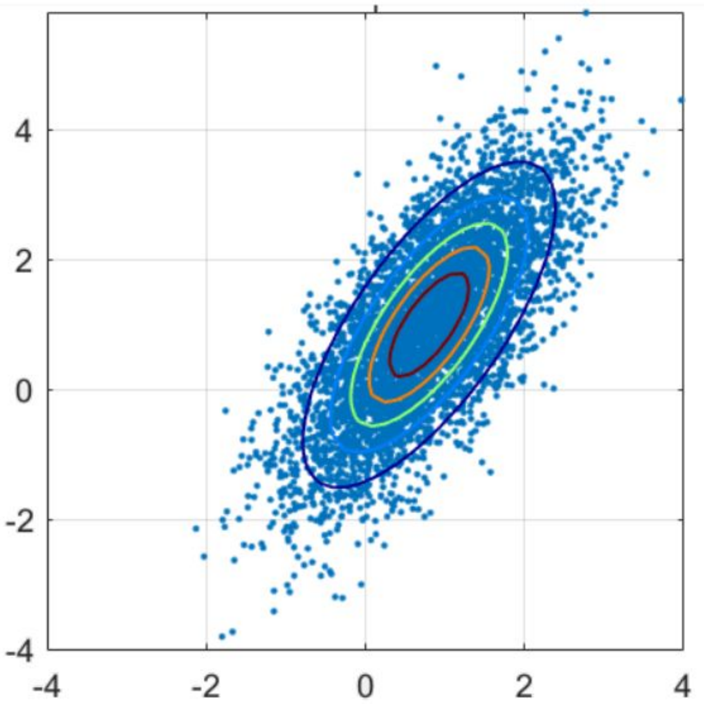
Procesos estocásticos (86.09)

- Gaussiana Multivariable
- Transformación afín



Vector Aleatorio (VeA)

Vector aleatorio $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$

VA $\in \mathbb{R}$
(escalar)

VA $\in \mathbb{R}^n$
(vectorial)

Propiedades de la matriz de covarianza

Matriz de Covarianza

$$C_{\mathbf{X}} = \mathbb{E}\left[(\mathbf{X} - \mu_{\mathbf{X}})(\mathbf{X} - \mu_{\mathbf{X}})^T\right] \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Propiedades de la matriz de covarianza:

- Simétrica $C_X = C_X^T$
  - Autovectores ortonormales $\mathbf{p}_i \perp \mathbf{p}_j$
- Semidefinida positiva $C_X \geq 0$
  - Autovalores positivos $\lambda_i \geq 0$
- Diagonalización:

$$Cx = P \Lambda P^t$$

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 \cdots & \mathbf{p}_n \end{pmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Vector aleatorio gaussiano

Vector Aleatorio Gaussiano

$$\boxed{\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\mu_{\mathbf{X}}, C_{\mathbf{X}})}$$

$$\begin{cases} \mathbb{E}[\mathbf{X}] = \mu_{\mathbf{X}} = \mathbb{E}\left[\begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix} \mathbb{E}[X_1] \\ \vdots \\ \mathbb{E}[X_n] \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \\ \\ C_{\mathbf{X}} = \mathbb{E}\left[(\mathbf{X} - \mu_{\mathbf{X}})(\mathbf{X} - \mu_{\mathbf{X}})^T\right] \in \mathbb{R}^{n \times n} \end{cases}$$

Función de densidad normal multivariada

$$\boxed{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(C_{\mathbf{X}})}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mu_{\mathbf{X}})^T C_{\mathbf{X}}^{-1}(\mathbf{x} - \mu_{\mathbf{X}})\right)}$$

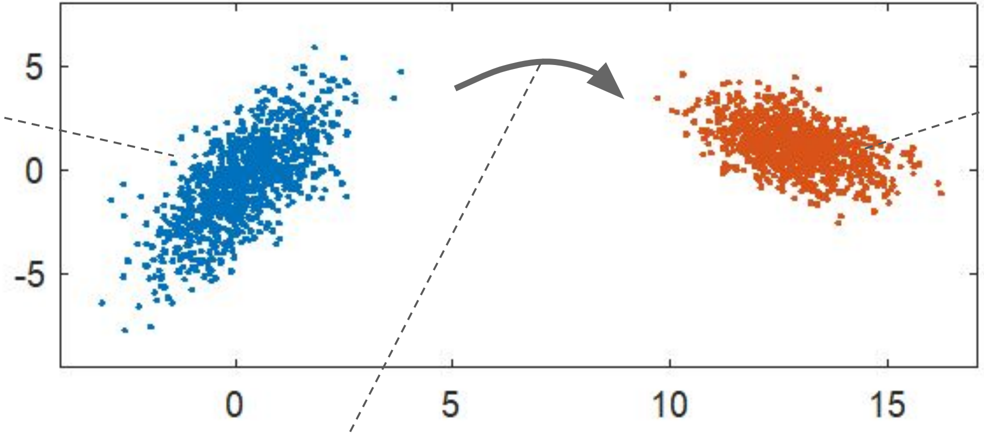
Transformación Afín

Transformación Afín

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{E}[\mathbf{X}] \in \mathbb{R}^n$$

$$C_{\mathbf{X}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$



$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{E}[\mathbf{Y}] \in \mathbb{R}^m$$

$$C_{\mathbf{Y}} \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

$$\mathbf{Y} = A\,\mathbf{X} + \mathbf{u}$$

constantes determinísticas:

$$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$$

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$\mathbb{E}[\mathbf{Y}] = A\,\mathbb{E}[\mathbf{X}] + \mathbf{u}$$

$$C_{\mathbf{Y}} = A\,C_{\mathbf{X}}\,A^T$$

Ejercicio 1

Ejercicio 1
Transformación afín

Sea un vector aleatorio $\boldsymbol{X} = [X_1\ X_2\ \ldots\ X_n]^T$, y una transformación lineal $\boldsymbol{Y} = A\,\boldsymbol{X} + \boldsymbol{b}$, donde $A \in \mathbb{R}^{m\mathrm{x}n}$ y $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, Demostrar que para el vector aleatorio resultante $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^m$ se cumple:

1. $\mathrm{E}[\boldsymbol{Y}] = A\,\mathrm{E}[\boldsymbol{X}] + \boldsymbol{b}$
2. $C_Y = A\,C_X\,A^T$

Ejercicio 1
Transformación afín

1)

$$\mathbf{Y} = A\,\mathbf{X} + \mathbf{b}$$

$$\mathbb{E}[\mathbf{Y}] = A\,\mathbb{E}[\mathbf{X}] + \mathbf{b}$$

$$\mu_Y = A\mu_X + \mathbf{b}$$

2)

$$\mathbf{Y} - \mathbb{E}[\mathbf{Y}] = A\,(\mathbf{X} - \mathbb{E}[\mathbf{X}])$$

$$C_{\mathbf{Y}} = \mathbb{E}\left[(\mathbf{Y} - \mathbb{E}[\mathbf{Y}])(\mathbf{Y} - \mathbb{E}[\mathbf{Y}])^T\right] =$$

$$= \mathbb{E}\left[A\,(\mathbf{X} - \mathbb{E}[\mathbf{X}])\{A(\mathbf{X} - \mathbb{E}[\mathbf{X}])\}^T\right] =$$

$$= \mathbb{E}\left[A\,(\mathbf{X} - \mathbb{E}[\mathbf{X}])(\mathbf{X} - \mathbb{E}[\mathbf{X}])^T A^T\right] =$$

$$= A\,\mathbb{E}\left[(\mathbf{X} - \mathbb{E}[\mathbf{X}])(\mathbf{X} - \mathbb{E}[\mathbf{X}])^T\right] A^T =$$

$$= A\,C_{\mathbf{X}} A^T$$

Ejercicio 2

Ejercicio 2
Transformación afín

Sea un vector aleatorio $\boldsymbol{X} = [X_1\ X_2\ \dots\ X_n]^T$, de media $\boldsymbol{\mu}_X$ y covarianza $C_X = P_X \Lambda_X P_X^T$. Para una transformación afín $\boldsymbol{Y} = A\,\boldsymbol{X} + \boldsymbol{b}$, donde $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ y $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, demostrar que si $A = P_X^T$ y $\mathbf{b} = -A\boldsymbol{\mu}_X$, el vector aleatorio resultante $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^m$ cumple:

1. $\boldsymbol{\mu}_Y = \mathbf{0}$
2. $C_Y = \Lambda_X$ (matriz diagonal)

Ejercicio 2
Transformación afín

1. Si se define: $\boxed{\mathbf{b} = -A\,\mu_{\mathbf{X}}}$

$$\mathbf{Y} = A\,(\mathbf{X} - \mu_{\mathbf{X}})$$

$$\mu_{\mathbf{Y}} = \mathbb{E}\left[A\,(\mathbf{X} - \mu_{\mathbf{X}})\right] = \mathbf{0}$$

2. Si se define: $\boxed{A = P_X{}^{\mathrm{T}}}$

$$\begin{aligned} C_{\mathbf{Y}} &= \mathbb{E}\left[(\mathbf{Y} - \mu_{\mathbf{Y}})\,(\mathbf{Y} - \mu_{\mathbf{Y}})^T\right] = \mathbb{E}\left[\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T\right] \\ &= \mathbb{E}\left[A\,(\mathbf{X} - \mu_{\mathbf{X}})\,(\mathbf{X} - \mu_{\mathbf{X}})^T\;A^T\right] \\ &= A\,\mathbb{E}\left[(\mathbf{X} - \mu_{\mathbf{X}})\,(\mathbf{X} - \mu_{\mathbf{X}})^T\right]\;A^T \\ &= A\,C_{\mathbf{X}}\,A^T = A\;P_X\,\Lambda_{\mathrm{X}}\,P_X{}^{\mathrm{T}}\,A^{\mathrm{T}} = \Lambda_{\mathrm{X}} \end{aligned}$$

Diagonal

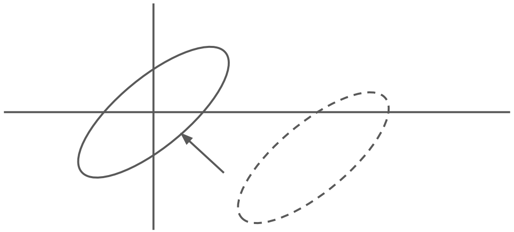
Transformación Afín - Descorrelación y centrado

Buscamos generar un VeA **Y**, **centrado** (media nula) y **descorrelacionada** (covarianza diagonal) a partir de otra VeA **X arbitrario** mediante una **transformación afín.**

$\mathbf{Y} = A\,\mathbf{X} + \mathbf{b}$ $\quad A \in \mathbb{R}^{mxn}$ y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m}$ $\quad$ tal que $C_{\mathbf{X}} = P_X \Lambda_X P_X^T$

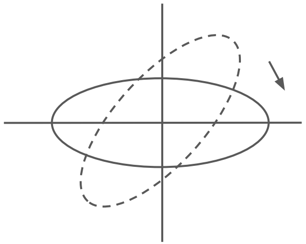
Centrado

Si se define: $\boxed{\mathbf{b} = -A\,\mu_{\mathbf{X}}}$



Descorrelación

Si se define: $\boxed{A = P_X^T}$



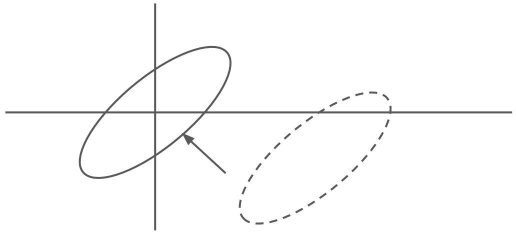
Transformación Afín - Centrado, descorrelación y Normalización

Buscamos generar un VeA **Z normal estándar** (media nula y covarianza identidad) a partir de otro VeA **X arbitrario** mediante una **transformación afín.**

$$\mathbf{Z} = A\,\mathbf{X} + \mathbf{b} \qquad A \in \mathbb{R}^{\mathrm{mxn}} \text{ y } \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{\mathrm{m}} \qquad \text{tal que } C_{\mathbf{X}} = P_X \Lambda_X P_X^{T}$$

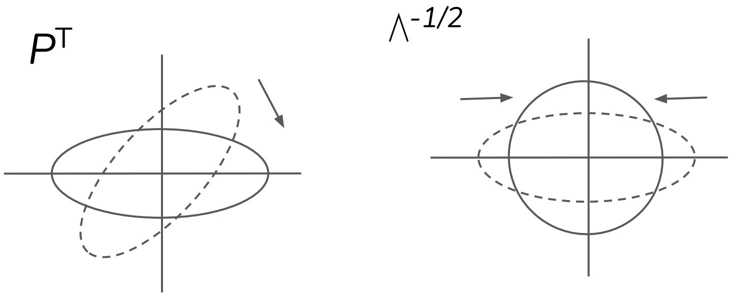
Centrado

Si se define: $\boxed{\mathbf{b} = -A\,\mu_{\mathbf{X}}}$



Descorrelación y normalización

Si se define: $\boxed{A = \Lambda^{-1/2} P^{T}}$



Transformación Afín

$C_X = P_X \Lambda_X P_X^T$

$\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_X, C_X)$

Descorrelación, centrado y normalización

$A = \Lambda_X^{-1/2} P_X^T$

$\mathbf{b} = -A\boldsymbol{\mu}_X$

$\mathbf{Z} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, I)$

Coloreado

$A = P_Y \Lambda_Y^{1/2}$

$\mathbf{b} = \boldsymbol{\mu}_Y$

$C_Y = P_Y \Lambda_Y P_Y^T$

$\mathbf{Y} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_Y, C_Y)$

Actividad 1

Actividad 1
Transformación afín- Coloreado

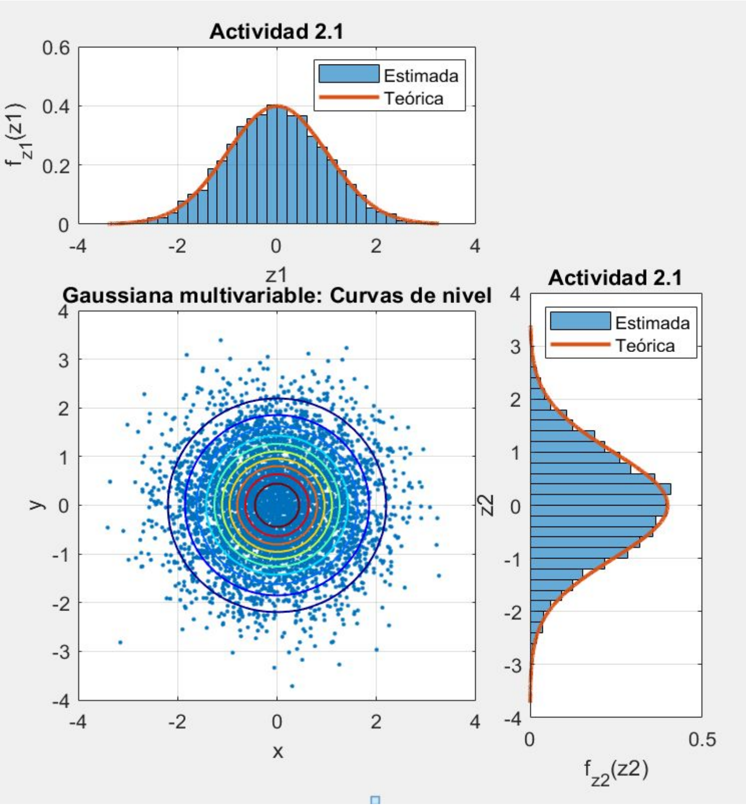
Se quiere utilizar una transformación lineal **Y** = A **Z** + **b** que permita convertir un vector aleatorio normal estándar con parámetros C_Z y $\boldsymbol{\mu}_Z$ en otro vector con parámetros $C_Y = [0.7 \;\; 0.8 \,;\, 0.8 \;\; 1.75]$ y $\boldsymbol{\mu}_Y = [0.8 \;\; 1.0]^T$.

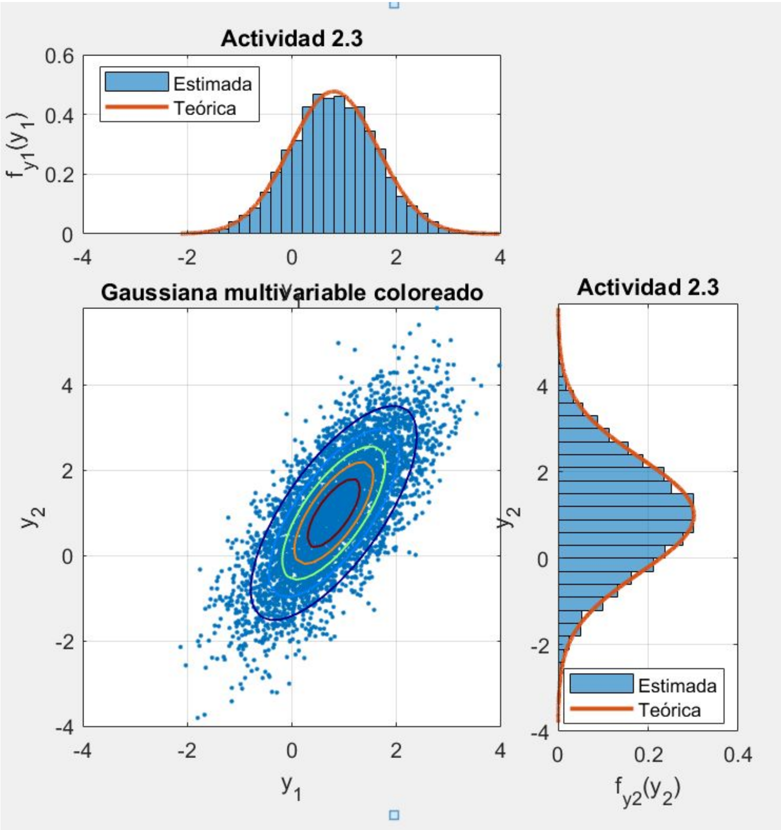
1. Genere un vector normal estándar de dos componentes $\boldsymbol{Z} = [Z_1 \; Z_2]^T$ de 2000 realizaciones con media nula $\boldsymbol{\mu}_Z = 0$ y covarianza $C_Z = I$ (identidad). Haga un gráfico de dispersión del vector **Z** (Z_2 vs Z_1) superpuesta a las curvas de nivel de la densidad conjunta $f_Z(\mathbf{z})$. Grafique también los histogramas de cada componente.

2. Suponiendo que la diagonalización de la covarianza de Y es $C_Y = P \Lambda P^T$, utilice la transformación afín para obtener el vector aleatorio **Y** a partir de las muestras generadas de **Z**. Haga un gráfico de dispersión del vector **Y** (Y_2 vs Y_1) superpuesta a las curvas de nivel de la densidad conjunta $f_Y(\mathbf{y})$. Grafique también los histogramas de cada componente.

Sugerencia: límites $-4 < Z_1 < 4$; $-4 < Z_2 < 4$; $-4 < Y_1 < 4$; $-4 < Y_2 < 6$

Actividad 1
Transformación afín- Coloreado





Actividad 2

Actividad 2
Transformación Afín - Descorrelación y centrado

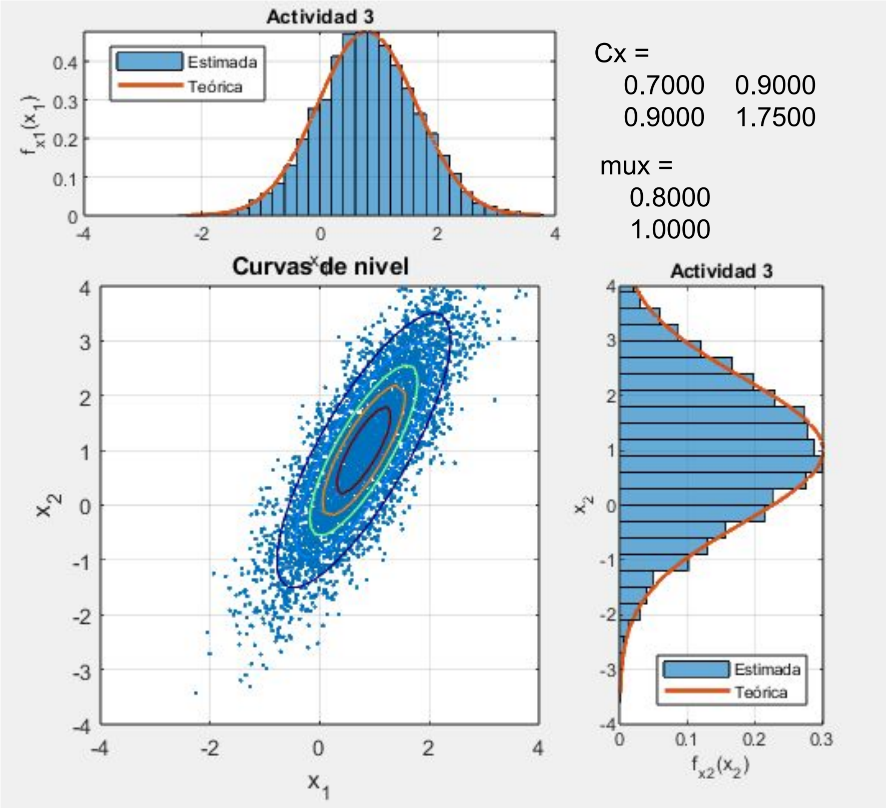
Genere un vector aleatorio normal de media $\boldsymbol{\mu}_X$ y covarianza C_X (de acuerdo a las definiciones abajo indicadas). Luego aplique una transformación para generar un nuevo vector **Y** descorrelacionado y de media nula, con N=2000 muestras. Haga los gráficos de dispersión de ambos vectores (**X** e **Y**) superpuestos a las curvas de nivel de la densidad $f_Y(\mathbf{y})$. También grafique los histogramas de cada componente.

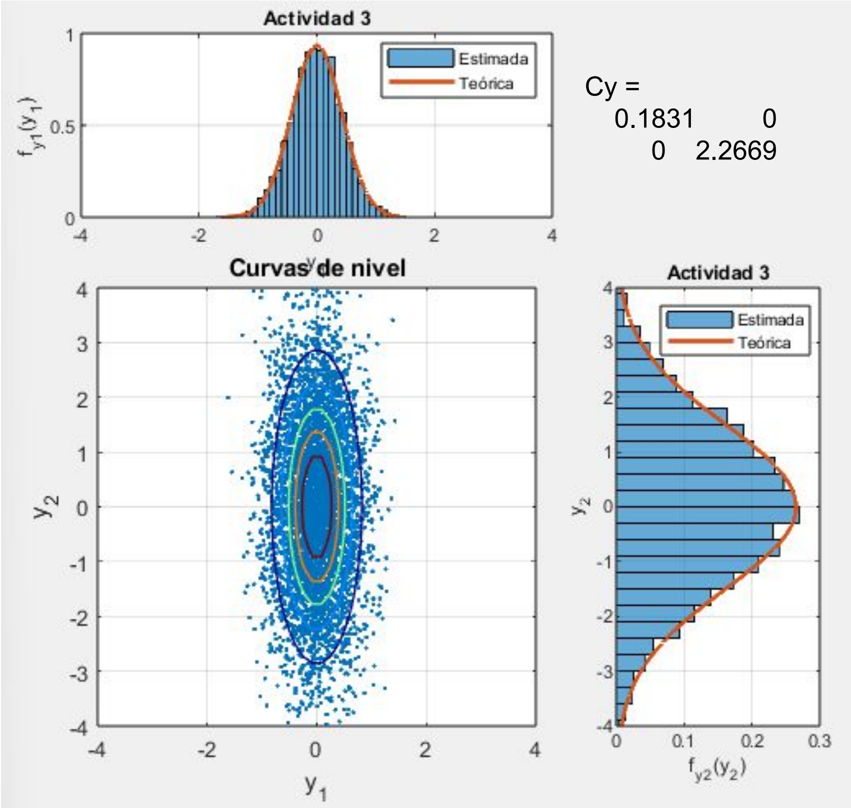
$$C_X = \begin{bmatrix} 0.70 & 0.90 \\ 0.90 & 1.75 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\mu}_X = \begin{bmatrix} 0.80 \\ 1.0 \end{bmatrix}$$

Sugerencia: límites $-4 < X_1 < 4$; $-4 < X_2 < 4$; $-4 < Y_1 < 4$; $-4 < Y_2 < 4$

Actividad 2

Transformación Afín - Descorrelación y centrado





Actividad 3

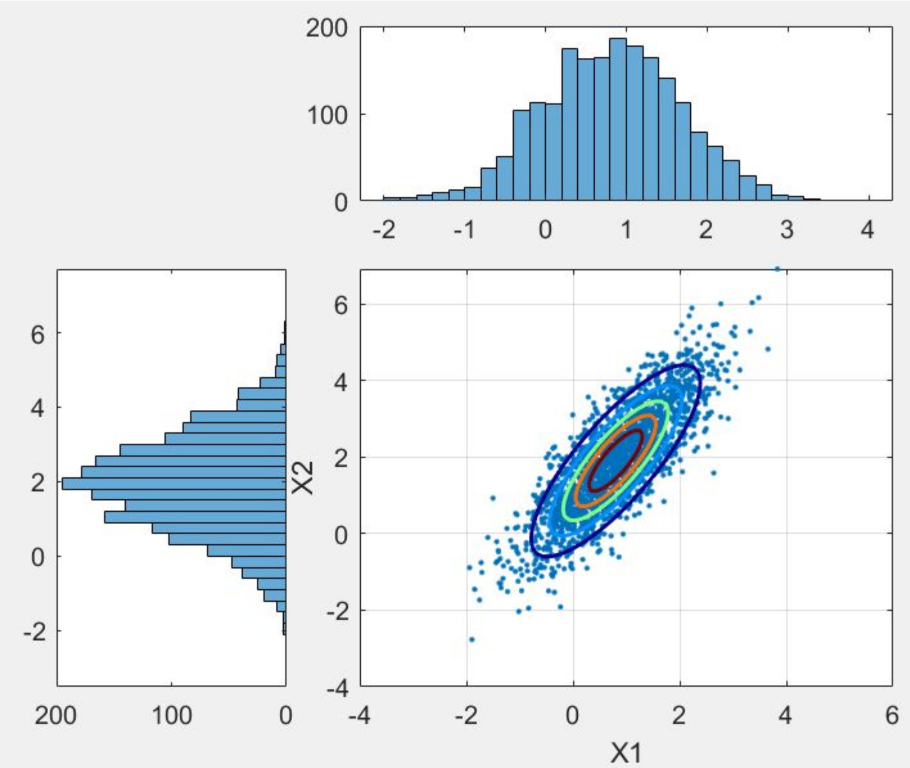
Actividad 3
Transformación Afín - Descorrelación, centrado y normalización

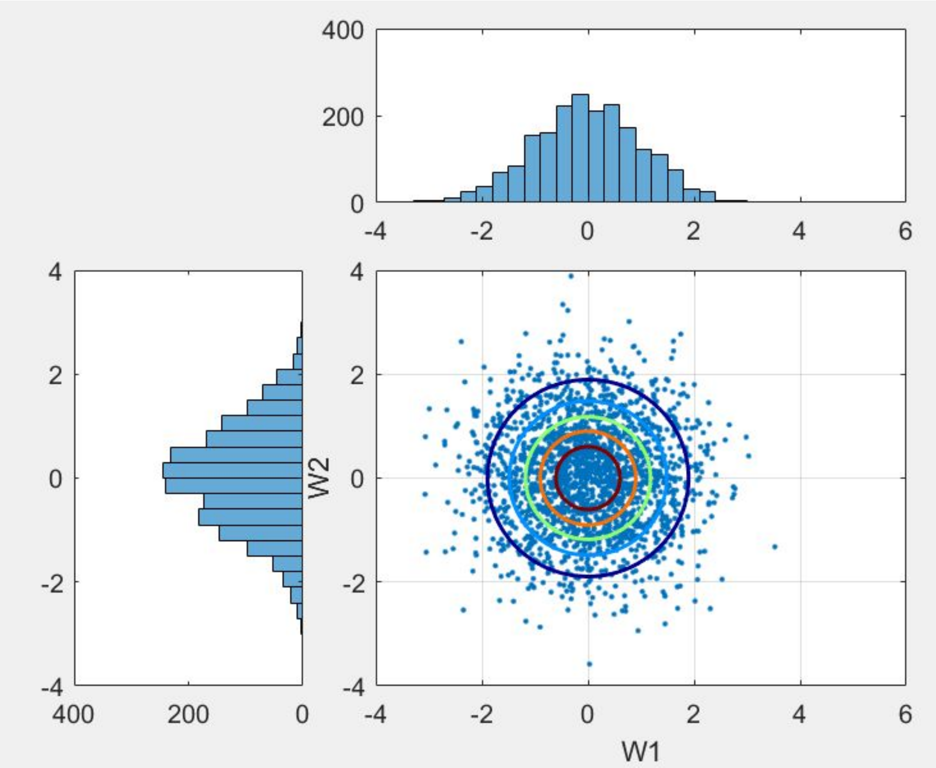
1. Para el VeA **X** de la actividad anterior, genere un vector aleatorio normal estándar **W** ~ $N(0,I)$ con N=2000 muestras, aplicando la transformación **W** = A**X**+**b**, eligiendo A y **b** adecuados.
2. Estime la media y la matriz de covarianza de **W** y verifique si se aproximan a lo esperado (~ $N(0,I)$).
3. Haga los gráficos de dispersión del VeA **W** superpuesto a las curvas de nivel teóricas esperadas. También grafique los histogramas de ambas componentes de **W**.

Sugerencia: límites $-4 < X_1 < 6$; $-4 < X_2 < 6$; $-4 < W_1 < 4$; $-4 < W_2 < 4$

Actividad 3

Transformación Afín - Descorrelación, centrado y normalización





Actividad 4

Actividad 4
Transformación Afín

1. Genere un VeA **X** ~ $N(\boldsymbol{\mu}_X, C_X)$ donde C_X = [0.7 0.8 ; 0.8 1.75] y $\boldsymbol{\mu}_X$= [0.8 1.0]^T.
2. Asumiendo que se dispone de un conjunto de N=2000 muestras del vector **X**, encuentre una transformación afín **Y** = A**X**+**b** tal que con las muestras de **X** se pueda generar un vector **Y** ~ $N(\boldsymbol{\mu}_Y, C_Y)$ con C_Y = [0.7 -0.6; -0.6 1.75] y $\boldsymbol{\mu}_Y$= [-0.5 1.5]^T.
3. Haga los gráficos de dispersión del VeA **X** e **Y** superpuestos a las curvas de nivel teóricas esperadas. También grafique los histogramas de ambas componentes para cada vector.

Sugerencia: límites $-4 < X_1 < 6$; $-4 < X_2 < 6$; $-4 < Y_1 < 4$; $-4 < Y_2 < 6$