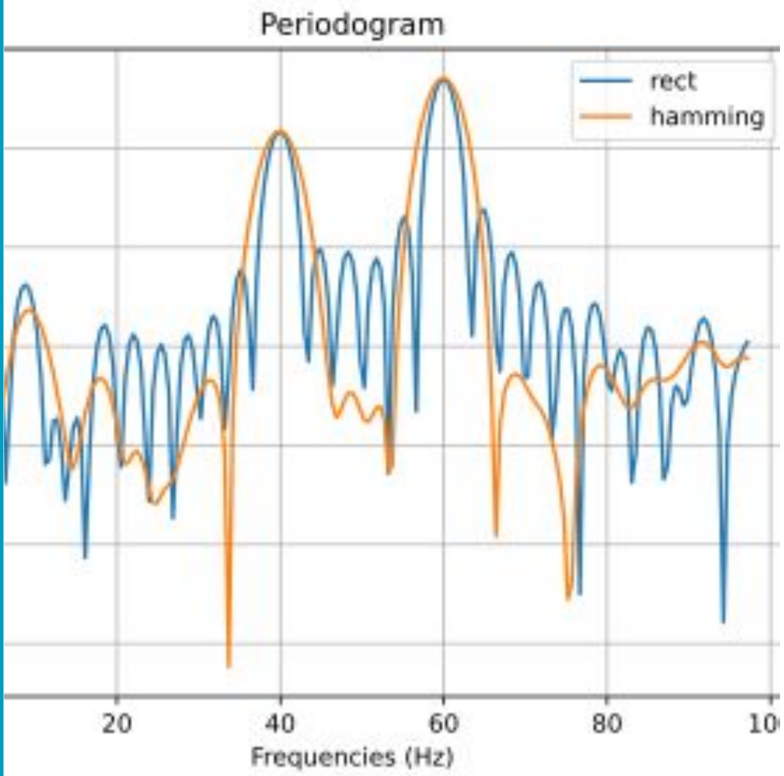
Procesos estocásticos (86.09)

- Densidad espectral de potencia
- Estimadores



Densidad espectral de potencia (PSD)

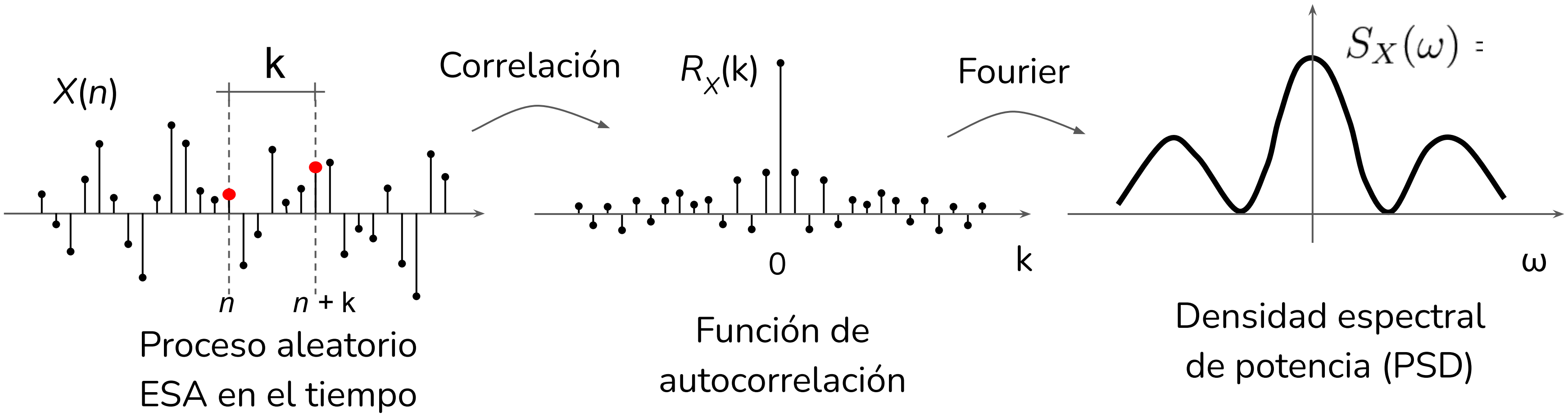
Densidad espectral de potencia (PSD)

Power Spectral Density (PSD) de un proceso ESA X(n) de largo N

$$S_X(\omega) = \lim_{N \to \infty} \mathbb{E}\left[\frac{1}{2N+1}\left|\sum_{n=-N}^{N} X(n) e^{-\jmath \omega n}\right|^2\right] \qquad -\frac{\pi}{2} \leq \omega \leq \frac{\pi}{2}$$

$$S_X(\omega) = \mathcal{F}\{R_X\} = \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) e^{-\jmath \omega \tau}$$

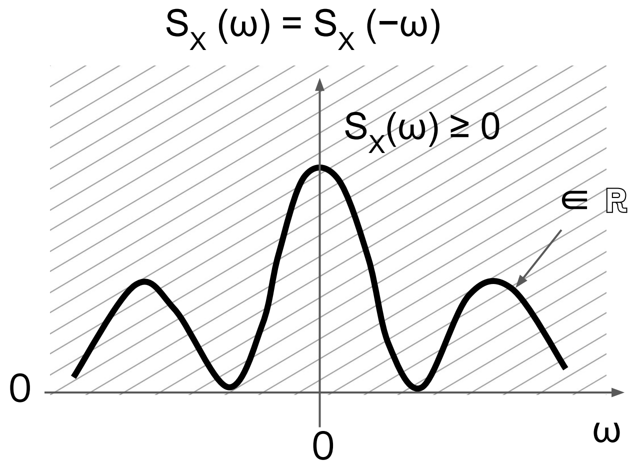
Densidad espectral de potencia (PSD)



Densidad espectral de potencia (PSD)

Propiedades de la PSD

- Es positiva para todo ω (proviene de una potencia)
- Es una función real para todo ω
- Es una función simétrica, si $R_X(\tau) \in \mathbb{R}$



PSD a la salida de un Sistema LTI

Se puede demostrar que la respuesta de un sistem a LTI con un proceso ESA de entrada, cumple la siguiente relación:

$$X(n) \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow Y(n)$$

Proceso de entrada

μ_X

$S_X(\omega)$

Sistema LTI

Proceso de salida

$$\mu_Y = H(0)\mu_X$$

$$\boxed{S_Y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_X(\omega)}$$

Estimadores

Estimador de la autocorrelación

Estimador de la autocorrelación

$R_X(k) = \mathbb{E}[X(n)X(n+k)]$ Función de autocorrelación (por definición)

$$\hat{R}_X(k) = \frac{1}{N-k} \sum_{n=0}^{N-k-1} x(n)x^*(n+k), \quad 0 \leq k \leq N-1$$

Estimador insesgado

$$\hat{R}_X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-k-1} x(n)x^*(n+k), \quad 0 \leq k \leq N-1$$

Estimador sesgado

Recordar la propiedad: $\hat{R}_X(-k) = \hat{R}_X(k)$

Estimador de la autocorrelación

Sesgo del estimador de la autocorrelación

$$\mathbb{E}[\hat{R}_X(k)] = R_X(k) \quad , \quad -N+1 \leq k \leq N-1$$

Estimador insesgado

$$\mathbb{E}[\hat{R}_X(k)] = \underbrace{\left(1 - \frac{|k|}{N}\right)}_{v(k)} R_X(k) \quad , \quad -N+1 \leq k \leq N-1$$

Estimador sesgado

$v(k) = \left(1 - \frac{|k|}{N}\right)$ es una ventana triangular (ventana de Barlett)

Largo de v(k): 2N-1

Estimador de la PSD
Periodograma

Estimador de la PSD – Periodograma

Sea X(n) un proceso ESA de largo N)

Formas equivalentes para el periodograma

$$\widehat{S}_X(\omega) = \frac{1}{N}\left|\sum_{n=0}^{N-1} X(n)e^{-j\omega n}\right|^2$$

$$\widehat{S}_X(\omega) = \sum_{-N+1}^{N-1} \widehat{R}_X(k)e^{-j\omega k}$$

$$\widehat{S}_X(\omega) = \frac{1}{N}\left|\mathrm{FFT}\{X(n)\}\right|^2$$

Solución computacional

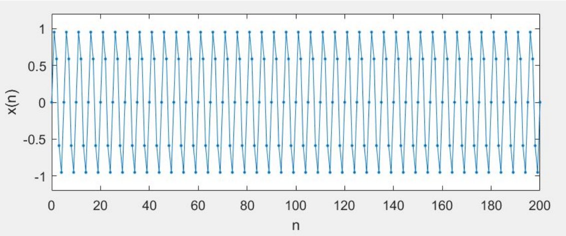
Ventaneo de señales

Ventaneo de señales

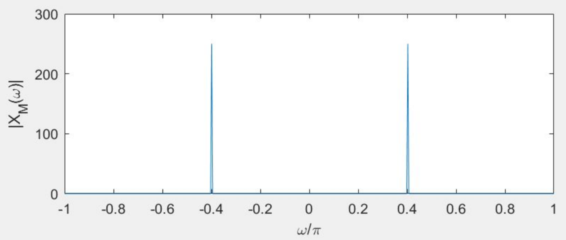
Tiempo

Frecuencia

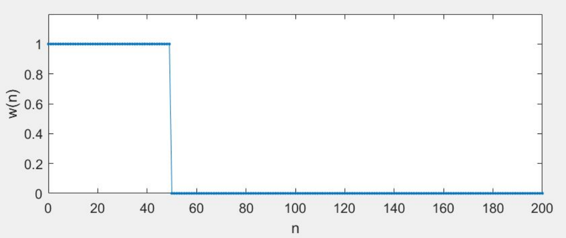
Señal de duración infinita (senoidal)



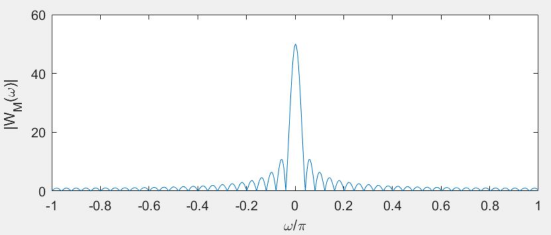
FFT



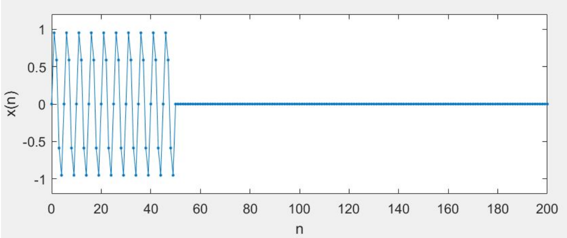
Ventana rectangular de largo M



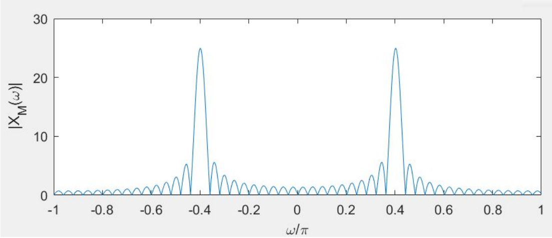
FFT



Señal ventaneada



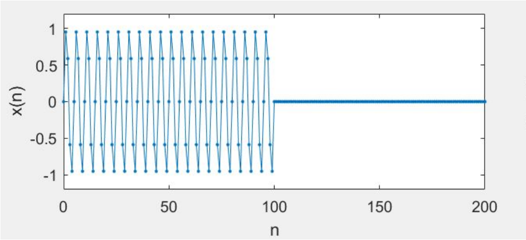
FFT



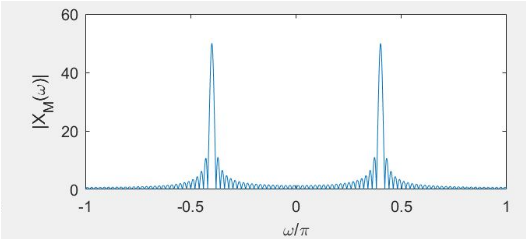
Ventaneo de señales

Tiempo | Frecuencia

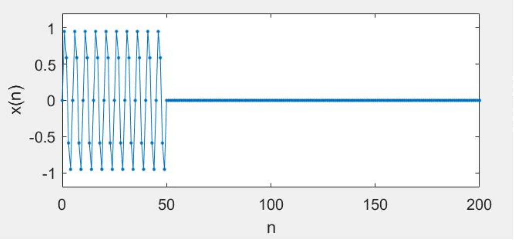
Señal ventaneada (M = 100)



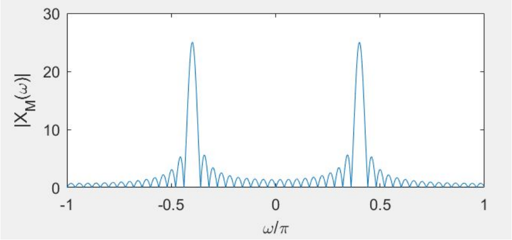
FFT →



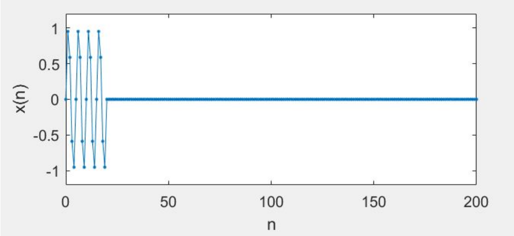
Señal ventaneada (M = 50)



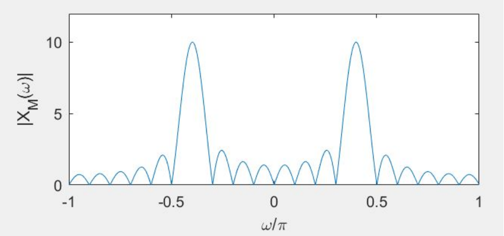
FFT →



Señal ventaneada (M = 20)



FFT →

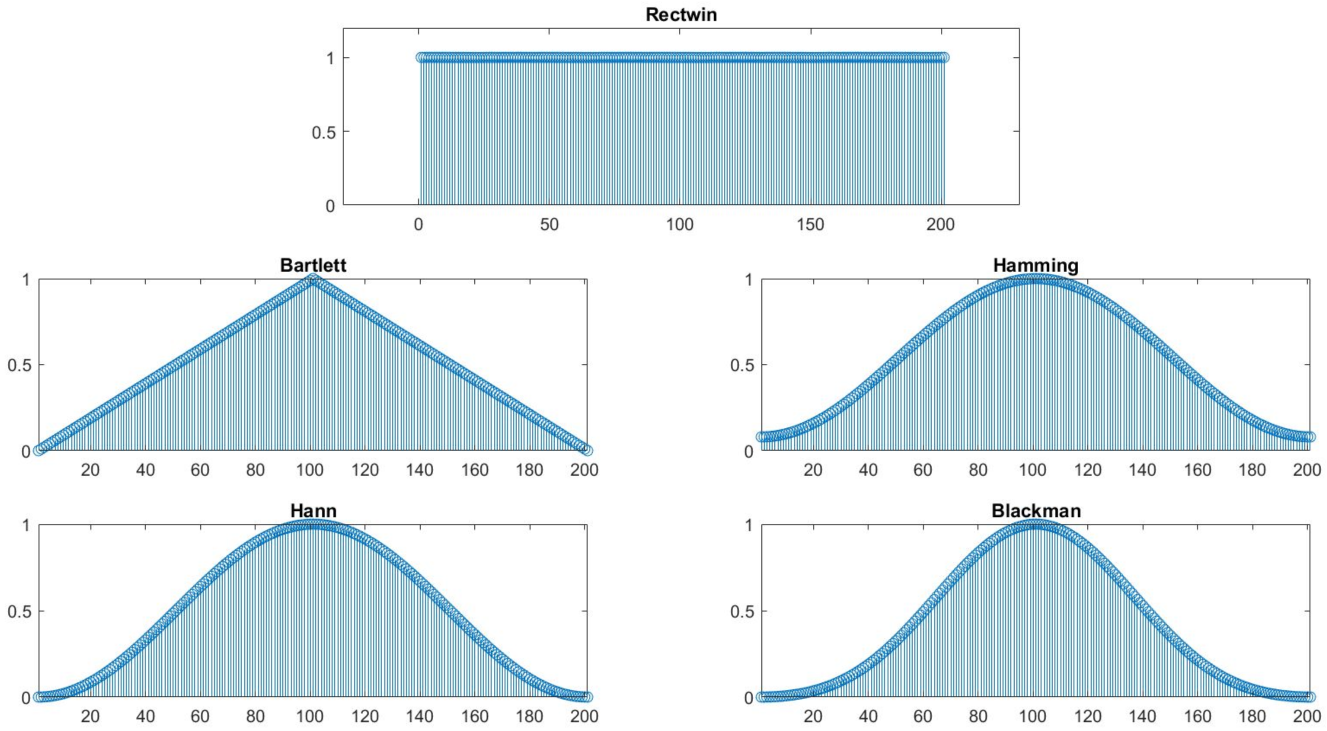


Ancho de lóbulo principal (ventana rectangular)

$\mathbf{4\pi/M}$

Algunas de las ventanas más usadas

Respuesta en el tiempo

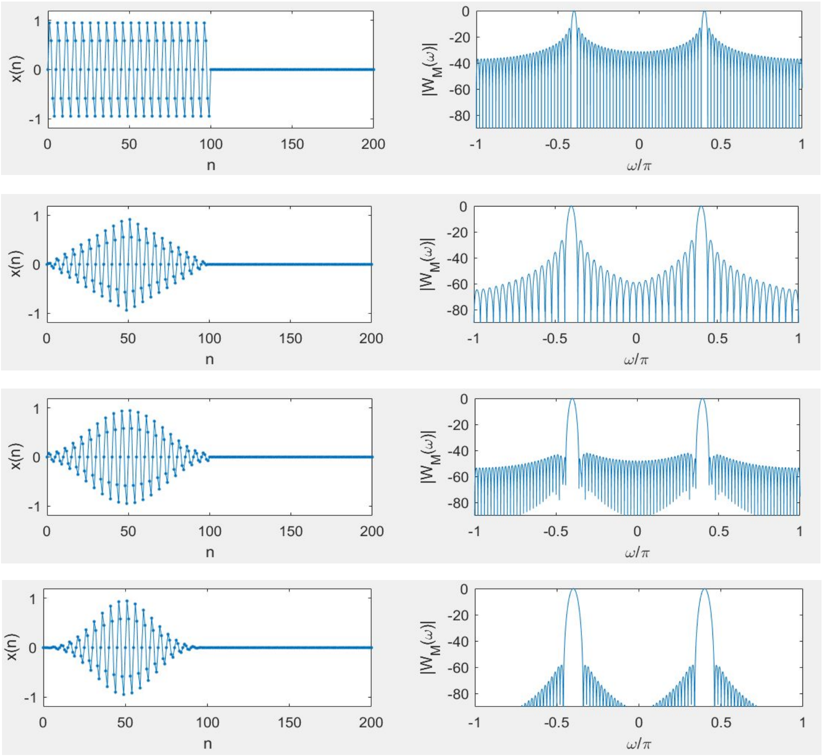


Ventaneo de señales

Tiempo

Frecuencia

Ancho de lóbulo principal



Señal ventaneada (rectangular) — $4\pi/M$

Señal ventaneada bartlett) — $8\pi/M$

Señal ventaneada (hamming) — $8\pi/M$

Señal ventaneada (blackman) — $12\pi/M$

Ejemplo de una señal senoidal ventaneada con diferentes tipos

Actividad 1

Actividad 1

Sean dos procesos aleatorios gaussianos blancos ESA, X(n)~$\mathcal{N}(0,20)$ y Y(n)~$\mathcal{N}(3,20)$ de largo N = 1000. Estime las funciones de autocorrelación $R_X(k)$ y $R_Y(k)$. Grafique cada función comparándola con las teóricas (recuerde que R(k) = C(k) + μ^2), para los siguientes casos:

1. El estimador **sesgado**. Ayuda: xcorr(x, 'biased').
2. El estimador **insesgado**. Ayuda: xcorr(x, 'unbiased').
3. Grafique $R_Y(k)$ para el estimador **insesgado** multiplicado por una ventana de Bartlett $v_B(k) = (N - |k|) / N$.
4. Analice las respuestas obtenidas y saque conclusiones.

Actividad 2

Actividad 2

Sea un proceso aleatorio ESA, gaussiano blanco $V(n) \sim \mathcal{N}(0,4)$ de largo N=1000.

1. Estime la función de autocorrelación $R_V(k)$ del proceso V(n) y grafíquela para $-N < k < N$.. Ayuda: use xcorr(v, 'biased').
2. Estime la PSD mediante el periodograma y grafíquela junto a la PSD teórica.
3. Repita el punto 2, pero mejore la estimación del periodograma promediando al menos 100 realizaciones

Nota: en todos los gráficos del espectro asegure un rango de frecuencia $[0,2\pi)$ con al menos 4096 puntos.

Actividad 3

Actividad 2

Sea un proceso aleatorio ESA, gaussiano blanco V(n)~$\mathcal{N}$(0,1) de largo N=1000. A partir de éste, se define otro proceso X(n) que cumple con la siguiente ecuación:

$$X(n) = 0.6X(n-1) + V(n)$$

1. Estime la función de autocorrelación $R_X(k)$ del proceso X(n) y grafíquela para $-N < k < N$. Ayuda: use xcorr(v, 'biased').

2. Estime la PSD mediante el periodograma de una realización y grafíquela junto a la PSD teórica. Considere al menos 4096 puntos en frecuencia..

3. Repita el punto 2, pero mejore la estimación del periodograma promediando al menos 100 realizaciones.

Ayuda: Recuerde que la respuesta en frecuencia del sistema LTI-IIR se puede obtener usando H = freqz(b, a, w), donde w es un vector definido en $[0,2\pi)$.

Actividad 4

Actividad 4

Suponga que posee dos realizaciones de procesos senoidales $X_1(n)=\sin(\omega_1\, n)$ y $X_2(n)=\sin(\omega_2\, n)$.

a) Para un largo de realización N=100, genere $X_1(n)$, con $\omega_1=0.42\pi$. Grafique su periodograma en el intervalo $[0.3\pi, 0.5\pi)$. ¿A qué se debe el ancho del tono observado? ¿Cómo es su dependencia con N? .

b) Defina una realización del proceso $X(n) = X_1(n) + X_2(n)$, suponiendo $\omega_2=0.43\pi$ para el proceso $X_2(n)$. Grafique su periodograma en el intervalo $[0.3\pi, 0.5\pi)$. ¿Qué problema se evidencia en este caso?

c) Proponga un nuevo largo N’ adecuado para las realizaciones de X(n), tal que puedan visualizarse todos los tonos. Grafique el periodograma resultante. Analice las ventajas y desventajas del periodograma en relación al largo de la realización.

Actividad 4

c)

Periodograma: dependencia con el largo del proceso (N)

- N afecta a la resolución del periodograma
- Mientras mayor sea N, mejor será la resolución
- Sin embargo, mayor es el costo de cómputo