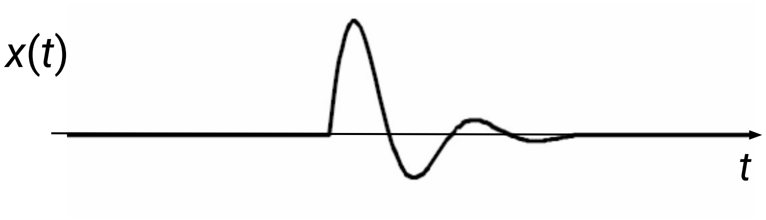
Procesos estocásticos (86.09)

Conceptos básicos de señales y sistemas

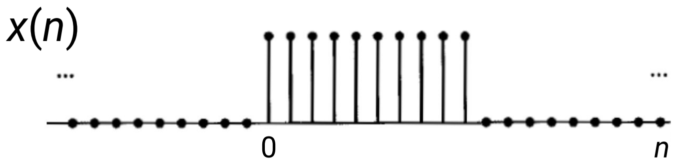
Señales en el dominio del tiempo

Señales en el dominio del tiempo

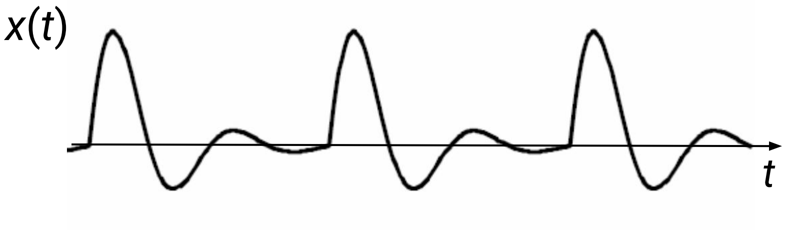
Señales **aperiódicas** en tiempo **continuo**



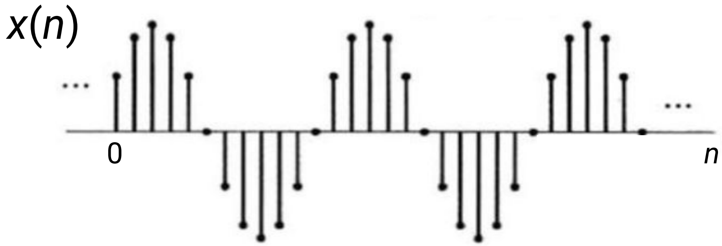
Señales **aperiódicas** en tiempo **discreto**



Señales **periódicas** en tiempo **continuo**



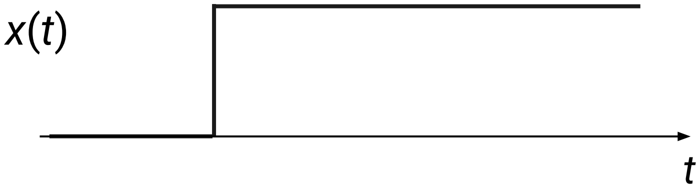
Señales **periódicas** en tiempo **discreto**



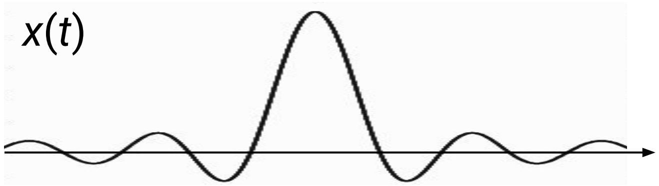
Señales en el dominio del tiempo

Señales aperiódicas en tiempo continuo

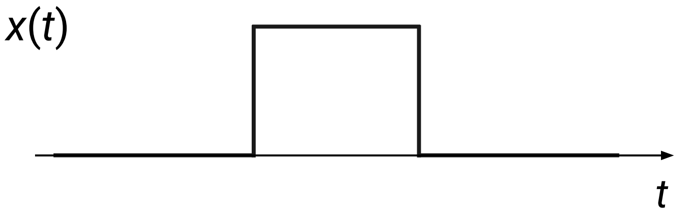
Función escalón



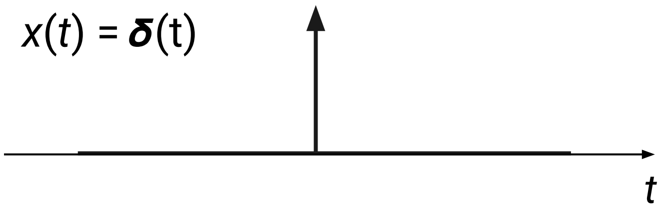
Función sinc



Pulso rectangular



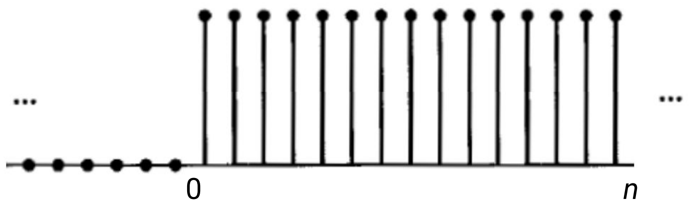
Delta de Dirac



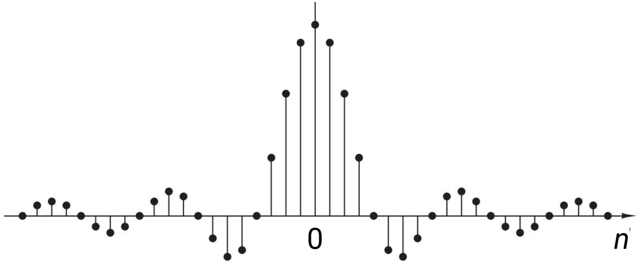
Señales en el dominio del tiempo

Señales aperiódicas en tiempo discreto

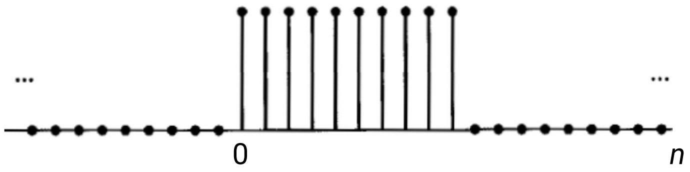
Función escalón discreto



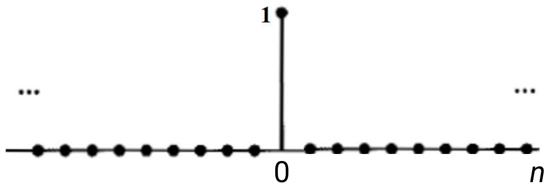
Función sinc discreta



Pulso rectangular discreto

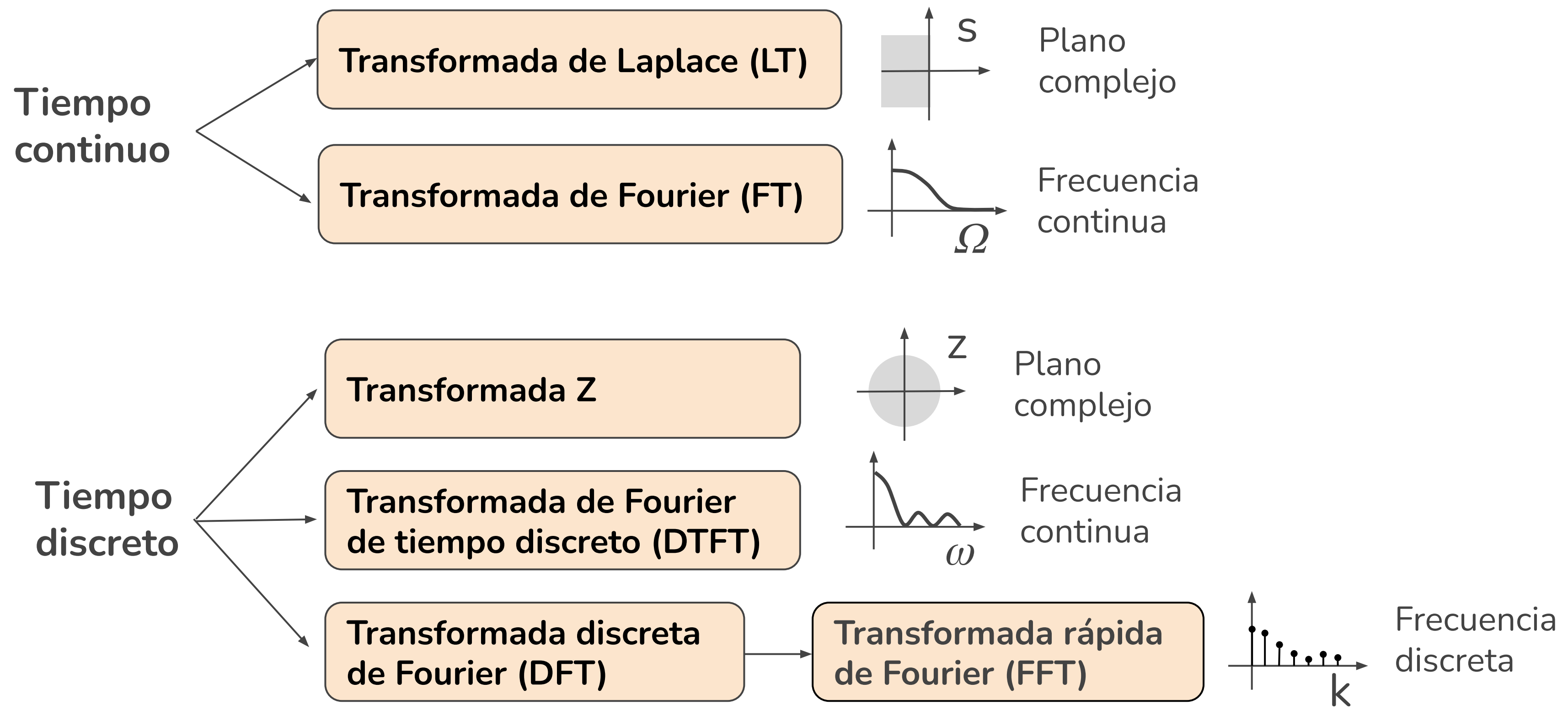


Impulso unitario discreto



Señales en el dominio de la frecuencia

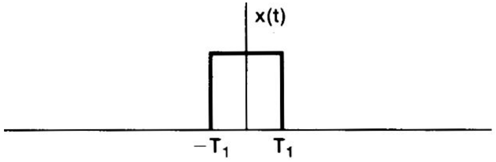
Señales en el dominio de la frecuencia



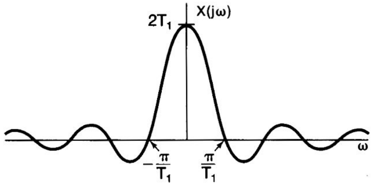
Señales en el dominio de la frecuencia

Tiempo | **Frecuencia**

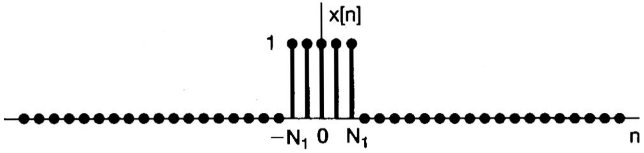
Aperiódica y continua



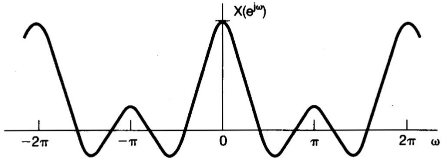
Aperiódica y continua



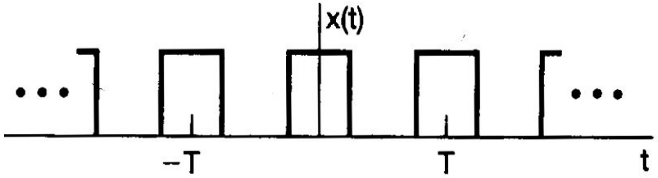
Aperiódica y discreta



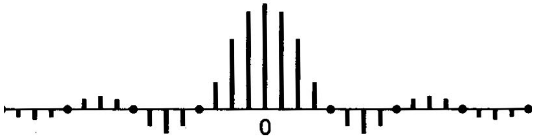
Periódica y continua



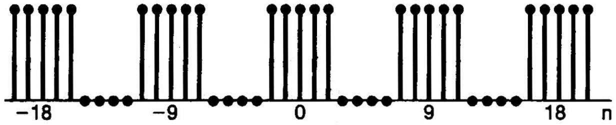
Periódica y continua



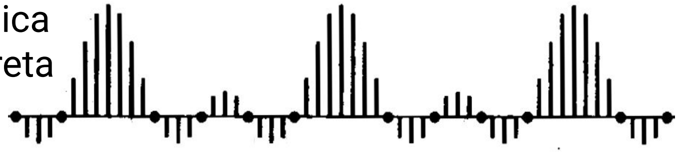
Aperiódica y discreta



Periódica y discreta



Periódica y discreta



Transformada de Fourier de tiempo discreto

Transformada de Fourier de tiempo discreto (DTFT)

$$\boxed{X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}}$$

Transformada directa

$$\boxed{x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega t}d\omega}$$

Transformada inversa

Algunas propiedades de la DTFT

	$x[n]$	$\longrightarrow$	$X(\omega)$	
Desplazamiento en tiempo	$x[n-n_0]$	$\longrightarrow$	$X(\omega)e^{j\omega\, n_0}$	Multiplicación por una exponencial compleja
Multiplicación por una exponencial compleja	$e^{-j\omega_0\, n}x[n]$	$\longrightarrow$	$X(\omega-\omega_0)$	Desplazamiento en frecuencia
Convolución entre secuencias	$\sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]x_2[n-m]$	$\longrightarrow$	$X_1(\omega)X_2(\omega)$	Producto de transformadas
Producto de secuencias	$x_1[n]x_2[n]$	$\longrightarrow$	$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X_1(\lambda)X_2(\omega-\lambda)d\lambda$	Convolución de las transformadas

Casos particulares aplicando DTFT

$$x[n] \longrightarrow X(\omega)$$

$$\delta[n] \longrightarrow 1$$

$$\delta[n-n_0] \longrightarrow e^{-j\omega n_0}$$

$$\begin{cases} 1 & |n| \leq N \\ 0 & |n| > N \end{cases} \longrightarrow \frac{\sin\left(\omega(N+\frac{1}{2})\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

$$1 \longrightarrow 2\pi\delta(\omega); \quad -\pi \leq \omega < \pi \quad \text{;periodica en } 2\pi$$

$$\frac{\sin(\omega_0\, n)}{\pi n} \longrightarrow \begin{cases} 1 & 0 \leq |\omega| \leq \omega_0 \\ 0 & \omega_0 < |\omega| \leq \pi \end{cases} \quad \text{; periodica en } 2\pi$$

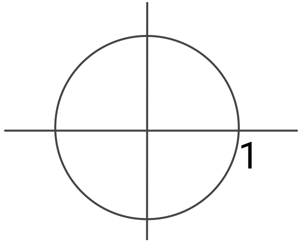
Transformada Z

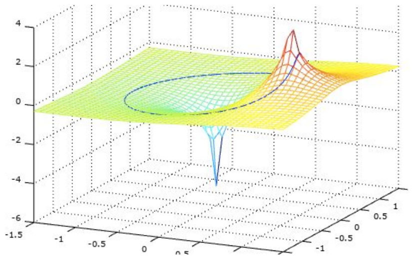
Transformada Z (TZ)

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

Transformada directa

Plano complejo z





$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{n-1} dz$$

Transformada inversa

$$ROC : \{z : |X(z)| < \infty\}$$

Región de convergencia: todos los valores de z en donde la transformada está acotada

Algunas propiedades de la TZ

	$x[n]$	$\longrightarrow$	$X(z)$	
Desplazamiento en tiempo	$x[n-n_0]$	$\longrightarrow$	$z^{-n_0}X(z)$	Multiplicación por una exponencial compleja
Multiplicación por una exponencial compleja	$e^{-j\omega_0 n}x[n]$	$\longrightarrow$	$X(e^{-j\omega_0}z)$	Rotación en frecuencia
Multiplicación por una exponencial real	$a^n x[n]$	$\longrightarrow$	$X(a^{-1}z)$	Escalamiento en frecuencia
Convolución entre secuencias	$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1[m]x_2[n-m]$	$\longrightarrow$	$X_1(z)X_2(z)$	Producto de transformadas
Conjugado	$x^*[n]$	$\longrightarrow$	$X^*(z^*)$	Conjugado

Casos particulares aplicando DTFT

$x[n]$	$\longrightarrow$	$X(z)$	ROC
$\delta[n]$	$\longrightarrow$	1	Plano z
$\delta[n-n_0]$	$\longrightarrow$	z^{-n_0}	Plano z, excepto: 0 (si $n_0 > 0$), ∞ (si $n_0 < 0$)
$a^n u[n]$	$\longrightarrow$	$\dfrac{1}{1-a\,z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$-a^n u[-n-1]$	$\longrightarrow$	$\dfrac{1}{1-a\,z^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$

Transformada Discreta de Fourier

Transformada Discreta de Fourier (DFT)

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Transformada directa

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Transformada inversa

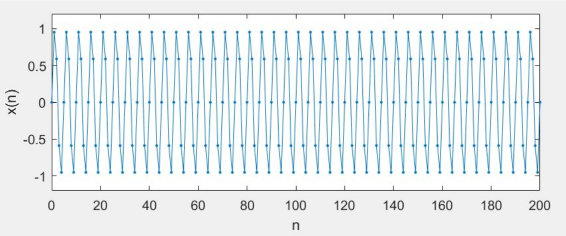
N: largo de la DFT

Algoritmo eficiente para la DFT: FFT (Fast Fourier Transform)

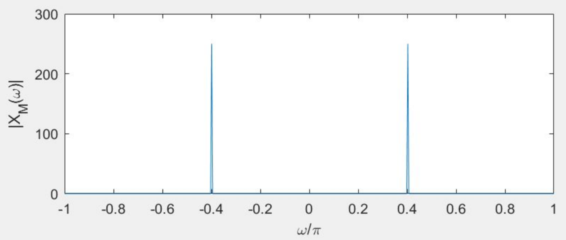
Transformada Discreta de Fourier (DFT) – Ventaneo

Tiempo | Frecuencia

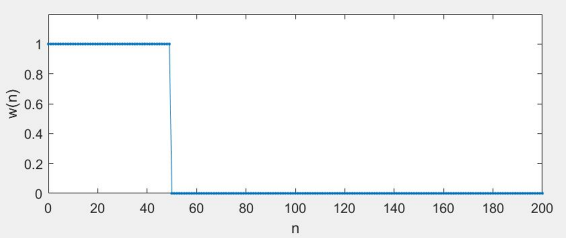
Señal de duración infinita (senoidal)



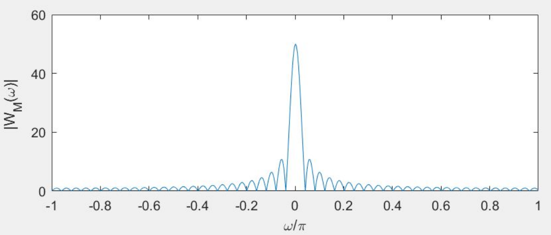
FFT



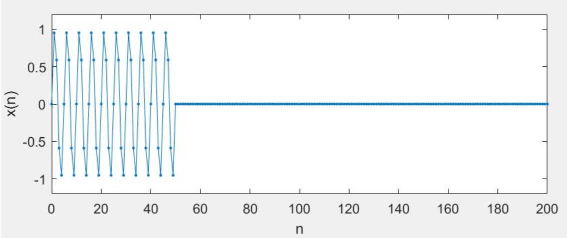
Ventana rectangular de largo M



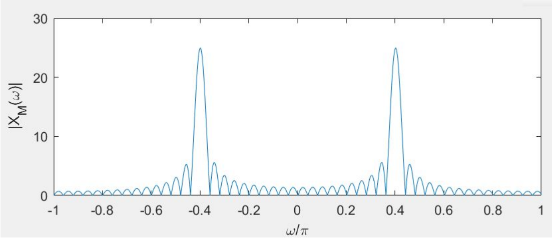
FFT



Señal ventaneada



FFT

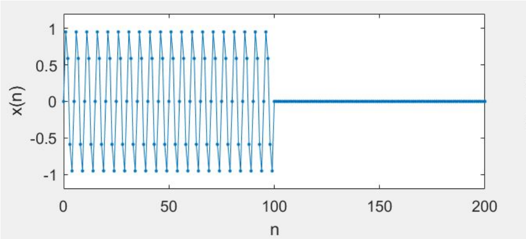


Transformada Discreta de Fourier (DFT) – Ventaneo

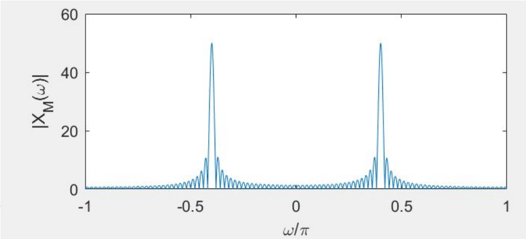
Tiempo

Frecuencia

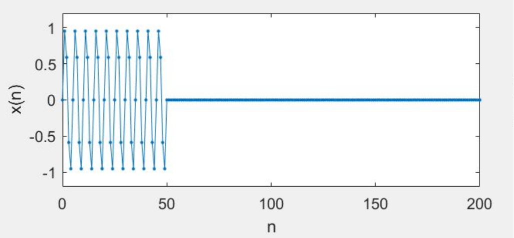
Señal ventaneada (M = 100)



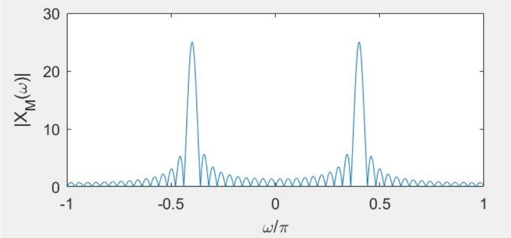
FFT



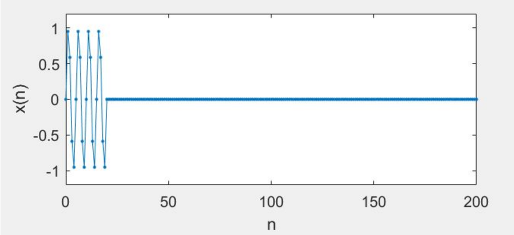
Señal ventaneada (M = 50)



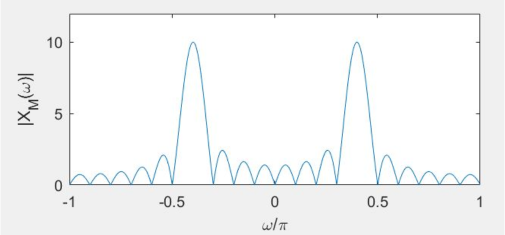
FFT



Señal ventaneada (M = 20)



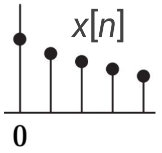
FFT



Ancho de lóbulo principal (ventana rectangular)

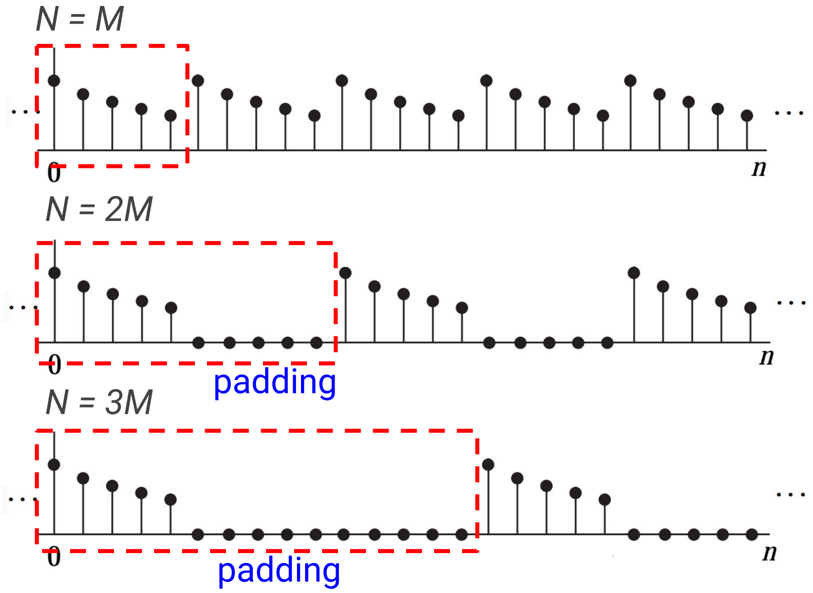
$$\mathbf{4\pi/M}$$

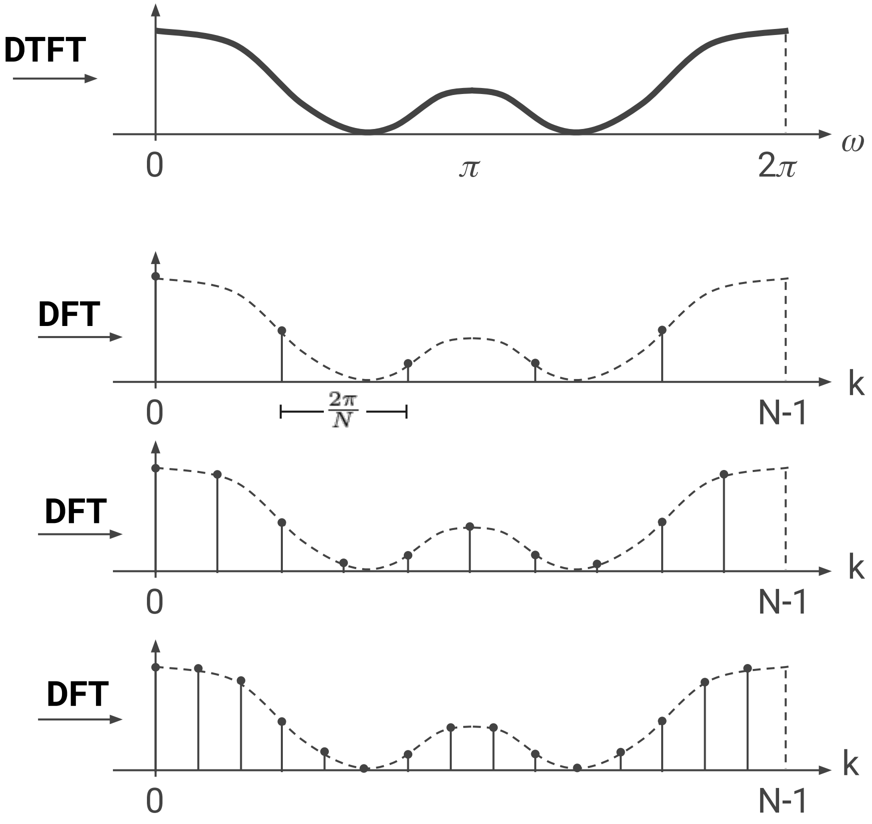
Transformada Discreta de Fourier (DFT) – Zero Padding



M: largo de la secuencia x[n]
N: cantidad de puntos de la DFT

Secuencia periodizada con período N





Algunas propiedades de la DFT

	$x[n]$	$\longrightarrow$	$X[k]$	
Desplazamiento en tiempo	$x[n-n_0]$	$\longrightarrow$	$X[k]e^{j\frac{2\pi}{N}kn_0}$	Multiplicación por una exponencial compleja
Multiplicación por una exponencial compleja	$e^{-j\frac{2\pi}{N}k_0 n}x[n]$	$\longrightarrow$	$X[k-k_0]$	Desplazamiento en frecuencia
Convolución periódica	$\sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]x_2[n-m]$	$\longrightarrow$	$X_1[k]X_2[k]$	Producto de transformadas
Producto de secuencias	$x_1[n]x_2[n]$	$\longrightarrow$	$\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} X_1[l]X_2[k-l]$	Convolución periódica

Relación entre transformadas

TZ

$$X(z)$$

$$z = e^{j\omega}$$

DTFT

$$X(\omega)$$

$$\omega = \frac{2\pi k}{N}$$

DFT

$$X[k]$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Sistemas LTI

Sistemas LTI – Representación con su *respuesta impulsiva*

Nos interesan los sistemas LTI:

- *Reales**
- *Transferencia Racional*
- *Causales**
- *Estables*

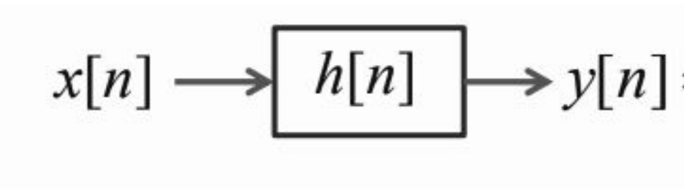
LTI

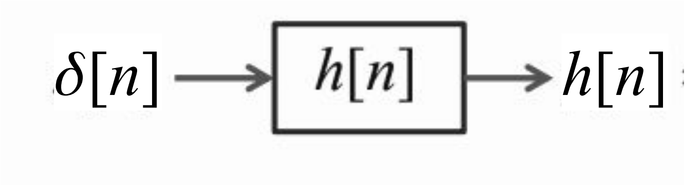
Lineal

a $x_1(n)$ + b $x_2(n)$ $\rightarrow$ a $y_1(n)$+ b $y_2(n)$

Invariante en el Tiempo

$x(n-k) \rightarrow y(n-k)$





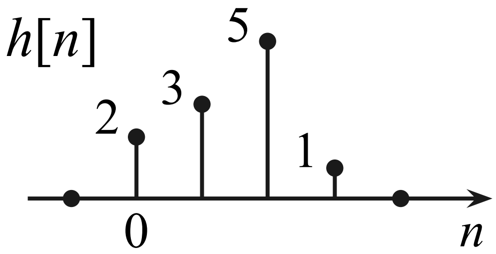
$$\boxed{y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]}$$

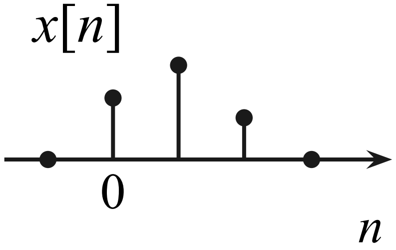
Sistemas LTI – Respuesta para una entrada x[n]

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

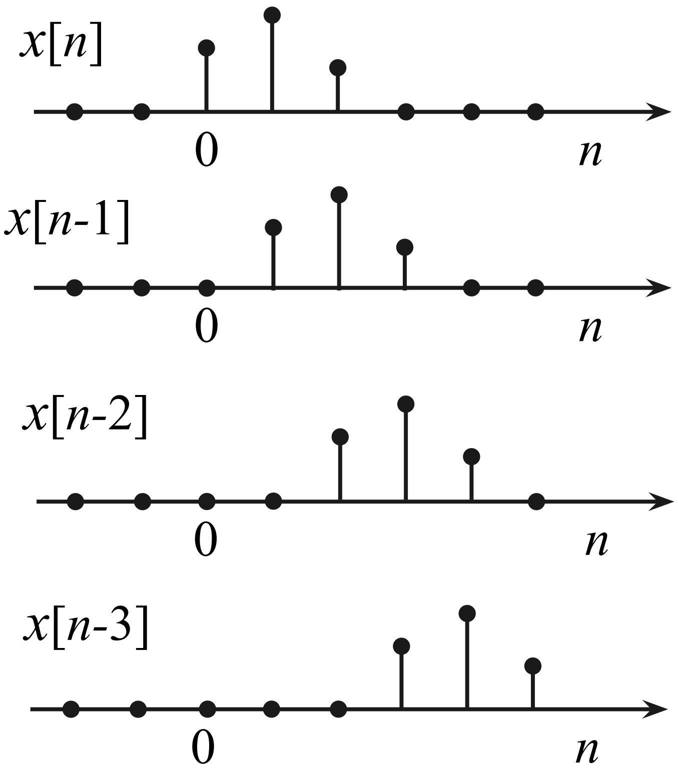
Producto de convolución

Ejemplo:





$$y[n] = 2x[n] + 3x[n\text{-}1] + 5x[n\text{-}2] + x[n\text{-}3]$$



Relación entrada /salida en sistemas LTI

Sistemas LTI – Relación entrada /salida

Tiempo discreto	$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, x[n-k]$$	Convolución entre secuencias
DTFT	$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$$	Producto de las transformadas
TZ	$$Y(z) = H(z)X(z)$$	Producto de las transformadas

Representación de un sistema LTI mediante ecuaciones en diferencias

Sistemas LTI – Representación mediante ecs. en diferencias

La respuesta a un sistema LTI puede determinarse mediante una ecuación en diferencias más sus condiciones iniciales

$$y[n] = \sum_{k=1}^{N-1} a_k\, y[n-k] + \sum_{i=0}^{M-1} b_i\, x[n-i]$$

+ condiciones iniciales

Ejemplo: $y[-1]$, $y[-2]$, $y[-3]$, ..., $y[-N+1]$

Representación del sistema LTI mediante la Transformada Z

Sistemas LTI – Representación mediante la TZ

$$y[n] = \sum_{k=1}^{N-1} a_k\, y[n-k] + \sum_{i=0}^{M-1} b_i\, x[n-i]$$

TZ

$$Y(z) = \sum_{k=1}^{N-1} a_k\, z^{-k}\, Y(z) + \sum_{i=0}^{M-1} b_i\, z^{-i} X(z)$$

$$\boxed{H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{M-1} b_i\, z^{-i}}{1 - \sum_{k=1}^{N-1} a_k\, z^{-k}}}$$

$\boldsymbol{a_k}$: coeficientes del denominador

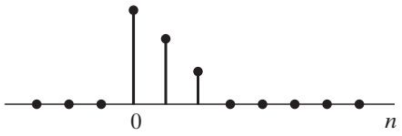
$\boldsymbol{b_i}$: coeficientes del numerador

Largo de la respuesta al impulso de sistemas LTI

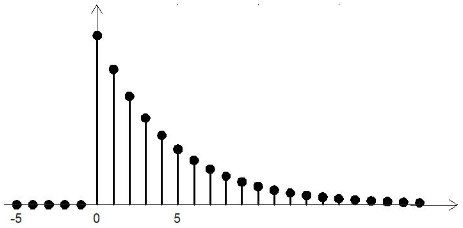
Largo de la respuesta al impulso de sistemas LTI

Respuesta Impulsiva de sistemas LTI

finita (FIR)



infinita (IIR)



$$y[n] = \sum_{k=1}^{N-1} a_k \, y[n-k] + \sum_{i=0}^{M-1} b_i \, x[n-i]$$

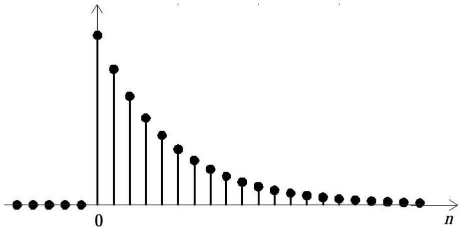
$$\begin{cases} \text{FIR} & a_k = 0 \\ \text{IIR} & a_k \neq 0 \end{cases}$$

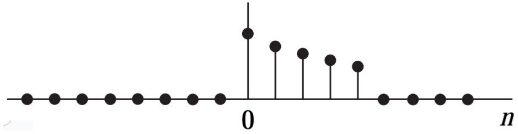
Causalidad de sistemas LTI

Causalidad de sistemas LTI

Causal

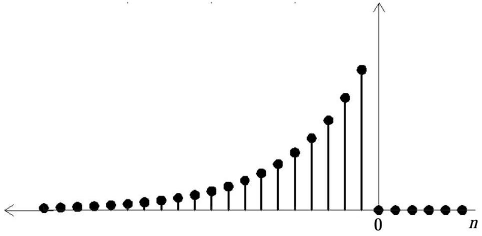
$$h[n] = 0; \quad \forall\, n < 0$$

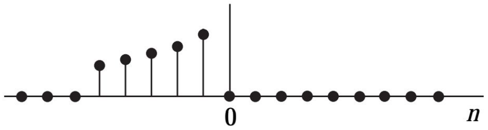




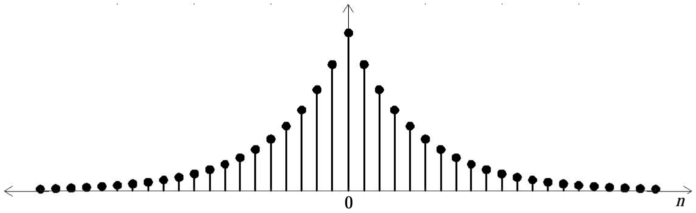
Anti-causal

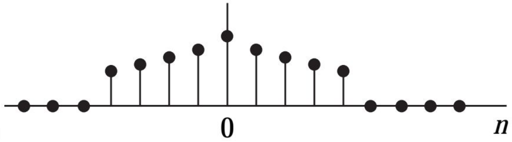
$$h[n] = 0; \quad \forall\, n \geq 0$$





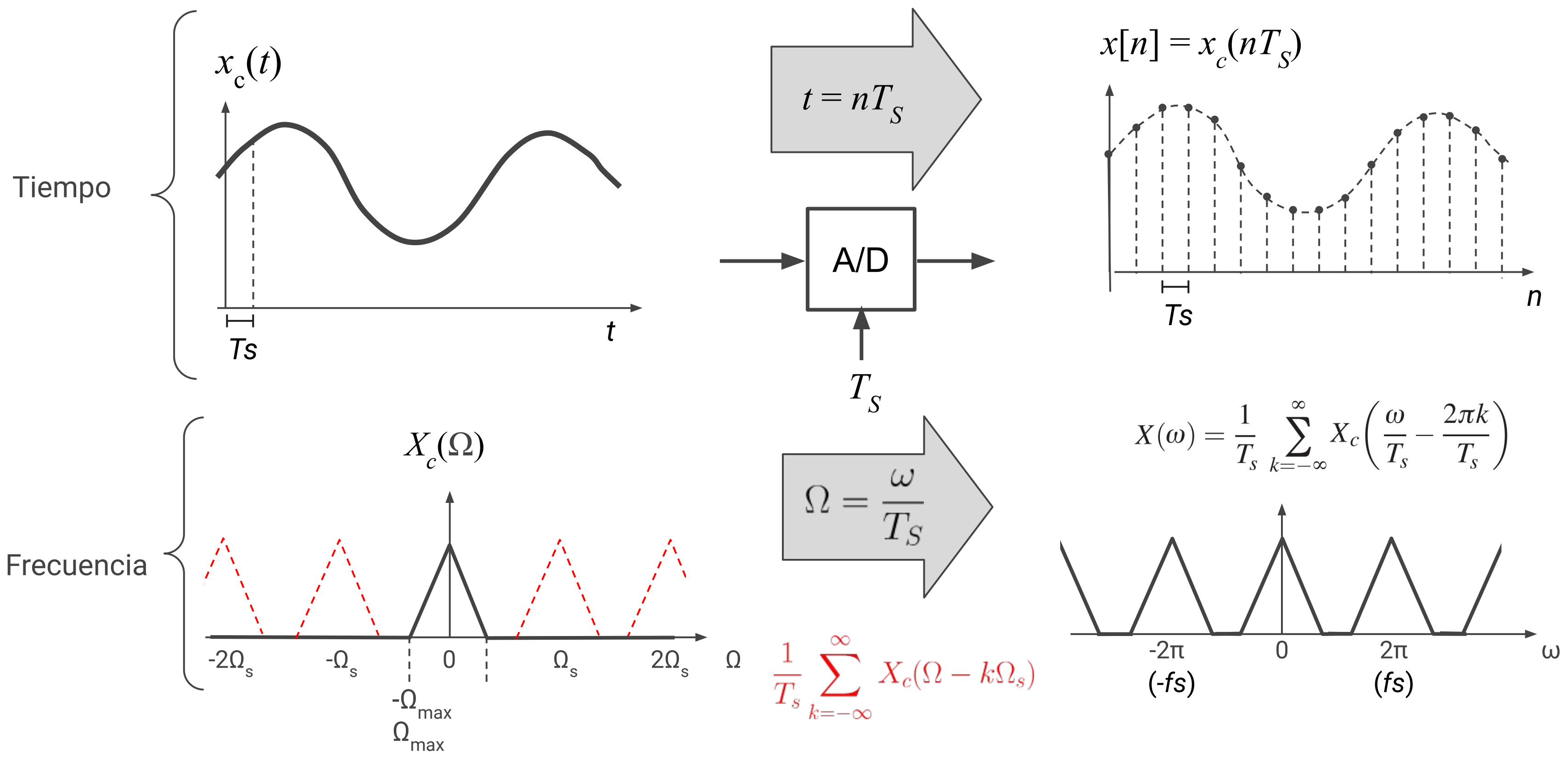
No causal (bilateral)



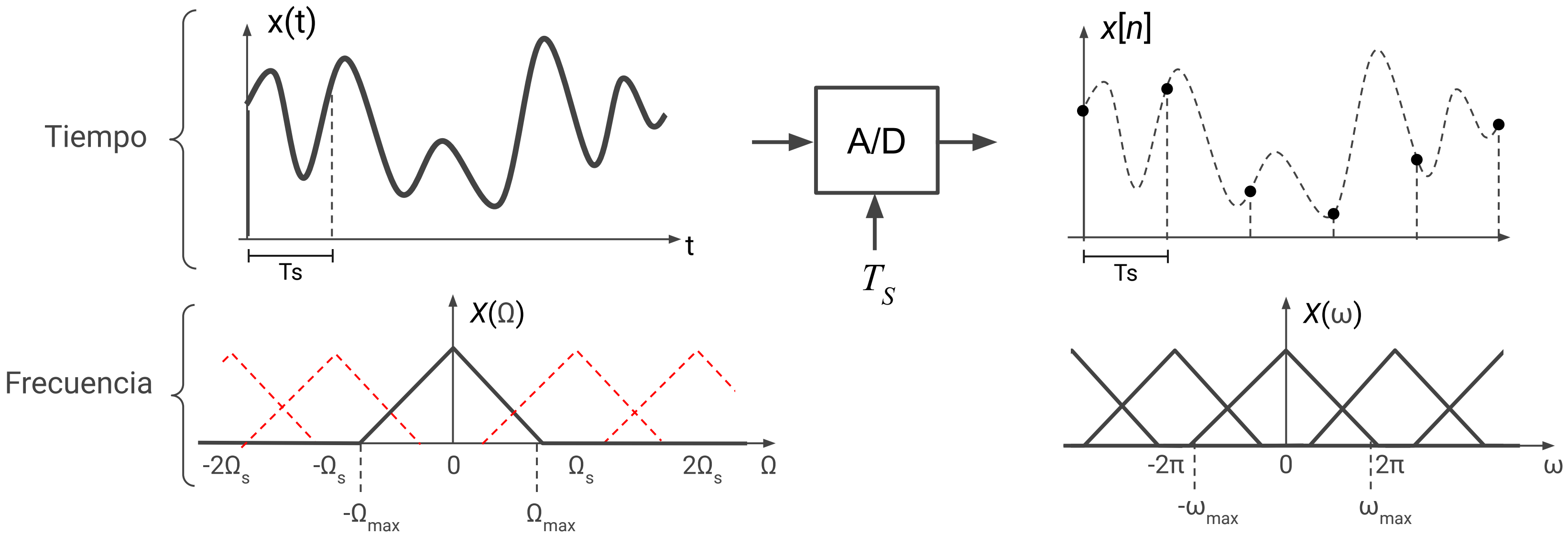


Muestreo

Muestreo de señales



Muestreo de señales – Aliasing



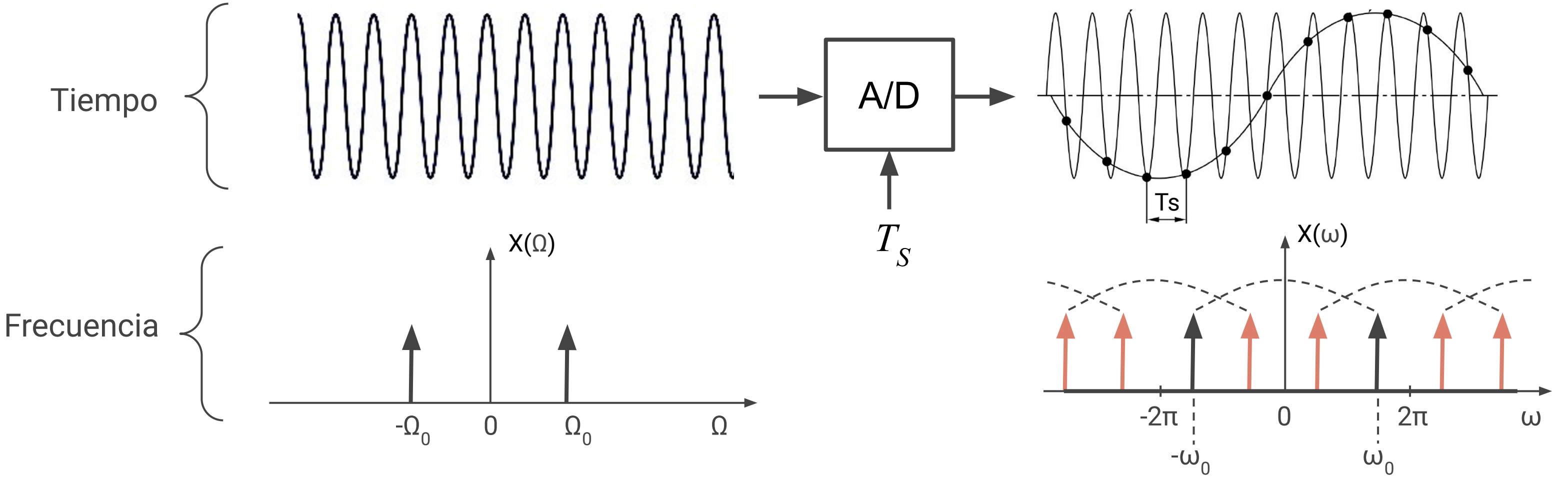
Teorema de Nyquist:

$$f_{max} < \frac{f_S}{2}$$

$f_S = 1/T_S$: Frecuencia de muestreo

f_{max} : Frecuencia máxima de la señal

Muestreo de señales – Aliasing



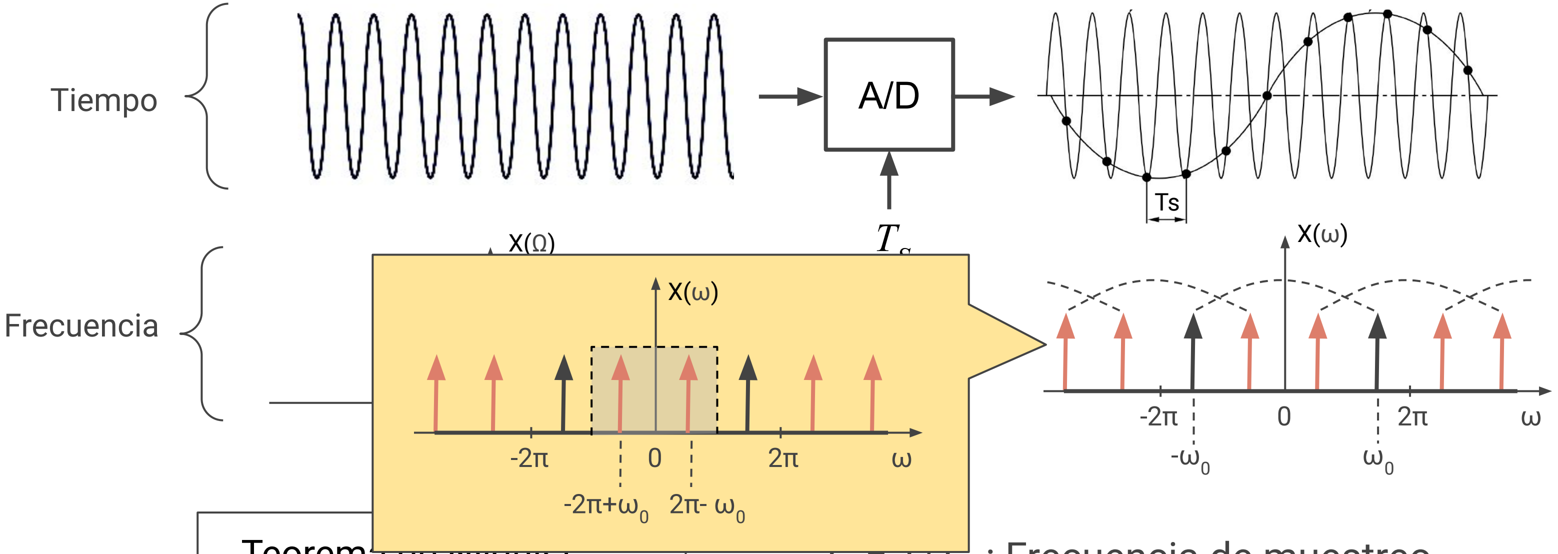
Teorema de Nyquist:

$$f_0 < \frac{f_S}{2}$$

$f_S = 1/T_S$: Frecuencia de muestreo

f_0 : Frecuencia máxima de la señal

Muestreo de señales



Teorema de Nyquist:

$$f_0 < \frac{f_S}{2}$$

$f_S = 1/T_S$: Frecuencia de muestreo

f_0 : Frecuencia máxima de la señal

Herramientas de software

Herramientas de software

MATLAB

python™

GNU Octave

OCTAVE ONLINE [Enlace]

Herramientas de software (Matlab)

Generar vectores

```
v = 1:10;       % vector de números entre 1 y 10, en pasos de 1
v = 1:0.2:5     % vector de números entre 1 y 5, en pasos de 0.2
v = zeros(M,N)  % matriz MxN de ceros
v = ones(M,N)   % matriz MxN de unos
v = linspace(start,stop,N)  % vector de N puntos entre start y stop
```

Indexación

```
v(2:6)     % acceder a los elementos de entre 2 y 6: [v(2) ... v(6)]
v(3:2:20)  % acceder a los elementos de entre 2 y 20 en pasos de 2
A(5,:)     % acceder a la fila 5 y todas las columnas de la matriz A
A(:,4)     % acceder a todas las filas y columna 4 de la matriz A
```

Herramientas de software (Matlab)

Algunas funciones

```
x = sin(2*pi*0.2*n) % vector que define un seno de frecuencia
                    % angular w0=2*pi*0.2 [rad] para tiempo discreto n

x = exp(-0.5*n)     % vector que define una exponencial negativa
                    % para tiempo discreto n

x = square(2*pi*0.2*n)  % vector que define una onda cuadrada de
                        % frecuencia angular w0=2*pi*0.2 [rad]
```

Herramientas útiles (Matlab)

Respuesta en frecuencia mediante FFT (para secuencia de tiempo finito)

```
X = fft(x, nfft);        % Calcula la DFT de x mediante la FFT
                         % nfft: puntos de la FFT para padding
```

Valor absoluto

```
abs(X);          % Módulo de un valor o vector complejo o real
```

Fase (ángulo)

```
angle(X);        % Ángulo de un valor complejo (coordenadas polares)
```

Herramientas útiles (Matlab)

Transferencia $$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + \dots}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} + \dots}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \dots \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots \end{bmatrix}$$

Respuesta en frecuencia para secuencia de cualquier duración

```
[H,w] = freqz(b,a,nfft);  % w frecuencia angular [rad] (0-2pi)
                          % H respuesta en frecuencia
                          % nfft cantidad de puntos de w
```

Polos y ceros en el plano z

```
zplane(b,a)       % gráfica polos y ceros de los coeficientes a y b
```

Herramientas útiles (Matlab)

Convolución

```
y = conv(h, x); % Convolución entre las secuencias h y x
```

Respuesta a un sistema FIR o IIR

```
y = filter(h, 1, x) % Respuesta de secuencia x a un sistema h FIR
y = filter(b, a, x) % Respuesta de secuencia x a un sistema h IIR
```

Herramientas útiles (Matlab)

plot

```
y = plot(x, y);  % gráfico de líneas del vector y en función de x
y = plot(y);     % gráfico de líneas de y en función del nro de muestras
```

stem

```
stem(n, x) % Gráfico de muestras discretas de x en función de n
stem(x)    % Gráfico de muestras discretas de x
```

help

```
help [función]  % ver documentación de ayuda de cualquier función
help plot       % Ejemplo
```

Herramientas útiles (Python)

Paquetes

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy
```

Filtrado

```
scipy.signal.lfilter(...)
scipy.signal.convolve(...)
```

Espectro

```
scipy.fft.fft(...)
scipy.signal.freqz(...)
```

Polos y ceros

```
scipy.signal.zplane(b, a)
```

Generar vectores

```
np.zeros(...)
np.ones(...)
np.linspace(...)
```

Algunas funciones

```
np.sin(...)
np.exp(...)
np.log10(...)
```

Módulo

```
np.abs(x)
```

Fase

```
np.angle(x)
```

Actividades

Actividad 1

1. Genere las siguientes secuencias para un largo de M=20

   $x_1(n) = \sin(2\pi\ 0.1\ n);$

   $x_2(n) = \sin(2\pi\ 0.05\ n);$

   $x_3(n) = \sin(2\pi\ 0.02\ n);$

   $x_4(n) = x_1(n) + x_2(n) + x_3(n)$

2. Grafique todos los casos anteriores usando **plot()** y **stem()**

Actividad 2

1. Defina la siguiente secuencia, de largo M=10, y luego grafíquela con stem:

$$x(n) = \sin(2\pi\ 0.2\ n)$$

2. Calcule la FFT de dicha secuencia y grafique su módulo.

   Si bien la FFT es discreta, nos interesa como aproximación de la transformada de Fourier, por lo cual, utilice **plot** para visualizarla como gráfico de línea. Sin embargo, en este caso agregue la opción **'o-'** (como tercer argumento) que permite agregar al gráfico de líneas un marcador para distinguir mejor los puntos del vector.

3. Repita el mismo ejemplo anterior pero aplicando zero padding en la FFT, para nfft = 20, 40 y 80

Actividad 3

Sea un sistema FIR h(n) definido en base a los siguientes coeficientes:

$$h = \{4, 3, 3.5, 4, 3, 2.5, 0.5, 0.3, 0.2\}$$

1. Graficar la respuesta impulsiva y el módulo de la respuesta en frecuencia del sistema h(n). Considere una cantidad de puntos de la FFT adecuada para una mejor interpolación del gráfico en frecuencia.

2. Graficar polos y ceros de h(n).

3. Considere ahora una secuencia **x(n) = square(2*pi*0.02*n)**, de largo **M=100**, como entrada del sistema LTI del punto anterior. Calcule la salida y(n) y grafique su respuesta en tiempo y en frecuencia. Nota: para calcular la salida utilice tanto **conv()** como **filter()**.

Actividad 4

Sea un sistema IIR h(n) definido en base a los siguientes coeficientes:

b = {3, 1.5, 2}   a = {1 -0.6}

1. Graficar el módulo de la respuesta en frecuencia del sistema h(n) utilizando la función **freqz()**. Considere una cantidad de puntos de la variable ω para una mejor interpolación del gráfico en frecuencia.

2. Graficar polos y ceros de h(n).

3. Utilice la misma onda cuadrada de la actividad anterior para obtener la salida del sistema LTI).

4. ¿Qué ocurre si los coeficientes del denominador ahora son a = {1 -1.2}? Repita los puntos anteriores y obtenga conclusiones.