Procesos en tiempo continuo

Ejercicio 1 - Lazo de enganche de fase (PLL)

Un PLL es un dispositivo utilizado en los receptores de comunicaciones para estimar la fase de la “portadora”$\sin(w_c t + \Theta_i(t))$, donde w_c es su frecuencia angular y $\Theta_i(t)$ es su fase en medidas en el receptor. En la Fig. 1 se muestra un modelo lineal del PLL, donde K_d y K_0 son constantes y $F(s)$ es la transferencia del *filtro de lazo*. En este problema consideraremos $F(s) = \alpha$. Por último, $N(t)$ es un proceso estocástico blanco Gaussiano con densidad espectral de potencia (PSD) $N_0/2$.

De este modo, el PLL resulta un sistema con dos entradas, $N(t)$ y Θ_i y una salida, Θ_o.

1. Obtenga las dos transferencias a lazo cerrado del PLL $H(s) = \frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)}$ y $G(s) = \frac{\theta_o(s)}{n(s)}$.
2. Obtenga la PSD y varianza de la componente de ruido a la salida del PLL cuando sólo se considera el ruido a la entrada.
3. Calcule $R_o(k)$, la función de autocorrelación del ruido a la salida del PLL cuando se considera sólo el ruido. Verifique el cálculo de la varianza del punto anterior evaluando $R_o(0)$.—

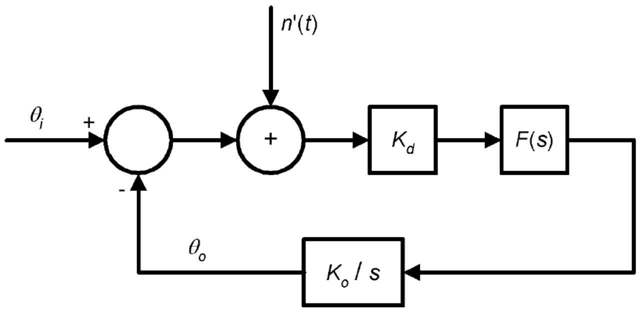

Figura 1: Modelo lineal de un PLL.

Ejercicio 2 - Ruido en un Amplificador operacional

Un amplificador operacional (OPAMP) presenta fundamentalmente dos fuentes de ruido: ruido térmico (ó ruido Johnson-Nyquist) y ruido *flicker* (ó ruido $1/f$). Ambos son modelados a través de la fuente de tensión $e_n(t)$ en la Fig. 2, cuyo valor cuadrático medio es $\bar{e_n^2} = \bar{e_w^2}(f_h - f_l + f_{nc} \log \frac{f_h}{f_l})$, donde $\bar{e_w^2}$ es el valor cuadrático medio del ruido blanco, f_h y f_l especifican el ancho de banda de funcionamiento del circuito y f_{nc} es la frecuencia de corte del ruido $1/f$. $\bar{e_w^2}$ y f_{nc} son datos del fabricante.

Por otro lado, un resistor de resistencia R presenta ruido térmico que puede ser modelado por ruido blanco Gaussiano con densidad espectral de potencia unilateral $N_0 = 4kTR$ $[V^2/Hz]$, donde k e sla constante de Boltzmann y T es la temperatura en el circuito . Todas las fuentes de ruido pueden ser consideradas independientes.

1. Determine la ganancia del circuito inversor A.
2. Usando el principio de superposición, determine la varianza de ruido a la salida del OPAMP en términos de A. ¿Cómo influyen los resistores, el ancho de banda, la ganancia del circuito y la frecuencia de corte de ruido del OPAMP en dicha varianza?

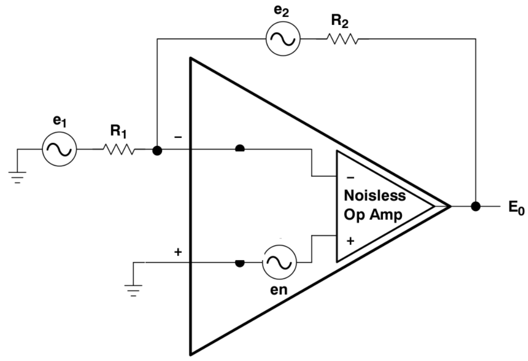

Figura 2: Fuentes de ruido en el OPAMP y los resistores.

Ejercicio 3 - Modelo de Clark para Canales Inalámbricos

Un transmisor de comunicaciones (Tx) se mueve hacia el receptor (Rx) a una velocidad v. En ciertas condiciones, el canal inalámbrico se puede modelar como una variable aleatoria compleja circular con distribución Gaussiana $h[n]$. En el caso de la Fig. 3, los reflectores ubicados alrededor del Rx reflejan la señal, con lo cual se asume que la señal llega al Rx desde todos los ángulos. Sea $\tau_\theta[n]$ el retardo asociado a la señal que proviene del ángulo θ correspondiente al instante de tiempo n y a_θ su correspondiente ganancia, $h[n]$ puede ser expresada de la siguiente manera:

$$h[n] = \int_0^{2\pi} a_\theta e^{-\jmath w_c \tau_\theta[n]} d\theta,$$

donde w_c es la frecuencia angular de la portadora, y $\tau_\theta[n] = \tau_\theta[0] - \frac{v\cos\theta}{cW}n$, con c la velocidad de la luz y W el ancho de banda de la señal. Todos los parámetros son determinísticos salvo a_θ y $\tau_\theta[0]$. a_θ tiene varianza A^2 y $w_c\tau_\theta[0](\text{mod}2\pi) \sim U(0, 2\pi)$. Además, los distintos retardos son independientes si corresponden a distintos ángulos de arribo.

1. Demuestre que $h[n]$ es estacionario y que su función de autocorrelación es $R(k) = A^2\pi J_0(\frac{\pi D_s}{W}k)$, donde $J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{\jmath x\cos\theta}d\theta$ es la función de Bessel de primera clase de orden 0 y $D_s = \frac{w_c v}{c}$.
2. Demuestre que la PSD es $S(f) = \frac{2A^2}{D_s\sqrt{1-(2f/D_s)^2}}\mathbb{1}(|f| < D_s/2)$.

   Ayuda: Puede partir de $S(f)$ usando la fórmula de la transformada de Fourier.

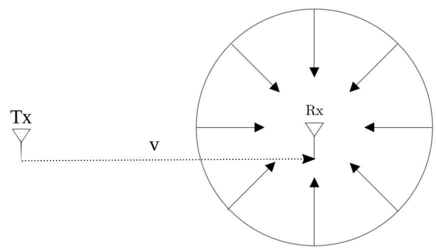

Figura 3: Modelo de canal de Clark.