Ejercicio 1. *Sea U_i, $i = 1, \dots, n$ variables aleatoria i.i.d, distribuidas de acuerdo a la distribución Gaussiana $\mathcal{N}(\mu, 1)$. A partir de estas variables se construyen las siguientes variables*

$$\begin{cases} X_1 = U_1 \\ X_2 = U_1 + U_2 \\ \vdots \\ X_n = U_1 + \cdots + U_n. \end{cases}$$

1. *Indique si las X_i son conjuntamente Gaussianas y caracterice la función de densidad de probabilidad conjunta.*
2. *Considere la siguiente variable aleatoria,*

$$Z = \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

   a) *Indique si Z es Gaussiana y obtenga su función de densidad de probabilidad;*
   b) *Justifique la utilización de Z como un estimador de μ cuando $n \to \infty$.*

Resolución 1. 1. *Como $U_i \sim \mathcal{N}(\mu, 1)$ i.i.d y tenemos que X_i son sumas de variables aleatoria normales, es fácil ver que $X_i \sim \mathcal{N}(i\mu, i)$. A continuación definimos la transformación,*

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \mathbf{U} = A\mathbf{U},$$

donde $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 & \cdots & U_n \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}(\mu\mathbf{1}, \mathbf{I})$, con $\mathbf{1}$ siendo un vector de unos e $\mathbf{I}$ la matrix identidad de $n \times n$.

Al ser una transformación lineal, obtenemos que $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_\mathbf{X}, C_\mathbf{X})$, donde

$$\boldsymbol{\mu}_\mathbf{X} = \mathbb{E}[\mathbf{X}] = \mathbb{E}[A\mathbf{U}] = A\mathbb{E}[\mathbf{U}] = A\mathbf{1}\mu = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{bmatrix} \mu.$$

$$C_\mathbf{X} = \mathbb{E}[(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}_\mathbf{X})(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}_\mathbf{X})^T] = \cdots = AA^T.$$

Notar que las X_i no son independientes. Finalmente,

$$f_\mathbf{X}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |C_\mathbf{X}|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_\mathbf{X})^T C_\mathbf{X}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_\mathbf{X}) \right]$$

2. *Se define la siguiente variable aleatoria*

$$Z = \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{2}{n^2} \mathbf{1}^T \mathbf{X} = \frac{2}{n^2} \mathbf{1}^T A \mathbf{U}$$
$$= \frac{2}{n^2} \big(nU_1 + (n-1)U_2 + \cdots + U_n \big) = \sum_{i=1}^{n} iU_{n+1-i}.$$

- *Por lo tanto, puedo pensar a Z como una combinación de variables aleatoria normales independientes, $Z \sim \mathcal{N}(\mu_Z, \sigma_Z^2)$, donde*

$$\mu_Z = \mathbb{E}[Z] = \frac{2}{n^2}\mu \sum_{i=1}^{n} i = \frac{2}{n^2}\mu \frac{n(n-1)}{2} = \mu - \frac{\mu}{n}, \tag{1}$$

$$\sigma_Z^2 = \mathbb{V}(Z) = \frac{4}{n^4} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{4}{n^4}(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}) \tag{2}$$

- *Si un quiere usar Z para estimar μ, por (1)*

$$\mu_Z \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu,$$

y por (2)

$$\sigma_Z \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Por lo tanto, podemos decir que Z es un estimador asintoticamente insesgado y consistente para μ.

Ejercicio 2. *Sea B_i, $i = 1, 2, \cdots$ una secuencia de variables aleatoria i.i.d, Bernoulli equiprobables. Considere el número $\xi \in [0, 1]$ determinado por la expansión binaria*

$$\xi = \sum_{i=1}^{\infty} b_i 2^{-i}$$

donde b_i es una realización de la secuencia B_i. Explique por qué ξ es una v.a distribuida uniformemente en $[0, 1]$.

Resolución 2. *Para este ejercicio utilizaremos la función característica ya que sabemos que existe una correspondencia uno a uno entre la función característica de una variable aleatoria y su función de densidad (distribución). Esta relación viene dada por la transformada inversa de Fourier, es decir,*

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-\jmath\omega x} \Phi_X(\omega) \mathrm{d}\omega$$

Definamos la variable aleatoria Ξ, cuyas realizaciones son ξ, como

$$\Xi = \sum_{i=1}^{\infty} B_i 2^{-i}.$$

Calculemos $\Phi_\Xi(\omega)$,

$$\begin{aligned}
\Phi_\Xi(\omega) &= \mathbb{E}[e^{\jmath\Xi\omega}] = \mathbb{E}[e^{\jmath\omega \sum_{i=1}^{\infty} B_i 2^{-i}}] = \mathbb{E}[\prod_{i=1}^{\infty} e^{\jmath\omega B_i 2^{-i}}] \\
&= \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}[e^{\jmath\omega B_i 2^{-i}}] \qquad B_i \textit{ son i.i.d} \\
&= \prod_{i=1}^{\infty} \Phi_{B_i}(\omega 2^{-i}) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2}(e^{\jmath\omega 2^{-i}} + 1) \qquad B_i \sim Ber(1/2) \\
&= \prod_{i=1}^{\infty} e^{\jmath\frac{\omega}{2}2^{-i}} \cos\left(\frac{\omega}{2}2^{-i}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\omega} e^{\jmath\frac{\omega}{2}\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}} \\
&= e^{\jmath\frac{\omega}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\omega} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \mathbf{1}\{0 \le \xi \le 1\}.
\end{aligned}$$

Finalmente, $\Xi \sim \mathcal{U}(0, 1)$.

Ejercicio 3. *Sean $X(n)$ e $Y(n)$ dos procesos en tiempo discreto independientes entre si. Se forma el procesos multiplicador $z(n) = X(n)Y(n)$. Se sabe que*

- $E[X(n)] = \alpha n$, $\alpha \neq 0$ *una constante;* $\mathbb{E}[Y(n)] = 0$;
- $R_X(n_1, n_2) = f(n_1 - n_2)$, *y* $f(\cdot)$ *es una función determinística;* $R_y(n_1, n_2) = \delta(n_1 - n_2)$.

Indique si este nuevo proceso es ESA y obtenga la autocorrelación de $Z(n)$.

Resolución 3. *Para saber si el proceso $Z(n)$ es ESA debemos calcular tanto su esperanza como su función de autocorrelación.*

$$E[Z(n)] = \mathbb{E}[X(n)Y(n)] = \mathbb{E}[X(n)]\mathbb{E}[Y(n)] = 0 \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} R_Z(n) &= \mathbb{E}[Z(n_1)Z(n_2)] = \mathbb{E}[X(n_1)X(n_2)Y(n_1)Y(n_2)] \\ &= \mathbb{E}[X(n_1)X(n_2)]\mathbb{E}[Y(n_1)Y(n_2)] = f(n_1 - n_2)\delta(n_1 - n_2). \qquad \checkmark \end{aligned}$$

Donde en los dos casos usamos la independencia de procesos. La media $\mathbb{E}(Z(n))$ no depende de n y la autocorrelación depende de la diferencia de los tiempos, por lo tanto el proceso $Z(n)$ es ESA.