Procesos Estocásticos: Introducción

Cecilia Galarza

Procesos Estocásticos
Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires

2do cuatrimestre 2024

Definición de Proceso Aleatorio

Concepto de procesos estocásticos

- En algunas ocasiones, es necesario registrar el resultado de un experimento como una señal que evoluciona en el tiempo, en lugar de un número o un vector con una cantidad finita de observaciones. Esto nos lleva a considerar señales aleatorias o *procesos estocásticos*.
- Ejemplos de procesos estocásticos:
  - La corriente que circula por un dispositivo.
  - La presión y la temperatura en una ciudad a lo largo del día.
  - La cantidad de bugs encontrados en un programa.
  - La señal que recibe un receptor de comunicaciones.
  - La cantidad de alumnos conectados a una clase virtual.

Definición de procesos estocásticos

Definición

Sea $(\Xi, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espacio de probabilidad,* $\mathcal{T}$ *un conjunto de índices.*
Un proceso estocástico (PE) es una familia de variables aleatorias:

$$X : \Xi \times \mathcal{T} \to \mathbb{R}$$
$$X = X(\xi, t)$$

Notación: Al proceso X *también se lo suele denominar* $(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ *o* $\{X(t) : t \in \mathcal{T}\}$.

Definición de procesos estocásticos

- El conjunto $\mathcal{T}$ es el conjunto temporal o conjunto de índices del proceso [1].

- Es posible ampliar la definición de PE para considerar familias de VeA reales o complejos

$$\mathbf{X}(\xi, t) \in \mathbb{C}^n$$

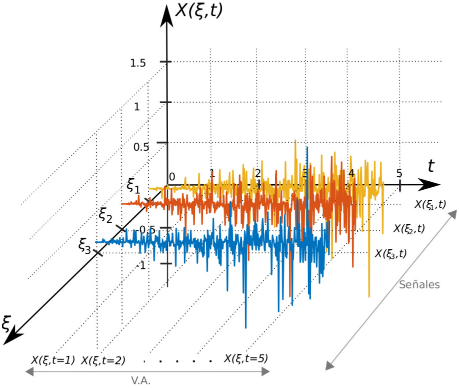
[1] No todas las señales aleatorias están definidas en el dominio temporal. El requisito es que $\mathcal{T}$ sea un conjunto *separable*.

Interpretación de PEs

- Hay muchas formas de interpretar al proceso $X(\xi, t)$.
- Para cada ξ_o, tenemos una señal temporal que asociamos a una realización del proceso $x(t) = X(\xi_o, t)$.
- Por otro lado, para cada t_o, tenemos una variable aleatoria que representa el resultado del experimento en ese instante de tiempo $X_{t_o}(\xi) = X(\xi, t_o)$.
- Para un valor particular de ξ_o y t_o, tenemos una muestra de la señal $x(t_o) = X(\xi_o, t_o)$.

Interpretación de PEs

El siguiente gráfico es una conceptualización visual de un PE donde se muestra X cuando $\xi \in \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\} \subset \Xi$ y $t \in [0, 5] \subset \mathcal{T}$.



PEs en tiempo discreto y continuo

- El conjunto $\mathcal{T}$ es el conjunto de índices que identifica la familia de VAs (o de VeA) que forman el PE.

- Si $\mathcal{T}$ es un conjunto numerable, vamos a decir que el PE está expresado en tiempo discreto.

- Si $\mathcal{T}$ no es un conjunto numerable, debe ser *separable*, es decir, $\mathcal{T}$ es tal que sigue siendo posible utilizar sus elementos para indexar la familia de VAs. Éste es el caso de los procesos en tiempo continuo

- Para simplificar, cuando hablemos de PE en tiempo continuo vamos a entender que en realidad se trata de un PE en tiempo discreto muestreado a muy alta tasa.

PE discreto y continuo

- Si $\forall t \in \mathcal{T}$, $X(\xi, t)$ VA *discreta* $\longrightarrow X(\xi, t)$ proceso de *estado discreto*, o PE discreto.
- Si $\forall t \in \mathcal{T}$, $X(\xi, t)$ VA *continua* $\longrightarrow X(\xi, t)$ proceso de *estado continuo* o PE continuo.

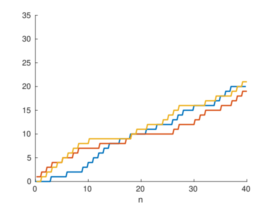
Ejemplos de procesos: Random Walk

Proceso de tiempo discreto y estado discreto:

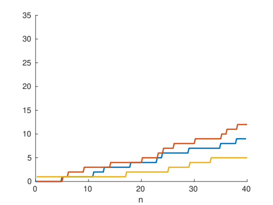
$$X(n) = \sum_{k=0}^{n} B(k), \qquad B(k) \in \{0, 1\}\,, \text{ i.i.d.}$$

$$\mathcal{T} = \mathbb{N}\,, \mathcal{S} = \mathbb{N}$$

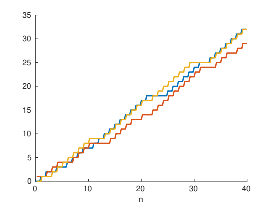
$B(k) \sim Ber(p)$



$p = \frac{1}{2}$



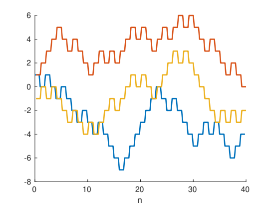
$p = \frac{1}{4}$



$p = \frac{3}{4}$

Ejemplos de procesos: Random Walk (cont)

$B(k) \in \{-1, 1\}$



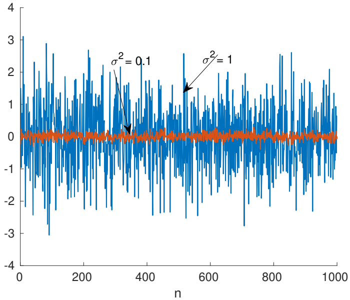
La caminata resulta simétrica si $\mathbb{P}[B(k) = 1] = \mathbb{P}[B(k) = -1] = \frac{1}{2}$. De modo contrario, la caminata tendrá una tendencia ascendente o descendente.

$$\mathcal{T} = \mathbb{N}\,,\ \mathcal{S} = \mathbb{Z}$$

Ejemplos de procesos: Ruido blanco

Proceso de tiempo discreto y estado continuo: $\mathcal{T} = \mathbb{N}, \mathcal{S} = \mathbb{R}$

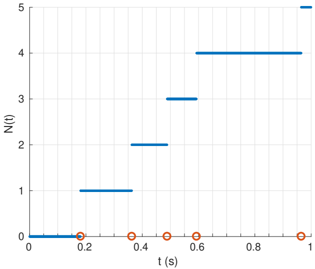
$$X(n) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \qquad X(n) \text{ i.i.d}$$



La *intensidad* del ruido depende de σ^2.

Ejemplos de procesos: Poisson

Proceso de tiempo continuo y estado discreto: $\mathcal{T} = \mathbb{R}$, $\mathcal{S} = \mathbb{N}$.



Proceso de conteo:
Los puntos rojos señalan la ocurrencia de eventos aleatorios distribuidos en el tiempo de acuerdo a las siguientes hipótesis:

- La probabilidad de que ocurran dos eventos simultáneamente es despreciable
- Los eventos ocurren en forma independiente unos de otros.

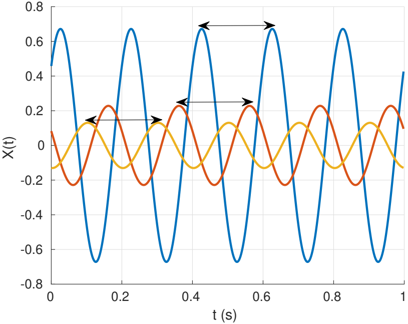
$N(t)$ cuenta la cantidad de eventos en el intervalo $[0, t]$.

Ejemplos de procesos: señal tonal

Proceso de tiempo continuo y estado continuo. $\mathcal{T} = \mathbb{R}, \mathcal{S} = \mathbb{R}$.

$$X(t) = A\cos(\omega t + \Phi)$$

donde $A \sim \mathcal{N}(0,1)$ y $\Phi \sim \mathcal{U}(0, 2\pi)$ son VAs y ω es una constante.



Entre realizaciones, sólo varía la amplitud y el desfasaje inicial. La frecuencia de oscilación es la misma para todas las oscilaciones

Caracterización de un proceso aleatorio

Distribuciones de primer orden

- Para cada t, $X(t)$ es una VA que está caracterizada por su CDF:

$$F_{X(t)}(x) = \mathbb{P}(X(t) \leq x), \qquad t \in \mathcal{T}.$$

- $F_{X(t)}$ es una caracterización de primer orden del proceso y nos permite calcular probabilidades y momentos de primer orden, es decir, que no involucren a más de una VA del PE.

- Por ejemplo, para cualquier $t \in \mathcal{T}$, podemos calcular:

$$\mathbb{P}(1 < X(t) < 3), \quad \mathbb{P}(X^2(t) > 1), \quad \mathbb{E}[X(t)], \quad \mathbb{E}[X^3(t) - X(t)].$$

Distribuciones de segundo orden

- En general, $F_{X(t)}$ depende de t, es decir, las VAs $X(t_1)$ y $X(t_2)$ pueden tener CDFs diferentes para $t_1 \neq t_2$.

- La CDF conjunta de $X(t_1)$ y $X(t_2)$ caracteriza simultáneamente ambas variables,

$$F_{X(t_1),X(t_2)}(x_1, x_2) = \mathbb{P}(X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2), \qquad t_1, t_2 \in \mathcal{T}.$$

- $F_{X(t_1),X(t_2)}$ es una distribución de segundo orden con la cual podemos realizar cómputos del tipo

$$\mathbb{P}(X(t_1) > X(t_2)), \qquad \mathbb{E}[X(t_1)X(t_2)], \qquad \forall t_1, t_2 \in \mathcal{T}.$$

Distribuciones finito dimensionales

- La CDF conjunta de $X(t_1), \ldots, X(t_n)$ resulta

$$F_{X(t_1)\ldots X(t_n)} = \mathbb{P}(X(t_1) \leq x_1, \ldots, X(t_n) \leq x_n).$$

Esta función es la distribución de orden n del PE.

- Claramente, si $m \leq n$ podemos obtener $F_{X(t_1)\ldots X(t_m)}$ conociendo $F_{X(t_1)\ldots X(t_n)}$. Por ejemplo

$$F_{X(t_1),X(t_2)}(x_1, x_2) = \lim_{x_3 \to \infty} F_{X(t_1),X(t_2),X(t_3)}(x_1, x_2, x_3).$$

Distribuciones finito dimensionales

- Un PE está completamente caracterizado si conocemos sus distribuciones de orden n para cualquier $n \in \mathbb{N}$.
- Este conocimiento completo de $X(t)$ es difícil de tener en el caso general.
- Muchas veces, va a ser posible obtener ciertos momentos de $X(t)$ y resolver los problemas con esa caracterización.

Momentos de un proceso

Función media

Definición (Media de un proceso)

La media de un PE $X(t)$ es

$$\mathbb{E}[X(t)] = \mu_X(t) = \int_{\mathbb{R}} x\, f_{X(t)}(x)\, dx.$$

$\mu_X(t)$ es una función del tiempo que en general, puede o no existir. Podríamos tener un proceso tal que $\mu_X(t)$ existe para algunos valores de t pero no para otros.

Funciones de autocorrelación y autocovarianza

Definición

Sea $X(t)$ un PE con $\mathbb{E}[X] = \mu_X(t)$.

- *Función de autocorrelación:*

$$R_X(t_1, t_2) = \mathbb{E}[X(t_1)X(t_2)]$$

- *Función de autocovarianza*

$$C_X(t_1, t_2) = \mathbb{E}\left[(X(t_1) - \mu_X(t_1))\,(X(t_2) - \mu_X(t_2))\right].$$

Funciones de autocorrelación y autocovarianza: Propiedades

- Ambas funciones se relacionan del siguiente modo:

$$R_X(t_1, t_2) = C_X(t_1, t_2) + \mu_X(t_1)\mu_X(t_2).$$

- Cuando $t_1 = t_2 = t$, obtenemos el valor cuadrático medio o potencia media del proceso y la varianza del proceso

$$R_X(t, t) = \mathbb{E}[X^2(t)], \qquad C_X(t, t) = \mathbb{V}(X(t)).$$

Generalización para procesos complejos

Para trabajar con procesos en los cuales $X(\xi, t) \in \mathbb{C}$ utilizamos la siguiente generalización:

Definición

Sea $X(t)$ un PE con $\mathbb{E}[X] = \mu_X(t)$.

- *Función de autocorrelación:*

$$R_X(t_1, t_2) = \mathbb{E}[X(t_1)X^*(t_2)]$$

- *Función de autocovarianza*

$$C_X(t_1, t_2) = \mathbb{E}\left[(X(t_1) - \mu_X(t_1))\,(X(t_2) - \mu_X(t_2))^*\right].$$

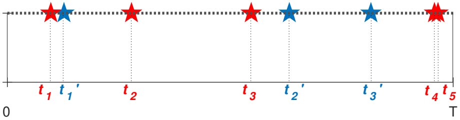
Procesos de Poisson

Procesos Poisson

En algunas situaciones, se desea analizar un evento que ocurre de modo *aleatorio* en el tiempo. Esta situación es la que se presenta, por ejemplo, al modelar las tareas que arriban para ser procesadas por un servidor. También modelan el arribo de mensajes a la antena receptora en un canal de múltiple acceso. Los procesos Poisson son útiles en estas circunstancias.

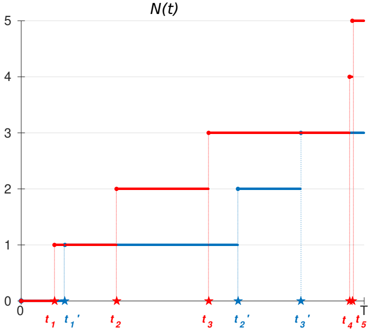
Procesos Poisson

Un evento ocurre en instantes aleatorios a una tasa de λ eventos por unidad de tiempo. Por ejemplo, en la figura se muestran dos realizaciones del experimento en el intervalo $[0, T]$. El evento ocurre en los instantes t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 en una realización y t'_1, t'_2, t'_3 en la otra.



Procesos Poisson

Llamamos *Proceso de conteo Poisson* o Proceso Poisson directamente a la cantidad de eventos que ocurrieron en el intervalo $[0, t]$. Éste es un proceso aleatorio que se representa por $N(t)$. En la figura se muestran las realizaciones de $N(t)$ que corresponden a los puntos de ocurrencia del ejemplo anterior para $t \in [0, T]$.



Construcción del Proceso de Poisson

Dividimos el intervalo $[0, t]$ en n subintervalos de duración Δt.
Hipótesis: 1) la probabilidad de ocurrencia de más de un evento en un subintervalo es despreciable; 2) la ocurrencia en un subintervalo es independiente de lo que suceda en los demás subintervalos.

$B_k \sim Ber(p)$ **modela la ocurrencia en el k-ésimo subintervalo.**
B_k es una secuencia i.i.d. Bernouilli de parámetro p.

Suma de eventos ocurrido en n subintervalos es Binomial

$$\mathbb{P}[N_t = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Límite achicando Δt, pero manteniendo np fijo

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \xrightarrow[n\to\infty]{np=\alpha} \quad \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha}$$

Construcción del Proceso de Poisson (cont)

Demostración por inducción que

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \xrightarrow[n\to\infty]{np=\alpha} \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha}$$

- $k = 0$

$$\mathbb{P}[N_t = 0] = (1-p)^n = \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\alpha}$$

- $k + 1$

$$\frac{\mathbb{P}[N_t = k+1]}{\mathbb{P}[N_t = k]} = \frac{(n-k)p}{(k+1)(1-p)} = \frac{\alpha - k\alpha/n}{(k+1)(1-\alpha/n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\alpha}{k+1}$$

- Luego, en el límite:

$$\mathbb{P}[N_t = k+1] = \frac{\alpha}{k+1}\mathbb{P}[N_t = k] = \frac{\alpha}{k+1}\frac{\alpha}{k}\cdots\frac{\alpha}{1}\mathbb{P}[N_t = 0] = \frac{\alpha^k}{k!}e^{-\alpha}$$

Construcción del Proceso de Poisson (cont)

Si la tasa de ocurrencia es λ eventos por unidad de tiempo, tenemos que en el intervalo $[0, t]$

$$\alpha = \lambda t$$

Luego, el proceso de conteo de Poisson que cuenta la cantidad de ocurrencias en $[0, t]$ para $t \in \mathbb{R}$, tiene una distribución Poisson con media λt, es decir

$$\mathbb{P}[N(t) = k] = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

Procesos Poisson: Propiedades

- $N(0) = 0$.
  Por definición, el proceso de conteo siempre comienza en 0.

- $\mathbb{E}[N(t)] = \lambda t$ y $\mathbb{V}[N(t)] = \lambda t$.
  Volviendo al proceso binomial $\mathbb{E}[N_t] = np$ y $\mathbb{V}[N_t] = np(1-p)$.
  Manteniendo $np = \lambda t$ para calcular el límite,

$$\lim_{n\to\infty} np = \lambda t \qquad \lim_{n\to\infty} np(1-p) = \lambda t.$$

Incrementos independientes y estacionarios

Sean $t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < \infty$ instantes de tiempo. Los incrementos en los intervalos $[t_1, t_2]$ y $[t_3, t_4]$ son $(N(t_2) - N(t_1))$ y $(N(t_4) - N(t_3))$.

Incrementos independientes y estacionarios en intervalos disjuntos.

- Si $[t_1, t_2]$ y $[t_3, t_4]$ son intervalos disjuntos, entonces

  $(N(t_4) - N(t_3))$ y $(N(t_2) - N(t_1))$ son independientes.

- Si $t_2 - t_1 = t_4 - t_3 = \tau$, entonces

$$\mathbb{P}\big[N(t_4) - N(t_3) = k\big] = \mathbb{P}\big[N(t_2) - N(t_1) = k\big] = \mathbb{P}\big[N(\tau) = k\big].$$

Incrementos independientes y estacionarios (cont)

Ésta es una propiedad clave de los procesos de Poisson. Es posible construir el proyecto partiendo de esta hipótesis, en lugar de utilizar el proceso binomial. Veamos la demostración:

- Por construcción, las VA Bernouilli que modelan la ocurrencia del evento aleatorio son i.i.d.
- El incremento es la suma de eventos en el intervalo. Dichos eventos son independientes de los que ocurran en otro intervalo disjunto. Por ende, las sumas de eventos son independientes entre sí.
- Si $t_2 - t_1 = t_4 - t_3$, la cantidad de variables Bernouilli en ambos intervalos es la misma, luego la probabilidad del incremento sólo depende de la duración del intervalo.

$\square$

Distribución conjunta

Queremos calcular $\mathbb{P}\left[N(t_1) = i, N(t_2) = j\right]$.

Suponemos $t_1 < t_2$ y $j \geq i$. Entonces para que en t_2 ya hayan ocurrido j eventos, el incremento en el intervalo $[t_1, t_2]$ debe ser $j - i$. En la deducción, vamos a utilizar que los incrementos en intervalos disjuntos son independientes y su distribución depende sólo del largo del intervalo, no del tiempo inicial. Luego,

Distribución conjunta

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left[N(t_1) = i, N(t_2) = j\right] = && j \geq i \\
&\quad = \mathbb{P}\left[N(t_1) = i\,,\; N(t_2) - N(t_1) = j - i\right] && N(0) = 0 \\
&\quad = \mathbb{P}\left\{N(t_1) - N(0) = i\,,\; N(t_2) - N(t_1) = j - i\right\} && \text{Inc. Independientes} \\
&\quad = \mathbb{P}\left[N(t_1) - N(0) = i\right]\mathbb{P}\left[N(t_2) - N(t_1) = j - i\right] && \\
&\quad = \mathbb{P}\left[N(t_1) = i\right]\mathbb{P}\left[N(t_2 - t_1) - N(0) = j - i\right] && \text{Inc. Identicamente distrib.} \\
&\quad = \frac{(\lambda t_1)^i}{i!} e^{-\lambda t_1} \frac{(\lambda(t_2 - t_1))^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda(t_2 - t_1)} && \\
&\quad = \frac{(\lambda t_1)^i (\lambda(t_2 - t_1))^{j-i}}{i!(j-i)!} e^{-\lambda t_1} e^{-\lambda(t_2 - t_1)} &&
\end{aligned}
$$

$$
\mathbb{P}\left[N(t_1) = i, N(t_2) = j\right] = \frac{(\lambda t_1)^i (\lambda(t_2 - t_1))^{j-i}}{i!(j-i)!} e^{-\lambda t_1} e^{-\lambda(t_2 - t_1)}
$$

Autocorrelación y autocovarianza

Nuevamente en esta deducción vamos a utilizar las propiedades de los incrementos en intervalos disjuntos. Supongamos $0 \leq t_1 \leq t_2$.

$$
\begin{aligned}
R_N(t_1, t_2) &= \mathbb{E}[N(t_1)N(t_2)] \\
&= \mathbb{E}\big\{N(t_1)\,[N(t_2) - N(t_1) + N(t_1)]\,\big\} \qquad , \qquad N(0) = 0 \\
&= \mathbb{E}\big\{\,[N(t_1) - N(0)]\,[N(t_2) - N(t_1)]\,\big\} + \mathbb{E}[N^2(t_1)] \;\; , \;\; \textit{Inc. Independientes.} \\
&= \mathbb{E}\,[N(t_1)]\,\mathbb{E}\,[N(t_2) - N(t_1)] + \mathbb{E}[N^2(t_1)] \\
&= \mathbb{E}[N(t_1)]\big\{\mathbb{E}[N(t_2)] - \mathbb{E}[N(t_1)]\big\} + \mathbb{E}[N^2(t_1)] \;\; , \;\; \mathbb{E}[N(t)] = \mathbb{V}[N(t)] = \lambda t \\
&= \lambda t_1\,\{\lambda t_2 - \lambda t_1\} + \lambda t_1 + \lambda^2 t_1^2 \\
&= \lambda^2 t_1 t_2 + \lambda t_1
\end{aligned}
$$

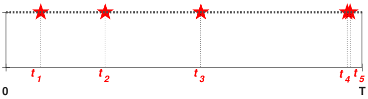
Autocorrelación y autocovarianza

$$
\begin{aligned}
C_N(t_1, t_2) &= R_N(t_1, t_2) - \mathbb{E}[N(t_1)]\mathbb{E}[N(t_2)] \\
&= \lambda^2 t_1 t_2 + \lambda t_1 - \lambda t_1 \lambda t_2 = \lambda t_1.
\end{aligned}
$$

Es claro que si $0 \leq t_2 \leq t_1$ luego los intervalos disjuntos en los cuales los incrementos son independientes son $[0, t_2]$ y $[t_2, t_1]$. Luego, el resultado sería $C_N(t_1, t_2) = \lambda t_2$. Es decir que

$$
C_N(t_1, t_2) = \lambda \operatorname{mín}(t_1, t_2)
$$

Tiempos de ocurrencia



Construimos el proceso de Poisson a partir de la ocurrencia de un evento en instantes aleatorios.

Sea T_j la VA que identifica el tiempo de ocurrencia de un evento luego de que ocurrieron $j-1$ eventos. Luego, $T_j = t_j$ significa que en el instante t_j ocurrió el j-ésimo evento.

En una cola, T_j identificaría el instante de llegada del j-ésimo cliente.

Tiempos de ocurrencia (cont)

Analicemos el tiempo de ocurrencia de un solo evento en $[0, T]$.
Luego, $\forall t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[T_1 \leq t] &= \mathbb{P}\big[N(t) = 1 \,|\, N(T) = 1\big] \\
&= \frac{\mathbb{P}\big[N(t) = 1\,,\, N(T) = 1\big]}{\mathbb{P}\big[N(T) = 1\big]} && , \quad \text{1 solo evento en } [0, T] \\
&= \frac{\mathbb{P}[N(t) = 1, N(T) - N(t) = 0]}{\mathbb{P}[N(T) = 1]} && , \quad \text{Inc. Independientes} \\
&= \frac{\mathbb{P}[N(t) = 1]\mathbb{P}[N(T) - N(t) = 0]}{\mathbb{P}[N(T) = 1]} && , \quad \mathbb{P}[N(T) - N(t) = 0] = \mathbb{P}[N(T - t) = 0] \\
&= \frac{\lambda t e^{-\lambda t}\ e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda T e^{-\lambda T}} \\
&= \frac{t}{T}
\end{aligned}$$

Tiempos de ocurrencia (cont)

T_1 está uniformemente distribuida en el intervalo $[0, T]$. Pensando en clientes de una cola, este resultado dice que el primer cliente puede arrivar en cualquier momento en $[0, T]$.

Por la construcción del proceso $N(t)$, la llegada del segundo cliente es independiente de la llegada del primero. Luego, es fácil ver que los tiempos de ocurrencia de k eventos consecutivos, $T_1, T_2, \cdots T_k$, son independientes y están distribuidos uniformemente en $[0, T]$.

Tiempo entre eventos

Otra V.A. asociada con los procesos de Poisson es el tiempo entre dos eventos consecutivos. Sea T dicha variable. El evento $\mathrm{T} > t$ equivale a que en el intervalo $[0, t]$ no haya eventos, es decir

$$\mathbb{P}[\mathrm{T} > t] = \mathbb{P}[N(t) = 0] = e^{-\lambda t}.$$

La CDF de T es entonces

$$F_{\mathrm{T}}(t) = \mathbb{P}[\mathrm{T} \leq t] = 1 - \mathbb{P}[\mathrm{T} > t] = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Ésta la distribución de una VA exponencial con parámetro λ.

Procesos Poisson - recap

Principales resultados

$$\mathbb{P}[N(t) = k] = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

$$\mathbb{E}[N(t)] = \lambda t$$

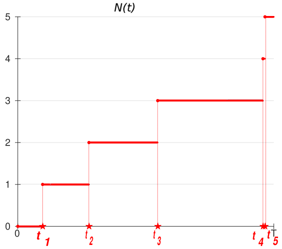
$$C_N(t_1, t_2) = \lambda \min(t_1, t_2)$$

- N(0) = 0
- Incrementos independientes y estacionarios

V.A asociadas

- Tiempos de ocurrencia en $[0, T]$:
  $T_1, T_2, \cdots T_k \sim U[0, T]$, i.i.d
- Tiempo entre eventos
  $\mathrm{T} \sim Exp(\lambda)$

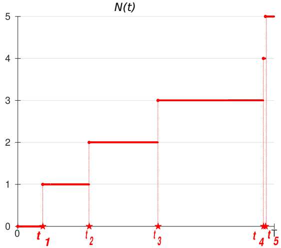
Descripción alternativa para $N(t)$



$$N(t) = \sum_k u(t - T_k)$$

$N(t)$ es la suma de funciones escalón de amplitud 1 desplazadas en T_k, con $T_k \sim U[0, T]$, i.i.d.

Descripción alternativa para $N(t)$



$$N(t) = \sum_k \int \delta(t - T_k)dt$$

La función escalón $u(t)$ es la integral de un impulso $\delta(t)$. Sea $S(t)$ el tren de impulsos desplazados en forma aleatoria. Luego,

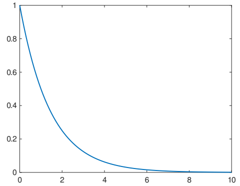
$$S(t) = \sum_k \delta(t - T_k).$$

$$\mathbf{S}(t) \longrightarrow \boxed{\int} \longrightarrow \mathbf{N}(t)$$

Tren de impulsos filtrado

La interpretación anterior de $N(t)$ abre la posibilidad de generar nuevos procesos. Por ejemplo

$$S(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow X(t)$$



$$X(t) = \sum_k h(t - T_k)$$

Para algunas formas de $h(t)$ este proceso se conoce como ruido de disparo o *Shot Noise*.

Ejercicio: Señal del telégrafo

Sea $N(t)$ un proceso Poisson de media $\mathbb{E}[N(t)] = \lambda t$. Se construye un nuevo proceso $X(t)$ tal que

- $X(t) \in \{-1, +1\}$ para todo t
- $\mathbb{P}[X(0) = +1] = \mathbb{P}[X(0) = -1] = \frac{1}{2}$
- $X(t)$ cambia de polaridad si $N(t)$ se incrementa en 1. Es decir, $X(t)$ cambia de polaridad cuando ocurre un evento Poisson

Hallar $\mathbb{P}[X(t) = +1]$ y $\mathbb{P}[X(t) = -1]$.

Ayuda: Recuerde que

$$\mathbb{P}[X(t) = a] = \\ \mathbb{P}[X(t) = a|X(0) = +1]\mathbb{P}[X(0) = +1] + \mathbb{P}[X(t) = a|X(0) = -1]\mathbb{P}[X(0) = -1]$$

Ejercicio: Señal del telégrafo (cont)

Para la señal anterior, hallar

- $\mathbb{E}[X(t)]$
- $\mathbb{V}[X(t)]$

Ayuda: Recuerde que $X(t)$ sólo puede tomar valores $+1$ y -1

Ejercicio: Shot Noise

Vimos cómo construir el ruido de disparo a partir de un tren de impulsos con ocurrencias aleatorias. Sea $h(t)$ la respuesta impulsiva de un sistema LTI causal, luego

$$X(t) = \sum_{k} h(t - T_k).$$

Calcular $\mathbb{E}[X(t)]$.

Ayuda: Puede ser útil incorporar el proceso Poisson implícito en $X(t)$. Para ello, recuerde que $\mathbb{E}[X(t)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X(t)|N(t)]]$.

Propiedades

$N_1(t)$ y $N_2(t)$ son dos procesos de Poisson independientes entre sí con tasas λ_1 y λ_2 respectivamente. Justifique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas

- $N_1(t) + N_2(t)$ es Poisson
- $N_1(t) - N_2(t)$ es Poisson
- La tasa de $N_1(t) + N_2(t)$ es $\lambda_1 + \lambda_2$.
- La media de $N_1(t) - N_2(t)$ es proporcional a $\lambda_1 - \lambda_2$.