Convergencia y teoremas límite

Ejercicio 1 Convergencia en distribución

Sea $B_i, i = 1, 2, \cdots$ una secuencia de variables aleatorias i.i.d., Bernoulli equiprobables. Considere el número $\xi \in [0, 1]$ determinado por la expansión binaria

$$\xi = \sum_{i=1}^{\infty} b_i 2^{-i}$$

donde b_i es una realización de la secuencia B_i. Explique por qué ξ es una v.a distribuida uniformemente en $[0, 1]$.

Ayuda:

$$\sin(\omega) = \omega \prod_{i=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\omega}{2^i}\right)$$

Ejercicio 2 Ley fuerte de los grandes números

Sea X una variable aleatoria discreta definida sobre un conjunto $\mathcal{X}$ y con función de probabilidad p_X. La entropía de la variable X se define como:

$$H(X) := -\mathbb{E}[\log(p_X(X))] = -\sum_{x \in \mathcal{X}} p_X(x) \log p_X(x).$$

1. Suponga que tiene una secuencia $X_1, X_2, \ldots$ de variables independientes con función de probabilidad p_X. Demuestre que entonces:

   $$-\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log p_X(X_i) \to H(X),$$

   siendo la convergencia en forma casi segura.
2. La entropía es una métrica del contenido de información de una variable aleatoria. Halle la entropía de una variable Bernoulli de parámetro p, y demuestre que la entropía es máxima cuando $p = 1/2$ (máxima información) y nula cuando es 0 o 1 (ninguna información).

Ejercicio 3 Convergencia en probabilidad

Sea Y una variable aleatoria, $X_1, X_2, ...$ secuencia de variables aleatorias y g una función continua.

1. Demuestre que si $X_n \xrightarrow{p} Y$ entonces $g(X_n) \xrightarrow{p} g(Y)$, es decir, las funciones continuas conservan la convergencia en probabilidad.
   Recordatorio: g es continua si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|x - x_0| < \delta$ implica que $|g(x) - g(x_0)| < \epsilon$.

2. Sea $X_1, X_2, ...$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d. de media nula y varianza σ_X^2. Demuestre la ley débil de los grandes números, es decir, que:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n\to\infty]{p} \mu.$$

Ayuda: utilice la desigualdad de Tchebycheff.

3. Demuestre que:

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2\right)^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow[n\to\infty]{p} \frac{1}{\sigma_X}.$$

Ayuda: use los dos incisos anteriores.

4. Demuestre que:

$$e^{\cos^2\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{p} e^{\cos^2(\sigma_X^2)}.$$

Sugerencia: use los incisos 1 y 2.

Ejercicio 4 Convergencia

El consumo de combustible de un micro durante un viaje es una variable aleatoria de la forma:

$$C(i) = V(i)X(i), \quad \text{[litros]},$$

donde las variables $V(i)$ y $X(i)$ son independientes y se sabe que $\mathbb{E}[V(i)] = 1$ y $\mathbb{E}[V(i)^2] = 2$, y $X(i)$ tiene media μ_X y varianza σ_X^2. Considere el consumo promedio al cabo de n viajes:

$$Y(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} V(i)X(i).$$

1. Halle la distribución aproximada del consumo promedio al cabo de $n = 365$ viajes asumiendo que el consumo entre viajes es independiente.
2. Suponga ahora que los consumos entre viajes son variables descorrelacionadas, analice el valor del límite de $Y(n)$ cuando $n \to \infty$ utilizando dos modos de convergencia.