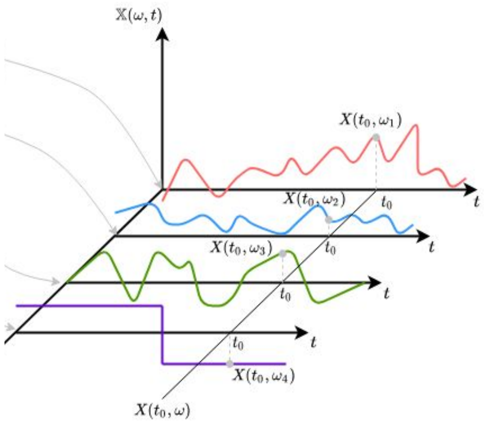
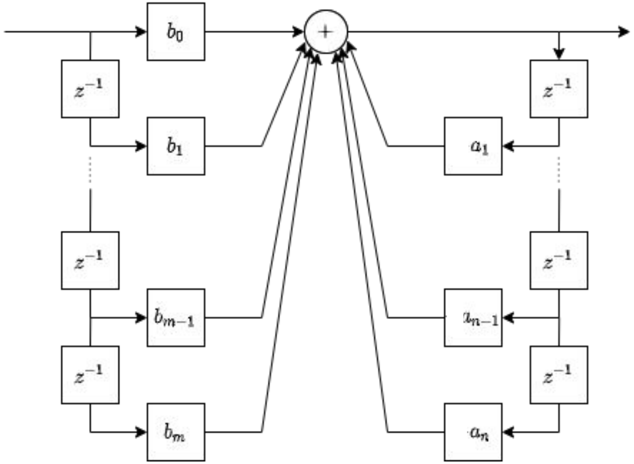
Procesos estocásticos (86.09)

Sistemas LTI
Procesos aleatorios

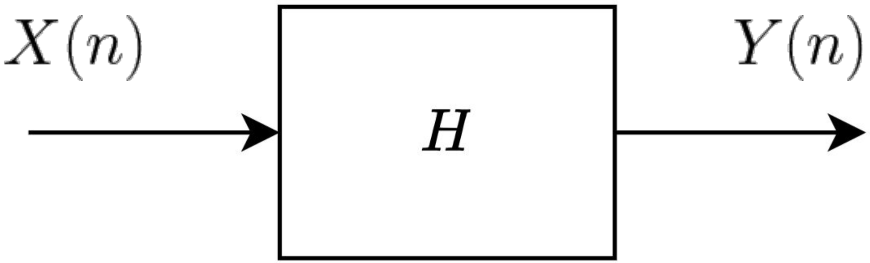
- AR
- MA
- ARMA





Respuesta de un Sistema LTI a un Proceso de entrada ESA

Respuesta de un Sistema LTI a un Proceso de entrada ESA



Sistema LTI

- Sea H un sistema Lineal Tiempo Invariante (LTI)
- X(n) es un proceso estocástico de entrada al sistema.
- ¿Qué podemos decir de la salida del sistema Y(n)?

Respuesta de un Sistema LTI a un Proceso de entrada ESA

La salida del sistema estable, Y(n), es la convolución entre h(n) y la entrada X(n) . Para tiempo discreto resulta:

$$Y(n) = h(n) * X(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)X(n-m)$$

La salida Y(n) es un nuevo proceso estocástico.

La pregunta que surge es: si la entrada al sistema es ESA,
¿la salida también lo es?

Respuesta de un Sistema LTI a un Proceso de entrada ESA

La esperanza del proceso está dada por:

$$\mathbb{E}[Y(n)] = \mathbb{E}\Big[\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)X(n-m)\Big] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)\mathbb{E}\big[X(n-m)\big] =$$

$$\mu_X \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)e^{j0} = \mu_X H(e^{j0}) = \mu_Y$$

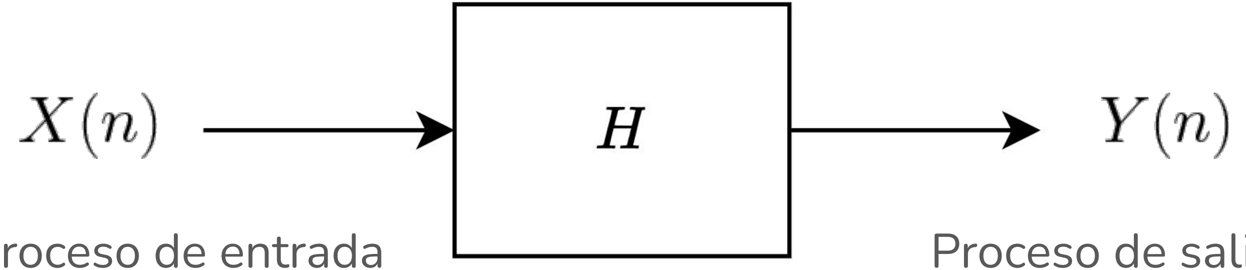
Media constante

La función de autocorrelación del procesos está dada por:

$$R_Y(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{p=-\infty}^{\infty} h(m)h^*(p)R_X(k+p-m) = (h * h_b^* * R_X)(k)$$

Depende solo de la diferencia de tiempos (k)

Respuesta de un Sistema LTI a un Proceso de entrada ESA



Proceso de entrada

μ_X

$S_X(\omega)$

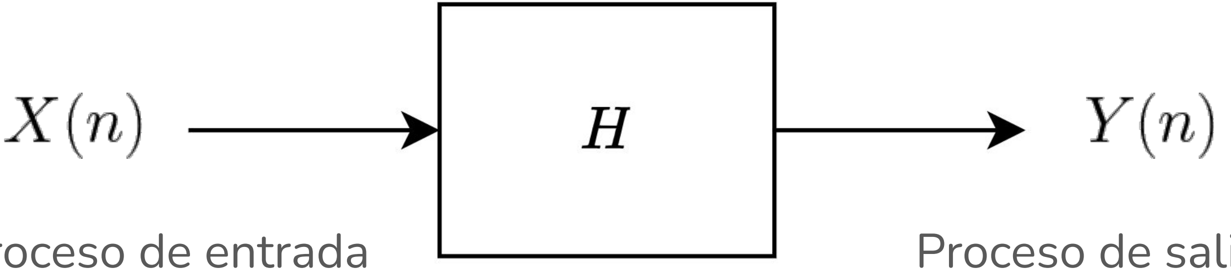
Sistema LTI

Proceso de salida

$\mu_Y = H(0)\mu_X$

$S_Y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_X(\omega)$

Respuesta de un Sistema LTI a un Proceso de entrada ESA



Proceso de entrada

μ_X

$S_X(\omega)$

Sistema LTI

Proceso de salida

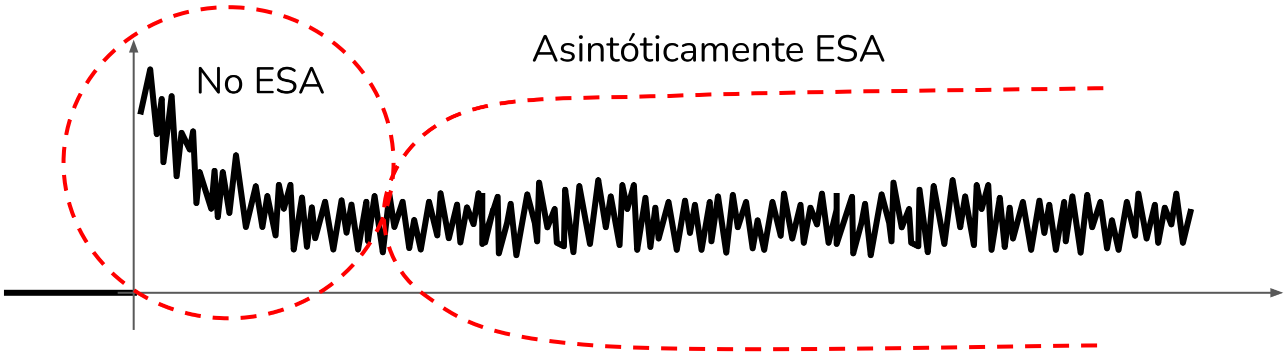
$\mu_Y = H(0)\mu_X$

$$\boxed{S_Y(\omega) = |H(\omega)|^2 \, S_X(\omega)}$$

Respuesta de un Sistema LTI a un Proceso de entrada ESA

¿Qué pasa cuando el proceso de entrada $x(n)$ no comienza en $-\infty$?

- Si un proceso $X(n)$ comienza en un instante $n_0 > -\infty$, la salida **no es ESA**
- Sin embargo, puede ser **asintóticamente ESA** si el transitorio decae rápido.



Procesos MA
(Moving Average)

Moving Average (MA)

Los procesos MA de orden M (MA-M) se expresan en términos de una combinación lineal finita del proceso de entrada en instantes pasados y actual:

$$y(n) = b_0\, x(n) + b_1\, x(n-1) + \ldots + b_M\, x(n-M)$$

$$\boxed{y(n) = \sum_{j=0}^{M} b_j\, x(n-j)}$$

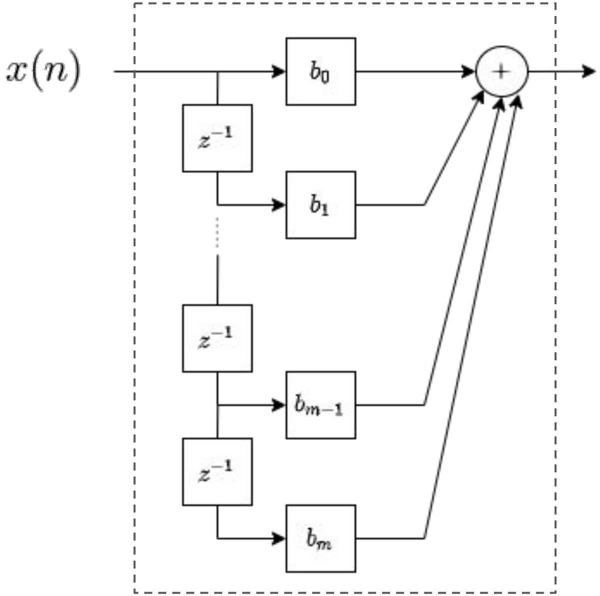
Si hallamos la respuesta impulsiva h(n) de este sistema veremos que se trata de una respuesta impulsiva finita (FIR):

$$y(n) = \sum_{i=0}^{M} h(i)\, x(n-i) = x(n) * h(n)$$

Moving Average (MA)

Gráficamente podemos representarlo con una realización de un sistema FIR:

Proceso blanco



H(z)

$$y(n) = \sum_{j=0}^{M} b_j\, x(n-j)$$ Proceso MA

Aplicando la Transformada Z, tenemos:

$$Y(z) = \sum_{i=0}^{M} b_i\, X(z) z^{-i} \qquad Y(z) = H(z)X(z)$$

$$H(z) = \sum_{i=0}^{M} b_i\, z^{-i}$$

Transferencia del sistema LTI que define al proceso MA (sistema de **solo ceros**)

Procesos AR (Autorregresivos)

Procesos Autoregresivos (AR)

Los procesos AR de orden N (AR-N) se expresan como una combinación lineal las salidas en instantes pasados, más la entrada en el instante actual:

$$y(n) = a_1\, y(n-1) + a_2\, y(n-2) + \ldots + a_N\, y(n-N) + x(n)$$

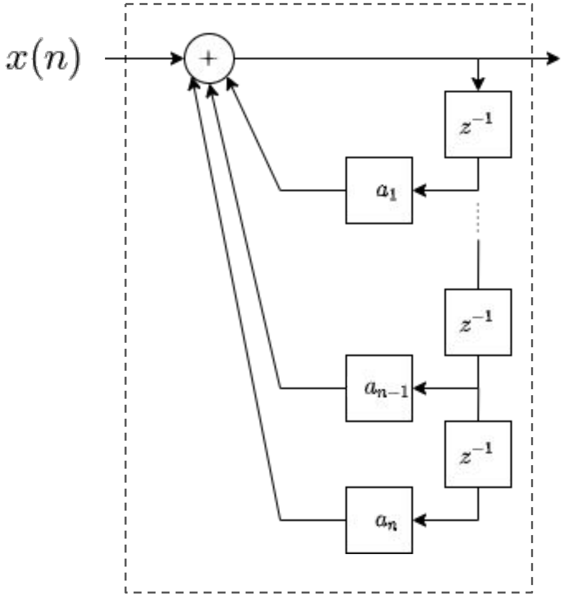
$$\boxed{y(n) = \sum_{i=1}^{N} a_i\, y(n-i) + x(n)}$$

Si hallamos la respuesta impulsiva h(n) de este sistema (causal) veremos que se trata de una respuesta impulsiva infinita (IIR):

$$y(n) = \sum_{i=0}^{+\infty} h(i)\, x(n-i)$$

Procesos Autoregresivos (AR)

Proceso blanco



H(z)

$$y(n) = \sum_{i=1}^{N} a_i \, y(n-i) + x(n)$$

Proceso AR

Aplicando la Transformada Z, tenemos:

$$Y(z) = \sum_{i=1}^{N} a_i \, Y(z) z^{-i} + X(z)$$

$$H(z) = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^{N} a_i z^{-i}}$$

Transferencia del sistema LTI que define al proceso AR (sistema de s**olo polo**s)

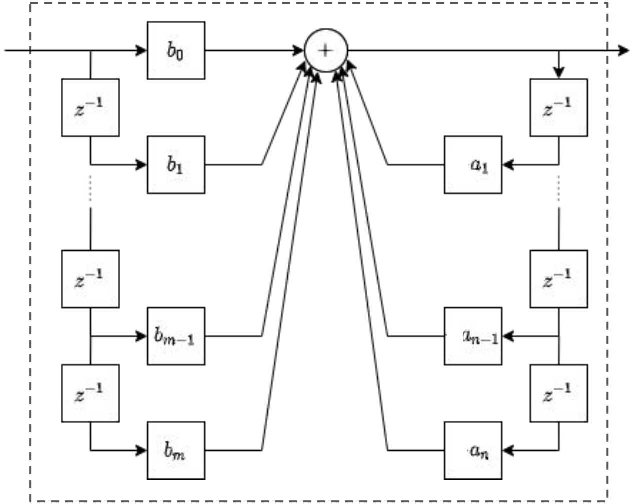
Procesos ARMA

Procesos Autoregresivos (ARMA)

El caso general es cuando tanto los a_i como los b_i son no nulos hablamos de procesos ARMA de orden N, M (ARMA - N, M), y nos referimos a un sistema LTI con la forma:

$$y(n) = \sum_{i=1}^{N} a_i\, y(n-i) + \sum_{j=0}^{M} b_j\, x(n-j)$$

Proceso blanco $x(n)$



$y(n)$:Proceso ARMA

Actividad 1

Actividad 1

Sea un proceso X(n) gaussiano blanco *N*(0,1) la entrada de un sistema LTI, H(z), cuya salida Y(n) es un proceso de tipo AR-N. Considere los dos siguientes casos:

a) $Y(n) = X(n) + 0.8\, X(n-1) + 0.4\, X(n-2)$

b) $Y(n) = X(n) - 0.8\, X(n-1) + 0.4\, X(n-2)$

c) $Y(n) = X(n) + 0.2\, X(n-1) - X(n-2) - 0.2\, X(n-3)$

Para cada caso, se pide:

- Generar una realización de Y(n) para un largo de L=1000 puntos. Graficar Y(n) y X(n). También grafique las funciones de autocorrelación de ambos procesos.
- Determinar la expresión de la PSD teórica.
- Estimar la PSD de cada proceso mediante el periodograma y graficarlo junto a su PSD teórica.
- Anaice el comportamiento en frecuencia en realciión al tipo de sistema LTI utilizado.

Actividad 1 (a)

$$X(n) \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow Y(n)$$

$$Y(n) = X(n) + 0.8\,X(n-1) + 0.4\,X(n-2)$$

h(n) sistema FIR:

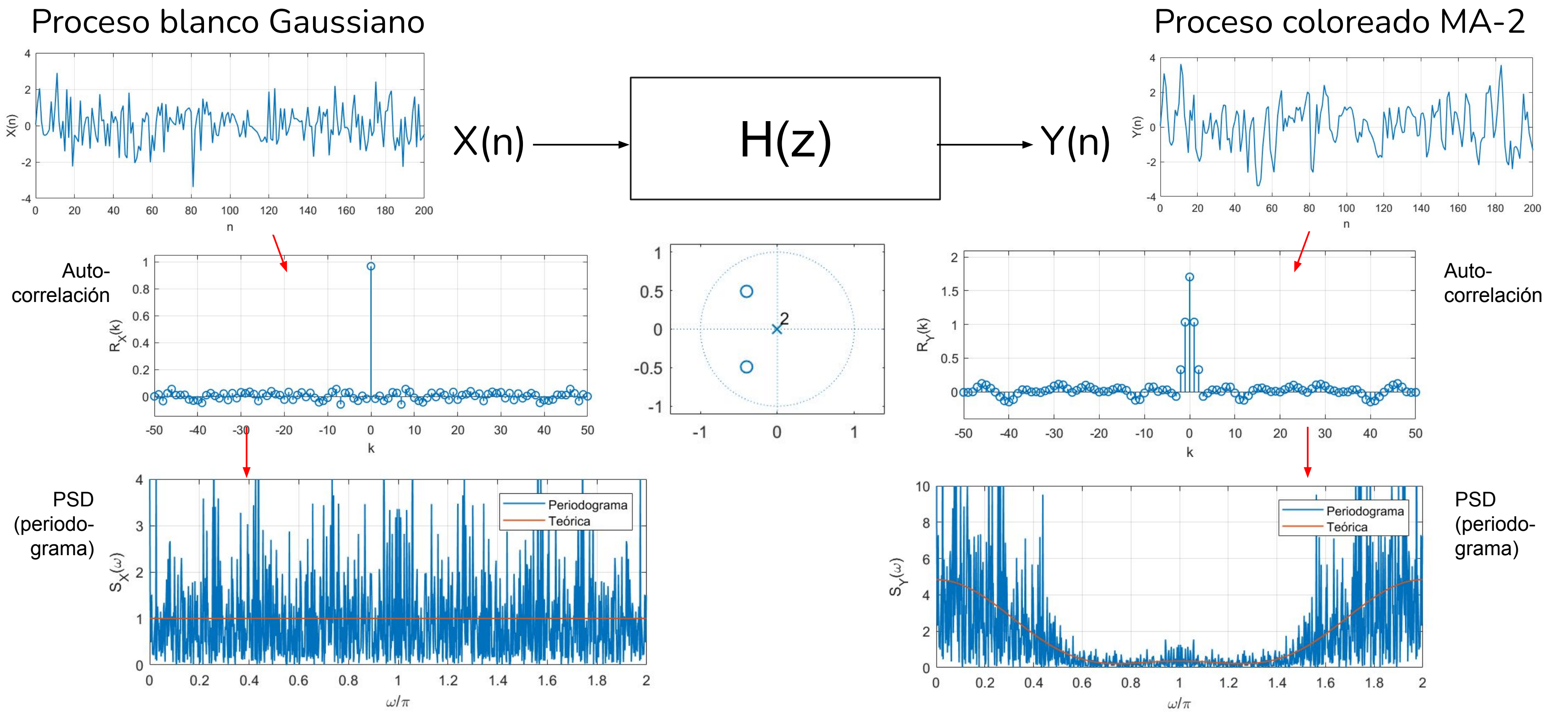
Coeficientes del numerador:
$\{b_0=1,\quad b_1=0.8,\quad b_2=0.4\}$

Coeficientes del denominador:
$\{a_0= 1\}$.

Implementación en MATLAB

```
y = filter([b0 b1 b2], 1, x)
```

Actividad 1 (a)



Actividad 1 (b)

$$X(n) \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow Y(n)$$

$$Y(n) = X(n) - 0.8\, X(n-1) + 0.4\, X(n-2)$$

$\left\{ \begin{array}{l} h(n) \text{ sistema FIR:} \\ \\ \text{Coeficientes del numerador:} \\ \{b_0=1,\ \ b_1=-0.8,\ \ b_2=0.4\} \\ \\ \text{Coeficientes del denominador:} \\ \{a_0=1\}. \end{array} \right.$

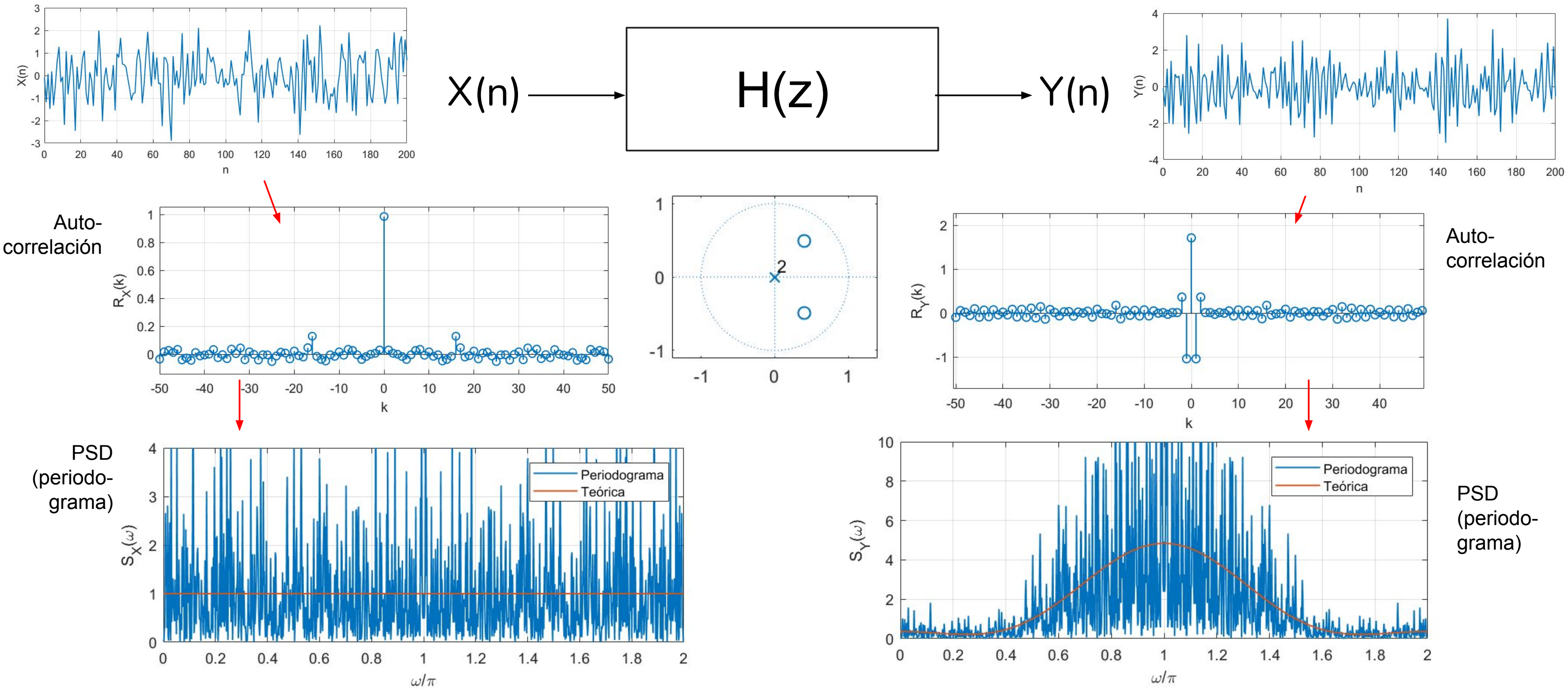
Implementación en MATLAB

```
y = filter([b0 b1 b2], 1, x)
```

Actividad 1 (b)

Proceso blanco Gaussiano

Proceso coloreado MA-2



Actividad 1 (c)

$$X(n) \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow Y(n)$$

$$Y(n) = X(n) + 0.2\,X(n-1) - X(n-2) - 0.2\,X(n-3)$$

h(n) sistema FIR:

Coeficientes del numerador:
$\{b_0=1,\ b_1=0.2,\ b_2=-1,\ b_3=-0.2\}$

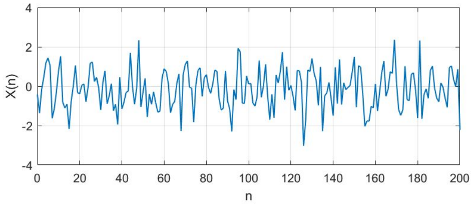
Coeficientes del denominador:
$\{a_0=1\}$.

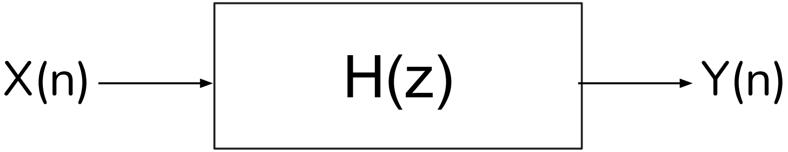
Implementación en MATLAB

```
y = filter([b0 b1 b2 b3], 1, x)
```

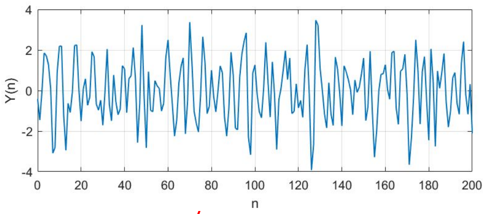
Actividad 1 (c)

Proceso blanco Gaussiano

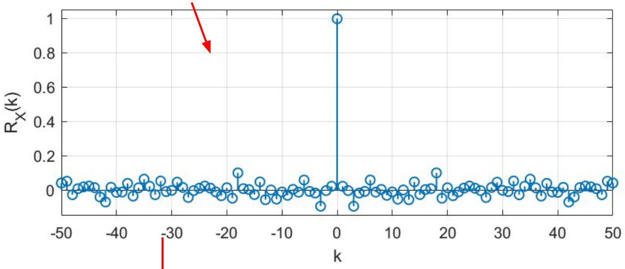


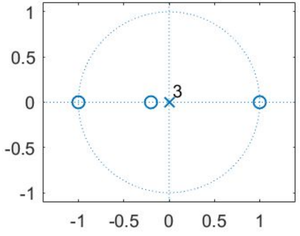


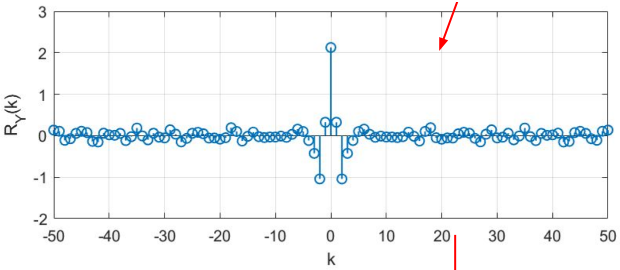
Proceso coloreado MA-3



Auto-correlación

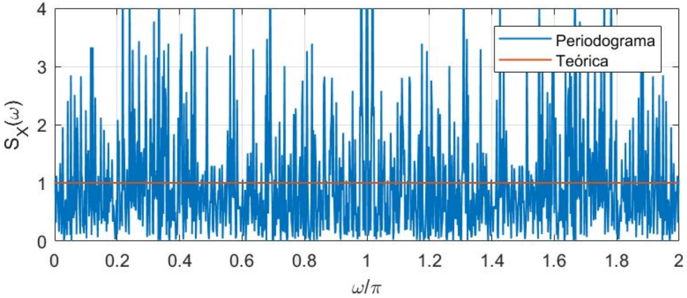


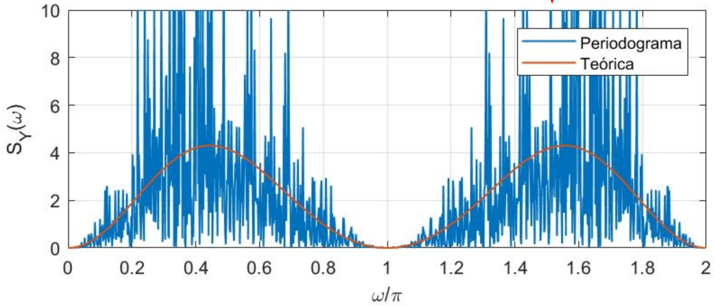




Auto-correlación

PSD (periodograma)





PSD (periodograma)

Actividad 2

Sea un proceso X(n) gaussiano blanco $N(0,1)$ la entrada de un sistema LTI, H(z), cuya salida Y(n) es un proceso de tipo AR-N. Considere los dos siguientes casos:

a) $Y(n) = 0.5\,Y(n-1) + 0.25\,Y(n-2) + X(n)$.

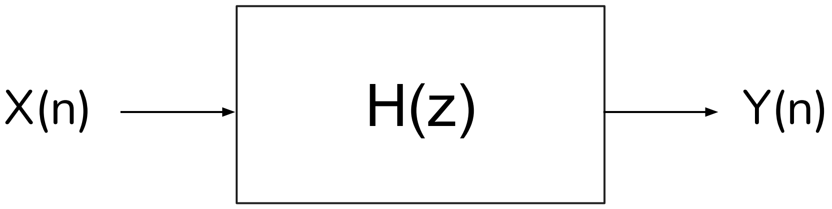
b) $Y(n) = 0.5\,Y(n-1) - 0.2Y(n-2) + 0.1Y(n-3) + X(n)$

c) $Y(n) = 0.3\,Y(n-1) - 0.5Y(n-2) - 0.3Y(n-3) + X(n)$

Para cada caso, se pide:

- Generar una realización de Y(n) para un largo de L=1000 puntos. Graficar Y(n) y X(n). También grafique las funciones de autocorrelación de ambos procesos.
- Determinar la expresión de la PSD teórica.
- Estimar la PSD de cada proceso mediante el periodograma y graficarlo junto a su PSD teórica.
- Analice el comportamiento en frecuencia en relación al tipo de sistema LTI utilizado.

Actividad 2 (a)



$$Y(n) = 0.5\,Y(n-1) + 0.25Y(n-2) + X(n)$$

h(n) sistema IIR:

Coeficientes del numerador:
$\{b_0 = 1\}$

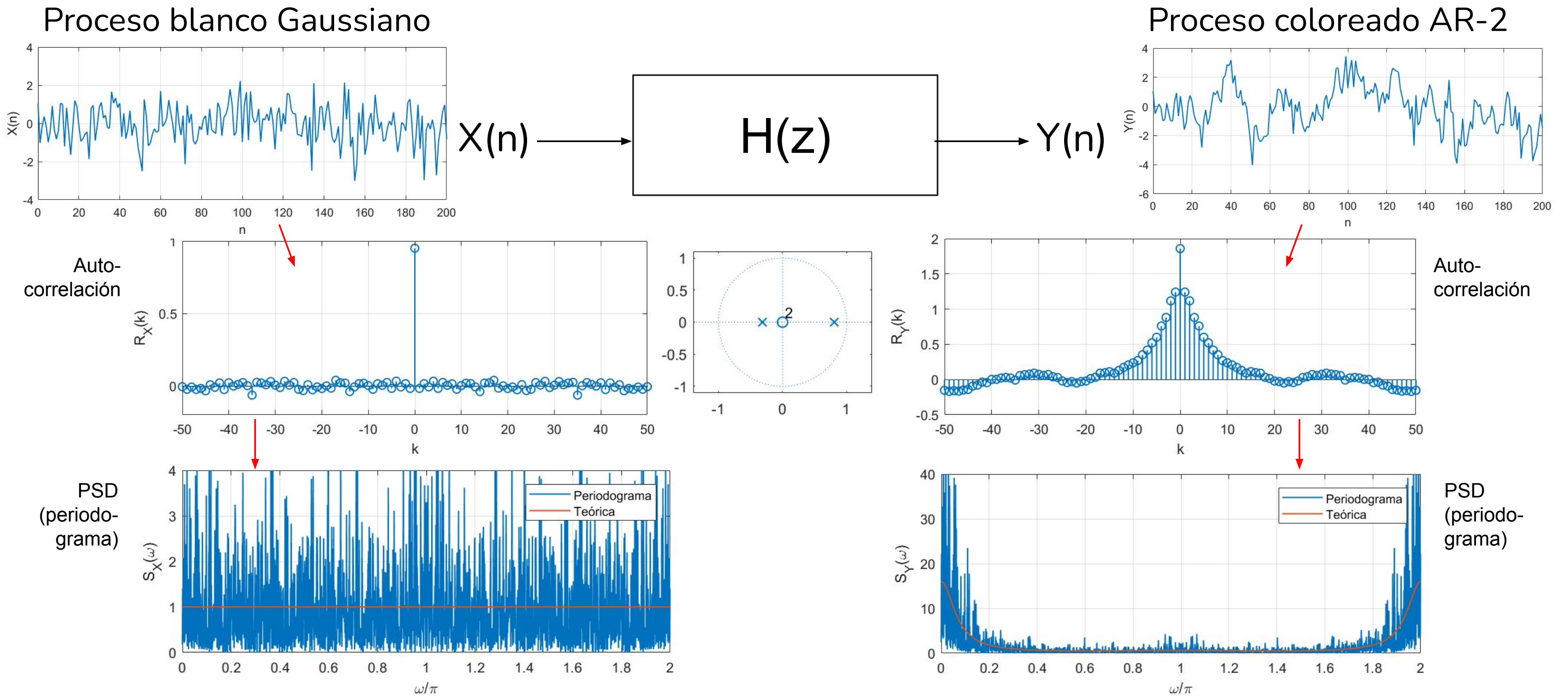
Coeficientes del denominador:
$\{a_1 = 0.5,\ a_2 = 0.25\}$.

Implementación en MATLAB

```
y = filter(1, [1 -a1 -a2], x)
```

Nota: recordar que matlab define los a_i de lado izquierdo de la igualdad, por eso en *filter* debemos poner $-a_i$, excepto el 1.

Actividad 2 (a)



Actividad 2 (b)

$$X(n) \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow Y(n)$$

$$Y(n) = 0.5\,Y(n-1) - 0.2Y(n-2) + 0.1Y(n-3) + X(n)$$

h(n) sistema IIR:

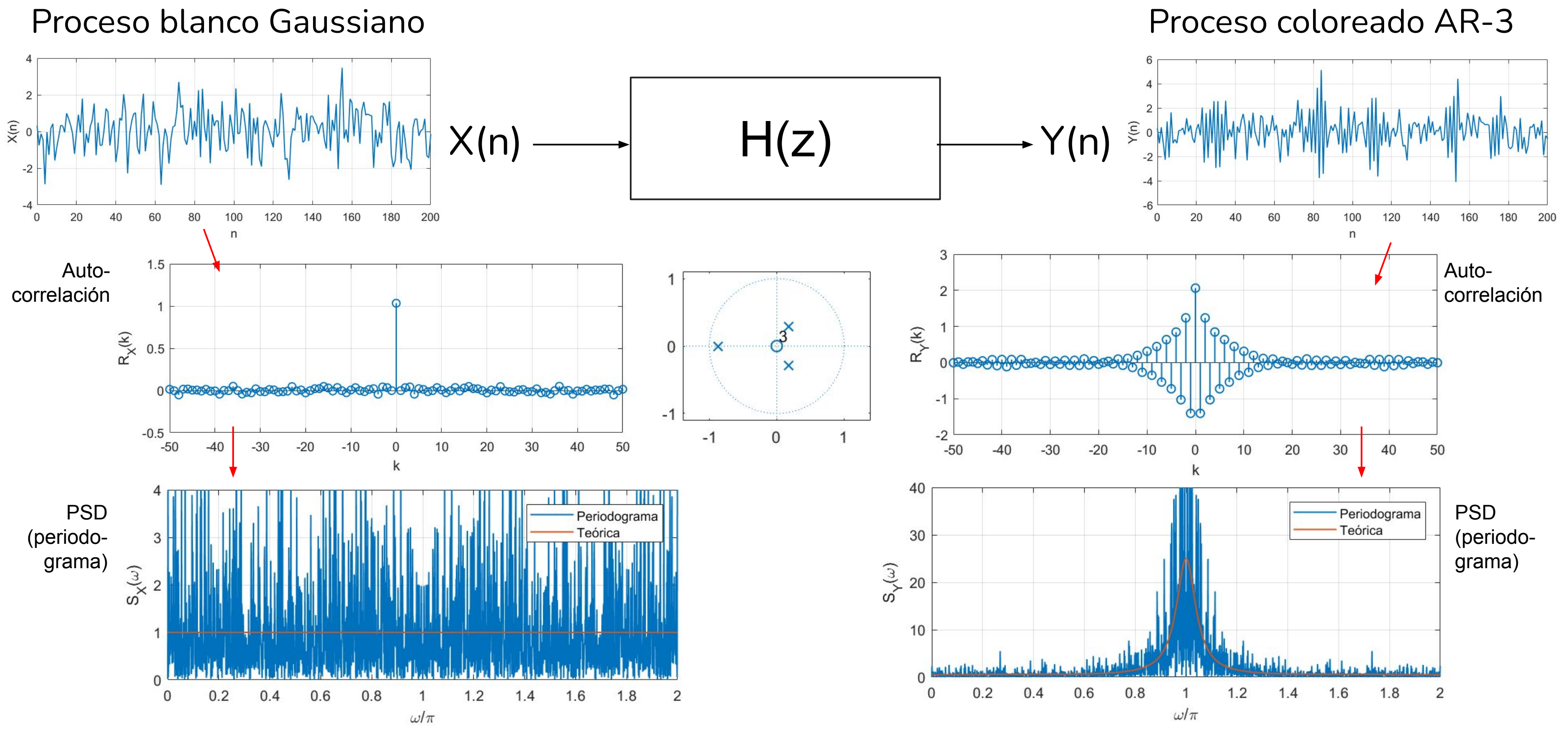
Coeficientes del numerador:
$\{b_0 = 1\}$

Coeficientes del denominador:
$\{a1=0.5,\ a2= -0.2,\ a3= 0.1\}$

Implementación en MATLAB

```
y = filter(1, [1 -a1 -a2 -a3], x)
```

Actividad 2 (b)



Actividad 2 (c)

$$X(n) \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow Y(n)$$

$$Y(n) = 0.3\,Y(n-1) - 0.5Y(n-2) - 0.3Y(n-3) + X(n)$$

h(n) sistema IIR:

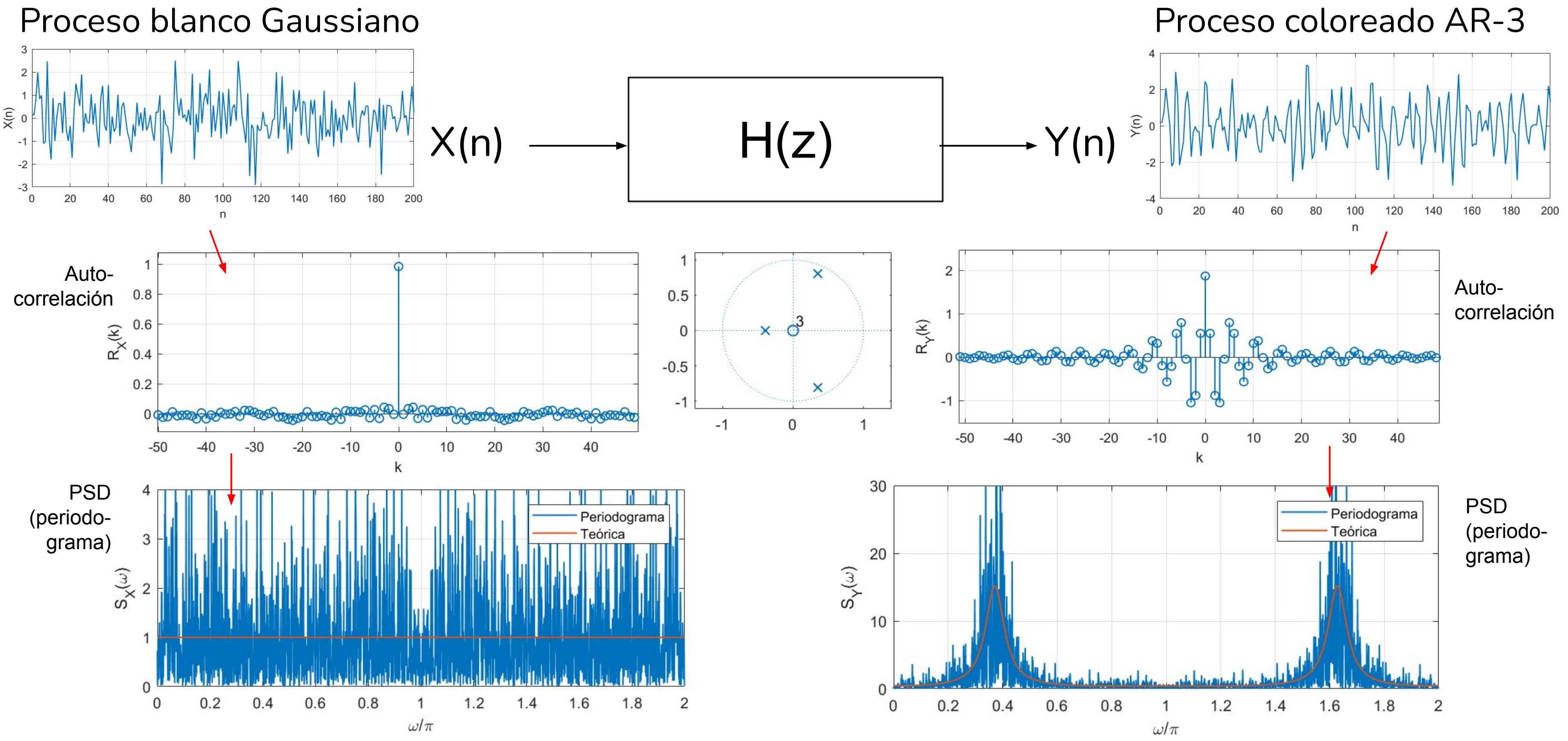
Coeficientes del numerador:
$\{b_0 = 1\}$

Coeficientes del denominador:
{a1=0.3, a2= -0.5, a3= -0.3},

Implementación en MATLAB

```
y = filter(1, [1 -a1 -a2 -a3], x)
```

Actividad 2 (c)



Actividad 3

Actividad 3

Sea $X(n)$ un proceso ESA en tiempo discreto con media μ_X y autocovarianza $C_X(k)$. Sea $W(n)$ un proceso ESA de media nula y autocovarianza $C_W(k)$. Demuestre que si $W(n)$ y $X(n)$ están descorrelacionados la densidad espectral de potencia de $Y(n) = aX(n) + bW(n)$ es

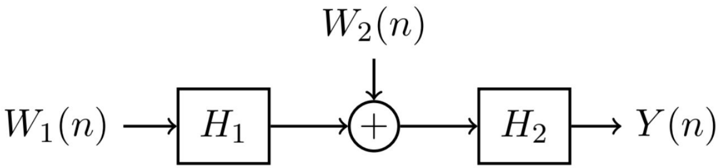
$$S_Y(\omega) = a^2 S_X(\omega) + b^2 S_W(\omega),$$

donde $S_X(\omega)$ y $S_W(\omega)$ son las densidades espectrales de potencia de $X(n)$ y $W(n)$, respectivamente, con a y b constantes cualesquiera.

Actividad 4

Actividad 4

Considere el siguiente sistema en tiempo discreto, donde W_1 y W_2 son ruidos blancos independientes de media nula y varianza unitaria.:



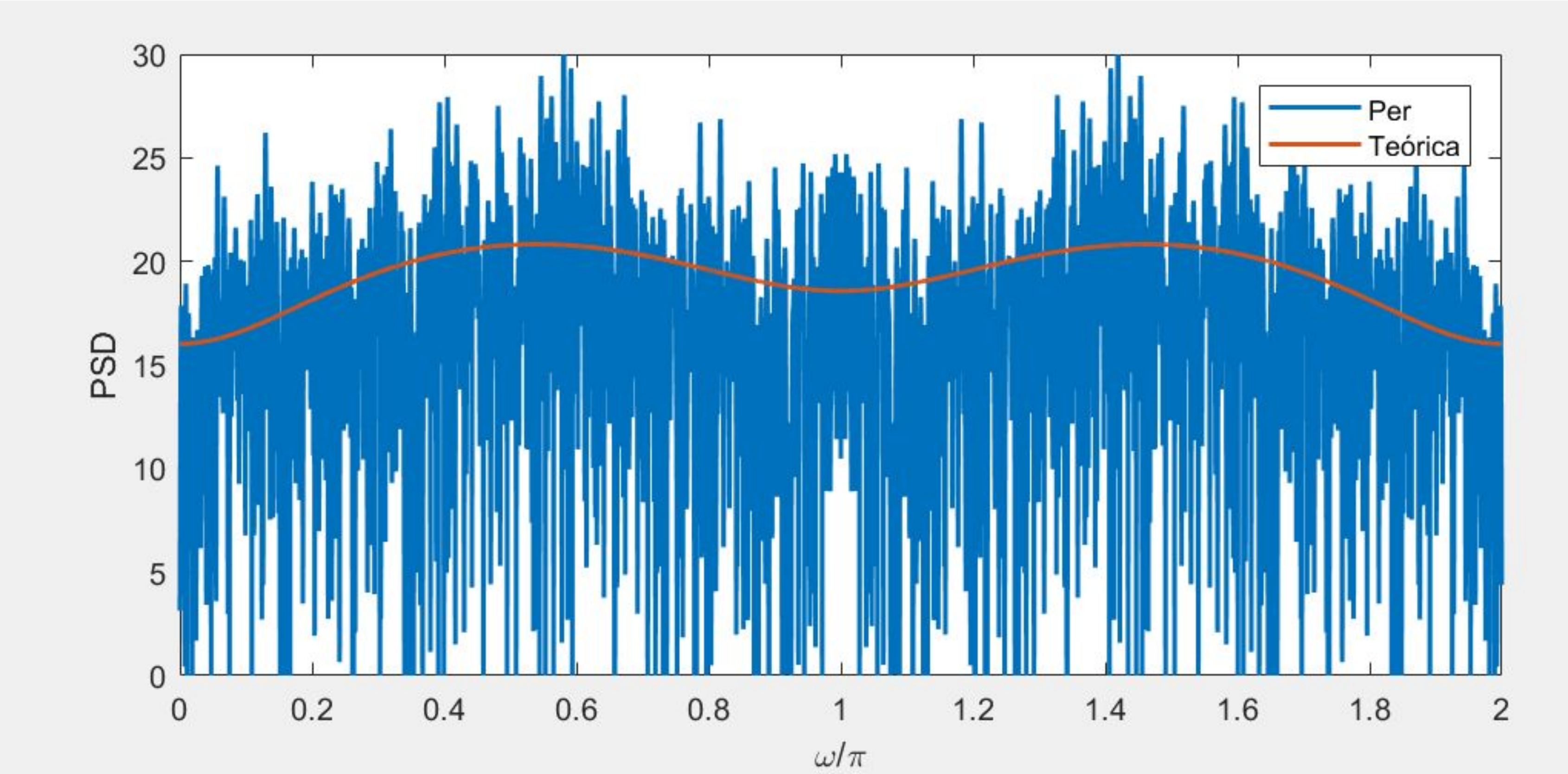
1. Halle la PSD teórica de Y(n) sabiendo que $H_1(z)$ y $H_2(z)$ tienen las siguientes transferencias:

$$H_1(z) = 2 + z^{-1} \qquad\qquad H_2(z) = 4 - 2z^{-1}$$

   Sugerencia: utilice el Ejercicio anterior para calcular en forma separada las densidad de potencia obtenidas por cada proceso.

2. Genere el proceso y(n) a partir de dos procesos iid N(0,1) de acuerdo al esquema propuesto. Grafique la función de autocorrelación de y(n) y su PSD estimada y teórica.

Actividad 4



Per
Teórica
PSD
ω/π
0
5
10
15
20
25
30
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2

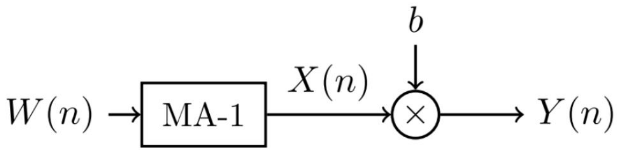
Actividad 5

Actividad 5

Se desea generar muestras de un proceso ESA Y(n) de media nula y autocovarianza:

$$C_Y(k) = \delta(k) + \frac{1}{4}\left[\delta(k-1) + \delta(k+1)\right].$$

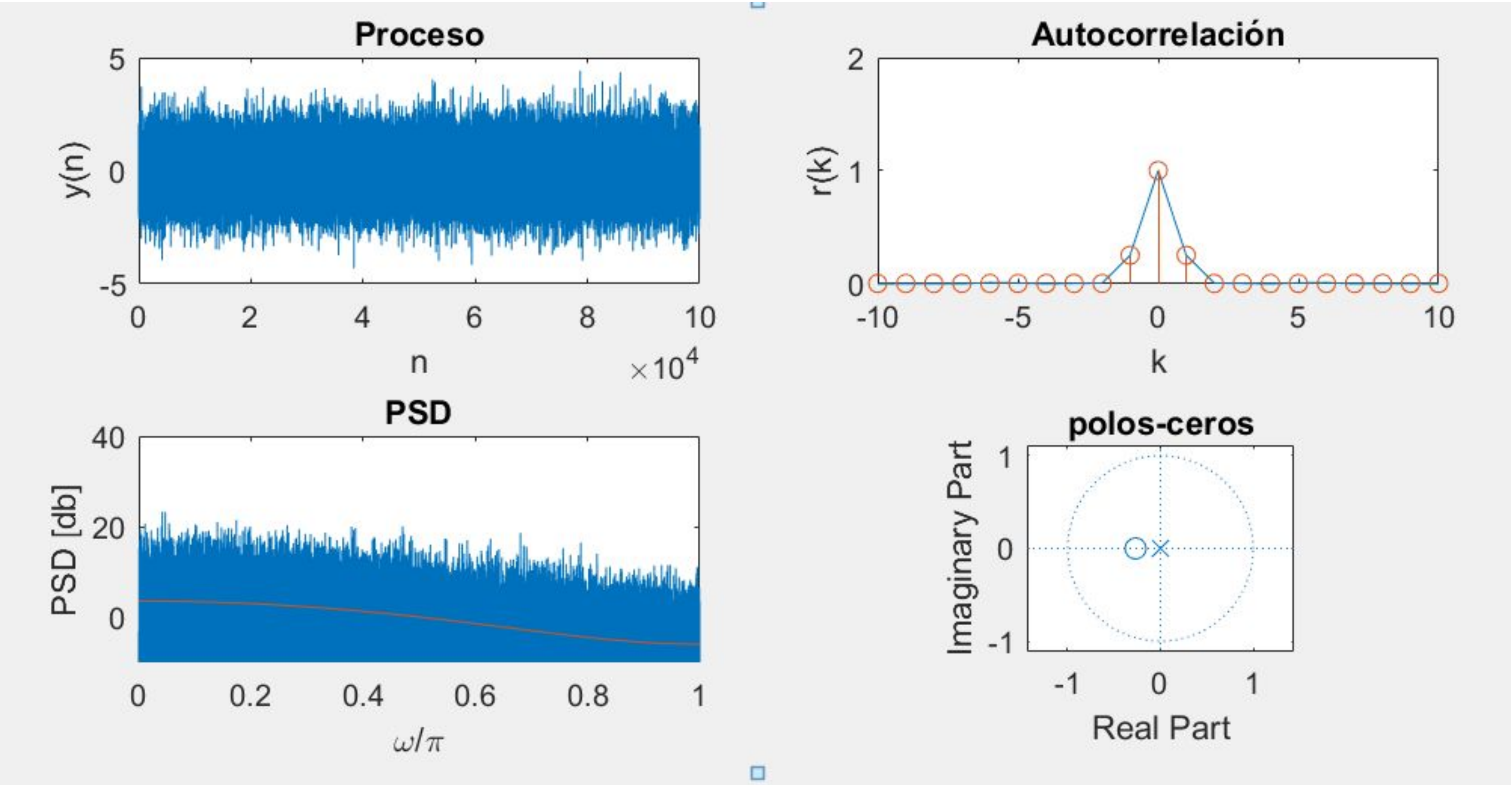
Para ello se tienen muestras de un proceso de ruido blanco gaussiano W(n) de media nula y varianza unitaria. Para generar las muestras de Y(n) se utiliza el siguiente sistema:



El proceso MA-1 es de la forma: X(n) = aW(n – 1) + W(n). Las constantes a y b deben determinarse de modo que el proceso Y(n) cumpla lo pedido.

1. Determine las constantes *a* y *b* de modo que la covarianza de Y(n) sea la especificada.
2. Grafique la autocorrelación de Y(n) y su periodograma superpuesto a la PSD teórica.

Actividad 5


Proceso
y(n)
n
×10^4
Autocorrelación
r(k)
k
PSD
PSD [db]
ω/π
polos-ceros
Imaginary Part
Real Part