Procesos Estocásticos y Sistemas

Cecilia Galarza

Procesos Estocásticos
Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires

1er cuatrimestre 2025

Transformaciones de PE

- En SyS vimos la noción de sistema dinámico como un operador que transforma las señales de entrada en señales de salida. Si $\mathcal{S}$ es un espacio de señales, definimos el sistema $\mathcal{H}$ como

Se ~~acabó~~ la joda

$$\mathcal{H} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$$
$$y = \mathcal{H}(x)$$

- Si $X(\xi, \cdot)$ es un proceso estocástico con Ξ el espacio muestral, cada realización es una señal. Luego, podemos pensar en el proceso de salida

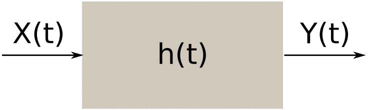
$$Y(\xi, \cdot) = \mathcal{H}(X(\xi, \cdot)), \qquad \xi \in \Xi.$$

- Vamos a asumir que $\mathcal{H}$ es tal que Y es un proceso estocástico que debemos caracterizar a partir de las características de X y $\mathcal{H}$.

Respuesta de un sistema LTI a un PE

Supongamos que $\mathcal{H}$ es un sistema LTI caracterizado por $h(t)$, su respuesta impulsiva o $H(\omega) = \mathcal{F}(h(t))$, su respuesta en frecuencia. La entrada del sistema es el proceso aleatorio $X(t)$ y la salida $Y(t)$.

invarianza temporal ≡ estacionariedad → tienen el mismo gusto



En el análisis siguiente, vamos a utilizar la variable t para identificar sistemas tanto en tiempo continuo como discreto. Cuando sea necesario, haremos la diferenciación.

Respuesta de un sistema LTI a un proceso ESE

Recordemos que si $X(t)$ es ESE,

$$F_{X(t_1+\tau),\ldots,X(t_n+\tau)} = F_{X(t_1),\ldots,X(t_n)} \quad , \quad \forall n, t_1, \ldots, t_n, \tau.$$

$Y(t)$ es ESE ?

Respuesta de un sistema LTI a un proceso ESE

Para simplificar la exposición, pensamos el problema en tiempo discreto:

Si fueramos estrictos, habría que analizar la convergencia de esta sumatoria, pero fingimos demencia. Para ese tipo de cosas están los quelonios

$$
\begin{aligned}
Y(t) &= \sum_s h(s)X(t-s) = h(t) * X(t) \\
&= \dots h(-1)X(t+1) + h(0)X(t) + h(1)X(t-1)\dots.
\end{aligned}
$$

- $Y(t)$ es una transformación de $\dots X(t-1), X(t), X(t+1)\dots$.
- Como $X(t)$ es ESE,

$$F_{\dots X(t-1),X(t),X(t+1)\dots} = F_{X(t+\tau-1),X(t+\tau),X(t+\tau+1)\dots}$$

Respuesta de un sistema LTI a un proceso ESE

Distribución de primer orden de $Y(t)$:

$$
\begin{aligned}
F_{Y(t)}(y) &= \mathbb{P}(Y(t) \leq y) \\
&= \mathbb{P}\left(\sum_s h(s)X(t-s) \leq y\right) = \mathbb{P}\left(\sum_s h(s)X(t+\tau-s) \leq y\right) \\
&= \mathbb{P}\left(Y(t+\tau) \leq y\right) = F_{Y(t+\tau)}(y).
\end{aligned}
$$

ME PODÉS EXPLICAR XQ' CUERNOS ESCRIBIS EN DIAGONAL

Esto se cumple $\forall \tau$. Por ende, $Y(t)$ es estacionario de primer orden. Repitiendo este análisis para cualquier distribución finito dimensional de $Y(t)$ concluimos que

ÑAÑAÑA

Pero ojo: El desplazamiento debe ser el mismo para ambas variables, i.e., no puedo desplazar con 2 τ distintos

ELEGIR CREER. La cuenta posta es un garrón

$$X(t) \text{ ESE} \implies Y(t) \text{ ESE}.$$

Respuesta de un sistema LTI a un proceso gaussiano

Volvemos a la observación anterior

$$
\begin{aligned}
Y(t) &= \sum_s h(s)X(t-s) \\
&= \ldots h(-1)X(t+1) + h(0)X(t) + h(1)X(t-1) \ldots .
\end{aligned}
$$

Si $X(t)$ es un proceso gaussiano, $Y(t)$ también es gaussiano por ser combinación lineal de procesos gaussianos.

$$
X(t) \text{ gaussiano } \Longrightarrow Y(t) \text{ gaussiano } .
$$

TKM GAVB

Respuesta de un sistema LTI: Esperanza

Cómo es la esperanza de la salida de un sistema LTI exitado por un proceso aleatorio $X(t)$?

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y(t)] = \mu_Y(t) = \mathbb{E}\left[\sum_s h(s)X(t-s)\right] \\
= \sum_s h(s)\mathbb{E}[X(t-s)] = \sum_s h(s)\mu_X(t-s).
\end{aligned}
$$

Esperanza de la salida

$$
\mathbb{E}[Y(t)] = (h * \mu_X)(t).
$$

OOOO MA GAD

Respuesta de un sistema LTI: Autocorrelación

$$R_Y(t, t+\tau) = \mathbb{E}\left[Y(t)Y(t+\tau)\right] =$$

$$= \mathbb{E}\left\{\left[\left(\sum_s h(s)X(t-s)\right)\left(\sum_l h(l)X(t+\tau-l)\right)\right]\right\}$$

$$= \sum_s \sum_l h(s)h(l)\underbrace{\mathbb{E}[X(t-s)X(t+\tau-l)]}_{R_X(t-s,t+\tau-l)}$$

UNA RECONTRA CONVOLUCIÓN

Autocorrelación de la salida

$$R_Y(t, t+\tau) = \sum_s h(s) \sum_l h(l) R_X(t-s, t+\tau-l).$$

¿Qué pasa si X(t) es ESE ó ESA?

Respuesta de un sistema LTI: Correlación cruzada entre entrada y salida

$$R_{X,Y}(t, t{+}\tau) = \mathbb{E}\left[X(t)Y(t+\tau)\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\sum_s h(s)X(t+\tau-s)\right]$$

$$= \sum_s h(s)\underbrace{\mathbb{E}[X(t)X(t+\tau-s)]}_{R_X(t,t+\tau-s)}.$$

Correlación entrada-salida

$$R_{X,Y}(t, t+\tau) = \sum_s h(s)R_X(t, t+\tau-s).$$

Respuesta de un sistema LTI a entrada ESA

Calculamos $\mathbb{E}[Y(t)]$:

$H(w) = \sum_s h(s) e^{-jws} = \sum h(s)$

$w = 0$ (ganancia en continua)

Si $X(t)$ es ESA, $\mu_X(t) = \mu_X$. Luego

$$\mu_Y(t) = \mu_X \sum_s h(s) = \mu_X H(\omega)|_{\omega=0} = \mu_Y.$$

no puedo negar q' tiene cierta mística

El valor $H(0)$ es la ganancia en continua del sistema LTI.

Respuesta de un sistema LTI a entrada ESA

Calculamos $R_Y(t, t+\tau)$:

Si $X(t)$ es ESA, entonces $R_X(t, t+\tau) = R_X(\tau)$. Luego,

xq? → Ver Diapo #9

$$R_Y(t, t+\tau) = \sum_s h(s) \sum_l h(l) R_X(\tau - l + s) \qquad u = -s$$

$$= \sum_l h(l) \sum_u h(-u) R_X(\tau - l - u) \qquad \tilde{h}(u) = h(-u)$$

$$= \sum_l h(l) \underbrace{\sum_u \tilde{h}(u) R_X(\tau - l - u)}_{(\tilde{h} * R_X)(\tau - l)} = \Big(h * (\tilde{h} * R_X)\Big)(\tau)$$

¿Qué significa esto???

$$= \Big((h * \tilde{h}) * R_X\Big)(\tau) = R_Y(\tau).$$

¿Cómo es la relación entre las transformadas de $h[n]$ y $\tilde{h}[n] = h[-n]$

Respuesta de un sistema LTI a una entrada ESA

Calculamos $R_{XY}(t, t+\tau)$:

Si $X(t)$ es ESA, entonces $R_X(t, t+\tau) = R_X(\tau)$,

$$R_{X,Y}(t, t+\tau) = \sum_s h(s) R_X(\tau - s) = (h * R_X)(\tau) = R_{X,Y}(\tau).$$

Respuesta de un sistema LTI a una entrada ESA

Resumiendo...

- $\mathbb{E}[Y(t)] = H(0)\mu_X$
- $R_Y(t, t+\tau) = R_Y(\tau)$
- $R_{X,Y}(t, t+\tau) = R_{X,Y}(\tau)$

$$X(t) \text{ ESA} \implies \begin{cases} Y(t) \text{ ESA} \\ X(t)\,,\ Y(t) \text{ CESA} \end{cases} .$$

Respuesta de un sistema LTI a una entrada ESA: Densidad espectral de salida

Usamos el teorema de Wiener-Kinchin para calcular $S_Y(\omega)$.

$$
\begin{aligned}
S_Y(\omega) = \mathcal{F}\left\{R_Y(\tau)\right\} &= \mathcal{F}\left\{\left((h * \tilde{h}) * R_X\right)(\tau)\right\} \\
&= H(\omega)\tilde{H}(\omega)S_X(\omega)
\end{aligned}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
\tilde{H}(\omega) = \mathcal{F}\{\tilde{h}(t)\}(\omega) &= \sum_t \tilde{h}(t)e^{-j\omega t} \\
&= \sum_t h(-t)e^{-\jmath\omega t} \qquad , \qquad u = -t \\
&= \sum_u h(u)e^{\jmath\omega u} = H^*(\omega).
\end{aligned}
$$

Respuesta de un sistema LTI a una entrada ESA: Densidad espectral de salida

Luego,

ACÁ SE PIERDE LA FASE

$$S_Y(\omega) = H(\omega)H^*(\omega)S_X(\omega) = |H(\omega)|^2 S_X(\omega).$$

amplifica o atenúa frecuencias

Finalmente, partiendo de la correlación cruzada, obtenemos la densidad espectral cruzada:

$$\begin{aligned} S_{XY}(\omega) &= \mathcal{F}\left\{R_{XY}(\tau)\right\} = \mathcal{F}\left\{(h * R_X)(\tau)\right\} \\ &= H(\omega)S_X(\omega). \end{aligned}$$

OBS: $\dfrac{S_Y(w)}{S_{XY}(w)} = \tilde{H}(w) = H^*(w)$, por si te sirve de algo

Respuesta de un sistema LTI a un proceso ESA: recopilación

Sea $X(t)$ un proceso ESA, $\mathcal{H}$ un sistema LTI con $h(t)$ y $H(\omega)$. Luego,

- $Y(t) = (h * X)(t)$ es un proceso ESA

$$\mathbb{E}[Y(t)] = H(0)\mu_X = \mu_Y$$

$$R_Y(\tau) = (h * \tilde{h} * R_X)(\tau) \qquad S_Y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_X(\omega)$$

- $X(t)$, $Y(t)$ son procesos CESA

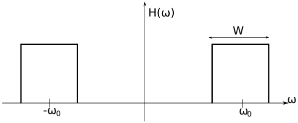
$$R_{X,Y}(\tau) = (h * R_X)(\tau) \qquad S_{X,Y}(\omega) = H(\omega) S_X(\omega)$$

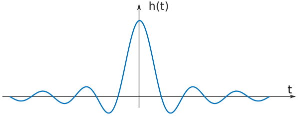
Ejemplo: filtrado pasabanda ideal

- Filtro:

$$H(\omega) = \mathbb{1}\left\{|\omega - \omega_0| \leq \frac{W}{2}\right\} + \mathbb{1}\left\{|\omega + \omega_0| \leq \frac{W}{2}\right\}$$

$$h(t) = \frac{W}{\pi}\cos(\omega_0 t)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{W}{2\pi}t\right) \qquad \mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$





- Entrada:

$$X(t) = S(t) + N(t) = A\cos(\omega_0 t + \Phi) + N(t)$$

  - $A \sim \mathcal{N}(0,1)$ y $\Phi \sim \mathcal{U}(-\pi,\pi)$ independientes,
  - $N(t)$ ruido blanco de media nula, varianza σ^2, independiente de $S(t)$.

Ejemplo: filtrado pasabanda ideal (cont.)

$Y(t)$ ESA?

- $X(t) = \underbrace{A\cos(\omega_0 t + \Phi)}_{\text{ESA}} + \underbrace{N(t)}_{\text{ESA}} \Longrightarrow$ es ESA.

  $\mathbb{E}[X(t)] = \mathbb{E}[S(t)] + \mathbb{E}[N(t)] = 0$. Como S y N son ortogonales,

  $$R_X(\tau) = \mathbb{E}[X(t)X(t+\tau)] = R_S(\tau) + R_N(\tau) = \frac{1}{2}\cos(\omega_0\tau) + \sigma^2\delta(\tau).$$

  $$S_X(\omega) = \mathcal{F}\{R_X\}(\omega) = S_S(\omega) + S_N(\omega) = \frac{\pi}{2}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]+\sigma^2.$$

- H es LTI

  Moraleja: La autocorrelación de la suma de dos procesos ortogonales es la suma de las autocorrelaciones individuales de los procesos.

- Luego, $Y(t)$ es ESA y además $(X(t), Y(t))$ CESA.

Ejemplo: filtrado pasabanda ideal (cont.)

Analizamos la salida del filtro $Y(t)$.

- $S_Y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_X(\omega) = \frac{\pi}{2}[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] + \sigma^2 |H(\omega)|^2$.

$$R_Y(\tau) = \mathcal{F}^{-1}(S_Y(\omega)) = \frac{1}{2}\cos(\omega_0 \tau) + \frac{\sigma^2 W}{\pi}\cos(\omega_0 \tau)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{W}{2\pi}\tau\right).$$

- En este caso particular, $|H(\omega)| = |H(\omega)|^2$. Luego,
  $S_{X,Y}(\omega) = H(\omega) S_X(\omega) = |H(\omega)|^2 S_X(\omega) = S_Y(\omega)$.
  $R_{X,Y}(\tau) = R_Y(\tau)$.

Ejemplo: filtrado pasabanda ideal (cont.)

- Usando la linealidad del filtro, descomponemos $Y(t)$:

$$Y(t) = \underbrace{(h * S)(t)}_{R(t)} + \underbrace{(h * N)(t)}_{V(t)}.$$

Las integrales son de $-\pi$ a π

- Definimos la relación señal a ruido (SNR) a la entrada del filtro

DEF

$$\mathrm{SNR_{IN}} = \frac{\mathbb{E}[S^2(t)]}{\mathbb{E}[N^2(t)]} = \frac{R_S(0)}{R_N(0)} = \frac{\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} S_S(\omega)d\omega}{\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} S_N(\omega)d\omega} = \frac{1/2}{\sigma^2}.$$

ESTO ES UNA POTENCIA

- Por lo tanto, a la salida del filtro la SNR es

$$\mathrm{SNR_{OUT}} = \frac{\mathbb{E}[R^2(t)]}{\mathbb{E}[V^2(t)]} = \frac{R_R(0)}{R_V(0)} = \frac{\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} S_R(\omega)d\omega}{\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} S_V(\omega)d\omega} = \frac{1/2}{\sigma^2 W/\pi} <$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{SNR_{OUT}}}{\mathrm{SNR_{IN}}} = \frac{\pi}{W}.$$

$<$ SNR$_{IN}$

La atenuación de la SNR depende del ancho de banda del filtro.

Ejemplo: media móvil en tiempo continuo

$$Y(t) = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} X(s) ds \qquad X(t) \text{ ESA.}$$

- $Y(t)$ es la salida del sistema LTI:

$$h(t) = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \delta(s) ds = \frac{1}{T} \mathbb{1}\left\{|t| < \frac{T}{2}\right\}.$$

$$H(\omega) = \mathcal{F}\{h\}(\omega) = \frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\frac{\omega T}{2}} = \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right).$$

Ejemplo: media móvil en tiempo continuo (cont)

- Luego,

$$\mu_Y = H(0)\mu_X = \mu_X$$

$$S_Y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_X(\omega) = \left[\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)\right]^2 S_X(\omega)$$

$$S_{X,Y}(\omega) = H(\omega) S_X(\omega) = \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right) S_X(\omega).$$

Sistemas descriptos por ecuaciones en diferencias

- En tiempo discreto una familia importante de sistemas LTI son los sistemas descriptos por ecuaciones en diferencias.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k Y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k X(n-k).$$

- Supondremos nuevamente que el sistema es causal, estable y con condiciones iniciales de reposo.

- La respuesta en frecuencia de estos sistemas es

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k}}.$$

Procesos MA → moving average

$$Y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k X(n-k).$$

- El sistema asociado es FIR

$$h(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k \delta(n-k).$$

$$H(\omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k}.$$

- El proceso $Y(n)$ es un proceso MA (*moving average* o promedio móvil).

Caracterización de procesos MA

- Si X es ruido blanco de media nula y varianza σ^2,

$$S_Y(\omega) = \sigma^2 \left| \sum_{m=0}^{M} b_m e^{-j\omega m} \right|^2 = \sigma^2 \sum_{m=0}^{M} \sum_{n=0}^{M} b_m b_n e^{-j\omega(m-n)}$$

$$= \sigma^2 \sum_{m=0}^{M} c_m \cos(\omega m),$$

donde $$c_m = \begin{cases} \sum_{n=0}^{M} b_n^2 & \text{si } m = 0, \\ 2\sum_{n=0}^{M-m} b_n b_{n+m} & \text{si } m \neq 0. \end{cases}$$

- Antitransformando, obtenemos

community manager

Esto se ve q' es importante

$$R_Y(k) = \sigma^2 \sum_{m=0}^{M} \frac{c_m}{2} [\delta(k-m) + \delta(k+m)].$$

$R_Y(k)$ tiene soporte finito, es decir, $R_Y(k) = 0$ para todo $|k| > M$.

Ejemplo: proceso MA-1

- Supongamos que X es ruido blanco de varianza unitaria y consideremos el proceso MA-1 (MA de primer orden):

$$Y(n) = X(n) + \alpha X(n-1).$$

- En este caso,

$$S_Y(\omega) = |1 + \alpha e^{-j\omega}|^2 = 1 + \alpha^2 + 2\alpha\cos(\omega).$$

$$R_Y(k) = (1 + \alpha^2)\delta(k) + \alpha\delta(k-1) + \alpha\delta(k+1).$$

- Verifiquemos esto por cálculo directo:

$$\begin{aligned} R_Y(k) &= \mathbb{E}[Y(n)Y(n+k)] \\ &= \mathbb{E}[X(n)X(n+k)] + \alpha\mathbb{E}[X(n)X(n+k-1)] \\ &+ \alpha\mathbb{E}[X(n+k)X(n-1)] + \alpha^2\mathbb{E}[X(n-1)X(n+k-1)] \\ &= \delta(k) + \alpha\delta(k-1) + \alpha\delta(k+1) + \alpha^2\delta(k). \end{aligned}$$

Ejemplo: proceso MA-2

- Supongamos que X es ruido blanco de varianza unitaria y consideremos el proceso MA-2 (MA de segundo orden):

$$Y(n) = X(n) + \alpha X(n-1) + \beta X(n-2).$$

- En este caso,

$$\begin{aligned} S_Y(\omega) &= |1 + \alpha e^{-j\omega} + \beta e^{-j2\omega}|^2 \\ &= (1 + \alpha^2 + \beta^2) + 2\alpha(1+\beta)\cos(\omega) + 2\beta\cos(2\omega). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_Y(k) = (1 + \alpha^2 + \beta^2)\delta(k) + \alpha(1+\beta)[\delta(k-1) + \delta(k+1)] \\ + \beta[\delta(k-2) + \delta(k+2)]. \end{aligned}$$

Ejemplo: filtro promediador

- X es ruido blanco de media nula y varianza unitaria y consideramos el proceso

$$Y(n) = \frac{1}{M+1} \sum_{k=0}^{M} X(n-k).$$

- En este caso,

$$S_Y(\omega) = \sum_{m=0}^{M} c_m \cos(\omega m) = \frac{1}{M+1} + 2 \sum_{m=1}^{M} \frac{M-m+1}{(M+1)^2} \cos(\omega m).$$

$$R_Y(k) = \frac{1}{M+1}\delta(k) + \sum_{m=1}^{M} \frac{M-m+1}{(M+1)^2}[\delta(k-m) + \delta(k+m)].$$

Procesos AR-n

$$\sum_{i=0}^{n} a_i Y(k-i) = X(k).$$

- El sistema asociado es IIR con respuesta en frecuencia

$$H(\omega) = \frac{1}{\sum_{i=0}^{N} a_i e^{-j\omega i}}.$$

- Los polos son las raices del polinomio

$$D(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^{n-i}.$$

- Decimos que es un proceso AR-n (*autoregressive* o autorregresivo de orden n).

Caracterización de procesos AR-n

Si X es ruido blanco de media nula y varianza σ^2,

$$\mathbb{E}[Y] = 0$$

$$\begin{aligned} S_Y(\omega) &= \frac{\sigma^2}{\left|\sum_{m=0}^{n} a_m e^{-j\omega m}\right|^2} = \frac{\sigma^2}{\sum_{m=0}^{n}\sum_{p=0}^{n} a_m a_p e^{-j\omega(m-p)}} \\ &= \frac{\sigma^2}{\sum_{p=0}^{n} d_p \cos(\omega p)}, \end{aligned}$$

donde $$d_p = \begin{cases} \sum_{m=0}^{n} a_m^2 & \text{si } p = 0, \\ 2\sum_{m=0}^{n-p} a_m a_{m+p} & \text{si } p \neq 0. \end{cases}$$

Caracterización de procesos AR-1

- Proceso AR-1:

$$a_0 Y(n) + a_1 Y(n-1) = X(n)$$

El polo del sistema está en $z = -a_1/a_0$. En forma equivalente, con $\alpha = -a_1/a_0$,

$$Y(n) = \alpha Y(n-1) + X(n), \qquad |\alpha| < 1.$$

- $$S_Y(\omega) = \frac{\sigma^2}{|1 - \alpha e^{-j\omega}|^2} = \frac{\sigma^2}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(\omega)}.$$

- Vimos que

$$R_Y(k) = \frac{\alpha^{|k|}}{1 - \alpha^2}$$

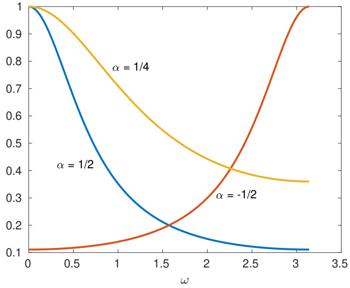
Caracterización de procesos AR-1 (cont.)

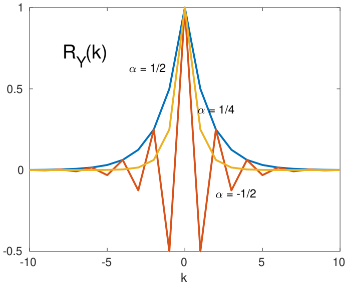
- Si $\alpha > 0$, Y es un proceso de bajas frecuencias.

$$S_Y(0) = \frac{\sigma^2}{(1-\alpha)^2} > \frac{\sigma^2}{(1+\alpha)^2} = S_Y(\pi).$$

- Si $\alpha < 0$, Y es un proceso de altas frecuencias.

$$S_Y(0) = \frac{\sigma^2}{(1-\alpha)^2} < \frac{\sigma^2}{(1+\alpha)^2} = S_Y(\pi).$$





Caracterización de procesos AR-2

- Consideremos un proceso AR-2 general:

$$a_0 Y(n) = -a_1 Y(n-1) - a_2 Y(n-2) + b_0 X(n), \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

- Tomamos $b_0 = 1$. Luego, tomando $\alpha = -a_1/a_0$ y $\beta = -a_2/a_0$,

$$Y(n) = \alpha Y(n-1) + \beta Y(n-2) + X(n), \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

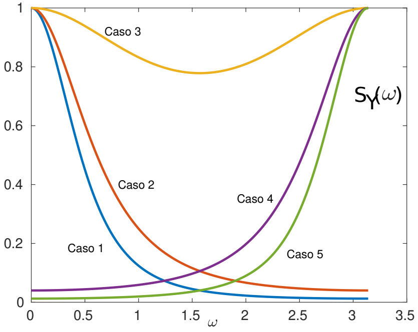
  Los polos z_i son las raíces de $D(z) = z^2 - \alpha z - \beta$. En cualquier caso, α y β deben ser tales que $|z_i| < 1$.

- Utilizando Wiener-Kintchin, tenemos

$$\begin{aligned} S_Y(\omega) &= \frac{\sigma^2}{|1 - \alpha e^{-j\omega} - \beta e^{-j2\omega}|^2} \\ &= \frac{\sigma^2}{(1 + \alpha^2 + \beta^2) + 2\alpha(\beta - 1)\cos(\omega) - 2\beta\cos(2\omega)}. \end{aligned}$$

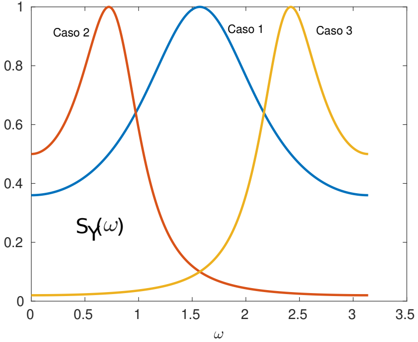
Ejemplo: proceso AR-2 con polos reales

$$\begin{cases} 1: \; 4Y(n) = 4Y(n-1) - Y(n-2) + X(n) & z_1 = z_2 = \frac{1}{2} \\ 2: \; 8Y(n) = 6Y(n-1) - Y(n-2) + 3X(n) & z_1 = \frac{1}{4} \;,\; z_2 = \frac{1}{2} \\ 3: \; 16Y(n) = Y(n-2) + 15X(n) & z_1 = \frac{1}{4} \;,\; z_2 = \frac{-1}{4} \\ 4: \; 8Y(n) = -3Y(n-1) - Y(n-2) + 3X(n) & z_1 = \frac{-1}{4} \;,\; z_2 = \frac{-1}{2} \\ 5: \; 44Y(n) = -Y(n-1) - Y(n-2) + X(n) & z_1 = z_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$



Ejemplo: proceso AR-2 con polos complejos conjugados

$$
\begin{cases}
1: \; 4Y(n) = -Y(n-2) + 4X(n) & z_1 = \jmath\frac{1}{2} \quad , \quad z_2 = -\jmath\frac{1}{2} \\
2: \; 2Y(n) = 2Y(n-1) - Y(n-2) + 2X(n) & z_1 = \frac{1}{2}(1+\jmath) \quad , \quad z_2 = \frac{1}{2}(1-\jmath) \\
3: \; 2Y(n) = -2Y(n-1) - Y(n-2) + 2X(n) & z_1 = \frac{-1}{2}(1+\jmath) \quad , \quad z_2 = \frac{-1}{2}(1-\jmath)
\end{cases}
$$



Procesos ARMA

- El caso más general es un proceso ARMA, que se pueden pensar como una cascada de un filtro AR y un filtro MA:

$$H(\omega) = \frac{1}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k}} \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k} = H_{\mathrm{AR}}(\omega) H_{\mathrm{MA}}(\omega).$$

- Si la entrada es blanca,

$$S_Y(\omega) = \sigma^2 \left| \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k}} \right|^2 = \sigma^2 \frac{\sum_{n=0}^{M} c_n \cos(\omega n)}{\sum_{n=0}^{N} d_n \cos(\omega n)},$$

donde los coeficientes c_n y d_n se obtienen como antes.

- El cálculo de la ACF suele más complejo pero es posible plantear una descomposición en fracciones simples a partir de la PSD y luego antitransformar como planteamos para los procesos AR.

Ejemplo: sistema ARMA-(2,2)

$$Y(n) - \frac{1}{4}Y(n-2) = X(n) - X(n-1) - 2X(n-2),$$

$H(\omega) = \frac{1-e^{-j\omega}-2e^{-j2\omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j2\omega}}$. Polos y ceros: $p_1 = \frac{1}{2}, p_2 = -\frac{1}{2}$ y $z_1 = -1, z_2 = 2$.

$$S_Y(\omega) = |H(\omega)|^2 = \left|\frac{1-e^{-j\omega}-2e^{-j2\omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j2\omega}}\right|^2 = 8\frac{\cos(\omega)+1}{\cos(\omega)+\frac{5}{4}}$$