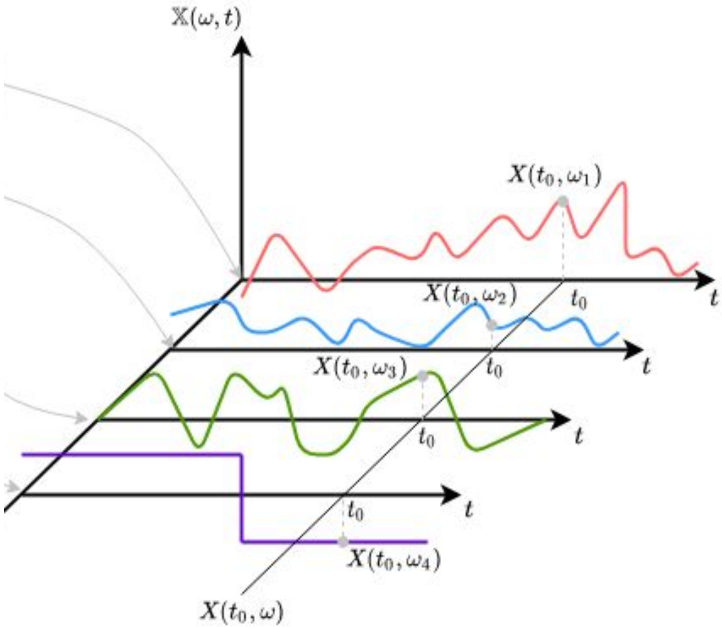
Procesos estocásticos (86.09)

- Procesos estocásticos
- Momentos
- Estacionariedad

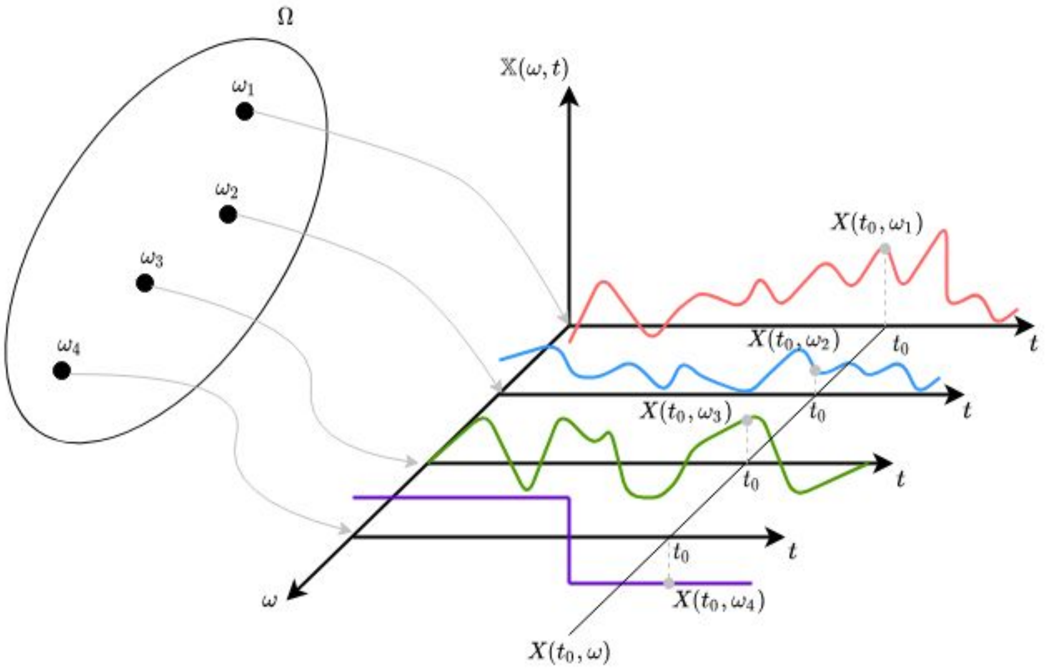


Procesos aleatorios

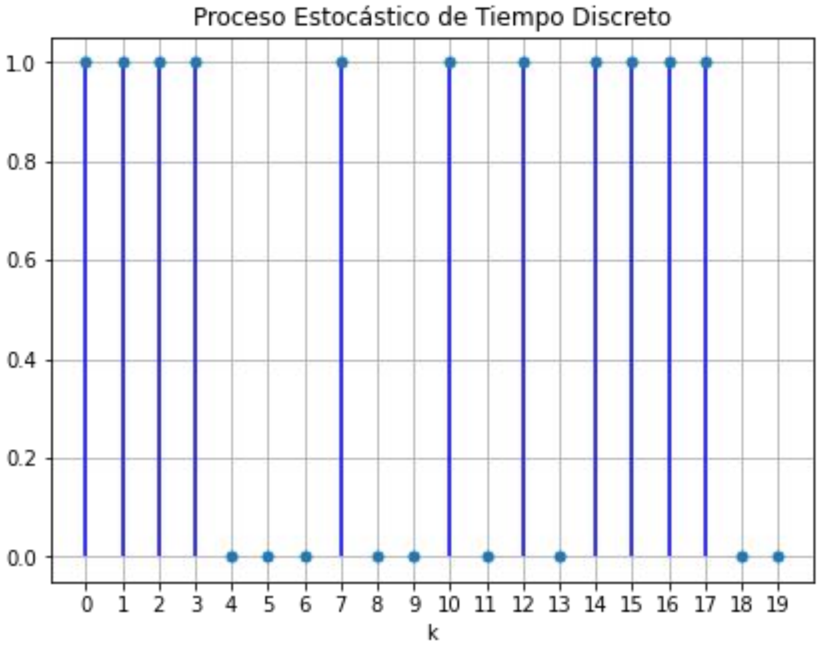
Proceso Estocástico (PE)

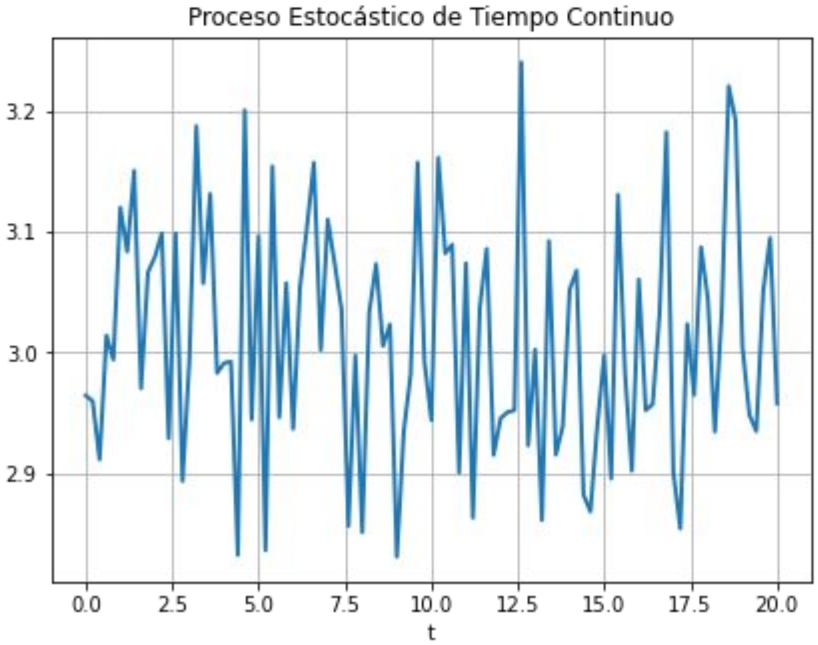
$X(t)$: un PE es un conjunto de VAs indexadas con instantes de tiempo t.

- Todas las realizaciones son **funciones del tiempo** (señales)
- Si fijamos una realización cualquiera ω_i, tenemos una **función del tiempo** $X(\omega_i, t)$
- Si fijamos un instante t_0 cualquiera, tenemos una **VA**.
- Si fijamos un instante t_0 y realización ω_i cualesquiera, tenemos una **realización de una VA**



Proceso Estocástico





Momentos de un proceso aleatorio

Momentos

Primer orden (Esperanza)

$$\mu_X(t) = \mathbb{E}[X(t)]$$

Segundo orden No centrado (Autocorrelación)

$$R_X(t_1, t_2) = \mathbb{E}[X(t_1)X(t_2)]$$

Segundo orden (Autocovarianza)

$$C_X(t_1, t_2) = \mathbb{E}\left[(X(t_1) - \mu_X(t_1))\left(X(t_2) - \mu_X(t_2)\right)\right]$$

Relación entre ambos momentos:

$$R_X(t_1, t_2) = C_X(t_1, t_2) + \mu_X(t_1)\mu_X(t_2)$$

Casos particulares para t1=t2=t

$$R_X(t, t) = \mathbb{E}[X^2(t)], \qquad C_X(t, t) = \mathbb{V}(X(t))$$

Estacionariedad

Estacionariedad de un Proceso Estocástico

Un proceso aleatorio X(t), para t = t1, t2, ..., tn, es estacionario si su **función de distribución conjunta** es independiente desplazamientos temporales.

Estacionario en sentido estricto (ESE o SSS, en inglés). Para todo n:

$$F_{X(t_1),\ldots,X(t_n)}(x_1,\ldots,x_n) = F_{X(t_1+\Delta),\ldots,X(t_n+\Delta)}(x_1,\ldots,x_n)$$

Estacionario en sentido Amplio (ESA o WSS, en inglés).

Casos n = 1 y n = 2:

n = 1 $\quad F_{X(t_1)}(x_1) = F_{X(t_1+\Delta)}(x_1)$

n = 2 $\quad F_{X(t_1),X(t_2)}(x_1,x_2) = F_{X(t_1+\Delta),X(t_2+\Delta)}(x_1,x_2)$

Si es estacionario para n = 1 y n = 2 ⇒ ESA

$$\begin{cases} \mu_X(t) = \mu_X \\ \sigma_X^2(t) = \sigma_X^2 \\ C_X(t_1,t_2) = C_X(t_2-t_1) \\ R_X(t_1,t_2) = R_X(t_2-t_1) \end{cases}$$

Constantes

Dependen solo de la diferencia de tiempos

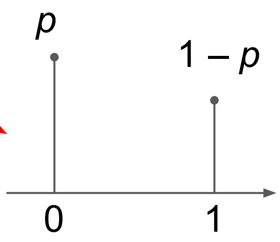
Proceso Bernoulli

Ejemplo 1

Proceso Bernoulli

Sea $Z(n)$ un proceso en tiempo discreto formado por variables aleatorias IID con distribución $Ber(p)$:

- $Z(n)$ es un proceso binario en tiempo discreto llamado Proceso de Bernoulli.
- Cada muestra tiene un soporte {0,1}
- Sus realizaciones son secuencias independientes de ceros y unos.
- Dado que para cada n tenemos una VA Bernoulli IID entonces:

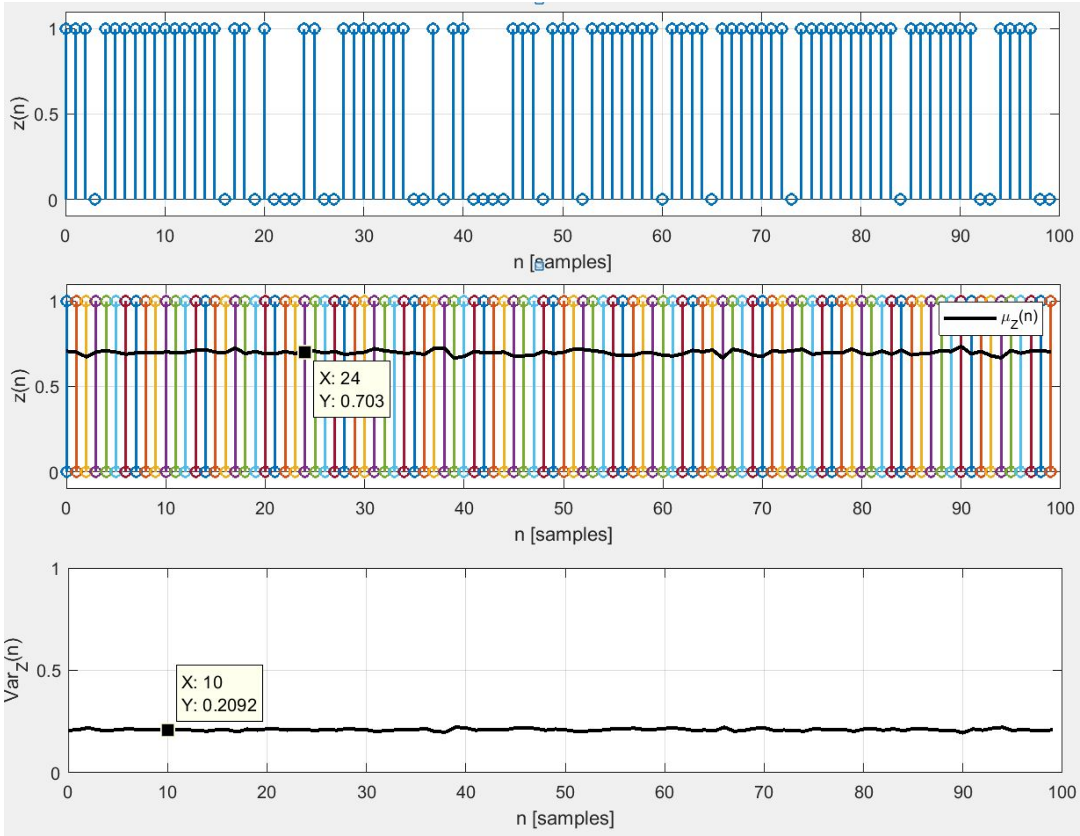


$$\left.\begin{aligned} &\mu(n) = p \\ &\sigma^2(n) = p(1-p) \\ &C_Z(n_i, n_j) = \sigma^2 \delta_{ij} = \begin{cases} \sigma^2 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \end{aligned}\right\} \text{ESA}$$

Ejemplo 1
Proceso Bernoulli

Proceso aleatorio Z(n) ~ Ber(p), muestras IID, para todo n = 0,...,N-1, (N=100 y p = 0.7)

Si generamos varias **realizaciones** (por ejemplo **M=1000**), podemos estimar la media y la varianza en función del tiempo, μ(n) y σ^2(n), promediando las M realizaciones para cada instante n.

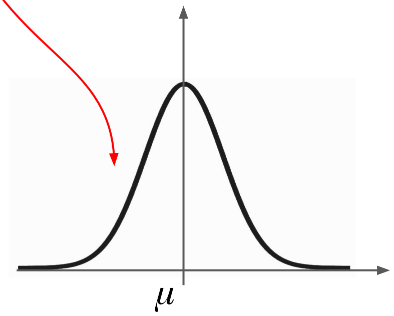


Proceso gaussiano blanco

Ejemplo 2
Proceso gaussiano blanco

Sea X(n) un proceso en tiempo discreto formado por variables aleatorias IID con distribución normal $N(\mu, \sigma^2)$:

- Cada muestra tiene un soporte {-∞, +∞}
- Sus realizaciones son secuencias independientes.
- Dado que para cada n tenemos VAs Normales IID entonces:

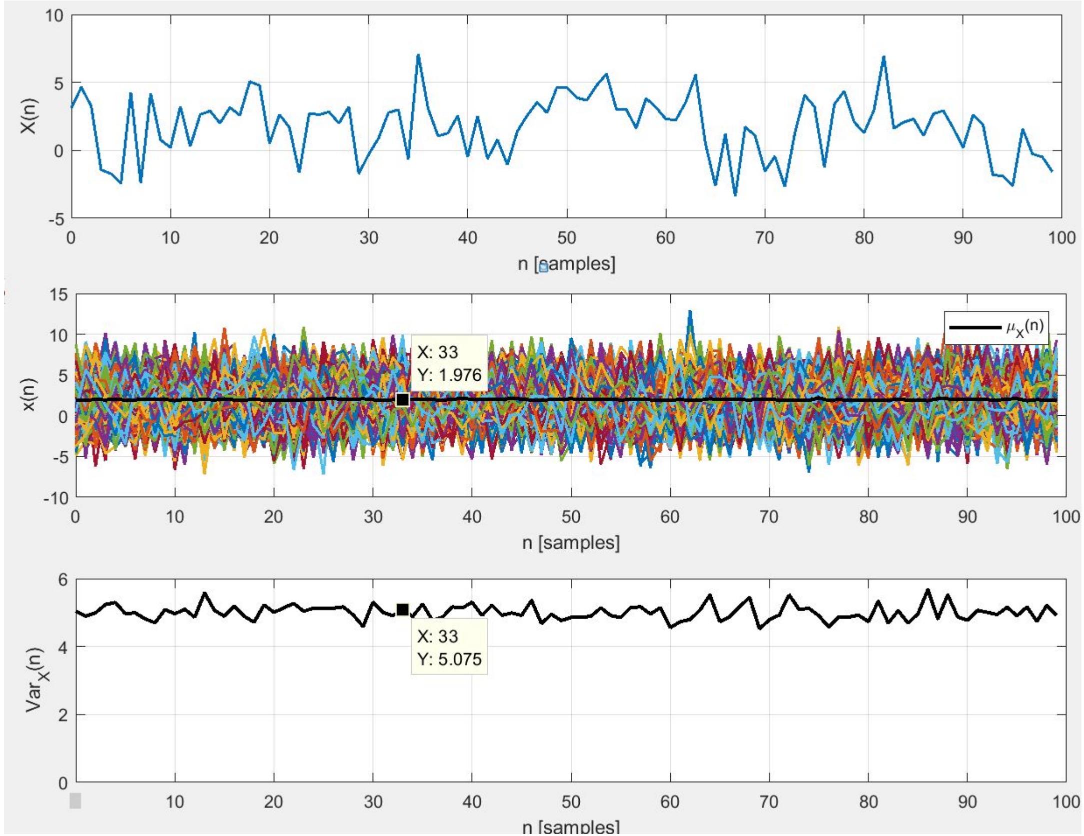


$$\left.\begin{aligned} &\mu(n) = \mu \\ &\sigma^2(n) = \sigma^2 \\ &C_X(n_i, n_j) = \sigma^2\delta_{ij} = \begin{cases} \sigma^2 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \end{aligned}\right\} \text{ESA}$$

Ejemplo 2
Proceso gaussiano blanco

Proceso aleatorio x(n) ~ $N(\mu, \sigma^2)$, para todo n = 0,…,N-1 (N=100, $\mu = 2$ y $\sigma^2 = 5$)

Si generamos varias **realizaciones** (por ejemplo ***M* = 1000**), podemos estimar la media y la varianza en función del tiempo, $\mu(n)$ y $\sigma^2(n)$, promediando las M realizaciones para cada instante n.



Proceso de Poisson

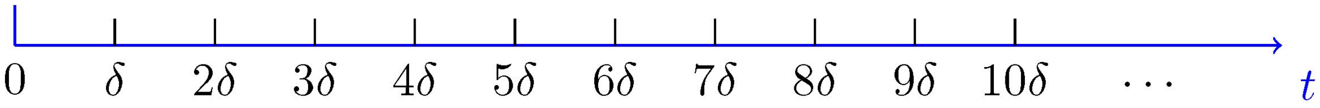
Proceso de Poisson

Sea $Y_n \sim \mathcal{B}(n, p(n))$ tal que $\lim_{n\to\infty} np(n) = \mu$. Luego,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Y_n = k) = \frac{e^{-\mu}\mu^k}{k!}$$

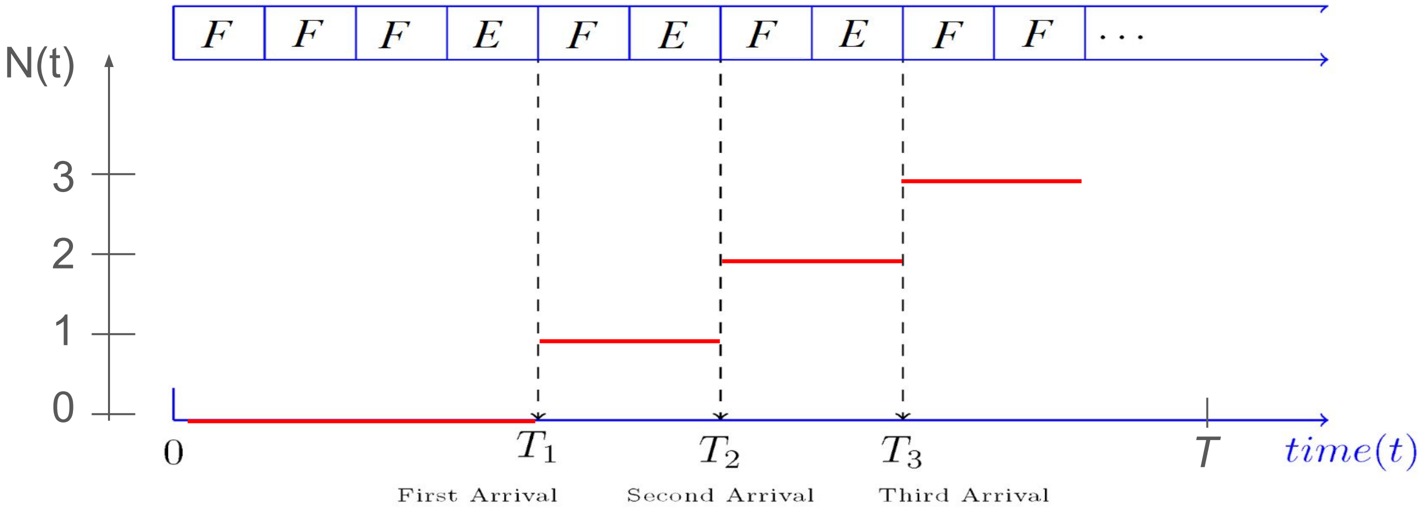
Construcción Proceso de Poisson de media μ.

1) Dividir el intervalo [0, T] en n subintervalos de duración $\delta = \frac{T}{n}$



2) En cada intervalo podemos pensar que tiramos una moneda con probabilidad de cara $p = \lambda\delta$

Proceso de Poisson



N(T) = Cantidad de caras en el intervalo [0,T]

$$np = n\lambda\delta \quad \rightarrow \quad np = \lambda T$$

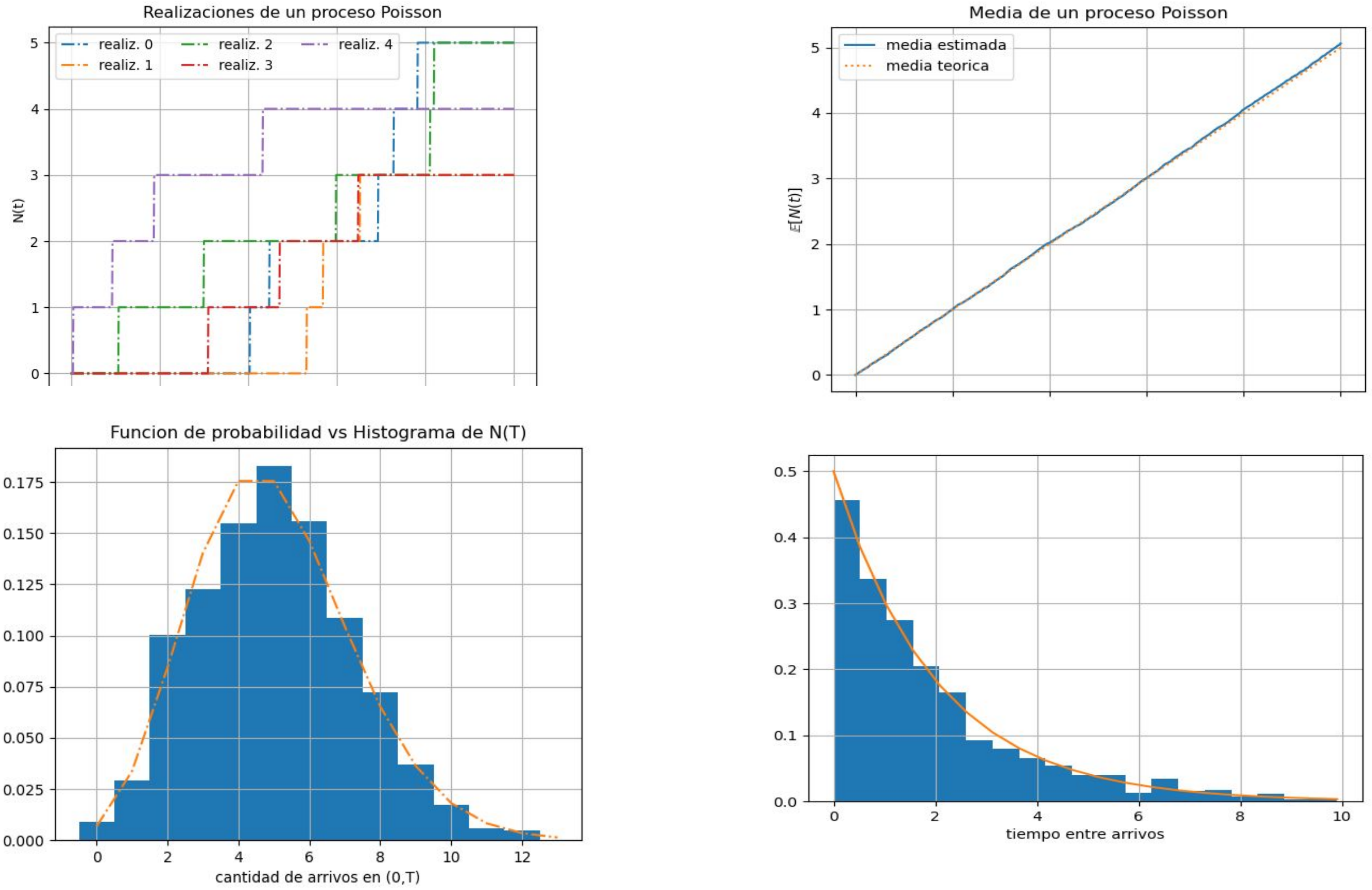
$\delta \rightarrow 0$ La *fmp* de N(T) converge a una distribución Poisson con parámetro λT

Actividad 1

Actividad 1

Generar una aproximación del proceso de Poisson con $\lambda=0.5$ arribos por segundo, a partir de un proceso Bernoulli. Tomar un intervalo de $T=10$ segundos y dividirlo en $n=1000$ intervalos.

1. Simular 2000 realizaciones del proceso. Graficar las primeras 5 realizaciones del proceso.
2. Estimar la función de probabilidad de la cantidad de arribos en $[0,T]$. Comparar con la teórica.
3. Estimar la media del proceso y comparara con la teórica.
4. Estimar la función de densidad del tiempo hasta el primer arribo.



Realizaciones de un proceso Poisson
realiz. 0
realiz. 1
realiz. 2
realiz. 3
realiz. 4
N(t)
Media de un proceso Poisson
media estimada
media teorica
$\mathbb{E}[N(t)]$
Funcion de probabilidad vs Histograma de N(T)
cantidad de arrivos en (0,T)
tiempo entre arrivos

Actividad 2

Actividad 2

1. Genere 1000 realizaciones de un proceso estocástico iid **Random Step**, definido como:

   $$X(n) = 2\,Z(n) - 1,$$

   Donde Z(n) es un proceso Bernoulli con *p* = 0.7, para todo n = 0, ..., N-1, con una duración de N = 100 muestras.

   a. Estime la media y varianza en función del tiempo *n* (μ(n) y σ^2(n)).
   b. Grafique todas las realizaciones, superpuestas a la media estimada μ(n).
   c. Grafique la varianza estimada σ^2(n).

2. Hallar analíticamente la media y varianza del proceso X(n). Compare los resultados con el punto anterior.

Actividad 2

$$X(n) = 2Z(n) - 1$$

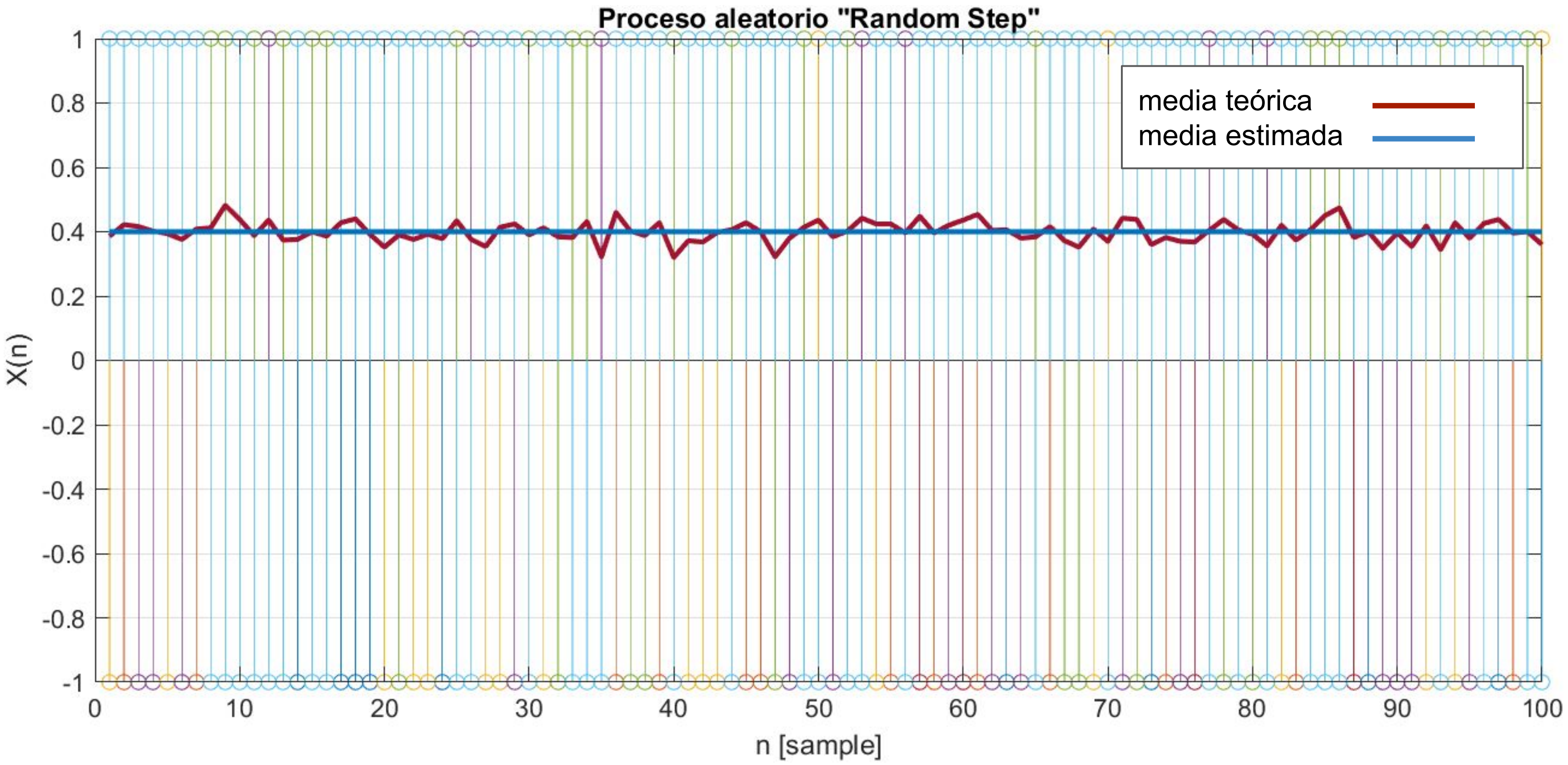
Media

$$\mu_X(n) = \mathbb{E}[X(n)] = \mathbb{E}[2\,Z(n) - 1] = 2\,p - 1$$

Varianza

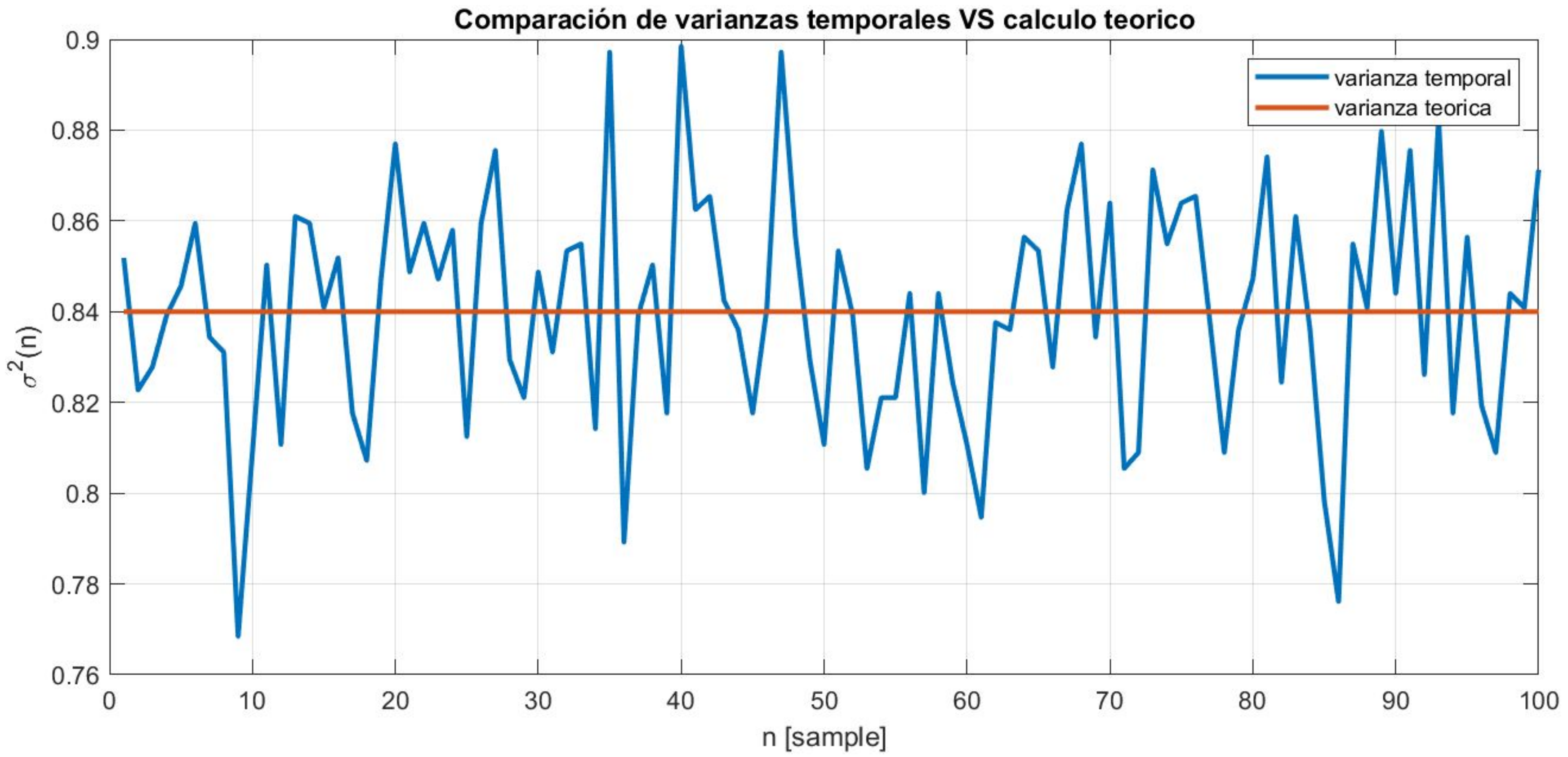
$$\sigma_X^2(n) = \mathbb{E}[(X(n) - \mu_X(n))^2] = 4\mathbb{E}[(Z(n) - p)^2] = 4\sigma_Z^2(n) = 4p(1 - p)$$

Actividad 2



Proceso aleatorio "Random Step"
media teórica
media estimada
X(n)
n [sample]
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100

Actividad 2



Comparación de varianzas temporales VS calculo teorico
varianza temporal
varianza teorica
0.9
0.88
0.86
0.84
0.82
0.8
0.78
0.76
$\sigma^2(n)$
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
n [sample]

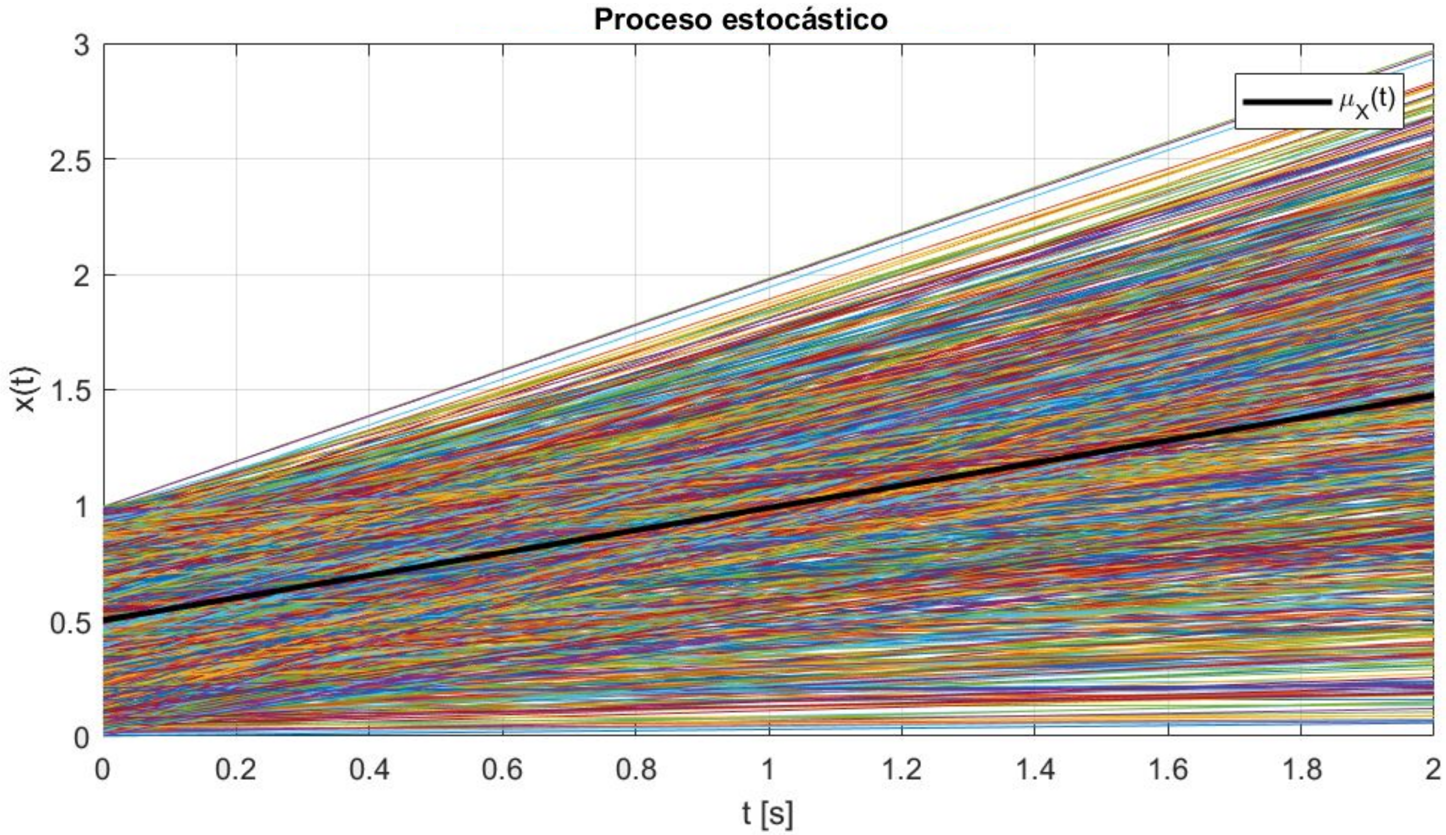
Actividad 3

Actividad 3

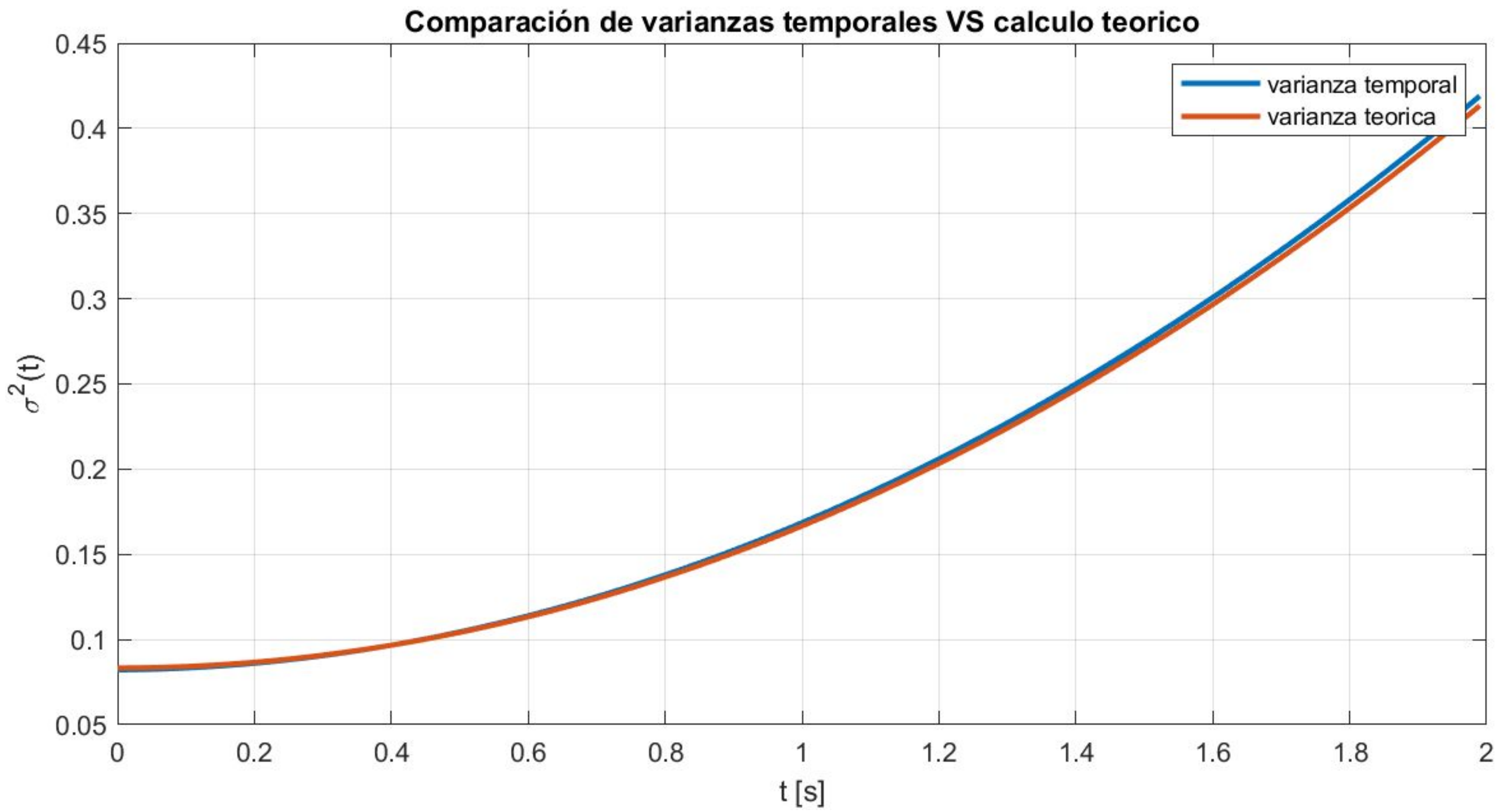
1. Sean A y B dos variables aleatorias independientes con distribución U(0,1). Se define la siguiente función $x(t) = At + B$, con $0 <= t < 2$. Suponiendo que se trata de un proceso continuo muestreado a una tasa Ts = 0.01. Generando 1000 realizaciones, estime la media y varianza en función del tiempo t ($\mu(t)$ y $\sigma^2(t)$), superponiendo las realizaciones a la media estimada $\mu(t)$. Aparte grafique la varianza $\sigma^2(t)$,

2. Hallar analíticamente la media y varianza del proceso $x(t)$. Compare los resultados con el punto anterior. ¿Resulta un proceso ESA?

Actividad 3


Proceso estocástico
$\mu_X(t)$
x(t)
t [s]
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2

Actividad 3



Comparación de varianzas temporales VS calculo teorico
varianza temporal
varianza teorica
0.45
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
$\sigma^2(t)$
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
t [s]

Actividad 3

Media

$$\mu_X(t) = \mathbb{E}[A\,t + B] = \mathbb{E}[A]\,t + \mathbb{E}[B] = 0.5\,t + 0.5$$

Varianza

$$\sigma_X^2(t) = \mathbb{E}[(A\,t+B)^2] - \mathbb{E}[At+B]^2 = \mathbb{E}[A^2\,t^2 + B^2 + 2ABt] - (\mathbb{E}[A]t + \mathbb{E}[B])^2 =$$

$$= \mathbb{E}[A^2]\,t^2 + \mathbb{E}[B^2] + 2\mathbb{E}[AB]t - \mathbb{E}[A]^2t^2 - \mathbb{E}[B]^2 - 2\mathbb{E}[A]\mathbb{E}[B]t =$$

$$= \overbrace{\sigma_A^2(t)t^2 + \cancel{\mathbb{E}[A]^2t^2}} + \sigma_B^2(t) + \cancel{\mathbb{E}[B]^2} + \cancel{2\underbrace{\mathbb{E}[AB]}_{\text{A ind B}\;\mathbb{E}[A]\mathbb{E}[B]}t} - \cancel{\mathbb{E}[A]^2t^2} - \cancel{\mathbb{E}[B]^2} - \cancel{2\mathbb{E}[A]\mathbb{E}[B]t} =$$

$$= \sigma_A^2(t)t^2 + \sigma_B^2(t) = \frac{1}{12}t^2 + \frac{1}{12}$$