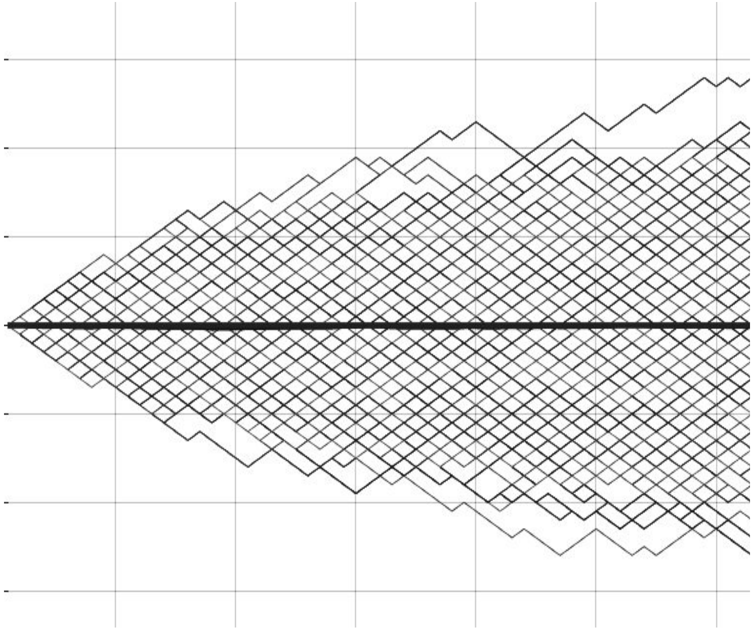
Procesos estocásticos (86.09)

- Procesos estocásticos
- Estacionariedad
- Ejemplos

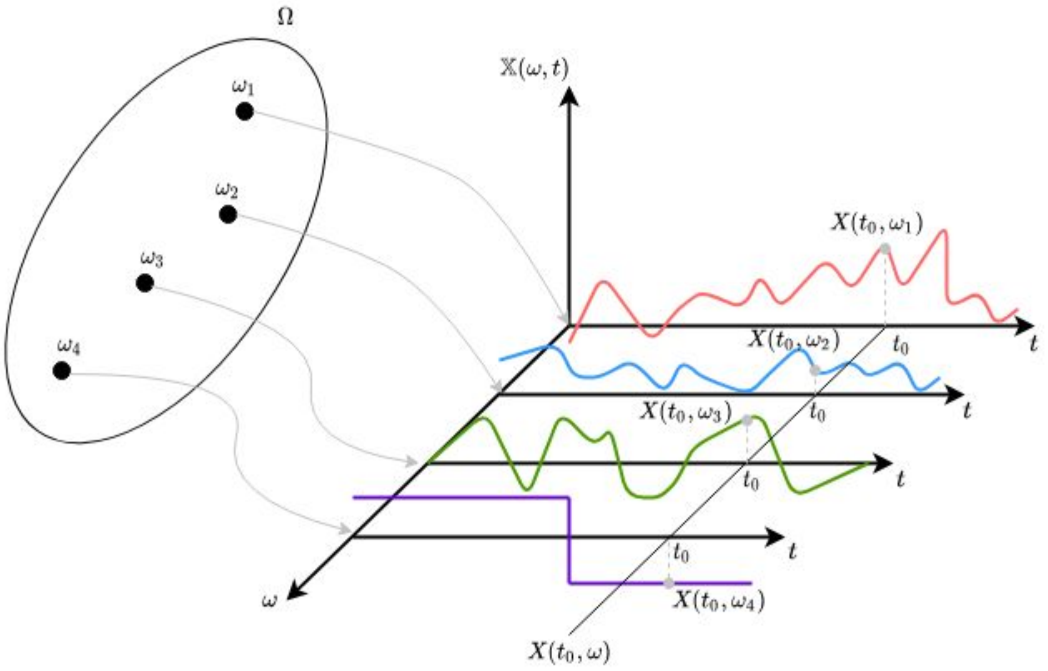


Repaso de procesos estocásticos

Proceso Estocástico (PE)

X(t): un PE es un conjunto de VAs indexadas con instantes de tiempo t.

- Todas las realizaciones son **funciones del tiempo** (señales)
- Si fijamos una realización cualquiera ω_i, tenemos una **función del tiempo** X(ω_i , t)
- Si fijamos un instante t_0 cualquiera, tenemos una **VA**.
- Si fijamos un instante t_0 y realización ω_i cualesquiera, tenemos una **realización de una VA**



Momentos de un proceso aleatorio

Momentos

$$\mu_X(t) = \mathbb{E}[X(t)]$$

Esperanza

$$R_X(t_1, t_2) = \mathbb{E}[X(t_1)X(t_2)]$$

Autocorrelación

$$C_X(t_1, t_2) = \mathbb{E}\left[(X(t_1) - \mu_X(t_1))\,(X(t_2) - \mu_X(t_2))\right]$$

Autocovarianza

Estacionariedad

Estacionariedad de un Proceso Estocástico

Un PE $X(t)$, es ***Estacionario en Sentido Amplio*** (ESA) si:

Es estacionario de primer y segundo orden. Esto implica:

- Media y varianza constantes para todo t.
- Funciones de autocovarianza dependen solo de la diferencia de tiempos.

$$\mu_X(t) = \mu_X$$

$$\sigma_X^2(t) = \sigma_X^2$$

Constantes

$$C_X(t_1, t_2) = C_X(t_2 - t_1)$$

$$R_X(t_1, t_2) = R_X(t_2 - t_1)$$

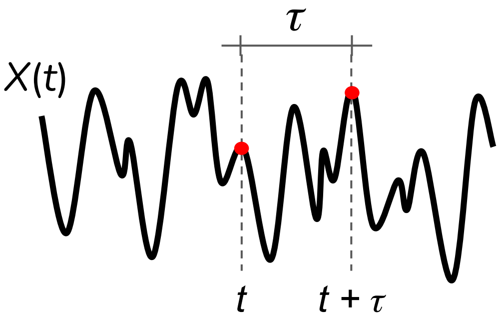
Dependen solo de la diferencia de tiempos

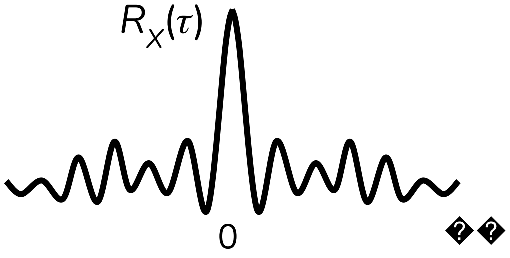
Función de autocorrelación – ESA

Función de autocorrelación de un proceso ESA

$R_X(\tau) = \mathbb{E}[\,X(t)X(t+\tau)\,]$ Tiempo continuo ($t_1 = t$; $t_2 = t+\tau$)

$R_X(k) = \mathbb{E}[\,X(n)X(n+k)$
$]$ Tiempo discreto ($n_1 = n$; $n_2 = n+k$)



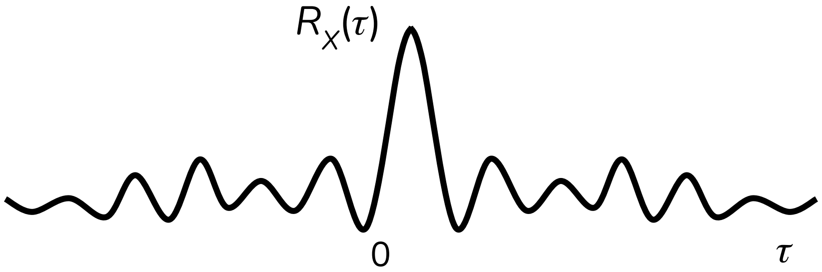


Función de autocorrelación – Propiedades

Sea X(t) un proceso ESA real con media μ_X, función de autocorrelación $R_X(\tau)$ y función de autocovarianza $C_X(\tau)$.

Propiedades:

- $R_X(\tau) = C_X(\tau) + \mu_X^2$
- $R_X(0) \geq 0$
- $R_X(\tau) = R_X(-\tau)$
- $|R_X(\tau)| \leq R_X(0)$
- *Si es periódica en T:* $R_X(0) = R_X(kT)$



¿Cómo generar realizaciones de un proceso aleatorio?

Simular realizaciones de un proceso aleatorio

Generando una matriz donde una de sus dimensiones define el proceso y la otra las realizaciones. Ejemplo (supongamos un proceso gaussiano):

MATLAB

```
x = randn(M, N); % M realizaciones de un Proceso de largo N
mu_n = mean(x); % Promedia filas
var_n = var(x); % Varianza de las filas
```

$$\hat{\mu}_X(n) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} X_i(n)$$

por LFGN

PYTHON

```
x = np.random.randn(M, N)
mu_n = np.mean(x, axis=0)   # Promedio filas
var_n = np.var(x, axis=0)   # Varianza de las filas
```

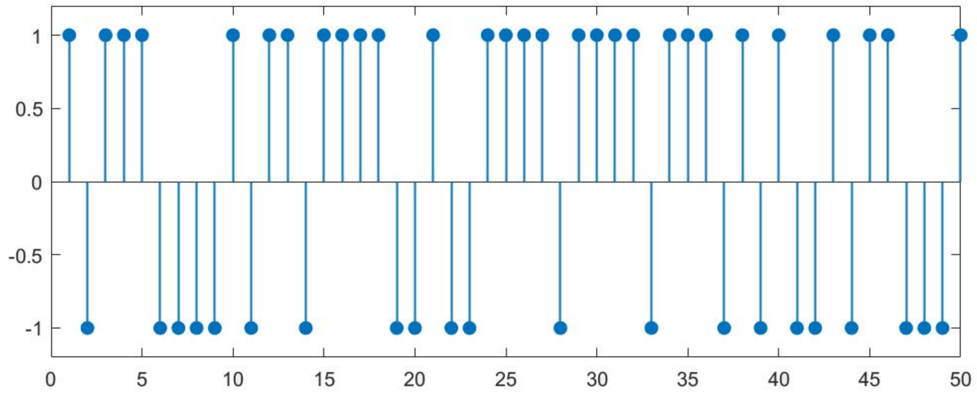
Actividad 1

Actividad 1

Repaso

Proceso **Random Step**: $X(\mathrm{n}) = 2\,Z(\mathrm{n}) - 1,$

donde $Z(\mathrm{n})$ es un proceso $\mathrm{Ber}(p)$



Media: $\mu_X(\mathrm{n}) = 2p - 1$

Varianza: $\sigma^2_X(\mathrm{n}) = 4p(1 - p)$

Actividad 1

1. Sea un proceso **random walk** Y(n) = Y(n-1) + X(n), donde X(n) es un proceso **random step** de parámetro *p*. Hallar analíticamente la media y varianza del proceso Y(*n*). ¿Resulta un proceso ESA? Ayuda: tenga en cuenta la siguiente relación:

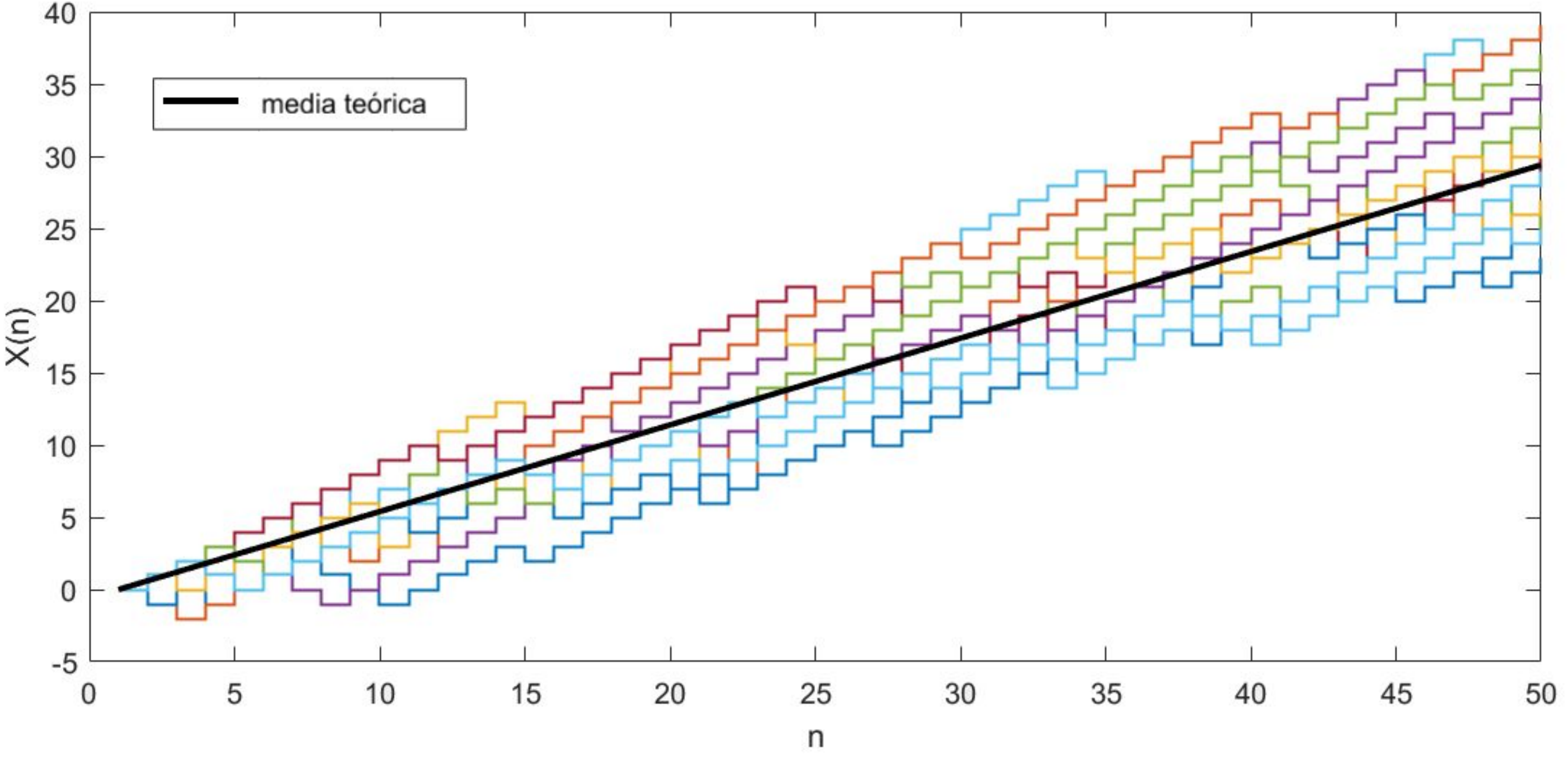
$$Y(n) = Y(n-1) + X(n) = \sum_{i=1}^{n} X(i)$$

2. Genere M=20 realizaciones de un proceso random walk *Y*(*n*), de largo *N*=50, con parámetro *p* (considere los casos p = {0.2, 0.5, 0.8}) y comparelas gráficamente con la media teórica.

3. Genere 200 realizaciones del proceso *Y*(*n*) para estimar la media y varianza en función del tiempo. Compare gráficamente las estimaciones con los resultados teóricos, tanto para la media como la varianza.

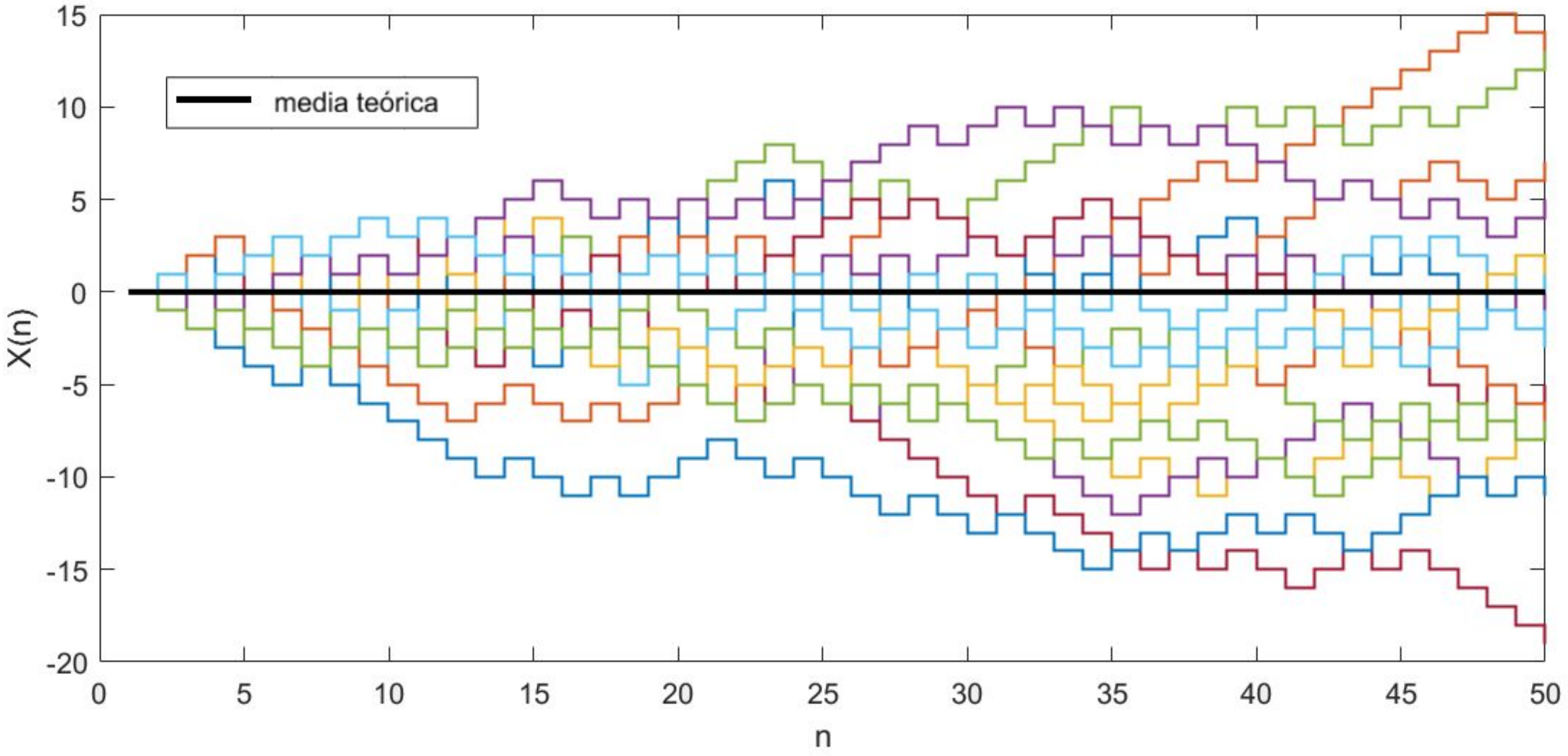
Actividad 1

p = 0.2



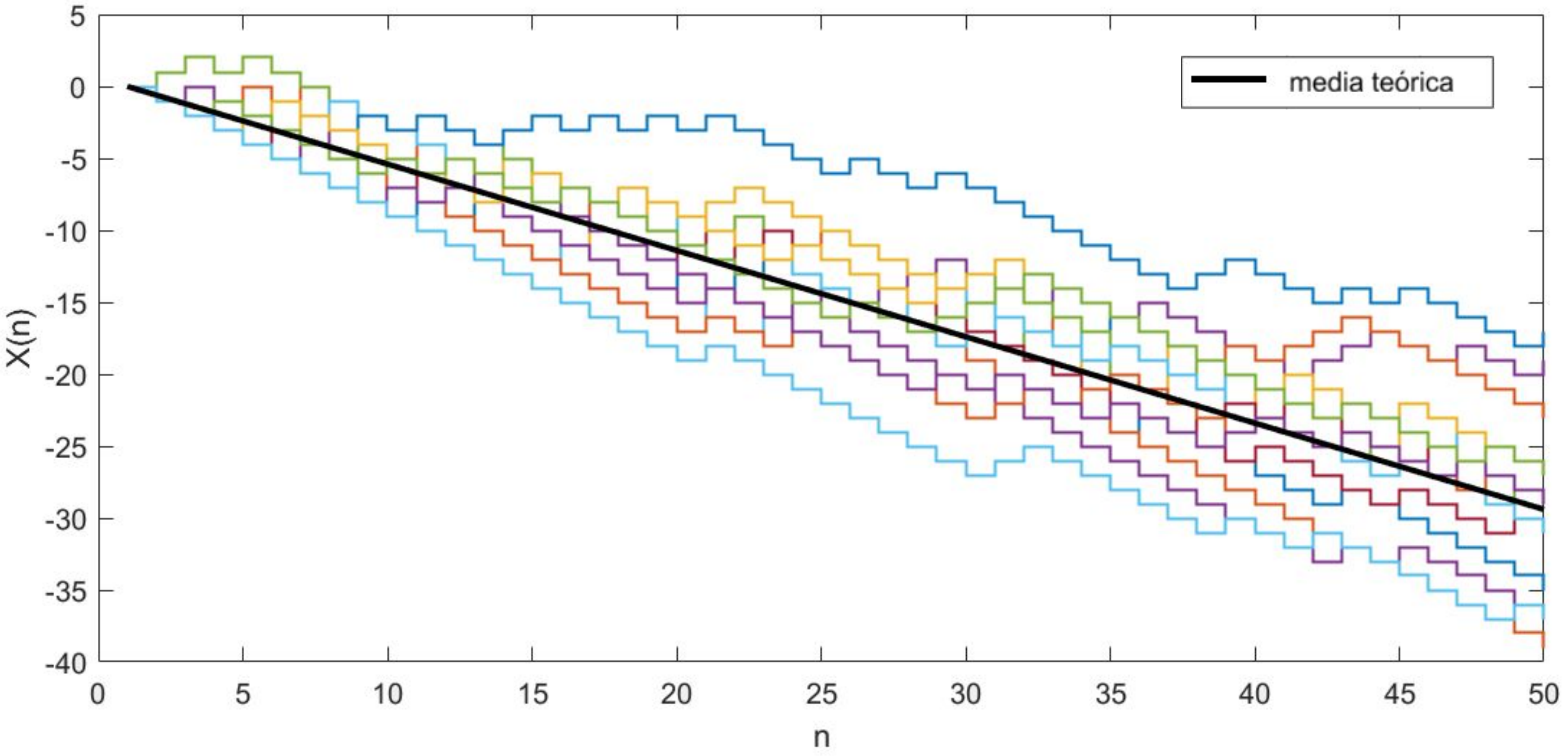
Actividad 1

p = 0.5



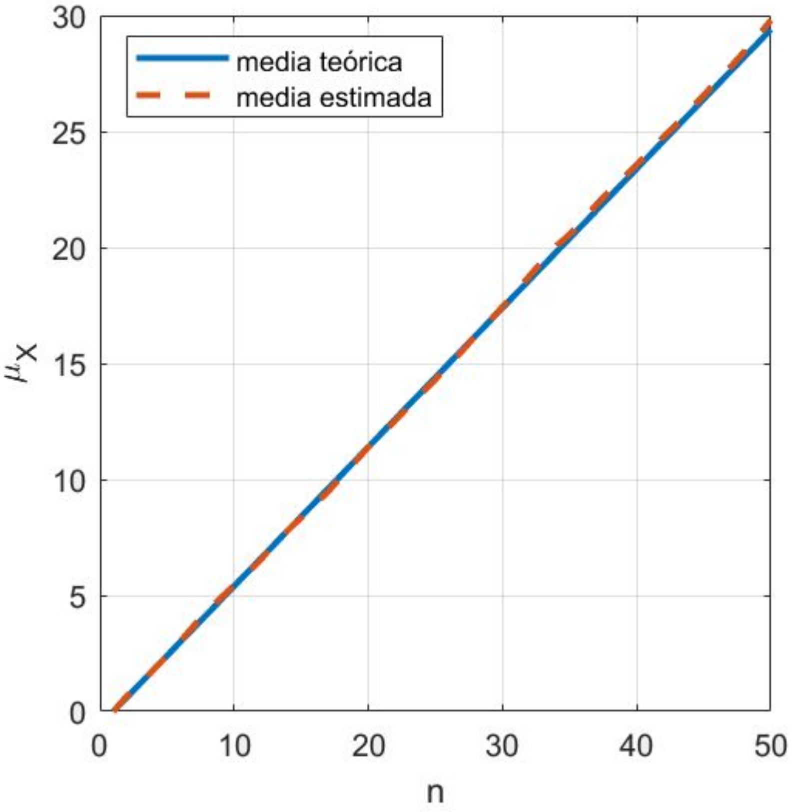
Actividad 1

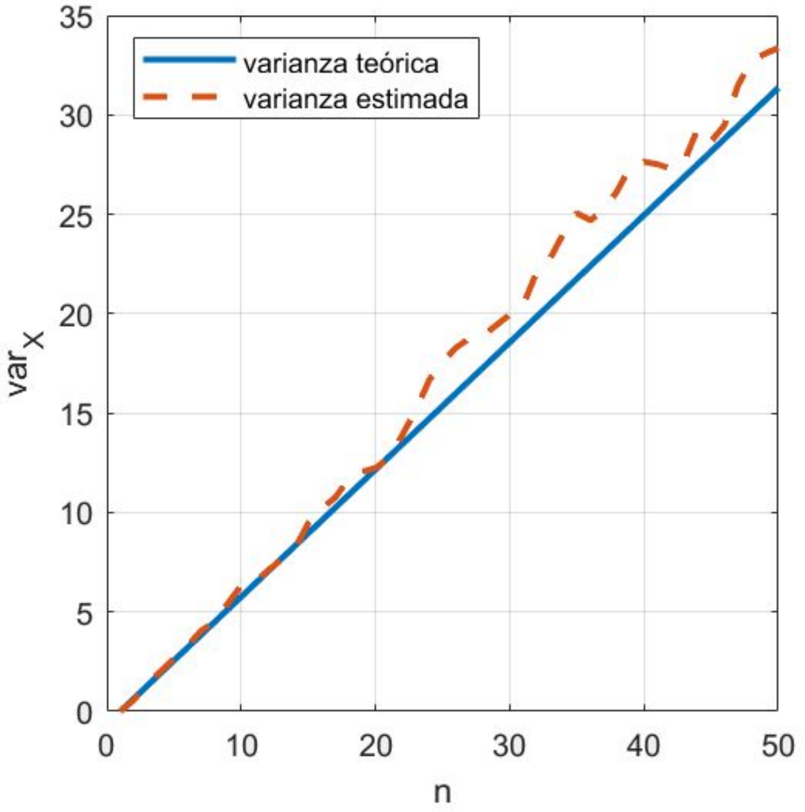
p = 0.8



Actividad 1

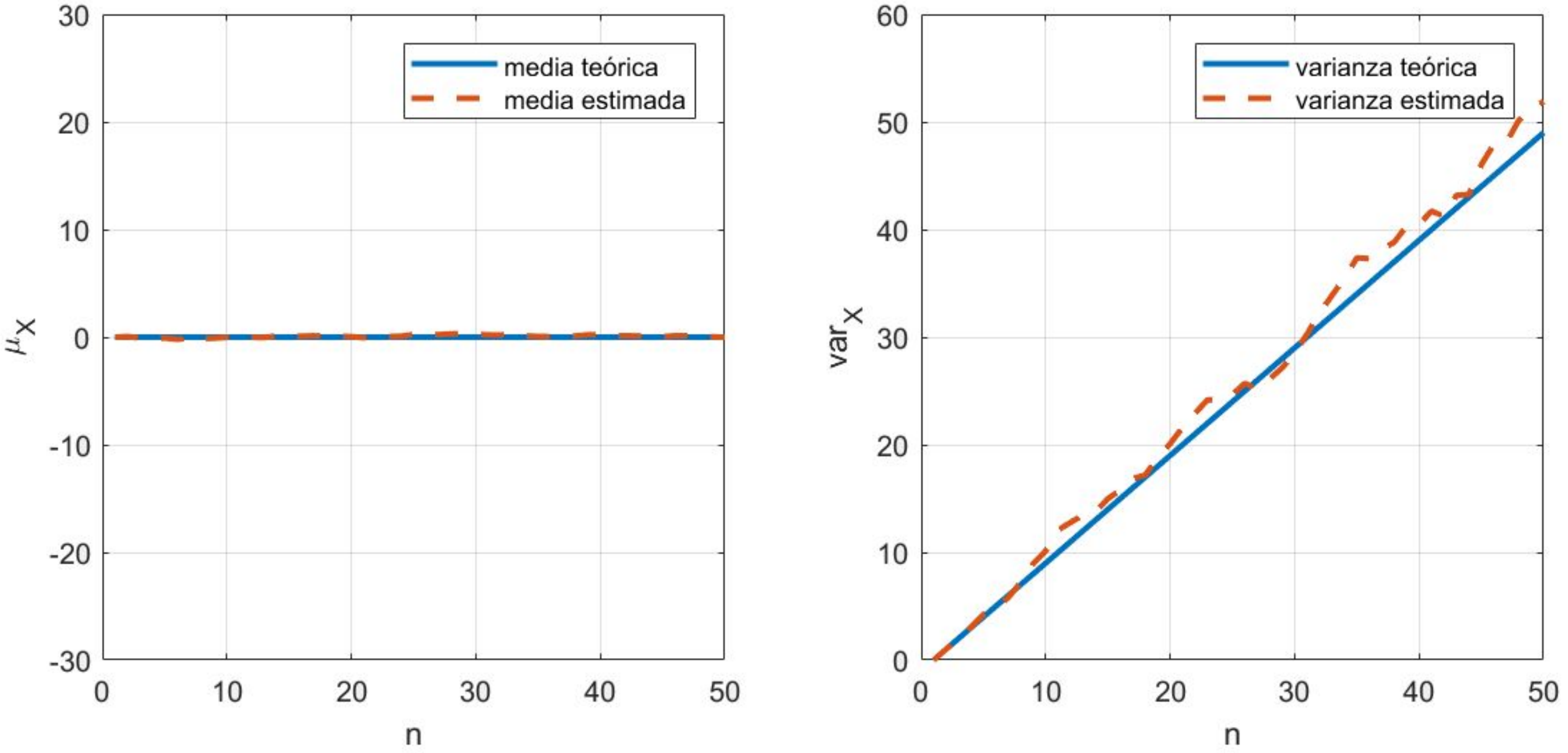
p = 0.2





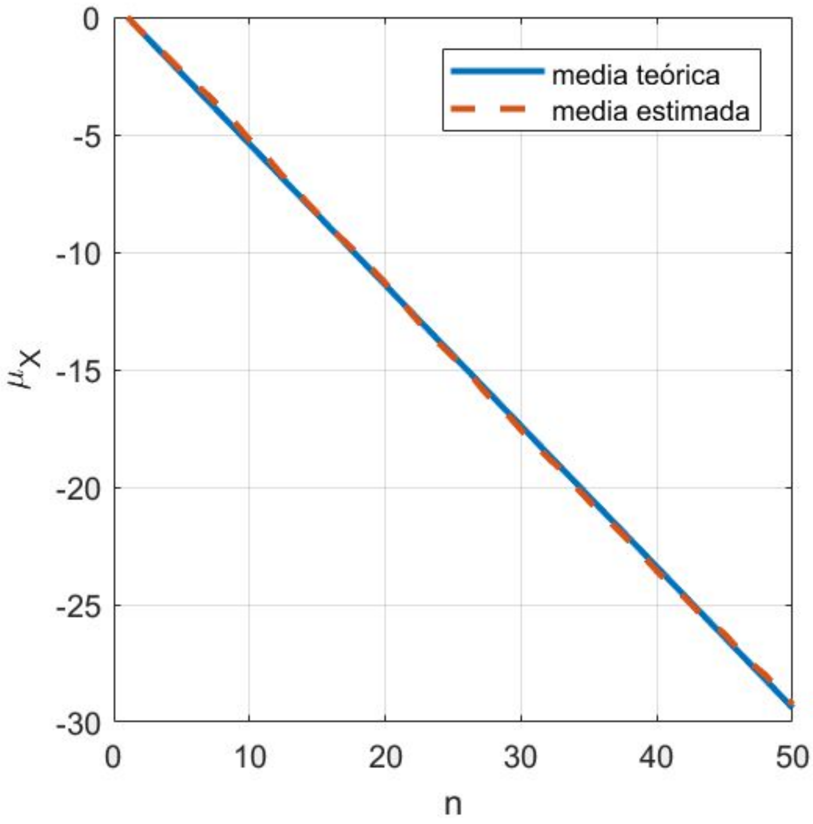
Actividad 1

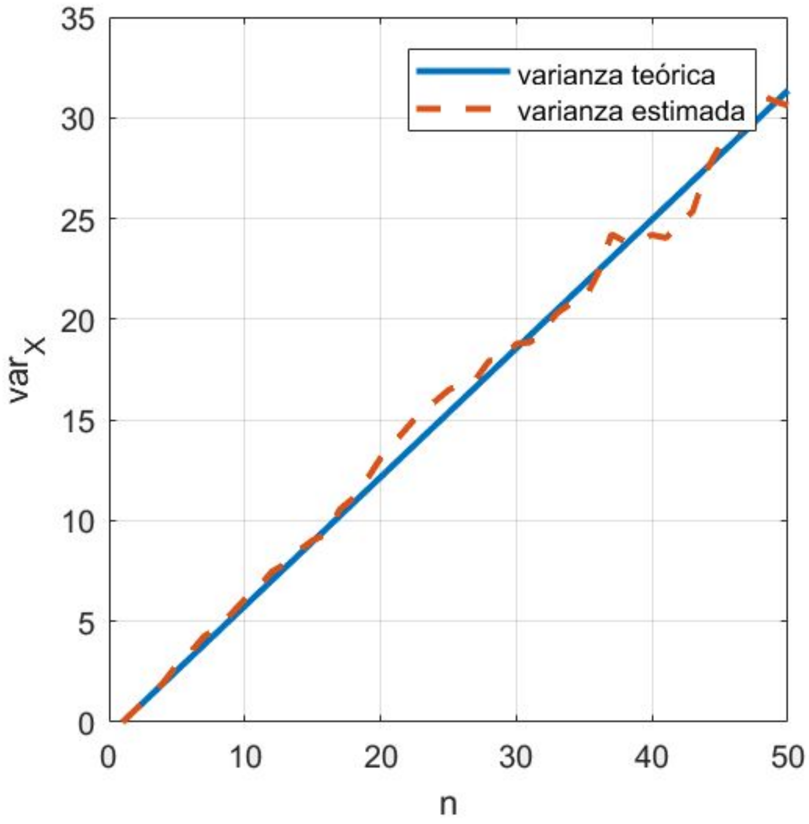
p = 0.5



Actividad 1

p = 0.8





Actividad 1

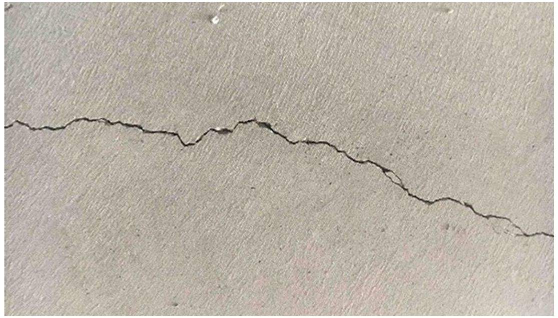
Algunas aplicaciones de Random Walk

Dinámica de movimiento animal

Mercados Financieros

Exploración en robótica

Propagación de grietas



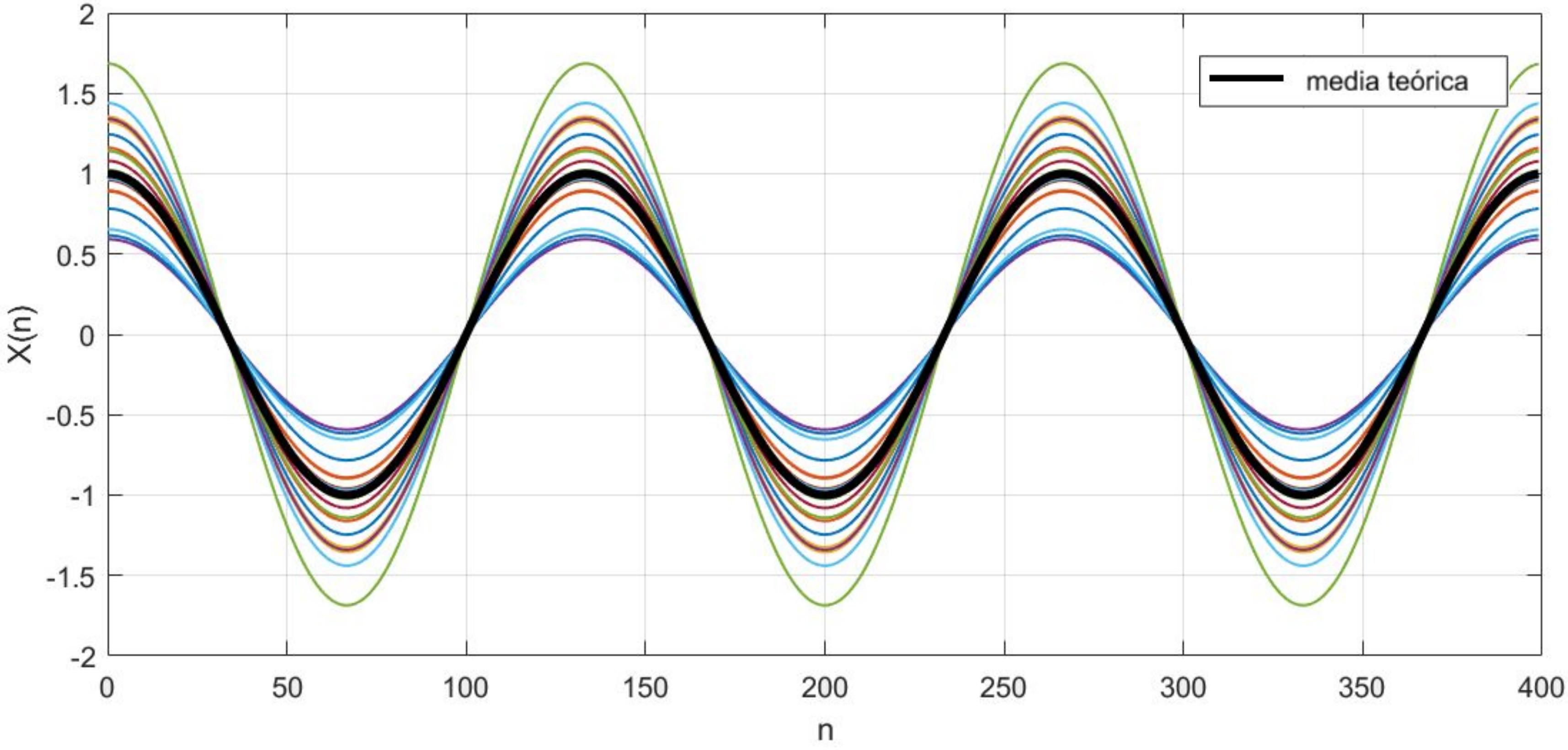
Actividad 2

Actividad 2

Sea una variable aleatoria $A \sim N(1;\ 0.16)$ y una frecuencia $\omega_0 = 0.015\pi$. Se define el siguiente proceso: $X(n) = A\cos(\omega_0 n)$, de largo N=400.

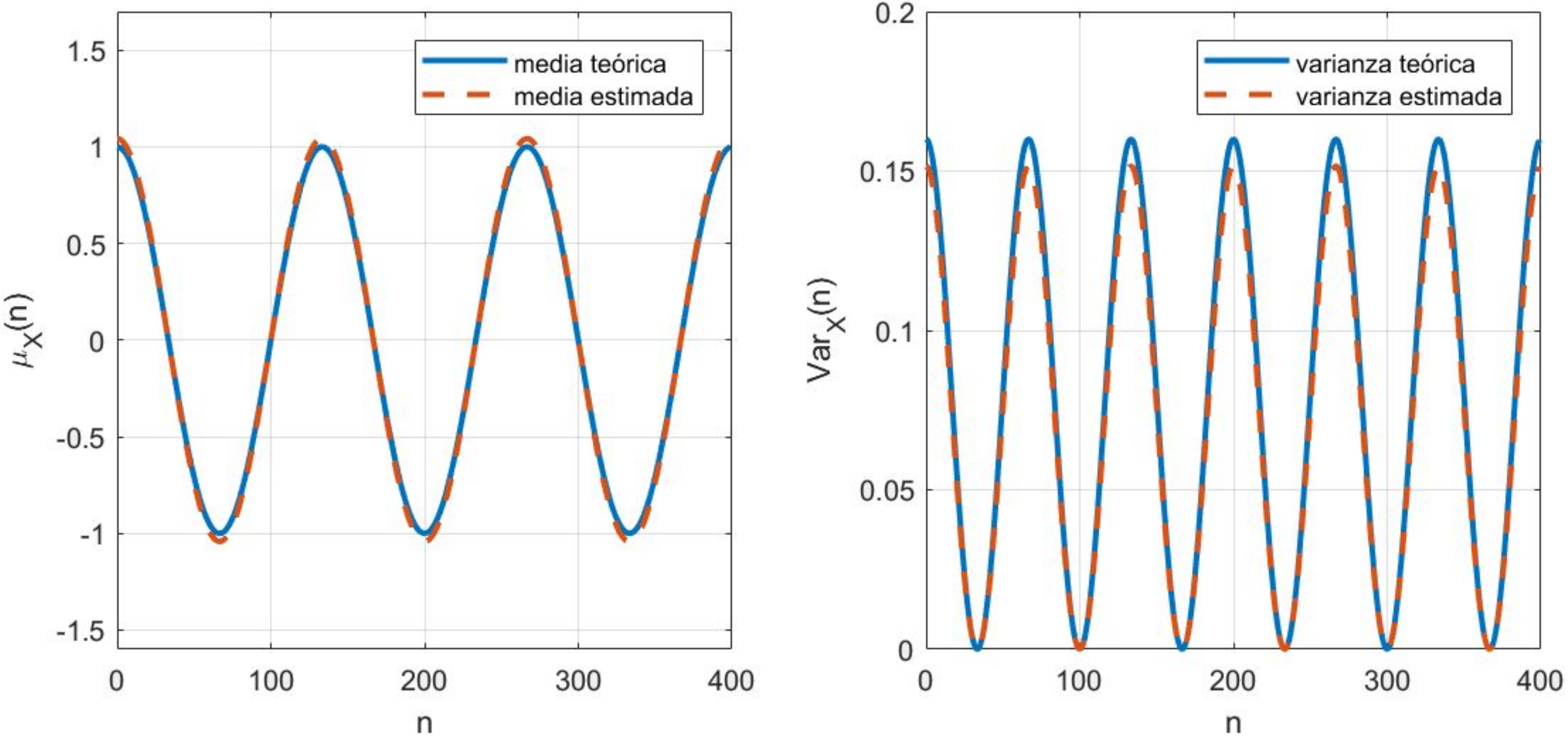
1. Hallar analíticamente la media y varianza del proceso X(n). ¿Resulta un proceso ESA?
2. Genere 20 realizaciones del proceso y comparelas gráficamente con la media teórica.
3. Genere 200 realizaciones y estime la media y varianza de X(n). Compare gráficamente las estimaciones con los resultados teóricos, tanto para la media como la varianza.

Actividad 2



media teórica
X(n)
n
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
0
50
100
150
200
250
300
350
400

Actividad 2


media teórica
media estimada
$\mu_X(n)$
n
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
100
200
300
400
varianza teórica
varianza estimada
$Var_X(n)$
n
0.2
0.15
0.1
0.05
0

Actividad 3

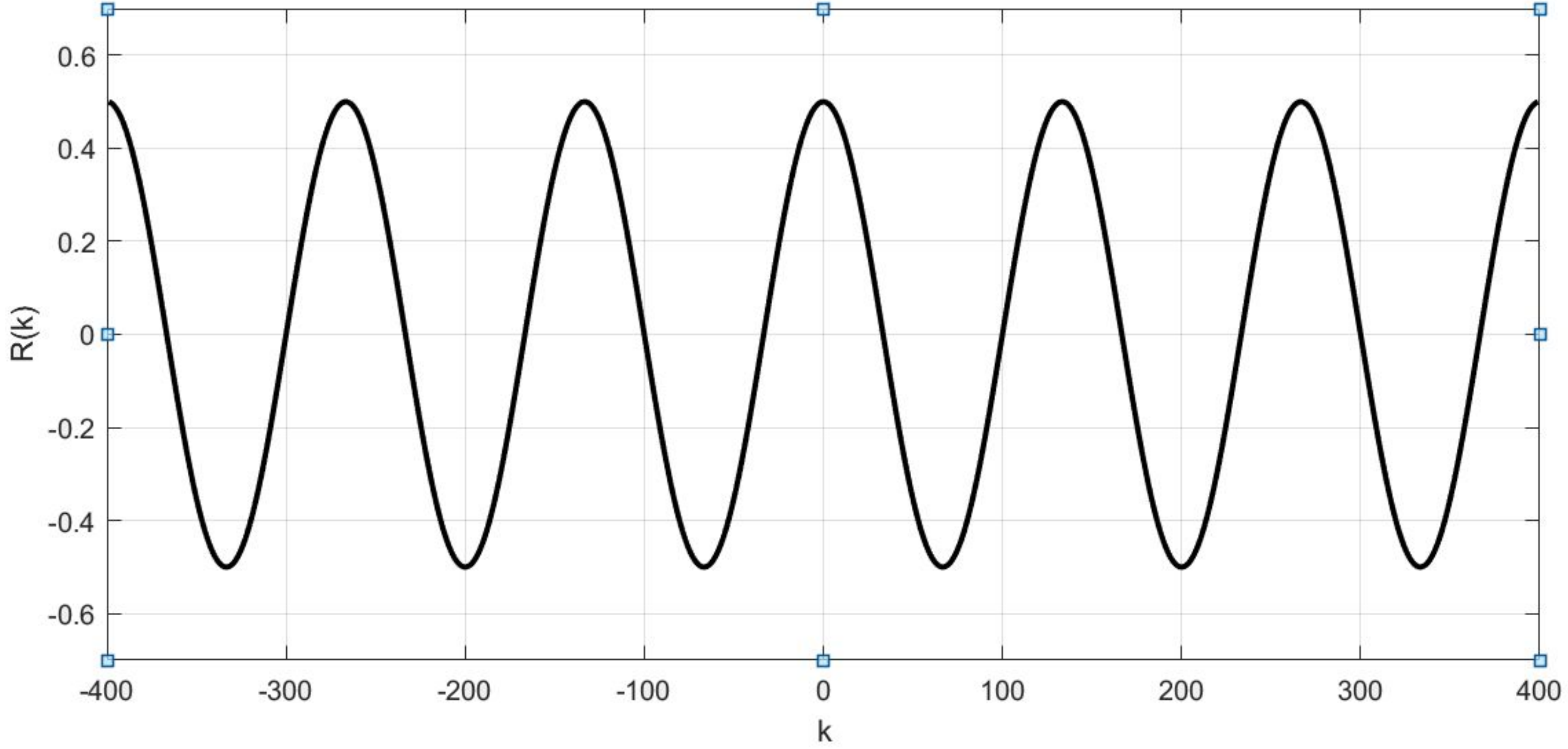
Actividad 3

Sea una variable aleatoria $\Theta \sim U(0; 2\pi)$ y una frecuencia $\omega_0 = 0.015\pi$. Se define el siguiente proceso: $X(n) = A\cos(\omega_0 n + \Theta)$, de largo N=400, donde A=1.

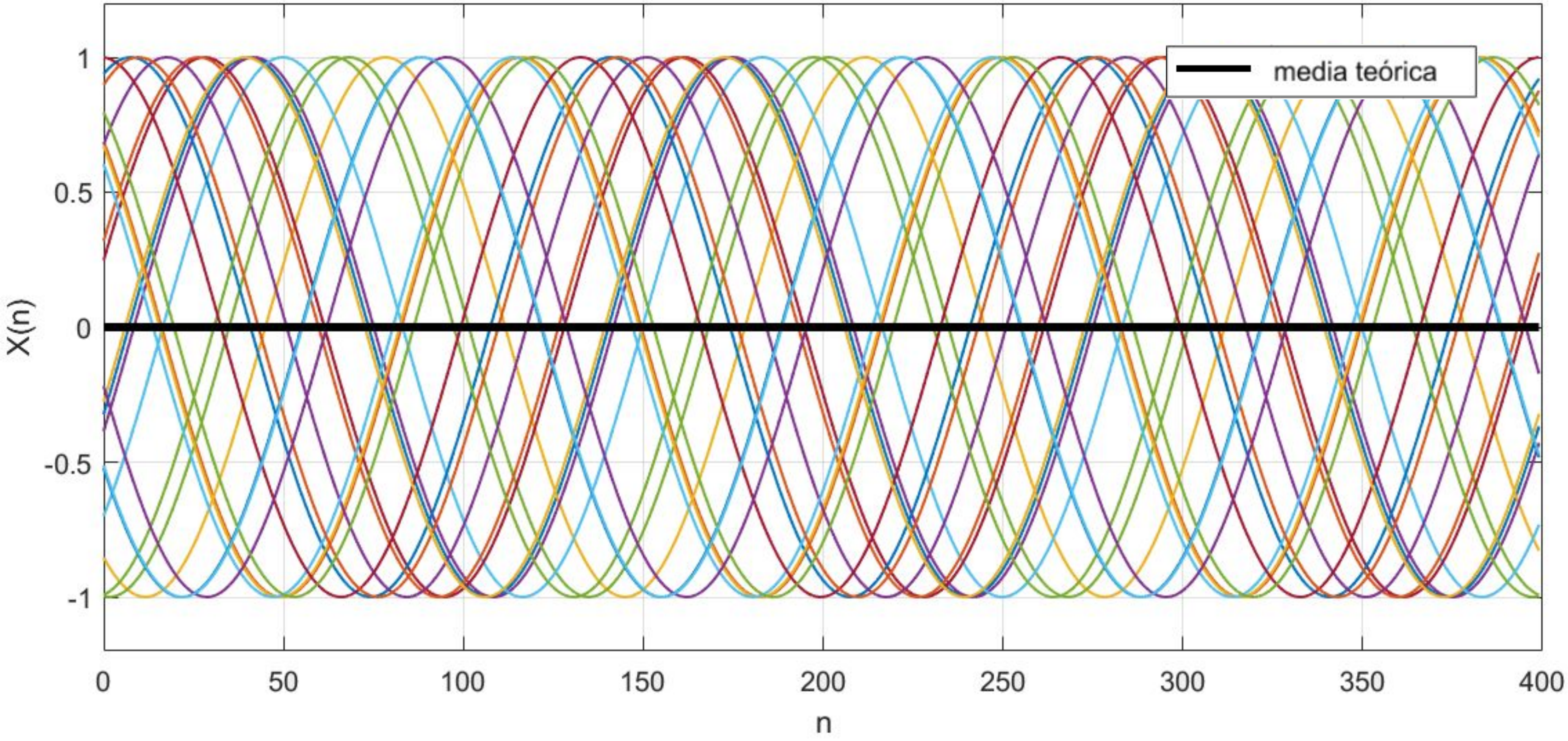
1. Hallar analíticamente la media, varianza y función de autocorrelación del proceso X(n). ¿Resulta un proceso ESA?
2. Genere 20 realizaciones del proceso y comparelas gráficamente con la media teórica.
3. Genere 2000 realizaciones y estime la media y varianza de X(n). Compare gráficamente las estimaciones con los resultados teóricos, tanto para la media como la varianza. .

   Sugerencia: para la media grafique el eje entre -1 y 1. Para la tensión entre 0 y 1.

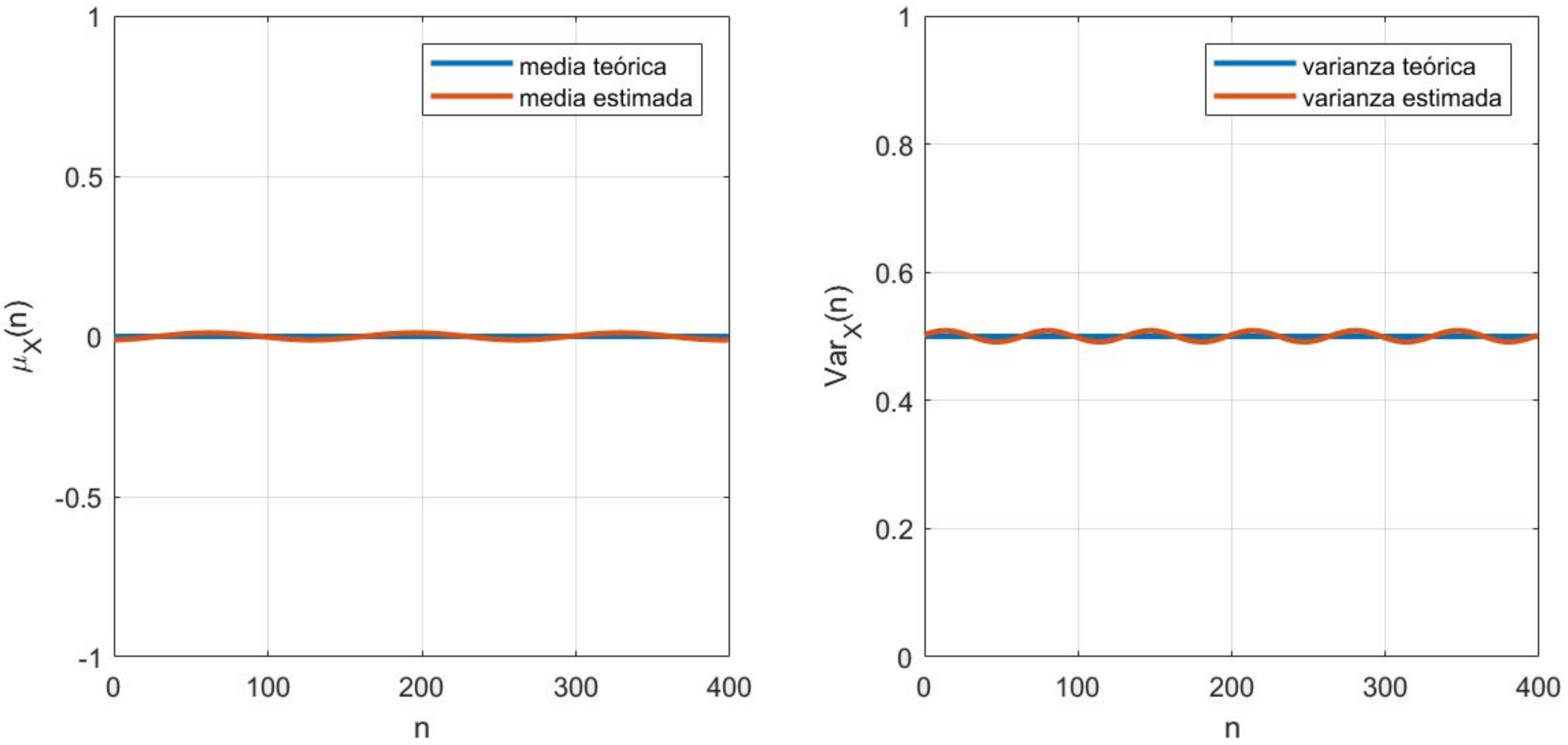
Actividad 3



Actividad 3

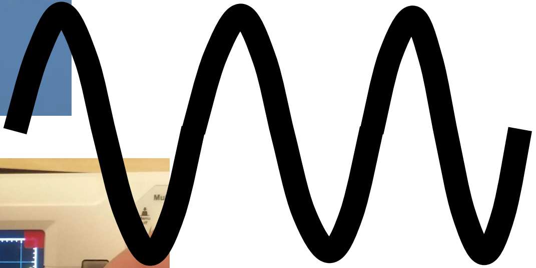


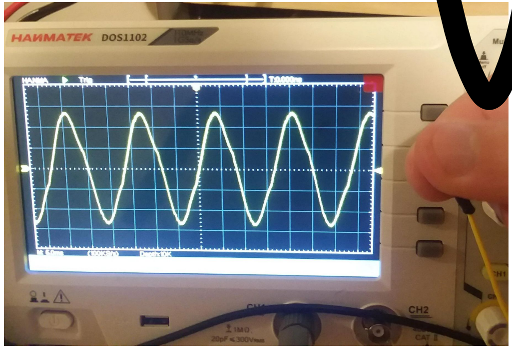
Actividad 3


media teórica
media estimada
$\mu_X(n)$
n
varianza teórica
varianza estimada
$Var_X(n)$
n

Actividad 3

Ruido de línea 50 Hz

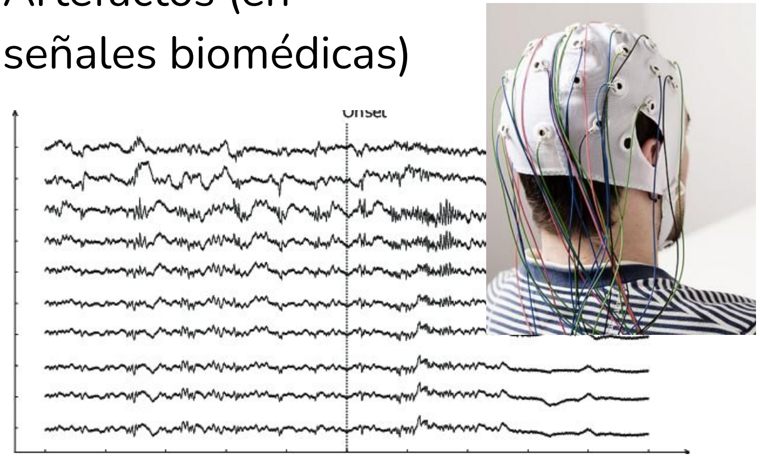




Se puede modelar como un proceso (amplitud y fase VAs)

Interferencias en Instrumentos y sistemas de audio

Artefactos (en señales biomédicas)



Actividad 4

Actividad 4

Sea X(n) un proceso aleatorio gaussiano blanco $N(0,2)$, de largo N=100, cuyas muestras son independientes. A partir de éste se define el siguiente proceso:

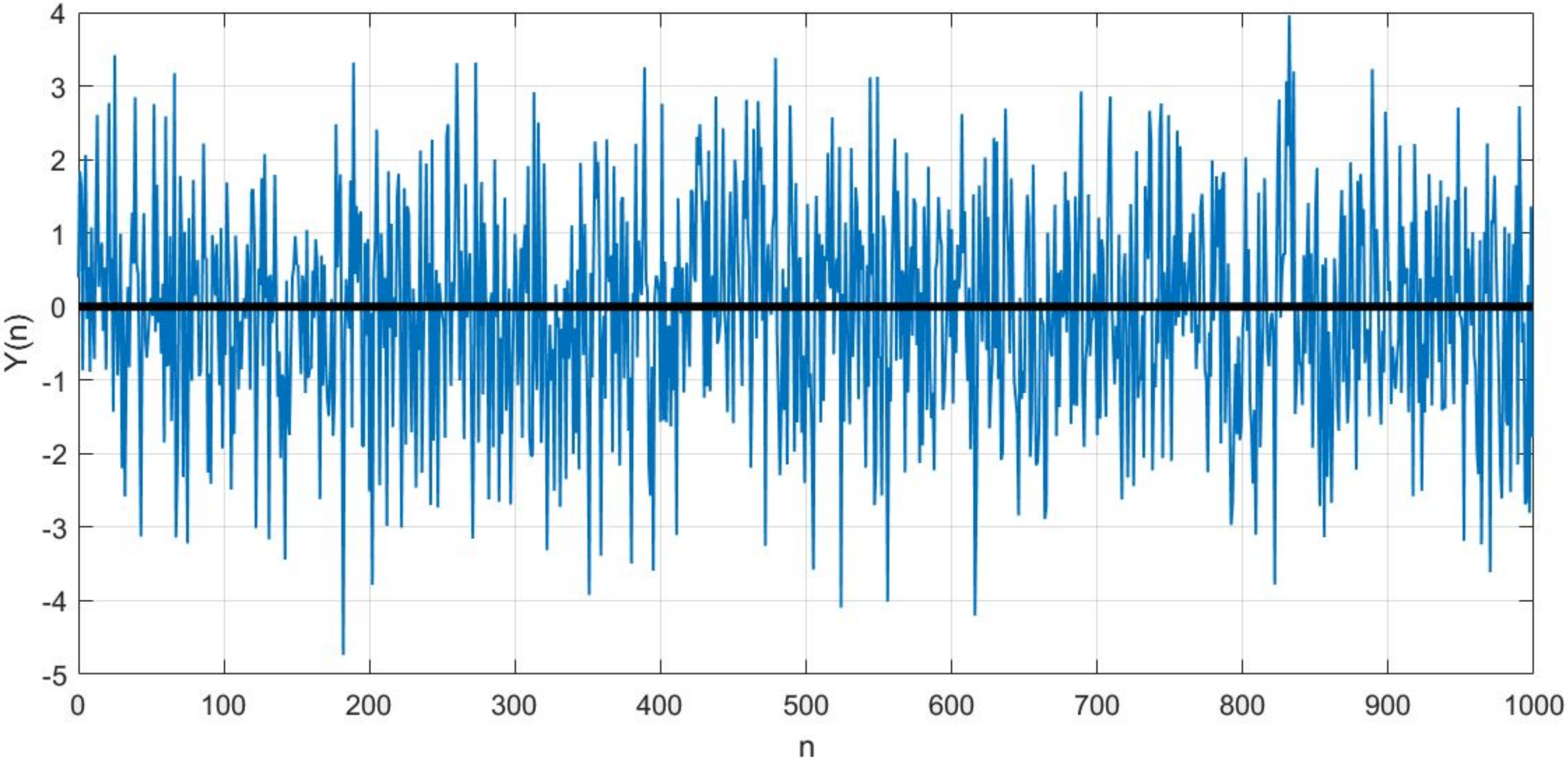
$$Y(n) = 0.5\ X(n) + 0.75\ X(n-1)$$

1. Calcule analíticamente la media, la varianza y la función de autocorrelación del proceso Y(n). ¿Resulta un proceso ESA?
2. Genere una realización del proceso y grafíquelo.
3. Genere 2000 realizaciones y estime la media, varianza y función de autocorrelación comparadas con las calculadas analiticamente con 2000 realizaciones.

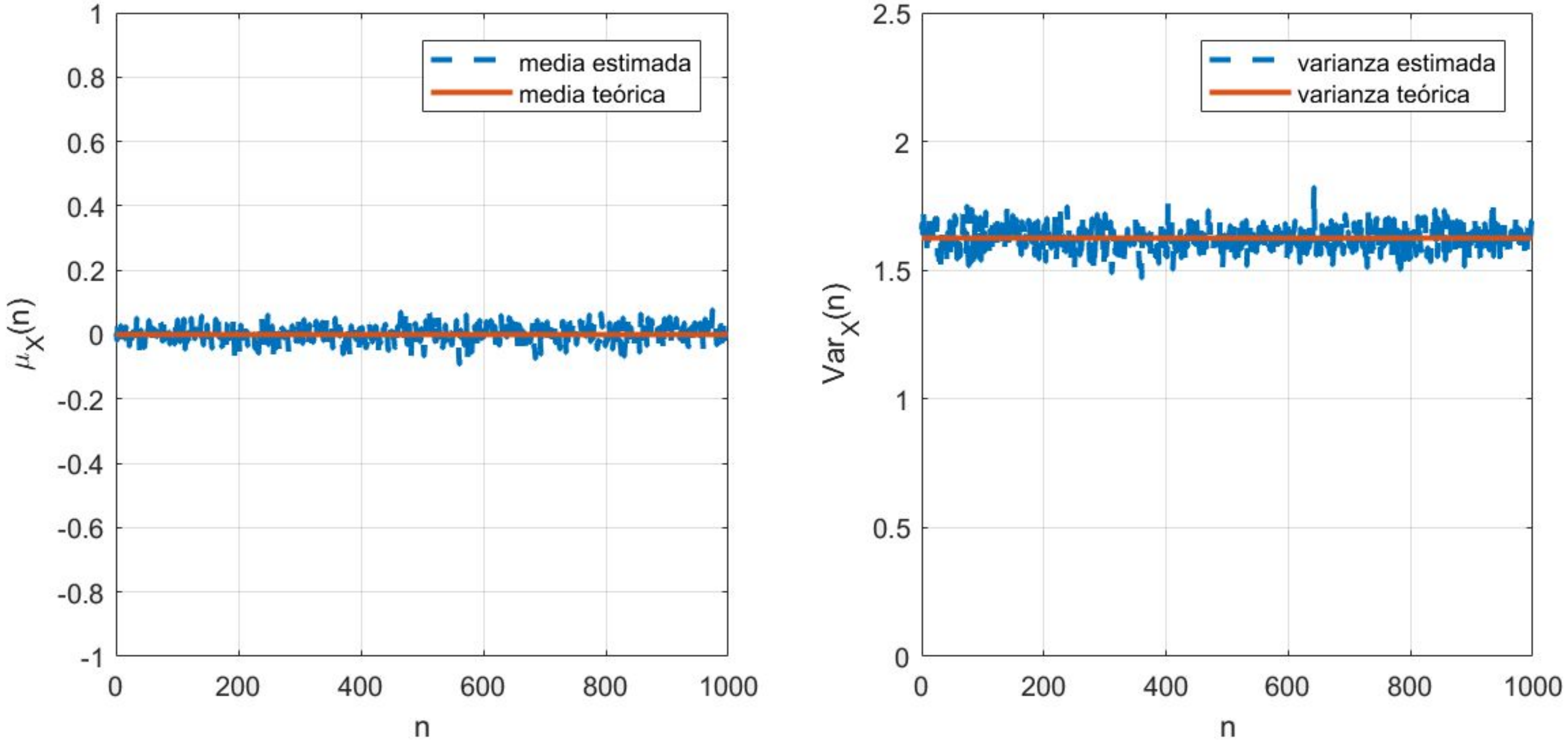
Nota: puede utilizar las siguientes funciones para estimar la autocorrelación del proceso

`xcorr(y)` `%` MATLAB   **`np.correlate(y,y,'full')`** **`#`** PYTHON

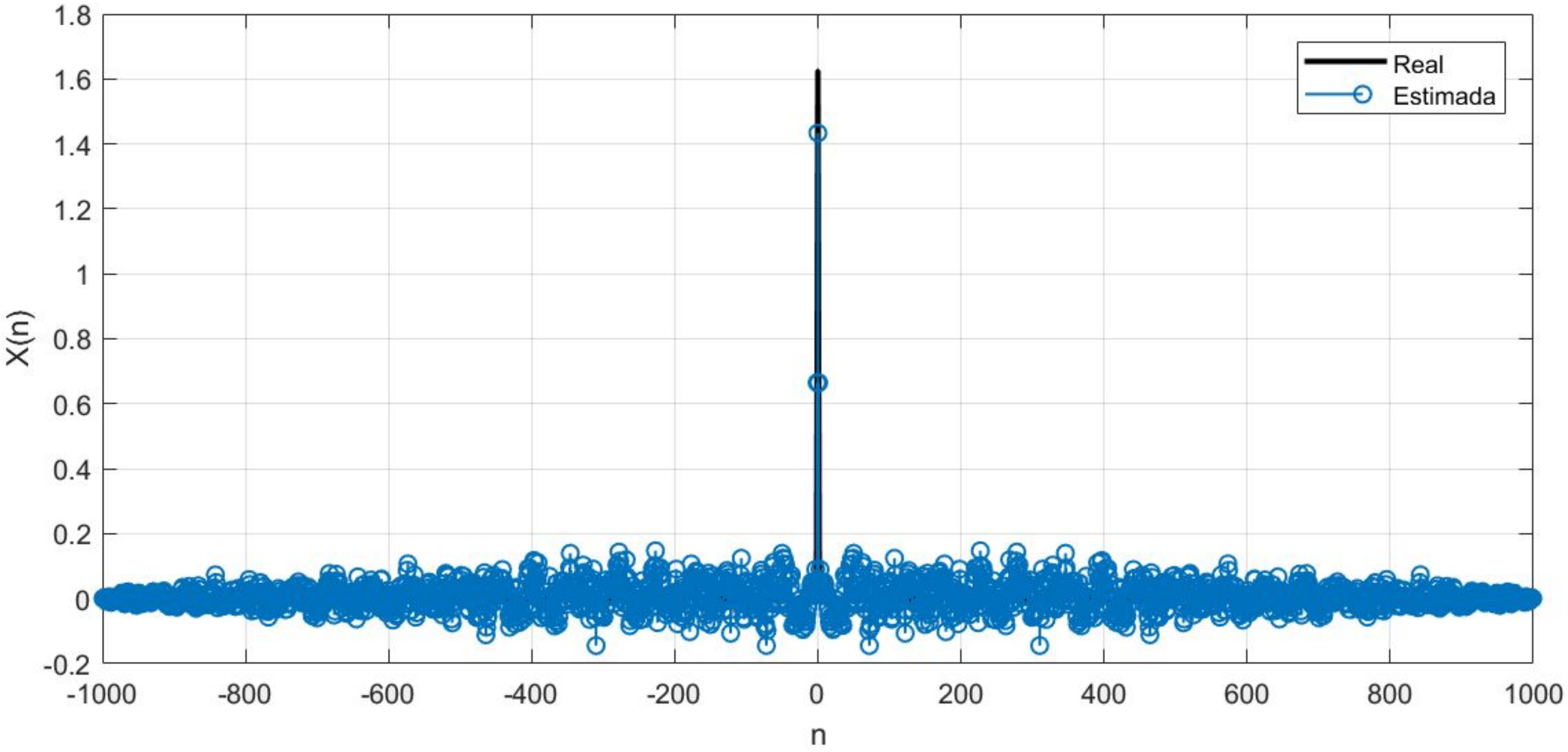
Actividad 4



Actividad 4


media estimada
media teórica
$\mu_X(n)$
n
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
200
400
600
800
1000
varianza estimada
varianza teórica
$Var_X(n)$
n
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
200
400
600
800
1000

Actividad 4



Real
Estimada
X(n)
n
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-1000
-800
-600
-400
-200
0
200
400
600
800
1000

Actividad 4