Sean U_1, U_2 dos variables aleatorias independientes uniformes ~U(0; 1).

1. Halle la densidad conjunta de las variables:

$$\begin{cases} R = \sqrt{-2\ln(U_1)} \\ \Theta = 2\pi U_2. \end{cases}$$

Verifique que R tiene distribución Rayleigh, que Θ es uniforme y que son independientes (¿por que?).

2. Halle la densidad conjunta de las variables:

$$\begin{cases} Z_1 = R\cos\Theta \\ Z_2 = R\sin\Theta \end{cases}$$

y demuestre que se trata de variables normales estándar independientes.

$R = \sqrt{-2\ln(U_1)}$
$\theta = 2\pi U_2$

$$g(U_1,U_2) = (R,\theta) = \left(\sqrt{-2\ln(U_1)},\ 2\pi U_2\right) \longrightarrow \left. U_1 = e^{-R^2/2}\ ;\ U_2 = \frac{\theta}{2\pi} \right) g^{-1}$$

$$f_{U_1,U_2} = f_{U_1}\cdot f_{U_2} = 1\ \mathbb{1}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} < \begin{pmatrix}U_1\\U_2\end{pmatrix} < \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$f_{R,\theta}(R,\theta) = \left.\frac{f_{U_1,U_2}}{|\det(J(g))|}\right|_{g^{-1}}$$

$$J(g) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial U_1}\sqrt{-2\ln(U_1)} & \frac{\partial}{\partial U_2}\sqrt{-2\ln(U_1)} \\ \frac{\partial}{\partial U_1} 2\pi U_2 & \frac{\partial}{\partial U_2} 2\pi U_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{-\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{-2\ln(U_1)}\cdot U_1} & 0 \\ 0 & 2\pi \end{vmatrix}$$

$$\left(-2\ln(U_1)\right)^{1/2\,\prime} = \frac{1}{2}\left(-2\ln(U_1)\right)^{-1/2}\cdot\frac{1}{U_1} = \frac{-2}{2\sqrt{-2\ln(U_1)}\cdot U_1}$$

$$|\det J| = \left|\frac{-2\pi}{\sqrt{-2\ln(U_1)}\cdot U_1}\right|$$

$$\therefore f_{R,\theta} = \left.\frac{1\ \mathbb{1}\{0<U_1<1\}\mathbb{1}\{0<U_2<1\}}{\left|\frac{-2\pi}{\sqrt{-2\ln(U_1)}\,U_1}\right|}\right|_{\substack{U_2=\frac{\theta}{2\pi}\\ U_1=e^{-R^2/2}}} = \frac{1\ \mathbb{1}\{0<R<\infty\}\mathbb{1}\{0<\theta<2\pi\}}{\left|\frac{-2\pi}{\sqrt{R^2}\cdot e^{-R^2/2}}\right|}$$

$f_{R,\theta} = \dfrac{R\,e^{-R^2/2}}{2\pi}\mathbb{1}\{0<R<\infty\}\mathbb{1}\{0<\theta<2\pi\}$ se puede ver $f_R(r)\cdot f_\theta(\theta)$

$f_\theta(\theta) = \frac{1}{2\pi}\mathbb{1}\{0<\theta<2\pi\}$; $\theta \sim \mathcal{U}(0,2\pi)$

$f_R(r) = r e^{-r^2/2}\mathbb{1}\{0<R<\infty\}$, $R \sim \mathrm{Ray}(1)$

$$\boxed{\begin{matrix} z_1 = R\cos\theta \\ z_2 = R\sin\theta \end{matrix}} \qquad f_{z_1,z_2} = \frac{f_{R,\theta}}{|\det(J(g))|} \longrightarrow z_1^2+z_2^2 = R^2 \to R = \sqrt{z_1^2+z_2^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{z_2}{z_1}$$

$$J(g) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial R} R\cos\theta & \frac{\partial}{\partial\theta} R\cos\theta \\ \frac{\partial}{\partial R} R\sin\theta & \frac{\partial}{\partial\theta} R\sin\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -R\sin\theta \\ \sin\theta & R\cos\theta \end{vmatrix} \xrightarrow{\det} R\cos^2\theta + R\sin^2\theta = R$$

$$R(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = R$$

$$f_{z_1,z_2} = \left.\cancel{R}e^{-R^2/2}\cdot\frac{1}{2\pi}\mathbb{1}\{0<R<\infty\}\mathbb{1}\{0<\theta<2\pi\}\cdot\frac{1}{\cancel{|R|}}\right|_{\substack{R=\sqrt{z_1^2+z_2^2}\\ \theta=\tan^{-1}\left(\frac{z_2}{z_1}\right)}} = \frac{e}{2\pi}^{\frac{-z_1^2-z_2^2}{2}}\mathbb{1}\{0<z_1^2+z_2^2<\infty\}\ \mathbb{1}\left\{0<\frac{z_2}{z_1}\right\}$$

Se separa en 2 normales

$$\underline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-z_1^2}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-z_2^2}{2}} \qquad z_1,z_2 \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Sea x una variable aleatoria exponencial, $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, de parámetro $\lambda = 0.5$

1. Genere $N = 10^4$ muestras de X (usando el método de **transformación inversa**).
2. Estime la media y la varianza muestrales de X y comparelas con las teóricas ($\mu = 1/\lambda$, $\sigma^2 = 1/\lambda^2$).
3. Construya el **histograma** de las muestras de X. Normalice el histograma para que tenga área 1. Compare la función obtenida con la función de densidad de probabilidad teórica.

$U \sim \mathcal{U}(0,1) \quad ; \quad U = F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$

Sea $Y = X + N$, con X y N variables aleatorias independientes.

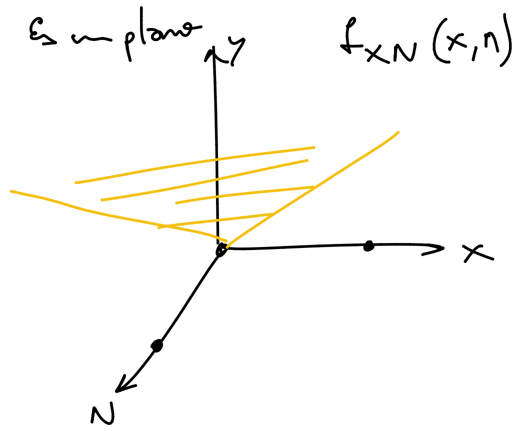
1. Demostrar que $f_Y(y) = f_X(y) * f_N(y)$.
2. Demostrar que $f_{Y|X}(y|x) = f_N(y - x)$.
3. Si $X \in \{0, 1\}$ es una variable aleatoria Bernoulli con $\mathbb{P}(X = 0) = p$ y $\mathbb{P}(X = 1) = q = 1 - p$, expresar y representar $f_Y(y)$ y $f_{Y|X}(y|x)$.

1) Acá la idea es ir de a poco planteando las igualdades.

Por propiedad: Una $\sum$ de variables aleatorias independientes con función de densidad se dice que:

$$f_Y(y) = f_{X+N}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z)\, f_N(y-z)\, dz = (f_X * f_N)(y)$$

En un plano



$f_{XN}(x,n) = f_X(x).f_N(n)$ Vamos a integrar esto para encontrar la $F_Y(y)$

$Y = X+N$

marginal

$$\underbrace{f_{X+N}(x+n)}_{y} \to f_Y(y) = \mathbb{P}(X+N=y) = \mathbb{P}(X = y-N) = f_X(y-N) =$$

marginal de las cuts $\to$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(y-n) f_N(n)\, dn = \int_{-\infty}^{+\infty} f_N(n)\, f_X(y-n)\, dn = f_N(y) * f_X(y)$$

Convolución es $(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\eta)\, g(t-\eta)\, d\eta$

2) Demostrar $f_{Y|X}(y|x) = f_N(y-x)$

$y = x+N$ — son indep

$$f_{Y|X}(y|x) = \mathbb{P}(Y=y|X) = \mathbb{P}(X+N=y|X) = \mathbb{P}(N = y-X|X) = \mathbb{P}(N=n|X) \overset{\vee}{=} \mathbb{P}(N=n) = f_N(n)$$

3) $X \sim Ber(p)$; $f_X(x) = \sum_i p_X(\varepsilon_i)\,\delta(x-\varepsilon_i) = \underbrace{p\,\delta(x)}_{p\,=\,\mathbb{P}(X=0)} + \underbrace{(1-p)}_{1-p\,=\,\mathbb{P}(X=1)}\delta(x-1)$

$f_Y(y) = f_X(x) * f_N(n)$

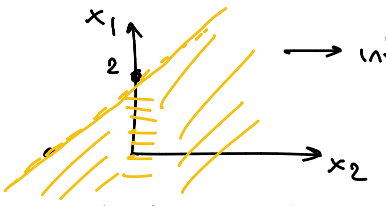
$f_{Y|X}(y) = f_N(n)$

No sé como se sé N o como se distribuye

Sea $\mathbf{X} = [X_1, X_2]$ un vector aleatorio continuo. Si $f_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{x})$ fuera conocida, cómo haría para calcular las siguientes probabilidades?

- $\mathbb{P}(X_1 - X_2 \leq 2)$
- $\mathbb{P}(\max(X_1, X_2) \leq -1)$
- $\mathbb{P}(\min(|X_1|, |X_2|) \geq 2)$
- $\mathbb{P}(XY \geq 0)$

1) $\mathbb{P}(x_1 - x_2 \leqslant 2) = \mathbb{P}(x_1 \leqslant 2 + x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{2+x_2} f_{x_1, x_2}(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2$



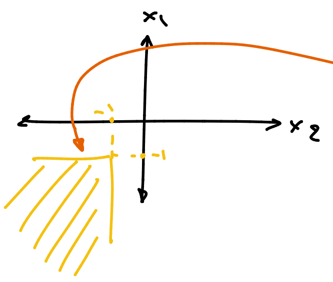
$\longrightarrow$ integramos el área amarilla

$x_1 = 0 \quad x_2 = -2$

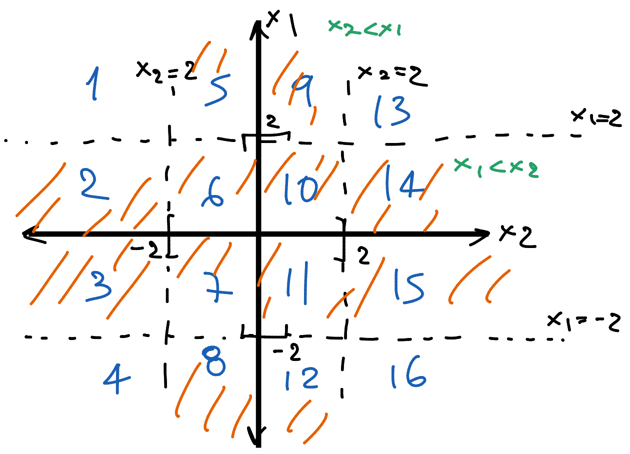
$x_1 = 2 \quad x_2 = 0$

lo conjunto del vector

2) $\mathbb{P}(\max(x_1, x_2) \leqslant -1) = \mathbb{P}(\underbrace{x_1 \leqslant x_2 \leqslant -1 \;,\; x_2 \leqslant x_1 \leqslant -1}_{\text{un área}}) = \int_{-\infty}^{-1} \int_{-\infty}^{-1} f_{\vec{X}}(\vec{x})\, dx_1\, dx_2$



3) $\mathbb{P}(\min(|x_1|, |x_2|) \geqslant 2)$



1) $x_1 > 2$ no
$x_2 < -2$

2) $0 \leq x_1 < 2$ si
$x_2 < -2$

Son las áreas 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15

$$\int_{-2}^{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\vec{X}}(\vec{x})\, dx_1\, dx_2 + \int_{-2}^{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\vec{X}}(\vec{x})\, dx_2\, dx_1 - \int_{-2}^{2} \int_{-2}^{2} f_{\vec{X}}(\vec{x})\, dx_1\, dx_2$$

así me reorepite 2 veces.

4) $\mathbb{P}(x_1 x_2 \geq 0) = \iint_{0\;0}^{+\infty\;+\infty} f_{\vec{X}}(\vec{x})\, d\vec{x} + \iint_{-\infty\;-\infty}^{0\;\;0} f_{\vec{x}}(\vec{x})\, d\vec{x}$

Solo si $x_1 \geq 0 \wedge x_2 \geq 0 \quad \cup \quad x_1 \leqslant 0 \wedge x_2 \leqslant 0$

Sean X, Y, y Z V.A independientes. Hallar las siguientes probabilidades en función de $F_X(x)$, $F_Y(y)$, $F_Z(z)$

1. $\mathbb{P}(|X| \leq 5, Y > 3, Z^2 \leq 2)$
2. $\mathbb{P}(\max(X, Y, Z) \leq -1)$

1) Si son independientes las intersecciones se separan en producto.

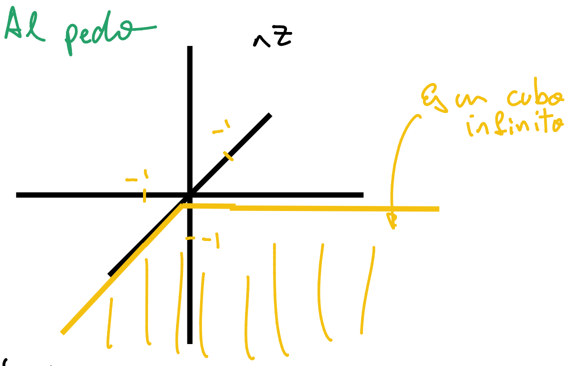
$$\mathbb{P}(|X|\leq 5, Y>3, Z^2\leq 2) = \mathbb{P}(|X|\leq 5)\,\mathbb{P}(Y>3)\,\mathbb{P}(Z^2\leq 2) = \mathbb{P}(-5\leq X\leq 5)\left[1-\mathbb{P}(Y\leq 3)\right]\mathbb{P}(-2\leq Z\leq 2) =$$

$$\left[F_X(5)-F_X(-5)\right]\left[1-F_Y(3)\right]\left[F_Z(2)-F_Z(-2)\right]$$

$$\mathbb{P}(\max(X,Y,Z)\leq -1) = \boxed{\begin{aligned}&\mathbb{P}(X\leq Y\leq Z\leq -1)+\\ &\mathbb{P}(Y\leq X\leq Z\leq -1)+\\ &\mathbb{P}(Z\leq X\leq Y\leq -1)+\\ &\mathbb{P}(X\leq Z\leq Y\leq -1)+\\ &\mathbb{P}(Z\leq Y\leq X\leq -1)+\\ &\mathbb{P}(Y\leq Z\leq X\leq -1)\end{aligned}}$$

Al pedo

Es la integral de $-\infty$ a -1 en cada eje



$$\int_{-\infty}^{-1}\int_{-\infty}^{-1}\int_{-\infty}^{-1} f_{X,Y,Z}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{-\infty}^{-1}\int_{-\infty}^{-1}\int_{-\infty}^{-1} f_X(x)\, f_Y(y)\, f_Z(z)\,dx\,dy\,dz = F_X(-1)\,F_Y(-1)\,F_Z(-1)$$

Prop: la conjunta es producto de marginales porque son VA indep.

mueve integrales e integra

Sea $\mathbf{X} = [X_1, X_2]$ un vector aleatorio continuo cuya PDF es

$$\cancel{F_{\mathbf{X}}}\, f_X (x_1, x_2) = k(x_1 + x_2) \qquad 0 < x_1 < 1 \quad 0 < x_2 < 1$$

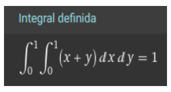
.

- Hallar k
- Hallar $F_{\mathbf{X}}$
- Hallar $f_{X_1}(x_1)$ y $f_{X_2}(x_2)$. Marginales

$f_{\vec{X}}(\vec{x}) = k(x_1+x_2)$; Prop de función de densidad:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_{\vec X}(\vec x)\, d\vec x = 1 \therefore K\int_0^1\int_0^1 (x_1+x_2)\,dx_1\,dx_2 = 1 = k\int_0^1 \left(\frac{x_1^2}{2}+x_1x_2\right)\Big|_0^1 dx_2 = 1 = k\int_0^1\left(\frac{1}{2} + x_2\right)dx_2 =$$

$$k\int_0^1 \left(\frac{1}{2}+x_2\right)dx_2 = k\left(\frac{x_2}{2}+\frac{x_2^2}{2}\right)\Big|_0^1 = 1 = k = 1$$

Probamos: $\int_0^1\int_0^1 1\,(x_1+x_2)\,dx_1\,dx_2 = 1$ ✓ 

$$F_{\vec X}(\vec x) = \underbrace{\int_0^{x_1}\int_0^{x_2}}_{\substack{0<x_1<1\\ 0<x_2<1}} (x_1+x_2)\,dx_1\,dx_2 = \left(\frac{x_1^2x_2}{2}+\frac{x_2^2x_1}{2}\right) = \frac{x_1^2x_2+x_2^2x_1}{2}\,\mathbb{1}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}<\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}<\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Ahora las marginales → integrás la variable que querés sacar.

$$f_{x_1}(x_1) = \int_0^1 f_{\vec x}(\vec x)\, dx^2 = \int_0^1 (x_1+x_2)\,dx_2 = \left(x_1+\tfrac{1}{2}\right)\mathbb{1}\{0<x_1<1\}$$

$$\int_0^1 x_1\, dx_2 = x_1$$

$$\int_0^1 x_2\, dx_2 = \tfrac{1}{2}$$

$$f_{x_2}(x_2) = x_2 + \tfrac{1}{2}\, \mathbb{1}\{0<x_2<1\}$$

$$x = \delta(n-1) + 3\delta(n) + 4\delta(n+2)$$

$$y(n) = \delta(n-3) + \delta(n-2) + 5\delta(n)$$

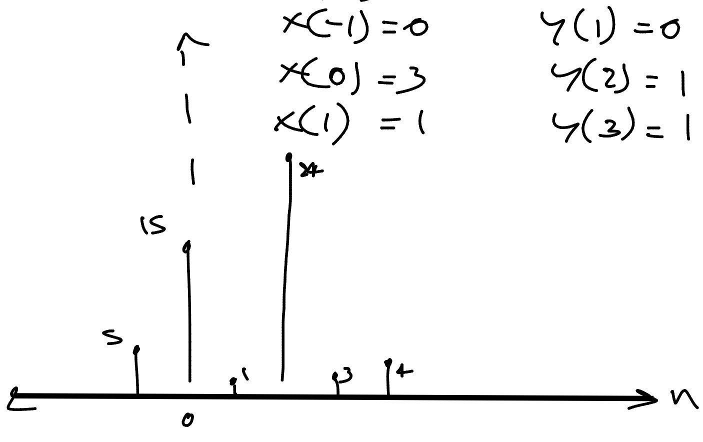
$$(x*y)(t) = \underbrace{\sum_{\tau=-2}^{1}}_{\text{donde } x \neq 0} x(\tau)\, y(t-\tau)$$

$x(-2) = 4$ $\quad$ $y(0) = 5$

$x(-1) = 0$ $\quad$ $y(1) = 0$

$x(0) = 3$ $\quad$ $y(2) = 1$

$x(1) = 1$ $\quad$ $y(3) = 1$



$$F(-3) = \sum_{\tau=-2}^{1} x(\tau)\, y(-3-\tau) = x(-2)y(-5) + x(-1)y(-4) + x(0)y(-3) + x(1)y(-2)$$

$$F(-1) = \sum_{\tau=-2}^{1} x(\tau)\, y(-1-\tau) = x(-2)y(-3) + x(-1)y(-2) + x(0)y(-1) + x(1)y(0) = 5$$

$$F(0) = x(-2)y(-2) + x(-1)y(-1) + x(0)y(0) + x(1)y(1) =$$
$$0 \quad 0 \quad 15 \quad + \quad 0 \quad = 15$$

$$F(1) = x(-2)y(-1) + x(-1)y(0) + x(0)y(1) + x(1)y(2) = 1$$
$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 1$$

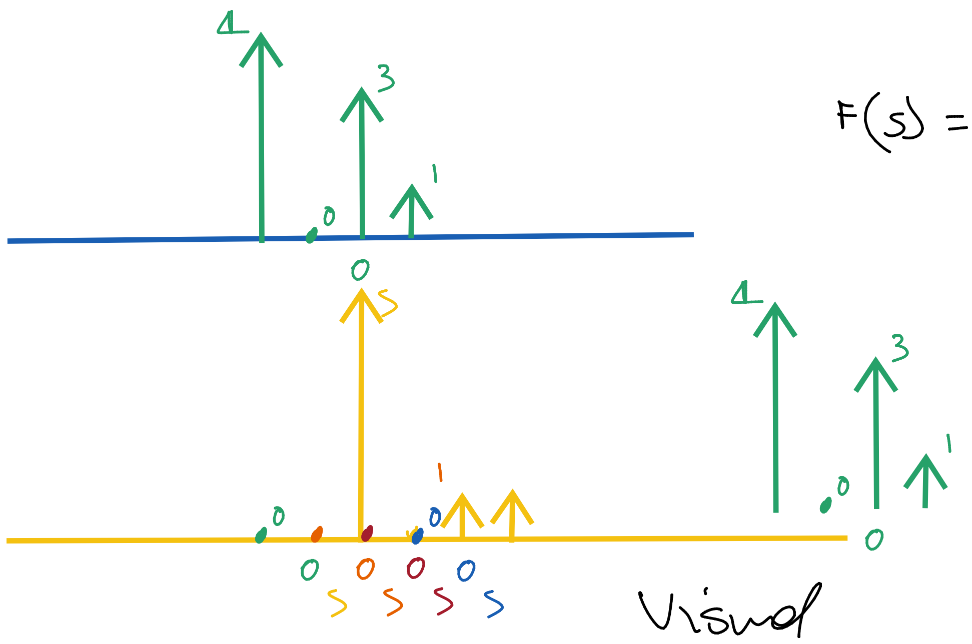
$$F(2) = x(-2)y(0) + x(-1)y(1) + x(0)y(2) + x(1)y(3)$$
$$20 + 0 + 3 + 1 = 24$$

$$F(3) = x(-2)y(1) + x(-1)y(2) + x(0)y(3) + x(1)y(4) =$$
$$4 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 0 = 3$$

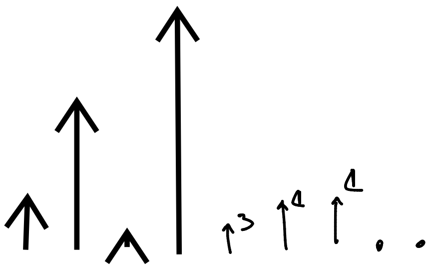
$$F(4) = x(-2)y(2) + x(-1)y(3) + x(0)y(4) + x(1)y(5) =$$
$$4 \quad 0 \quad = 4$$

$$F(5) = 4$$

x)



F)



Considere el sistema en tiempo discreto cuya entrada es $x(n)$ y la salida $y(n)$. Sabemos que

- $y(n) = g(n) * z(n)$, donde $g(n) = \beta^n$ para $n \geq 0$.
- $z(n) = z_1(n) + z_2(n)$
- $z_1 = f_1(n) * x(n)$, donde $f_1(n) = \alpha_1^n$ para $n \geq 0$.
- $z_2 = f_2(n) * x(n)$, donde $f_2(n) = \alpha_2 \delta(n - \gamma)$.

1. Halle la respuesta impulsiva $h(n)$ tal que $y(n) = h(n) * x(n)$.
2. Grafique $h(n)$ para
   a) $\beta = \frac{1}{2}, \alpha_1 = \frac{1}{5}, \alpha_2 = -3, \gamma = 2$
   b) $\beta = -\frac{1}{2}, \alpha_1 = \frac{1}{5}, \alpha_2 = -3, \gamma = 2$
   c) $\beta = \frac{1}{2}, \alpha_1 = -\frac{1}{5}, \alpha_2 = -3, \gamma = 2$
3. Para el primer caso, obtenga $y(n)$ cuando $x(n) = \delta(n + 3)$.

$$g(n) = \beta^n u(n) \xrightarrow{\mathcal{Z}} G(z) = \frac{1}{1-\beta z^{-1}}$$

$$f_1(n) = \alpha_1^n u(n) \xrightarrow{\mathcal{Z}} F_1(z) = \frac{1}{1-\alpha_1 z^{-1}}$$

$$f_2(n) = \alpha_2 \delta(n-\gamma) \xrightarrow{\mathcal{Z}} \alpha_2 z^{-\gamma} \cdot 1$$

$$x(n) * h(n) = y(n) \quad | \; x(n) = \delta(t)$$

$$H(z) = Y(z) = G(z) Z(z) = G(z) F_1(z) + G(z) F_2(z) = \frac{\alpha_2 z^{-\gamma}}{1-\beta z^{-1}} + \frac{1}{1-\beta z^{-1}} \cdot \frac{1}{1-\alpha_1 z^{-1}} =$$

$$\beta^n u(n) * \alpha_1^n u(n)$$

$$H(z) = \frac{\alpha_2 z^{-\gamma}}{1-\beta z^{-1}} + \frac{1}{1-\beta z^{-1} - \alpha_1 z^{-1} + \beta \alpha_1 z^{-2}}$$

$\mathcal{Z}^{-1}$

$$\alpha_2 \beta^{n-\gamma} u(n-\gamma) + \frac{1}{1-\beta/\alpha_1} \cdot \alpha_1^n u(n) = h(n)$$

$$A(z) = \frac{1}{1-\beta z^{-1} - \alpha_1 z^{-1} + \beta \alpha_1 z^{-2}}$$

$$A(z) = \frac{1}{\beta \alpha_1 z^{-2} + z^{-1}(-\beta - \alpha_1) + 1}$$

$$\beta^n u(n) * \alpha_1^n u(n) \qquad u(n-k) \in u(n)$$

$$a(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \beta^k \alpha_1^{n-k} u(n) \cancel{u(n-k)} \quad (k)$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \beta^k \frac{\alpha_1^n}{\alpha_1^k} u(n)$$

$$u(n) \alpha_1^n \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\beta}{\alpha_1}\right)^k}_{\text{serie geo}} = \frac{1}{1-\beta/\alpha_1} \cdot \alpha_1^n u(n)$$

$$h(n) = \alpha_2 \beta^{n-\gamma} u(n-\gamma) + \frac{\alpha_1^n u(n)}{1-\beta/\alpha_1}$$

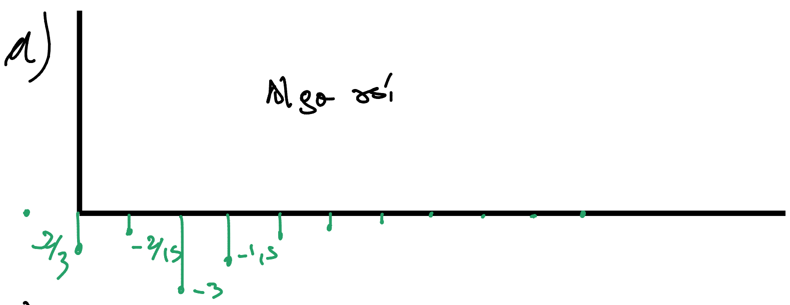
a) $\beta = \frac{1}{2}, \alpha_1 = \frac{1}{5}, \alpha_2 = -3, \gamma = 2$
b) $\beta = -\frac{1}{2}, \alpha_1 = \frac{1}{5}, \alpha_2 = -3, \gamma = 2$
c) $\beta = \frac{1}{2}, \alpha_1 = -\frac{1}{5}, \alpha_2 = -3, \gamma = 2$

a) $h(n) = -3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u(n-2) + \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^n u(n)}{-3/2}$

b) $-3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} u(n-2) + \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^n u(n)}{7/2}$ Alterna

c) $-3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u(n-2) + \frac{\left(-\frac{1}{5}\right)^n u(n)}{7/2}$

a)



b)

c)

Si $x = \delta(n+3)$ la salida es $\underline{h(n+3)}$

Considere el sistema en tiempo discreto cuya transferencia es

$$H(z) = 1 - \frac{3}{4}z^{,1} + \frac{1}{8}z^{-2}.$$

1. Obtenga la respuesta en frecuencia del sistema $H(\omega)$.
2. Halle la respuesta impulsiva $h(n)$.
3. Obtenga el diagrama de polos y ceros

círculo unidad

$z = e^{j\Omega}$

$$\underbrace{H(\Omega) = 1 - \frac{3}{4}e^{-j\Omega} + \frac{1}{8}e^{-2j\Omega}}_{\text{RTA en frecuencia}}$$

Ahora antitransformamos

$\delta(n) - \frac{3}{4}\delta(n-1) + \frac{1}{8}\delta(n-2)$ → es estable y causal

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| < \infty$$

$h(t) = 0 \ \forall t < 0$

$$H(z) = 1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2} = 0 \rightarrow z = \underbrace{1/4 \text{ o } 1/2}_{\text{ceros}}$$

polo en ∞

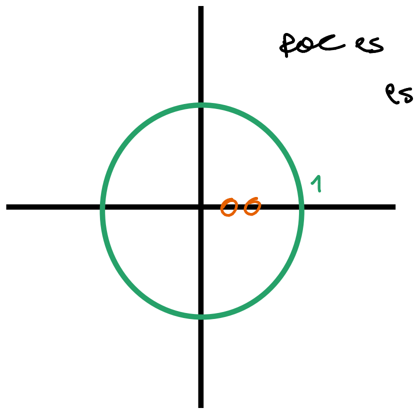
polo doble en cero

roc es $\mathbb{C}$ estable y causal

$$H(z) = \frac{\sum_{q=0}^{M} z^{-q}\beta_q}{\sum_{p=0}^{N} z^{-p}\alpha_p} = \frac{\beta_0 + \beta_1 z^{-1} + \dots + \beta_n z^{-n}}{\alpha_1 + \alpha_2 z^{-1} + \dots + \alpha_n z^{-n}}$$

ceros

polos



Repita el problema anterior con

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}z^{,1} + \frac{1}{8}z^{-2}}.$$

Explique las diferencias con el problema anterior.

Esto tiene polos en $1/2$ y $1/4$ y no tiene ceros.

Lo abro por fracciones parciales: $1 - \frac{1}{4z-1} + \frac{2}{2z-1}$

$$1 - \frac{z^{-1}}{4 - z^{-1}} + \frac{2z^{-1}}{2 - z^{-1}}$$

desfase

$$1 - \frac{1}{4}\frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}/4} + \frac{1}{2}\frac{2z^{-1}}{1 - z^{-1}/2}$$

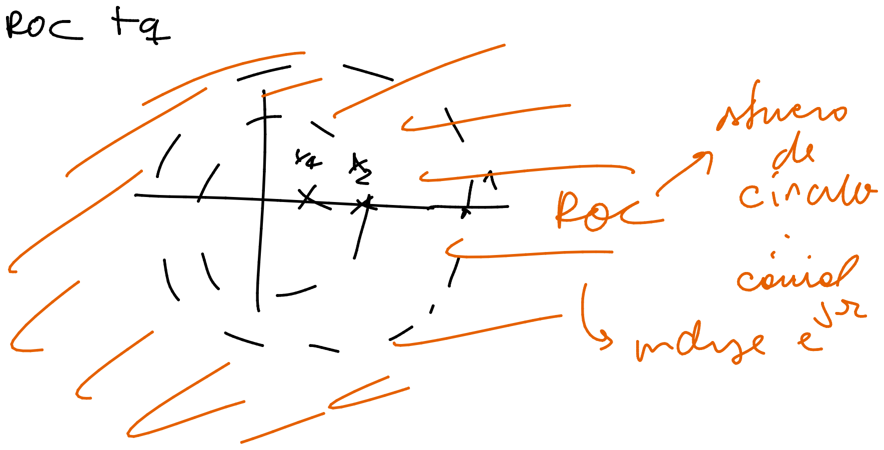
$\mathcal{F}(\Omega)$

Z^{-1}

$$\delta[n] - \frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u(n-1)\right] + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1)$$

$$\delta(n) + \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{n}\right] u(n-1)$$

Es estable y causal ya que antitransformé usando ROC tq



$$1 - \frac{1}{4z-1} + \frac{2}{2z-1}\Big|_{z=e^{j\Omega}}$$

$$1 - \frac{1}{4e^{j\Omega}-1} + \frac{2}{2e^{j\Omega}-1}$$

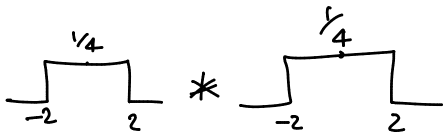
Ejercicio 4 Suma de variables

Sean X_1 y X_2 variables aleatorias independientes uniformes en el intervalo $[-2, 2]$. Obtenga las funciones de densidad de probabilidad de las variables $X_3 = X_1 + X_2$ y $X_4 = X_1 + 2X_2$.

$x_1 \sim \mathcal{U}(-2,2) \qquad x_2 \sim \mathcal{U}(-2,2)$

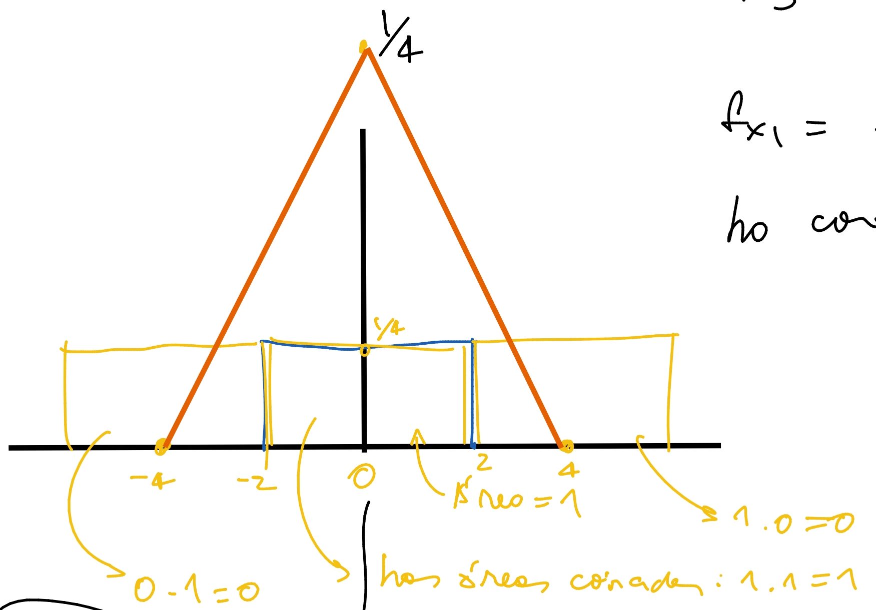
$x_3 = x_1 + x_2 \rightarrow$ Como $x_3 = \sum x_i \quad x_i$ indep

$x_4 = x_1 + 2x_2$

$f_{x_3}(\sum x_i) = f_{x_1} * f_{x_2} =$ 

$f_{x_1} = \frac{1}{4}\left[u(x+2) - u(x-2)\right] = f(x_2)$

la convolución da un triángulo



$$\therefore\ f_{x_3} = \left(\frac{x}{16} + \frac{1}{4}\right)\mathbb{1}\{-4 \le x \le 0\} + \left(\frac{1}{4} - \frac{x}{16}\right)\mathbb{1}\{0 < x \le 4\}$$

en cero

$$\frac{1}{16}\int_{-\infty}^{+\infty}\big(u(t+2) - u(t-2)\big)\big(u(t+2) - u(t-2)\big)$$

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$$

$x_4 = x_1 + 2x_2 \longrightarrow f_{x_4}(x_4) = \mathbb{P}(X_4 = x_4) = \mathbb{P}(X_4 = x_1 + x_2) =$

$\alpha = 2x_2 \qquad f_\alpha(\alpha) = \mathbb{P}(\alpha = \alpha) = \mathbb{P}(x_2 = \alpha/2) = f_x(\alpha/2)$

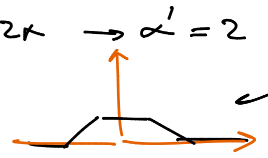
$F_\alpha(\alpha) = \mathbb{P}(\alpha \le \alpha) = \mathbb{P}(x_2 \le \alpha/2) = F_x(\alpha/2) = \int_0^{\alpha/2} f_x(x)\,dx$

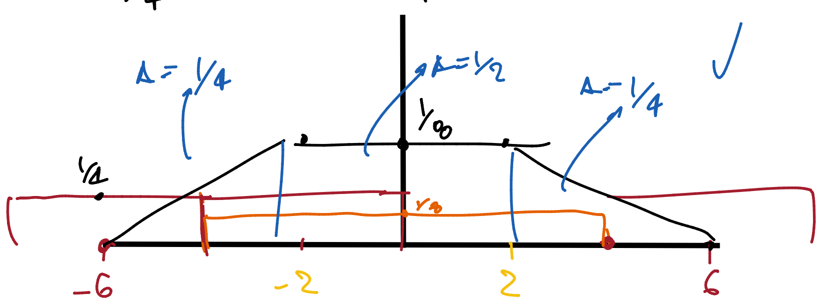
$F_\alpha(\alpha) = \int_0^{\alpha/2} \frac{1}{4}\,dx = \frac{\alpha}{8} \xrightarrow{d/d\alpha} = \frac{1}{8} \quad \therefore\ \alpha \sim \mathcal{U}[-4,4]$ o algo así

puede verse como un escalado

$f_\alpha = \frac{f_x}{|\det(\mathrm{Jac}\ g)|} = \left.\frac{1/4}{2}\right|_{x=\alpha/2} = \frac{1}{8}$ ✓

$\alpha = 2x \rightarrow \alpha' = 2$

$f_{x_4} = f_\alpha * f_{x_1} =$  eso es la densidad ✓



$$\int_{-4}^{0} \frac{1}{32} = \frac{1}{8}$$

Ejercicio 5 Ruido aditivo

Hecho

Sea $Y = X + N$, con X y N variables aleatorias independientes.

1. Demostrar que $f_Y(y) = f_X(y) * f_N(y)$.
2. Demostrar que $f_{Y|X}(y|x) = f_N(y - x)$.
3. Si $X \in \{0, 1\}$ es una variable aleatoria Bernoulli con $\Pr(X = 0) = p$ y $\Pr(X = 1) = q = 1 - p$, expresar y representar $f_Y(y)$ y $f_{Y|X}(y|x)$.

Ejercicio 6 Cambio de variables

Sean X e Y dos variables exponenciales independientes de parámetros λ_X y λ_Y respectivamente. Hallar la función de densidad de probabilidad conjunta de $W = XY$ y $V = X/Y$.

$X \sim Exp(\lambda_X) \quad Y \sim Exp(\lambda_Y) \longrightarrow f_{XY}(xy) = \underbrace{f_X \cdot f_Y}_{indep} = \lambda_X \lambda_Y e^{-\lambda_X x} e^{-\lambda_Y x} \ \forall \begin{cases} 0 \le x \\ 0 \le y \end{cases}$

$W = XY \quad V = X/Y$

$g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} \quad (w, v) = g(x, y) = (xy, x/y)$

$$\left| \det \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} xy & \frac{\partial}{\partial y} xy \\ \frac{\partial}{\partial x} x/y & \frac{\partial}{\partial y} x/y \end{vmatrix} \right| = \left| \det \begin{vmatrix} y & x \\ 1/y & -x/y^2 \end{vmatrix} \right| = \left| \left| -x/y - x/y \right| \right| = \left| -2x/y \right| = \frac{2x}{y}$$

$W = xy \quad V = x/y \longrightarrow x = v\sqrt{\frac{w}{v}} \quad y = \sqrt{\frac{w}{v}}$

$$f_{W,V} = \frac{f_{X,Y}}{|\det(J(g))|} = \frac{\lambda_X \lambda_Y e^{-\lambda_X x} e^{-\lambda_Y y}}{\frac{2x}{y}} \Bigg|_{\substack{x = v\sqrt{w/v} \\ y = \sqrt{w/v}}} \ \underset{\forall \begin{cases} 0 \le x \\ 0 \le y \end{cases}}{=} \ \underbrace{\frac{\lambda_X \lambda_Y}{2v} e^{-\lambda_X v\sqrt{\frac{w}{v}}} e^{-\lambda_Y \sqrt{\frac{w}{v}}} \ \forall \begin{cases} 0 \le v \\ 0 \le w \end{cases}}$$

$0 \le v\sqrt{\frac{w}{v}}$

$0 \le \sqrt{\frac{w}{v}}$

$v \ge 0$

bien fer :)

Ejercicio 7 Transformada de Box Muller

Sean U_1, U_2 dos variables aleatorias independientes en $(0,\ 1)$.

1. Halle la densidad conjunta de las variables:

$$\begin{cases} R = \sqrt{-2\ln(U_1)} \\ \Theta = 2\pi U_2. \end{cases}$$

   Verifique que R tiene distribución Rayleigh, que Θ es uniforme y que son independientes (¿por qué?).

2. Halle la densidad conjunta de las variables:

   7 hecho

$$\begin{cases} Z_1 = R\cos\Theta \\ Z_2 = R\sin\Theta \end{cases}$$

   y demuestre que se trata de variables normales estándar independientes.