Procesos Estocásticos y Sistemas

Cecilia Galarza

Procesos Estocásticos
Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires

1er cuatrimestre 2025

Transformaciones de PE

- En SyS vimos la noción de sistema dinámico como un operador que transforma las señales de entrada en señales de salida. Si $\mathcal{S}$ es un espacio de señales, definimos el sistema $\mathcal{H}$ como

$$\mathcal{H} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$$
$$y = \mathcal{H}(x)$$

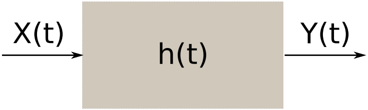
- Si $X(\xi, \cdot)$ es un proceso estocástico con Ξ el espacio muestral, cada realización es una señal. Luego, podemos pensar en el proceso de salida

$$Y(\xi, \cdot) = \mathcal{H}(X(\xi, \cdot)), \qquad \xi \in \Xi.$$

- Vamos a asumir que $\mathcal{H}$ es tal que Y es un proceso estocástico que debemos caracterizar a partir de las características de X y $\mathcal{H}$.

Respuesta de un sistema LTI a un PE

Supongamos que $\mathcal{H}$ es un sistema LTI caracterizado por $h(t)$, su respuesta impulsiva o $H(\omega) = \mathcal{F}(h(t))$, su respuesta en frecuencia. La entrada del sistema es el proceso aleatorio $X(t)$ y la salida $Y(t)$.



En el análisis siguiente, vamos a utilizar la variable t para identificar sistemas tanto en tiempo continuo como discreto. Cuando sea necesario, haremos la diferenciación.

Respuesta de un sistema LTI a un proceso ESE

Recordemos que si $X(t)$ es ESE,

$$F_{X(t_1+\tau),\ldots,X(t_n+\tau)} = F_{X(t_1),\ldots,X(t_n)} \quad , \quad \forall n, t_1, \ldots, t_n, \tau.$$

$Y(t)$ es ESE ?

Respuesta de un sistema LTI a un proceso ESE

Para simplificar la exposición, pensamos el problema en tiempo discreto:

$$
\begin{aligned}
Y(t) &= \sum_s h(s)X(t-s) \\
&= \ldots h(-1)X(t+1) + h(0)X(t) + h(1)X(t-1) \ldots .
\end{aligned}
$$

- $Y(t)$ es una transformación de $\ldots X(t-1), X(t), X(t+1) \ldots$.
- Como $X(t)$ es ESE,

$$
F_{\ldots X(t-1),X(t),X(t+1)\ldots} = F_{X(t+\tau-1),X(t+\tau),X(t+\tau+1)\ldots}
$$

Respuesta de un sistema LTI a un proceso ESE

Distribución de primer orden de $Y(t)$:

$$
\begin{aligned}
F_{Y(t)}(y) &= \mathbb{P}(Y(t) \leq y) \\
&= \mathbb{P}\left(\sum_s h(s)X(t-s) \leq y\right) = \mathbb{P}\left(\sum_s h(s)X(t+\tau-s) \leq y\right) \\
&= \mathbb{P}\left(Y(t+\tau) \leq y\right) = F_{Y(t+\tau)}(y).
\end{aligned}
$$

Esto se cumple $\forall\tau$. Por ende, $Y(t)$ es estacionario de primer orden. Repitiendo este análisis para cualquier distribución finito dimensional de $Y(t)$ concluimos que

$$X(t) \text{ ESE} \implies Y(t) \text{ ESE}.$$

Respuesta de un sistema LTI a un proceso gaussiano

Volvemos a la observación anterior

$$\begin{aligned} Y(t) &= \sum_{s} h(s)X(t-s) \\ &= \ldots h(-1)X(t+1) + h(0)X(t) + h(1)X(t-1) \ldots . \end{aligned}$$

Si $X(t)$ es un proceso gaussiano, $Y(t)$ también es gaussiano por ser combinación lineal de procesos gaussianos.

$$X(t) \text{ gaussiano } \implies Y(t) \text{ gaussiano} .$$

Respuesta de un sistema LTI: Esperanza

Cómo es la esperanza de la salida de un sistema LTI exitado por un proceso aleatorio $X(t)$?

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y(t)] = \mu_Y(t) = \mathbb{E}\left[\sum_s h(s)X(t-s)\right] \\ = \sum_s h(s)\mathbb{E}[X(t-s)] = \sum_s h(s)\mu_X(t-s).\end{aligned}$$

Esperanza de la salida

$$\mathbb{E}[Y(t)] = (h * \mu_X)(t).$$

Respuesta de un sistema LTI: Autocorrelación

$$
\begin{aligned}
R_Y(t, t{+}\tau) &= \mathbb{E}\left[Y(t)Y(t+\tau)\right] = \\
&= \mathbb{E}\left\{\left[\left(\sum_s h(s)X(t-s)\right)\left(\sum_l h(l)X(t+\tau-l)\right)\right]\right\} \\
&= \sum_s \sum_l h(s)h(l)\underbrace{\mathbb{E}[X(t-s)X(t+\tau-l)]}_{R_X(t-s,t+\tau-l)}
\end{aligned}
$$

Autocorrelación de la salida

$$
R_Y(t, t+\tau) = \sum_s h(s) \sum_l h(l) R_X(t-s, t+\tau-l).
$$

Respuesta de un sistema LTI: Correlación cruzada entre entrada y salida

$$R_{X,Y}(t,t+\tau) = \mathbb{E}\left[X(t)Y(t+\tau)\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\sum_s h(s)X(t+\tau-s)\right]$$

$$= \sum_s h(s)\underbrace{\mathbb{E}[X(t)X(t+\tau-s)]}_{R_X(t,t+\tau-s)}.$$

Correlación entrada-salida

$$R_{X,Y}(t,t+\tau) = \sum_s h(s)R_X(t,t+\tau-s).$$

Respuesta de un sistema LTI a entrada ESA

Calculamos $\mathbb{E}[Y(t)]$:

Si $X(t)$ es ESA, $\mu_X(t) = \mu_X$. Luego

$$\mu_Y(t) = \mu_X \sum_s h(s) = \mu_X H(\omega)|_{\omega=0} = \mu_Y.$$

El valor $H(0)$ es la ganancia en continua del sistema LTI.

Respuesta de un sistema LTI a entrada ESA

Calculamos $R_Y(t, t+\tau)$:

Si $X(t)$ es ESA, entonces $R_X(t, t+\tau) = R_X(\tau)$. Luego,

$$
\begin{aligned}
R_Y(t, t+\tau) &= \sum_s h(s) \sum_l h(l) R_X(\tau - l + s) \qquad u = -s \\
&= \sum_l h(l) \sum_u h(-u) R_X(\tau - l - u) \qquad \tilde{h}(u) = h(-u) \\
&= \sum_l h(l) \sum_u \underbrace{\tilde{h}(u) R_X(\tau - l - u)}_{(\tilde{h} * R_X)(\tau - l)} = \Big(h * (\tilde{h} * R_X)\Big)(\tau) \\
&= \Big((h * \tilde{h}) * R_X\Big)(\tau) = R_Y(\tau).
\end{aligned}
$$

Respuesta de un sistema LTI a una entrada ESA

Calculamos $R_{XY}(t, t+\tau)$:

Si $X(t)$ es ESA, entonces $R_X(t, t+\tau) = R_X(\tau)$,

$$R_{X,Y}(t, t+\tau) = \sum_s h(s) R_X(\tau - s) = (h * R_X)(\tau) = R_{X,Y}(\tau).$$

Respuesta de un sistema LTI a una entrada ESA

Resumiendo...

- $\mathbb{E}[Y(t)] = H(0)\mu_X$
- $R_Y(t, t+\tau) = R_Y(\tau)$
- $R_{X,Y}(t, t+\tau) = R_{X,Y}(\tau)$

$$X(t) \text{ ESA } \Longrightarrow \begin{cases} Y(t) \text{ ESA} \\ X(t)\,,\ Y(t) \text{ CESA} \end{cases} .$$

Respuesta de un sistema LTI a una entrada ESA: Densidad espectral de salida

Usamos el teorema de Wiener-Kinchin para calcular $S_Y(\omega)$.

$$\begin{aligned} S_Y(\omega) &= \mathcal{F}\left\{R_Y(\tau)\right\} = \mathcal{F}\left\{\left((h * \tilde{h}) * R_X\right)(\tau)\right\} \\ &= H(\omega)\tilde{H}(\omega)S_X(\omega) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{H}(\omega) &= \mathcal{F}\{\tilde{h}(t)\}(\omega) = \sum_t \tilde{h}(t)e^{-j\omega t} \\ &= \sum_t h(-t)e^{-\jmath\omega t} \qquad , \qquad u = -t \\ &= \sum_u h(u)e^{\jmath\omega u} = H^*(\omega). \end{aligned}$$

Respuesta de un sistema LTI a una entrada ESA: Densidad espectral de salida

Luego,

$$S_Y(\omega) = H(\omega)H^*(\omega)S_X(\omega) = |H(\omega)|^2 S_X(\omega).$$

Finalmente, partiendo de la correlación cruzada, obtenemos la densidad espectral cruzada:

$$\begin{aligned} S_{XY}(\omega) &= \mathcal{F}\left\{R_{XY}(\tau)\right\} = \mathcal{F}\left\{(h * R_X)(\tau)\right\} \\ &= H(\omega)S_X(\omega). \end{aligned}$$

Respuesta de un sistema LTI a un proceso ESA: recopilación

Sea $X(t)$ un proceso ESA, $\mathcal{H}$ un sistema LTI con $h(t)$ y $H(\omega)$. Luego,

- $Y(t) = (h * X)(t)$ es un proceso ESA

$$\mathbb{E}[Y(t)] = H(0)\mu_X = \mu_Y$$

$$R_Y(\tau) = (h * \tilde{h} * R_X)(\tau) \qquad S_Y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_X(\omega)$$

- $X(t)$, $Y(t)$ son procesos CESA

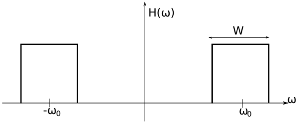
$$R_{X,Y}(\tau) = (h * R_X)(\tau) \qquad S_{X,Y}(\omega) = H(\omega) S_X(\omega)$$

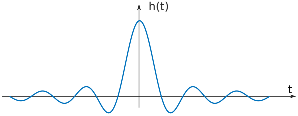
Ejemplo: filtrado pasabanda ideal

- Filtro:

$$H(\omega) = \mathbb{1}\left\{|\omega - \omega_0| \leq \frac{W}{2}\right\} + \mathbb{1}\left\{|\omega + \omega_0| \leq \frac{W}{2}\right\}$$

$$h(t) = \frac{W}{\pi}\cos(\omega_0 t)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{W}{2\pi}t\right) \qquad \mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$





- Entrada:

$$X(t) = S(t) + N(t) = A\cos(\omega_0 t + \Phi) + N(t)$$

  - $A \sim \mathcal{N}(0,1)$ y $\Phi \sim \mathcal{U}(-\pi,\pi)$ independientes,
  - $N(t)$ ruido blanco de media nula, varianza σ^2, independiente de $S(t)$.

Ejemplo: filtrado pasabanda ideal (cont.)

$Y(t)$ ESA?

- $X(t) = \underbrace{A\cos(\omega_0 t + \Phi)}_{\text{ESA}} + \underbrace{N(t)}_{\text{ESA}} \Longrightarrow$ es ESA.

  $\mathbb{E}[X(t)] = \mathbb{E}[S(t)] + \mathbb{E}[N(t)] = 0$. Como S y N son ortogonales,

  $$R_X(\tau) = \mathbb{E}[X(t)X(t+\tau)] = R_S(\tau) + R_N(\tau) = \frac{1}{2}\cos(\omega_0\tau) + \sigma^2\delta(\tau).$$

  $$S_X(\omega) = \mathcal{F}\{R_X\}(\omega) = S_S(\omega)+S_N(\omega) = \frac{\pi}{2}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]+\sigma^2.$$

- H es LTI

- Luego, $Y(t)$ es ESA y además $(X(t), Y(t))$ CESA.

Ejemplo: filtrado pasabanda ideal (cont.)

Analizamos la salida del filtro $Y(t)$.

- $S_Y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_X(\omega) = \frac{\pi}{2}[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] + \sigma^2 |H(\omega)|^2$.

$$R_Y(\tau) = \mathcal{F}^{-1}(S_Y(\omega)) = \frac{1}{2}\cos(\omega_0 \tau) + \frac{\sigma^2 W}{\pi} \cos(\omega_0 \tau)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{W}{2\pi}\tau\right).$$

- En este caso particular, $|H(\omega)| = |H(\omega)|^2$. Luego,
  $S_{X,Y}(\omega) = H(\omega) S_X(\omega) = |H(\omega)|^2 S_X(\omega) = S_Y(\omega)$.
  $R_{X,Y}(\tau) = R_Y(\tau)$.

Ejemplo: filtrado pasabanda ideal (cont.)

- Usando la linealidad del filtro, descomponemos $Y(t)$:

$$Y(t) = \underbrace{(h * S)(t)}_{R(t)} + \underbrace{(h * N)(t)}_{V(t)}.$$

- Definimos la relación señal a ruido (SNR) a la entrada del filtro

$$\mathrm{SNR}_{\mathrm{IN}} = \frac{\mathbb{E}[S^2(t)]}{\mathbb{E}[N^2(t)]} = \frac{R_S(0)}{R_N(0)} = \frac{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} S_S(\omega)d\omega}{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} S_N(\omega)d\omega} = \frac{1/2}{\sigma^2}.$$

- Por lo tanto, a la salida del filtro la SNR es

$$\mathrm{SNR}_{\mathrm{OUT}} = \frac{\mathbb{E}[R^2(t)]}{\mathbb{E}[V^2(t)]} = \frac{R_R(0)}{R_V(0)} = \frac{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} S_R(\omega)d\omega}{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} S_V(\omega)d\omega} = \frac{1/2}{\sigma^2 W/\pi}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{SNR}_{\mathrm{OUT}}}{\mathrm{SNR}_{\mathrm{IN}}} = \frac{\pi}{W}.$$

La atenuación de la SNR depende del ancho de banda del filtro.

Ejemplo: media móvil en tiempo continuo

$$Y(t) = \frac{1}{T}\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} X(s)ds \qquad X(t) \text{ ESA.}$$

- $Y(t)$ es la salida del sistema LTI:

$$h(t) = \frac{1}{T}\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \delta(s)ds = \frac{1}{T}\mathbb{1}\left\{|t| < \frac{T}{2}\right\}.$$

$$H(\omega) = \mathcal{F}\{h\}(\omega) = \frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\frac{\omega T}{2}} = \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right).$$

Ejemplo: media móvil en tiempo continuo (cont)

- Luego,

$$\mu_Y = H(0)\mu_X = \mu_X$$

$$S_Y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_X(\omega) = \left[\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)\right]^2 S_X(\omega)$$

$$S_{X,Y}(\omega) = H(\omega) S_X(\omega) = \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right) S_X(\omega).$$

Sistemas descriptos por ecuaciones en diferencias

- En tiempo discreto una familia importante de sistemas LTI son los sistemas descriptos por ecuaciones en diferencias.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k Y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k X(n-k).$$

- Supondremos nuevamente que el sistema es causal, estable y con condiciones iniciales de reposo.

- La respuesta en frecuencia de estos sistemas es

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k}}.$$

Procesos MA

$$Y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k X(n-k).$$

- El sistema asociado es FIR

$$h(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k \delta(n-k).$$

$$H(\omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k}.$$

- El proceso $Y(n)$ es un proceso MA (*moving average* o promedio móvil).

Caracterización de procesos MA

- Si X es ruido blanco de media nula y varianza σ^2,

$$S_Y(\omega) = \sigma^2 \left| \sum_{m=0}^{M} b_m e^{-j\omega m} \right|^2 = \sigma^2 \sum_{m=0}^{M} \sum_{n=0}^{M} b_m b_n e^{-j\omega(m-n)}$$

$$= \sigma^2 \sum_{m=0}^{M} c_m \cos(\omega m),$$

donde $$c_m = \begin{cases} \sum_{n=0}^{M} b_n^2 & \text{si } m = 0, \\ 2 \sum_{n=0}^{M-m} b_n b_{n+m} & \text{si } m \neq 0. \end{cases}$$

- Antitransformando, obtenemos

$$R_Y(k) = \sigma^2 \sum_{m=0}^{M} \frac{c_m}{2} [\delta(k-m) + \delta(k+m)].$$

$R_Y(k)$ tiene soporte finito, es decir, $R_Y(k) = 0$ para todo $|k| > M$.

Ejemplo: proceso MA-1

- Supongamos que X es ruido blanco de varianza unitaria y consideremos el proceso MA-1 (MA de primer orden):

$$Y(n) = X(n) + \alpha X(n-1).$$

- En este caso,

$$S_Y(\omega) = |1 + \alpha e^{-j\omega}|^2 = 1 + \alpha^2 + 2\alpha\cos(\omega).$$

$$R_Y(k) = (1+\alpha^2)\delta(k) + \alpha\delta(k-1) + \alpha\delta(k+1).$$

- Verifiquemos esto por cálculo directo:

$$\begin{aligned}
R_Y(k) &= \mathbb{E}[Y(n)Y(n+k)] \\
&= \mathbb{E}[X(n)X(n+k)] + \alpha\mathbb{E}[X(n)X(n+k-1)] \\
&+ \alpha\mathbb{E}[X(n+k)X(n-1)] + \alpha^2\mathbb{E}[X(n-1)X(n+k-1)] \\
&= \delta(k) + \alpha\delta(k-1) + \alpha\delta(k+1) + \alpha^2\delta(k).
\end{aligned}$$

Ejemplo: proceso MA-2

- Supongamos que X es ruido blanco de varianza unitaria y consideremos el proceso MA-2 (MA de segundo orden):

$$Y(n) = X(n) + \alpha X(n-1) + \beta X(n-2).$$

- En este caso,

$$\begin{aligned} S_Y(\omega) &= |1 + \alpha e^{-j\omega} + \beta e^{-j2\omega}|^2 \\ &= (1 + \alpha^2 + \beta^2) + 2\alpha(1+\beta)\cos(\omega) + 2\beta\cos(2\omega). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_Y(k) = (1 + \alpha^2 + \beta^2)\delta(k) &+ \alpha(1+\beta)[\delta(k-1) + \delta(k+1)] \\ &+ \beta[\delta(k-2) + \delta(k+2)]. \end{aligned}$$

Ejemplo: filtro promediador

- X es ruido blanco de media nula y varianza unitaria y consideramos el proceso

$$Y(n) = \frac{1}{M+1} \sum_{k=0}^{M} X(n-k).$$

- En este caso,

$$S_Y(\omega) = \sum_{m=0}^{M} c_m \cos(\omega m) = \frac{1}{M+1} + 2 \sum_{m=1}^{M} \frac{M-m+1}{(M+1)^2} \cos(\omega m).$$

$$R_Y(k) = \frac{1}{M+1} \delta(k) + \sum_{m=1}^{M} \frac{M-m+1}{(M+1)^2} [\delta(k-m) + \delta(k+m)].$$

Procesos MA

Esta diapositiva es apenas distinta de la de la clase 12_5

- El proceso MA se puede pensar como la salida de un sistema LTI excitado por ruido blanco

No existe la transformada Z de un proceso.
La notación es desprolija, pero útil

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} X(z)$$

- Los coeficientes b_k determinan la ubicación de los ceros del sistema

$$b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_M z^{-M} = 0$$

- Ubicando adecuadamente los ceros, se obtienen distintos procesos

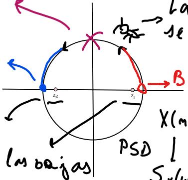
Ejemplo: MA-2

La amplificación es proporcional a la distancia a los ceros

$z_1 = -z_2$

La hormiguita se va moviendo sobre el círculo

ALTAS FREC



BAJAS FREC

mata las altas

mata las bajas

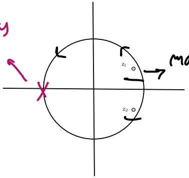
$X(n) \to H(\omega) \to Y(n)$

PSD $\downarrow$ $S_X(\omega)$ PSD $\downarrow$ $S_Y(\omega)$

$$Y(n) = X(n) - \beta X(n-2)$$

$z_1 = z_2^*$

amplifica las altas



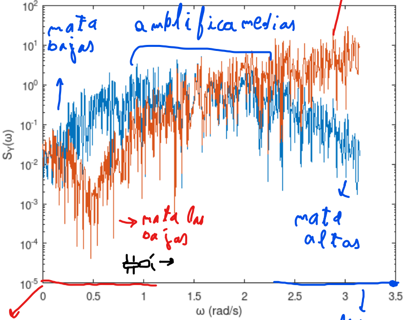
matan las bajas

$$Y(n) = X(n) + \alpha X(n-1) + \beta X(n-2)$$

$$\alpha = 2\,\mathrm{Re}(z)\,,\ \beta = |z|^2$$

Esto es la transformada de la salida del sistema cuando a la entrada hay ruido blanco

amplifica las altas



BAJAS FRECUENCIAS

ALTAS FREC

ceros reales (trazo azul),

ceros conjugados (trazo rojo)

Procesos AR-N

Como la ec. en dif del filtro F.I.R., pero al revés

La salida en el instante k es la entrada en k más la salida en tiempos anteriores. (todo multiplicado x las constantes que corresponda)

$$\sum_{i=0}^{N} a_i Y(k-i) = X(k).$$

Estudiamos nuestros sistemas poniendo un ruido blanco a la entrada como en señales los estudiábamos poniendo una delta a la entrada.

- El sistema asociado es IIR con respuesta en frecuencia

$$H(\omega) = \frac{1}{\sum_{i=0}^{N} a_i e^{-j\omega i}}.$$

¿Qué tienen en común la delta y el ruido blanco? ==> Que la transformada de la delta y la PSD del ruido blanco son constantes, tienen componentes en todas las frecuencias.

- Los polos son las raices del polinomio

Solo va a tener polos. Es para quilombo.

$$D(z) = \sum_{i=0}^{N} a_i z^{N-i}.$$

Cada día más cerca de hacer una bomba

- Decimos que es un proceso AR-N (*autoregressive* o autorregresivo de orden N). → Que nombres místicos q' tienen estos procesos

Caracterización de procesos AR-N

Si X es ruido blanco de media nula y varianza σ^2,

$$\mathbb{E}[Y] = 0$$

$$\begin{aligned} S_Y(\omega) &= \frac{\sigma^2}{\left|\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k}\right|^2} = \frac{\sigma^2}{\sum_{k=0}^{N}\sum_{p=0}^{N} a_k a_p e^{-j\omega(k-p)}} \\ &= \frac{\sigma^2}{\sum_{p=0}^{N} d_p \cos(\omega p)}, \end{aligned}$$

donde

$$d_p = \begin{cases} \sum_{k=0}^{N} a_k^2 & \text{si } p = 0, \\ 2\sum_{k=0}^{N-p} a_k a_{k+p} & \text{si } p \neq 0. \end{cases}$$

Caracterización de procesos AR-1

- Proceso AR-1: Salida actual — Salida en el pasado — entrada

$$a_0 Y(n) + a_1 Y(n-1) = X(n)$$

El polo del sistema está en $z = -a_1/a_0$. En forma equivalente, con $\alpha = -a_1/a_0$,

$$Y(n) = \alpha Y(n-1) + X(n), \qquad |\alpha| < 1.$$

- $$S_Y(\omega) = \frac{\sigma^2}{|1 - \alpha e^{-j\omega}|^2} = \frac{\sigma^2}{1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos(\omega)}.$$

- Vimos que

Conviene tenerla a mano

$$R_Y(k) = \frac{\alpha^{|k|}}{1-\alpha^2}$$

Va de $-\infty$ a $+\infty$, no como el proceso M.A.

Caracterización de procesos AR-1 (cont.)

- Si $\alpha > 0$, Y es un proceso de bajas frecuencias. OBS: la transferencia del sistema es $H(z) = \frac{1}{a_0 + a_1 z^{-1}}$

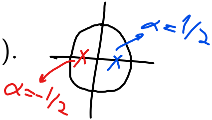
$$S_Y(0) = \frac{\sigma^2}{(1-\alpha)^2} > \frac{\sigma^2}{(1+\alpha)^2} = S_Y(\pi).$$

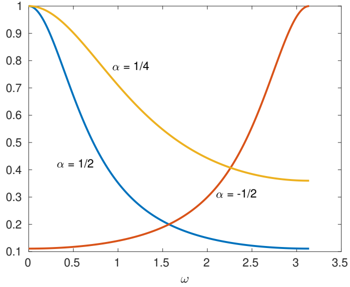
polo $= \frac{-a_1}{a_0} = \alpha$

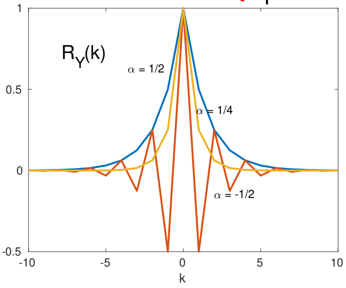
- Si $\alpha < 0$, Y es un proceso de altas frecuencias.

los polos son crestas
los ceros son sumideros.

$$S_Y(0) = \frac{\sigma^2}{(1-\alpha)^2} < \frac{\sigma^2}{(1+\alpha)^2} = S_Y(\pi).$$







Caracterización de procesos AR-2

- Consideremos un proceso AR-2 general:

$$a_0 Y(n) = -a_1 Y(n-1) - a_2 Y(n-2) + b_0 X(n), \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

- Tomamos $b_0 = 1$. Luego, tomando $\alpha = -a_1/a_0$ y $\beta = -a_2/a_0$,

$$Y(n) = \alpha Y(n-1) + \beta Y(n-2) + X(n), \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

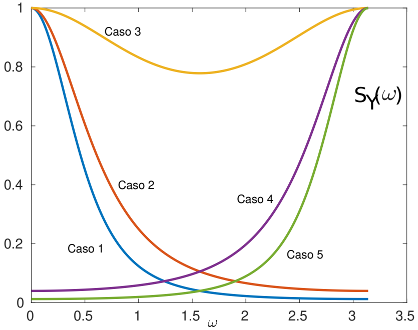
  Los polos z_i son las raíces de $D(z) = z^2 - \alpha z - \beta$. En cualquier caso, α y β deben ser tales que $|z_i| < 1$.

- Utilizando Wiener-Kintchin, tenemos

$$\begin{aligned} S_Y(\omega) &= \frac{\sigma^2}{|1 - \alpha e^{-j\omega} - \beta e^{-j2\omega}|^2} \\ &= \frac{\sigma^2}{(1 + \alpha^2 + \beta^2) + 2\alpha(\beta - 1)\cos(\omega) - 2\beta\cos(2\omega)}. \end{aligned}$$

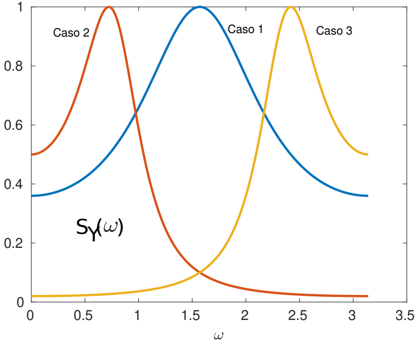
Ejemplo: proceso AR-2 con polos reales

$$\begin{cases} 1: \; 4Y(n) = 4Y(n-1) - Y(n-2) + X(n) & z_1 = z_2 = \frac{1}{2} \\ 2: \; 8Y(n) = 6Y(n-1) - Y(n-2) + 3X(n) & z_1 = \frac{1}{4} \;, \; z_2 = \frac{1}{2} \\ 3: \; 16Y(n) = Y(n-2) + 15X(n) & z_1 = \frac{1}{4} \;, \; z_2 = \frac{-1}{4} \\ 4: \; 8Y(n) = -3Y(n-1) - Y(n-2) + 3X(n) & z_1 = \frac{-1}{4} \;, \; z_2 = \frac{-1}{2} \\ 5: \; 44Y(n) = -Y(n-1) - Y(n-2) + X(n) & z_1 = z_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$



Ejemplo: proceso AR-2 con polos complejos conjugados

$$\begin{cases} 1: \; 4Y(n) = -Y(n-2) + 4X(n) & z_1 = \jmath\frac{1}{2} \quad , \quad z_2 = -\jmath\frac{1}{2} \\ 2: \; 2Y(n) = 2Y(n-1) - Y(n-2) + 2X(n) & z_1 = \frac{1}{2}(1+\jmath) \quad , \quad z_2 = \frac{1}{2}(1-\jmath) \\ 3: \; 2Y(n) = -2Y(n-1) - Y(n-2) + 2X(n) & z_1 = \frac{-1}{2}(1+\jmath) \quad , \quad z_2 = \frac{-1}{2}(1-\jmath) \end{cases}$$



Ejercicio: Correlación cruzada

Sea $Y(n)$ un proceso AR-1,

$$Y(n) + a_1 Y(n-1) = X(n) \longrightarrow Y(n) = X(n) - a_1 Y(n-1)$$

- Demuestre que $Y(n)$ y $X(n)$ son CESA
- Calcule $R_{XY}(k)$ para $k < 0$ y $k > 0$.

Ejercicio: Correlación cruzada (cont)

Vamos a calcular $R_{XY}(k)$. Por definición:

$$
\begin{aligned}
R_{XY}(k) &= \mathbb{E}[X(n)Y(n+k)] \\
&= \mathbb{E}\{X(n)\,[X(n+k) - a_1 Y(n+k-1)]\} \\
&= \mathbb{E}\Big\{X(n)\,[X(n+k) - a_1\,[X(n+k-1) - a_1 Y(n+k-2)]] \\
&= R_X(k) - a_1 R_X(k-1) + a_1^2 R_X(k-2) - \ldots = \sum_{l=0}^{+\infty} (-a_1)^{\ell} R_X(k-l)
\end{aligned}
$$

$X(n)$ es blanco, luego $R_X(k) = \sigma_X^2 \delta(k)$

- $k \geq 0$:

$$R_{XY}(k) = -a_1^k \sigma_X^2$$

- $k < 0$:

$$k - l < 0, l = 0, 1, 2....$$

Luego, $R_{XY}(k) = 0$ para todo valor de $k < 0$.

Modelado AR: Ecuaciones de Yule-Walker

Problema: Partiendo de un proceso $Y(n)$, obtener los coeficientes $a_i\,,\ i=1,\cdots N$, que lo modelan como un proceso AR-N.

OBJETIVO

- $Y(k)+\sum_{i=1}^{N} a_i Y(k-i) = X(k)$

- Multiplico ambos miembros por $Y(k+p)$:

$$\left\{Y(k)+\sum_{i=1}^{N} a_i Y(k-i)\right\} Y(k+p) \;=\; X(k)Y(k+p).$$

- Tomo esperanza:

$$\underbrace{\mathbb{E}\left[Y(k)Y(k+p)\right]}_{R_Y(p)}+\sum_{i=1}^{N} a_i \underbrace{\mathbb{E}\left[Y(k-i)Y(k+p)\right]}_{R_Y(p+i)}=\underbrace{\mathbb{E}\left[X(k)Y(k+p)\right]}_{R_{XY}(p)}.$$

Modelado AR: ecuaciones de Yule-Walker (cont)

- El sistema es causal. Luego, asumiendo $h(0) = 1$, tenemos

$$Y(k+p) = X(k+p) + \boxed{\sum_{q=1}^{\infty} h[q]X(k+p-q).}$$

Y (k+p)

- Luego, $R_{XY}(p) = \mathbb{E}[X(k)Y(k+p)]$

$$\mathbb{E}[X(k)Y(k+p)] = \sum_{q=0}^{\infty} h[q] \underbrace{\mathbb{E}[X(k)X(k+p-q)]}_{R_X(p-q)}.$$

- $X(k)$ es ruido blanco y $R_X(q) = \sigma_X^2 \delta(q)$. Luego,

$$R_{XY}(p) = \sigma_X^2 \sum_{q=0}^{\infty} h[q]\delta(p-q) \longrightarrow R_{XY}(p) = \begin{cases} \sigma_X^2 h(p) & p \geq 0 \\ 0 & p < 0 \end{cases}$$

Modelado AR: ecuaciones de Yule-Walker

Reemplazando en la ecuación en diferencias:

Ecuaciones de Yule-Walker

$$R_Y(p) + \sum_{i=1}^{N} a_i R_Y(p+i) = \sigma_X^2 \delta(p) \qquad p = 0, 1, \cdots$$

$$R_Y(p) = R_Y(-p)$$

- Las ecuaciones de YW obtienen una rama de $R_Y(p)$. La autocorrelación para $p < 0$ se obtiene por propiedades de la autocorrelación.

Modelado AR: ecuaciones de Yule-Walker

Si el objetivo es identificación de modelos, hay $N+1$ incógnitas,

$$a_1, \cdots, a_N, \sigma_X.$$

- Partimos de la ecuación en diferencias para $R_Y(p)$

$$R_Y(p) + \sum_{i=1}^{N} a_i R_Y(p+i) = \sigma_X^2 \delta(p) \qquad p = 0, 1, \cdots$$

- Planteamos sistema de $N+1$ ecuaciones

$$\underbrace{\begin{bmatrix} R_Y(0) & R_Y(1) & \dots & R_Y(N) \\ R_Y(-1) & R_Y(0) & \dots & R_Y(N\cancel{+}-1) \\ \vdots & & \ddots & R_Y(1) \\ R_Y(-N) & \dots & & R_Y(0) \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}_{N+1}} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_X^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ecuaciones de Yule-Walker: forma más compacta

- Definimos el vector

$$\mathbf{r}_N = \begin{bmatrix} R_Y(1) \\ \vdots \\ R_Y(N) \end{bmatrix}$$

- Particionamos $\mathbf{R}_{N+1}$ en bloques

Recordar q' $R_Y(n)$ es par

$$\left[\begin{array}{c|ccc} R_Y(0) & R_Y(1) & \dots & R_Y(N) \\ \hline R_Y(-1) & R_Y(0) & \dots & R_Y(N+1) \\ \vdots & & \ddots & R_Y(1) \\ R_Y(-N) & \dots & & R_Y(0) \end{array}\right] = \begin{bmatrix} R_Y(0) & \mathbf{r}_N^t \\ \mathbf{r}_N & \mathbf{R}_N \end{bmatrix}$$

- El vector de incógnitas es $\mathbf{a}_N = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}$

Ecuaciones de Yule-Walker: forma más compacta

$$\begin{bmatrix} R_Y(0) & \mathbf{r}_N^t \\ \mathbf{r}_N & \mathbf{R}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{a}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_X^2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{N+1} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{a}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_X^2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Son las mismas ecuaciones, escritas de otro modo

¿cuál es la intuición en todo esto?

Solución de las ecuaciones de YW

Si conocemos la función de autocorrelación $R_Y(k)$, se puede resolver el sistema en etapas:

1. $\mathbf{r}_N + \mathbf{R}_N \mathbf{a}_N = 0 \longrightarrow \mathbf{a}_N = -\mathbf{R}_N^{-1} \mathbf{r}_N$

2. $\sigma_X^2 = R_Y(0) - \mathbf{r}_N^t \mathbf{R}_N^{-1} \mathbf{r}_N$

Por lo general, $R_Y(k)$ tiene que ser estimada a partir de una realización del proceso

$$y(1), \cdots y(L) \quad , \quad L \gg N.$$

Procesos ARMA

- El caso más general de un proceso descripto por ecuaciones en diferencias, es un proceso ARMA. Se puede pensar como una cascada de un filtro AR y un filtro MA:

$$H(\omega) = \frac{1}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k}} \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k} = H_{\mathrm{AR}}(\omega) H_{\mathrm{MA}}(\omega).$$

- Si la entrada es blanca,

$$S_Y(\omega) = \sigma^2 \left| \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k}} \right|^2 = \sigma^2 \frac{\sum_{n=0}^{M} c_n \cos(\omega n)}{\sum_{n=0}^{N} d_n \cos(\omega n)},$$

donde los coeficientes c_n y d_n se obtienen planteando una descomposición en fracciones simples.

- El sistema LTI asociado a un proceso ARMA tiene polos y ceros.

Ejemplo: sistema ARMA-(2,2)

$$Y(n) - \frac{1}{4}Y(n-2) = X(n) - X(n-1) - 2X(n-2),$$

$H(\omega) = \frac{1-e^{-j\omega}-2e^{-j2\omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j2\omega}}$. Polos y ceros: $p_1 = \frac{1}{2}, p_2 = -\frac{1}{2}$ y $z_1 = -1, z_2 = 2$.

$$S_Y(\omega) = |H(\omega)|^2 = \left|\frac{1-e^{-j\omega}-2e^{-j2\omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j2\omega}}\right|^2 = 8\frac{\cos(\omega)+1}{\cos(\omega)+\frac{5}{4}}$$