cdot f_{X_1}(x_1)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_3|X_1}(x_3|x_1)\, dx_3$$

Va nerda, $X_1 \sim N(\mu_{X_1}=1, \sigma^2_{X_1}=3/2)$ ¿Hace falta justificar tanto?

$$f_{X_1}(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 3/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(x-1)^2}{3/2}\right\}$$

2. Se construye una nueva variable aleatoria, $Y = \mathbf{a}'\mathbf{X}$, donde $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$. Hallar $\mathbf{a}$ tal que $\mathbb{E}[Y] = 0$. Obtenga $\mathbf{Var}[Y]$.

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \qquad Y = a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3$$

$E[Y] = E[a^t X] = a^t E[X] = a^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$ a tiene q' ser ortogonal a μ_X

Hay un plano entero de posibilidades para $\vec{a}$. Elijamos:

$a^t = [0 \; 1 \; 0] \Rightarrow Y = X_2 \Rightarrow V[Y] = V[X_2] = 1$

3. Escriba un pseudocódigo para obtener realizaciones de la variable aleatoria Y obtenida en el punto anterior, a partir de realizaciones del vector aleatorio $\mathbf{X}$.

Defino mu_x y C_x
(asumiendo que existe una función que permite simular n variables normales a partir de la media y la matriz de covarianza)
Simulo Xvector
descarto los valores de X1 y X3. Ya tá.

$a^T \hat{X}_k \to$ k-ésima realización $\to$ En general

4. Obtenga la transformación $\mathbf{Z} = A\mathbf{X}$ $+b$ tal que $\mathbf{Z}$ tiene componentes independientes entre sí.

Ayuda :

$$C_{\mathbf{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.924 & 0 & -0.383 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.383 & 0 & 0.924 \end{bmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{bmatrix} 1.707 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.293 \end{bmatrix}}_{\Lambda} \underbrace{\begin{bmatrix} 0.924 & 0 & 0.383 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.383 & 0 & 0.924 \end{bmatrix}}_{P^T}$$

$$C_Z = A C_X A^T = I_3 = A P \Lambda P^T A^T = (AP)\Lambda(AP)^T$$

Necesito q' $AP = \Lambda^{-1/2} \Rightarrow A P P^T = A = \Lambda^{-1/2} P^T$

$$\Lambda^{-1/2} = \begin{bmatrix} 0,77 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1,85 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \Lambda^{-1/2} P^T = \begin{bmatrix} 0,71 & 0 & 0,29 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0,71 & 0 & 1,71 \end{bmatrix}$$

Una mierda

$A\mathfrak{X}$, $C_Z = I_3 \Longrightarrow E[Z] = A u_X$, $C_Z = I_3$

$\Longrightarrow Z \sim \mathcal{N}(A u_X, I_3)$