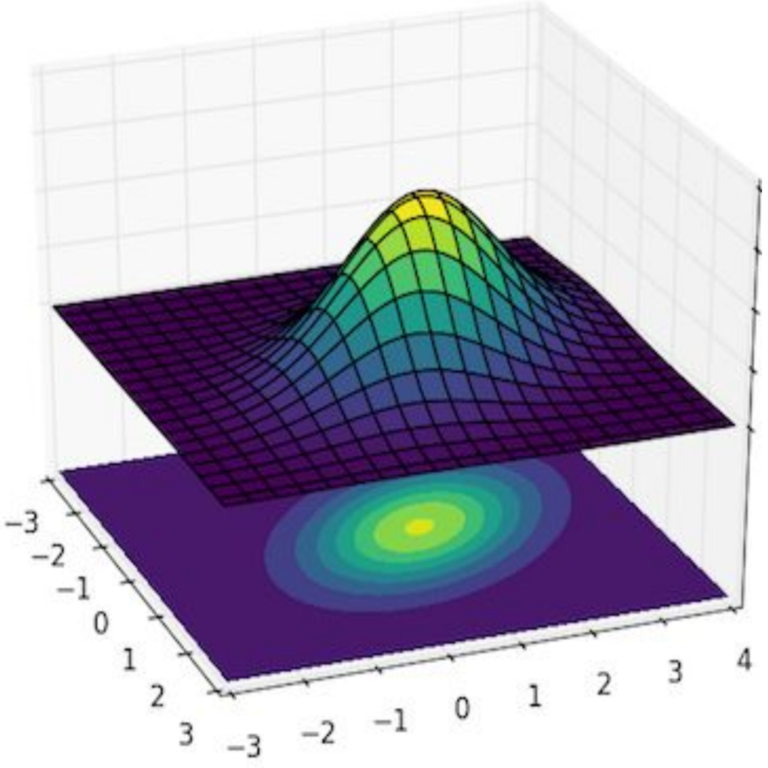
Procesos estocásticos (86.09)

- Vectores Aleatorios
- Gaussiana Multivariable



Vectores aleatorios

Vectores Aleatorios

Vector aleatorio

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

VA $\in \mathbb{R}$
(escalar)

VeA $\in$
$\mathbb{R}^M$
(vectorial)

Media de un vector aleatorio *X*

$$\mathbb{E}[\mathbf{X}] = \mu_{\mathbf{X}} = \mathbb{E}\left[\begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix} \mathbb{E}[X_1] \\ \vdots \\ \mathbb{E}[X_n] \end{bmatrix}$$

$$f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Actividad 1

Actividad 1
Vectores aleatorios

Genere N = 1000 muestras para definir los siguientes vectores aleatorios.:

1. $\boldsymbol{X} = [X_1\ X_2]^T$, a partir de dos variables Rayleigh, $X_1 \sim$ Rayl(3) y $X_2 \sim$ Rayl(2).
2. $\boldsymbol{V} = [V_1\ V_2]^T$ a partir de una transformación de X, tal que $\boldsymbol{V} = B\boldsymbol{X}$.
3. $\boldsymbol{U} = [U_1\ U_2]^T$, a partir de una transformación de X, tal que $\boldsymbol{U} = H\boldsymbol{X}$.

Haga el gráfico de dispersión (ej: `scatter(x1, x2)`) y calcule el coeficiente ϱ de correlación entre las componentes de cada vector.
Defina el límite de los ejes del gráfico con **axis([-2 12 0 14])**.

$$B = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.2 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.2 \\ 0.4 & 0.2 \end{bmatrix}$$

Actividad 1
Vectores aleatorios

Transformación del vector **x**

$$\mathbf{y} = A\,\mathbf{x}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{A} * \overbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}^{\mathbf{x}} = \overbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}}^{\mathbf{y}}$$

Actividad 1
Vectores aleatorios

$$Y = A\ X$$

Transformación de múltiples vectores agrupados como matriz

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{A} * \overbrace{\begin{bmatrix} \underset{\mathbf{x}}{\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}} & \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} & \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} & \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} & \cdots & \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \end{bmatrix}}^{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} \overset{\mathbf{y}}{\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix}} & \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix} & \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix} & \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix} & \cdots & \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix} \end{bmatrix}}_{Y}$$

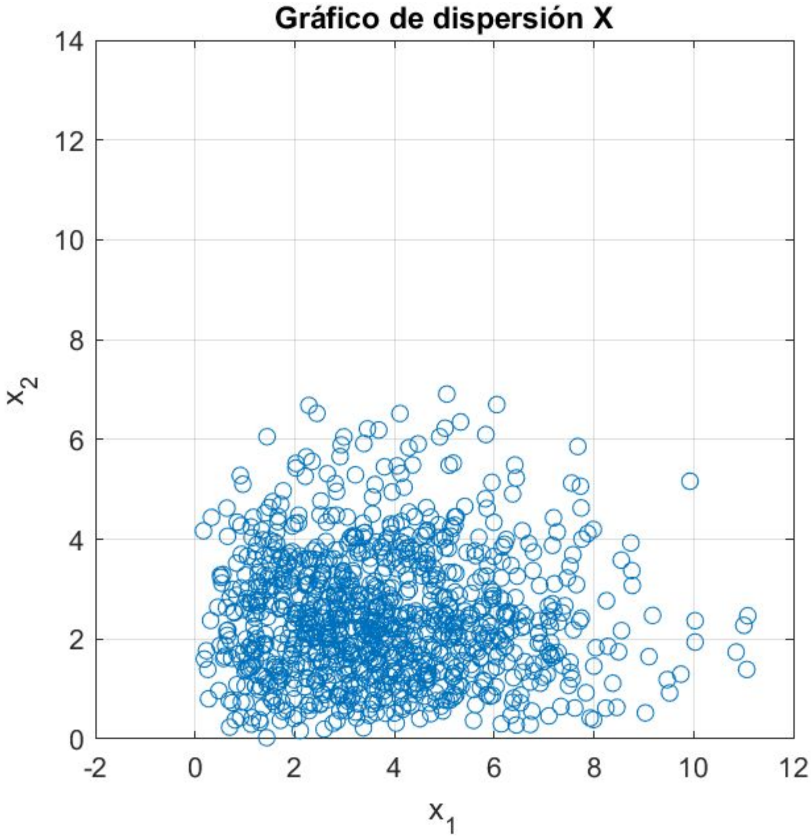
X: Matriz cuyas columnas son vectores muestrales

A: Matriz de transformación

Y: Matriz cuyas columnas son vectores muestrales luego de la transformación

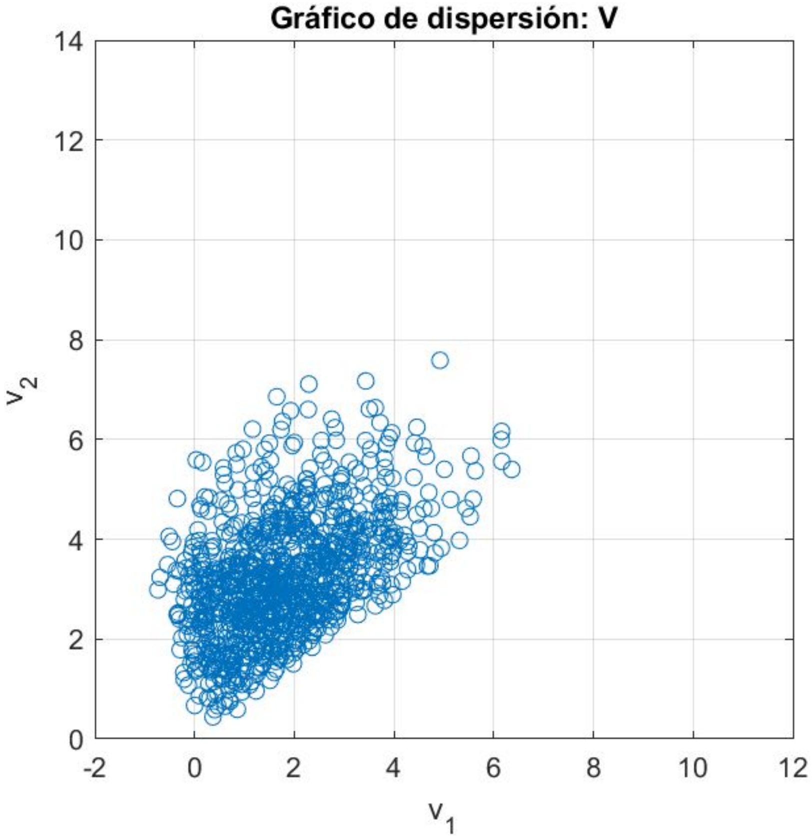
Actividad 1
Vectores aleatorios

$$\varrho(X_1, X_2) = 0.016$$



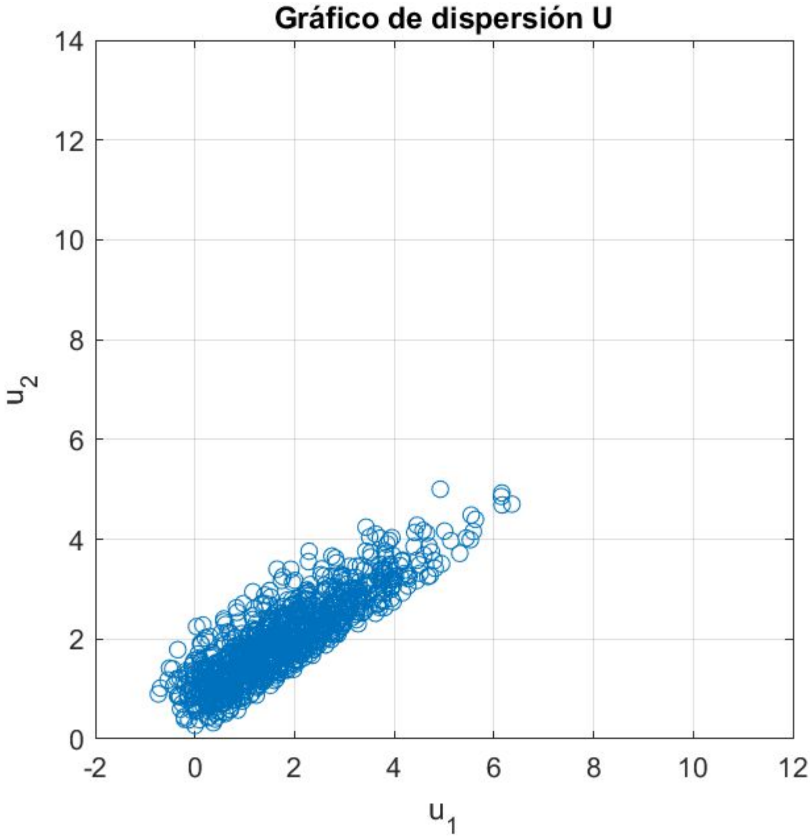
Actividad 1
Vectores aleatorios

$\varrho(V_1, V_2) = 0.421$



Actividad 1
Vectores aleatorios

$$\varrho(U_1, U_2) = 0.867$$



Matriz de autocovarianza

Matriz de Covarianza – Autocovarianza

Vector aleatorio

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

VA ∈ ℝ (escalar)

VA ∈ $ℝ^n$ (vectorial)

Matriz de autocovarianza de un vector aleatorio ***X***

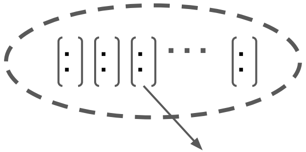
$$\boxed{C_{\mathbf{X}} = \mathbb{E}\left[(\mathbf{X} - \mu_{\mathbf{X}})(\mathbf{X} - \mu_{\mathbf{X}})^T\right] \in \mathbb{R}^{n \times n}}$$

Matriz de Covarianza – Autocovarianza

$$C_{\mathbf{X}} = \mathbb{E}\left[\begin{bmatrix} X_1 - \mu_{X_1} \\ X_2 - \mu_{X_2} \\ \vdots \\ X_n - \mu_{X_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 - \mu_{X_1} & X_2 - \mu_{X_2} & \dots & X_n - \mu_{X_n} \end{bmatrix}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbb{E}\left[(X_1 - \mu_{X_1})(X_1 - \mu_{X_1})\right] & \mathbb{E}\left[(X_1 - \mu_{X_1})(X_2 - \mu_{X_2})\right] & \dots & \mathbb{E}\left[(X_1 - \mu_{X_1})(X_n - \mu_{X_n})\right] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{E}\left[(X_n - \mu_{X_n})(X_1 - \mu_{X_1})\right] & \mathbb{E}\left[(X_n - \mu_{X_n})(X_2 - \mu_{X_2})\right] & \dots & \mathbb{E}\left[(X_n - \mu_{X_n})(X_n - \mu_{X_n})\right] \end{bmatrix}$$

Vectores aleatorios – Estimadores



$$\mathbf{X}_k = \begin{bmatrix} X_{k1} \\ X_{k2} \\ \vdots \\ X_{kn} \end{bmatrix}$$

k-esima muestra del vector aleatorio

Estimación de la media de un vector aleatorio

$$\boxed{\widehat{\mu}_{\mathbf{X}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{X}_k}$$

Estimación de la matriz de autocovarianza de un vector aleatorio

$$\boxed{\widehat{C}_X = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n} (\mathbf{X}_k - \widehat{\mu}_{\mathbf{X}})(\mathbf{X}_k - \widehat{\mu}_{\mathbf{X}})^T}$$

Actividad 2

Actividad 2
Matriz de covarianza

Estime la matriz de autocovarianza para los vectores aleatorios del ejercicio anterior: ***X***, ***U*** y ***V***.

Analice las propiedades de la matriz y la particularidad de cada una en relación a los resultados del ejercicio anterior (observe la covarianza entre componentes y cómo esto se refleja en las matrices de correlación).

Matriz de Covarianza – Estimadores

Matriz de covarianza **Matlab**:

```
Cx = cov(X);  % Covarianza de X (filas: observaciones, col: componentes)
```

Matriz de covarianza **Python**

```
Cx = np.cov(X);  # Covarianza de X (filas: componentes, col: observaciones)
```

Actividad 2
Matriz de covarianza

```
Cx =

    3.9425   -0.0401
   -0.0401    1.6235
```

```
Cv =

    1.4938    0.7053
    0.7053    1.4039
```

```
Cu =

    1.4938    0.8797
    0.8797    0.6893
```

Actividad 3

Actividad 3
Matriz de covarianza

Dados dos VeA, $X_1 \sim U(0,2)$ y $X_2 \sim U(0,3)$ independientes, con $N = 1000$ realizaciones.

1. Genere muestras de un vector aleatorio $\boldsymbol{Y} = [Y_1\ Y_2]^T$ a partir del vector $\boldsymbol{X} = [X_1\ X_2]^T$ aplicando una transformación $\boldsymbol{Y} = R\,\boldsymbol{X}$, donde R es una matriz de rotación (definida abajo) considerando un ángulo de rotación $\theta = \pi/10$ Haga un gráfico de dispersión para **X** y para $\boldsymbol{Y}$. Calcule su coeficiente de correlación.
2. Estime la matriz de autocovarianza del vector aleatorio $\boldsymbol{Y}$.
3. Repita los puntos 1 y 2, pero para un ángulo rotación $\theta = \pi/4$.

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Sugerencia:

```
axis([-2 3 -1 4]) % Fijar el límite de los ejes
axis square       % Relación de aspecto cuadrada
```

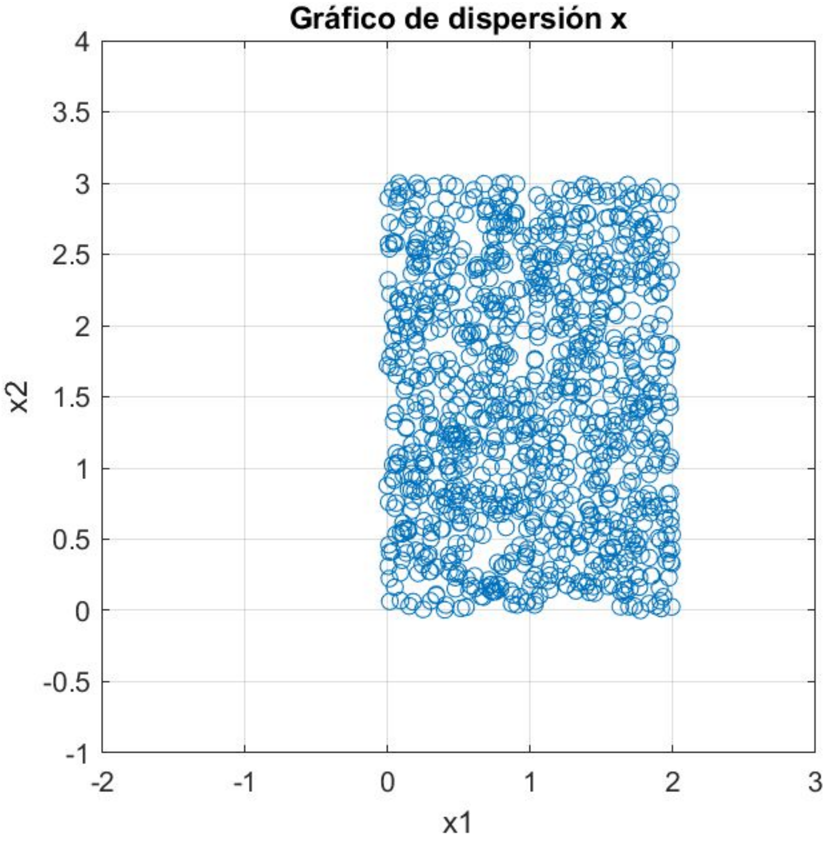
Actividad 3
Matriz de covarianza

```
Cx =

    0.3424   -0.0144
   -0.0144    0.7545
```

```
rho_x =

    0.0118
```



Actividad 3

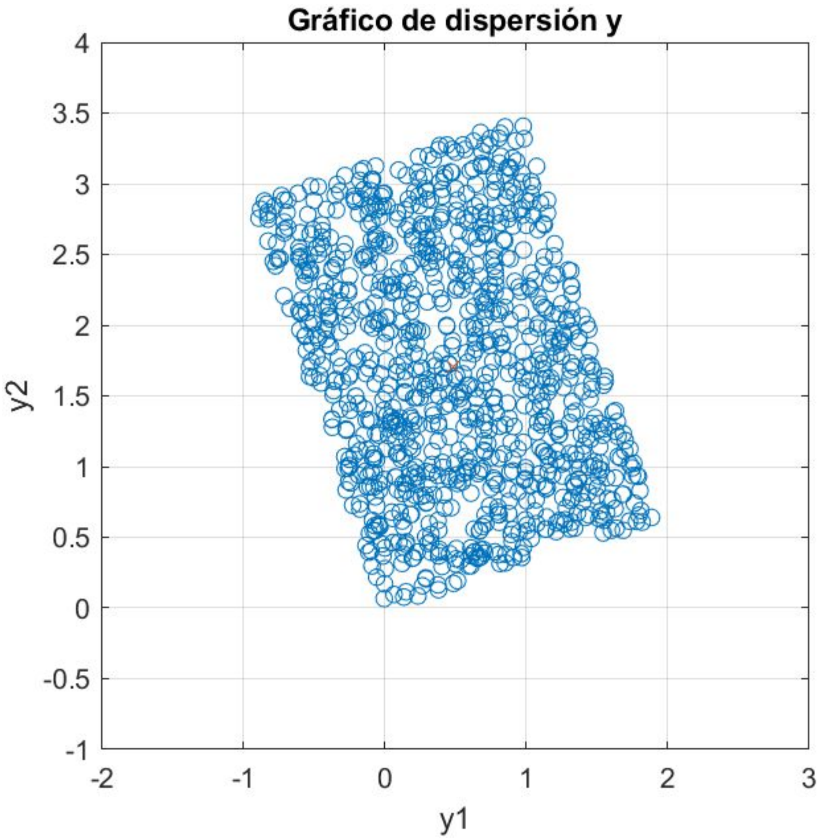
Matriz de covarianza

```
Cy =

    0.3561   -0.1104
   -0.1104    0.7457
```

```
rho_y =

   -0.2142
```



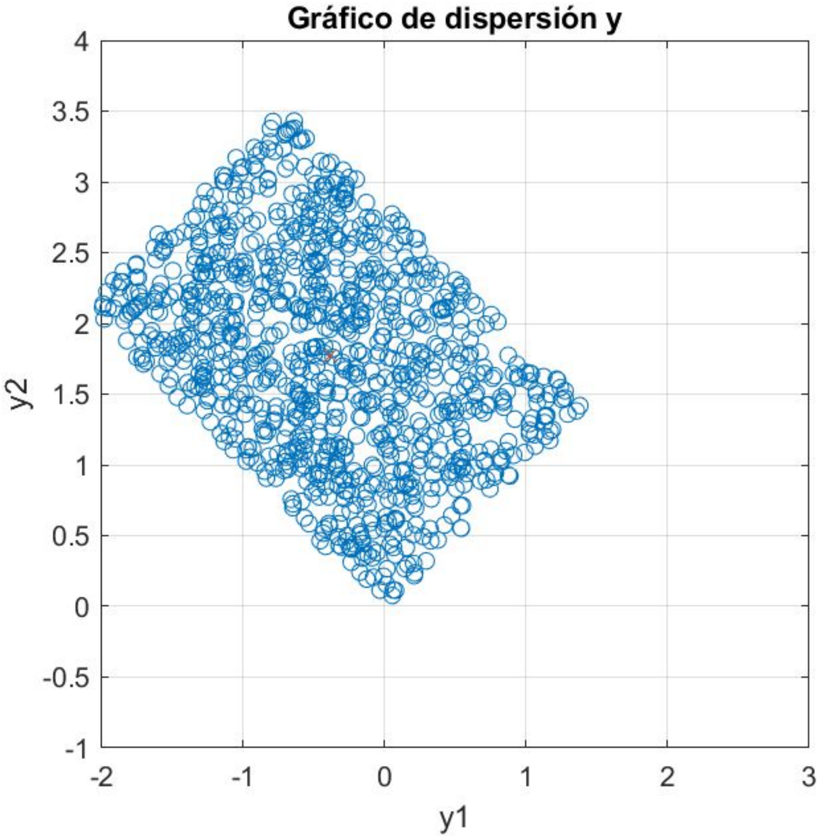
Actividad 3
Matriz de covarianza

```
Cy =

     0.5155    -0.1881
    -0.1881     0.5269
```

```
rho_y =

    -0.3608
```



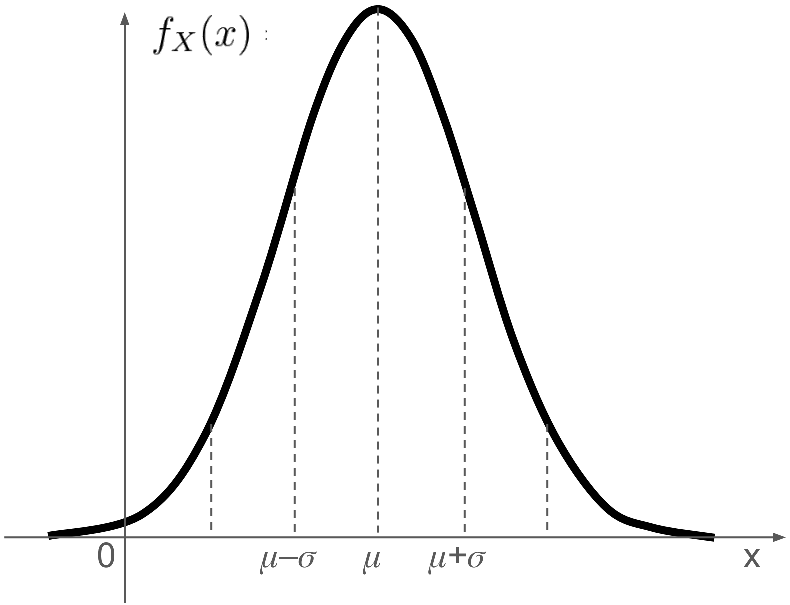
Vector Aleatorio Gaussiano

Variable Aleatoria Gaussiana

Distribución Normal

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}$$



Vector Aleatorio Gaussiano

Vector aleatorio gaussiano

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

$\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$

$\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$

$\mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$

$$\boxed{\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\mu_{\mathbf{X}}, C_{\mathbf{X}})}$$

Vector Aleatorio Gaussiano

$$\boxed{\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\mu_{\mathbf{X}}, C_{\mathbf{X}})}$$

$$\begin{cases} \mathbb{E}[\mathbf{X}] = \mu_{\mathbf{X}} = \mathbb{E}\left[\begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix} \mathbb{E}[X_1] \\ \vdots \\ \mathbb{E}[X_n] \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \\ \\ C_{\mathbf{X}} = \mathbb{E}\left[(\mathbf{X} - \mu_{\mathbf{X}})(\mathbf{X} - \mu_{\mathbf{X}})^T\right] \in \mathbb{R}^{n \times n} \end{cases}$$

Función de densidad normal multivariada

$$\boxed{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(C_{\mathbf{X}})}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mu_{\mathbf{X}})^T C_{\mathbf{X}}^{-1}(\mathbf{x} - \mu_{\mathbf{X}})\right)}$$

Vector Aleatorio Gaussiano

Caso particular $\mathbf{x} = [x \; y]^T \in \mathbb{R}^2$

$$C_{\mathbf{X}}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} - \mu_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} x - \mu_x \\ y - \mu_y \end{bmatrix}$$

Función de densidad de probabilidad (n = 2)

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(C_{\mathbf{X}})}} \exp\left(-\frac{1}{2} \begin{bmatrix} x - \mu_x & y - \mu_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - \mu_x \\ y - \mu_y \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(C_{\mathbf{X}})}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(a\,(x - \mu_x)^2 + d\,(y - \mu_y)^2 + 2b\,(x - \mu_x)\,(y - \mu_y) \right) \right)$$

Curvas de nivel

Las curvas de nivel surgen de igualar la función de densidad de **x** a una constante:

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(C_{\mathbf{X}})}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu_{\mathbf{X}})^T C_{\mathbf{X}}^{-1}(\mathbf{x}-\mu_{\mathbf{X}})\right) = \alpha$$

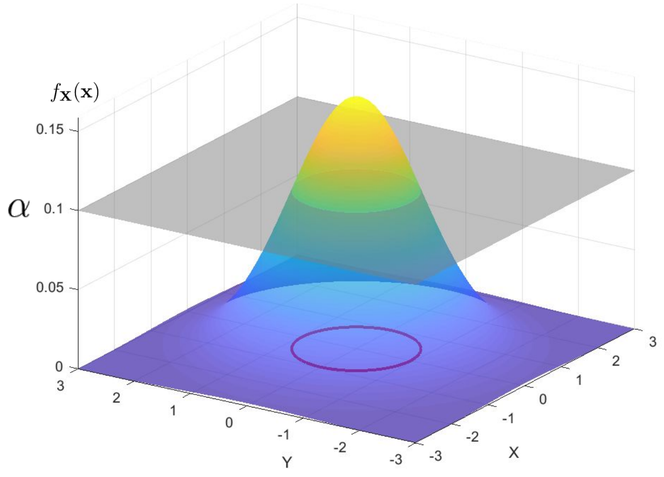
Podemos plantear la forma cuadrática:

$$(\mathbf{x}-\mu_{\mathbf{X}})^T C_{\mathbf{X}}^{-1} (\mathbf{x}-\mu_{\mathbf{X}}) = \beta$$

Si $\boldsymbol{X} = [X\ Y]^T$, se obtiene la ecuación de una **elipse**.

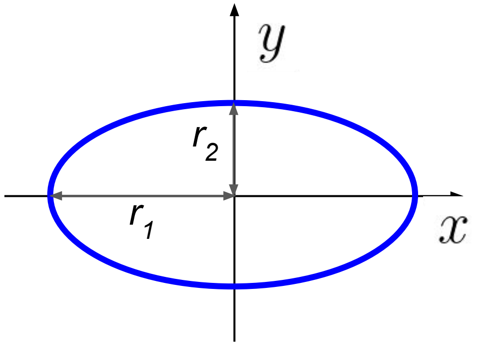
Para el caso particular de $\mu_X = 0$ y $\mu_Y = 0$, resulta:

$$a\,x^2 + d\,y^2 + 2b\,x\,y = \beta$$



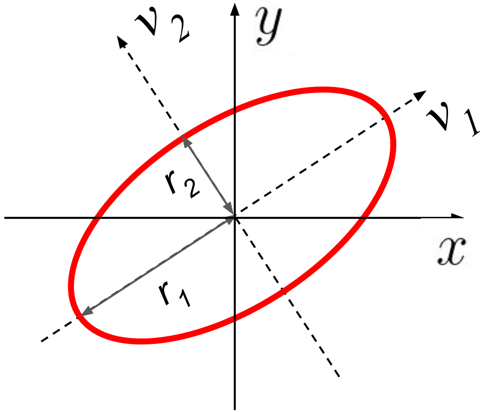
Curvas de nivel

Vector descorrelacionado. Radios de la elipse proporcionales a los desvíos y alineados con los ejes canónicos X e Y.



$$\left(\frac{x}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{r_2}\right)^2 = \alpha'$$

Vector correlacionado.
Radios de la elipse alineadas con los autovectores de Cx (~~desvíos~~)



$$\left(\frac{v_1}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{v_2}{r_2}\right)^2 = \alpha'$$

Vector Aleatorio Normal Estándar

Vector aleatorio

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

VAs normales estándar

- $Z_i \sim \mathcal{N}(0,1)$ con $i = 1, \ldots, n$,
- $Z_i \perp\!\!\!\perp Z_j$ para todo $i \neq j$.

$\mathbf{Z} \sim \mathcal{N}(\mu_{\mathbf{Z}} = \mathbf{0}, C_{\mathbf{Z}} = I_n)$

$\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$

$I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Función de densidad normal estándar multivariada

$$f_{\mathbf{Z}}(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\,\mathbf{z}^T\mathbf{z}\right)$$

Vector Aleatorio Normal Estándar

$$\mu_{\mathbf{Z}} = \mathbb{E}\left[\mathbf{Z}\right] = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} C(Z_1, Z_1) & C(Z_1, Z_2) & \dots & C(Z_1, Z_n) \\ C(Z_2, Z_1) & C(Z_2, Z_2) & \dots & C(Z_2, Z_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C(Z_n, Z_1) & C(Z_n, Z_2) & \dots & C(Z_n, Z_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Superficie de probabilidad para la Normal multivariada

Gráficos de superficie y curvas de nivel en **Matlab/Octave**:

```
x = linspace(xmin, xmax, N);   % generar N puntos entre xmin y xmax
y = linspace(ymin, ymax, N);   % generar N puntos entre ymin e ymax
[XX, YY] = meshgrid(x,y);      % matrices de puntos para x e y
surf(XX, YY, fz);              % gráfico de superficie fz (matriz)
contour(XX, YY, fz, n_curvas); % gráfico de n curvas de nivel
```

Otras funciones necesarias para casos no estándar:

```
inv(A)  % inversa de la matriz A
det(A)  % determinante de la matriz A
```

Superficie de probabilidad para la Normal multivariada

Gráficos de superficie y curvas de nivel en **Python**:

```
x = np.linspace(xmin, xmax, N) # generar N puntos entre xmin y xmax
y = np.linspace(ymin, ymax, N) # generar N puntos entre ymin e ymax
XX, YY = np.meshgrid(x, y) # matrices de puntos para x e y
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
ax.plot_surface(XX, YY, fz, cmap='viridis') # gráfico de superficie fz
plt.contour(XX, YY, fz, levels=10, cmap='viridis') # gráfico de n curvas de nivel
```

Otras funciones necesarias para casos no estándar:

```
np.linalg.inv(A) # inversa de la matriz A
np.linalg.det(A) # determinante de la matriz A
```

Actividad 4

Actividad 4

Vector aleatorio normal

1. Dado un vector aleatorio normal estándar de $\mathbb{R}^2$. Hacer un gráfico que muestre 10 curvas de nivel.

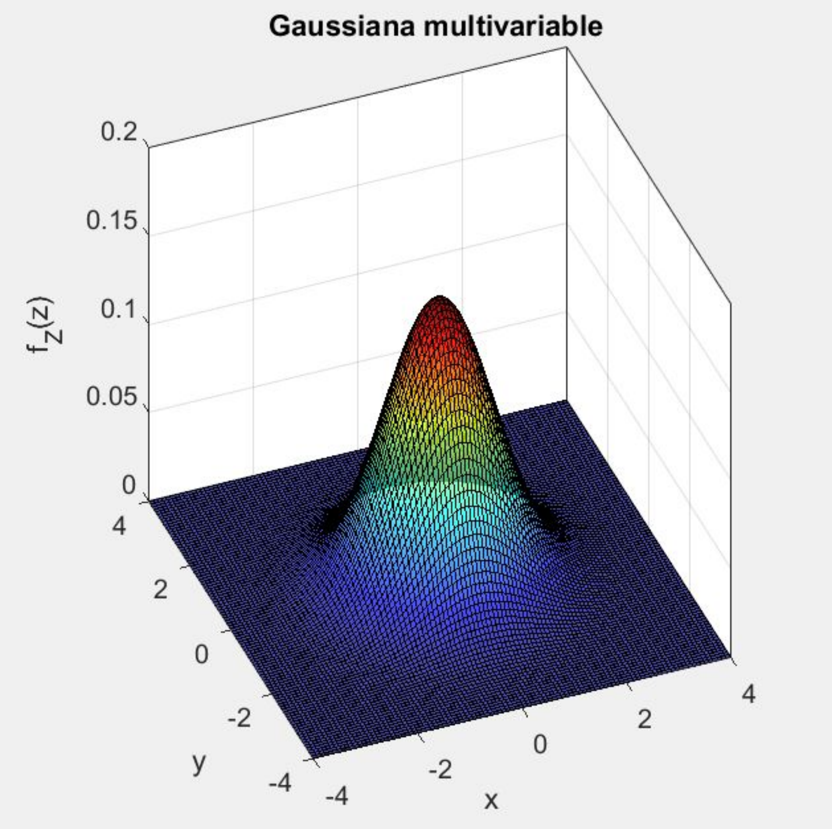
2. Graficar la superficie de la densidad de probabilidad bidimensional.

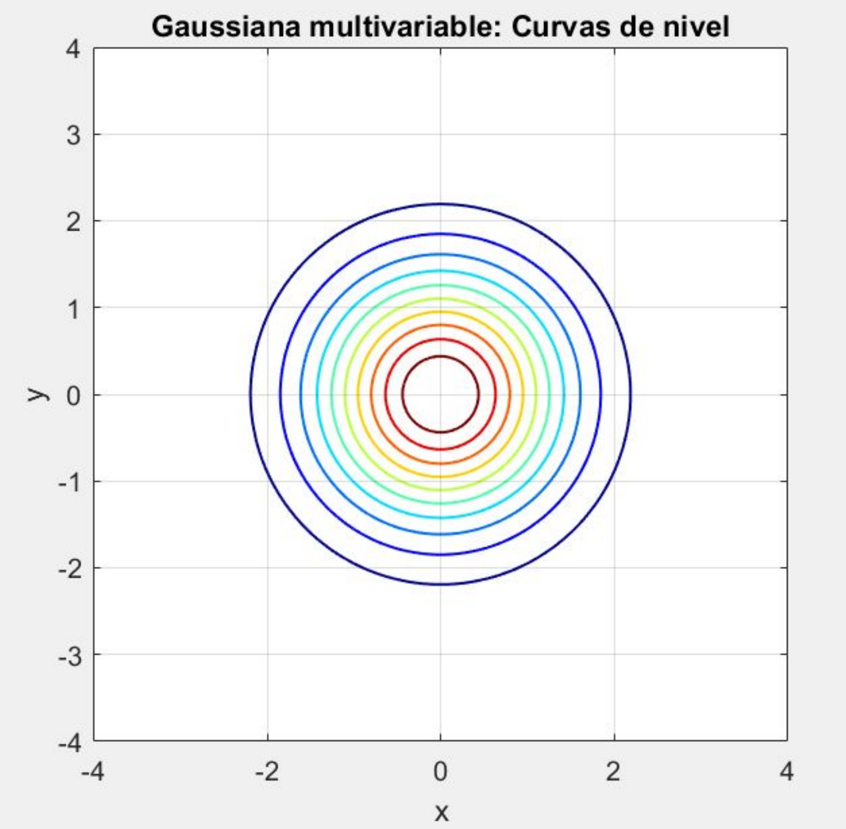
3. Repetir los puntos 1 y 2, pero para un vector aleatorio con la matriz de covarianza y el vector de medias definidos a continuación:

$$C_X = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.8 \\ 0.8 & 1.75 \end{bmatrix} \qquad \mu_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 1.0 \end{bmatrix}$$

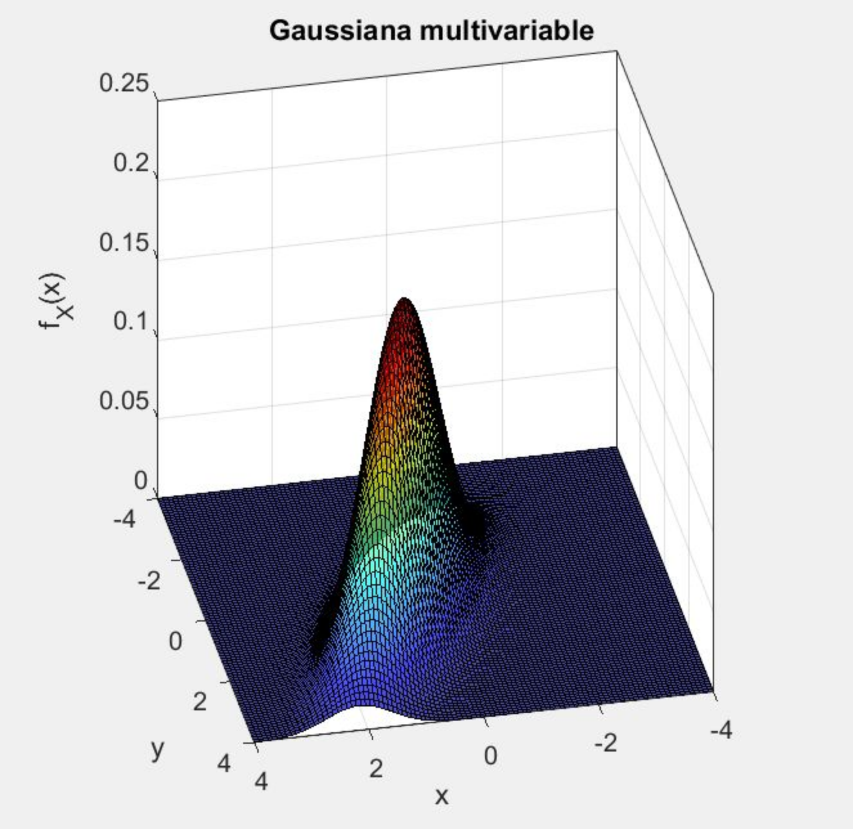
Sugerencia: considere para $\boldsymbol{X} = [X\ Y]^T$ los límites $X \in [-4, 4]$; $Y \in [-4, 4]$

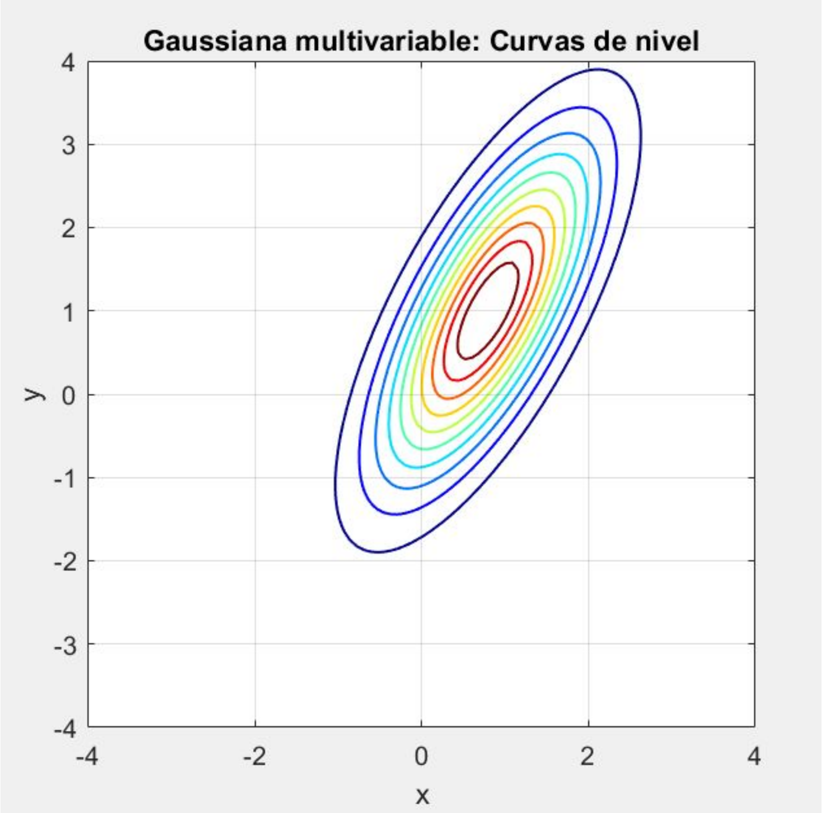
Actividad 4
Vector aleatorio normal





Actividad 4
Vector aleatorio normal





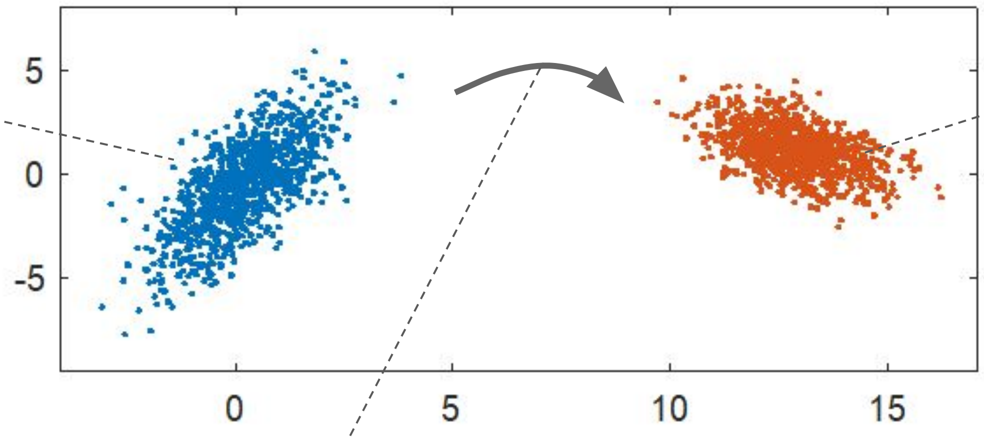
Transformación lineal

Transformación lineal (afín)

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{E}[\mathbf{X}] \in \mathbb{R}^n$$

$$C_{\mathbf{X}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$



$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{E}[\mathbf{Y}] \in \mathbb{R}^m$$

$$C_{\mathbf{Y}} \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

$$\mathbf{Y} = A\,\mathbf{X} + \mathbf{u}$$

constantes determinísticas:

$$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$$

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$\mathbb{E}[\mathbf{Y}] = A\,\mathbb{E}[\mathbf{X}] + \mathbf{u}$$

$$C_{\mathbf{Y}} = A\,C_{\mathbf{X}}\,A^T$$

Ejercicio

Ejercicio
Transformación lineal

Sea un vector aleatorio $\boldsymbol{X} = [X_1\ X_2\ \dots\ X_n]^T$, y una transformación lineal $\boldsymbol{Y} = A\,\boldsymbol{X} + \boldsymbol{b}$, donde $A \in \mathbb{R}^{m\mathrm{x}n}$ y $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, Demostrar que para el vector aleatorio resultante $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^m$ se cumple:

1. $\mathrm{E}[\boldsymbol{Y}] = A\,\mathrm{E}[\boldsymbol{X}] + \boldsymbol{b}$
2. $C_Y = A\,C_X\,A^T$

Ejercicio
Transformación lineal

1)

$$\mathbf{Y} = A\,\mathbf{X} + \mathbf{b}$$

$$\mathbb{E}[\mathbf{Y}] = A\,\mathbb{E}[\mathbf{X}] + \mathbf{b}$$

$$\mathbf{Y} - \mathbb{E}[\mathbf{Y}] = A\,(\mathbf{X} - \mathbb{E}[\mathbf{X}])$$

2)

$$C_{\mathbf{Y}} = \mathbb{E}\left[(\mathbf{Y} - \mathbb{E}[\mathbf{Y}])(\mathbf{Y} - \mathbb{E}[\mathbf{Y}])^T\right] =$$

$$= \mathbb{E}\left[A\,(\mathbf{X} - \mathbb{E}[\mathbf{X}])\{A(\mathbf{X} - \mathbb{E}[\mathbf{X}])\}^T\right] =$$

$$= \mathbb{E}\left[A\,(\mathbf{X} - \mathbb{E}[\mathbf{X}])(\mathbf{X} - \mathbb{E}[\mathbf{X}])^T A^T\right] =$$

$$= A\,\mathbb{E}\left[(\mathbf{X} - \mathbb{E}[\mathbf{X}])(\mathbf{X} - \mathbb{E}[\mathbf{X}])^T\right] A^T =$$

$$= A\,C_{\mathbf{X}}A^T$$

Actividad 2
Transformación lineal - Coloreado

Se quiere utilizar una transformación lineal $\mathbf{Y} = A\,\mathbf{Z} + \mathbf{u}$ que permita convertir un vector aleatorio con parámetros C_Z y $\boldsymbol{\mu}_Z$ en otro vector con parámetros C_Y y $\boldsymbol{\mu}_Y$ (considere los de la actividad anterior).

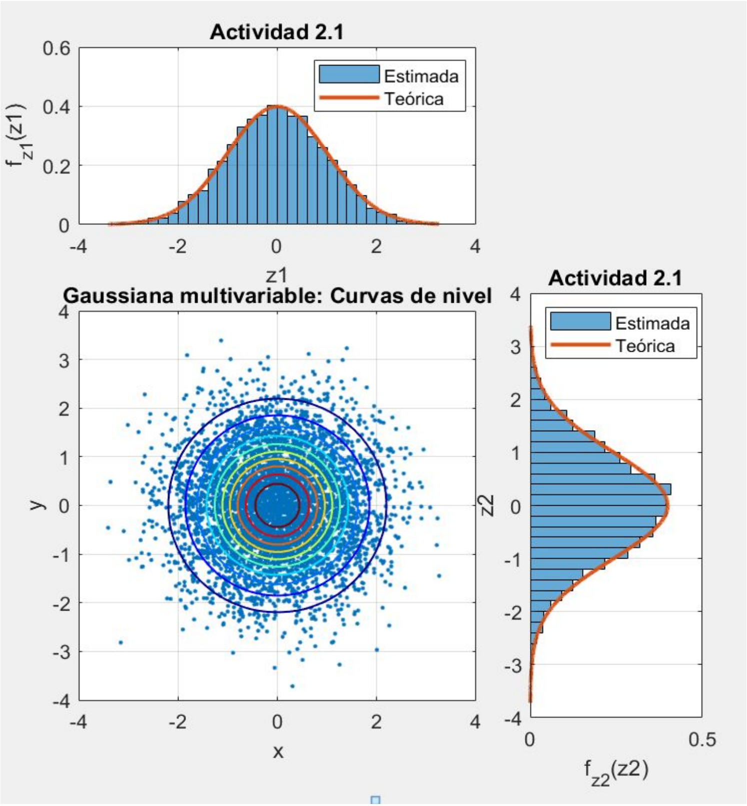
1. Genere un vector normal estándar de dos componentes $\boldsymbol{Z} = [Z_1\ Z_2]^T$ de 5000 realizaciones con media nula $\boldsymbol{\mu}_Z = 0$ y covarianza $C_Z = I$ (identidad). Grafique el histograma de cada componente y las curvas de nivel con la dispersión de puntos de $\boldsymbol{Z}$ superpuestas.

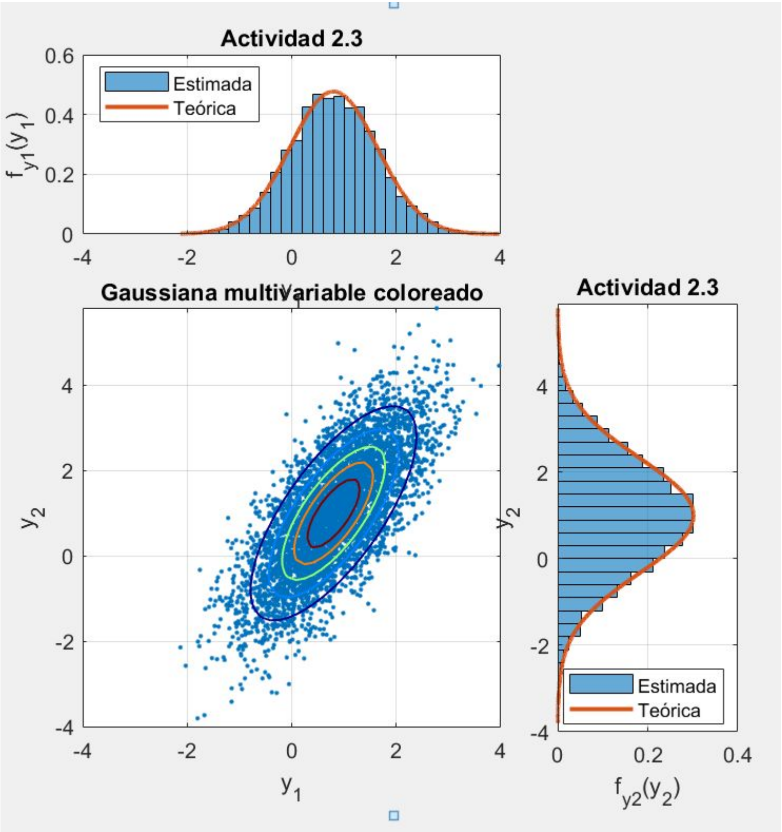
2. Demuestre que partiendo de un vector normal estándar, una matriz de transformación que cumple con lo pedido es $A = C_Y^{1/2}$ y que el vector $\mathbf{u} = \boldsymbol{\mu}_Y$.

   Ayuda: si $C_Y = VDV^T$ es la diagonalización de C_Y, entonces $C_Y^{1/2} = V\,D^{1/2}\,V^T$.

3. Con los parámetros de la transformación, A y $\mathbf{u}$, genere 5000 realizaciones de la variable $\mathbf{Y}$ transformando las muestras del vector $\mathbf{Z}$. Para el vector $\mathbf{Y}$ resultante, Grafique el histograma de cada componente y las curvas de nivel con la dispersión de puntos de $\mathbf{Y}$ superpuesta.

Actividad 2
Transformación lineal - Coloreado





Transformación lineal - Descorrelación y centrado

Buscamos generar una VA **Y**, **centrada (media nula) y descorrelacionada** (covarianza diagonal) a partir de otra VA **X** arbitraria mediante una transformación lineal.

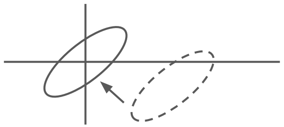
$$\mathbf{Y} = A\,\mathbf{X} + \mathbf{b} \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$$

Centrado

Si se define: $\mathbf{b} = -A\,\mu_{\mathbf{X}}$

$$\mathbf{Y} = A\,(\mathbf{X} - \mu_{\mathbf{X}})$$

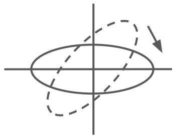
$$\mu_{\mathbf{Y}} = \mathbb{E}\left[A\,(\mathbf{X} - \mu_{\mathbf{X}})\right] = \mathbf{0}$$



Descorrelación

Si se define $A = V^T$ (tal que $C_X = V\,D\,V^T$)

$$C_{\mathbf{Y}} = \mathbb{E}\left[(\mathbf{Y} - \mu_{\mathbf{Y}})\,(\mathbf{Y} - \mu_{\mathbf{Y}})^T\right] = \mathbb{E}\left[\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[A\,(\mathbf{X} - \mu_{\mathbf{X}})\,(\mathbf{X} - \mu_{\mathbf{X}})^T\,A^T\right]$$
$$= A\,\mathbb{E}\left[(\mathbf{X} - \mu_{\mathbf{X}})\,(\mathbf{X} - \mu_{\mathbf{X}})^T\right]A^T$$
$$= A\,C_{\mathbf{X}}\,A^T = A\,V\,D\,V^T\,A^T = D$$



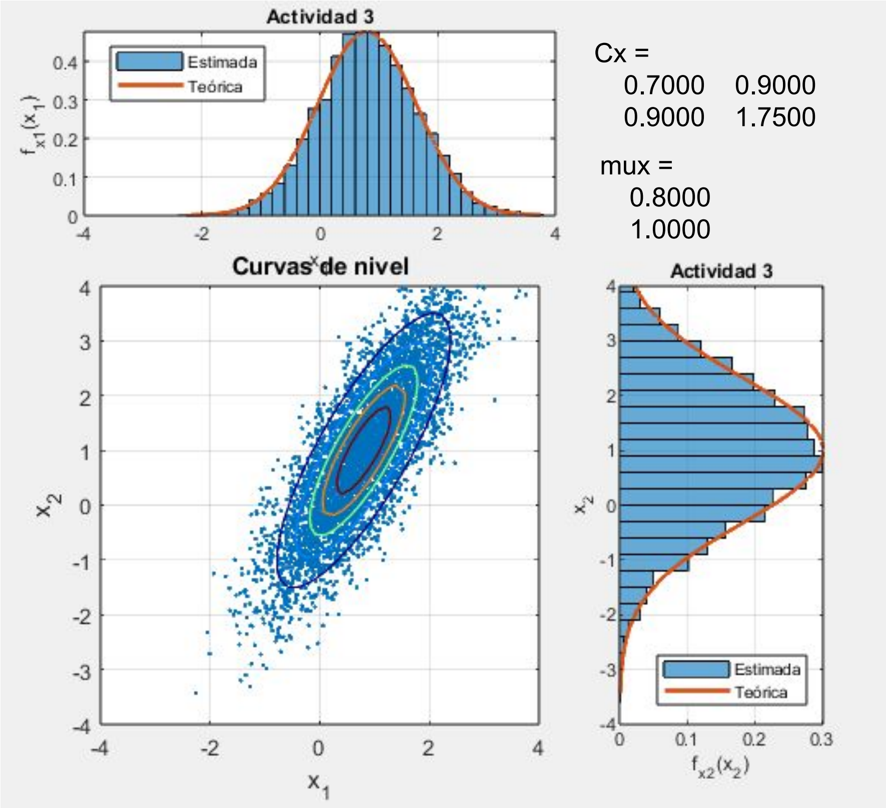
Actividad 3

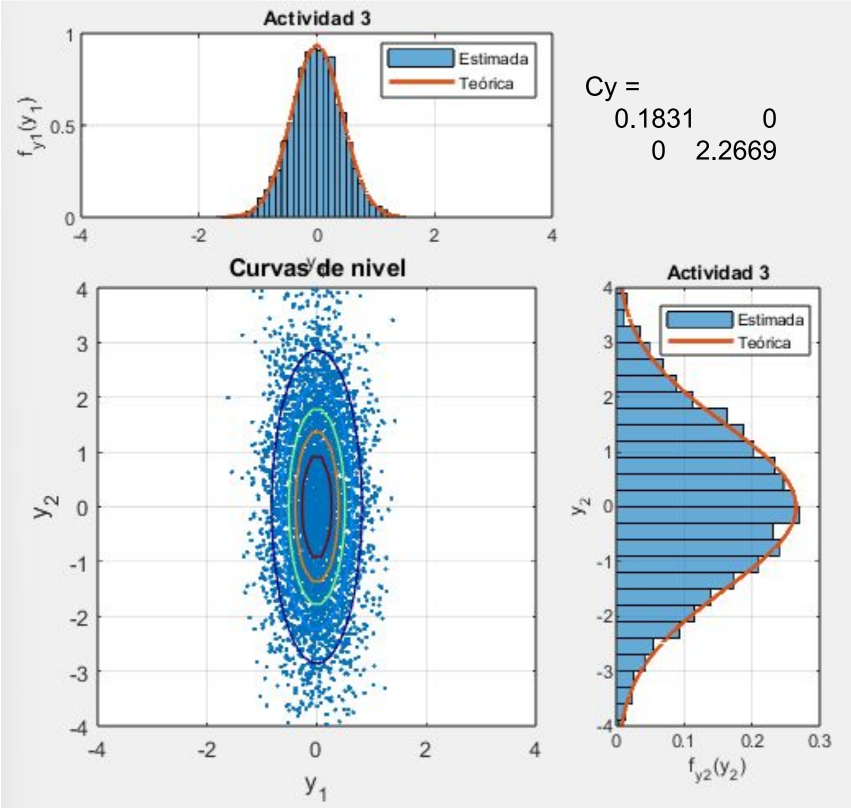
Transformación lineal - Descorrelación y centrado

Genere un vector aleatorio normal de media $\boldsymbol{\mu}_X$ y covarianza C_X. Luego aplique una transformación para generar un nuevo vector **Y** descorrelacionado y de media nula. Haga los gráficos de dispersión de ambos vectores (**X** e **Y**) y sus histogramas de cada componente. También grafique la superficie de la función de densidad teórica para **Y**.

$$C_X = \begin{bmatrix} 0.70 & 0.90 \\ 0.90 & 1.75 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\mu}_X = \begin{bmatrix} 0.80 \\ 1.90 \end{bmatrix}$$

Actividad 3
Transformación lineal - Descorrelación y centrado



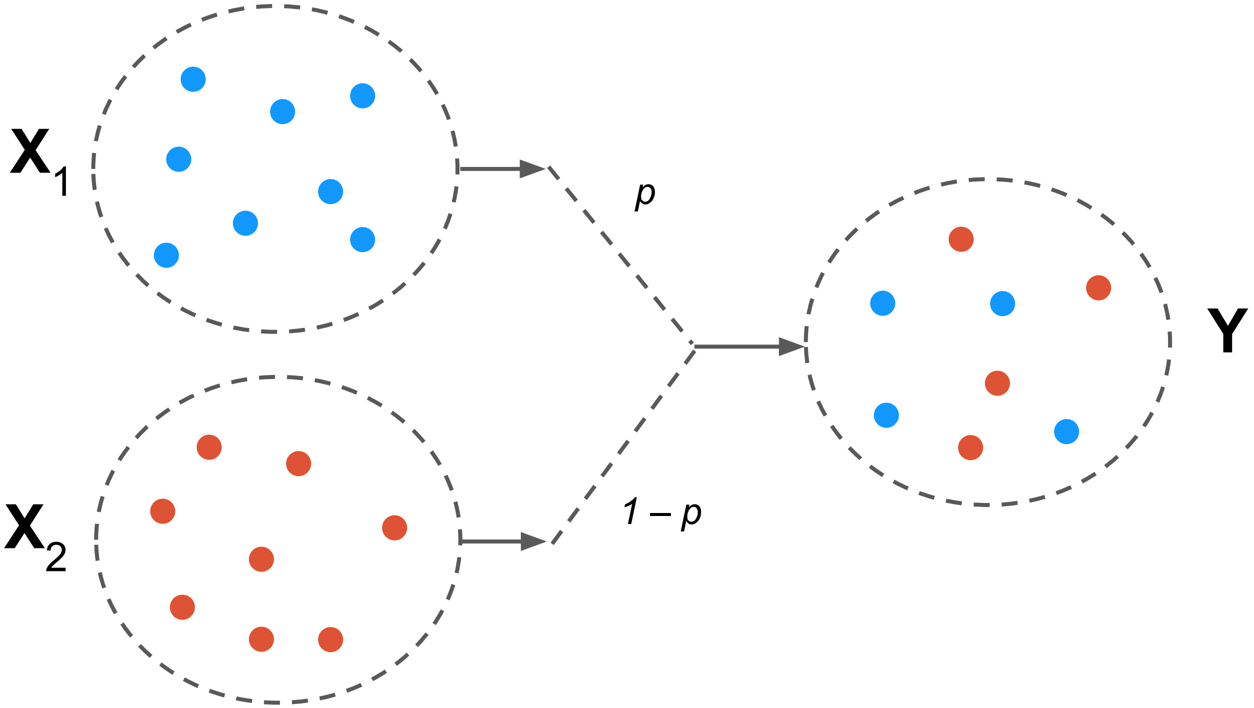


Mezcla de gaussianas

Mezcla de gaussianas

$$\mathbf{X}_1 \sim \mathcal{N}\left(\mu_{\mathbf{X}_1}, C_{\mathbf{X}_1}\right)$$

$$\mathbf{X}_2 \sim \mathcal{N}\left(\mu_{\mathbf{X}_2}, C_{\mathbf{X}_2}\right)$$



Actividad 4
Mezcla de gaussianas

Sea $\mathbf{Y} = [Y_1 \; Y_2]^T$ un vector aleatorio cuya distribución es una mezcla de Gaussianas, es decir,

$$\mathbf{Y} \sim f_Y(\mathbf{y}) = p\, f_{X1}(\mathbf{y}) + (1-p)\, f_{X2}(\mathbf{y}),$$

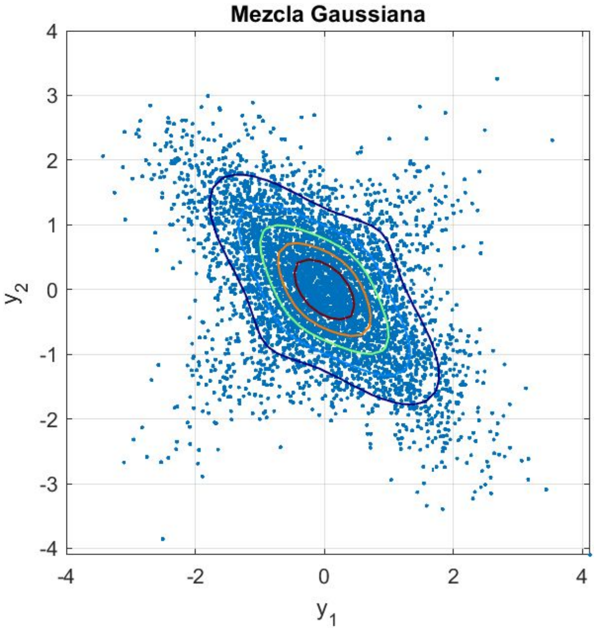
donde $p \in (0.1)$, $X_1 \sim N(0, C_{X1})$ y $X_2 \sim N(0, C_{X2})$ con

$$C_{X_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0.75 \\ 0.75 & 1 \end{bmatrix} \qquad C_{X_2} = \begin{bmatrix} 1 & -0.75 \\ -0.75 & 1 \end{bmatrix}$$

Genere N = 5000 muestras de **Y**, suponiendo que cada variable es seleccionada a partir de una VA $M \sim \mathrm{Ber}(p)$. Considere tres valores de p (0.2, 0.5 y 0.8). Grafique las curvas de nivel de $f_Y(\mathbf{y})$ en el plano (Y_1, Y_2) y las muestras del vector obtenidas en la simulación. También grafique la superficie de probabilidad teórica.

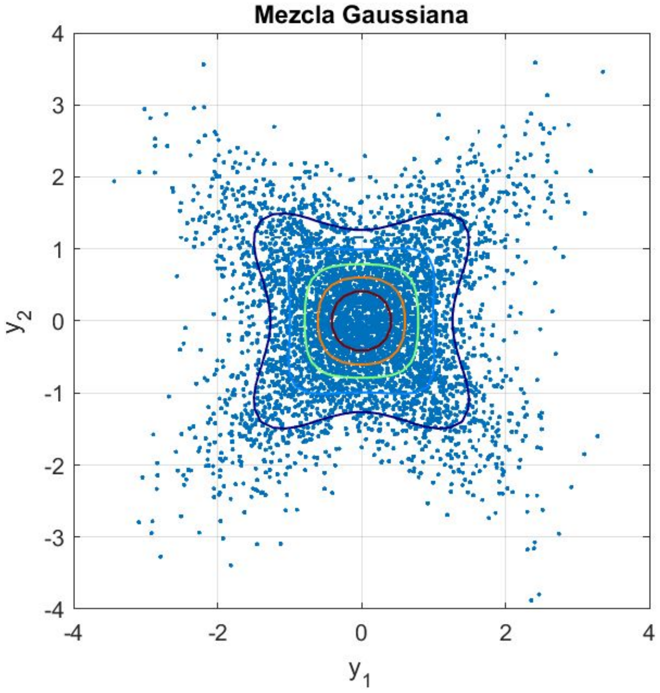
Ayuda: Bernoullli → binornd(1, p, 1, N).

Actividad 4
Mezcla de gaussianas

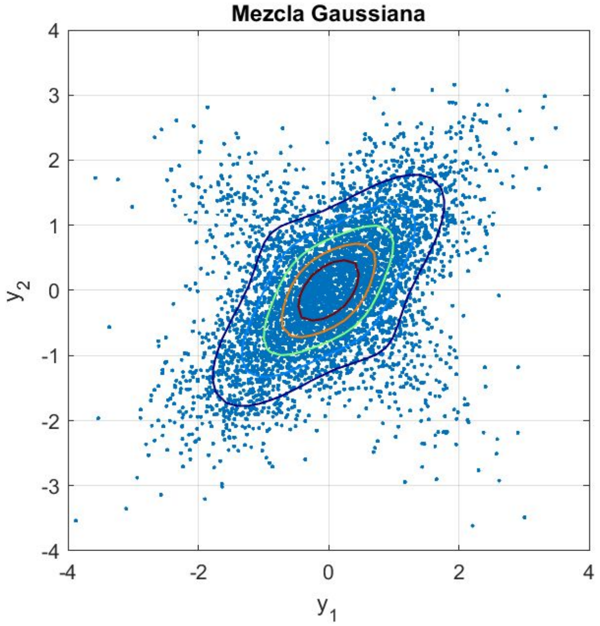


p = 0.2

p = 0.5



p = 0.8



Actividad 4
Mezcla de gaussianas

Tenemos que el vector $\mathbf{Y}$ es una mezcla de gaussianas:

$$\mathbf{Y} \sim f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = p\, f_{\mathbf{X}_1}(\mathbf{y}) + (1-p) f_{\mathbf{X}_2}(\mathbf{y}) \qquad \text{(formula de la fdp de la VA mezcla)}$$

$$= p\,\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 \det(C_{\mathbf{X}_1})}} \exp\left(-0.5\mathbf{y}^T C_{\mathbf{X}_1}^{-1}\mathbf{y}\right) + (1-p)\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 \det(C_{\mathbf{X}_2})}} \exp\left(-0.5\mathbf{y}^T C_{\mathbf{X}_2}^{-1}\mathbf{y}\right)$$

donde podemos notar que no puedo llevar a esta función a algo de la forma de la gaussiana multivariable:

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) \neq \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 \det(C_{\mathbf{Y}})}} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{y}^T C_{\mathbf{Y}}^{-1}\mathbf{y}\right)$$

Entonces ¿es $\mathbf{Y}$ un vector gaussiano?

Actividad 4
Mezcla de gaussianas

Aunque $\mathbf{Y}$ no sea un vector gaussiano podemos calcular su media y matriz de covarianza. Como es un vector mezcla:

$$\mathbf{Y} = \begin{cases} X_1 & \text{si } M = 1 \\ X_2 & \text{si } M = 2 \end{cases}$$

La esperanza de $\mathbf{Y}$ es la esperanza de la mezcla, es decir:

$$\begin{aligned} \mu_{\mathbf{Y}} = \mathbb{E}[\mathbf{Y}] &= \mathbb{E}[\underbrace{\mathbf{Y}|M=1}_{\mathbf{X}_1}]\,\mathbb{P}[M=1] + \mathbb{E}[\underbrace{\mathbf{Y}|M=2}_{\mathbf{X}_2}]\,\mathbb{P}[M=2] \\ &= \mathbb{E}[\mathbf{X}_1]\,\mathbb{P}[M=1] + \mathbb{E}[\mathbf{X}_2]\,\mathbb{P}[M=2] \\ &= \mathbb{E}[\mathbf{X}_1]\,p + \mathbb{E}[\mathbf{X}_2]\,(1-p) \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

que es 0 debido a que $\mathbb{E}[\mathbf{X}_1] = \mathbb{E}[\mathbf{X}_2] = \mathbf{0}$.

Actividad 4
Mezcla de gaussianas

Del mismo modo, la matriz de covarianza se obtiene de una esperanza:

$$
\begin{aligned}
C_{\mathbf{Y}} = R_{\mathbf{Y}} &= \mathbb{E}[\mathbf{Y}\,\mathbf{Y}^T] \\
&= \mathbb{E}[\underbrace{\mathbf{Y}\,\mathbf{Y}^T|M=1}_{\mathbf{X}_1\,\mathbf{X}_1^T}]\,\mathbb{P}[M=1] + \mathbb{E}[\underbrace{\mathbf{Y}\,\mathbf{Y}^T|M=2}_{\mathbf{X}_2\,\mathbf{X}_2^T}]\,\mathbb{P}[M=2] \\
2 &= \mathbb{E}[\mathbf{X}_1\,\mathbf{X}_1^T]\,\mathbb{P}[M=1] + \mathbb{E}[\mathbf{X}_2\,\mathbf{X}_2^T]\,\mathbb{P}[M=2] \\
&= C_{\mathbf{X}_1}\,p + C_{\mathbf{X}_2}\,(1-p) \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0.75 \\ 0.75 & 1 \end{bmatrix} p + \begin{bmatrix} 1 & -0.75 \\ -0.75 & 1 \end{bmatrix} (1-p)
\end{aligned}
$$

Sistema de comunicaciones

Implemente un proceso aleatorio bernulli Ber(p) que simule una secuencia de bits

Trabajo práctico 1

Ejercicio 1: Correlación

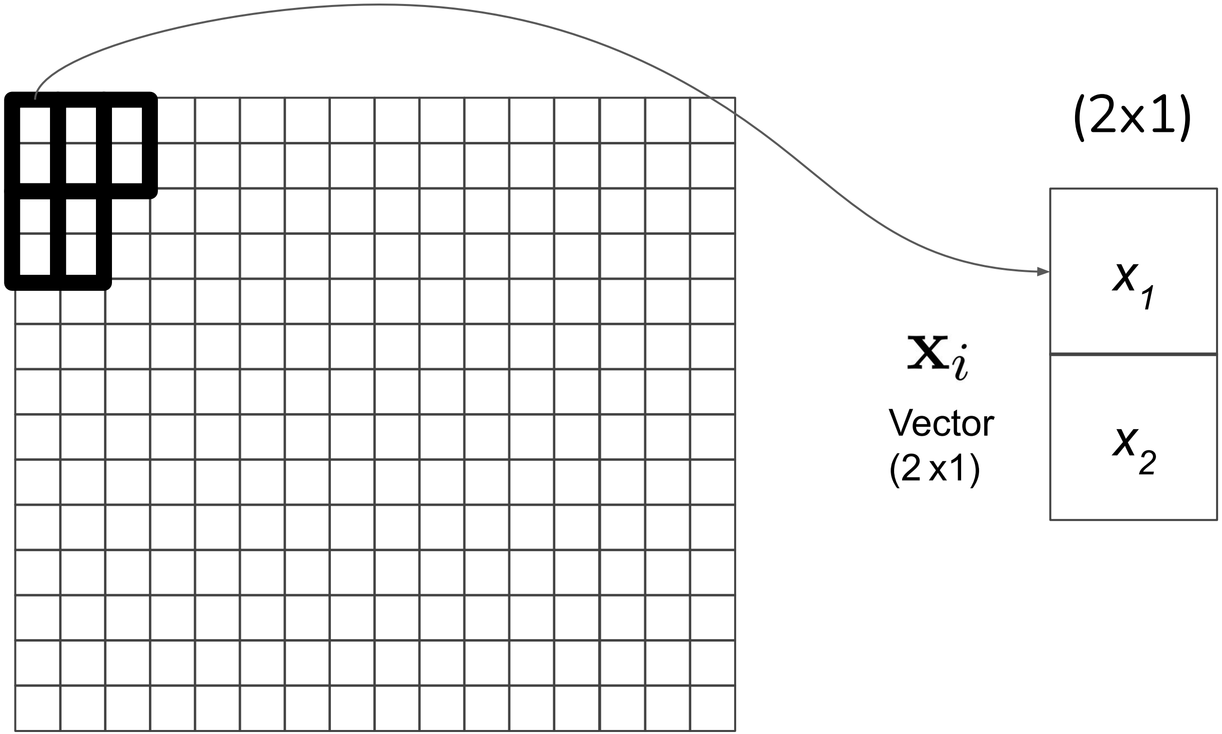
El objetivo de este ejercicio es descomponer la matiz de imagen en bloques de solo dos píxeles con el propósito de poder ver gráficamente la correlación entre píxeles vecinos.

(a) Cargar en Matlab una imagen (convertirla a escala de grises y a tipo `double`). Formar bloques de 2×1 para definir el vector $\mathbf{x} = [x_0 \; x_1]^T$ (con x_0 y x_1 dos píxeles contiguos).

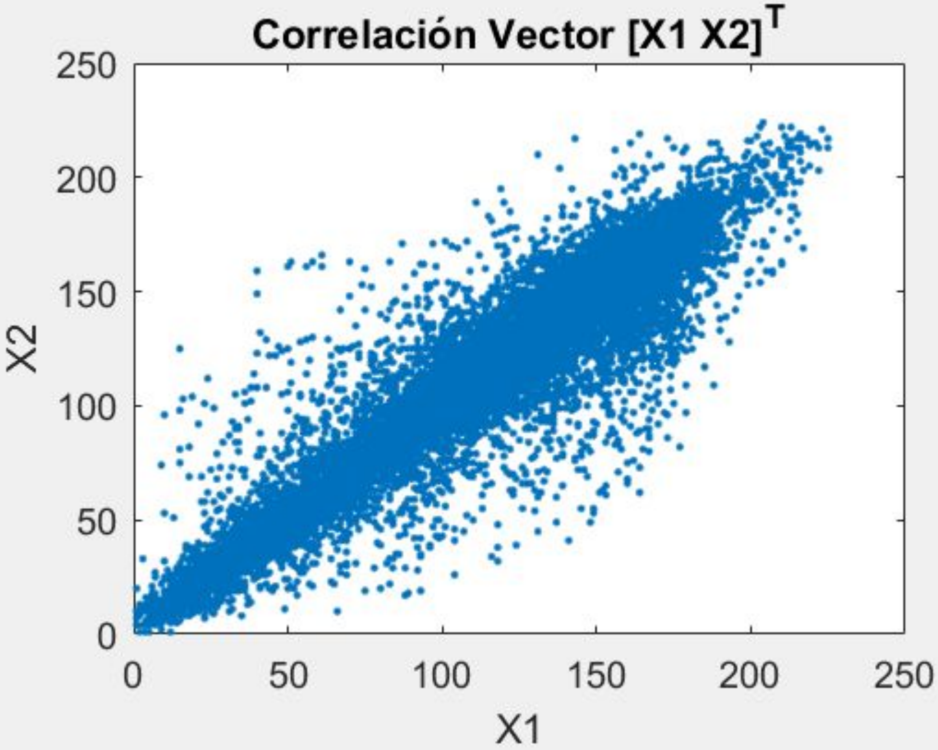
(b) Hacer un gráfico de dispersión para ver gráficamente cuánta correlación existe entre los dos píxeles vecinos para cada imagen. Probar con las imágenes `img_01.jpg` y `img_02.jpg`.

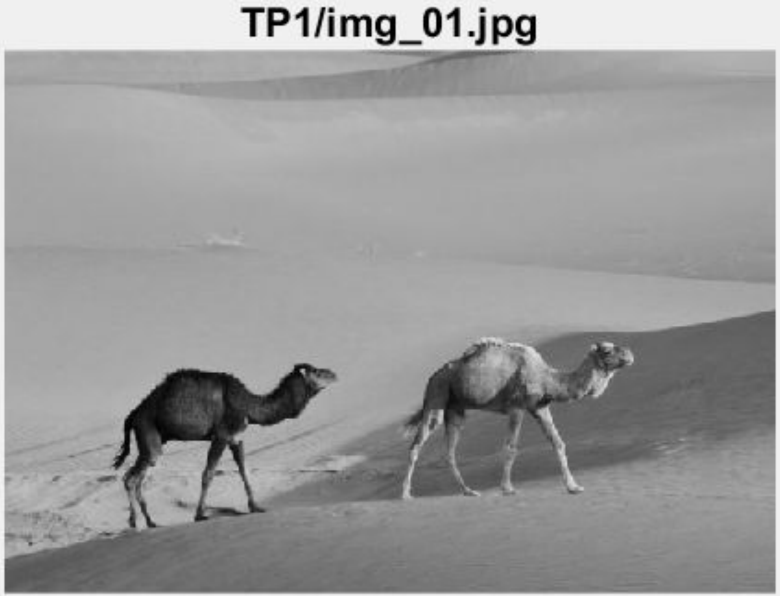
(c) Calcular coeficiente de correlación de cada imagen (se puede utilizar la función `corrcoef()`).

Trabajo práctico 1

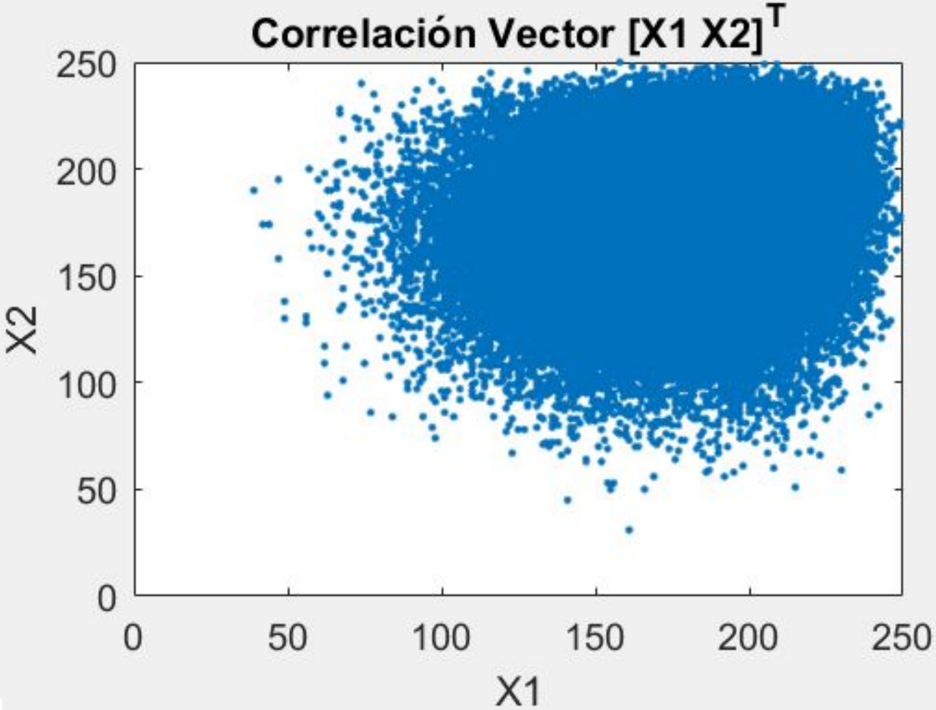


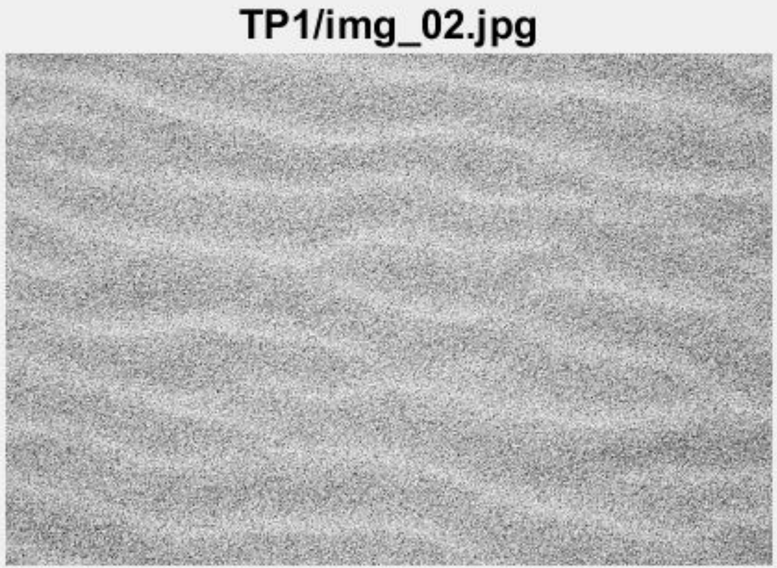
Trabajo práctico 1: Ej 1



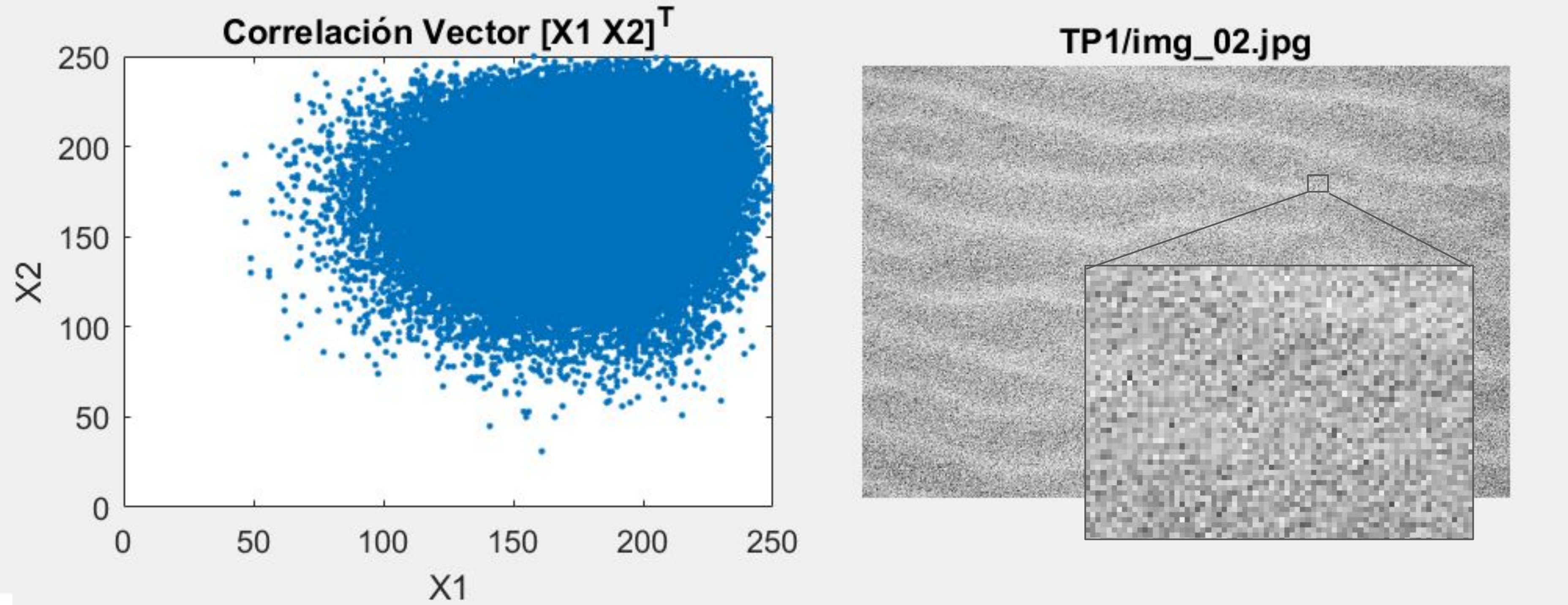


Trabajo práctico 1: Ej 1





Trabajo práctico 1: Ej 1



Trabajo práctico 1: Ej 2

Ejercicio 2: Compresión

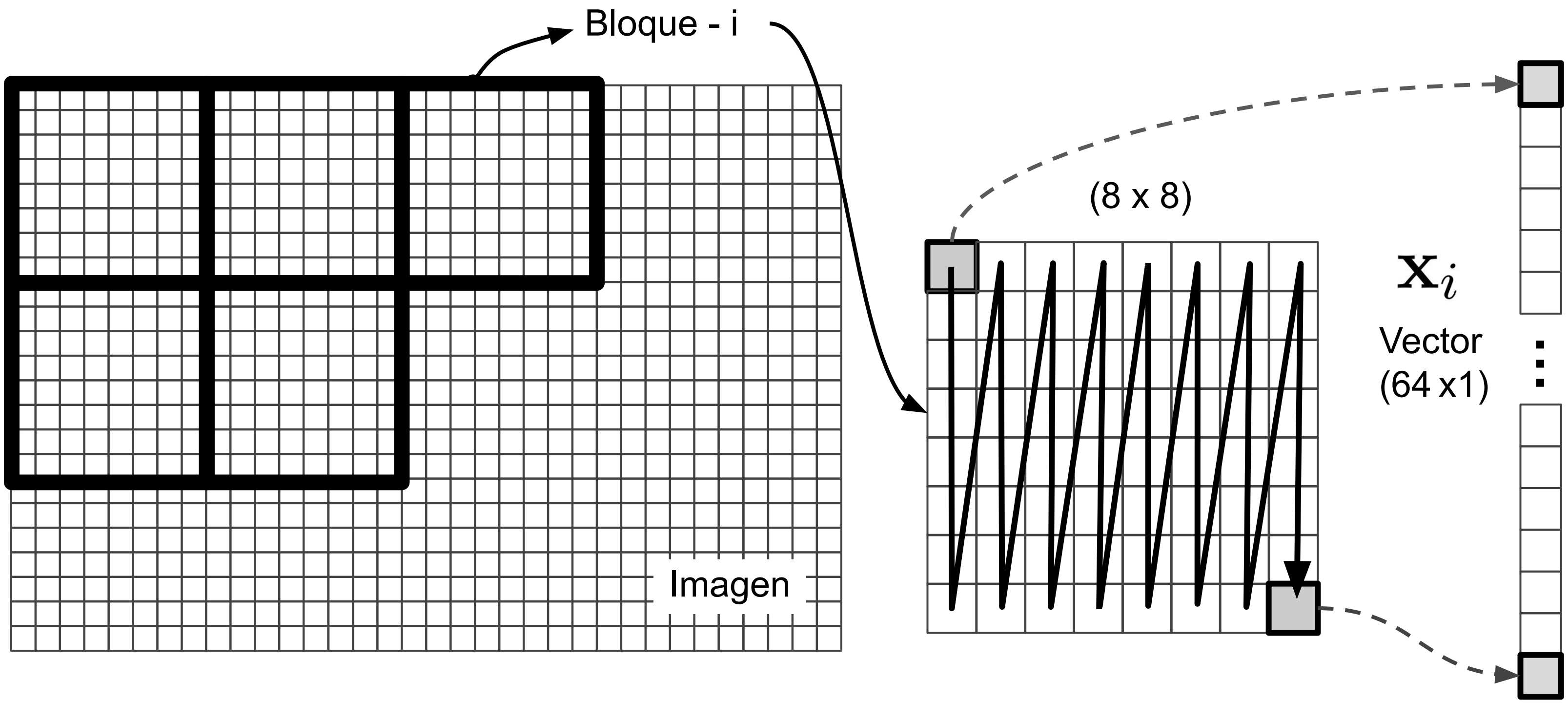
Para realizar el proceso de compresión será necesario segmentar la imagen en bloques de tamaño estándar para luego aplicar la reducción de dimensionalidad mediante PCA.

(a) Desarmar la imagen `img_03.jpg` en bloques de 8×8 y obtener los vectores $\mathbf{x}_i$. Estimar la matriz de covarianza $C_{\mathbf{x}}$ y la media $\widehat{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{x}}$.

(b) Aplicar el método de KLT: diagonalizar la matriz $\widehat{C}_{\mathbf{x}}$. Asumiendo $CR = 20\,\%$ quedarse con los autovectores necesarios para definir U y cumplir con esa tasa de compresión. Obtener los vectores proyectados $\widehat{\mathbf{y}}_i$ en el espacio de la compresión.

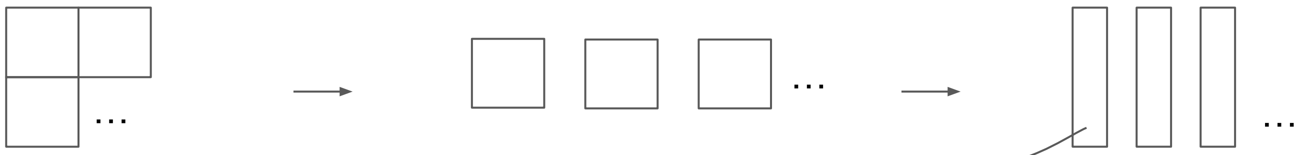
(c) Calcular la cantidad de elementos almacenados (incluyendo matriz de transformación, la media, y los vectores reducidos). Comparar el tamaño reducido con el original (en términos de cantidad de elementos almacenados).

Trabajo práctico 1: Ej 2

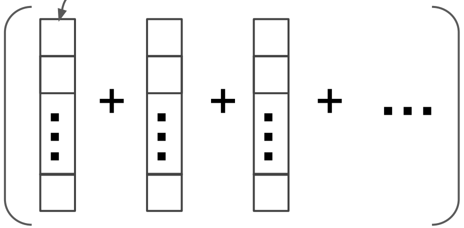


L : cantidad de bloques que entran en la imagen

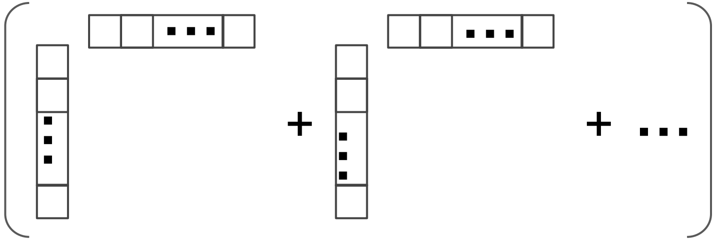
Trabajo práctico 1: Ej 2



$$\widehat{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{x}} = \frac{1}{L}\sum_{i=0}^{L-1}\mathbf{x}_i = \frac{1}{L}$$



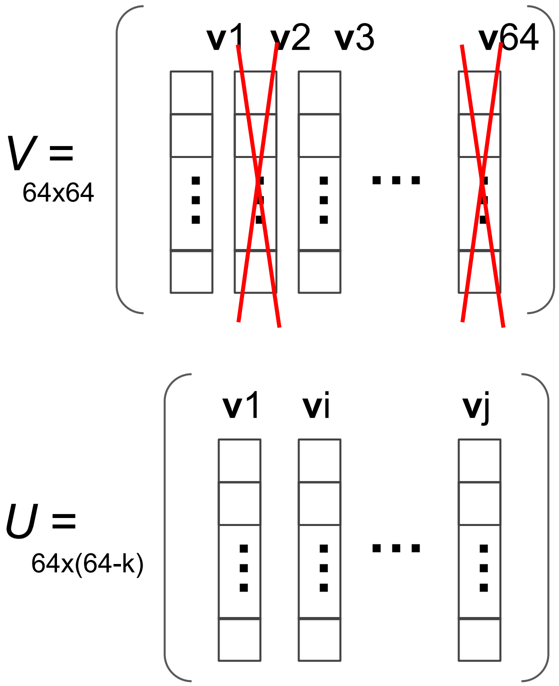
$$\widehat{C}_{\mathbf{x}} = \frac{1}{L}\sum_{i=0}^{L-1}(\mathbf{x}_i - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_i - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{x}})^T = \frac{1}{L}$$



Trabajo práctico 1: Ej 2

$$C_{\mathbf{x}} = VDV^T$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{64} \end{bmatrix}$$



- Cantidad de autovectores mantener: K = round(CR/100*64)
- Nos quedamos con los K *aves* asociados a los K *avas* mayores

$$\hat{\mathbf{y}} = U^T\mathbf{x}$$

size = numel(Y) + numel(U) + extras
extras = numel(CR) + numel(Bw) + numel(Bh) + . . .

Trabajo práctico 1: Ej 3

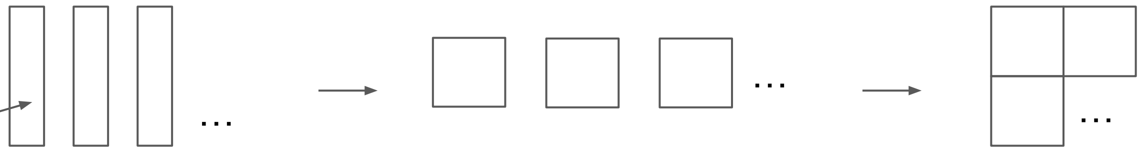
Ejercicio 3: Descompresión

(a) Implementar el proceso inverso para decodificar la imagen comprimida. Regenerar la imagen a reconstruir mediante la transformación

(b) Graficar con `imshow()` la imagen y compararla con la original (*Ayuda: convertir a 8 bit para graficar la imagen*).

Trabajo práctico 1: Ej 3

$$\hat{\mathbf{x}}_i = U\hat{\mathbf{y}}_i$$



Trabajo práctico 1: Ej 3

$$MSE = \frac{1}{N_w N_h} \sum_{i=0}^{N_w-1} \sum_{j=0}^{N_h-1} (p_{ij} - \hat{p}_{ij})^2$$

p_{ij} y $\hat{p}_{ij}$ representan el valor del pıxel en la posición ij original y reconstruido,
Nw y Nh la cantidad de pıxeles de ancho y de alto respectivamente

- MSE = 11.9065
- Tamaño Original: 166600 (cantidad de píxeles totales)
- Tamaño Comprimido: 31216
- CR_real = 18.74 %

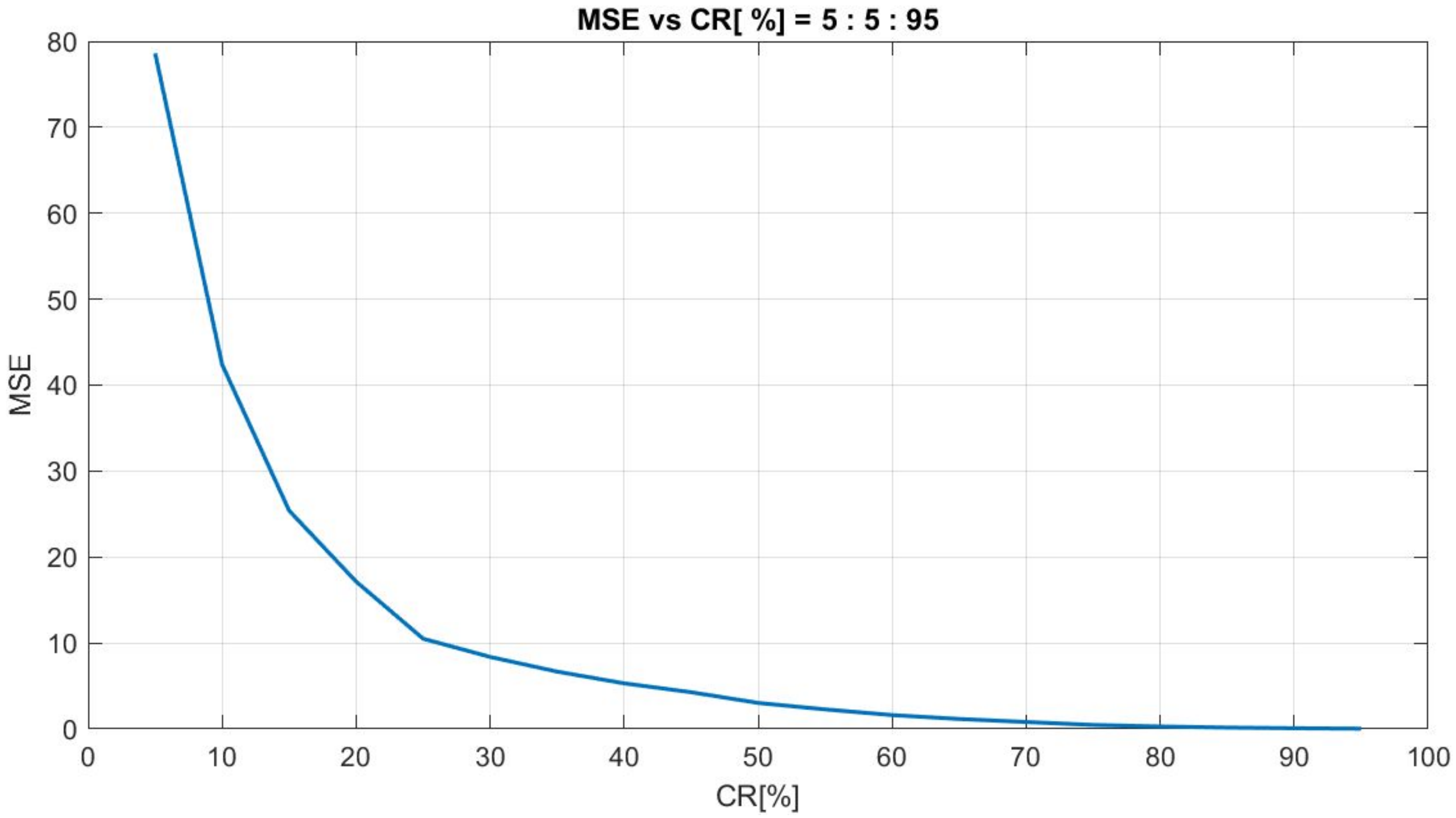
Trabajo práctico 1: Ej 4

Ejercicio 4: Error cuadrático medio

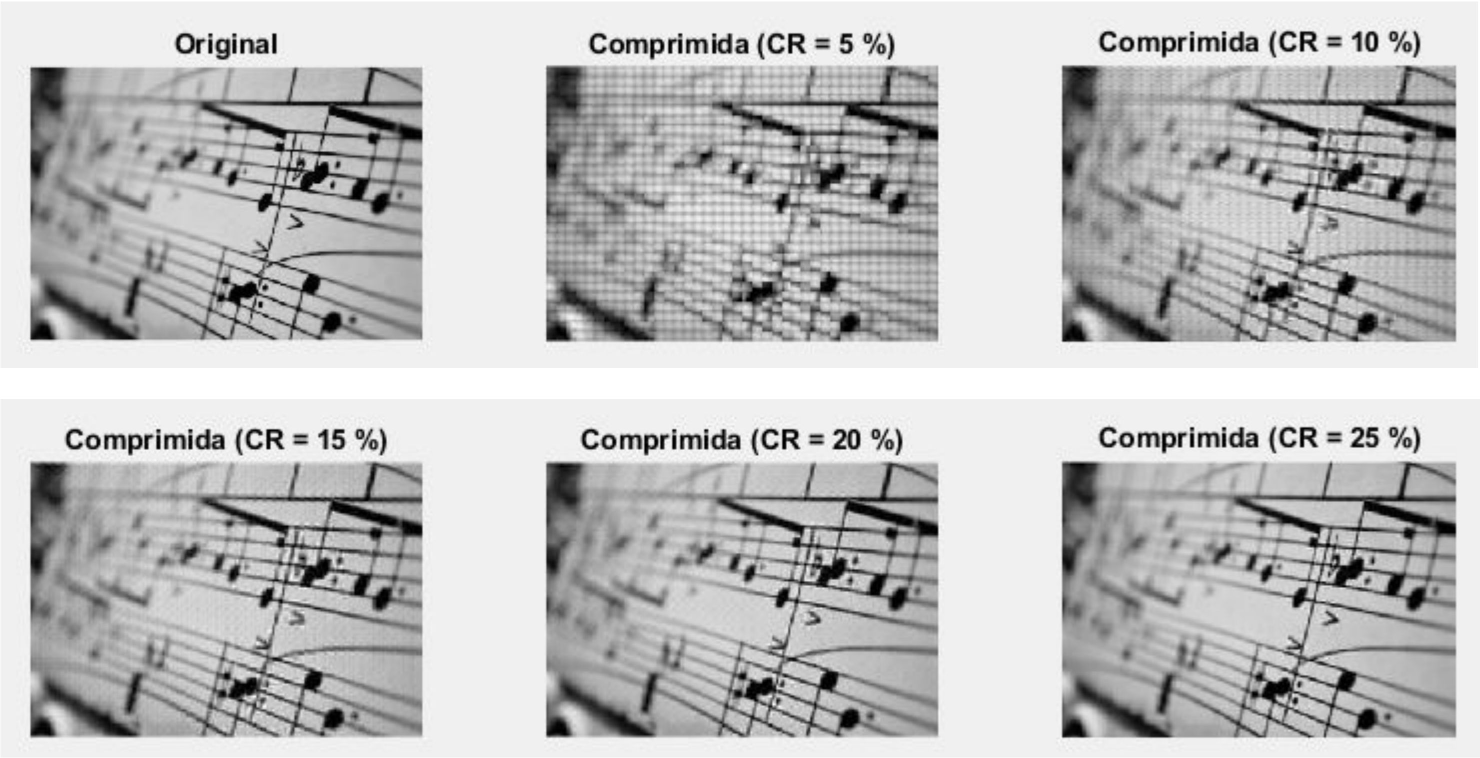
(a) Abrir la imagen `img_04.jpg`, calcular y graficar MSE en función de $CR[\%] = \{5 : 5 : 95\}$.

(b) Graficar la imagen original y todas las versiones comprimidas para los casos $CR[\%] = \{5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25\}$.

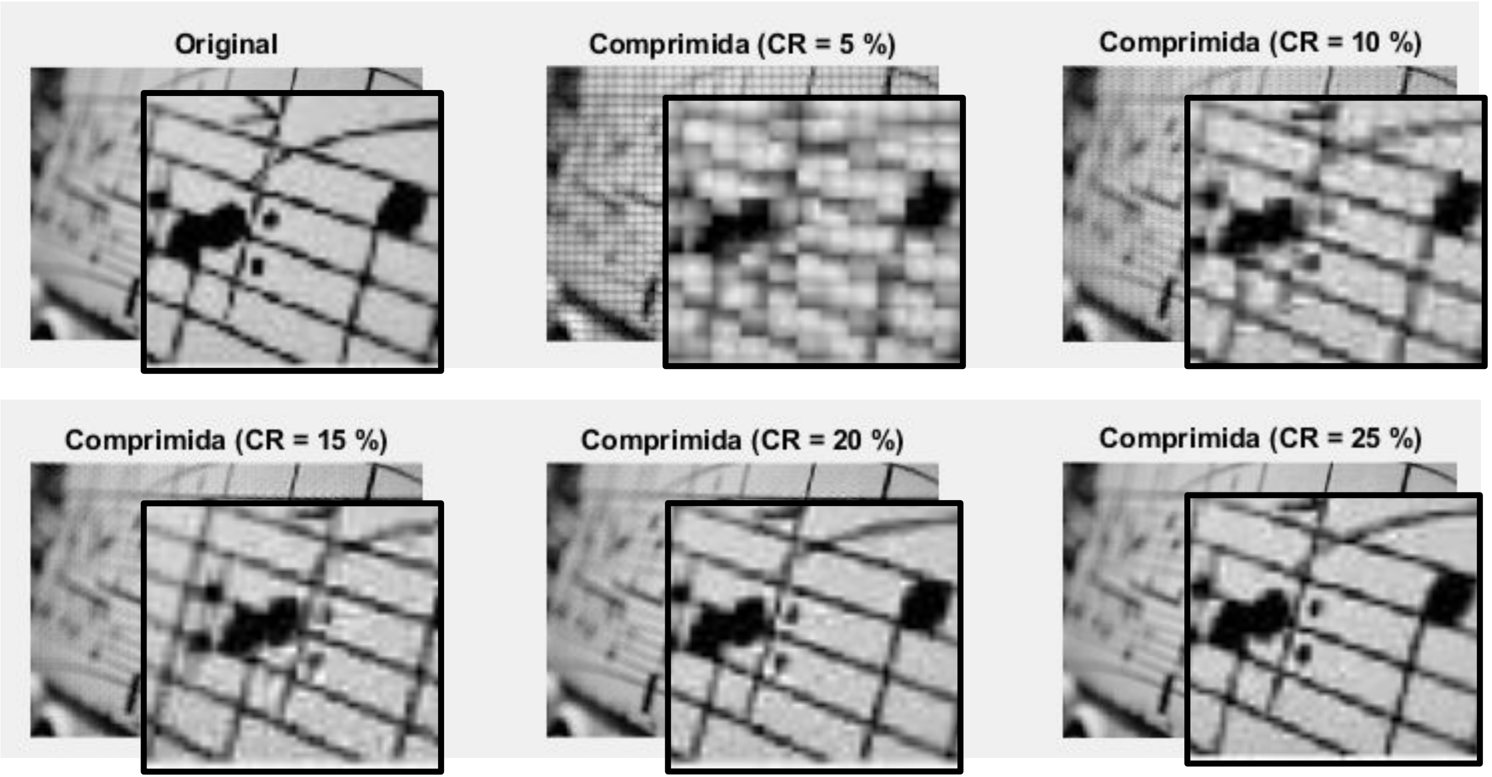
Trabajo práctico 1: Ej 4

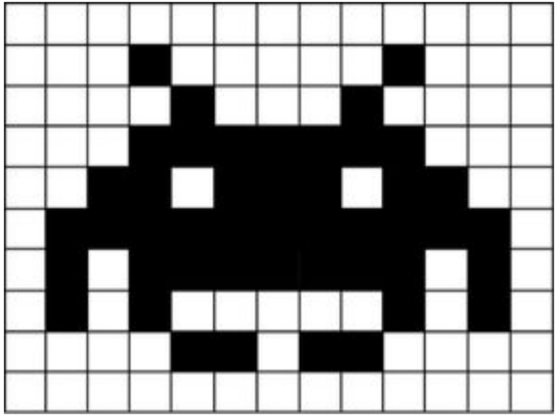


Trabajo práctico 1: Ej 4



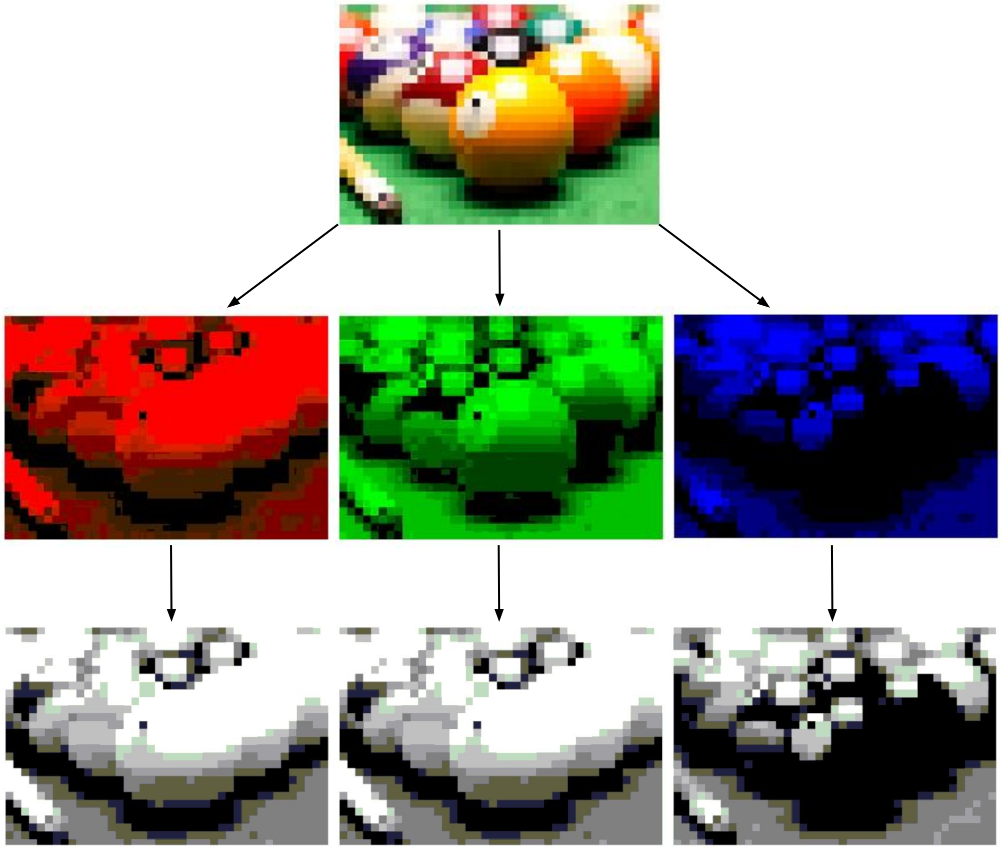
Trabajo práctico 1: Ej 4

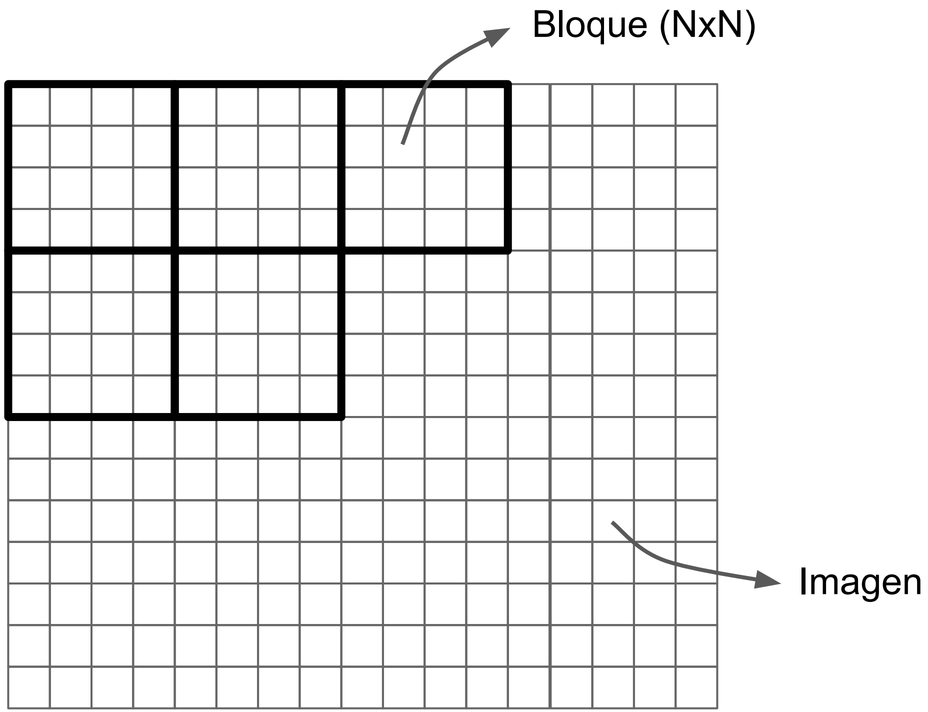


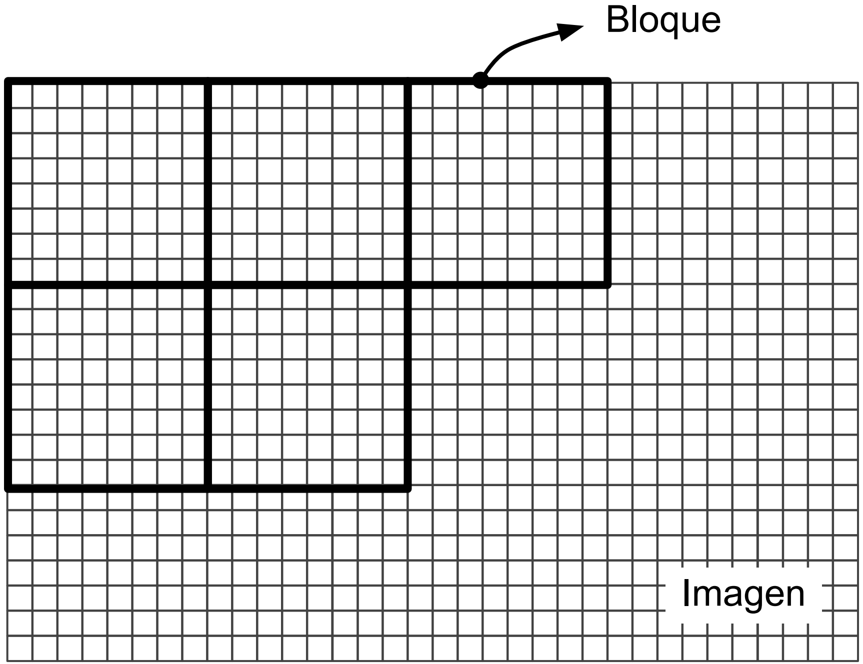


0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0
0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

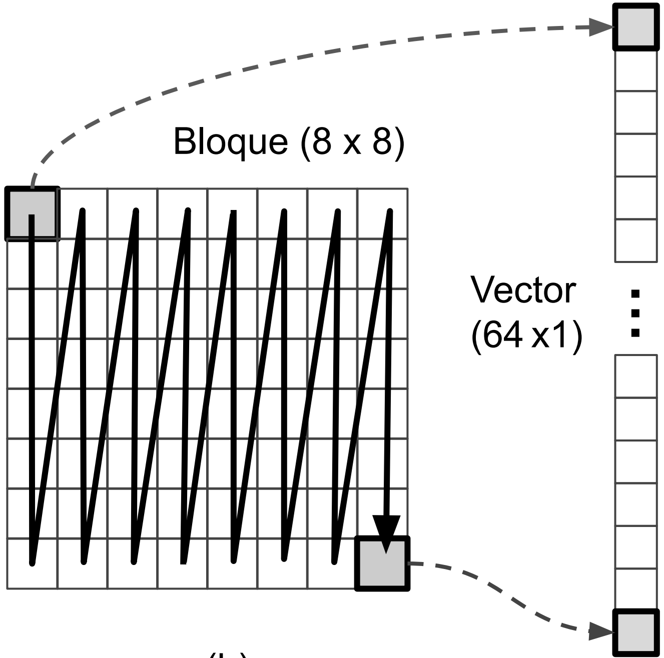
128	128	160	128	128	96	128	128	128	128
128	160	128	64	32	0	0	192	160	128
160	160	32	32	0	0	32	64	128	160
192	64	128	255	255	255	192	96	64	192
160	96	192	255	192	192	255	96	64	192
160	64	160	160	192	192	128	64	0	160
160	64	160	0	160	128	0	32	0	128
192	160	128	255	192	128	160	64	64	255
160	192	96	255	160	64	128	32	192	255
160	192	128	192	192	96	96	64	255	192
160	192	160	64	128	64	32	96	255	192
160	192	255	0	0	0	96	128	255	255



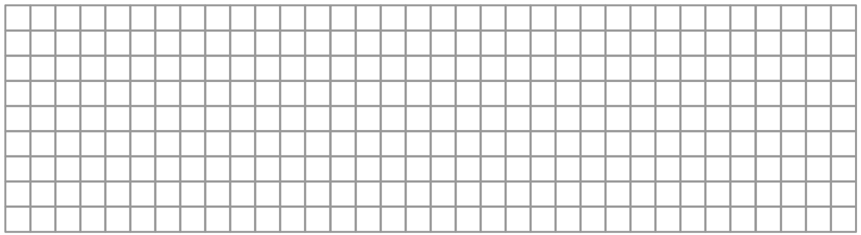

Bloque (NxN)
Imagen

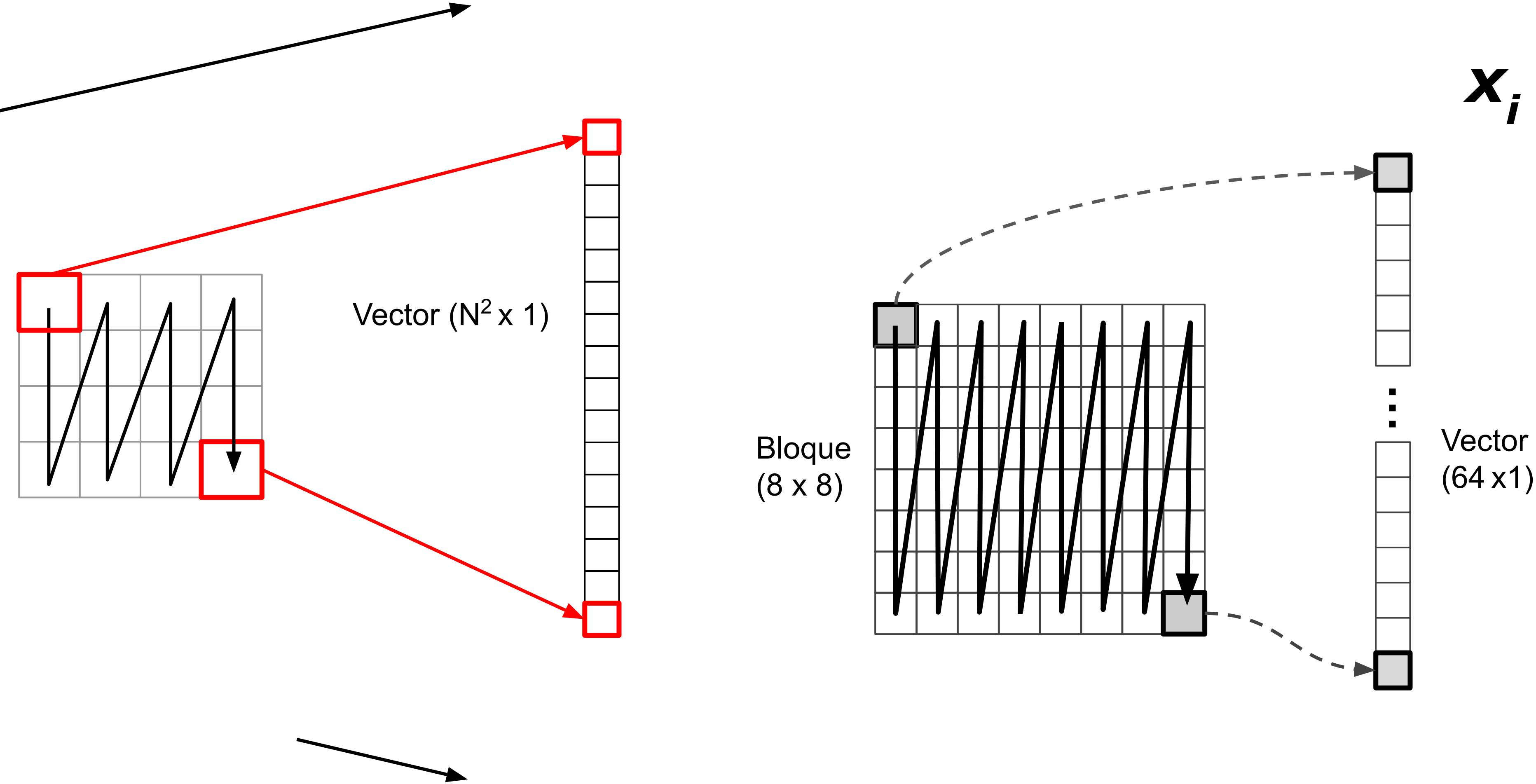


(a)



(b)





Vector (N^2 x 1)
x_i
Bloque
(8 x 8)
Vector
(64 x1)