Sean U_1, U_2 dos variables aleatorias independientes uniformes ~U(0; 1).

1. Halle la densidad conjunta de las variables:

$$\begin{cases} R = \sqrt{-2\ln(U_1)} \\ \Theta = 2\pi U_2. \end{cases}$$

   Verifique que R tiene distribución Rayleigh, que Θ es uniforme y que son independientes (¿por que?).

2. Halle la densidad conjunta de las variables:

$$\begin{cases} Z_1 = R\cos\Theta \\ Z_2 = R\sin\Theta \end{cases}$$

y demuestre que se trata de variables normales estándar independientes.

$$R = \sqrt{-2\ln(U_1)} \qquad g(U_1,U_2) = (R,\theta) = \left(\sqrt{-2\ln(U_1)},\ 2\pi U_2\right) \longrightarrow \left. U_1 = e^{-R^2/2}\ ;\ U_2 = \frac{\theta}{2\pi}\ \right) g^{-1}$$

$$\theta = 2\pi U_2$$

$$f_{U_1,U_2} = f_{U_1}\cdot f_{U_2} = 1\ \mathbb{1}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} < \begin{pmatrix}U_1\\U_2\end{pmatrix} < \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$f_{R,\theta}(R,\theta) = \left.\frac{f_{U_1,U_2}}{|\det(J(g))|}\right|_{g^{-1}} \qquad J(g) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial U_1}\sqrt{-2\ln(U_1)} & \frac{\partial}{\partial U_2}\sqrt{-2\ln(U_1)} \\ \frac{\partial}{\partial U_1} 2\pi U_2 & \frac{\partial}{\partial U_2} 2\pi U_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{-\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{-2\ln(U_1)}\cdot U_1} & 0 \\ 0 & 2\pi \end{vmatrix}$$

$$\left(-2\ln(U_1)\right)^{1/2\,\prime} = \frac{1}{2}\left(-2\ln(U_1)\right)^{-1/2}\cdot\frac{1}{U_1} = \frac{-2}{2\sqrt{-2\ln(U_1)}\cdot U_1}$$

$$|\det J| = \left|\frac{-2\pi}{\sqrt{-2\ln(U_1)}\cdot U_1}\right| \qquad \therefore\ f_{R,\theta} = \left.\frac{1\ \mathbb{1}\{0<U_1<1\}\mathbb{1}\{0<U_2<1\}}{\left|\frac{-2\pi}{\sqrt{-2\ln(U_1)}\,U_1}\right|}\right|_{\substack{U_2=\frac{\theta}{2\pi}\\ U_1=e^{-R^2/2}}} = \frac{1\ \mathbb{1}\{0<R<\infty\}\mathbb{1}\{0<\theta<2\pi\}}{\left|\frac{-2\pi}{\sqrt{R^2}\cdot e^{-R^2/2}}\right|}$$

$$f_{R,\theta} = \frac{R\,e^{-R^2/2}}{2\pi}\mathbb{1}\{0<R<\infty\}\mathbb{1}\{0<\theta<2\pi\} \quad \text{se puede ver } f_R(r)\cdot f_\theta(\theta)$$

$$f_\theta(\theta) = \frac{1}{2\pi}\mathbb{1}\{0<\theta<2\pi\}\ ;\ \theta\sim\mathcal{U}(0,2\pi)$$

$$f_R(r) = r\,e^{-r^2/2}\,\mathbb{1}\{0<R<\infty\}\quad ,\ R\sim \mathrm{Ray}(1)$$

$$\boxed{\begin{matrix} z_1 = R\cos\theta \\ z_2 = R\sin\theta \end{matrix}} \qquad f_{z_1,z_2} = \frac{f_{R,\theta}}{|\det(J(g))|} \longrightarrow z_1^2+z_2^2 = R^2 \rightarrow R = \sqrt{z_1^2+z_2^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{z_2}{z_1}$$

$$J(g) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial R}R\cos\theta & \frac{\partial}{\partial\theta}R\cos\theta \\ \frac{\partial}{\partial R}R\sin\theta & \frac{\partial}{\partial\theta}R\sin\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -R\sin\theta \\ \sin\theta & R\cos\theta \end{vmatrix} \xrightarrow{\det} R\cos^2\theta + R\sin^2\theta = R$$

$$R(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = R$$

$$f_{z_1,z_2} = \left.\cancel{R}\,e^{-R^2/2}\cdot\frac{1}{2\pi}\mathbb{1}\{0<R<\infty\}\mathbb{1}\{0<\theta<2\pi\}\cdot\frac{1}{|\cancel{R}|}\right|_{\substack{R=\sqrt{z_1^2+z_2^2}\\ \theta=\tan^{-1}\left(\frac{z_2}{z_1}\right)}} = \frac{e}{2\pi}^{\frac{-z_1^2-z_2^2}{2}}\mathbb{1}\{0<z_1^2+z_2^2<\infty\}\ \mathbb{1}\left\{0<\frac{z_2}{z_1}\right\}$$

Se separa en 2 normales

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-z_1^2}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-z_2^2}{2}} \qquad z_1,z_2\sim\mathcal{N}(0,1)$$

Sea x una variable aleatoria exponencial, $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, de parámetro $\lambda = 0.5$

1. Genere $N = 10^4$ muestras de X (usando el método de **transformación inversa**).
2. Estime la media y la varianza muestrales de X y comparelas con las teóricas ($\mu = 1/\lambda$, $\sigma^2 = 1/\lambda^2$).
3. Construya el **histograma** de las muestras de X. Normalice el histograma para que tenga área 1. Compare la función obtenida con la función de densidad de probabilidad teórica.

$U \sim \mathcal{U}(0,1)$; $U = F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$

Sea $Y = X + N$, con X y N variables aleatorias independientes.

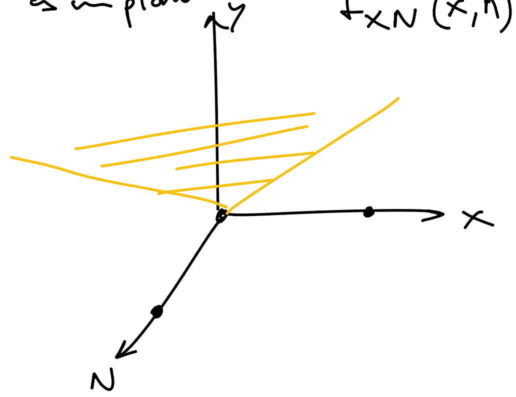
1. Demostrar que $f_Y(y) = f_X(y) * f_N(y)$.
2. Demostrar que $f_{Y|X}(y|x) = f_N(y-x)$.
3. Si $X \in \{0,1\}$ es una variable aleatoria Bernoulli con $\mathbb{P}(X=0) = p$ y $\mathbb{P}(X=1) = q = 1-p$, expresar y representar $f_Y(y)$ y $f_{Y|X}(y|x)$.

1) Acá la idea es ir de a poco planteando las igualdades.

Por propiedad: Una $\sum$ de variables aleatorias independientes con función de densidad se dice que:

$$f_Y(y) = f_{X+N}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z) f_N(y-z)\, dz = (f_X * f_N)(y)$$

Es un plano



$f_{XN}(x,n) = f_X(x).f_N(n)$ Vamos a integrar esto para encontrar la $F_Y(y)$

$Y = X+N$ marginal

$$f_{X+N}(x+n) \to f_Y(y) = \mathbb{P}(X+N = y) = \mathbb{P}(X = y-N) = f_X(y-N) =$$

marginal de la conj. $\longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(y-n) f_N(n)\, dn = \int_{-\infty}^{+\infty} f_N(n) f_X(y-n)\, dn = f_N(y) * f_X(y)$

Convolución es $(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\eta) g(t-\eta)\, d\eta$

2) Demostrar $f_{Y|X}(y|x) = f_N(y-x)$

$y = x+N$ son indep

$$f_{Y|X}(y|x) = \mathbb{P}(Y = y|X) = \mathbb{P}(X+N = y|X) = \mathbb{P}(N = y-X|X) = \mathbb{P}(N=n|X) \overset{\vee}{=} \mathbb{P}(N=n) = f_N(n)$$

3) $X \sim Ber(p)$; $f_X(x) = \sum_i p_X(\varepsilon_i)\,\delta(x-\varepsilon_i) = \underbrace{p}_{p = \mathbb{P}(X=0)}\,\delta(x) + \underbrace{(1-p)}_{1-p = \mathbb{P}(X=1)}\,\delta(x-1)$

$f_Y(y) = f_X(x) * f_N(n)$

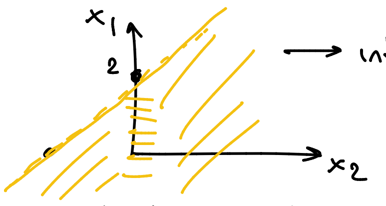
$f_{Y|X}(y) = f_N(n)$

No sé como se sé N o como se distribuye

Sea $\mathbf{X} = [X_1, X_2]$ un vector aleatorio continuo. Si $f_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{x})$ fuera conocida, cómo haría para calcular las siguientes probabilidades?

- $\mathbb{P}(X_1 - X_2 \leq 2)$
- $\mathbb{P}(\text{máx}(X_1, X_2) \leq -1)$
- $\mathbb{P}(\text{mín}(|X_1|, |X_2|) \geq 2)$
- $\mathbb{P}(XY \geq 0)$

1) $\mathbb{P}(x_1 - x_2 \leq 2) = \mathbb{P}(x_1 \leq 2 + x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{2+x_2} f_{x_1, x_2}(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2$



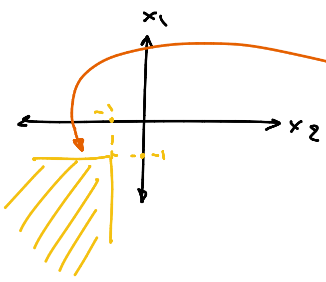
→ integramos el área amarilla

$x_1 = 0$ $x_2 = -2$

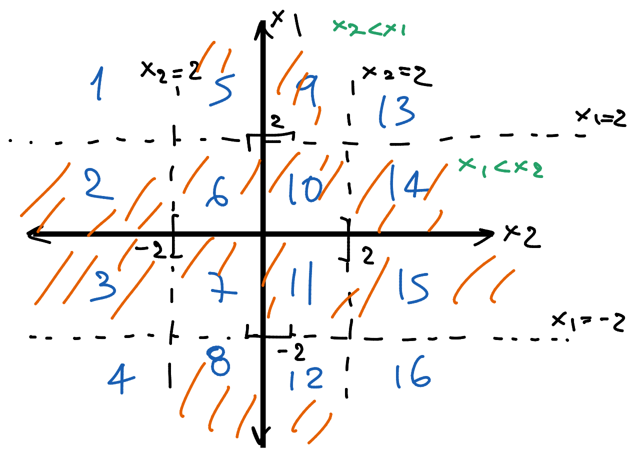
$x_1 = 2$ $x_2 = 0$

lo conjunto del vector

2) $\mathbb{P}(\max(x_1, x_2) \leq -1) = \mathbb{P}(\underbrace{x_1 \leq x_2 \leq -1 \,,\; x_2 \leq x_1 \leq -1}_{\text{un área}}) = \int_{-\infty}^{-1} \int_{-\infty}^{-1} f_{\vec{X}}(\vec{x})\, dx_1\, dx_2$



3) $\mathbb{P}(\min(|x_1|, |x_2|) \geq 2)$



1) $x_1 > 2$ no
$x_2 < -2$

2) $0 \leq x_1 < 2$ si
$x_2 < -2$

Son las áreas 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15

$$\int_{-2}^{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\vec{X}}(\vec{x})\, dx_1\, dx_2 + \int_{-2}^{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\vec{X}}(\vec{x})\, dx_2\, dx_1 - \int_{-2}^{2} \int_{-2}^{2} f_{\vec{X}}(\vec{x})\, dx_1\, dx_2$$

así me recorpito 2 veces.

4) $\mathbb{P}(x_1 x_2 \geq 0) = \iint_{0\ 0}^{+\infty\ +\infty} f_{\vec{X}}(\vec{x})\, d\vec{x} + \iint_{-\infty\ -\infty}^{0\ 0} f_{\vec{X}}(\vec{x})\, d\vec{x}$

Solo si $x_1 \geq 0 \wedge x_2 \geq 0 \quad \cup \quad x_1 \leq 0 \wedge x_2 \leq 0$

Sean X, Y, y Z V.A independientes. Hallar las siguientes probabilidades en función de $F_X(x)$, $F_Y(y)$, $F_Z(z)$

1. $\mathbb{P}(|X| \leq 5, Y > 3, Z^2 \leq 2)$
2. $\mathbb{P}(\text{máx}(X, Y, Z) \leq -1)$

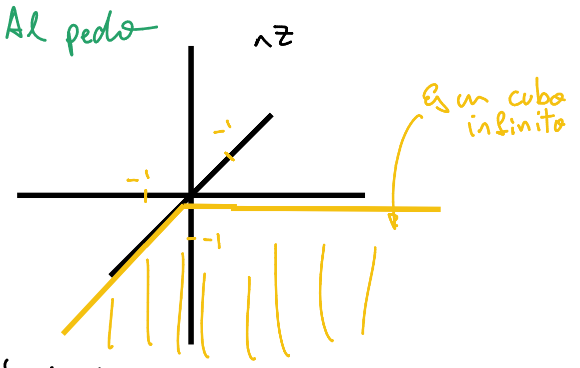
1) Si son independientes las intersecciones se separan en producto.

$$\mathbb{P}(|X|\leq 5, Y>3, Z^2\leq 2) = \mathbb{P}(|X|\leq 5)\,\mathbb{P}(Y>3)\,\mathbb{P}(Z^2\leq 2) = \mathbb{P}(-5\leq X\leq 5)\left[1-\mathbb{P}(Y\leq 3)\right]\mathbb{P}(-2\leq Z\leq 2) =$$

$$\left[F_X(5)-F_X(-5)\right]\left[1-F_Y(3)\right]\left[F_Z(2)-F_Z(-2)\right]$$

$$\mathbb{P}(\max(X,Y,Z)\leq -1) = \boxed{\begin{aligned}&\mathbb{P}(X\leq Y\leq Z\leq -1)+\\&\mathbb{P}(Y\leq X\leq Z\leq -1)+\\&\mathbb{P}(Z\leq X\leq Y\leq -1)+\\&\mathbb{P}(X\leq Z\leq Y\leq -1)+\\&\mathbb{P}(Z\leq Y\leq X\leq -1)+\\&\mathbb{P}(Y\leq Z\leq X\leq -1)\end{aligned}}$$

Al pedo



Es la integral de $-\infty$ a -1 en cada eje

$$\int_{-\infty}^{-1}\int_{-\infty}^{-1}\int_{-\infty}^{-1} f_{X,Y,Z}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{-\infty}^{-1}\int_{-\infty}^{-1}\int_{-\infty}^{-1} f_X(x)\,f_Y(y)\,f_Z(z)\,dx\,dy\,dz = F_X(-1)\,F_Y(-1)\,F_Z(-1)$$

Prop: la conjunta es producto de marginales porque son VA indep.

mueve integrales e integra

Sea $\mathbf{X} = [X_1, X_2]$ un vector aleatorio continuo cuya PDF es

$$\cancel{F_{\mathbf{X}}}(x_1, x_2) = k(x_1 + x_2) \qquad 0 < x_1 < 1 \quad 0 < x_2 < 1$$

f_X

.

- Hallar k
- Hallar $F_{\mathbf{X}}$
- Hallar $f_{X_1}(x_1)$ y $f_{X_2}(x_2)$. Marginales

$f_{\vec{x}}(\vec{x}) = k(x_1+x_2)$; Prop de función de densidad:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_{\vec{x}}(\vec{x})\, d\vec{x} = 1 \quad \therefore \quad k\int_0^1\int_0^1 (x_1+x_2)\, dx_1\, dx_2 = 1 = k\int_0^1 \left(\frac{x_1^2}{2} + x_1x_2\right)\Big|_0^1 dx_2 = 1 = k\int_0^1 \left(\frac{1}{2} + x_2\right) dx_2 =$$

$$k\int_0^1 \left(\frac{1}{2} + x_2\right) dx_2 = k\left(\frac{x_2}{2} + \frac{x_2^2}{2}\right)\Big|_0^1 = 1 = k = 1$$

Probamos: $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 1\,(x_1+x_2)\, dx_1\, dx_2 = 1$ ✓

Integral definida

$\displaystyle\int_0^1\int_0^1 (x+y)\, dx\, dy = 1$

$$F_{\vec{x}}(\vec{x}) = \underbrace{\int_0^{x_1}\int_0^{x_2}}_{\substack{0<x_1<1 \\ 0<x_2<1}} (x_1+x_2)\, dx_1\, dx_2 = \left(\frac{x_1^2x_2}{2} + \frac{x_2^2x_1}{2}\right) = \frac{x_1^2x_2 + x_2^2x_1}{2}\, \mathbb{1}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} < \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} < \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Ahora los marginales → integrás la variable que querés sacar.

$$f_{x_1}(x_1) = \int_0^1 f_{\vec{x}}(\vec{x})\, dx^2 = \int_0^1 (x_1+x_2) dx_2 = \left(x_1 + \tfrac{1}{2}\right) \mathbb{1}\{0<x_1<1\}$$

$$\int_0^1 x_1\, dx_2 = x_1$$

$$\int_0^1 x_2\, dx_2 = \tfrac{1}{2}$$

$$f_{x_2}(x_2) = x_2 + \tfrac{1}{2}\ \mathbb{1}\{0<x_2<1\}$$

$x = \delta(n-1) + 3\delta(n) + 4\delta(n+2)$

$y(n) = \delta(n-3) + \delta(n-2) + 5\delta(n)$

$(x*y)(t) = \sum_{\tau=-2}^{1} x(\tau)\, y(t-\tau)$

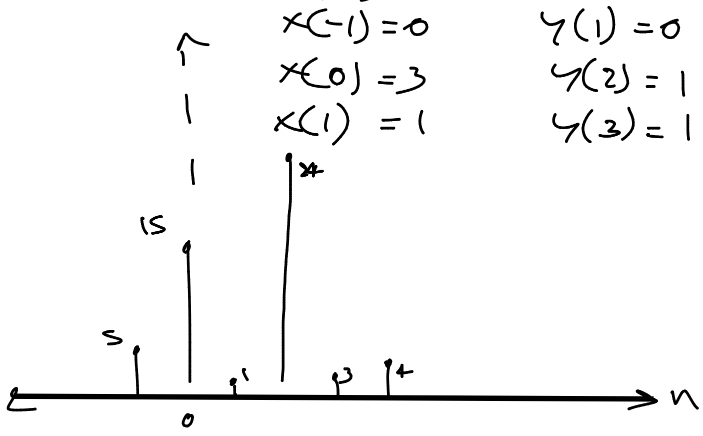
donde $x \neq 0$

$x(-2) = 4$ $\quad y(0) = 5$

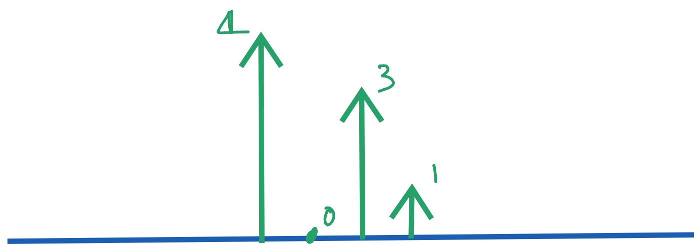
$x(-1) = 0$ $\quad y(1) = 0$

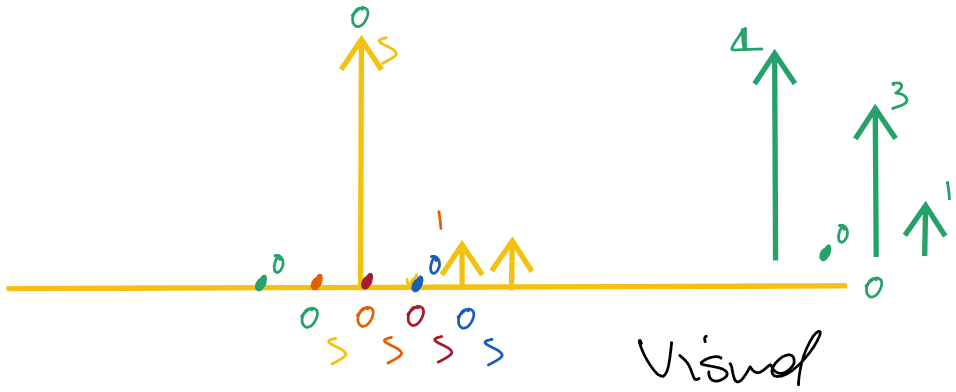
$x(0) = 3$ $\quad y(2) = 1$

$x(1) = 1$ $\quad y(3) = 1$



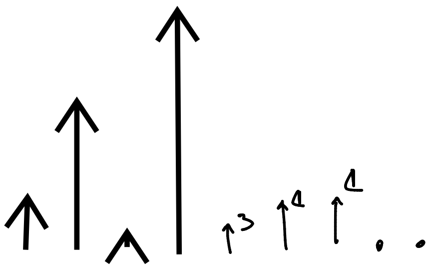
x)





Visual

F)



$F(-3) = \sum_{\tau=-2}^{1} x(\tau)\, y(-3-\tau) = x(-2)y(-5) + x(-1)y(-4) + x(0)y(-3) + x(1)y(-2)$

$F(-1) = \sum_{\tau=-2}^{1} x(\tau)\, y(-1-\tau) = x(-2)y(-3) + x(-1)y(-2) + x(0)y(-1) + x(1)y(0) = 5$

$F(0) = x(-2)y(-2) + x(-1)y(-1) + x(0)y(0) + x(1)y(1) =$

$0 \quad 0 \quad 15 \quad + \quad 0 = 15$

$F(1) = x(-2)y(-1) + x(-1)y(0) + x(0)y(1) + x(1)y(2) = 1$

$0 \quad 0 \quad 0 \quad 1$

$F(2) = x(-2)y(0) + x(-1)y(1) + x(0)y(2) + x(1)y(3)$

$20 + 0 + 3 + 1 = 24$

$F(3) = x(-2)y(1) + x(-1)y(2) + x(0)y(3) + x(1)y(4) =$

$4 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 0 = 3$

$F(4) = x(-2)y(2) + x(-1)y(3) + x(0)y(4) + x(1)y(5) =$

$4 \quad 0 \quad = 4$

$F(5) = 4$

Considere el sistema en tiempo discreto cuya entrada es $x(n)$ y la salida $y(n)$. Sabemos que

- $y(n) = g(n) * z(n)$, donde $g(n) = \beta^n$ para $n \geq 0$.
- $z(n) = z_1(n) + z_2(n)$
- $z_1 = f_1(n) * x(n)$, donde $f_1(n) = \alpha_1^n$ para $n \geq 0$.
- $z_2 = f_2(n) * x(n)$, donde $f_2(n) = \alpha_2 \delta(n-\gamma)$.

1. Halle la respuesta impulsiva $h(n)$ tal que $y(n) = h(n) * x(n)$.
2. Grafique $h(n)$ para
   a) $\beta = \frac{1}{2}, \alpha_1 = \frac{1}{5}, \alpha_2 = -3, \gamma = 2$
   b) $\beta = -\frac{1}{2}, \alpha_1 = \frac{1}{5}, \alpha_2 = -3, \gamma = 2$
   c) $\beta = \frac{1}{2}, \alpha_1 = -\frac{1}{5}, \alpha_2 = -3, \gamma = 2$
3. Para el primer caso, obtenga $y(n)$ cuando $x(n) = \delta(n+3)$.

$$g(n) = \beta^n u(n) \xrightarrow{\mathcal{Z}} G(z) = \frac{1}{1-\beta z^{-1}}$$

$$f_1(n) = \alpha_1^n u(n) \xrightarrow{\mathcal{Z}} f_1(z) = \frac{1}{1-\alpha_1 z^{-1}}$$

$$f_2(n) = \alpha_2 \delta(n-\gamma) \xrightarrow{\mathcal{Z}} \alpha_2 z^{-\gamma} \cdot 1$$

$$x(n) * h(n) = y(n) \quad \Big| \; x(n) = \delta(t)$$

$$H(z) = Y(z) = G(z) Z(z)$$

$$= G(z) f_1(z) + G(z) f_2(z)$$

$$= \frac{\alpha_2 z^{-\gamma}}{1-\beta z^{-1}} + \frac{1}{1-\beta z^{-1}} \cdot \frac{1}{1-\alpha_1 z^{-1}} =$$

$$\beta^n u(n) * \alpha_1^n u(n)$$

$$H(z) = \frac{\alpha_2 z^{-\gamma}}{1-\beta z^{-1}} + \frac{1}{1-\beta z^{-1} - \alpha_1 z^{-1} + \beta\alpha_1 z^{-2}}$$

$$\Big\downarrow \mathcal{Z}^{-1}$$

$$\alpha_2 \beta^{n-\gamma} u(n-\gamma) + \frac{1}{1-\beta/\alpha_1} \cdot \alpha_1^n u(n) = h(n)$$

$$A(z) = \frac{1}{1-\beta z^{-1} - \alpha_1 z^{-1} + \beta\alpha_1 z^{-2}}$$

$$A(z) = \frac{1}{\beta\alpha_1 z^{-2} + z^{-1}(-\beta-\alpha_1) + 1}$$

$$\beta^n u(n) * \alpha_1^n u(n) \qquad u(n-k) \in u(n)$$

$$a(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \beta^k \alpha_1^{n-k} u(n) \cancel{u(n-k)} \quad (k)$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \beta^k \frac{\alpha_1^n}{\alpha_1^k} u(n)$$

$$u(n)\alpha_1^n \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\beta}{\alpha_1}\right)^k}_{\text{serie geo}} = \frac{1}{1-\beta/\alpha_1} \cdot \alpha_1^n \, u(n)$$

$$h(n) = \alpha_2 \beta^{n-\gamma} u(n-\gamma) + \frac{\alpha_1^n u(n)}{1-\beta/\alpha_1}$$

a) $\beta = \frac{1}{2}, \alpha_1 = \frac{1}{5}, \alpha_2 = -3, \gamma = 2$
b) $\beta = -\frac{1}{2}, \alpha_1 = \frac{1}{5}, \alpha_2 = -3, \gamma = 2$
c) $\beta = \frac{1}{2}, \alpha_1 = -\frac{1}{5}, \alpha_2 = -3, \gamma = 2$

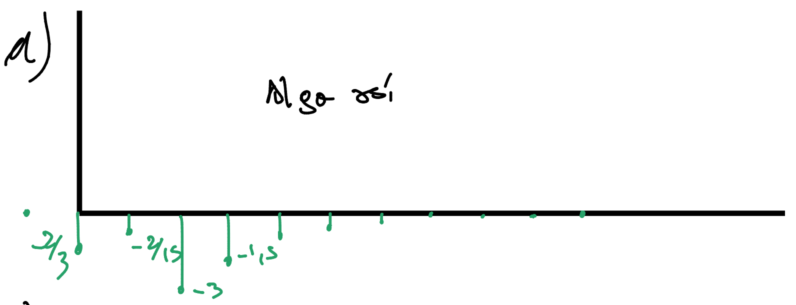
a) $$h(n) = -3 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-2} u(n-2) + \frac{\left(\tfrac{1}{5}\right)^n u(n)}{-3/2}$$

b) $$-3 \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right)^{n-2} u(n-2) + \frac{\left(\tfrac{1}{5}\right)^n u(n)}{7/2}$$

Alterna

c) $$-3 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-2} u(n-2) + \frac{\left(-\tfrac{1}{5}\right)^n u(n)}{7/2}$$

a)



b)

c)

Si $x = \delta(n+3)$ la salida es $\underline{h(n+3)}$

Considere el sistema en tiempo discreto cuya transferencia es

$$H(z) = 1 - \frac{3}{4}z^{,1} + \frac{1}{8}z^{-2}.$$

círculo unidad

$z = e^{j\Omega}$

$$H(\Omega) = \underbrace{1 - \frac{3}{4}e^{-j\Omega} + \frac{1}{8}e^{-2j\Omega}}_{\text{RTA en frecuencia}}$$

1. Obtenga la respuesta en frecuencia del sistema $H(\omega)$.

2. Halle la respuesta impulsiva $h(n)$.

3. Obtenga el diagrama de polos y ceros

Ahora antitransformamos

$\delta(n) - \frac{3}{4}\delta(n-1) + \frac{1}{8}\delta(n-2)$ } es estable y causal

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| < \infty$$

$h(t) = 0 \ \forall t < 0$

$$H(z) = 1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2} = 0 \rightarrow z = \underbrace{1/4 \text{ o } 1/2}_{\text{ceros}}$$

polo en ∞

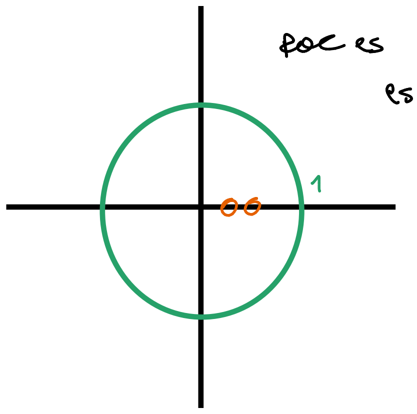
polo doble en cero

ROC es $\mathbb{C}$ estable y causal

$$H(z) = \frac{\sum_{q=0}^{M} z^{-q}\beta_q}{\sum_{p=0}^{N} z^{-p}\alpha_p} = \frac{\beta_0 + \beta_1 z^{-1} + \dots + \beta_n z^{-n}}{\alpha_1 + \alpha_2 z^{-1} + \dots + \alpha_n z^{-n}}$$

ceros

polos



Repita el problema anterior con

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}z^{,1} + \frac{1}{8}z^{-2}}.$$

Explique las diferencias con el problema anterior.

Esto tiene polos en $1/2$ y $1/4$ y no tiene ceros.

Lo abro por fracciones parciales: $1 - \frac{1}{4z-1} + \frac{2}{2z-1}$

$$1 - \frac{z^{-1}}{4 - z^{-1}} + \frac{2z^{-1}}{2 - z^{-1}}$$

$$1 - \frac{1}{4}\frac{z^{-1}}{1 - \frac{z^{-1}}{4}} + \frac{1}{2}\frac{2z^{-1}}{1 - \frac{z^{-1}}{2}}$$

desfase

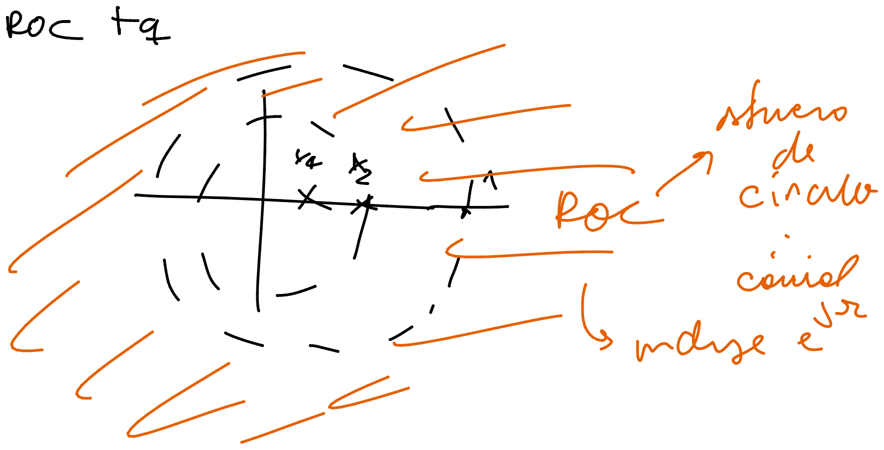
$\mathcal{Z}^{-1}$

$$\delta[n] - \frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u(n-1)\right] + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1)$$

$\mathcal{F}(\Omega)$

$$\delta(n) + \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{n}\right] u(n-1)$$

Es estable y causal ya que antitransformé usando ROC tq



$$1 - \frac{1}{4z-1} + \frac{2}{2z-1}\Bigg|_{z=e^{j\Omega}}$$

$$1 - \frac{1}{4e^{j\Omega}-1} + \frac{2}{2e^{j\Omega}-1}$$

Ejercicio 4 Suma de variables

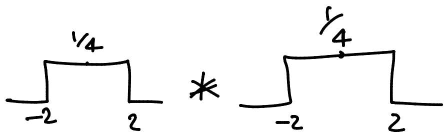
Sean X_1 y X_2 variables aleatorias independientes uniformes en el intervalo $[-2,2]$. Obtenga las funciones de densidad de probabilidad de las variables $X_3 = X_1 + X_2$ y $X_4 = X_1 + 2X_2$.

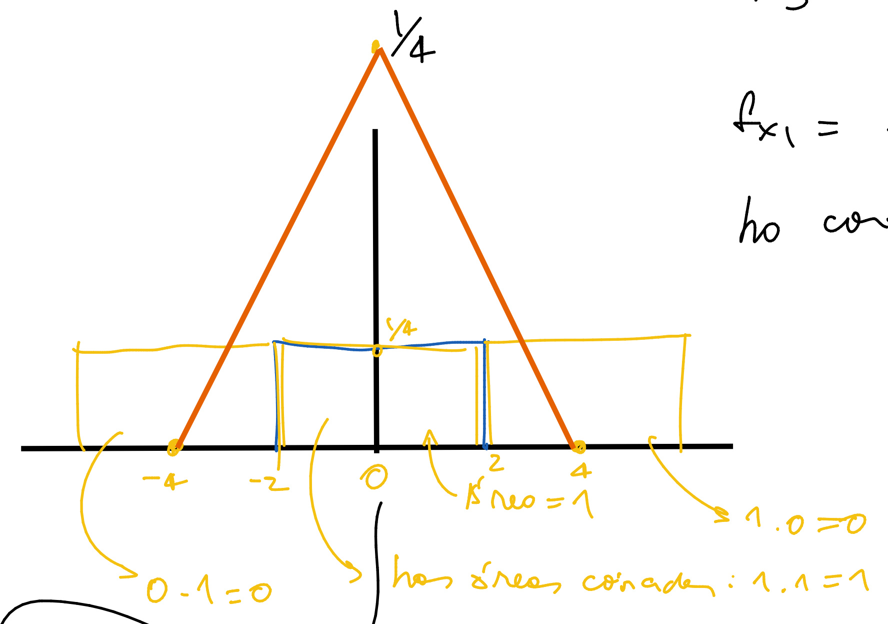
$x_1 \sim \mathcal{U}(-2,2) \qquad x_2 \sim \mathcal{U}(-2,2)$

$x_3 = x_1 + x_2 \rightarrow$ Como $x_3 = \sum x_i$ x_i indep

$x_4 = x_1 + 2x_2$

$f_{x_3}(\sum x_i) = f_{x_1} * f_{x_2} =$





$f_{x_1} = \frac{1}{4}\left[\mu(x+2) - \mu(x-2)\right] = f(x_2)$

la convolución da un triángulo

$\therefore f_{x_3} = \left(\frac{x}{16} + \frac{1}{4}\right) \mathbb{1}\{-4 \leq x \leq 0\}$

$+ \left(\frac{1}{4} - \frac{x}{16}\right) \mathbb{1}\{0 < x \leq 4\}$

En oro

$$\frac{1}{16}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\mu(t+2) - \mu(t-2)\right)\left(\mu(t+2) - \mu(t-2)\right)$$

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{16} = 1/4$$

$x_4 = x_1 + 2x_2 \longrightarrow f_{x_4}(x_4) = \mathbb{P}(X_4 = x_4) = \mathbb{P}(X_4 = x_1 + x_2) =$

$\alpha = 2x_2 \qquad f_\alpha(\alpha) = \mathbb{P}(\alpha = \alpha) = \mathbb{P}(x_2 = \alpha/2) = f_x(\alpha/2)$

$F_\alpha(\alpha) = \mathbb{P}(\alpha \leq \alpha) = \mathbb{P}(x_2 \leq \alpha/2) = F_x(\alpha/2) = \int_0^{\alpha/2} f_x(x)\,dx$

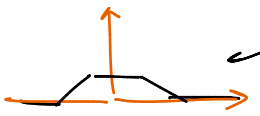
$F_\alpha(\alpha) = \int_0^{\alpha/2} \frac{1}{4}\,dx = \frac{\alpha}{8} \xrightarrow{d/d\alpha} = \frac{1}{8} \quad \therefore \alpha \sim \mathcal{U}[-4,4]$ o algo así

puede verse como un escalado

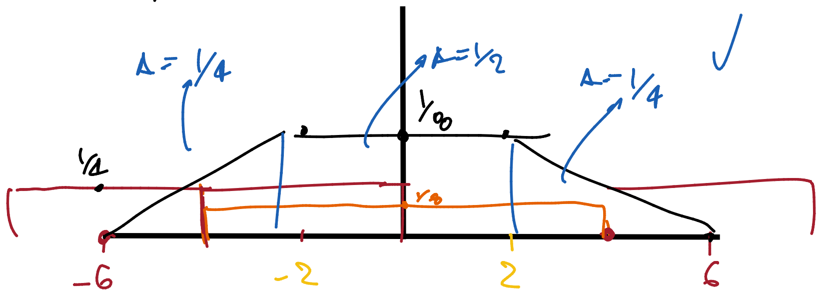
$f_\alpha = \frac{f_x}{|\det(\text{Jac } g)|} = \left.\frac{1/4}{2}\right|_{x=\alpha/2} = \frac{1}{8}$ ✓

$\alpha = 2x \rightarrow \alpha' = 2$

$f_{x_4} = f_\alpha * f_{x_1} =$



eso es la densidad ✓



$$\int_{-4}^{0} \frac{1}{32} = 1/8$$

Ejercicio 5 Ruido aditivo

Hecho

Sea $Y = X + N$, con X y N variables aleatorias independientes.

1. Demostrar que $f_Y(y) = f_X(y) * f_N(y)$.
2. Demostrar que $f_{Y|X}(y|x) = f_N(y - x)$.
3. Si $X \in \{0, 1\}$ es una variable aleatoria Bernoulli con $\Pr(X = 0) = p$ y $\Pr(X = 1) = q = 1 - p$, expresar y representar $f_Y(y)$ y $f_{Y|X}(y|x)$.

Ejercicio 6 Cambio de variables

Sean X e Y dos variables exponenciales independientes de parámetros λ_X y λ_Y respectivamente. Hallar la función de densidad de probabilidad conjunta de $W = XY$ y $V = X/Y$.

$x \sim Exp(\lambda_x) \quad y \sim Exp(\lambda_y) \longrightarrow f_{xy}(xy) = \underbrace{f_x \cdot f_y}_{\text{indep}} = \lambda_x \lambda_y e^{-\lambda_x x} e^{-\lambda_y x} \quad \forall \begin{cases} 0 \le x \\ 0 \le y \end{cases}$

$W = xy \quad V = x/y$

$g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} \quad (w, v) = g(x, y) = (xy, x/y)$

$$\left| \det \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} xy & \frac{\partial}{\partial y} xy \\ \frac{\partial}{\partial x} x/y & \frac{\partial}{\partial y} x/y \end{vmatrix} \right| = \left| \det \begin{vmatrix} y & x \\ 1/y & -x/y^2 \end{vmatrix} \right| = \left| -x/y - x/y \right| = \left| -2x/y \right| = \frac{2x}{y}$$

$W = xy \quad V = x/y \longrightarrow x = v\sqrt{\frac{w}{v}} \quad y = \sqrt{\frac{w}{v}}$

$$f_{w,v} = \frac{f_{x,y}}{|\det(J(g))|} = \left. \frac{\lambda_x \lambda_y e^{-\lambda_x x} e^{-\lambda_y y}}{\frac{2x}{y}} \right|_{\substack{x = v\sqrt{w/v} \\ y = \sqrt{w/v}}} \; \forall \begin{cases} 0 \le x \\ 0 \le y \end{cases} = \frac{\lambda_x \lambda_y}{2v} e^{-\lambda_x v\sqrt{\frac{w}{v}}} e^{-\lambda_y \sqrt{\frac{w}{v}}} \quad \forall \begin{cases} 0 \le v \\ 0 \le w \end{cases}$$

$0 \le v\sqrt{\frac{w}{v}}$

$0 \le \sqrt{\frac{w}{v}}$

$v \ge 0$

bien Leo :)

Ejercicio 7 Transformada de Box Muller

Sean U_1, U_2 dos variables aleatorias independientes en $(0,\ 1)$.

1. Halle la densidad conjunta de las variables:

$$\begin{cases} R = \sqrt{-2\ln(U_1)} \\ \Theta = 2\pi U_2. \end{cases}$$

   Verifique que R tiene distribución Rayleigh, que Θ es uniforme y que son independientes (¿por qué?).

2. Halle la densidad conjunta de las variables:

Ya hecho

$$\begin{cases} Z_1 = R\cos\Theta \\ Z_2 = R\sin\Theta \end{cases}$$

   y demuestre que se trata de variables normales estándar independientes.

Ejercicio 1

Sea $\mathbf{X}$ un vector aleatorio gaussiano cuya media y matriz de covarianza son:

$$\mu_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad C_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det = 1$

$C_X^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$

1. Obtenga las curvas de nivel $\mathcal{C}_\alpha = \{(x, y) : f_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{x}) = \alpha\}$.
2. Grafique en el plano (x, y) $N = 10^3$ realizaciones del vector $\mathbf{X}$ junto con las curvas de nivel anteriores.

1) Agarramos la $f_{\vec{X}}(\vec{x})$ y la igualamos, va a dar (idealmente) algo elíptico.

forma gral: $f_X(x) = \left[(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det(C_X)}\right]^{-1} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu_X)^T C_X^{-1}(x-\mu_X)}$ $= \left[2\pi \cdot 1\right]^{-1} \exp\left[-\frac{1}{2}(x-1 \quad y+2)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y+2 \end{pmatrix}\right.$

$$\left[2\pi \cdot 1\right]^{-1} \exp\left[-\frac{1}{2}(x-1 \quad y+2)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y+2 \end{pmatrix}\right. = \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{x^2}{2} + x(y-3) - y^2 - 5y - \frac{13}{2}\right) = \alpha$$

Curvas de nivel $\longrightarrow$ $-\frac{x^2}{2} + x(y-3) - y^2 - 5y - \frac{13}{2} = \beta$

Ejercicio 2

Sean X e Y dos variables aleatorias Gaussianas. Se necesita caracterizar a $Z = \text{máx}(X, Y)$ en los siguientes casos:

1. X e Y son independientes e idénticamente distribuidas con media nula y varianza unitaria.
2. X e Y tiene ambas media nula, varianza unitaria, y coeficiente de correlación $0{,}1$.
3. X e Y tiene ambas media nula, varianza unitaria, y coeficiente de correlación $0{,}9$. Discuta los resultados obtenidos.

1) $\mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}(\text{Max}(x,y) \leq z) = \mathbb{P}(x \leq z \wedge y \leq z) \overset{\text{indep}}{=} \mathbb{P}(x \leq z)\,\mathbb{P}(y \leq z) =$

$F_x(z)\, F_y(z) = F_x(z)^2$

$= F_y(z)^2$

ya que $x, y \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$

2) Buscamos la $f_{x,y}(x,y)$ con la $\mu_{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $C_{\vec{x}} = \begin{vmatrix} 1 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 1 \end{vmatrix}$ y

la integral de $\int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{z} f_{\vec{x}}(\vec{x})\, \partial \vec{x}$

no tiene sentido resolver la integral, es muy largo el proceso.

Mejor sería estimar por montecarlo para un z dado.

$$\mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}(x \leq z,\, y \leq z) = \iint_{(-\infty)}^{(z)} \overbrace{f_x(x)\, f_{y|x}(y|x)}^{f_{xy}(x,y)}\, dy\, dx$$

$x \sim \mathcal{N}(0,1) \wedge y|x \sim \mathcal{N}\left(\mu_y + C_{yx} C_x^{-1}(x - \mu_x),\, C_y - C_{yx} C_x^{-1} C_{xy}\right)$

$\sim \mathcal{N}\left(0 + 0{,}1 \cdot 1 (x - 0),\, 1 - 0{,}1^2\right) = \mathcal{N}\left(\frac{x}{10},\, 0{,}99\right)$

$\begin{vmatrix} 1 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 1 \end{vmatrix}$

$\wedge$ de ahí hay que meter la PDF e integrar

Ejercicio 3

Se tiene un vector aleatorio $\mathbf{X} = [X_1\ X_2]^t$ cuya distribución es Gaussiana con media $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}}$ y matriz de covarianza $C_{\mathbf{X}}$.

1. Utilizando un cambio de variables, genere un vector aleatorio $\mathbf{Y} = [Y_1\ Y_2]^t$ de componentes descorrelacionadas y media nula.
2. Demuestre que los autovalores de la matriz $C_{\mathbf{Y}}$ son proporcionales a la longitud de los ejes mayores y menores de la elipse que contiene a los puntos del plano con igual función de densidad de probabilidad, es decir, $f_Y(\mathbf{y}) = \alpha$.

$$\{\mathbf{y} = [y_1, y_2] : \frac{y_1^2}{a_1^2} + \frac{y_2^2}{a_2^2} = 1\},$$

3. ¿Qué sucede si la matriz de correlación $C_{\mathbf{Y}}$ es singular?

1) $X \sim \mathcal{N}(\mu_x, C_x)$

Buscamos blanqueado tq $Ax+b=y$ si $C_x = P_x \Lambda_x P_x^t$

$A = \Lambda_x^{-1/2} P_x^t \wedge b = -A\mu_x$

Si $C_y\Big|_{descorr} = \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{vmatrix}$ dónde $C_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ lo blanquea

σ_1^2 va con $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y σ_2^2 con $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ∧ que están descorr y los ángulos van a ser // a los ejes de $\mathbb{R}^2$.

Escribamos la PDF de $\vec{y} \to f_y(y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left(-\frac{1}{2}(y_1\ y_2) \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{vmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \Longrightarrow$

$$f_y(y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left(\frac{-y_1^2}{2\sigma_1^2} + \frac{-y_2^2}{2\sigma_2^2}\right) = \alpha$$

$$\boxed{\frac{y_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{y_2^2}{\sigma_2^2} = b}$$

La Ec. de una elipse

Si la C_y es singular (no tiene inversa) podés pensar que el $\sigma^2 = 0$ ∧ el autovector ~~asociado~~ te da la dirección en la que con $\mathbb{P} = 1$ no hay realizaciones.

Como el σ^2 es cero no puede ir en esa dirección. Básicamente, al espacio vectorial le sobra una dirección.

Ejercicio 4

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_N$ variables aleatorias conjuntamente Gaussianas con media $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}}$ y matriz de covarianza $C_{\mathbf{X}}$.

1. Calcular la varianza de la variable aleatoria $Y = a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_NX_N$ donde a_i son coeficientes reales tales que el vector $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \ldots, a_N]^t$ tiene norma unitaria.
2. Determine la función característica de Y a partir de la función característica conjunta de las X_i.
3. Sea:

$$C_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Determine el máximo y el mínimo valor posible de la varianza de Y cuando el vector $\mathbf{a}$ recorre el círculo unitario.

1) $E[Y] = E[\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \cdots \alpha_N x_N] = \sum_{i=1}^{n} E[\alpha_i x_i] = \sum \alpha_i \, E[x_i] = a^T E[\vec{x}]$

$[\alpha_1 \; \alpha_n] \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

$Y = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a x_1 + b x_2$

$\underline{Y = AX}$

$C_Y = A C_X A^t = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a - b & -a + 3b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$

$C_Y = 3a^2 - ab - ab + 3b^2$

$Var(Y) = C_Y = 3 - 2ab \;; \quad \sqrt{a^2+b^2} = 1$

$C_Y = 3 - 2a\sqrt{1-a^2}$

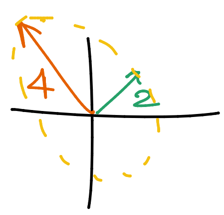
$\partial/\partial a \, C_Y = 0 = -2\sqrt{1-a^2} - a \dfrac{1}{\sqrt{1-a^2}} \cdot (-2a)$

$0 = -2\sqrt{1-a^2} + \dfrac{2a^2}{\sqrt{1-a^2}}$ $\qquad 1 - a^2 = a^2$

$1 = 2a^2$

$Max(Var(Y)) = 4 \; @ \; \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad |a| = 1/\sqrt{2}$

$Min(Var(Y)) = 2 \; @ \; \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad a = \pm 1/\sqrt{2}$



2) $\phi_x = E\left[e^{j w^T x}\right]$ $\wedge$ $y = a^T \vec{X}$ $\therefore$ $a\, y = \vec{X}$

$\phi_x = E\left[e^{j \vec{w}^T \vec{x}}\right]$

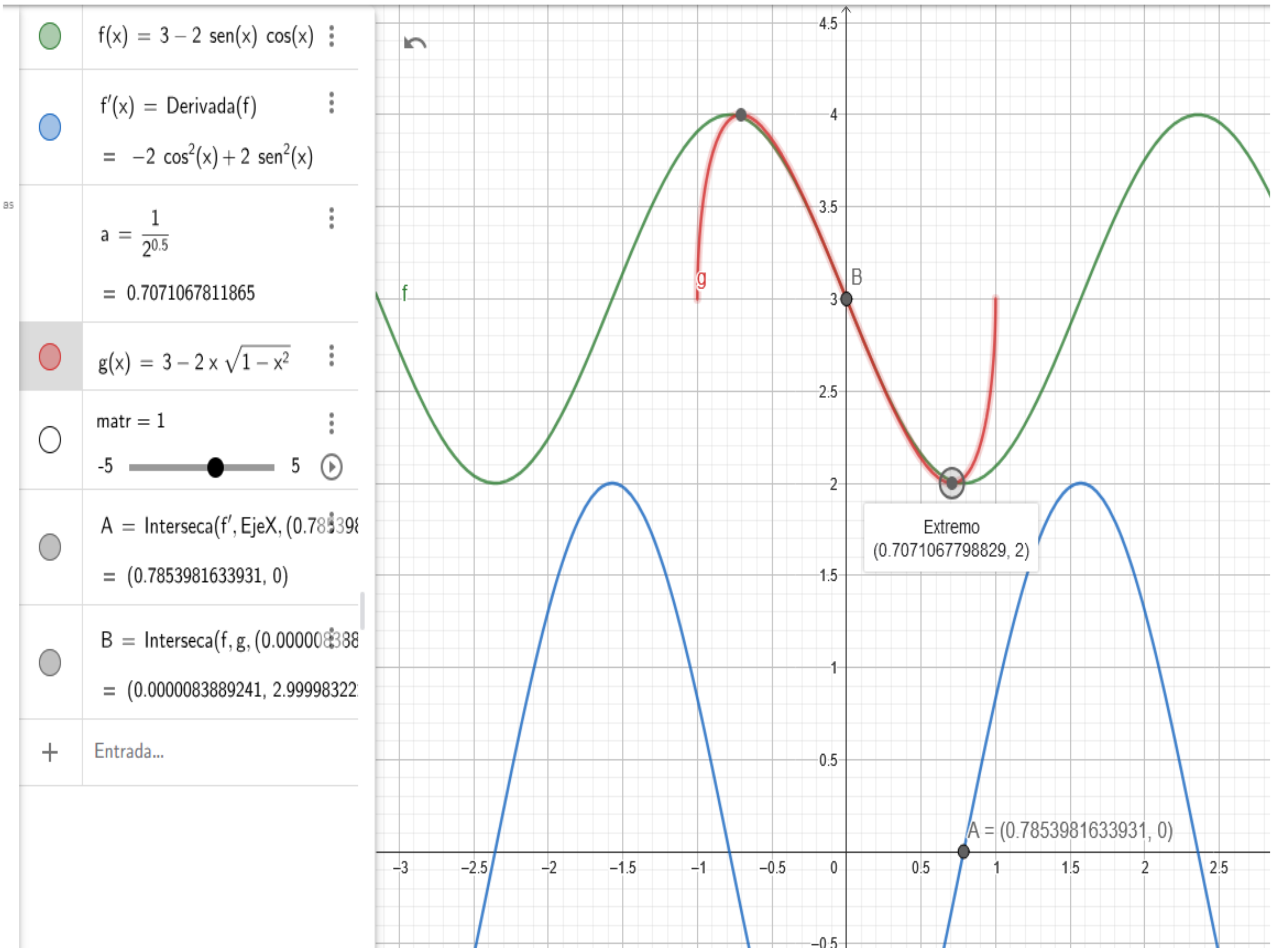
si $y = a^T \vec{x}$ $\rightarrow$ $\phi_y = E\left[e^{j w^T a^T \vec{x}}\right]$

$w\,[y]$

la función característica es literal eso

si haces $a = \cos(\alpha)$ y buscás min y max te da el α

$b = \text{sen}(\alpha)$ $\wedge$ tenés que calcular el a y b



Ejercicio 5 Transformada de Box Muller

Sean U_1, U_2 dos variables aleatorias independientes en $(0,\ 1)$.

1. Halle la densidad conjunta de las variables:

$$\begin{cases} R = \sqrt{-2\ln(U_1)} \\ \Theta = 2\pi U_2. \end{cases}$$

   Verifique que R tiene distribución Rayleigh, que Θ es uniforme y que son independientes (¿por qué?).

2. Halle la densidad conjunta de las variables:

$$\begin{cases} Z_1 = R\cos\Theta \\ Z_2 = R\sin\Theta \end{cases}$$

   y demuestre que se trata de variables normales estándar independientes.

$$f(R,\theta) = \frac{f(U_1,U_2)}{|\det(J_U)|} \overset{iid}{=} \frac{\mathbb{1}\{0<U_1<1\}\mathbb{1}\{0<U_2<1\}}{\left|\det\begin{vmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{2U_1\sqrt{-\ln(U_1)}} & 0 \\ 0 & 2\pi \end{vmatrix}\right|} = \frac{\mathbb{1}\{0<R<\infty\}\mathbb{1}\{0<\theta<2\pi\}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}\, 2\pi\, \frac{1}{U_1\sqrt{-\ln(U_1)}}}$$

$R = \sqrt{-2\ln(U_1)}$

$\theta = 2\pi U_2$

$$\sqrt{2}\left(-\ln(U_1)\right)^{1/2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{\sqrt{-\ln(U_1)}}\cdot\frac{-1}{U_1}$$

$$\begin{cases} \frac{\theta}{2\pi} = U_2 \\ \exp\left(-\frac{1}{2}R^2\right) = U_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\theta}{2\pi} = U_2 \\ \exp\left(-\frac{1}{2}R^2\right) = U_1 \end{cases}$$

$\frac{R}{\sqrt{2}}$

$$\frac{\mathbb{1}\{0<R<\infty\}\mathbb{1}\{0<\theta<2\pi\}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}\, 2\pi\, \frac{1}{U_1\sqrt{-\ln(U_1)}}} = \frac{1}{2\pi}\mathbb{1}\{0<\theta<2\pi\}\cdot\frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\,\frac{\mathbb{1}\{0<R<\infty\}}{\frac{1}{e^{-\frac{1}{2}R^2}}\cdot\frac{1}{\cancel{R/\sqrt{2}}}} = \frac{\mathbb{1}\{0<\theta<2\pi\}}{2\pi}\cdot R e^{-\frac{1}{2}R^2}$$

salvo un 2

$R \sim Ray(1)$; $\theta \sim U(0, 2\pi)$

$R\cos\theta$, $R\sin\theta$

$$\longrightarrow f_{Z_1Z_2} = \frac{\frac{1}{2\pi}\cdot r\, e^{-\frac{r^2}{2}}\,\mathbb{1}\{0<\theta<2\pi\}\mathbb{1}\{0<r<\infty\}}{\left|\det\begin{array}{cc} \partial/\partial r & \partial/\partial\theta \\ \begin{vmatrix} \cos\theta & -R\sin\theta \\ \sin\theta & R\cos\theta \end{vmatrix} & \end{array}\right|} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}}$$

$\longrightarrow R$

$Z_1 = R\cos\theta$

$Z_2 = R\sin\theta$

$\sqrt{z_1^2 + z_2^2} = R$

$$\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2)} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z_1^2}}_{\mathcal{N}(0,1)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z_2^2}}_{\mathcal{N}(0,1)} \quad \begin{array}{l} 1_{\{-\infty < z_1 < \infty\}} \\ 1_{\{-\infty < z_2 < \infty\}} \end{array}$$

indep.

Ejercicio 6 Secuencia Gaussiana

Considere una sucesión de variables aleatorias $\{U_1, U_2, U_3, ...\}$ independientes uniformes en $(0, 1)$. A continuación se arma la siguiente secuencia:

$$\begin{cases} X_{2j} &= \sqrt{-\ln(U_{2j})}\cos(2\pi U_{2j-1}) \\ X_{2j-1} &= \sqrt{-\ln(U_{2j})}\sin(2\pi U_{2j-1}) \end{cases} \quad j = 1, 2, 3, ...$$

1. Halle la densidad conjunta del vector $[X_{2j-1}, X_{2j}]$, para $j \in N$.
   Sugerencia: considere la transformación Box-Muller.

2. Utilizando las secuencia X se arma una nueva secuencia:

$$\begin{cases} Y_{2j} = X_{2j} + 0{,}5X_{2j-1} \\ Y_{2j-1} = 0{,}5X_{2j} + X_{2j-1} \end{cases} \quad j = 1, 2, 3, ...$$

   Halle la densidad conjunta del vector $[Y_1, \ldots, Y_{2j}]$ para $j \in \mathbb{N}$.

Para un j dado podemos calcular el $\begin{pmatrix} X_{2j} \\ X_{2j-1} \end{pmatrix}$ con un $\begin{pmatrix} U_{2j} \\ U_{2j-1} \end{pmatrix} \overset{iid}{\sim} \mathcal{U}(0,1)$

llamo $\vec{X} = \begin{pmatrix} X_{2j} \\ X_{2j-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ∧ $\vec{U} = \begin{pmatrix} U_{2j} \\ U_{2j-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$

$x = \sqrt{-\ln(A)}\cos(2\pi B)$

$y = \sqrt{-\ln(A)}\,\text{sen}(2\pi B)$

$f_{\vec{X}}(\vec{x}) = \dfrac{f_{\vec{U}}(\vec{u})}{\left|\det\left(\text{Jacob}(g(x))\right)\right|}\Bigg|_{g^{-1}(u)}$

$\boxed{x^2+y^2 = -\ln(A)}$

$\boxed{\dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{\tan(2\pi B)}}$

Esto no a dar $\mathcal{N}(0,1)$ creo, parece una composición de transfor.

$f_{\vec{X}}(\vec{x}) = \dfrac{\mathbb{1}\{0<A<1\}\mathbb{1}\{0<B<1\}}{\left|\det\begin{vmatrix} \frac{\cos(2\pi B)}{2\sqrt{-\ln(A)}}\cdot\frac{1}{-A} & -2\pi\,\text{sen}(2\pi B)\sqrt{-\ln(A)} \\ \frac{\text{sen}(2\pi B)}{-2A\sqrt{-\ln(A)}} & 2\pi\cos(2\pi B)\sqrt{-\ln(A)} \end{vmatrix}\right|}$

$\left|-\pi\dfrac{\cos^2(2\pi B)}{A} - \dfrac{\pi\,\text{sen}^2(2\pi B)}{A}\right| = \left|\dfrac{-\pi}{A}\right| = \dfrac{\pi}{A}$

$f_{\vec{X}}(\vec{x}) = \dfrac{\mathbb{1}\{0<A<1\}\mathbb{1}\{0<B<1\}}{\frac{\pi}{A}}\Bigg|_{g^{-1}}$

$x^2+y^2 = -\ln(A)$

$A = \quad = e^{-x^2-y^2}$

$\tan(2\pi b) = \dfrac{y}{x}$

$b = \dfrac{\text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)}{2\pi}$

$\rightarrow f_{\vec{X}}(\vec{x}) = \dfrac{1}{\pi}e^{-x^2-y^2}\ \mathbb{1}\{0<e^{-x^2}e^{-y^2}<1\}\ \mathbb{1}\{0<\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)<2\pi\}$

$\mathbb{1}\{0 < x \cdot y < \infty\}$

Separo: $f_{\vec{X}}(\vec{x}) = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{2}\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}} \cdot \dfrac{1}{\frac{\sqrt{2}\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}} e^{\frac{-x^2}{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}} e^{\frac{-y^2}{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}$

$$X, Y \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2}\right)$$

2) Como $X, Y \sim \mathcal{N}(0, 1/2)$ es una Transformación de gaussianas:

$\alpha = X + \frac{1}{2} Y$

$\beta = \frac{1}{2} X + Y$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}}_{\vec{\gamma}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}}_{\vec{X}}$$

Propiedad:

Como $\vec{X} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}\right)$ $\quad \vec{\gamma} \sim \mathcal{N}(\mu_\gamma, C_\gamma)$

$$C_\gamma = A C_{\vec{X}} A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 5/8 & 1/2 \\ 1/2 & 5/8 \end{vmatrix}$$

$$\mu_Y = A \mu_X = \vec{0}$$

$$\vec{\gamma} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 5/8 & 1/2 \\ 1/2 & 5/8 \end{vmatrix}\right)$$

Ejercicio 7 Verdadero o Falso

En cada caso indique verdadero o falso, y si indica falso proponga un contraejemplo.

1. Si de dos variables aleatorias X e Y una es Gaussiana, entonces son independientes si y sólo si están descorrelacionadas.
2. Si dos variables aleatorias X e Y tienen marginales Gaussianas, entonces son independientes si y sólo si están descorrelacionadas.
3. Si dos variables aleatorias X e Y son conjuntamente Gaussianas, entonces son independientes si y sólo si están descorrelacionadas.

F

1. Para no Gaussianas indep $\underset{\times}{\overset{\checkmark}{\rightleftarrows}}$ Descor. ∴ si son descorr no necesariamente son indep.

V

2. Si todas las marginales son Gaussianas X e Y son gaussianas. En gauss. Descor $\longleftrightarrow$ indep ∴ si las componentes son descorr son indep. Descorrelación fuerza independencia.

3. V ¿?

Convergencia y teoremas límite

Ejercicio 1 Convergencia en distribución

Sea $B_i, i = 1, 2, \cdots$ una secuencia de variables aleatorias i.i.d., Bernoulli equiprobables. Considere el número $\xi \in [0, 1]$ determinado por la expansión binaria

$$\xi = \sum_{i=1}^{\infty} b_i 2^{-i}$$

donde b_i es una realización de la secuencia B_i. Explique por qué ξ es una v.a distribuida uniformemente en $[0, 1]$.

Ayuda:

$$\sin(\omega) = \omega \prod_{i=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\omega}{2^i}\right)$$

Veamos la $\phi_\xi = E_\xi\left[e^{j\omega\xi}\right] = E_{B_i}\left[\exp\left(j\omega \sum_{i=1}^{\infty} b_i 2^{-i}\right)\right] = E_{B_i}\left[\prod_{i=1}^{\infty} \exp\left(j\omega b_i 2^{-i}\right)\right] =$

$$\underbrace{\prod_{i=1}^{\infty} E_{B_i}\left[\exp\left(j\omega b_i 2^{-i}\right)\right]}_{\text{sobre } E} = \prod_{i=1}^{\infty}\left(\exp\left(j\omega b_i 2^{-i}\right)\left(\tfrac{1}{2}\delta(B_i) + \tfrac{1}{2}\delta(B_i - 1)\right)\right) = \prod_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\exp\left(j\omega 2^{-i}\right) + 1}{2}\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{\infty} e^{j\frac{\omega}{2}2^{-i}} \left(\frac{e^{j\frac{\omega}{2}2^{-i}} + e^{-j\frac{\omega}{2}2^{-i}}}{2}\right) = \prod_{i=1}^{\infty} e^{j\frac{\omega}{2}2^{-i}} \prod_{i=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\omega}{2}2^{-i}\right) = \prod_{i=1}^{\infty} e^{j\frac{\omega}{2}2^{-i}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\frac{\omega}{2}}$$

$$= 2\frac{\sin\left(\omega/2\right)}{\omega} \cdot e^{j\frac{\omega}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^i} \qquad \frac{1}{1-1/2} - 1 = 1$$

$$= \quad 2\frac{\sin(\omega/2)}{\omega} e^{j\omega/2} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}(-\omega)} \left(u(t+1/2) - u(t-1/2)\right)$$

con $t = t - 1/2$

$$\therefore \quad \underbrace{\phi_\xi = 2\frac{\sin(\omega/2)}{\omega} e^{j\omega/2}}_{\text{sinc centrada movida}} \xleftrightarrow{\mathcal{F}(-\omega)} f_\xi(\xi) = \left[u(\xi) - u(\xi - 1)\right]$$

$$\therefore \quad \xi \sim U(0,1)$$

Ejercicio 2 Ley fuerte de los grandes números

Sea X una variable aleatoria discreta definida sobre un conjunto $\mathcal{X}$ y con función de probabilidad p_X. La entropía de la variable X se define como:

$$H(X) := -\mathbb{E}[\log(p_X(X))] = -\sum_{x\in\mathcal{X}} p_X(x)\log p_X(x).$$

1. Suponga que tiene una secuencia $X_1, X_2, \ldots$ de variables independientes con función de probabilidad p_X. Demuestre que entonces:

$$-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log p_X(X_i) \to H(X),$$

siendo la convergencia en forma casi segura.

2. La entropía es una métrica del contenido de información de una variable aleatoria. Halle la entropía de una variable Bernoulli de parámetro p, y demuestre que la entropía es máxima cuando $p = 1/2$ (máxima información) y nula cuando es 0 o 1 (ninguna información).

1) Por LFGN. $S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\infty} x_i \xrightarrow{a.s.} E[x_n]$

si $S_n = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log p_x(x_i)$

Defino $a = -\frac{1}{n}\log p_x(x_i)$ que por enunciado $E[a] = H(x)$

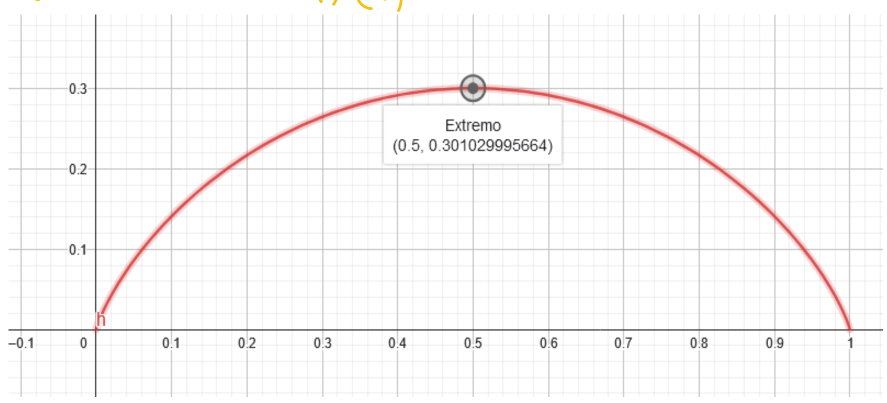
$\therefore$ $S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a \overset{a.s.}{=} H(X)$; cumpliendose la LFGN y la convergencia casi segura de la serie a su media.

2) $H(x) = -\sum_{x=0}^{1} p_x(x)\log p_x(x) = -(1-p)\log(1-p) - p\cdot\log(p)$

$p_x(0)$ $p_x(1)$

$x \sim Ber(p)$

$p_x(x) = \delta(x)(1-p) + \delta(x-1)p$



Ejercicio 3 Convergencia en probabilidad

Sea Y una variable aleatoria, $X_1, X_2, \ldots$ secuencia de variables aleatorias y g una función continua.

1. Demuestre que si $X_n \xrightarrow{P} Y$ entonces $g(X_n) \xrightarrow{P} g(Y)$, es decir, las funciones continuas conservan la convergencia en probabilidad.
   Recordatorio: g es continua si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|x - x_0| < \delta$ implica que $|g(x) - g(x_0)| < \epsilon$.

2. Sea $X_1, X_2, \ldots$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d. de media nula y varianza σ_X^2. Demuestre la ley débil de los grandes números, es decir, que:
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n\to\infty]{P} \mu.$$
   Ayuda: utilice la desigualdad de Tchebycheff.

3. Demuestre que:
$$\frac{1}{\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2\right)^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow[n\to\infty]{P} \frac{1}{\sigma_X}.$$
   Ayuda: use los dos incisos anteriores.

4. Demuestre que:
$$e^{\cos^2\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{P} e^{\cos^2(\sigma_X^2)}.$$
   Sugerencia: use los incisos 1 y 2.

Convergencia en probabilidad:

Una secuencia de VAs X_n converge a la VA X en probabilidad si:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\{\xi : |X_n(\xi) - X(\xi)| > \varepsilon\}) = 0$$ La proba de que haya epsilon mayor a la dif es cero en el infinito

Usando el teorema $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X \iff \lim_{n\to\infty} E\left\{\frac{|X_n - X|}{1 + |X_n - X|}\right\} = 0$

1) si $X_n \xrightarrow{P} Y$ $\quad g(X_n) \xrightarrow{P} g(Y)$

Se cumple que $\lim_{n\to\infty} E\left\{\frac{|X_n - Y|}{1 + |X_n - Y|}\right\} = 0$

$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\{\xi : |X_n - Y| > \xi\}) = 0 \longrightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\{\xi : |g(X_n) - g(Y)| > \xi) \overset{?}{=} 0$

Analizamos continuidad por límites $\quad$ variación chica

$g(x)$ es continua en x_0 si $\forall \xi > 0 \ \exists \ \delta > 0 \ / \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\{\xi : |g(X_n) - g(Y)| > \xi) = 0$ $\quad$ se cumple si consigue $\longrightarrow$ $\exists\ \delta$

Sabemos que $|g(X_n) - g(Y)| < \delta$ sólo si $|X_n - Y| < \xi$; δ, ξ arbitrariamente chicos.

Se puede plantear que: $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\{\delta : |g(X_n) - g(Y)| < \delta\}) = 0$ ya que $X_n \xrightarrow{P} Y$ significa que $\exists\ \xi \ / \ |X_n - Y| < \xi$ y si g es continua $\exists\ \delta \ / \ |g(X_n) - g(Y)| < \delta$, $\xi, \delta \simeq 0$

Más que demostrar lo que pasa es que para g continua uno implica el otro

2) Demostrar la LDGN: Si X_k iid μ_X, σ_X^2

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n\to\infty]{P} \mu_X$$

Chebyshev: X VA no negativa, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ creciente $\wedge$ $E[f(x)] < +\infty$

$$\mathbb{P}(|X_k - \mu_X| > a\sigma_X) \leq \frac{1}{a^2}$$

$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \longrightarrow$ por prop $E(S_n) = \frac{1}{n}\sum E[X_k] = \frac{n}{n}\mu_X = \mu_X$

$$\operatorname{Var}(S_n) \underset{\text{iid}}{=} \operatorname{Var}\left(\frac{1}{n}\sum x_k\right) = \frac{1}{n^2}\cdot n \cdot \operatorname{Var}(x_k) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Veamos Chebyshev, que da la cota de $\mathbb{P}$ de que te alejes de la media:

usamos $\mathbb{P}(x \geq a) \leq \frac{E[|x|^k]}{a^k}$ $\quad k=2$

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\mathbb{P}(|S_n - \mu| > \varepsilon_1)}_{\text{conv. (P)}} \leq \frac{\operatorname{Var}(S_n - \overset{\text{cte}}{\mu})}{a^2} \longrightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|S_n - \mu_X| \geq \varepsilon_1) \leq \frac{\sigma_X^2}{n \cdot \varepsilon_1^2} \to 0$$

$\varepsilon_1 \to a$ $\qquad \frac{n}{n}$

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\{\varepsilon_1 : |x_n - y| > \varepsilon_1\}) = 0}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \underbrace{\mathbb{P}(|S_n - \mu_X| \geq \varepsilon_1) = 0}$$

queda demostrado

Defino S_n, $E(S_n) \wedge \operatorname{Var}(S_n)$

planteo $\mathbb{P}(|S_n - \mu| \geq \varepsilon)$ $\wedge$ completo con Chebyshev.

3)
$$\frac{1}{\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{1/2}} \xrightarrow[n\to\infty]{P} \frac{1}{\sigma_X} \quad ; \quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \xrightarrow[n\to\infty]{P} \sigma_X^2 \qquad E\left[\frac{1}{n}\sum x_k^2\right] = \frac{n}{n}E[x_k^2]$$

$$S_n = \frac{1}{n}\sum x_k^2 \qquad E[S_n] = \frac{1}{n}\cdot n \cdot E[x_k^2]\Big|_{\mu_X = 0} \longrightarrow$$

Si $\mu_X = 0$ (nulo) $\quad E(S_n) = \frac{1}{n}\cdot n \cdot \operatorname{Var}(x_k) = \sigma_X^2$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|S_n - \sigma_X^2| \geq \varepsilon_1) \leq \frac{E[|S_n|^1]}{\varepsilon_1} \leq \frac{\sigma_X^2}{\varepsilon_1}$$

$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum A - \mu_A\right| \geq \mathcal{E}\right) = 0$ ya demostrado. Si $A = x^2$, $A(x)$ es continua $\therefore$ $\exists\, \delta \,/\, \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum A(x) - \mu_{A(x)}\right| \geq \delta\right) = 0$

$$\wedge\ A(x) = x^2 \ ; \ \mu_A(x) = E(A) = \operatorname{Var}(x) = \sigma_X^2 \rightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum x^2 - \sigma_X^2\right| \geq \delta\right) = 0$$

Demostrado.

4) Aplico log y $\cos^{-1}$ a ambos lados $\wedge$ listo.

$e^{\cos^2(x)}$ es continua? si, es composición de continuas

lo veo a ojo en la calculadora

Ejercicio 4 Convergencia

El consumo de combustible de un micro durante un viaje es una variable aleatoria de la forma:

$$C(i) = V(i)X(i), \quad \text{[litros]},$$

donde las variables $V(i)$ y $X(i)$ son independientes y se sabe que $\mathbb{E}[V(i)] = 1$ y $\mathbb{E}[V(i)^2] = 2$, y $X(i)$ tiene media μ_X y varianza σ_X^2. Considere el consumo promedio al cabo de n viajes:

$$Y(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} V(i)X(i).$$

1. Halle la distribución aproximada del consumo promedio al cabo de $n = 365$ viajes asumiendo que el consumo entre viajes es independiente.
2. Suponga ahora que los consumos entre viajes son variables descorrelacionadas, analice el valor del límite de $Y(n)$ cuando $n \to \infty$ utilizando dos modos de convergencia.

Queremos ver la convergencia en distribución de la variable.

$$Y(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} V(i)X(i) \longrightarrow A = \frac{V_i X_i}{n} \ ; \ Y = \sum_{i=1}^{n} A_i$$

Cambio de variable

TCL: Sea X_n secuencia de VA iid

$E[X_n] = \mu \ \wedge \ V(X_n) = \sigma^2 < \infty$

$$\underbrace{Z_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu_x}{\sqrt{n}\,\sigma_x} \sim N(0,1)}$$

Buscamos $E[A] \overset{\text{indep}}{=} E[X]E[V]/n = \dfrac{\mu_x}{n}$

$\mathrm{Var}(A) = E\left[\dfrac{x^2 v^2}{n^2}\right] = \dfrac{\mathrm{Var}(x)\,\mathrm{Var}(v)}{n^2} = \dfrac{2\sigma^2}{n^2}$; $\sqrt{\mathrm{Var}(xv)} = \dfrac{\sqrt{2}\,\sigma_x}{n}$

$Y = Ax + b$

$$Z_n = \frac{\sum A - n\mu_A}{\sqrt{n}\,\sqrt{\mathrm{Var}(A)}} = \frac{\sum A - \mu_x}{\frac{\sqrt{n}}{n}\sqrt{2}\,\sigma_x} \to \sum A = Y = Z_n \frac{\sqrt{2}\,\sigma_x}{\sqrt{n}} + \mu_x$$

A b

$$Y \sim N\left(\mu_x, \frac{2\sigma_x^2}{n}\right)$$

Para $n = 365$, supongamos que es suficiente para que $Y \xrightarrow{P} N\left(\mu_x, \dfrac{2\sigma_x^2}{365}\right)$

2) Veamos las convergencias en media cuadrática

$$\lim_{n\to\infty} E[|X_n - X|^2] = 0 \leftrightarrow X_n \xrightarrow{m.s.} X$$

quiero ver que Y converja a su media en el infinito.

$E[Y] = \mu_x$

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} V_i X_i - \mu_x\right|\right] \le \lim_{n\to\infty} \left|\left|\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[V]E[X]}_{\text{son iid}}\right| - |\mu_x|\right| = \lim_{n\to\infty} \big||\mu_x| - |\mu_x|\big| \overset{\checkmark}{=} 0$$

$\times n$

$$\boxed{Y \xrightarrow{m.s.} \mu_x}$$

Por LDGN sale lo mismo: Y tq $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum XV \xrightarrow{a.s.} E[XV] = \mu_x$

Entonces las 3 convergencias son en distribución, m.s. y a.s.

Sea $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Definimos el VeA

$$\mathbf{X} = \overset{2\times 1}{\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} Z \\ 2Z+1 \end{bmatrix}.$$

Calcular la pdf conjunta $f_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{x})$.

$x_1 = Z$ $\quad x_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$

$x_2 = 2Z+1$ $\quad x_2 \sim \mathcal{N}(0,4) \longrightarrow C_{\vec{x}} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \wedge \mu_x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow E[x_1] = 0$

$E(x_2) = 1$

$Var(x_1) = 1 \quad Var(x_2) = 4$

$cov(x_1, x_2) = Cov(z, 2z+1) = E[z(2z+1)] = E[2z^2+z] = 2Var(z) = 2$

no $f_{\vec{x}}(x)$ se armo como $\dfrac{1}{2\pi\sqrt{\det C_x}} e^{-1/2 (x \; y) C_x^{-1} \binom{x}{y}}$

Sean $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ y $B \sim \text{Ber}(1/2)$, independientes entre sí. Definimos

$$Y = (2B-1)X.$$

Determinar si X e Y son conjuntamente gaussianas o no.

nuevo VA:

$K = 2B-1 \quad f_K = \mathbb{P}(K=k) = \mathbb{P}\left(B = \frac{k+1}{2}\right)$

$$f_B(b) = \delta(b)\tfrac{1}{2} + \delta(b-1)\tfrac{1}{2} \xrightarrow[f_b\left(\frac{k+1}{2}\right)]{} f_K(k) = \tfrac{1}{2}\delta(k+1) + \tfrac{1}{2}\delta(k-1)$$

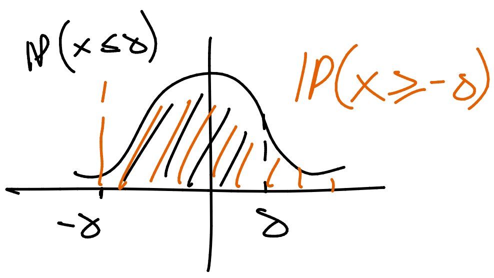
Entonces

$$f_Y = f_X f_K = \left(\tfrac{1}{2}\delta(k+1) + \tfrac{1}{2}\delta(k-1)\right) f_X(x)$$

condiciono a B

Sino $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \le y) = \mathbb{P}((2B-1)X \le y) = \mathbb{P}(B=0)\,\mathbb{P}(-X \le y) + \mathbb{P}(B=1)\,\mathbb{P}(X \le y)$

$= \tfrac{1}{2}\mathbb{P}(X \le y) + \tfrac{1}{2}\mathbb{P}(X \ge -y) = \underline{\mathbb{P}(X \le y)}$



las P son iguales xque la Gauss es simétrica $\underline{(\mu_X = 0)}$

$X+Y \overset{?}{\sim} W$

$$W = X+Y = 2BX \longrightarrow \mathbb{P}(2BX \le w) = \underbrace{\overbrace{\tfrac{1}{2}\mathbb{P}\left(X \le \tfrac{w}{2}\right)}^{\mathbb{P}(B=1)\mathbb{P}(2BX\le w|B=1)}}_{\text{Es gaussiana}} + \underbrace{\overbrace{\tfrac{1}{2}\mathbb{P}(0 \le w)}^{\mathbb{P}(B=0)\mathbb{P}(2BX\le w|B=0)}}_{\text{hace que no sea normal.}}$$

Un transmisor de radio envía una señal $s > 0$ que es recibida en un receptor utilizando tres caminos. Las señales que llegan al receptor por cada camino son:

$$X_1 = s + N_1 \qquad X_2 = s + N_2 \qquad X_3 = s + N_3$$

donde N_1, N_2, N_3 son variables aleatorias gaussianas independientes con media cero y varianza unitaria.

1. Hallar la pdf conjunta de $\mathbf{X} = [X_1, X_2, X_3]^t$
2. Determine si las componentes de $\mathbf{X}$ son variables aleatorias independientes.
3. Hallar la probabilidad de que el mínimo de las tres señales sea positivo.
4. Hallar la probabilidad de que la mayoría de las señales sean positivas.

Si $s>0$ cte igual para x_1, x_2 y x_3 mueve la media.

Como $x_1, x_2, x_3 \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ el vector $\vec{x} = [x_1\, x_2\, x_3]^t$ va a ser gaussiano

$$\vec{X} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} s \to x_1, x_2, x_3 \sim \mathcal{N}(s,1)$$

ya que si $Y = X + s$

$> E[Y] = \overset{0}{E[X]} + s = s \quad \mu_Y$

$> Var(Y) = E[(Y - E(Y))^2] =$

$= E[(X + s - s)^2] = Var(X) = 1 \quad \sigma_Y^2$

$\therefore Y \sim \mathcal{N}(s,1)$

La PDF de $\vec{x}$ va a ser:

$$C_x = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} \to Det = 1$$

las covarianzas cruzadas son 0 porque son indep.

$$\mu_{\vec{x}} = \begin{bmatrix}\mu_{x_1}\\\mu_{x_2}\\\mu_{x_3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}s\\s\\s\end{bmatrix}$$

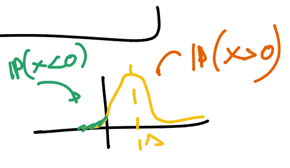
$1\times3 \quad 3\times3 \quad 3\times1 \to 1\times1$ ✓

$$f_{\vec{x}}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{1}}\, e^{-\frac{1}{2}[x_1-s \;\; x_2-s \;\; x_3-s]\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1-s\\x_2-s\\x_3-s\end{bmatrix}}$$

$x_1, x_2, x_3 \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(s,1)$

3. $\mathbb{P}(\min(\vec{x}) > 0) = \mathbb{P}(x_1>0,\, x_2>0,\, x_3>0) \overset{indep}{=} \mathbb{P}(x_1>0)\mathbb{P}(x_2>0)\mathbb{P}(x_3>0) = \mathbb{P}(x_1>0)^3 = (1-\mathbb{P}(x_1<0))^3$

$$= (1 - F_{x_1}(0))^3 = \Big[1 - \underbrace{\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_1-s)^2}{2}}}\Big]^3$$



Sean X e Y dos V.A conjuntamente gaussianas de media nula. Demuestre que

$$\mathbb{E}[X^2Y^2] = \mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2] + 2\mathbb{E}^2[XY]$$

Ayuda: Utilice el resultado de gaussiana condicionada por gaussiana y la expresión de los momentos de una gaussiana.

Que dos variables aleatorias sean conjuntamente gaussianas implica que su distribución conjunta es una distribución normal multivariante. Esto significa que cualquier combinación lineal de estas variables también será normalmente distribuida. Aquí hay algunos puntos clave sobre este concepto:

Distribución Conjunta: La función de densidad conjunta de dos variables aleatorias XX e YY tiene la forma de una campana 2D, caracterizada por su media vectorial y su matriz de covarianza.

Dependencia Lineal: Si XX e YY son conjuntamente gaussianas, la correlación entre ellas captura completamente la dependencia lineal. Esto significa que si conoces la correlación, puedes entender cómo se relacionan estas variables.

Marginales Gaussianas: Cada variable, por sí sola, seguirá una distribución normal. Esto es cierto incluso si no se tiene información sobre la otra variable.

Propiedades de Simetría: La distribución conjunta es simétrica respecto a su media, lo que significa que hay un equilibrio en torno a esta.

Proporciones y Transformaciones: Las transformaciones lineales de variables gaussianas también resultan en variables gaussianas.

En resumen, ser conjuntamente gaussianas proporciona una estructura matemática rica que permite realizar inferencias sobre sus comportamientos y relaciones de manera muy efectiva.

Prop de Esp. cond

$$E[X^2Y^2] = E[E[X^2Y^2|Y]] = E[Y^2E[X^2|Y]]$$

Prop de $E[g(x)h(y)|x] = g(x)E[h(y)|x]$

$$E[X^2|Y] \longrightarrow Var(\alpha) = E[\alpha^2] - E[\alpha]^2$$

$\alpha = X|Y$

Cambio de variable

$$Var(X|Y) = E[X^2|Y] - E[X|Y]^2$$

Resultado de gauss condicionado a gauss

$$E[X^2|Y] = Var(X|Y) + E[X|Y]^2 =$$

$$E[X|Y] = \cancel{\mu_X} + \frac{C_{XY}}{\sigma_Y^2}(Y - \cancel{\mu_Y}) = \frac{C_{XY}}{\sigma_Y^2}Y$$

0 0

$$cov_{X,X|Y} = C_{X1} - C_{Y1X2}C_{X2}C_{X1}$$

σ_X^2 $\quad C_{X2} \to \sigma_Y^2$

$$E[X^2|Y] = \sigma_X^2 - \frac{C_{XY}^2}{\sigma_Y^2} + \frac{C_{XY}^2}{\sigma_Y^4}Y^2$$

$$\text{Con lo } \Phi_Y \to \sigma_Y^4 = Var(Y)^2 = E[Y^{2\cdot 2}] = \sigma_Y^4 \frac{1}{4}\frac{4!}{2!} = \sigma_Y^4\frac{2\cdot 3\cdot 4}{2\cdot 4} = 3\sigma_Y^4$$

ctes

$$E\left[Y^2\left(\sigma_X^2 - \frac{C_{XY}^2}{\sigma_Y^2} + \frac{C_{XY}^2}{\sigma_Y^4}Y^2\right)\right] = \sigma_X^2E[Y^2] - \frac{\cancel{E[Y^2]}}{\cancel{\sigma_Y^2}}C_{XY}^2 + \frac{C_{XY}^2}{\sigma_Y^4}E[Y^4]$$

1

lo covarianza

$$E[x^2 y^2) = E(x)\ E(y) - Cov(x,y)^2 + 3\frac{Cov(x,y)^2\,\cancel{\sigma_y^4}}{\cancel{\sigma_y^4}}$$

$$= E(x)\ E(y) + 2\ Cov(x,y)^2$$

$$\underset{\mu_x = \mu_y = 0}{2\ Cov(x,y)^2 = 2\ E[x\ y)^2} \qquad \therefore\ E[x^2 y^2) = E[x)\ E[y) + 2\ E[x\ y]^2$$

Sea un vector aleatorio $\boldsymbol{X} = [X_1\ X_2\ \dots\ X_n]^T$, y una transformación lineal $\boldsymbol{Y} = A\,\boldsymbol{X} + \boldsymbol{b}$, donde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, Demostrar que para el vector aleatorio resultante $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^m$ se cumple:

1. $E[\boldsymbol{Y}] = A\,E[\boldsymbol{X}] + \boldsymbol{b}$
2. $C_Y = A\,C_X\,A^T$

$$E[Y) = E[AX+b) = E[AX]+b = A\,E[X]+b$$

$\uparrow$ propc $E[X]$

$$C_Y = E[(\vec{Y}-E[\vec{Y}])(\vec{Y}-E[\vec{Y}])^t)$$

$$C_Y = E[(A\vec{X}+b-AE[X]-b)(A\vec{X}+b-AE(X)-b)^t]$$

$$C_Y = E[A(\vec{X}-E[X])(\vec{X}-E(X))^t A^t] = \underline{A\,C_X\,A^t}$$

Sea un vector aleatorio $\boldsymbol{X} = [X_1\ X_2\ ...\ X_n]^T$, de media $\boldsymbol{\mu}_X$ y covarianza $C_X = P_X \Lambda_X P_X^T$. Para una transformación afín $\boldsymbol{Y} = A\,\boldsymbol{X} + \boldsymbol{b}$, donde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, demostrar que si $A = P_X^T$ y $\mathbf{b} = -A\boldsymbol{\mu}_X$, el vector aleatorio resultante $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^m$ cumple:

1. $\boldsymbol{\mu}_Y = \mathbf{0}$
2. $C_Y = \Lambda_X$ (matriz diagonal)

Usando los resultados ya obtenidos antes

Si $A = P_X^T \wedge b = -A\mu_X$

$E[Y] = A E[X] + b = P_X^T \mu_X - P_X^T \mu_X = 0$ ✓

$C_Y = A C_X A^t = P_X^t C_X P_X = P_X^t P_X \Lambda_X P_X^t P_X \overset{\checkmark}{=} \Lambda_X$

Se quiere utilizar una transformación lineal **Y** = A **Z** + **b** que permita convertir un vector aleatorio normal estándar con parámetros C_Z y $\boldsymbol{\mu}_Z$ en otro vector con parámetros $C_Y = [0.7\ \ 0.8\ ;\ 0.8\ \ 1.75]$ y $\boldsymbol{\mu}_Y = [0.8\ \ 1.0]^T$.

1. Genere un vector normal estándar de dos componentes $\mathbf{Z} = [Z_1\ Z_2]^T$ de 2000 realizaciones con media nula $\boldsymbol{\mu}_Z = 0$ y covarianza $C_Z = I$ (identidad). Haga un gráfico de dispersión del vector **Z** (Z_2 vs Z_1) superpuesta a las curvas de nivel de la densidad conjunta $f_Z(\mathbf{z})$. Grafique también los histogramas de cada componente.

2. Suponiendo que la diagonalización de la covarianza de Y es $C_Y = P \Lambda P^T$, utilice la transformación afín para obtener el vector aleatorio **Y** a partir de las muestras generadas de **Z**. Haga un gráfico de dispersión del vector **Y** (Y_2 vs Y_1) superpuesta a las curvas de nivel de la densidad conjunta $f_Y(\mathbf{y})$. Grafique también los histogramas de cada componente.

   Sugerencia: límites $-4 < Z_1 < 4$; $-4 < Z_2 < 4$; $-4 < Y_1 < 4$; $-4 < Y_2 < 6$

$Y = AZ + b$ Nos piden pasar de uno $Z \sim N(0,1)$ a lo Y. $C_Y = P_Y \Lambda_Y P_Y^t$

Es básicamente coloreo. La transformación podría ser: $b = \mu_Y$ $A = P_Y \Lambda_Y^{1/2}$

$\mu_Y = \mu_Z + b \Big|_{\mu_Z = 0} = b = \mu_Y$

$C_Y = A C_Z A^t = P_Y \Lambda_Y P_Y^t = A A^t$

$P_Y \Lambda_Y^{1/2} \Lambda_Y^{1/2} P_Y^t = A A^t$

Si $A = P_Y \Lambda_Y^{1/2}$ $\wedge\ A A^t = C_Y$

$A^t = \Lambda_Y^{1/2} P_Y^t$

Planteamos $C_Y = P_Y \Lambda P_Y^t = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 517{,}8 \cdot 10^{-3} & 0 \\ 0 & 1{,}47712 \end{vmatrix}^2 \begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix}$

$a = -0{,}879959$
$b = 0{,}475049$

$\therefore A = P_Y \Lambda_Y^{1/2} = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 517{,}8 \cdot 10^{-3} & 0 \\ 0 & 1{,}47712 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}455693 & -0{,}701304 \\ 0{,}295981 & -1{,}2998 \end{bmatrix}$

$b = -\mu_Y = \begin{vmatrix} -0{,}8 \\ -1 \end{vmatrix}$

Genere un vector aleatorio normal de media $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}}$ y covarianza C_X (de acuerdo a las definiciones abajo indicadas). Luego aplique una transformación para generar un nuevo vector **Y** descorrelacionado y de media nula, con N=2000 muestras. Haga los gráficos de dispersión de ambos vectores (**X** e **Y**) superpuestos a las curvas de nivel de la densidad $f_Y(\mathbf{y})$. También grafique los histogramas de cada componente.

$$C_X = \begin{bmatrix} 0.70 & 0.90 \\ 0.90 & 1.75 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\mu}_X = \begin{bmatrix} 0.80 \\ 1.0 \end{bmatrix}$$

Sugerencia: límites $-4 < X_1 < 4$; $-4 < X_2 < 4$; $-4 < Y_1 < 4$; $-4 < Y_2 < 4$

Coloreo: $X = AX + b \xrightarrow[Z \sim N(0,1)]{} X = P_X \Lambda_X^{1/2} Z + \mu_X$

Blanqueo: $Y = \Lambda_X^{-1/2} P_X^t (X - \mu_X)$

1. Para el VeA **X** de la actividad anterior, genere un vector aleatorio normal estándar **W** ~ $N(0,I)$ con N=2000 muestras, aplicando la transformación **W** = A**X**+**b**, eligiendo A y **b** adecuados.

2. Estime la media y la matriz de covarianza de **W** y verifique si se aproximan a lo esperado (~ $N(0,I)$).

3. Haga los gráficos de dispersión del VeA **W** superpuesto a las curvas de nivel teóricas esperadas. También grafique los histogramas de ambas componentes de **W**.

Sugerencia: límites $-4 < X_1 < 6$; $-4 < X_2 < 6$; $-4 < W_1 < 4$; $-4 < W_2 < 4$

1. Genere un VeA $\mathbf{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}_\mathbf{X}, C_X)$ donde C_X = [0.7 0.8 ; 0.8 1.75] y $\boldsymbol{\mu}_\mathbf{X}$= [0.8 1.0]^T.
2. Asumiendo que se dispone de un conjunto de N=2000 muestras del vector **X**, encuentre una transformación afín **Y** = A**X**+**b** tal que con las muestras de **X** se pueda generar un vector $\mathbf{Y} \sim N(\boldsymbol{\mu}_\mathbf{Y}, C_Y)$ con C_Y = [0.7 -0.6; -0.6 1.75] y $\boldsymbol{\mu}_\mathbf{Y}$= [-0.5 1.5]^T.
3. Haga los gráficos de dispersión del VeA **X** e **Y** superpuestos a las curvas de nivel teóricas esperadas. También grafique los histogramas de ambas componentes para cada vector.

Sugerencia: límites $-4 < X_1 < 6$; $-4 < X_2 < 6$; $-4 < Y_1 < 4$; $-4 < Y_2 < 6$

$$X \xrightarrow[\text{Blanqueo}]{} Z \xrightarrow{\text{Coloreo}} Y$$

$$Z = \Lambda_x^{-1/2} P_x^t (X - \mu_x)$$

$$Y = P_y \Lambda_y^{1/2} Z + \mu_y$$

las juntamos

$$Y = P_y \Lambda_y^{1/2} \left(\Lambda_x^{-1/2} P_x^t (X - \mu_x) \right) + \mu_y$$ Genera Y desde X

Ejercicio 1. *Sea U_i, $i = 1, \dots, n$ variables aleatoria i.i.d, distribuidas de acuerdo a la distribución Gaussiana $\mathcal{N}(\mu, 1)$. A partir de estas variables se construyen las siguientes variables*

$$\begin{cases} X_1 = U_1 \\ X_2 = U_1 + U_2 \\ \vdots \\ X_n = U_1 + \cdots + U_n. \end{cases}$$

1. *Indique si las X_i son conjuntamente Gaussianas y caracterice la función de densidad de probabilidad conjunta.*
2. *Considere la siguiente variable aleatoria,*

$$Z = \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

   a) *Indique si Z es Gaussiana y obtenga su función de densidad de probabilidad;*

   b) *Justifique la utilización de Z como un estimador de μ cuando $n \to \infty$.*

Para que sean cojuntamente gaussianas debemos ver que $\forall$ comb. lineal de X_1 a X_n sea gaussiana, que se da si X_1, X_n son gaussianas

que es decir $\underbrace{\sum_{i=1}^{n} U_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)}$

$$E[X_n] = E\left[\sum_{i=1}^{n} U_i\right] \underset{\text{iid}}{=} \sum_{i=1}^{n} E[U_i] = n \cdot \mu$$

$\underbrace{X_n \sim \mathcal{N}(n\mu, n)}$

$$\text{Var}[X_n] = \text{Var}\left(\sum U_i\right) \underset{\text{iid}}{=} \sum_{i=1}^{n} \text{Var}(U_i) = 1 \cdot n = n$$

$\text{Cov}(U_j, U_i) = 0 \; \forall j, i \; \mathbb{N} < n$

$X_1 \sim \mathcal{N}(\mu, 1)$

$X_2 \sim \mathcal{N}(2\mu, 2)$

todas gaussianas

Veamos el vector $\vec{X}$. Es función de $\vec{U} = [U_1 \cdots U_n]^t$

Si:

$$\begin{aligned} X_1 &= U_1 \\ X_2 &= U_1 + U_2 \\ X_n &= \sum_{i=1}^{n} U_i \end{aligned} \longrightarrow \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ 1 & 1 & \cdots & & 1 \end{bmatrix}}_{A,\; n \times n} \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix}$$

todos unos abajo de la diagonal

Como es del tipo $\vec{X} = A\vec{U} + \vec{0}$

$$\vec{X} \sim \mathcal{N}(\mu_X, C_X) \longrightarrow \mu_X = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ n \end{bmatrix} \mu \qquad C_X = A C_U A^t = A A^t$$

$C_U = I$ porque son iid de $\underline{\sigma^2 = 1}$

2. $Z = \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} x_i$ Como las $x_i \sim N(i\mu, i)$ tenemos combinación lineal de V.A gauss

$\therefore$ Z va a ser gaussiana. $\frac{2}{n^2}$ es cte

$$E[Z] = \frac{2}{n^2} E\left[\sum x_i\right] = \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} E[x_i] = \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i\mu = \frac{\cancel{2}}{n^{\cancel{2}}}\mu \frac{\cancel{n}(n+1)}{\cancel{2}} = \mu + \frac{\mu}{n}$$

$$Var(Z) = Var\left(\frac{2}{n^2}\sum x_n\right) = \frac{4}{n^4} Var\left[\sum x_n\right] = \frac{4}{n^4} E\left[\left(\sum^{n}(x_i - i\mu)\right)^2\right]$$

Hay que hacer aparecer U

+ fácil si volvemos a las U_i

$$Z = \frac{2}{n^2}\sum x_i = \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(nU_1 + (n-1)U_2 \ldots 1.U_n) = \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(i\,U_{n+1-i})$$

$$E: \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i \cdot \overbrace{E[U_{n+1-i}]}^{\mu} = \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \mu + \frac{\mu}{n}$$

$$Var: \quad \frac{4}{n^4} Var\left(\sum i\, U_{n+1-i}\right) \underset{iid}{=} \frac{4}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i^2 \overbrace{Var(U_{n+1-i})}^{1} = \frac{4}{n^4}\sum_{i=1}^{n} n^2 = \frac{2(n+1)(2n+1)}{3n^3}$$

Estimador de μ $\rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} E[Z] = \mu + \cancel{\frac{\mu}{n}} = \mu$, estima bien

$$\lim_{n\to\infty} V(Z) = \frac{2(n+1)(2n+1)}{3n^3} \underset{n\to\infty}{\approx} \frac{n^2}{n^3} \approx \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

Es un buen estimador

Ejercicio 6 Secuencia Gaussiana

Considere una sucesión de variables aleatorias $\{U_1, U_2, U_3, ...\}$ independientes uniformes en $(0,1)$. A continuación se arma la siguiente secuencia:

$$\begin{cases} X_{2j} &= \sqrt{-\ln(U_{2j})}\cos(2\pi U_{2j-1}) \\ X_{2j-1} &= \sqrt{-\ln(U_{2j})}\sin(2\pi U_{2j-1}) \end{cases} \quad j = 1,2,3,...$$

1. Halle la densidad conjunta del vector $[X_{2j-1}, X_{2j}]$, para $j \in N$.
   Sugerencia: considere la transformación Box-Muller.
2. Utilizando las secuencia X se arma una nueva secuencia:

$$\begin{cases} Y_{2j} = X_{2j} + 0{,}5X_{2j-1} \\ Y_{2j-1} = 0{,}5X_{2j} + X_{2j-1} \end{cases} \quad j = 1,2,3,...$$

Halle la densidad conjunta del vector $[Y_1, \ldots, Y_{2j}]$ para $j \in \mathbb{N}$.

1) Box-Müller Si $\vec{X}$ es transformación de $\vec{U}$; $\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ y $\vec{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$

$$f_{\vec{X}}(\vec{x}) = \left.\frac{f_{\vec{U}}(\vec{u})}{|\det J(\vec{g})|}\right|_{\vec{g}^{-1}(\vec{u})}$$

$$\vec{g}(x_1,x_2) = \left((-\ln(U_1))^{1/2}\cos(2\pi U_2) \,;\, (-\ln(U_1))^{1/2}\operatorname{sen}(2\pi U_2) \right)$$

$$J(\vec{g}) = \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{-\ln(U_1)}\cos(2\pi U_2) \\ \sqrt{-\ln(U_1)}\operatorname{sen}(2\pi U_2) \end{pmatrix}}_{2\times 1} \begin{pmatrix} \partial/\partial U_1 & \partial/\partial U_2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{-\cos(2\pi U_1)}{2\sqrt{-\ln(U_1)}\,U_1} & -\sqrt{-\ln(U_1)}\operatorname{sen}(2\pi U_2)2\pi \\ \frac{-\operatorname{sen}(2\pi U_1)}{2\sqrt{-\ln(U_1)}\,U_1} & \sqrt{-\ln(U_1)}\cos(2\pi U_2)2\pi \end{vmatrix}$$

El determinante es
$$\left(\frac{-\cos(2\pi U_1)}{2\cancel{\sqrt{-\ln(U_1)}}\,U_1}\right)\left(\cancel{\sqrt{-\ln(U_1)}}\cos(2\pi U_2)2\pi\right) - \left(\frac{\cancel{-}\operatorname{sen}(2\pi U_1)}{2\cancel{\sqrt{-\ln(U_1)}}\,U_1}\right)\left(\cancel{-}\cancel{\sqrt{-\ln(U_1)}}\operatorname{sen}(2\pi U_2)2\pi\right)$$

$$-\cos^2(2\pi U_1)\cdot\frac{\pi}{U_1} - \left(\operatorname{sen}^2(2\pi U_1)\frac{\pi}{U_1}\right) \quad \frac{-\pi}{U_1}\left(\cos^2 + \operatorname{sen}^2\right) = \frac{-\pi}{U_1} \xrightarrow{\text{abs}} \frac{\pi}{U_1}$$

Ahora buscamos $\vec{g}^{-1}$ → Si
$$\begin{cases} x_1 = (-\ln(U_1))^{1/2}\cos(2\pi U_2) \\ x_2 = (-\ln(U_1))^{1/2}\operatorname{sen}(2\pi U_2) \end{cases}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = -2\ln(U_1)\left(\cancel{\cos^2 + \operatorname{sen}^2}\right)^1$$

$$\boxed{e^{-x_1^2 - x_2^2} = U_1}$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{\cos(2\pi U_2)}{\operatorname{sen}(2\pi U_2)}$$

$$\frac{x_2}{x_1} = \tan(2\pi U_2)$$

$$\boxed{\frac{\arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}{2\pi} = U_2}$$

$$f_{\vec{X}}(\vec{x}) = \frac{f_{\vec{U}}(\vec{u})}{\frac{\pi}{U_1}}\Bigg|_{g^{-1}} ; \quad f_{\vec{U}}(\vec{u}) \underset{U_i \text{ iid}}{=} f_{U_1}(u_1) f_{U_2}(u_2) = \mathbb{1}\{0<U_1<1\}\mathbb{1}\{0<U_2<1\}$$

$$f_{\vec{X}}(\vec{x}) = \frac{\mathbb{1}\{0<e^{-x_1^2-x_2^2}<1\}\mathbb{1}\{0<\arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right)<2\pi\}}{\frac{\pi}{e^{-x_1^2-x_2^2}}} = \frac{1}{\pi} e^{-x_1^2-x_2^2} \mathbb{1}\{x_1\in\mathbb{R}\}\mathbb{1}\{x_2\in\mathbb{R}\}$$

Vamos a reescribir esto

$$\frac{1}{\pi} e^{-x_1^2-x_2^2} \mathbb{1}\{x_1\in\mathbb{R}\}\mathbb{1}\{x_2\in\mathbb{R}\} = \frac{1}{2\pi\cdot\frac{1}{2}} e^{\frac{-x_1^2-x_2^2}{2\cdot\frac{1}{2}}} \mathbb{1}\{x_1; x_2\in\mathbb{R}\}$$

a esto se parece a una normal multivariada.

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{1}{2}}} e^{\frac{-x_1^2}{2\cdot\frac{1}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{1}{2}}} e^{\frac{-x_2^2}{2\cdot\frac{1}{2}}} \mathbb{1}\{x_1\in\mathbb{R}\}\mathbb{1}\{x_2\in\mathbb{R}\}$$

$\mu = 0$; $\frac{1}{2} \rightarrow \sigma_x^2$; σ_x^2

Visto así es obvio que $x_1, x_2 \underset{iid}{\sim} \mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$

2. Podemos hacer una transformación lineal de $\vec{x}$ ya que es gaussiana.

$$\vec{y} = A\vec{x} + b = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} \vec{x} + \vec{0}$$

$$\therefore \operatorname{cov}(\vec{y}) = A C_x A^t = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} \underbrace{\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}}_{\operatorname{cov}(x_1,x_2)=0} \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{5}{8} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{8} \end{vmatrix}$$

$$E[\vec{y}] = A\underbrace{E[\vec{x}]}_{\binom{0}{0}} + \underbrace{b}_{\binom{0}{0}} = \vec{0}$$

$$\rightarrow y \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{5}{8} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{8} \end{vmatrix}\right)$$

Ejercicio 4

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_N$ variables aleatorias conjuntamente Gaussianas con media $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}}$ y matriz de covarianza $C_{\mathbf{X}}$.

1. Calcular la varianza de la variable aleatoria $Y = a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_NX_N$ donde a_i son coeficientes reales tales que el vector $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \ldots, a_N]^t$ tiene norma unitaria.
2. Determine la función característica de Y a partir de la función característica conjunta de las X_i.
3. Sea:

$$C_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Determine el máximo y el mínimo valor posible de la varianza de Y cuando el vector $\mathbf{a}$ recorre el círculo unitario.

$y = \vec{a}\,\vec{x}$

$$\phi_y = E\left[e^{j\omega^t \vec{y}}\right] = E\left[e^{j\omega^t \underbrace{\vec{a}\,\vec{x}}_{(a_1\ a_2\ \ldots\ a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{N} a_i x_i}}\right] = E\left[\prod_{i=1}^{N} e^{j\omega a_i x_i}\right]$$

son iid

$$\prod_{i=1}^{N} E\left[e^{j\omega a_i x_i}\right] = \prod_{i=1}^{N} E\left[e^{j\omega a_i x_i}\right]$$

Ejercicio 1. *Sea U_i, $i = 1, \dots, n$ variables aleatoria i.i.d, distribuidas de acuerdo a la distribución Gaussiana $\mathcal{N}(\mu, 1)$. A partir de estas variables se construyen las siguientes variables*

$$\begin{cases} X_1 = U_1 \\ X_2 = U_1 + U_2 \\ \vdots \\ X_n = U_1 + \cdots + U_n. \end{cases}$$

1. *Indique si las X_i son conjuntamente Gaussianas y caracterice la función de densidad de probabilidad conjunta.*
2. *Considere la siguiente variable aleatoria,*

$$Z = \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

   a) Indique si Z es Gaussiana y obtenga su función de densidad de probabilidad;
   b) Justifique la utilización de Z como un estimador de μ cuando $n \to \infty$.

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} U_N$$

Para que los X_n sean conjuntamente gaussianas debe suceder que los X_1 a X_N sean gaussianas ya que si todas son $\mathcal{N}(\mu_x, C_x)$ $\forall$ combinación lineal va a ser gaussiana.

Podemos pensar que $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$ es combinación lineal de un vector $\vec{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_N \end{pmatrix}$

tal que si $x_n = \sum_{i=1}^{n} U_i \longrightarrow \vec{x} = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{vmatrix} = \overbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}}^{A} \begin{vmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_N \end{vmatrix} + \underset{\vec{0}}{\cancel{b}}$

Tenemos que ver la distribución de $\vec{U} \rightarrow E[\vec{U}] = \begin{vmatrix} E(U_1) \\ \vdots \\ E(U_n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu \\ \vdots \\ \mu \end{vmatrix}$

$\wedge$ $C_{\vec{U}}$ es la I ya que son iid y las $Var(U_i) = 1$

Como es transformación afín: $\mu_X = A \mu_U + \underset{0}{\cancel{b}} = \overbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 \cdots & 1 \end{vmatrix}}^{A} \begin{vmatrix} \mu \\ \mu \\ \mu \\ \vdots \\ \mu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu \\ 2\mu \\ \vdots \\ n\mu \end{vmatrix}$

$$C_X = A C_U A^t = A I A^t = A A^t$$

la gtx será $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}^{\,n} \sqrt{C_x}} e^{-(\vec{x} - \mu_x)^t C_x^{-1} (x - \mu_x)}$

2. *Considere la siguiente variable aleatoria,*

$$Z = \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

a) Indique si Z es Gaussiana y obtenga su función de densidad de probabilidad;

b) Justifique la utilización de Z como un estimador de μ cuando $n \to \infty$.

la $\sum$ es multiplicar por el vector $\mathbb{1}^t$

$$Z = \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{2}{n^2}\cdot \underbrace{(1\ 1\ 1 \cdots 1)}_{1\times n} \vec{X} = \frac{2}{n^2}\underbrace{(1 \cdots 1)}_{1\times n} A\vec{U}$$

$$\underbrace{(1\ 1 \cdots 1)}_{1\times n}\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{vmatrix}}_{n\times n}\begin{vmatrix} U_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ U_N \end{vmatrix} = \underbrace{(1\ 1 \cdots 1)}_{1\times n}\underbrace{\begin{vmatrix} U_1 & 0 & \cdots & 0 \\ U_1 & U_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ U_1 & U_2 & \cdots & U_n \end{vmatrix}}_{n\times n} = nU_1 + (n-1)U_2$$

$$X_i = \sum_{k=0}^{i} U_i \longrightarrow \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i} U_i = nU_i + (n-1)U_2 + (n-2)U_3 \cdots + U_n$$

la 1ª fila de $A\vec{U}$ tiene nU_1, la 2do $(n-1)U_2$ & así sucesiv.

$$Z = \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i\,U_{n-i+1}$$ Es combinación lineal de Gaussianas iid. $\therefore$ Z es Gaussiana.

$$E[Z] = \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i\,\underbrace{E[U_{n-i+1}]}_{\mu} = \frac{2}{n^2}\mu\sum_{i=1}^{n} i = \mu\frac{(n+1)}{n}$$

iid $\wedge$ prop. $E[x]$

$$Var(Z) = \frac{4}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i^2\,\underbrace{Var(U)}_{1} = \frac{4}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{2(n+1)(2n+1)}{3n^3}$$

props iid

$Cov(U_i, U_j) = 0 \ \forall i \neq j$

$$\longrightarrow Z \sim \mathcal{N}\Big(\underbrace{\frac{\mu(n+1)}{n}}_{\mu_Z}, \underbrace{\frac{2(n+1)(2n+1)}{3n^3}}_{\sigma_Z^2}\Big)$$

la PDF será $$\frac{1}{\sqrt{2\pi\,\sigma_Z^2}}\, e^{-\frac{(z-\mu_Z)^2}{2\sigma_Z^2}}$$

¿Que tan buen estimador es?

$$\lim_{n\to\infty} \mu_Z = \lim_{n\to\infty} \mu\frac{(n+1)}{n} \approx \mu$$

también podes plantear que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|Z-\mu_Z| < \varepsilon_1) \leq \frac{E|(Z-\mu_Z)|^2}{\varepsilon_1^2} \approx \frac{n^2}{n^3}\frac{1}{\varepsilon_1^2}$$

Var(Z)

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_Z^2 \longrightarrow 0$$ $\boxed{\text{Es buen Estimador}}$

Como $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3} \to 0 \ \therefore \ \underbrace{\mathbb{P}(|Z-\mu_Z| < \varepsilon_1) = 0}$

Z converge en p. a su media

Ejercicio: Señal del telégrafo

Sea $N(t)$ un proceso Poisson de media $\mathbb{E}[N(t)] = \lambda t$. Se construye un nuevo proceso $X(t)$ tal que

- $X(t) \in \{-1, +1\}$ para todo t
- $\mathbb{P}[X(0) = +1] = \mathbb{P}[X(0) = -1] = \frac{1}{2}$
- $X(t)$ cambia de polaridad si $N(t)$ se incrementa en 1. Es decir, $X(t)$ cambia de polaridad cuando ocurre un evento Poisson

Hallar $\mathbb{P}[X(t) = +1]$ y $\mathbb{P}[X(t) = -1]$.

Ayuda: Recuerde que

$$\mathbb{P}[X(t) = a] = \mathbb{P}[X(t) = a|X(0) = +1]\mathbb{P}[X(0) = +1] + \mathbb{P}[X(t) = a|X(0) = -1]\mathbb{P}[X(0) = -1]$$

$$\mathbb{P}(X(t)=1) = \mathbb{P}(X(t)=1 \mid X(0)=1) + \mathbb{P}(X(t)=1 \mid X(0)=-1)$$

$X(t)$ cambia de polaridad en cada evento

$\therefore$ si inicia positivo en $n=0$ es 1

$\wedge$ si inicia en impares en $n=0$ es -1.

$$X(t)|X(0)=1 = (-1)^{2n} \qquad X(t)|X(0)=-1 = (-1)^{2n+1}$$

Buscamos la probabilidad de que $N(t)$ sea par e impar

Ahora podemos calcular la probabilidad de $X(t)=1$

$$\mathbb{P}(X(t)=1) = \mathbb{P}(X(t)=1 \mid \underbrace{X(0)=1}_{\text{lo tenemos}}) + \mathbb{P}(X(t)=1 \mid \underbrace{X(0)=-1}) = \frac{1}{2}\underbrace{\mathbb{P}(X(t)=1)}_{\text{que } N(t) \text{ sea par}} + \frac{1}{2}\underbrace{\mathbb{P}(X(t)=-1)}_{\text{que } N(t) \text{ sea impar}} = \frac{\mathbb{P}(N(t) \text{ par}) + \mathbb{P}(N(t) \text{ impar})}{2}$$

$X(t)$ es 1 cuando

$X(0) = 1 \wedge N(t)$ par

$X(0) = -1 \wedge N(t)$ impar

Si tenes un conjunto de numeros $\in \mathbb{N}$ (infinito) $\wedge$ se separa en pares e impares se obtienen 2 particiones iguales en tamaño.

Plantear $\mathbb{P}(N(t) \in \mathbb{N}) = 1$; $\mathbb{P}(N(t) \text{ par}) = \mathbb{P}(\mathbb{N} \text{ par}) \cdot \mathbb{P}(N(t) \in \mathbb{N}) = \dfrac{\# \text{pares en } \mathbb{N}}{\forall \mathbb{N}} \cdot 1 = \dfrac{1}{2}$

Entonces por geometría se da que $\mathbb{P}(N(t) \text{ par}) = 1/2 \wedge \mathbb{P}(N(t) \text{ impar}) = 1/2$ (conjugados)

$$\therefore \quad \mathbb{P}(X(t)=1) = \frac{1/2 + 1/2}{2} = 1/2 \longrightarrow \mathbb{P}(X(t)=-1) = 1 - \mathbb{P}(X(t) \neq -1) = 1 - \mathbb{P}(X(t)=1) = 1/2$$

$$\boxed{f_X(x) = \tfrac{1}{2}\delta(x-1) + \tfrac{1}{2}\delta(x+1)}$$

$$E(X(t)) = 1 \cdot \mathbb{P}(X(t)=1) + (-1)\mathbb{P}(X(t)=-1) = 0$$

Ejercicio: Shot Noise

Vimos cómo construir el ruido de disparo a partir de un tren de impulsos con ocurrencias aleatorias. Sea $h(t)$ la respuesta impulsiva de un sistema LTI causal, luego

$$N(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow X(t)$$

$$X(t) = \sum_k h(t - T_k).$$

Calcular $\mathbb{E}[X(t)]$.

Poisson alternativa $\rightarrow N(t) = \sum_{t=0}^{K} u(t - T_k)$; $T_k \sim \mathcal{U}(0, T)$

Ayuda: Puede ser útil incorporar el proceso Poisson implícito en $X(t)$. Para ello, recuerde que $\mathbb{E}[X(t)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X(t)|N(t)]]$.

La probabilidad de que llegue un $\delta(t)$ al sistema está dada por una V.A. Poisson cuya media va a ser la tasa de arribos T_k^{-1}. La media del proceso de salida del sist LTI es la media de entrada . $H(0)$.

$H(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\} = \mathcal{F}\{\sum h(t - t_k)\}$ $\therefore$ la media a la salida es $\mathcal{F}\{h(t)\}(0) \cdot \mu_N$

Ejercicio

Sea H un sistema promediador en tiempo continuo que es alimentado con ruido blanco gaussiano W cuya PSD es $S_W(\omega) = N_0/2$ W/(rad/s):

$$W(t) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{T}\int_{t-T}^{t}} \longrightarrow Y(t)$$

Hallar $S_Y(\omega)$ y $R_Y(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_Y(\omega) d\omega$.

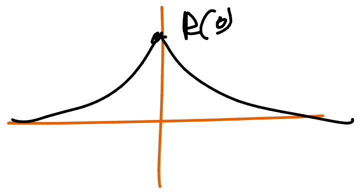
$N_1(t)$ y $N_2(t)$ son dos procesos de Poisson independientes entre sí con tasas λ_1 y λ_2 respectivamente. Justifique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas

$E[N_1 + N_2] = \mu_1 + \mu_2 = \mu_3$

- $N_1(t) + N_2(t)$ es Poisson → Verdadero → $Var(N_1 + N_2) = Var(N_1) + Var(N_2) = \mu_1 + \mu_2 = \mu_3$
- $N_1(t) - N_2(t)$ es Poisson → Falso
- La tasa de $N_1(t) + N_2(t)$ es $\lambda_1 + \lambda_2$. V
- La media de $N_1(t) - N_2(t)$ es proporcional a $\lambda_1 - \lambda_2$. Verdadero

5. Sea X un proceso estocástico gaussiano en tiempo continuo con media nula y autocorrelación:

$$C_X = e^{-|t_1 - t_2|} \longleftrightarrow R_X(\tau) = e^{-|\tau|}. \rightarrow$$



Considere la señal modulada en frecuencia:

$$Y(t) = \sin(X(t)t)$$

Halle la media y la autocorrelación del proceso Y y determine si es ESA.

$$E[Y] = E[\operatorname{sen}(X.t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen}(x.t) \cdot f_X(x)\, dx$$

$f_X(x)$ lo tengo $\rightarrow X$ gaussiana $\mu_X = 0 \wedge R_X(0) = C_X(t,t) + \mu_X^2 = Var(X) = 1$ ✓

$$X \sim N(0,1) \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen}(x.t)\, f_X(x)\, dx$$

Esto es feo, vamos por otro lado.

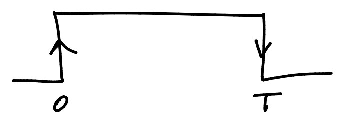
$$Y = \operatorname{sen}(X.t) = \frac{e^{jX(t).t} - e^{-jX(t).t}}{2j} \xrightarrow{E[\,]} \frac{1}{2j} E\left[e^{jX(t)t}\right] - \frac{1}{2j} E\left[e^{-jX(t)t}\right]$$

$$\frac{1}{2j} E\left[e^{jXt}\right] - \frac{1}{2j} E\left[e^{-jXt}\right] = \frac{1}{2j}\left(\phi_X(t) - \phi_X(-t)\right) = \frac{1}{2j}\Big[\underbrace{e^{-\frac{t^2}{2}} - e^{-\frac{t^2}{2}}}_{\text{se cancela}}\Big] = 0$$

Autocorrelación $R_Y = E[Y(t)Y(t+\tau)] = E\left[\operatorname{sen}\left(\overset{A}{X(t)}\, t\right) \operatorname{sen}\left(\overset{B}{X(t+\tau)}(t+\tau)\right)\right] =$

guía "Ejs 6"

1) $g(t)$ es una ventana de 0 a T $\begin{cases} 1 & 0 \le t \le T \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \rightarrow g(t) = u(t) - u(t-T)$



A binaria : $\mathbb{P}(A=1) = p$; $\mathbb{P}(A=-1) = 1-p$ $\therefore$ $f_A(a) = p\,\delta(a-1) + (1-p)\,\delta(a+1)$

$$E[A] = \sum_{a=-1}^{1} a\, f_A(a) = -1(1-p) + 1p = 2p-1$$

$$X(t) = A\,g(t) = A\big(u(t) - u(t-T)\big)$$

Para ver que proceso es X vemos su media ^ autocorrelación.

$E[X(t)] = E[A\,g(t)] = \underbrace{g(t)}_{\text{Cte}}\,E[A] = g(t)\cdot(2p-1) \rightarrow$ Depende de t , no va a ser ESA.

Autocorrelación

$$R_X = E[X(t)\,X(t+\tau)] = E[g(t)\cdot A\cdot g(t+\tau)A] = E[A^2\, g(t)\, g(t+\tau)]$$

$g(t) = u(t) - u(t-T)$

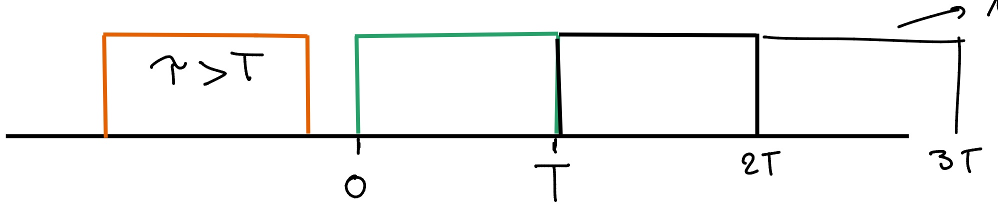
$g(t+\tau) = u(t+\tau) - u(t-T+\tau)$

$\tau = -T$

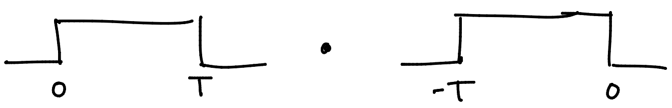
$u(t-T) - u(t-2T)$

$\tau = -2T$

$u(t-2T) - u(t-3T)$



si $\tau > T \longrightarrow \big(u(t) - u(t-T)\big)\big(u(t+T) - u(t)\big)$



$= 0$

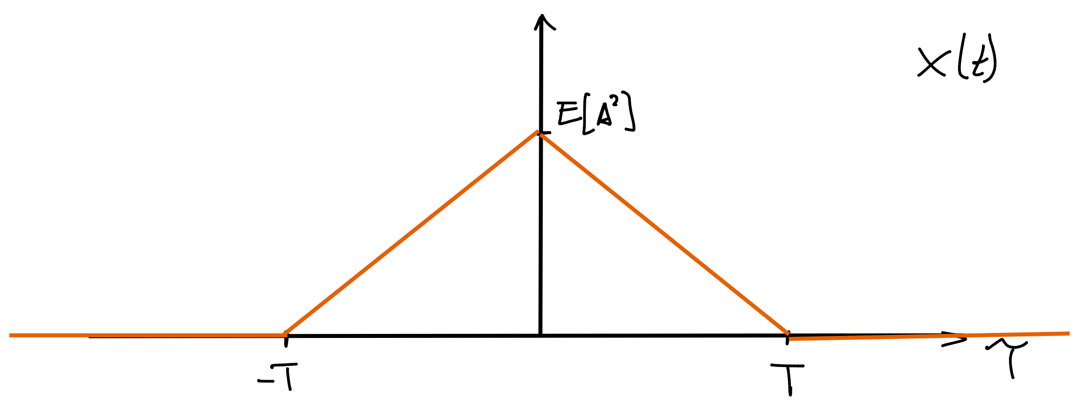
si $\tau < -T \longrightarrow 0$, para lo mismo.

Entonces $R_X = 0$ si $\tau > T$ o $\tau < -T$, o $|\tau| > T$

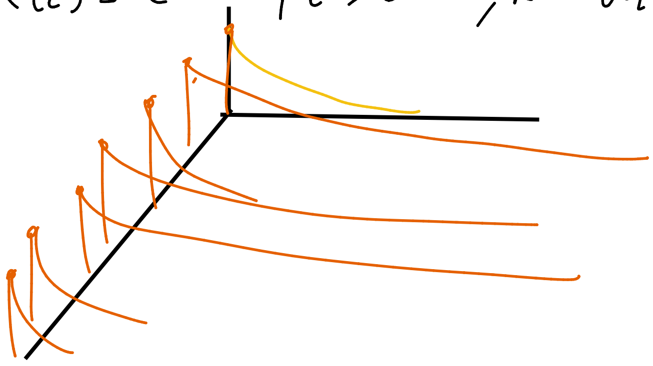
Adentro : $\boxed{\tau = 0 \rightarrow g(t)\,g(t) = 1}$

$R_X = E[A^2]$ si $\tau = 0$

De ahí bajo linealmente hasta cero, es una ventana triangular. (Hay convolución implícita)



2) $X(t) = e^{\Lambda t}$, $t \geq 0$, $\Lambda \sim \mathcal{U}[-2,-1]$ 1) Proceso de tiempo continuo de estado continuo



2) $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(e^{\Lambda t} \leq x) = \mathbb{P}\left(\Lambda \leq \frac{\ln(x)}{t}\right) = F_\Lambda\left(\frac{\ln(x)}{t}\right)$

Solo tiene sentido para valores de x entre 0 y 1.

$$F_X(x) \begin{cases} 0 & \text{si } x > 1 \wedge x < 0 \\ \frac{\ln(x)}{t} & \text{otro caso} \end{cases}$$

Falta algo

↳ El tiempo en el que evalues

$$F_{x_1 x_2}(t_1, t_2) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2)$$

COMO SE HACE?

matlab ✓

Media y autocorr

$$E[X(t)] = E[e^{\Lambda t}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\Lambda t} f_\Lambda(\lambda)\, d\lambda = \int_{-2}^{-1} e^{\Lambda t} \frac{1}{-1-(-2)}\, d\lambda = \int_{-2}^{-1} e^{\Lambda t}\, d\lambda = \left.\frac{e^{\Lambda t}}{t}\right|_{-2}^{-1} = \frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-2t}}{t}$$

$$= \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} \longrightarrow \text{Depende de } t$$

(tiene sentido, son todo exp. decreciente)

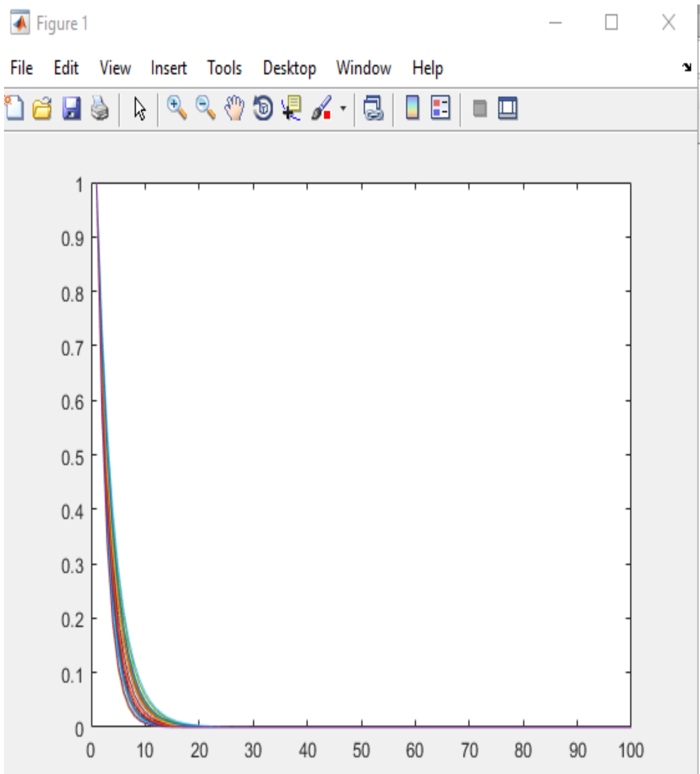
$$R_X = E[X(t_1)X(t_2)] = E[e^{\Lambda t_1} \cdot e^{\Lambda t_2}] = E[e^{\Lambda t_1 + \Lambda t_2}] = E[e^{\Lambda(t_1+t_2)}] = \int_{-2}^{-1} e^{\Lambda(t_1+t_2)}\, d\lambda = \frac{e^{-t_1-t_2} - e^{-2(t_1+t_2)}}{t_1+t_2}$$

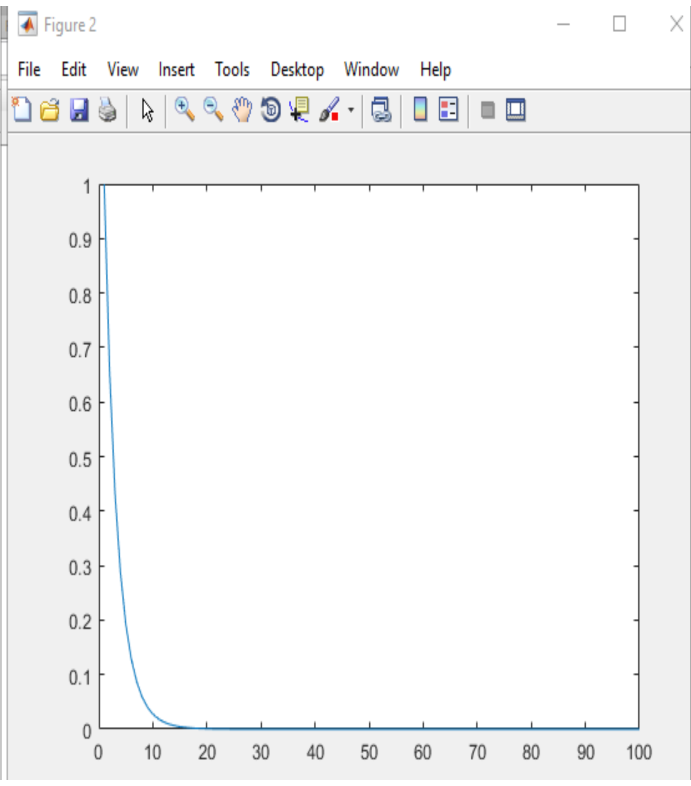
si $t_1 = t \wedge t_2 - t_1 = \tau$

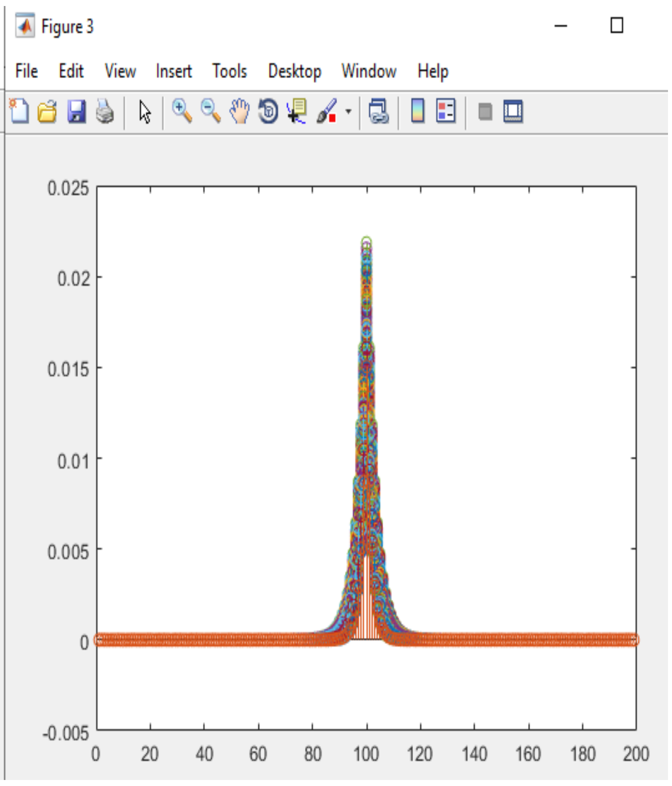
$$\frac{e^{-t_1-t_2} - e^{-2(t_1+t_2)}}{t_1+t_2} = \frac{e^{-2t-\tau} - e^{-2(2t+\tau)}}{2t+\tau}$$

$t_1 + t_2 = t + t_2$
$t_2 = \tau + t$ $\Big\}\ 2t+\tau$

Depende de t, no solo de τ.
No es ESA.







3) Es ESA aque μ_X cte en el tiempo ∧ $R_X(t_1,t_2) = R_X(\underbrace{\tau}_{t_2-t_1}) = 9 + 4e^{-2|\tau|}$

$E[X(5)] = 3$ $\qquad Var(X(5)) = C_X(5,5) = R_X(5,5) - 9 = 4$ $\quad \tau = 0$

$E[X(8)] = 3$ $\qquad Var(X(8)) = C_X(8,8) = R_X(8,8) - 9 = 4$

$R_X(t_1,t_2) = C_X(t_1,t_2) + \mu_X^2 \longrightarrow C_X(t_1,t_2) = R_X(t_1,t_2) - 9$

4) Random walk

Es un random step que acumula

$x(n) = x(n-1) + U(n)$ $\qquad \mathbb{P}(U=1) = p \qquad \mathbb{P}(U=-1) = 1-p$

Si $U(n)$ proceso aleatorio del tipo $\quad f_U(u) = p\,\delta(u-1) + (1-p)\,\delta(u+1)$

Entra al sistema que hace $\quad Y(n) = X(n) - Y(n-1)$

1. El proceso es de $\underbrace{\text{tiempo discreto}}_{\text{en base a } n}$ ∧ $\underbrace{\text{estado discreto}}_{\text{la VA es discreta}}$

$U(n) \to \boxed{h} \to x(n)$

2. $x(n) = U(n) + X(n-1)$

$x(1) = U(1)$

$x(1) = U(2) + x(1)$

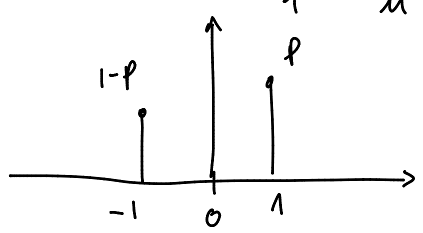
$x(2) = U(3) + x(2) = U(3) + U(2) + U(1)$

generalizo $\longrightarrow$ $x(n) = \sum_{k=1}^{n} U(k)$

$x(n) = \sum_{k=1}^{n} U(n)$ $\qquad \mathbb{P}(X(n) \le x) = \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n} U(n) \le x\right)$

$\sum U(n)$ iid $\rightarrow F_{X(n)}(x) = F_{\sum U}(z_u) = \prod_{k=1}^{n} F_{U(n)}(u)$

$$F_{U(n)}(u) = \begin{cases} 0 & u < -1 \\ 1-p & -1 \le u < 1 \\ 1 & u > 1 \end{cases}$$



2) $E[x(n)] = E\left[\sum_{k=1}^{n} U(k)\right] = n\,E[U(k)] = n \cdot \sum_{-1}^{1} U(k)\,p_{U(k)}(u) = n \cdot (1 \cdot p + (-1)(1-p))$

$n \cdot (2p-1)$ ✓

no es ESA a menos que $p = 1/2$

autocorrelación:

$R_X = E[X(n)\,X(n+\alpha)] = E\left[\sum_{k=1}^{n} U(k) \sum_{k=1}^{n+\alpha} U(k)\right]$ los $U(k)$ iid ∴ las sumas y su producto

deben ser independientes $\quad E\left[\sum^{n} U(k)\right] E\left[\sum^{n+\alpha} U(k)\right] = \underbrace{n \cdot (n+k)(2p-1)^2}_{\text{no es ESA}}$

$R_X(t_1,t_2) = C_X(t_1,t_2) + \mu_X(t_1)\,\mu_X(t_2)$

$n_1 n_2 (2p-1)^2 = C_X(n_1,n_2) + n_1 n_2 (2p-1)^2 \rightarrow C_X(n_1,n_2) = 0$, bueno, asumimos que eran indep.

↳ la autocorrelación

$Var(x(n)) \overset{iid}{=} Var\left[\sum^{n} U(n)\right] = n\, Var(U(n))$

$f_U(u) = p\,\delta(u-1) + (1-p)\,\delta(u+1)$

$E[U] = (2p-1)$

$Var(U(n)) = 4np(1-p)$

A partir del random step

$U(n) = \underbrace{2z(n)}_{} - 1$ ↳ $Ber(p)$

Pregunta

$Var(x(n)) = n\,E\left[\left(U(n) - (2p-1)\right)^2\right]$

$n\left[p.(1-2p+1)^2 + (1-p)(-1-2p+1)^2\right]$

$(2-2p)^2$ $(2p)^2$

$n\left[4p(1-p)^2 + 4(1-p)(p)^2\right]$

$4n\left[p(1-2p+p^2) + p^2 - p^3\right]$

$4n\left[p - 2p^2 + p^3 + p^2 - p^3\right]$

$4n\left[p - p^2\right] = 4np(1-p) = Var(x(n))$ ✓

5) $B(n) \longrightarrow$ Bernoulli párametro p

$P_{B(n)}(b) = \underbrace{\lambda\,\delta(b-1)}_{\mathbb{P}(B=1)=\lambda} + \underbrace{(1-\lambda)\,\delta(b)}_{\mathbb{P}(B=0)=1-\lambda}$

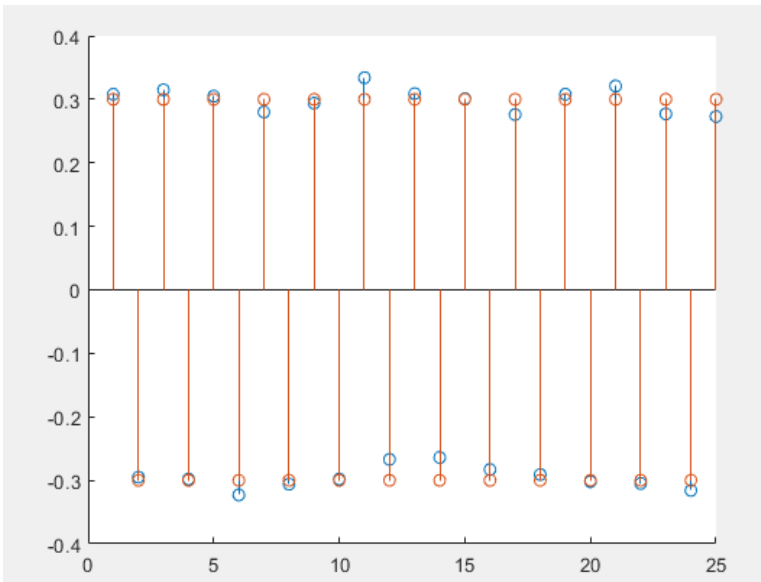
1. $B(n)^2 \longrightarrow E[B(n)^2] = \sum_{0}^{1} b^2 P_B(b) = 0.(1-\lambda) + 1^2\lambda = \lambda$, es Est. 1ª orden

$\quad\hookrightarrow R_B = E[\underbrace{B(n)\,B(m)}_{\text{son indep no definición}}] = E[B(n)]^2 = \lambda^2 \longrightarrow$ no depende ni de n ni de m.

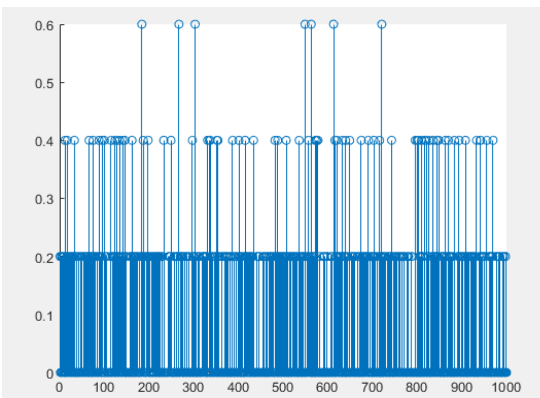
Diría que es ESA.

2. $(-1)^n B(n) \longrightarrow E[\underbrace{(-1)^n}_{\text{no depende de } B} B(n)] = (-1)^n E[B] = (-1)^n\lambda \longrightarrow$ depende de n, no es ESA

si, da así, simulado



3. $x(n) = B_1(n)\,\delta(x(n-1)) + B_2(n)\,\delta(x(n-1)-1)$



la media varia con n.

no veo que sea ESA

6) $x(n) = \sum_{i=1}^{p} A_i \, e^{j\omega_i n}$

$\hookrightarrow$ VA compleja

1. $E[x(n)] = E\left[\sum_{i=1}^{p} A_i e^{j\omega_i n}\right] = p\, E\left[A_i e^{j\omega_i n}\right] = p\, E[A_i]\, e^{j\omega_i n} \longrightarrow$ depende de n, no ESA

Me olvide conjugado

$A_i A_i^* = |A|^2 \longrightarrow (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2$

$R_x = E\left[X(n)X^*(k)\right] = E\left[\sum_{i=1}^{p} A_i e^{j\omega_i n} \sum_{j=1}^{p} A_i^* e^{-j\omega_j k}\right] = E\left[\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\left(A_i A_i^* e^{j\omega_i n} e^{-j\omega_i k}\right)\right] =$

acá no es ESA

$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} e^{j\omega_i n - j\omega_i k}\, E[A_i A_i^*] =$

2. Si $E[A_i] = 0 \longrightarrow E[x] = 0$

$\wedge$ A_i iid descorr

$(Var[A_i] \neq 0)$

acá si es ESA, si wi=wj queda en función de la dif de tiempos

$R_x = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} e^{j\omega_i n - j\omega_j k}\, E[|A_i|^2]$

3. la PSD van a ser deltas pq $S_x = \mathcal{F}\{R_x\} = \mathcal{F}\left\{\underbrace{\sum e^{j\omega_i(n-k)}}_{\sum \text{Exp complejos}}\right\} . Var(A_i)$

$\sum$ Exp complejos $\xrightarrow{\mathcal{F}}$ tren de deltas

Predecible ¿? $\longrightarrow$ Debe ser porque la frec no es aleatoria, solo la amplitud.

$$X(t) = \sum_{k=1}^{p} A_k e^{\jmath(\omega_k t + \Theta_k)} = \sum_{k=1}^{p} B_k e^{\jmath\omega_k t}, \qquad B_k = A_k\, e^{j\Theta_k} \text{ VAs complejas}$$

$$\mathbb{E}[X(t)] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{p} B_k e^{\jmath\omega_k t}\right] = \sum_{k=1}^{p} \mathbb{E}[B_k] e^{\jmath\omega_k t}.$$

$$R_X(t, t+\tau) = \mathbb{E}[X(t)X^*(t+\tau)] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{p} B_k e^{\jmath\omega_k t} \sum_{l=1}^{p} B_l^* e^{-\jmath\omega_l(t+\tau)}\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{p} \mathbb{E}[B_k B_l^*] e^{-\jmath\omega_l(t+\tau)} e^{\jmath\omega_k t}.$$

- Si $\mathbb{E}[B_k] = 0$ (e.g., $\Phi_k \sim \mathcal{U}[0, 2\pi]$ independiente de A_k),

$$\mathbb{E}[X(t)] = \sum_{k=1}^{p} \mathbb{E}[B_k] e^{\jmath\omega_k t} = 0.$$

- Si B_k descorrelacionadas entre sí, y $\sigma_k^2 = \mathbb{E}[|B_k|^2]$,

$$R_X(t, t+\tau) = \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{p} \mathbb{E}[B_k B_l^*] e^{-\jmath\omega_l(t+\tau)} e^{\jmath\omega_k t} = \sum_{k=1}^{p} \sigma_k^2 e^{\jmath\omega_k \tau} = R_X(\tau),$$

Entonces, $X(t)$ es ESA.

X no es necesariamente ESA.

7) $X(t)$ proceso gaussiano

1. La fdp conjunta es una gaussiana de orden n. $\left[2\pi^{n/2}\sqrt{det(C_x)}\right] exp\left[-\frac{1}{2}(x-\mu_x)^T C_x^{-1}(x-\mu_x)\right]$

2. Si es ESA $\rightarrow E[X(n)] = cte$

$C_x = C_x(t_1 - t_2)$

$C_x = E\left[(x-\mu_x)(x-\mu_x)^T\right]$

Pero ESE $\rightarrow$ toda dist solo depende de dif. $\rightarrow$ tomo la densidad cjta a la desplazo por τ a ver que pasa

$$\left[2\pi^{n/2}\sqrt{det(C_x)}\right] exp\left[-\frac{1}{2}(x-\mu_x)^T C_x^{-1}(x-\mu_x)\right]$$

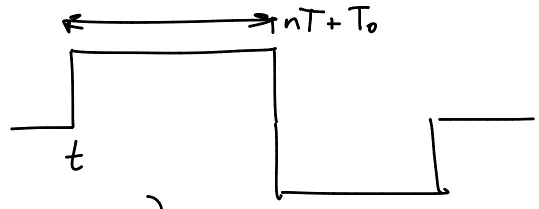
$\hookrightarrow$ función de τ ✓

de

La media $\wedge$ C_x definen x completo a la dist normal. Como esos momentos son solo dependiente de τ entonces es ESE ya que la dist. se define según τ a no t_1 a t_2.

8) $X(t) = \sum_n A_n P(t - nt - T_0)$

↳ pulso



$E[X(t)] = E\left[\sum_n A_n P(t-nt-T_0)\right]$ $n\,E[A_n]\,E[P(t-nt-T_0)] = 0$ ¿?

depende de los datos

↳ 0 por consigna

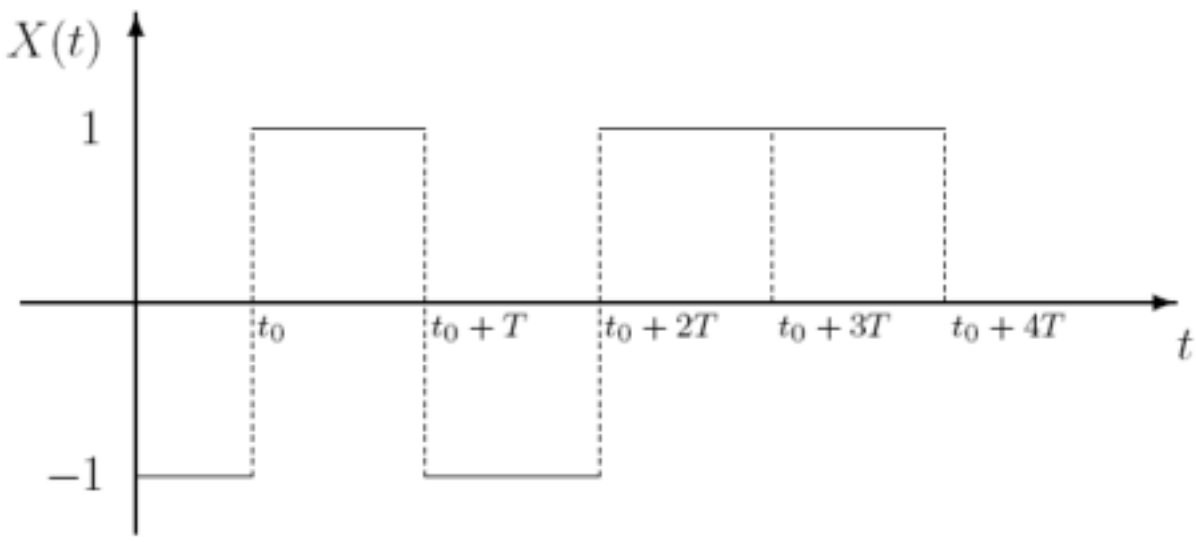
Ejercicio 8 - Modulación PAM

Un módem transmite una secuencia de datos del siguiente modo: transmite un 1 enviando un pulso de duración T segundos y amplitud 1; transmite un 0 enviando el mismo pulso con amplitud -1. En la figura se muestra como ejemplo la transmisión de la secuencia de datos 1011. La señal transmitida $X(t)$ responde a la ecuación siguiente

$$X(t) = \sum_n A_n p(t - nT - T_0),$$

donde $p(t)$ es un pulso de amplitud unitaria y duración T, A_n son variables aleatorias i.i.d. que toman el valor 1 o -1 según los datos a transmitir, y T_0 es una variable aleatoria uniforme en el intervalo $[0, T]$ que representa la fase de la señal transmitida. Se asume que T_0 y A_n son variables aleatorias independientes entre sí. Éste es un ejemplo de una señal binaria aleatoria.

1. Calcular $\mathbb{E}[X(t)]$.
2. Calcular la función de autocorrelación de $X(t)$. Para ello, suponga que $\mu_P = 0$.
3. Determinar si $X(t)$ es ESA o no.
4. ¿Varían los resultados si siempre $T_0 = 0$?
5. Simular una trayectoria de N períodos independientes, de la señal $X(t)$ binaria aleatoria, con fase inicial T_0 uniforme en el intervalo $[0, T]$. Estimar la media y la función de autocorrelación de la misma. Comparar los resultados en un mismo gráfico con los resultados teóricos.
6. Halle la media y la autocorrelación si no se incluye la variable aleatoria T_0, y analice si el proceso es ESA en ese caso.



Sistemas LTI

Ejercicio 1 - Senoidal ruidosa

Sea $X(n) = A\cos(2\pi\omega n + \Phi) + N(n)$, donde A y ω_0 son constantes, Φ se encuentra uniformemente distribuida en $[0; 2\pi)$ y $N(n)$ es ruido blanco de densidad de potencia σ^2.

1. Obtenga la media $\mathbb{E}[X(n)]$.
2. Si $X(n)$ es un proceso ESA, obtenga la densidad espectral de potencia del mismo.
3. Suponga que $X(n)$ es la señal de entrada a un filtro pasabanda de respuesta en frecuencia

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega - \omega_0| \leq \frac{W}{2} \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Compare la relación señal a ruido (SNR) a la entrada y a la salida del filtro. Extraiga conclusiones.

$x(n) = A\cos(2\pi\omega n + \phi) + N(n)$ → Ruido blanco σ^2

$\phi \sim \mathcal{U}[0, 2\pi)$

$E[x(n)] = A\, E[\cos(2\pi\omega n + \phi)] + E[N(n)] = \frac{A}{2\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{\cos(2\pi\omega_0 + \phi)}_{\text{Valor medio del cos} \to 0}\, d\phi + 0 = 0$

cte

$f_\phi(\phi)$

$R_x(t, t+\tau) = E[A\cos(2\pi\omega t + \phi)\, A\cos(2\pi\omega(t+\tau) + \phi)]$

$= A^2\, E[\cos(2\pi\omega t + \phi)\cos(2\pi\omega(t+\tau) + \phi)] = \frac{A^2}{2} E[\cos(2\pi\omega t + \phi + 2\pi\omega t + 2\pi\omega\tau + \phi)$

$+ \cos(\cancel{2\pi\omega t} + \phi - \cancel{2\pi\omega t} - 2\pi\omega\tau - \phi)] =$

prop: $\cos(x)\cos(y) = \cos(x+y) + \sin(x)\sin(y)$

$\cos(x)\cos(y) = \cos(x-y) - \sin(x)\sin(y)$

$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$

$= \frac{A^2}{2} E[\cos(4\pi\omega t + 2\pi\omega\tau + \phi) + \cos(2\pi\omega\tau)]$

$= \frac{A^2}{2}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{\cos(4\pi\omega t + 2\pi\omega\tau + 2\phi)}_{\emptyset\text{, medio de 1 ciclo}}\, d\phi + \underbrace{E[\cos(2\pi\omega\tau)]}_{\text{cte para lo } E[\,]}\right)$

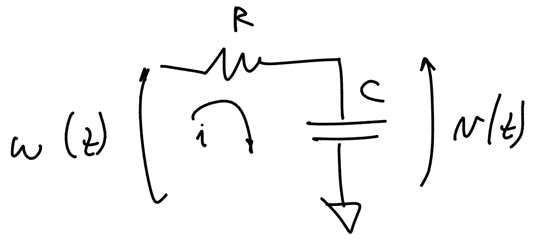
$f_\phi(\phi)$

$\therefore R_x = \frac{A^2}{2}\cos(2\pi\omega\tau)$ Es ESA

$S_x = \mathcal{F}\{R_x\} = \frac{A^2}{2}\mathcal{F}\{\cos(2\pi\underbrace{\omega}_{\omega_0}\tau)\} = \boxed{\frac{A^2}{2}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega \pm 2\pi\omega_0 \pm 2\pi l)}$

"n"

2) La RTA $H(\omega)$ del circuito es



$$w(t) = Ri + \overbrace{V_c}^{v(t)} \qquad i_c = i = C\dot{v}_c \quad \xrightarrow{\mathcal{L}} \quad W(s) = RCVs + V$$

$$\frac{W}{V} = H^{-1}(s) = RCs + 1$$

$$H(s) = \frac{1}{RCs+1}$$

$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{F}$
$s \longrightarrow j\omega$
(sobre eje $j\omega$) $\longrightarrow H(j\omega) = \dfrac{1}{j\omega RC+1}$ LTI Estable

Ruido blanco a entrada $\longrightarrow R_N = \delta(n)\dfrac{N_0}{2} \longrightarrow S_N = \dfrac{N_0}{2}$

Prop sist LTI: $S_y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_x(\omega) = \left|\dfrac{1}{jRC\omega+1}\right|^2 \dfrac{N_0}{2} = \dfrac{1}{|jRC\omega+1|^2}\dfrac{N_0}{2} = \dfrac{1}{\left(\sqrt{1^2+R^2C^2\omega^2}\right)^2}\dfrac{N_0}{2} = \boxed{\dfrac{N_0}{2+2R^2C^2\omega^2}}$

la potencia total es $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} S_y(\omega)\,d\omega$

3) 1. $y(t) = \dfrac{1}{2T}\displaystyle\int_{t-T}^{t+T} x(u)\,du = \dfrac{1}{2T}\int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\overbrace{\left[u(t+T_0) - u(t-T_0)\right]}^{\text{Va a dar una sinc}} du \xrightarrow{\mathcal{F}} \dfrac{1}{2T}\dfrac{1}{j\omega}\left[X(j\omega) * \dfrac{2\,\text{sen}(\omega T)}{\omega}\right]\cdot\dfrac{1}{2\pi}$

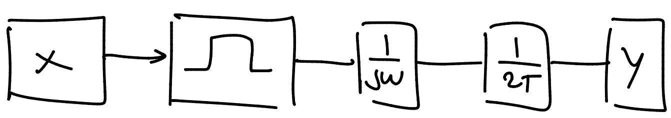
Para obtener $H(j\omega)$ podemos transformar. El sistema integra la ventana de $t-T$ a $t+T$ así que si en tiempo hay una ventana, en frec aparece la sinc.

$Y(j\omega) = \dfrac{1}{2T}\dfrac{1}{j\omega}\left[X(j\omega) * \dfrac{2\,\text{sen}(\omega T)}{\omega}\right]\cdot\dfrac{1}{2\pi}$ ¿?

<u>No tengo idea</u>

2. $E(y) = H(0)\,\mu_x \qquad S_y(\omega) = |H(j\omega)|^2 S_x(\omega)$

$E[y] = \dfrac{1}{2T}E\left[\displaystyle\int_{t-T}^{t+T} x(u)\,du\right]$ Promediador es pasa-bajos



5) $E[X] = \sum_{x \in X} p_x X = \frac{1}{4}\left(-1-2+\sin(t)+\cos(t)\right) \to$ depende de t. No es ESA

equiprob.

1. $R_X = E\left[\left(-1-2+\cancel{\sin(t)+\cos}(t)\right)\left(-1-2+\sin(\cancel{t+\tau})+\cos(t+\tau)\right)\right]$ mal, uso $\sum$ no es el proceso $X(t)$ es mezcla

$E[\cos(t)\cos(t+\tau)] + E[\cos(t)\sin(t+\tau)] - 3E[\cos(t)] + E[\sin(t)\sin(t+\tau)] - 3E[\sin(t)] - 3E[\cos(t+\tau)]$

$-3E[\sin(t+\tau)] + 9 = 2\cos(\tau)\pi + 18\pi$

$E = \sum_{x_i} p_{x_i} \cdot x_i$

$R_X = E[X(t)X(t+\tau)] = E[X(t)\,Y(t)] = \sum_{x_i y_i} \underbrace{p_{x_i y_i}}_{\text{cjto}} x_i y_i = \sum_{x_i}\sum_{y_i} p_{x_i y_i}\, x_i y_i$

$\frac{1}{16}\left(\left(-1-2+\sin(t)+\cos(t)\right)\left(-1-2+\sin(t+\tau)+\cos(t+\tau)\right)\right)$

$\frac{1}{16}\left[\cos(t)\cos(t+\tau) + \sin(t)\cos(t+\tau) - 3\cos(t+\tau) + \cos(t)\sin(t+\tau) + \sin(t)\sin(t+\tau) - 3\sin(t+\tau) - 3\cos(t) - 3\sin(t) + 9\right]$

No hay chance

2. $x^2 \longrightarrow 1,\ 4,\ \sin^2,\ \cos^2$

$E[x^2] = \frac{1}{4}\left(1+4+\underbrace{\sin^2+\cos^2}_{1}\right) = 6/4$ $\xrightarrow{6}$ ESA

$R_X = \sum_{x_i}\sum_{y_i} \frac{1}{16} x_i y_i = \frac{1}{16}\underbrace{\left(1+4+\underbrace{\sin^2+\cos^2}_{1}\right)}_{6}\left(1+4+\underbrace{\sin^2+\cos^2}_{1}\right) = \frac{36}{16} = \frac{9}{4}$

6) Si X, W descorr $\to Y(t) = aX(t) + bW(t) \to Y(t)Y(t+\tau) = \left(aX(t)+bW(t)\right)\left(aX(t+\tau)+bW(t+\tau)\right)$

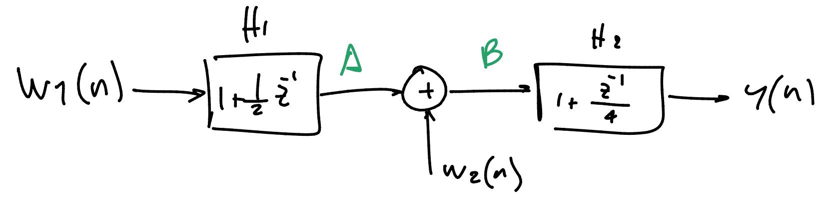
$R_Y = E\left[a^2X(t)X(t+\tau) + b^2W(t)W(t+\tau) + ab\underbrace{\left(X(t)W(t+\tau) + W(t)X(t+\tau)\right)}_{\text{Descorr}}\right]$

$R_Y = a^2 R_X + b^2 R_W + 0 + 0$

De ahí $Y = aX + bW$ es LTI y estable así que

$S_Y = \mathcal{F}\{R_Y\} = a^2\mathcal{F}\{R_X\} + b^2\mathcal{F}\{R_W\} = \underline{a^2 S_X + b^2 S_W}$

7) Planteamos:



Podemos trabajar en el dominio transformado ya que $S_y = \mathcal{F}\{R_y\}$

(A) $S_A = \left|1+\frac{1}{2}z^{-1}\right|^2 S_{w_1} \longrightarrow$ (y(n)) $\quad S_y = \left|1+\frac{z^{-1}}{4}\right|^2 S_B$

(B) $S_B = S_A + S_{w_2}$

$S_{w_1} = S_{w_2} = 1$ ya que $R_{w_1} = R_{w_2} = \delta(k).1$

Junto todo:

$$S_y = \left|1+\tfrac{1}{4}z^{-1}\right|^2 S_{w_2} + \left|1+\tfrac{1}{4}z^{-1}\right|^2\left|1+\tfrac{1}{2}z^{-1}\right|^2 S_{w_1} = \left|1+\tfrac{1}{4}z^{-1}\right|^2 + \left|1+\tfrac{1}{4}z^{-1}\right|^2\left|1+\tfrac{1}{2}z^{-1}\right|^2$$

Finjo demencia con $|\,|$ y planteo: $\left(1+\tfrac{1}{4}z^{-1}\right)^2 + \left(1+\tfrac{1}{4}z^{-1}\right)^2\left(1+\tfrac{1}{2}z^{-1}\right)^2 = \dfrac{z^{-4}}{64} + \dfrac{3z^{-3}}{16} + \dfrac{7z^{-2}}{8} + 2z^{-1} + 2$

$$= 2 + 2\delta(k-1) + \frac{7}{8}\delta(k-2) + \frac{3}{16}\delta(k-3) + \frac{1}{64}\delta(k-4)$$

Por prop de autocorrelación $R(k) = R(-k)$ (par)

8) $Y(t) = \cos(X(t)+U) = \dfrac{e^{j(X(t)+U)} + e^{-j(X(t)+U)}}{2} = \frac{1}{2}\left[e^{jX(t)}\cdot e^{jU} + e^{-jX(t)}\cdot e^{-jU}\right]$

$$E[Y] = \frac{1}{2}E\Big[\underbrace{e^{jX(t)}\,e^{jU}}_{\text{indep}} + \underbrace{e^{-jX(t)}\,e^{-jU}}_{\text{indep}}\Big] = \frac{1}{2}E\left[e^{jX(t)}\right]E\left[e^{jU}\right] + \frac{1}{2}E\left[e^{-jX(t)}\right]E\left[e^{-jU}\right]$$

$f_{X.U} = f_X . f_U \therefore E[X\,U] = E[X]E[U]$

Si $X(t)$ proceso Gaussiano ESA, $R_X = \dfrac{1}{1+|\tau|}$

A ver: $Y = \frac{1}{2}\left[e^{jX(t)}\cdot e^{jU} + e^{-jX(t)}\cdot e^{-jU}\right]$ indep indep

$$E[Y] = \frac{1}{2}\left(E\left[e^{jX(t)}\right]E\left[e^{jU}\right] + E\left[e^{-jX(t)}\right]E\left[e^{-jU}\right]\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\phi_X(1)\,\phi_U(1) + \phi_X(-1)\,\phi_U(-1)\right) = 0$$

$\phi_U(1) = 0 \;;\; \phi_U(-1) = 0$

veamos la función caracteristica de la U

U = Uniforme de 0 a 2π escala $\frac{1}{2\pi}$

$$\phi_U = \frac{1}{2\pi}\,\underbrace{\frac{\operatorname{sen}(\pi w)}{w}}_{\text{sinc}}\,\underbrace{e^{jw\pi}}_{\text{desfase de }\pi\text{ a izq}}$$

$$R_Y = \frac{E}{4}\left[\left(e^{jX(t)}\cdot e^{jU} + e^{-jX(t)}\cdot e^{-jU}\right)\left(e^{jX(t+\tau)}\cdot e^{jU} + e^{-jX(t+\tau)}\cdot e^{-jU}\right)\right]$$

Distribuimos

X y U descorr

$$\frac{E}{4}\left[e^{jX(t)}\cdot e^{jU}\,e^{jX(t+\tau)}\cdot e^{jU} + e^{jX(t)}\cdot e^{jU}\cdot e^{-jX(t+\tau)}\cdot e^{-jU} + e^{-jX(t)}\cdot e^{-jU}\cdot e^{jX(t+\tau)}\cdot e^{jU} + e^{-jX(t+\tau)}\cdot e^{-jU}\cdot e^{-jX(t)}\cdot e^{-jU}\right]$$

$$\frac{E}{4}\left[\underbrace{e^{2jU}}_{\phi_U(2)=0}.\text{algo} + e^{j(X(t)-X(t+\tau))} + e^{-j(X(t)-(X(t+\tau))} + \underbrace{e^{-2jU}}_{\phi_U(-2)=0}.\text{algo}\right]$$

$$\underline{R_Y = \frac{1}{4}\left(\phi_{X(t)-X(t+\tau)}(1) + \phi_{X(t)-X(t+\tau)}(-1)\right)}$$

$$\beta = x(t) - x(t+\tau) \sim \mathcal{N} \longrightarrow \beta = [1 \ -1] \begin{vmatrix} x(t) \\ x(t+\tau) \end{vmatrix} \longrightarrow E[\beta] = |1 \ -1| \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_\beta = Var(\beta) = \sigma_\beta^2 = A \, C_x A^t = |1 -1| \begin{vmatrix} 1 & R_x \\ R_x & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix} = \underbrace{2 - 2R_x(\tau)}_{\sigma_\beta^2}$$

$C_x(0) = \sigma_x^2$ ∧ la media es nula

$$\beta \rightarrow \phi_\beta = e^{j\mu\omega \to 0} \cdot e^{\frac{(2R_x - 2)\,\omega^2}{2}} = \exp\left(\omega^2\left(\frac{1}{1+|\tau|} - 1\right)\right)$$

$$\phi_\beta = \phi_{x(t)+x(t+\tau)}(\omega) \longrightarrow \phi(\pm 1) = \exp\left((\pm 1)^2\left(\frac{1}{1+|\tau|} - 1\right)\right)$$

$$R_y = \frac{1}{4}\left(\phi_{x(t)-x(t+\tau)}(1) + \phi_{x(t)-x(t+\tau)}(-1)\right) \quad \therefore \quad R_y = \frac{1}{2}\exp\left(\frac{1}{1+|\tau|} - 1\right)$$

ESA.

9) $y(n) = \sum_{i=0}^{K} a_i \, x(n-i)$

1. Lo hago para $k = 1, 2, 3, \dots n$

$k=1 \quad a_0 x(n) + a_1 x(n-1) = y(n) = [a_0 \ a_1]\,[x(n) \ x(n-1)]^t$

$k=2 \quad [a_0 \ a_1 \ a_2] \cdot [x(n) \ x(n-1) \ x(n-2)]^t$

$k=3 \quad [a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3] \cdot [x(n) \ x(n-1) \ x(n-2) \ x(n-3)]^t$

$k=k_0 \quad [a_0 \ a_1 \ a_3 \cdots a_{k_0}] \cdot [x(n) \ x(n-1) \ x(n-2) \ x(n-3) \dots x(n-k_0)]^t$

2. $R_x(k) = \sigma_x^2 \, \delta(k)$, $\mu_x = 0$

$$R_y = h * h_b * R_x \longrightarrow R_y = \sum a_i \delta(n-i) * \sum a_i \delta(n-i)_b * \sigma_x^2 \delta(k) =$$

si $y = \sum_{i=0}^{K} a_i x(n-i) \rightarrow y = h * x \big|_{x=\delta}$ $\quad [a_1 \ \dots \ a_n] * [a_n \cdots a_1] \cdot \sigma_x^2$

$h = \sum_{i=0}^{K} a_i \cdot \delta(n-i) \rightarrow$ Deltas desplazadas

$|R_y(k)| = 0$ si $|k| > m$ porque la long. de R_y depende de la long. de la rta impulsiva del sist, que en el caso de AR-m es m (es FIR).

3) $E[y] = 0$

$$y = x(n) + \tfrac{1}{2}\, x(n-2) + \tfrac{1}{3}\, x(n-3)$$

$$R_y = E\left[\left(x(n) + \tfrac{1}{2}x(n-2) + \tfrac{1}{3}x(n-3)\right)\left(x(n+\tau) + \tfrac{1}{2}x(n+\tau-2) + \tfrac{1}{3}x(n-3+\tau)\right)\right]$$

$$= R_x(\tau) + \tfrac{1}{4} R_x(\tau) + \tfrac{1}{9} R_x(\tau)$$

los iguales dan τ

$\frac{1}{2}\, x(n)\,x(n+\tau-2) \;\wedge\; \frac{1}{2}\, x(n-2)\, x(n+\tau) \longrightarrow \tfrac{1}{2} R_x(\tau \pm 2)$

$\tau - 2$ $\qquad n' = n-2 \;/\; x(n')\, x(\underbrace{n'+2+\tau}_{\tau+2})$

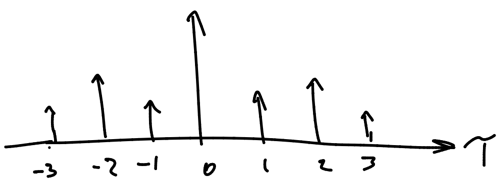
$\left(\begin{array}{l} x(n)\,x(n-3+\tau) \\ x(n-3)\,x(n+\tau) \end{array} \right) \rightarrow \frac{1}{3} R_x(\tau \pm 3)$

de $\frac{1}{2}x(n-2)\,\frac{1}{3}x(n-3+\tau) \;\wedge\; \frac{1}{3}x(n-3)\,\frac{1}{2}x(n-2+\tau)$

$\frac{1}{6} R_x(\tau \pm 1)$

$$\therefore\; R_y = \left(1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9}\right) R_x(\tau) + \tfrac{1}{6} R_x(\tau \pm 1) + \tfrac{1}{2} R_x(\tau \pm 2) + \tfrac{1}{3} R_x(\tau \pm 3)$$

$$R_y = \left(1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9}\right) \sigma_x^2\, \delta(\tau) + \frac{\sigma_x^2}{6}\, \delta(\tau \pm 1) + \tfrac{1}{2}\sigma_x^2\, \delta(\tau \pm 2) + \tfrac{1}{3}\sigma_x^2\, \delta(\tau \pm 3)$$



PAR ✓ MAX en $\tau = 0$ ✓

10) $y(n) = \alpha\, y(n-1) + b \xrightarrow{Z} Y(z) = \alpha\, Y(z)\, z^{-1} + b$

$$Y(z)\left(1 - \alpha z^{-1}\right) = b$$

$$Y(z) = \frac{b}{1 - \alpha z^{-1}} \xrightarrow{Z^{-1}} \underbrace{\alpha^n . b + C_i}_{\text{Demostrado}}$$

Crece

2. Ya lo mostré $\rightarrow \alpha^n . b + y(0)$

preguntar cuando aparece la CI

si $|\alpha| > 1$ el sistema no es estable, su ROC no cumple $|\eta| > |\alpha|$ entonces será la parte externa del círculo unitario ∧ como no lo incluye no es estable (es causal).

Eso o va a ser anticausal

11) $x(n) = U(n) + U(n-1)$

$\times X(n+\tau)$: $x(n)x(n+\tau) = \big(U(n)+U(n-1)\big)\big(u(n+\tau)+u(n-1+\tau)\big)$

$E[\,]$: $R_x(n,n+\tau) = E\big[u(n)u(n+\tau) + u(n)u(n-1+\tau) + u(n-1)u(n+\tau) + u(n-1)u(n-1+\tau)\big]$

$$= \underset{R_U(\tau)}{R_U(n,n+\tau)} + \underset{R_U(\tau-1)}{R_u(n,n-1+\tau)} + \underset{R_U(\tau+1)}{R_U(n-1,n+\tau)} + \underset{R_U(\tau)}{R_U(n-1,n-1+\tau)}$$

$U \sim \mathcal{U}[-\sqrt{3}\sigma, \sqrt{3}\sigma]$

$E[U] = 0$; $R_U(n_1,n_2) = C_x(n_1,n_2) + \underbrace{\mu(n_1)\mu(n_2)}_{0} = R_u(n_1,n_2) = C_x(n_1,n_2)$

$$C_x = E\big[(U(n_1)-\mu(n_1))(U(n_2)-\mu(n_2))\big] = E[U(n_1)U(n_2)] = \frac{1}{2\sqrt{3}\sigma}\int_{-\sqrt{3}\sigma}^{\sqrt{3}\sigma} u^2\,du = \underline{\sigma^2 = Var(U)}$$

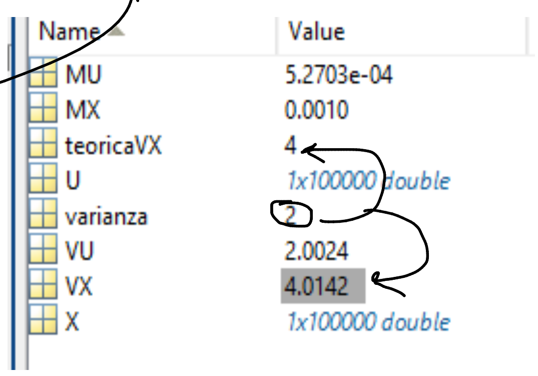
iid

$$Var(U) = \frac{(\sqrt{3}\sigma+\sqrt{3}\sigma)^2}{12} = \frac{4\cdot 3\sigma^2}{12} = \sigma^2$$

como $C_x = \sigma^2 \to R_U = \underbrace{\sigma^2\delta(\tau)}_{\text{porque son indep}} \to R_x = 2R_U(\tau) + R_U(\cancel{\tau\pm1}) = \cancel{2\sigma^2}$

0

ya que para $\underline{\tau > 0 \text{ la } R_U = 0}$

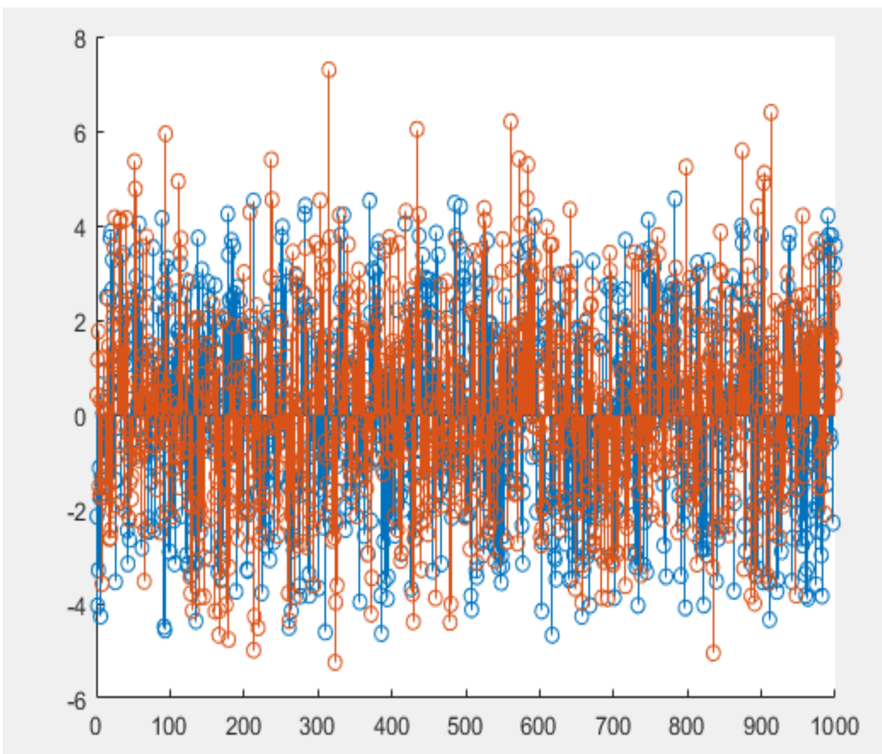


Name	Value
MU	5.2703e-04
MX	0.0010
teoricaVX	4
U	1x100000 double
varianza	2
VU	2.0024
VX	4.0142
X	1x100000 double

verificado matlab

2) No varía porque la $R_U = \sigma^2\delta(\tau)$ como la anterior

3) no veo mucha dif



17) Con los datos es suficiente para hacer Yule - Walker

Es AR - 2

$$X(n) + a X(n-1) + b X(n-2) = W(n)$$

$$R_x(p) + \sum_{i=1}^{2} a_i R_x(p-i) = \sigma^2 \delta(p)$$

$a_1 = a$
$a_2 = b$

$\nearrow R_x(k) = R_x(-k)$ (Es par)

$$p=0 \longrightarrow R_x(0) + a R_x(-1) + b R_x(-2) = \sigma^2 \delta(0)$$

$$1 + a \cdot 0 + b \cdot \tfrac{1}{4} = \sigma^2 \longrightarrow 1 + \frac{b}{4} = \sigma^2 \longrightarrow 1 + \frac{-1}{16} = \sigma^2$$

$$\boxed{\sigma^2 = \frac{15}{16}}$$

$$p=1 \longrightarrow R_x(1) + a R_x(0) + b R_x(-1) = 0$$

$$0 + a + = 0$$

$$a = 0$$

$$p=2 \quad R_x(2) + a \cancel{R_x(1)} + b R_x(0) = 0$$

$$\tfrac{1}{4} + b = 0 \rightarrow b = -\tfrac{1}{4}$$

para obtener la autocorr entera iteramos por la fórmula de yule walker

$$R_x(p) + \sum_{i=1}^{2} a_i R_x(p-i) = \sigma^2 \delta(p)$$

$$R_x(0) = 1 \qquad R_x(1) = 0 \qquad R_x(2) = \tfrac{1}{4}$$

$$R_x(3) + \underbrace{0}_{a} R_x(3-1) \underbrace{-\tfrac{1}{4}}_{b} R_x(3-2) = \sigma^2 \underbrace{\delta(3)}_{0}$$

$$R_x(3) = \frac{1}{4} \cdot R_x(1) = 0$$

$$R_x(4) - \frac{1}{4} R(2) = 0 \longrightarrow R_x(4) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$$

$$R_x = \begin{cases} \left(\frac{1}{4}\right)^{\left|\frac{\tau}{2}\right|} & \text{si } \tau \text{ par} \\ 0 & \text{si } \tau \text{ impar} \end{cases}$$

$$\longrightarrow R_x(\tau) = \left(\frac{1}{4}\right)^{\left|\frac{\tau}{2}\right|} \cdot \delta\left(-1^{|\tau|} - 1\right)$$

$1 = -1^{|\tau|}$

$|\tau|$ par

R_x es Σ de $\delta(\tau - k)$ así que su trasformada son deltas.

Buscamos la H del sist $\longrightarrow y(n) - \frac{1}{4} y(n-2) = x(n) \longrightarrow \dfrac{Y(z)}{X(z)} = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{4} z^{-2}}$

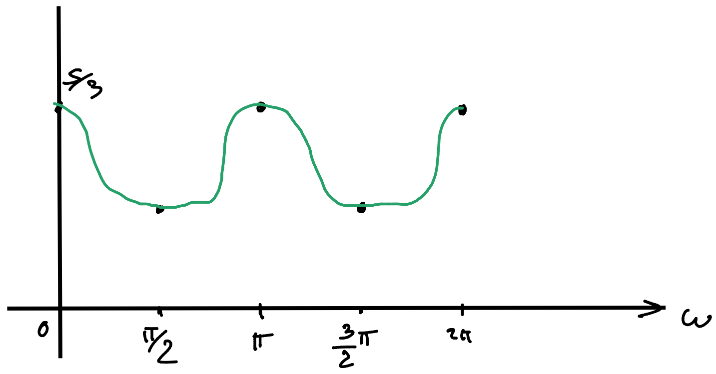
$$S_y = |H|^2 \cdot S_x = \left| \frac{1}{1 - \frac{1}{4} z^{-2}} \right|^2 \cdot \sigma^2 \longrightarrow z = e^{j\Omega} \rightarrow \frac{1}{\left|1 - \frac{1}{4} e^{-2j\omega}\right|^2} \cdot \frac{15}{16}$$

$\sigma^2 = \frac{15}{16}$

$S_y = \dfrac{-15}{8\cos(2\omega)-17}$ $\quad \omega \in (0, 2\pi)$ (discreto a periódico)

$\omega = 0 \quad 5/3$

$\omega = \pi/2 \quad 3/5$



12) 2 filtros

$y(n) = \frac{1}{2} x(n) + \frac{1}{2} x(n-1)$ $\quad$ ma - 2

$z(n) = y(n) - y(n-1)$ $\quad$ ma - 2

$y(n-1) = \frac{1}{2} x(n-1) + \frac{1}{2} x(n-2)$

$$z(n) = \overbrace{\frac{1}{2} x(n) + \cancel{\frac{1}{2} x(n-1)}}^{y(n)} \overbrace{\cancel{- \frac{1}{2} x(n-1)} - \frac{1}{2} x(n-2)}^{y(n-1)}$$

$$z(n) = \frac{1}{2} x(n) - \frac{1}{2} x(n-2)$$

$\delta(n)$ $\quad \delta(n-2)$

Si $z(n) = \frac{1}{2}\left(x(n) - x(n-2)\right) \longrightarrow Z(j\omega) = \frac{1}{2}\left(X(j\omega) - X(j\omega) e^{-2j\omega}\right)$

$$\frac{Z(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{1 e^{j0}}{2} - \frac{1}{2} e^{-2j\omega} = H(j\omega)$$

$$E[z] = \frac{1}{2}\left(\cancel{\mu_x} - \cancel{\mu_{x-2}}\right) = 0$$

$0 \quad 0$

$$S_z = |H(j\omega)|^2 S_x = \sigma^2 \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2j\omega} \right|^2$$

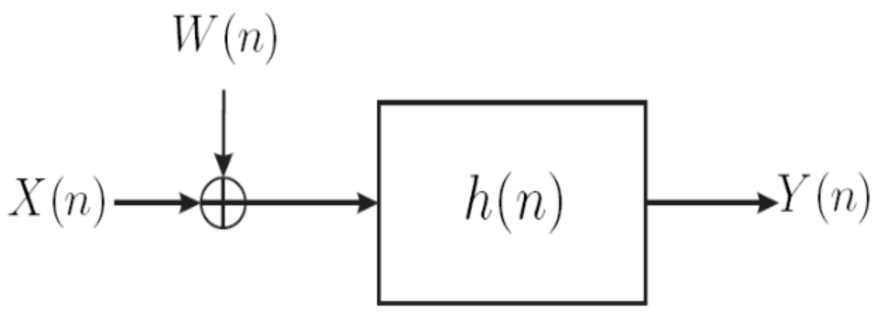
$$R_z = \mathcal{F}^{-1}\{S_z\} = \frac{\sigma^2}{2}\delta(\tau) - \frac{\sigma^2}{4}\delta(\tau \pm 2)$$

$$\boxed{S_z = \sigma^2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{e^{2j\omega} + e^{-2j\omega}}{4} \right)}$$

$R_z = C_z - \cancel{\mu^2}$ $\quad 0$ $\qquad C_z = R_z \qquad C_z(n,n) = R_z(0) = \dfrac{\sigma^2}{2}$

Ejercicio 4 - Escalamiento de señal ruidosa

Considere el sistema LTI mostrado en la figura, donde $X(n)$ y $W(n)$ son procesos ESA descorrelacionados entre sí. La varianza de $W(n)$ es σ_W^2 y la de $X(n)$ es σ_X^2.



1. Hallar la función de autocorrelación del proceso $Y(n)$.
2. Definiendo $E(n) = Y(n) - X(n)$, determine su función de autocorrelación.
3. Si $h(n) = \alpha\,\delta(n)$, elija el valor de α que minimice la varianza de $E(n)$.

indep $\rightarrow$ Descorrelacionado

1) $Y(n) = h(n) * (W(n) + X(n)) = h(n) * W(n) + X(n) * h(n)$

1ero: $R_{X+W} = E[(X(n) + W(n))(X(n+\tau) + W(n+\tau))] = E[X(n)X(n+k) + W(n)W(n+k) + \underbrace{X(n)W(n+k)}_{0} + \underbrace{W(n)X(n+k)}_{0}]$

1. $R_{X+W} = R_X + R_W$ $\quad$ Prop LTI $\rightarrow$ $R_Y = h * h_b * (R_X + R_W) = \boxed{h * h_b * R_X + h * h_b * R_W}$

2. $R_E = R_{Y-X} = E[(Y(n) - X(n))(Y(n+\tau) - X(n+\tau))] =$

$= E[Y(n)Y(n+\tau) + X(n)X(n+\tau) - X(n)Y(n+\tau) - Y(n)X(n+\tau)]$

$R_E = R_Y + R_X - E[X(n)Y(n+\tau)] - E[Y(n)X(n+\tau)]$

$Y = h*X + h*W \rightarrow - E[X(n).h*X(n+\tau) + \underbrace{X(n).h*W(n+\tau)}_{0}] - E[X(n)*h.X(n+\tau) + \underbrace{W(n)*h.X(n+\tau)}_{0}]$

$R_E = R_Y + R_X - h * 2R_X$

2. $E(n)E(n+\tau) = [Y(n) - X(n)][Y(n+\tau) - X(n+\tau)]^*$

$R_E = E[Y(n)Y^*(n+\tau) - Y(n)X^*(n+\tau) - X(n)Y^*(n+\tau) + X(n)X^*(n+\tau)]$

1 $\quad R_E = R_Y(\tau) + R_X(\tau) - \boxed{E[Y(n)X^*(n+\tau)]} - \boxed{E[X(n)Y^*(n+\tau)]}$

2

$Y(t) = h*X(t) + h*W(t) \rightarrow E[Y(n)X^*(t+\tau)] = h * E[X(t)X^*(t+\tau)] + h * \underbrace{E[W(t)X^*(t+\tau)]}_{0} = h * R_X$

$Y(t) = h*X(t) + h*W(t) \rightarrow E[Y(t)Y^*(t+\tau)] = h * E[X(t)Y^*(t+\tau)] + h * E[W(t)Y^*(t+\tau)]$

$Y(t+\tau) = h * X(t+\tau) + h * W(t+\tau)$

$R_X * h * h^* + R_W * h * h^* = h * E[X(t)Y^*(t+\tau)] + h * E[W(t)\cancel{h^* * X^*(t+\tau)} + W(t).h^* * W(t+\tau)]$

0

$\cancel{h} * E[X(t)Y^*(t+\tau)] = R_X * \cancel{h} * h^* + \cancel{R_W * h * h^*} - \cancel{h} * E[\cancel{h^* * W(t)} W(t+\tau)]$

$E[X(t)Y^*(t+\tau)] = R_X * h^*$

$$R_E = R_y(\tau) + R_x(\tau) \underbrace{- h * R_x - R_x * h^*}_{- R_x * (h+h^*)} = R_y(\tau) + R_x(\tau) - R_x * (h+h^*)$$

$h + h^* = \alpha\delta(n) + \alpha\delta(n)$

$= 2\alpha\delta(n)$

$R_E = \alpha^2 R_w + \alpha^2 R_x + R_x - 2\alpha R_x$

$$\boxed{R_E = \alpha^2 R_w + R_x(\alpha^2 - 2\alpha + 1)}$$

a priori de antes

$\longrightarrow R_y = \alpha^2 (R_x + R_w)$

3) $h = \delta(n)\alpha$

$y = \alpha x + \alpha w$

$E = y - x \longrightarrow \alpha x + \alpha w - x = E = \alpha w + x(\alpha - 1)$

$R_E = E\left[(\alpha w(n) + (\alpha-1)x(n))(\alpha w(n+k) + (\alpha-1)x(n+k)) \right]$

$= \alpha^2 R_w + (\alpha-1)^2 R_x + E\left[\alpha(\alpha-1)\, \cancel{w(n) x(n+k)}\right] + E\left[\alpha(\alpha-1)\, \cancel{x(n) w(n+k)}\right]$

$\alpha^2 R_w + (\alpha-1)^2 R_x = \boxed{\alpha^2 R_w + (\alpha^2 - 2\alpha + 1) R_x}$

$R_E = C_E + \mu_E^2 \quad ; \quad E[E] = E[y - x] = E[\alpha x + \alpha w - x] = \alpha(0+0) - 0 = 0$

$\therefore \; R_E(n,n) = R_E(k=0) = C_E(n,n) = \mathrm{Var}(E) = \alpha^2 R_w(0) + (\alpha^2 - 2\alpha + 1) R_x(0)$

$R_x(0) = \sigma_x^2 + \mu_x^2 = A \quad \wedge \quad R_w(0) = \sigma_w^2 + \mu_w^2 = B \longrightarrow \mathrm{Var}(E) = \alpha^2 B + (\alpha^2 - 2\alpha + 1) A$

$d/d\alpha \quad 2\alpha B + (2\alpha - 2) A = 0$

$d/d\alpha \quad 2B + 2A = 0 \quad > 0 \quad \text{min}$

$\alpha(2B + 2A) - 2\sigma_x^2 = 0$

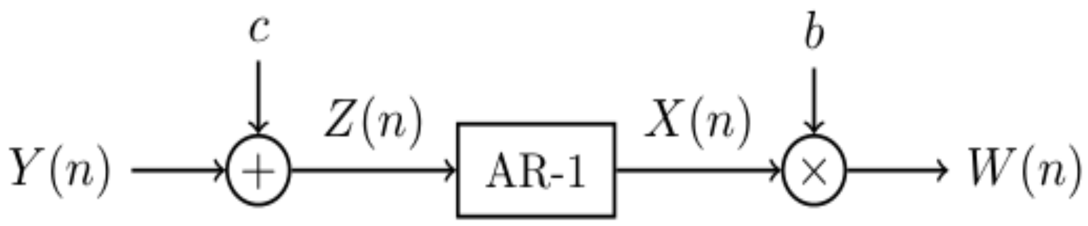
$$\alpha = \frac{2A}{2B + 2A} \rightarrow \text{min}$$

Ejercicio 13 - Sistema blanqueador

Se dispone de muestras de un proceso ESA gaussiano $Y(n)$ con media $\mu_Y = \frac{1}{2}$ y autocovarianza:

$$C_Y(k) = \delta(k) + \frac{1}{4}\left[\delta(k-1) + \delta(k+1)\right].$$

Se desea procesar a Y de modo de transformarlo en un proceso blanco $W(n)$ de media nula y varianza $\sigma_W^2 = 1$. Para ellos se implementa el siguiente sistema:



La constante c se elige de modo que el proceso $Z(n)$ tenga media nula. El proceso AR-1 es de la forma:

$$X(n) = aX(n-1) + Z(n),$$

es utilizado para eliminar la correlación entre las muestras (a es una constante a determinar tal que $|a| < 1$). Por último, la constante b es utilizada para ajustar la varianza de $X(n)$ al valor deseado.

1. Determine la constante c de modo que el proceso $Z(n)$ tenga media nula, y halle la autocorrelación de Z.
2. Determine a y b de modo que W cumpla las especificaciones pedidas.
3. ¿Qué puede concluir de la relación entre los procesos MA-1 y un proceso AR-1? ¿Y en el caso del MA-m y el AR-m?

1. Bueno: $\mu_Z = H(j0) \cdot \mu_{entrada}$

Entonces si $\mu_{entrada} = 0 = \mu_Z$.

$E[Z] = E[Y - 1/2] = 0$

$E[Y(n) + c] = 0 = \frac{1}{2} + c = 0 \to \boxed{c = -1/2}$

Conviene por dom transformada $\nearrow (\mu_Y - 1/2)^2 = 0$

Buscamos $R_X(\tau) = \delta(\tau)\sigma^2 \wedge R_Z = C_Y = \delta(k) + \frac{1}{4}\delta(k \pm 1)$

sist) $x(n) - a\,x(n-1) = z(n) \xrightarrow{\mathcal{Z}} X(z)(1 - a z^{-1}) = Z(z)$

$H(z) = \frac{\text{salida}}{\text{entrada}} = \frac{1}{1 - a z^{-1}}$

Planteamos que $S_X(j\omega) = |H(j\omega)|^2 S_Z(j\omega)$

$\sigma^2 = \left|\frac{1}{1 - a z^{-1}}\right|^2 \mathcal{Z}\{\delta(k) + \frac{1}{4}\delta(k \pm 1)\} \to \sigma^2 = \frac{1}{|1 - a z^{-1}|^2}\left(1 + \frac{1}{4} z + \frac{1}{4} z^{-1}\right)$

si $z = e^{j\omega} \to \sigma^2 = \frac{1}{|1 - a e^{-j\omega}|^2}\left(1 + \frac{1}{4} e^{j\omega} + \frac{1}{4} e^{-j\omega}\right) = \frac{1 + \frac{1}{2}\cos(j\omega)}{-2a\cos(j\omega) + a^2 + 1}$

si la función es cte $\frac{\partial}{\partial x} = 0 \longrightarrow \frac{-(a^2+4a+1)\,\text{sen}(j\omega)}{2(2\,a\cos(j\omega)-a^2-1)^2} = 0$

$$a = \sqrt{3} - 2 \qquad (< 1)$$

Veamos $\longrightarrow \left. \frac{1 + \frac{1}{2}\cos(j\omega)}{-2\,a\cos(j\omega)+a^2+1} \right|_{a=\sqrt{3}-2} = \frac{\sqrt{3}+2}{4} = \sigma^2 = S_x$

Entonces el filtro queda

$$x(n) - (\sqrt{3}-2)\,x(n-1) = z(n)$$

$$R_z = C_y \quad \wedge \quad R_x = \delta(k)\left(\frac{\sqrt{3}+2}{4}\right)$$

Sabemos que $W = b \cdot X$

consigna

puedo decir $h = b\,\delta(k) \quad \therefore \quad R_w = b^2\delta(k) * R_x$

$$R_w = b^2 R_x = b^2\left(\frac{\sqrt{3}+2}{4}\right) = 1$$

$$b = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}+2}{4}\right)^{-1}} = \sqrt{6} - \sqrt{2}$$

$$\frac{w(n)}{b} - \frac{a}{b}\,w(n-1) = z(n)$$

$$W(j\omega)\left(\frac{1}{b} - \frac{a}{b}e^{-j\omega}\right) = Z(j\omega)$$

$$\frac{W(j\omega)}{Z(j\omega)} = H(j\omega) = \left. \frac{1}{\frac{1}{b} - \frac{a}{b}e^{-j\omega}} \right|_{\substack{b=\sqrt{6}-\sqrt{2} \\ a=\sqrt{3}-\sqrt{2}}} \quad \wedge \quad |H(j\omega)|^2 = \frac{2}{\cos(j\omega)+2}$$

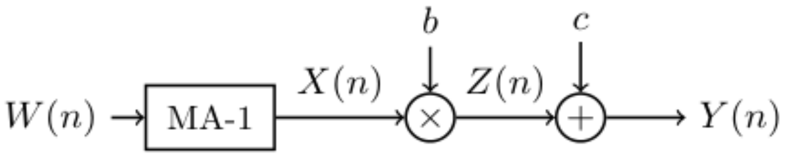
$$S_w(j\omega) = \frac{2}{\cos(j\omega)+2} \cdot S_z(j\omega) = \frac{2}{\cos(j\omega)+2} \cdot \left(1 + \tfrac{1}{4}e^{j\omega} + \tfrac{1}{4}e^{-j\omega}\right) = 1 = S_w \;\therefore\; R_y = \sigma_w^2 = 1$$

Ejercicio 14 - Generación de muestras de un proceso

Se desea generar muestras de un proceso ESA $Y(n)$ con media $\mu_Y = \frac{1}{2}$ y autocovarianza:

$$C_Y(k) = \delta(k) + \frac{1}{4}\left[\delta(k-1) + \delta(k+1)\right].$$

Para ello se tienen muestras de un proceso de ruido blanco $W(n)$ de media nula y varianza unitaria. Para generar las muestras de Y se utiliza el siguiente sistema:



El proceso MA-1 es de la forma:

$$X(n) = aW(n-1) + W(n).$$

Las constantes a, b y c deben determinarse de modo que el proceso Y cumpla lo pedido.

1. Utilice lo aprendido en el ejercicio 9 para justificar que la estructura propuesta tiene sentido.
2. Halle $\mathbb{E}[Z(n)]$ y verifique que no depende de a ni de b. Elija c de modo que $\mathbb{E}[Y(n)] = \mu_Y = \frac{1}{2}$.
3. Determine las constantes a y b de modo que la covarianza de Z sea igual a la de Y, es decir: $C_Z(k) = C_Y(k)$ para todo k. Elija a de modo que $|a| < 1$.

2. $E[Y] = E[Z+c] = E[Z]+c = b\,E[X(n)]+c = b\,E[aW(n-1)+W(n)] + c$

como $E[W(n)]=0$ $\underline{\wedge \text{ ESA}}$ $\longrightarrow$ $bE[aW(n-1)+W(n)]+c = (ab+1)\cancel{E[W(n)]}+c = \boxed{1/2 = c = E[Y]}$

0

3. $Y = \frac{1}{2} + Z$

$S_W = 1$

$S_X = |H(j\omega)|^2 S_W$

$x(n) = W(n) + aW(n-1)$

$\frac{X(j\omega)}{W(j\omega)} = 1 + a e^{-j\omega}$

$S_X = |1 + a e^{-j\omega}|^2 = 2a\cos(\omega) + a^2 + 1$

$= a e^{j\omega} + a e^{-j\omega} + a^2 + 1$

tengo que obtener una R_X que sea como la R_Y con un factor de escalamiento de diferencia.

Condiciones de adelante para atrás

$R_Z = E\left[(Y(t)-\frac{1}{2})(Y(t+\tau)-\frac{1}{2})\right] = C_Y = \underbrace{\delta(k) + \frac{1}{4}\delta(k\pm 1)}_{R_Z} \xrightarrow{\mathcal{F}} 1 + \frac{\cos(\omega)}{2}$ S_Z

$S_Z = |b|^2 S_X$

pensando el multiplicador:

$x \rightarrow \boxed{b\cdot\delta(n)} \rightarrow z$

$=$

$x \rightarrow \otimes \rightarrow z$, $\uparrow b$

$S_X = \left(1 + \frac{\cos(\omega)}{2}\right)\frac{1}{|b|^2}$

$$a e^{jw} + a e^{-jw} + a^2+1 = \left(1+\frac{\cos(w)}{2}\right)\frac{1}{|b|^2}$$

$$2a\cos(\omega) + a^2+1 = \frac{1}{|b|^2} + \frac{1}{2|b|^2}\cos(\omega)$$

$$\begin{cases} 2a = \frac{1}{2|b|^2} \\ a^2+1 = \frac{1}{|b|^2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix} a = 2-\sqrt{3} \\ b = \frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}}{4} \end{matrix}$$

Probemos: $S_x = \left|1 + a e^{-j\omega}\right|^2 = -2(\sqrt{3}-2)(\cos(\omega)+2)$

$S_z = b^2 S_x = \frac{\cos(\omega)+1}{2} \longrightarrow \underline{R_z = \frac{1}{4}\delta(\tau\pm1) + \delta(\tau)}$

(El multiplicador)

Como $E[z] = 0$ $\boxed{R_z = C_z = C_y}$ ✓

ahora $z+1/2 \longrightarrow \underline{E[z+1/2] = E[u] = 1/2}$

Yule - Walker

$$R_y(n) + \sum_{i=1}^{m} a_i R_y(n-i) = \sigma_n^2 \delta_{n,0} \quad n \geq 0$$

$$R_y(n) = R_y(-n) \quad n < 0$$

Se propone una solucion de p^k, p construir

$$p^{n-m}\left(p^m + \sum_{i=1}^{m} a_i p^{m-i}\right) = 0 \quad n \geq 0$$

equivalente $p^m + \sum_{i=1}^{m} a_i p^{m-i} = 0$ polinomio de m raices.

Cada raiz p_i da lugar a una solución $S_i(n)$

$$R_y(n) = \sum_i A_i S_i(n)$$

A_i se determinan a partir de condiciones iniciales.

- Raices distintas (reales y complejas)

$$R_y(n) = \sum_{i=1}^{m} A_i p_i^n \quad n \geq 0 \rightarrow R_y(n) = \sum_{i=1}^{m} A_i p_i^{|n|}, \ n \in \mathbb{Z}$$

- Raices Repetidas

Si p_1 tiene multiplicidad q_1 la solución asociada a p_1

$$p_1^n \left(A_1 + A_2 n + A_3 n^2 + \dots + A_{q_1 - 1} p_1^{q_1 - 1}\right).$$

Si hay raices $p_1, \dots, p_\ell$ con multiplicidades $q_1, \dots, q_\ell$

$$R_y(n) = \sum_{i=1}^{\ell} p_i^{|n|} \sum_{j=0}^{q_i - 1} A_{i,j} |n|^j \quad n \in \mathbb{Z}$$

Para el caso de Raíces distintas.

$$R_Y(n) = \sum_{j=1}^{m} A_j \, p_j^{|n|} \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Reemplazando en la ecuación en diferencias.

$$\sum_{j=1}^{m} A_j \, p_j^{|n|} + \sum_{i=1}^{m} a_i \sum_{j=1}^{m} A_j \, p_j^{|n-i|} = \sigma_X^2 \, \delta_{n,0}$$

Defino $a_0 = 1 \rightarrow \sum_{j=1}^{m} A_j \sum_{i=0}^{m} a_i \, p_j^{|n-i|} = \sigma_X^2 \, \delta_{n,0}$

Considerando las ecuaciones $n = 0, \dots, m-1$

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{m} a_i \, p_1^{|i|} & \cdots & \cdots & \sum_{i=0}^{m} a_i \, p_m^{|i|} \\ \vdots & & & \\ \sum_{i=0}^{m} a_i \, p_1^{|m-1-i|} & \cdots & \cdots & \sum_{i=0}^{m} a_i \, p_m^{|m-1-i|} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_X^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 1

Se desea un vector aletorio $\mathbf{X} = [X_1, X_2, X_3]^t$ cuyas componentes son independientes entre sí y están distribuidas de acuerdo a

$$X_1 \sim U[0,1] \quad X_2 \sim U[1,2] \quad X_3 \sim U[2,3]$$

1. Hallar la función de densidad conjunta $f_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3)$
2. Obtenga $\mathbb{E}[\mathbf{X}]$.
3. Sea la variable aleatoria $Y = \mathbf{a}^t\mathbf{X}$ donde $\mathbf{a} = [1, 1, 0]^t$. Obtenga la función de densidad de Y.
4. Finalmente, se construye $\mathbf{V} = [V_1, V_2, V_3]^t$ donde

$$V_1 = X_1 \quad V_2 = X_1 + X_2 \quad V_3 = X_2 + X_3.$$

Obtenga la matriz de covarianza de $\mathbf{V}$, C_V.

Ejercicio 15 - Realizaciones de procesos AR-1

Se simula numéricamente un proceso autoregresivo de primer orden

$$X(n) = \alpha X(n-1) + W(n)$$

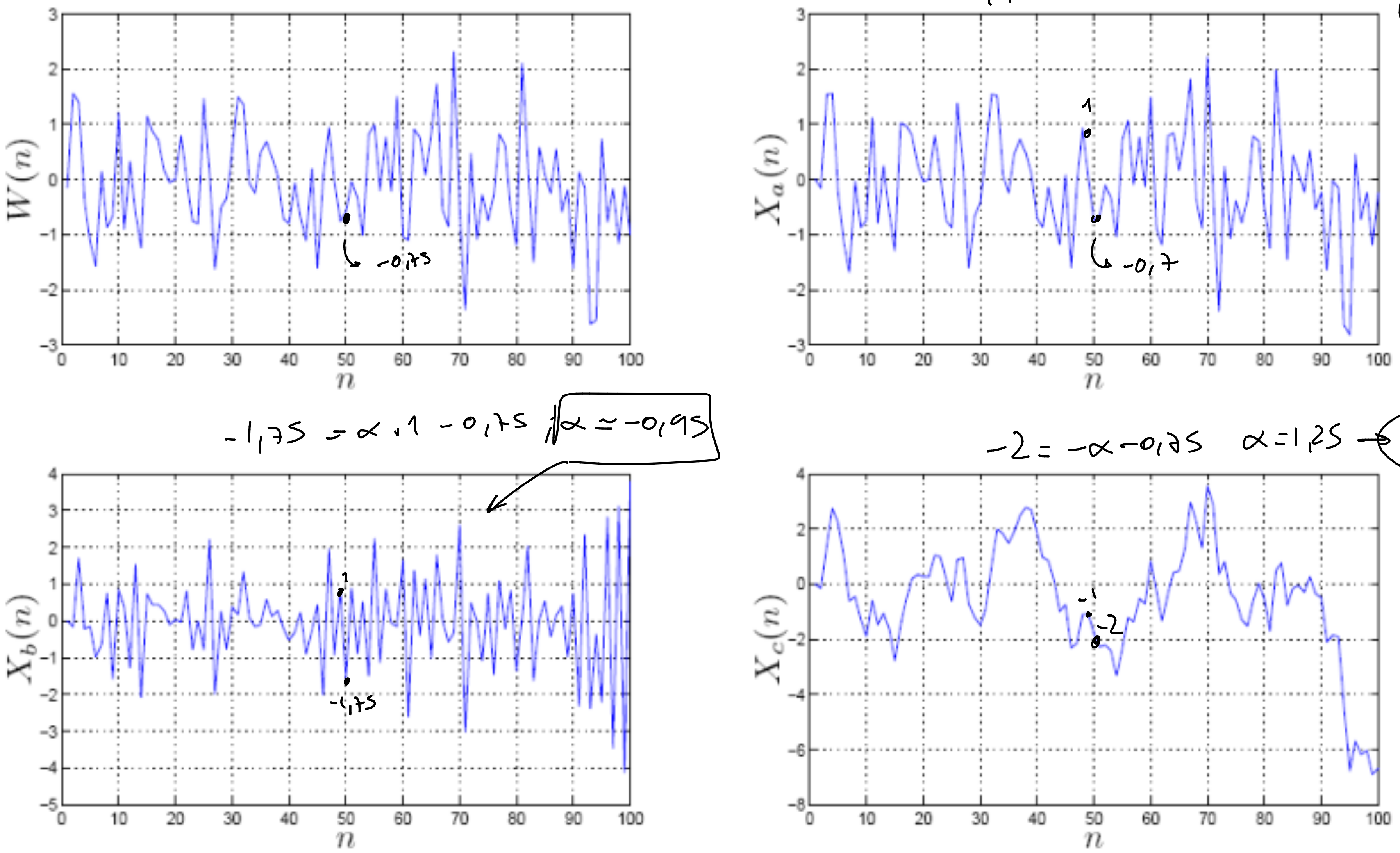
excitado por un ruido blanco de media nula y varianza unitaria. Se realizan tres simulaciones diferentes mostradas en la figura utilizando los siguientes valores del parámetro α:

$$\alpha_1 = 0{,}95 \quad \alpha_2 = 0{,}1 \quad \alpha_3 = -0{,}95$$

$-0{,}7 = \alpha \cdot 1 - 0{,}75 \quad \alpha \simeq 0 \to 0{,}1$

$-1{,}75 = \alpha \cdot 1 - 0{,}75 \quad \boxed{\alpha \simeq -0{,}95}$

$-2 = -\alpha - 0{,}75 \quad \alpha = 1{,}25 \to 0{,}95$



1. Asigne el coeficiente α que corresponde a cada uno de los gráficos de la figura.
2. Grafique la autocorrelación del proceso $X(k)$ en cada caso. $\to$ ¿?

Y_W

$R_x(k) + 0{,}1\, R_x(k-1) = \sigma^2 \delta(k)$

$k=0$: $R_x(0) + 0{,}1\, R_x(-1) = 1$

$k=1$: $R_x(1) + 0{,}1\, R_x(0) = 0$

$R_x(0) = 100/99 \quad R_x(\pm 1) = -10/99$

$R_x(2) = 1/99$

$k>1$: $R_x(k) = -0{,}1\, R_x(k-1)$

$R_x = \frac{100}{99} \cdot (-0{,}1)^{|k|}, \; k \in \mathbb{Z}$ (enteros)

$R_x(k) + 0{,}95\, R_x(k-1) = \sigma^2 \delta(k)$

$R_x(0) = 1 - 0{,}95\, R_x(1)$

$R_x(1) = 0 - 0{,}95\, R_x(0)$

$R_x(0) = 400/39$

$R_x(1) = -\frac{380}{39}$

$R_x(k) = \frac{400}{39}(-0{,}95)^{|k|}; \; k \in \mathbb{Z}$

$R_x(k) - 0{,}95\, R_x(k-1) = \sigma^2 \delta(k)$

$R_x(0) = 100/99$

$R_x(1) = 10/99$

$R_x(2) = 0{,}95 \cdot R_x(1) = 19/198$

$R_x(k) = \frac{100}{99}(0{,}95)^{|k|}; \; k \in \mathbb{Z}$

Ejercicio 16 - Procesos AR-2

El modelo del proceso AR2, $X(n)$ es:

$$X(n) = a_1 X(n-1) + a_2 X(n-2) + W(n)$$

donde $W(n)$ es una secuencia de ruido blanco y a_1 y a_2 son coeficientes reales.

1. Expresar la función de transferencia $H(z)$ del sistema lineal que, excitado por la secuencia de ruido blanco, entrega como salida el proceso AR2.

2. Obtener y resolver la ecuación en diferencias que debe satisfacer la secuencia de autocorrelación.

3. Verifique analíticamente las siguientes propiedades:

   a) En el caso de polos reales y distintos, la secuencia de autocorrelación decae exponencialmente. Analizar el caso en que ambos polos son positivos, ambos negativos y uno positivo y otro negativo.

   b) En el caso de polos complejos conjugados, la secuencia de autocorrelación es pseudoperiódica.

1. $X(j\omega) - a_1 X(j\omega) e^{-j\omega} - a_2 X(j\omega) e^{-2j\omega} = W(j\omega)$

$$\frac{X(j\omega)}{W(j\omega)} = H(j\omega) = \frac{1}{1 - a_1 e^{-j\omega} - a_2 e^{-2j\omega}} \rightarrow S_x = \left|\frac{1}{1 - a_1 e^{-j\omega} - a_2 e^{-2j\omega}}\right|^2 \sigma^2$$

2. $x(n) - a_1 x(n-1) - a_2 x(n-2) = w(n)$

$$E\left[\left(x(n) - a_1 x(n-1) - a_2 x(n-2)\right)\left(x(n+k) - a_1 x(n+k-1) - a_2 x(n+k-2)\right)\right] = R_w$$

$$R_x + a_1^2 R_x + a_2^2 R_x - a_1 R(k-1) - a_2 R(k-2) - a_1 R(k+1) + a_1 a_2 R_x(k-1) - a_2 R_x(k+2) + a_1 a_2 R_x(k+1)$$

$$R_x(1 + a_1^2 + a_2^2) + R_x(k-1)(a_1 a_2 - a_1) + R_x(k+1)(a_1 a_2 - a_1) - a_2 R(k+2) - a_2 R(k-2) = \sigma^2 \delta(k)$$

$$X(1 + a_1^2 + a_2^2) + X z^{-1}(a_1 a_2 - a_1) + X z (a_1 a_2 - a_1) - a_2 X z^{-2} - a_2 X z^2 = \sigma^2$$

$$X = \frac{\sigma^2}{(1 + a_1^2 + a_2^2) + (a_1 a_2 - a_1)(z^{-1} + z) - a_2(z^2 + z^{-2})}$$

la antitransformada de eso es la solución

$$S_x = \left|\frac{1}{1 - a_1 e^{-j\omega} - a_2 e^{-2j\omega}}\right|^2 \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{2a_2(a_1 \cos(\omega) - 1)\cos(2\omega) + 2 a_1 a_2 \sin(\omega)\sin(2\omega) - 2a\cos(\omega) + a_1^2 + a_2^2 + 1}$$

y–w: $R_x(k) - a_1 R_x(k-1) - a_2 R_x(k-2) = \sigma^2 \delta(k)$

$$R_x(1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}) = \sigma^2$$

$$R_x = \frac{\sigma^2}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}} \longrightarrow \frac{z^2 \sigma^2}{z^2 - a_1 z - a_2}$$

polos $= \dfrac{\mp\sqrt{a^2 + 4b} \pm a}{2}$

$\frac{z^2\sigma^2}{z^2 - a_1 z - a_2}$ polos = $\frac{\mp\sqrt{a^2+4b} \pm a}{2}$

Aprox

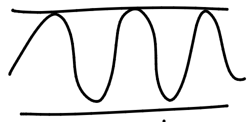
$$\frac{\cancel{z^2}\,\sigma^2}{(\cancel{z}-p_1)(\cancel{z}-p_2)} = \frac{A}{1-p_1 z^{-1}} + \frac{B}{1-p_2 z^{-1}}$$

si son polos reales escribe

$\xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}}$ $p_1^n u(n) + p_2^n u(n)$, Σ exp decrecientes.

si los polos son CC $\rightarrow$ $\frac{\sigma^2}{z^2+p}$ $\rightarrow$ sen$(w_0 t)\,u(t)$ senoidal

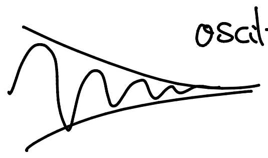
↳ si están en círculo unitario



cte cíclica

si |polos| < 1 ↳ sen$(w_0 t)\,e^{-\alpha t}\,u(t)$

oscila



Autocorrelación del AR-m

Para el caso general, procedemos como para el AR-1, partiendo de la ecuación en diferencias:

$$Y(k) + \sum_{i=1}^{m} a_i Y(k-i) = X(k),$$

$$\mathbb{E}[Y(k)Y(k-n)] + \sum_{i=1}^{m} a_i \mathbb{E}[Y(k-i)Y(k-n)] = \mathbb{E}[X(k)Y(k-n)].$$

$$R_Y(n) + \sum_{i=1}^{m} a_i R_Y(n-i) = \mathbb{E}[X(k)Y(k-n)].$$

Analizando como antes el término $\mathbb{E}[X(k)Y(k-n)]$, obtenemos las ecuaciones de Yule-Walker.

Ejercicio 18 - Modelos AR-m

Suponga que se estima la función de autocorrelación de un proceso ESA $X(n)$ alrededor de $k = 0$ y se obtienen los siguientes valores:

$$R_X(0) = 2, \qquad R_X(1) = 0{,}8 \qquad R_X(2) = 0{,}82 \qquad R_X(3) = 0{,}728 \qquad R_X(4) = 0{,}6562$$

Determine modelos AR de orden 1, 2, 3 y 4 para el proceso $X(n)$ considerando las condiciones anteriores. ¿Qué conclusiones puede extraer?

$$R_X(k) + \sum_{i=1}^{n} a_i R_X(k-i) = \sigma^2 \delta(k)$$

orden 1) $R_X(k) + a_1 R_X(k-1) = \sigma^2 \delta(k)$

$k=0 \quad 2 + a_1 0{,}8 = 1 \longrightarrow a_1 = -5/4$

orden 2) $R_X(k) + a_1 R_X(k-1) = \sigma^2 \delta(k)$

$k=0 \quad 2 + a_1 0{,}8 + 0{,}82\, a_2 = 1 \qquad a_1 = 1/6$

$k=1 \quad 0{,}8 + a_1\, 2 + 0{,}8\, a_2 = 0 \qquad a_2 = -170/123$

3) 3 EC

Ejercicio 3. *Sean $X(n)$ e $Y(n)$ dos procesos en tiempo discreto independientes entre si. Se forma el procesos multiplicador $z(n) = X(n)Y(n)$. Se sabe que*

- $E[X(n)] = \alpha n$, $\alpha \neq 0$ *una constante;* $\mathbb{E}[Y(n)] = 0$;
- $R_X(n_1, n_2) = f(n_1 - n_2)$, *y* $f(\cdot)$ *es una función determinística;* $R_y(n_1, n_2) = \delta(n_1 - n_2)$.

Indique si este nuevo proceso es ESA y obtenga la autocorrelación de $Z(n)$.

$E[Z] = 0 \cdot \alpha n = 0$ ES 1° orden

$R_Z = E[(X(n)\,Y(n))(X(n+k)\,Y(n+k))]$

$R_X(n, n+k) + R_Y(n, n+k) + E[X(n)\ldots]$ Cruzada $\rightarrow$ indep $\rightarrow$ decorr $\therefore 0$

$R_Z = f(n_1 - n_2) + \delta(n_1 - n_2)$ $\longrightarrow$ ES 2do orden

$\therefore$ Nuevo proceso Z es ESA

Estimador Lineal de Menor Error Cuadrático Medio (LMMSE)

$$\hat{\mathbf{X}}_{lmmse} = \mu_{\mathbf{X}} + \mathbf{C}_{\mathbf{XY}}\mathbf{C}_{\mathbf{Y}}^{-1}\left(\mathbf{Y} - \mu_{\mathbf{Y}}\right). \tag{2}$$

Cuando **X** e **Y** son dos vectores conjuntamente gaussianos,

$$\hat{\mathbf{X}}_{lmmse} = \hat{\mathbf{X}}_{mmse}$$

$\hat{\mathbf{X}}_{lmmse}$ es un estimador *insesgado*. Se lo conoce también como el estimador BLU (Best Linear Unbiased).

$$\mathbb{E}[\hat{\mathbf{X}}_{lmmse}] = \mathbb{E}[\mu_{\mathbf{X}} + \mathbf{C}_{\mathbf{XY}}\mathbf{C}_{\mathbf{Y}}^{-1}\left(\mathbf{Y} - \mu_{\mathbf{Y}}\right)] = \mu_{\mathbf{X}}$$

El error de estimación es:

$$\mathbf{E}_{lmmse} = \mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}_{lmmse} = \underbrace{(\mathbf{X} - \mu_{\mathbf{X}})}_{\delta_{\mathbf{X}}} - \mathbf{C}_{\mathbf{XY}}\mathbf{C}_{\mathbf{Y}}^{-1}\underbrace{(\mathbf{Y} - \mu_{\mathbf{Y}})}_{\delta_{\mathbf{Y}}}.$$

Su covarianza,

$$\begin{aligned}
\mathbf{Cov}[\mathbf{E}_{lmmse}] &= \mathbf{Cov}[\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}_{lmmse}] = \mathbb{E}[\mathbf{E}_{lmmse}\mathbf{E}_{lmmse}^{*}] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\delta_{\mathbf{X}} - \mathbf{C}_{\mathbf{XY}}\mathbf{C}_{\mathbf{Y}}^{-\mathbf{1}}\delta_{\mathbf{Y}}\right)\left(\delta_{\mathbf{X}} - \mathbf{C}_{\mathbf{XY}}\mathbf{C}_{\mathbf{Y}}^{-\mathbf{1}}\delta_{\mathbf{Y}}\right)^{*}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\delta_{\mathbf{X}}\delta_{\mathbf{X}}^{*}\right] - \mathbb{E}\left[\delta_{\mathbf{X}}\delta_{\mathbf{Y}}^{*}\right]\mathbf{C}_{\mathbf{Y}}^{-1}\mathbf{C}_{\mathbf{XY}}^{*} - \mathbf{C}_{\mathbf{XY}}\mathbf{C}_{\mathbf{Y}}^{-1}\mathbb{E}\left[\delta_{\mathbf{Y}}\delta_{\mathbf{X}}^{*}\right] \\
&\qquad + \mathbf{C}_{\mathbf{XY}}\mathbf{C}_{\mathbf{Y}}^{-1}\mathbb{E}\left[\delta_{\mathbf{Y}}\delta_{\mathbf{Y}}^{*}\right]\mathbf{C}_{\mathbf{Y}}^{-1}\mathbf{C}_{\mathbf{XY}}^{*} \\
&= \mathbf{C}_{\mathbf{X}} - \mathbf{C}_{\mathbf{XY}}\mathbf{C}_{\mathbf{Y}}^{-1}\mathbf{C}_{\mathbf{YX}}
\end{aligned}$$

Finalmente, el error cuadrático medio es

$$\begin{aligned}
MMSE &= \mathbb{E}\left[\|\mathbf{E}_{lmmse}\|^{2}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbf{E}_{lmmse}^{*}\mathbf{E}_{lmmse}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathrm{tr}(\mathbf{E}_{lmmse}^{*}\mathbf{E}_{lmmse})\right] = \mathbb{E}\left[\mathrm{tr}(\mathbf{E}_{lmmse}\mathbf{E}_{lmmse}^{*})\right] \\
&= \mathrm{tr}\left\{\mathbb{E}\left[\mathbf{E}_{lmmse}\mathbf{E}_{lmmse}^{*}\right]\right\} \\
&= \mathrm{tr}\left\{\mathbf{Cov}[\mathbf{E}_{lmmse}]\right\}
\end{aligned}$$

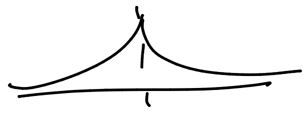
$$\hat{\mathbf{X}}_{lmmse} = \mu_{\mathbf{X}} + \mathbf{C}_{\mathbf{XY}}\mathbf{C}_{\mathbf{Y}}^{-1}\left(\mathbf{Y} - \mu_{\mathbf{Y}}\right).$$

$$\mathbb{E}[\hat{\mathbf{X}}_{lmmse}] = \mu_{\mathbf{X}}.$$

$$\mathbf{Cov}[\mathbf{E}_{lmmse}] = \mathbf{C}_{\mathbf{X}} - \mathbf{C}_{\mathbf{XY}}\mathbf{C}_{\mathbf{Y}}^{-1}\mathbf{C}_{\mathbf{YX}}.$$

$E[X(n)] - E[\hat{X}(n)]$

$$MMSE = \mathrm{tr}\left\{\mathbf{C}_{\mathbf{X}} - \mathbf{C}_{\mathbf{XY}}\mathbf{C}_{\mathbf{Y}}^{-1}\mathbf{C}_{\mathbf{YX}}\right\}.$$



Ejercicio 1

Considere un proceso ESA en tiempo continuo $Y(t)$ de media nula y autocorrelación $R_Y(\tau) = e^{-|\tau|}$.

1. Halle el mejor estimador lineal en el sentido MSE de $X = \int_0^1 Y(t)dt$ utilizando las muestras $Y(0), Y(1)$ de Y.
2. Halle la varianza del error de estimación.

1. Voy a llevar $X = \underbrace{\int_0^1 Y(t)dt}_{\text{algo aleatorio}}$ al dominio transformado por comodidad, veamos si funciona

$$X_\Delta = \underbrace{\frac{1}{\Delta} Y(\Delta)}_{\int_0^t Y(t)dt}$$

$MSE(\hat{X}) = E[\|X - \hat{X}\|^2]$; $\hat{X}_{mmse} = E[X|Y]$

El estimador

$$R_Y(\tau) = e^{-\tau} u(\tau) + e^{\tau} u(-\tau)$$

No es ruido blanco, obviamente

$\mu_Y = 0 \quad \therefore \quad C_Y = R_Y \quad (\text{con } \tau = t_2 - t_1)$

Busco el estimador lineal: $\hat{X} = g(Y) = AY + b$; minimizado por principio de ortogonalidad

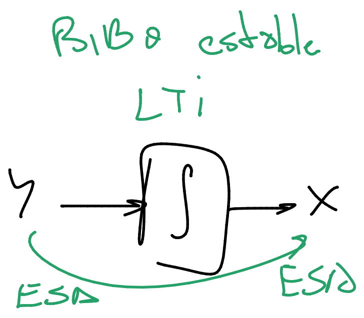
$E[X^* Y] = 0 \to X \perp Y$; queremos $\hat{X}$ ortogonal al error $X - \hat{X}_{mmse}$

$$\longrightarrow \quad E[\hat{X}^*(X - \hat{X})] = 0 = E[(AY + B)^*(X - AY - B)] = 0$$

Se llega a que $A|_{mmse} = [R_{XY} - \mu_X \mu_Y^*][R_Y - \mu_Y \mu_Y^*]^{-1} = C_{XY} C_Y^{-1}$

$b|_{mmse} = \mu_X - [R_{XY} - \mu_X \mu_Y^*][R_Y - \mu_Y \mu_Y^*]^{-1} \mu_Y = \mu_X - C_{XY} C_Y^{-1} \mu_Y$

$b = 0$



$\to \mu_X = \mu_Y \cdot H(0) = 0$

media nula

$A = C_{XY} C_Y^{-1}$

$Y(0)$ e $Y(1)$

Lo conocemos

Vector de corr. cruzado

$$C_{XY} = E[X Y^t] = R_{XY} = E\left[X \cdot \begin{bmatrix} Y(0) \\ Y(1) \end{bmatrix}\right] = [X Y(0) \quad X Y(1)] = E\left[Y(0)\int_0^1 Y(t)dt \quad Y(1)\int_0^1 Y(t)\right]$$

Esperanza lineal

$$= \left[\int_0^1 E[Y(0)Y(t)]dt \quad \int_0^1 E[Y(1)Y(t)]dt\right] = \left[\int_0^1 R(t)dt \quad \int_0^1 R(t-1)dt\right] = \left[\int_0^1 e^{-|t|}dt \quad \int_0^1 e^{-|t-1|}dt\right]$$

autocorr

$$\left[\int_0^1 e^{-|t|}\,dt \quad \int_0^1 e^{-|t-1|}\,dt\right] = \left[1-e^{-1} \quad \frac{(e-1)}{e}\right]$$

$$C_y^{-1} = E\left[(y-\mu_y)(y-\mu_y)^t\right]^{-1} = \begin{vmatrix} E[y(0)y(0)] & E[y(0)y(1)] \\ E(y(1)y(0)) & E[y(1)y(1)] \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} R_y(0) & R_y(1) \\ R_y(-1) & R_y(0) \end{vmatrix}^{-1}$$

$$y = \begin{vmatrix} y(0) \\ y(1) \end{vmatrix}$$

$C_y = R_y$

$\mu_y = 0$

$$= \begin{vmatrix} 1 & e^{-1} \\ e^{-1} & 1 \end{vmatrix}^{-1} =$$

$$A = C_{xy} C_y^{-1} = \left[1-e^{-1} \quad \frac{(e-1)}{e}\right] \begin{vmatrix} \frac{1}{e^2-1}+1 & \frac{-1}{2\,\mathrm{senh}(1)} \\ \frac{-1}{2\,\mathrm{senh}(1)} & \frac{e^2}{e^2-1} \end{vmatrix} = \left[0{,}462117 \quad 0{,}462117\right]$$

$$\hat{x} = 0{,}462117\left[y(0)+y(1)\right]$$

2.

Error de estimación es $\varepsilon = x(n) - \hat{x}(n)$

$$\mathrm{Var}(\varepsilon) = E\left[(\varepsilon-\varepsilon_0)^2\right] = E\left[\left(x(n) - \hat{x}(n) - \mu_x + \mu_{\hat{x}}\right)^2\right] = E\left[\left(x(n) - \hat{x}(n)\right)^2\right]$$

Lmmse es insesgado, lo $\mu_{\hat{x}} = \mu_x$; $\varepsilon_0 = 0$

$$E\left[x(n)^2 - 2x(n)\hat{x}(n) + \hat{x}^2(n)\right] = \mathrm{Var}(x) - 2E\left[x\,\hat{x}(n)\right] + E\left[\hat{x}^2\right]$$

$$\mathrm{Var}(\varepsilon) = \sigma_x^2 - 2\cdot 0{,}462117\,\underbrace{E\left[x\,y(0) + x\,y(1)\right]}_{\int_0^1 R_y(t)dt + \int_0^1 R_y(t+1)dt} + 0{,}462117^2\,E\left[(y(0)+y(1))^2\right]$$

$$\mathrm{Var}(\varepsilon) = \sigma_x^2 - 1{,}16845 + 0{,}462117^2\left(2R(0) + 2R(1)\right)$$

$$\boxed{\mathrm{Var}(\varepsilon) = \sigma_x^2 - 0{,}584223}$$

Ejercicio 2

Considere la medicion ruidosa $Y = (1+V)X$ donde X y V son variables independientes y de media nula. Suponga que sólo conoce la varianza del ruido σ^2. Halle el mejor estimador lineal en sentido MSE de X dada Y. Demuestre que la varianza del error es menor a la varianza de X.

$y = (1+V)\,x$; V ruido σ^2

$\mu_y = E\left[(1+V)x\right]$ indep ∴ descorr

$= \mu_x + \underbrace{E[V.x]}_{0}$

$= \mu_x = 0$ media nula

$\hat{x}_{lmmse} = Ay + B$; $A = C_{xy}C_y^{-1}$

$B = \mu_x - C_{xy}C_y^{-1}\mu_y$

$\hat{x}_{lmmse} = C_{xy}C_y^{-1}y + \mu_x - C_{xy}C_y^{-1}\mu_y$

$\hat{x}_{lmmse} = C_{xy}C_y^{-1}(y-\mu_y) + \mu_x = C_{xy}C_y^{-1}(y-\mu_y)$

$\mu_x = 0$ consigna

$\hat{x}_{lmmse} = C_{xy}C_y^{-1}y$

$y = x + Vx$

$C_{xy} = E\left[(x-\mu_x)(y-\mu_y)\right] = E\left[x.(x+Vx)\right] \quad E[x.x] + E[x(Vx)] = \sigma_x^2 + \sigma_x^2.\underbrace{\mu_V}_{0} = \sigma_x^2$

$C_y = E[y.y] = E\left[(x+Vx)^2\right] = E\left[x^2 + 2x^2V + V^2x^2\right] = \sigma_x^2 + \sigma_V^2\sigma_x^2 = \sigma_x^2(1+\sigma_V^2)$

$2E[x^2]E[V] = 0$

$\hat{x} = C_{xy}C_y^{-1}y = \dfrac{\sigma_x^2\, y}{\sigma_x^2(1+\sigma_V^2)} = \dfrac{y}{1+\sigma_V^2}$

$\mathcal{E} = x - \hat{x} \longrightarrow Var(\mathcal{E}) = E\left[\left((x-\hat{x}) - (\cancel{\mu_x - \mu_{\hat{x}}})\right)^2\right] = E\left[(x-\hat{x})^2\right] = E\left[x^2 - 2x\hat{x} + \hat{x}^2\right]$

0 lmmse es insesgado ∴ $\mu_{\hat{x}} \longrightarrow \mu_x$

$E\left[x^2 - 2x\hat{x} + \hat{x}^2\right] = \sigma_x^2 - 2E\left[x\dfrac{y}{1+\sigma_V^2}\right] + E\left[\dfrac{y^2}{(1+\sigma_V^2)^2}\right] = \sigma_x^2 - \dfrac{2}{1+\sigma_V^2}\underbrace{C_{xy}}_{\sigma_x^2} + \dfrac{\overbrace{C_y}^{\sigma_x^2(1+\sigma_V^2)}}{(1+\sigma_V^2)^2}$

$Var(\mathcal{E}) = \sigma_x^2 - \dfrac{2\sigma_x^2}{1+\sigma_V^2} + \dfrac{\sigma_x^2}{1+\sigma_V^2} = \sigma_x^2 - \dfrac{\sigma_x^2}{1+\sigma_V^2} = \sigma_x^2\left(1 - \dfrac{1}{1+\sigma_V^2}\right)$

Como $\sigma_V^2 > 0 \rightarrow 1 - \dfrac{1}{1+\sigma_V^2} < 1 \quad \therefore Var(\mathcal{E}) < \sigma_x^2$

Ejercicio 3

Se desea estimar una variable aleatoria X, para lo cual se utilizan 2 sensores que arrojan mediciones Y_1 e Y_2.

$$Y_i = X + W_i, \quad i = 1, 2,$$

donde W_i son ruidos de los sensores. Se sabe que $\begin{bmatrix} X & W_1 & W_2 \end{bmatrix}^T$ es un vector Gaussiano de media nula y covarianza:

Var(x)   Cxw1   Cxw2

$$E\left[\begin{bmatrix} x & w_1 & w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \right] = C = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

Var(w1)   Var(w2)

Halle el mejor estimador de X basado en Y, la matriz de covarianza del error y su varianza.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

$$E\left[[x\ w_1\ w_2]^t \right] = \vec{0} \quad \therefore \mu_x = \mu_{w_1} = \mu_{w_2} = 0$$

$$E[y] = E[x + w_i] = \mu_x + \mu_{w_i} = \begin{bmatrix} \mu_x + \cancel{\mu_{w_1}} \\ \mu_x + \mu_{w_2} \end{bmatrix}$$

$$\overset{0}{=} 0 = \mu_y$$

$$\hat{X}_{lmmse} = C_{xy} C_y^{-1} (y_i - \overset{0}{\cancel{\mu_y}}) + \overset{0}{\cancel{\mu_x}}$$

$$\hat{x} = C_{xy} C_y^{-1} y_i = C_{xy} C_y^{-1} y_i$$

$$C_{xy} = E[\underbrace{x . y_i^t}_{\text{medias nulas}}] = E\left[x . \begin{bmatrix} x + w_1 \\ x + w_2 \end{bmatrix}^t\right] = E\left[\begin{bmatrix} x^2 \\ x^2 \end{bmatrix}^t + \begin{bmatrix} xw_1 \\ xw_2 \end{bmatrix}^t\right] = E\left[\begin{vmatrix} x^2 \\ x^2 \end{vmatrix}^t\right] + E\left[\begin{vmatrix} xw_1 \\ xw_2 \end{vmatrix}^t\right]$$

$$\underbrace{E\left[\begin{vmatrix} x^2 \\ x^2 \end{vmatrix}^t\right]}_{\text{Varianza } (\mu_x = 0)} + E\left[\begin{vmatrix} xw_1 \\ xw_2 \end{vmatrix}^t\right] = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}^t + \begin{vmatrix} 1/2 \\ 1/4 \end{vmatrix}^t = \begin{vmatrix} 3/2 \\ 5/4 \end{vmatrix}^t$$

$$R_{xw_i} = C_{xw_i} \begin{pmatrix} \mu_x = 0 \\ \mu_w = 0 \end{pmatrix}$$

los tenemos

$$y_1 = x + w_1$$
$$y_2 = x + w_2$$

$$C_y^{-1} = E[y . y^t]^{-1} = E\left[\begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{vmatrix} |y_1 \ y_2|\right]^{-1} = E\left[\begin{vmatrix} y_1^2 & y_1 y_2 \\ y_2 y_1 & y_2^2 \end{vmatrix}\right]^{-1} = E\left[\begin{vmatrix} (x+w_1)^2 & (x+w_1)(x+w_2) \\ (x+w_1)(x+w_2) & (x+w_2)^2 \end{vmatrix}\right]^{-1}$$

$$E[(x+w_1)^2] = \sigma_x^2 + \sigma_{w_1}^2 + 2C_{xw_1} = 1 + 1 + 2 . 1/2 = 3$$

$$E[(x+w_2)^2] = \sigma_x^2 + \sigma_{w_2}^2 + 2C_{xw_2} = 1 + 1/3 + 2/4 = 11/6$$

$$E[(x+w_1)(x+w_2)] = \sigma_x^2 + + C_{xw_1} + C_{xw_2} + C_{w_1 w_2} = 1 + 1/2 + 1/4 + 0 = 7/4$$

$$\therefore\ C_y^{-1} = \begin{vmatrix} 3 & 7/4 \\ 7/4 & 11/6 \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} 88/117 & -28/39 \\ -28/39 & 16/13 \end{vmatrix}$$

$$\hat{x} = \underbrace{\begin{vmatrix} 3/2 \\ 5/4 \end{vmatrix}^{t}}_{C_{xy}} \underbrace{\begin{vmatrix} 88/117 & -28/39 \\ -28/39 & 16/13 \end{vmatrix}}_{C_y^{-1}} \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{vmatrix} = \boxed{\begin{vmatrix} 3/13 & 6/13 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{vmatrix} = \hat{x}}$$

$$\varepsilon = x - \hat{x} \longrightarrow \operatorname{cov}(\varepsilon) = C_x - C_{xy} C_y^{-1} C_{yx}$$

$$1 - \begin{vmatrix} 3/13 & 6/13 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3/2 \\ 5/4 \end{vmatrix} = 1 - 12/13 = 1/13$$

sino expandir a mano,

Ejercicio 4

Suponga que se tienen muestras de una señal

$$Y(n) = X(n) + W(n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Dicha señal tiene dos componentes: una señal de interés X, modelada como un proceso ESA, y una componente de ruido W, también modelada como un proceso ESA, descorrelacionado de X. Suponga que tiene acceso a muestras de un proceso ESA $U(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, tal que dicha señal está descorrelacionada de W pero correlacionada con X. Asuma que todas las variables tienen media nula para simplificar el problema.

El objetivo del problema es eliminar la componente de ruido de $Y(n)$ utilizando las muestras de la señal $U(n)$. Para ello se propone estimar la señal Y mediante un estimador lineal de la forma:

$$\hat{Y}(n) = \mathbf{w}(n)^T \mathbf{u}(n),$$

donde $\mathbf{u}(n) = [U(n), \ldots, U(n-N+1)]^T$ y $\mathbf{w}(n)$ es un vector (a determinar) de N elementos.

1. Analice la implementacion del cancelador de ruido y realice un diagrama en bloques donde se vean las entradas del sistema y la señal de error:

$$e(n) = Y(n) - \hat{Y}(n).$$

2. Escriba la expresión $\mathbf{w}(n)$ óptimo para estimar Y en el sentido MSE y la varianza del error de estimación, mostrando que ninguno de los dos depende de n.
3. Determine por qué al estimar Y en realidad estamos obteniendo el mejor estimador MSE de X, lo que determina que el sistema funcione como un cancelador de ruido.
4. ¿Cómo implementaría el sistema en la práctica si tuviera acceso a las muestras de Y y de U?

$Y = X + W$; U ESA correlacionado con X pero no con W.

descorr

$\mu_X = \mu_W = \mu_Y = \mu_U = 0$

queremos eliminar lo W de Y usando muestras de U.

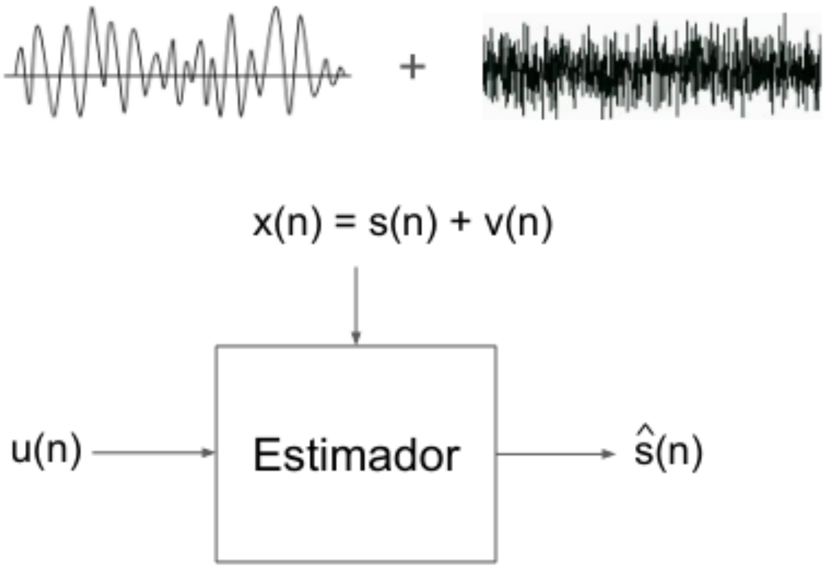
$\hat{Y}(n) = \beta(n)^T U(n)$; $U(n) = [U(n) \ \ldots \ U(n-N+1)]^t$

coefs del filtro

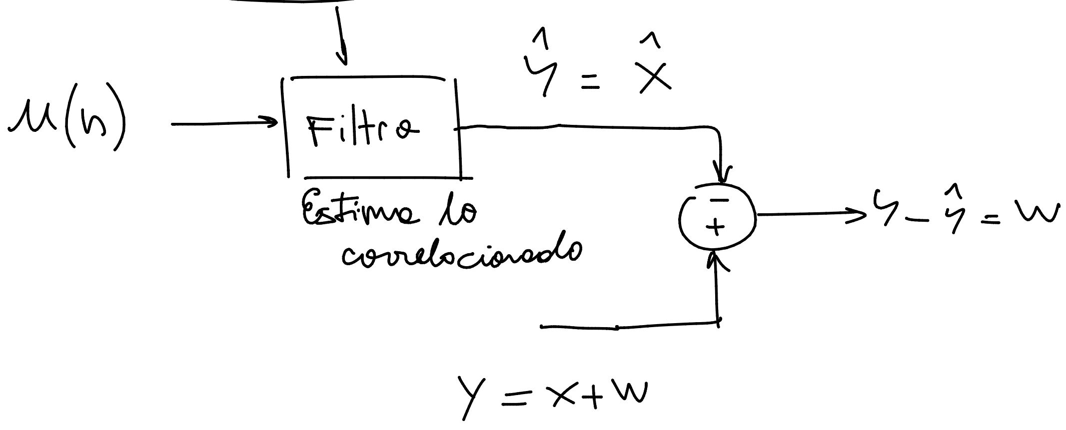
Filtro de Wiener – Cancelador de ruido

Problema

- Medimos x(n): señal s(n) contaminada con ruido v(n).
- Queremos limpiarla para obtener una estimación de s(n)
- Usamos un proceso u(n) disponible (correlacionado con v(n))



1. $\hat{y}(n) = \underbrace{\sum_{i=0}^{N} \beta_i \, u(n-i)}$ (Filtro de wiener)



2. $U = \begin{bmatrix} u(0) \\ \vdots \\ u(N) \end{bmatrix}$ Cada $n \in [0; N]$ es un problema de estimación.

Para cada n $\longrightarrow$ $\hat{y}_{lmmse} = C_{yu} C_u^{-1} (u - \mu_u) + \mu_y$; medias nulas

Estimo $Y(n)$ con U de $(n-N)$ a (0).

$$\underset{\mu_u = 0}{C_u^{-1} = R_u^{-1}} = E\left[\begin{vmatrix} U(-N) \\ U(0) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} U(-N) \cdots U(0) \end{vmatrix} \right] = \begin{vmatrix} R_u(0) & \cdots & R_u(N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_u(N) & \cdots & R_u(0) \end{vmatrix}$$

escalar

$$C_{yu} = E[Y \, U(n)] = E[R_{yu}(N) \cdots R_{yu}(0)]$$

No depende de n, solo del lag.

$$W = R_u^{-1} R_{yu}^{*} = \begin{bmatrix} w(N) \\ \vdots \\ w(0) \end{bmatrix} \longrightarrow \hat{y}(n) = \underbrace{R_{yu} R_u^{-1}}_{W^*} U.$$

conj. y trasp.

$$\hat{y} = \mu_y + C_{yu} C_u^{-1}(u-\mu_u) \longrightarrow \mathcal{E} = \underbrace{y-\mu_y}_{y} - C_{yu}C_u^{-1}\underbrace{(u-\mu_u)}_{u}$$

$$\mu_E = E[y-\hat{y}] = \underbrace{\mu_y - \mu_y}_{0} - C_{yu}C_u^{-1}\underbrace{\mu_u}_{0}$$

$= 0$ insesgado

$$C_\varepsilon = E\Big[\big(y - \underbrace{C_{yu}C_u^{-1}}_{\text{cte para } E} u\big)\big(y - \underbrace{C_{yu}C_u^{-1}}_{\text{cte para } E} u\big)^*\Big]$$

$$C_y - \underbrace{E[yu^*]}_{C_{uy}} C_{yu}^* C_u^{-1*} - C_{yu}C_u^{-1}\underbrace{E[uy^*]}_{C_{yu}} + C_{yu}C_u^{-1}E[uu^*]C_u^{-1}C_{yu}^*$$

$$= C_y - C_{yu}C_u^{-1}C_{uy}$$

3) Sea u corr x $\wedge$ u descorr w ; medias nulas:

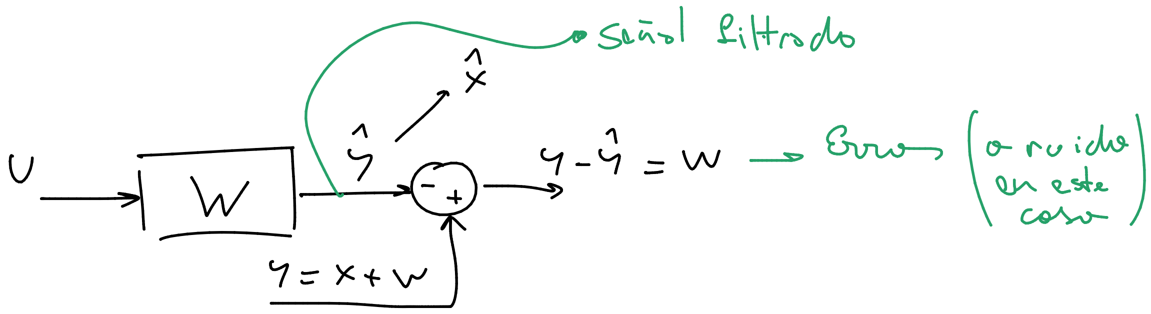
Entonces $\hat{y} = \cancel{\mu_y} + C_{yu}C_u^{-1}(u-\cancel{\mu_u})$

$$C_{yu} = Cov(y,u) = E[y \cdot u^*] = E[(x+w)u^*] = E[xu^*] + E[wu^*] = \underbrace{R_{x,u}}_{\text{algo}} + \underbrace{\cancel{R_{w,u}}}_{0} = C_{xu}$$

$\therefore\ \hat{y} = C_{yu}C_u^{-1}u = C_{xu}C_u^{-1}u$ se parece a $\hat{x} = C_{xu}C_u^{-1}u$

$\therefore$ Estimamos la x en $\hat{y}$

4.



Ejercicio 5

Se desea estimar un vector aleatorio gaussiano $\mathbf{X} = [X_1, ..., X_n]^T$ con media nula y matriz de correlación R_X. Para eso se realizan n mediciones $Y_1, ..., Y_n$ del siguiente modo:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = H\mathbf{X} + \mathbf{W},$$

donde H es una matriz de $n \times n$ determinística, conocida e inversible, y $\mathbf{W}$ es un vector de ruido blanco gaussiano de media nula y varianza unitaria, descorrelacionado de $\mathbf{X}$.

1. Halle la función de densidad conjunta entre $\mathbf{X}$ y $\mathbf{Y}$ en términos de R_X y H.
2. Demuestre que el mejor estimador lineal en el sentido del ECM de $\mathbf{X}$ en función de la observación $\mathbf{Y}$ es:

$$\hat{\mathbf{X}} = R_X H^T (H R_X H^T + I)^{-1} \mathbf{Y}.$$

X y W gaussianos ∴ Y gaussiano.

Vale que $E[Y] = E[HX] + E[W] = H\underbrace{\mu_x + \mu_w}_{0} = 0$

$C_Y = E[YY^*] = E[(HX+W)(HX+W)^*] = HC_xH^* + \underbrace{W\,E[WX^*]H^* + H\,E[XW^*]}_{\text{como } x, w \text{ descorr eso vale cero}} + C_W$

$C_Y = HC_xH^* + C_W$ Como $\mu_x = 0$, $C_x(t_1, t_2) = R_x(t_2 - t_1)$

$\mu_w = 0$

$C_Y = HR_xH^* + R_W$

La función de densidad cjta se puede obtener usando C_{XY}. La media de X e Y es cero ∴ la media de la cjta será cero

$f_{X,Y}(x,y) \longrightarrow$ Para definirla x completo necesito: μ_X, μ_Y, C_X, C_Y, C_{XY}

x que es en base al vector $Z = \begin{vmatrix} X \\ Y \end{vmatrix}$

Sea $Z = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \rightarrow f_Z$ es $f_{X,Y}$

$E[Z] = E\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{vmatrix} E[X] \\ E[Y] \end{vmatrix}}^{\text{Vector}} = \begin{bmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$Cov = \begin{vmatrix} C_{x_1} & C_{x_1 x_2} & \cdots & C_{x_1 x_n} \\ C_{x_2 x_1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ C_{x_n x_1} & \cdots & & C_{x_n} \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} C_x & C_{xy} \\ C_{xy} & C_y \end{vmatrix}$$

(C_x es R_x $\quad Hx+w$

$$C_y = E[yy^*] = H\underbrace{E[xx^*]}H^* + H\underbrace{E[xw^*]} + \underbrace{E[wx^*]}H^* + \underbrace{E[ww^*]}_{\substack{I \\ \text{Ruido blanco} \\ \text{gauss.}}}$$

$(\mu_y = 0) \qquad H R_x H^* \qquad \overset{0}{\text{discorr}}$

$$C_y = HR_xH^* + I$$

$$C_{xy} = E[xy^*] = E[xx^*]H^* + E[\cancel{xw^*}]_0 = R_xH^*$$

$$C_{yx} = E[yx^*] = HE[xx^*] + \underbrace{E[\cancel{wx^*}]}_{0} = HR_x$$

$$\therefore, \ Cov_z = \begin{vmatrix} C_x & C_{xy} \\ C_{yx} & C_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R_x & R_xH^* \\ HR_x & HR_xH^* + I \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} I & 0 \\ 0 & H \end{vmatrix} \begin{vmatrix} R_x & R_x \\ R_x & R_x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I & 0 \\ 0 & H^* \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} R_x & R_x \\ HR_x & HR_x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I & 0 \\ 0 & H^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R_x & R_xH^* \\ HR_x & HR_xH^* \end{vmatrix}$$

2) $\hat{x}_{lmmse} = C_{xy} C_y^{-1} y = R_x H^* . (HR_xH^* + I)^{-1} y$

ya los habia obtenido antes

Ejercicio 6

Se desea estimar la temperatura instantánea de una batería, para lo cual se dispone de un sensor que arroja muestras

$$Y(n) = T(n) + W(n), \tag{1}$$

donde $T(n)$ es la verdadera temperatura, un proceso Gaussiano ESA de media nula y autocovarianza $C_T(k) = \sigma_T^2 10^{-|k|}$, y W es ruido Gaussiano ESA de media nula y autocovarianza $C_W(k) = \sigma_W^2 10^{-|k|}$, descorrelacionado de T.

1. Indique qué clase de proceso es Y, si es ESA o no, y halle sus distribuciones finito-dimensionales.
2. Halle la distribución conjunta del vector $[T(n), Y(n)]$.
3. Suponga que se desea estimar la temperatura del siguiente modo:

$$\hat{T}(n) = aY^3(n) + bY(n) + c, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

   Halle los coeficientes a, b y c de modo de que $\hat{T}(n)$ sea el mejor estimador de $T(n)$ en el sentido del ECM. ¿Tiene sentido usar Y^3 en el estimador de T? ¿Por qué?
4. Halle el ECM mínimo cuando $\sigma_W = \sigma_T = 1$.

1. Veamos si Y es ESA.

$$E[Y] = E[T+W] = \mu_T + \mu_W = 0 \quad (\text{cte})$$

$$R_Y = E[YY^*] = E[(T+W)(T+W)^*] = E[TT^* + \underbrace{TW^* + WT^*}_{=0 \text{ xque } W,T \text{ descorr}} + WW^*] = R_T + R_W$$

Si T y W son ESA, R_T y R_W son función del lag ∴ R_Y depende de lag

$Y \to$ Media cte
$Y \to R_Y(n_2 - n_1)$
∴ Y es ESA.

Distribuciones finito-dimensionales $\longrightarrow$ T, W gaussianas ∴ $T + W \sim$ gaussiana

$\Longrightarrow Y \sim \text{Normal}(\mu_Y, C_Y)$

Todas las distribuciones únicas $C_Y(n_1, n_2)$ y $\mu_Y(n) = 0 \ \forall n$

$$C_Y(n_1,n_2) = R_Y(n_1,n_2) = R_T(n_1,n_2) + R_W(n_1,n_2)$$

$$\text{Cov} = \begin{vmatrix} \sigma_Y(n_1) & C_Y(n_1,n_2) \\ C_Y(n_2,n_1) & \sigma_Y(n_2) \end{vmatrix}$$

$$R_Y(n_1,n_2) = C_Y(n_1,n_2) + \mu_Y(n_1)\mu_Y(n_2)$$

$$\sigma_y^2(n) = Var(y(n)) = E[(T+w)^2] = \sigma_T^2+\sigma_w^2 \quad (C_y(0))$$

$$Cov = \begin{vmatrix} \sigma_T^2+\sigma_w^2 & R_T(n_2-n_1)+R_w(n_2-n_1) \\ R_T(n_2-n_1)+R_w(n_2-n_1) & \sigma_T^2+\sigma_w^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_T^2+\sigma_w^2 & \sigma_T^2\,10^{-|\tau|}+\sigma_w^2.10^{-|\tau|} \\ \sigma_T^2\,10^{-|\tau|}+\sigma_w^2.10^{-|\tau|} & \sigma_T^2+\sigma_w^2 \end{vmatrix}$$

∴ la densidad cjta para $y(n_1), y(n_2)$ será $\mathcal{N}\left(0, \begin{vmatrix} \sigma_T^2+\sigma_w^2 & \sigma_T^2\,10^{-|\tau|}+\sigma_w^2.10^{-|\tau|} \\ \sigma_T^2\,10^{-|\tau|}+\sigma_w^2.10^{-|\tau|} & \sigma_T^2+\sigma_w^2 \end{vmatrix}\right)$

$y(n) \sim \mathcal{N}(0, Var(y)) = \mathcal{N}(0, \sigma_T^2+\sigma_w^2)$

Distribución cjta $[T(n)\ y(n)]^t$

2 maneras: Escribo esto de forma matricial y obtengo la cov. o la hago fácil:

1) $E\left[\begin{bmatrix} T \\ y \end{bmatrix}\right] = \vec{0}$ real ∴ solo traspongo 2) fácil

$$Cov\left(\begin{bmatrix} T \\ y \end{bmatrix}\right) = E\left[\begin{bmatrix} T \\ y \end{bmatrix}[T\ \ y]\right] = E\begin{bmatrix} T(n)T(n) & T(n)y(n) \\ y(n)T(n) & y(n)y(n) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sigma_T^2 & \sigma_T^2 \\ \sigma_T^2 & \sigma_T^2+\sigma_w^2 \end{vmatrix} =$$

Varianzas

Varianza de y

$$cov\begin{bmatrix} T \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_T & C_{Ty} \\ C_{yT} & C_y \end{bmatrix}$$

n

$E\begin{bmatrix} T \\ y \end{bmatrix} = \vec{0}$

$C_T = \sigma_T^2\,10^{-|\tau|}$

Mismo n $\quad C_y = (\sigma_T^2+\sigma_w^2)\,10^{-|\tau|}$

o ambos $\quad C_{yT} = E[y.T^*] = E[TT^* + wT^*] = R_T = C_T \big|_{\tau=0}$

cuidado $\quad C_{T,y} = E[T.y^*] = E[TT^* + Tw^*] = R_T = C_T \big|_{\tau=0}$

$$Cov_{T,y} = \left.\begin{vmatrix} \sigma_T^2\,10^{-|\tau|} & \sigma_T^2\,10^{-|\tau|} \\ \sigma_T^2\,10^{-|\tau|} & (\sigma_T^2+\sigma_w^2)\,10^{-|\tau|} \end{vmatrix}\right|_{\tau=0}$$

$T(n)$ y $y(n)$

$$Cov_{T,y} = \begin{vmatrix} \sigma_T^2 & \sigma_T^2 \\ \sigma_T^2 & \sigma_T^2+\sigma_w^2 \end{vmatrix}$$

3) $\hat{T} = a\,y^3(n) + b\,y(n) + c$

si es lineal → linealizo por Taylor

$\hat{T} = \underbrace{T(n)}_{cte} + \underbrace{(a.3y^2(n)+b)}_{cte}\ y(n)$

$\hat{T} = \alpha\,y(n) + \beta$ → eso es lineal

y^3 desaparece al linealizar, no tiene sentido usarla

$$\hat{T}_{lmmse} = C_{Ty}C_y^{-1}(y-\cancel{\mu_y}) + \cancel{\mu_T} = E[T(n)y^*(n)] . \frac{1}{\sigma_T^2+\sigma_w^2} = \boxed{\frac{\sigma_T^2}{\sigma_T^2+\sigma_w^2} . y = \hat{T}}$$

$\cancel{\mu_y} = 0$, $\cancel{\mu_T} = 0$

└ $C_y^{-1}(n,n) = Var(y) = \sigma_T^2+\sigma_w^2$

$C_T\big|_{(0,0)}$

4. $\frac{1}{2} Y = \hat{T}$

ECm mínimo $\longrightarrow$ $ECm = |T - \hat{T}|^2 = |T - \frac{1}{2} Y|^2 = E|T - \frac{T+w}{2}|^2$

$$E\left|\frac{T-w}{2}\right|^2 = E\left[\left(\frac{T-w}{2}\right)^*\left(\frac{T-w}{2}\right)\right] = \frac{E}{4}\left[T^*T - w^*T - T^*w + w^*w\right]$$

producto interno

$$\frac{1}{4}\left(\underbrace{\sigma_T^2 + \sigma_w^2}_{2}\right) = \frac{2}{4} = 1/2$$

Sino que MMSE $= tr\left(Cov\left(E_{lmmse}\right)\right)$

$\downarrow$
mínimo

$$Cov_E = C_T - C_{TY} C_Y^{-1} C_{YT}$$

$$1 - 1 \cdot 1/2 \cdot 1 = 1/2$$

$$\boxed{tr\{1/2\} = 1/2}$$