86.09

PROCESOS ESTOCÁSTICOS

# Detección de particulas radioactivas
# Proceso aleatorio Poisson

## Trabajo Práctico N°2

### Grupo N°4

2C 2024


| **Autores:** | **Padrón:** | **Correo:** |
|---|---|---|
| Gonzalo Antahuara | 109965 | gantahuara@gmail.com |
| Marco Brischetto | 110008 | mbrischetto@fi.uba.ar |
| Ignacio Cavicchioli | 109428 | icavicchioli@fi.uba.ar |
| Tiago Sandoval | 104169 | tsandoval@fi.uba.ar |

# Índice

**1. Introducción** **2**

**2. Tiempo entre partículas detectadas** **2**
2.1. Estimación de media y varianza . . . . . 3
2.2. Histograma y función de probabilidad teórica . . . . . 3

**3. Cantidad de partículas detectadas** **4**
3.1. Estimación de media y varianza . . . . . 4
3.2. Histograma y función masa de probabilidad teórica . . . . . 5

**4. Conclusión** **5**

**5. Apéndice - Pseudocódigo** **6**
5.1. Ejercicio 1 . . . . . 6
5.2. Ejercicio 2 . . . . . 6

# 1. Introducción

El presente informe tiene como objetivo estudiar la estadística del proceso aleatorio que se produce en la detección de partículas radioactivas ionizantes por medio de un contador Geiger. Primero se analizará la variable aleatoria $\tau$, la cual corresponde al tiempo transcurrido entre partículas detectadas. Posteriormente se presentará la variable aleatoria $N(t)$, que describe la cantidad partículas detectadas en un intervalo de tiempo t. Utilizando los datos obtenidos mediante mediciones reales de un contador Geiger, se desarrolló un script en *Matlab* para graficar los histogramas y caracterizar a cada variable aleatoria.

# 2. Tiempo entre partículas detectadas

Como explican las consignas, el tiempo entre las partículas detectadas $\tau$ por un contador Geiger puede ser modelado como una variable aleatoria con distribución exponencial. Su función de densidad es la indicada en la ecuación (1).

$$f_\tau(t) = \lambda e^{-\lambda t}; \quad t \geq 0 \tag{1}$$

Desde una perspectiva física, el parámetro $\lambda$ caracteriza la frecuencia promedio con la que se espera detectar la siguiente partícula y su inversa, el tiempo promedio. Atendiendo a la teoría, es posible estimar $\lambda$ a partir de la media muestral del experimento realizado, dado que el estimador de máxima verosimilitud $\hat{\lambda}$ y la media muestral se encuentran relacionados mediante la ecuación (2).

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} t_i} = \frac{1}{\hat{\mu_\tau}} \tag{2}$$

Donde $t_i$ es el tiempo ente pulsos y n es la cantidad total de partículas detectadas en experimento. Una vez obtenido $\hat{\lambda}$, la varianza de $\tau$ se calcula mediante la siguiente expresión:

$$\mathbb{V}[\tau] = \sigma_\tau^2 = \frac{1}{\hat{\lambda}^2}$$

La frecuencia de arribos está relacionada con la rapidez de desintegración del material radioactivo.

### 2.1. Estimación de media y varianza

El pseudocódigo de este ejercicio se puede ver en la sección 5.1. Los resultados obtenidos en la estimación de la media y varianza se muestran a continuación.

$$\boxed{\hat{\mu_\tau} = 0,8337 \qquad \hat{\lambda} = 1,199 \qquad \hat{\sigma_\tau}^2 = 0,6916}$$

### 2.2. Histograma y función de probabilidad teórica

La figura 1 muestra superpuestos el histograma normalizado del tiempo entre arribos junto con la función de densidad teórica obtenida mediante la estimación de $\mu_\tau$ a partir de las muestras.

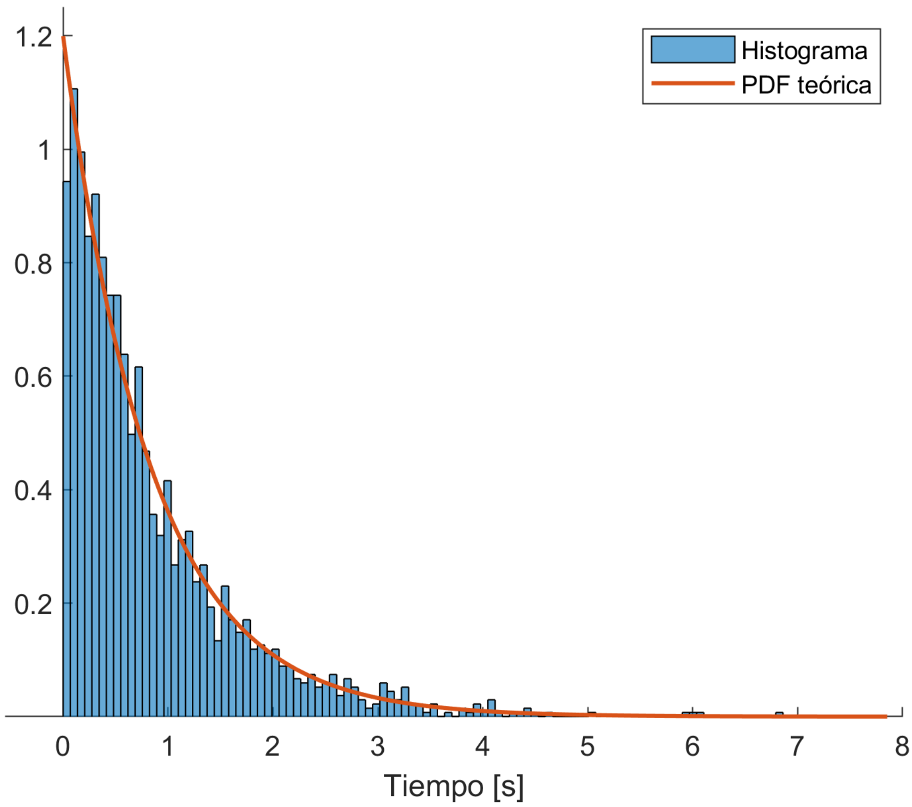


Figura 1: Histograma y función de densidad de probabilidad teórica de $\tau$.

Notamos que el resultado es consistente ya que la tendencia del histograma se condice visualmente con la curva exponencial estimada. Cabe mencionar que por cortos periodos de tiempo se presentan diferencias entre las graficas, que se le atribuyen a la aleatoriedad del proceso y a la cantidad de muestras usadas para estimar $\hat{\lambda}$. Una conclusión principal de este ejercicio es que los tiempos entre arribos de partículas radioactivas siguen una distribución exponencial. En el siguiente ejercicio se verifica si efectivamente se trata de un proceso de Poisson.

# 3. Cantidad de partículas detectadas

Ahora se desea considerar la cantidad de arribos observados dentro de un intervalo de tiempo determinado [0,t]. Atendiendo a la teoría, dicho fenómeno es modelable por medio de un proceso de Poisson $N(t)$ con función de masa de probabilidad según la ecuación (3).

$$p_N(k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}; \quad k \in \mathbb{Z}^+ \tag{3}$$

Notamos que el parámetro $\lambda$ es el mismo que para el caso del tiempo entre arribos. A su vez, la esperanza de $N(t)$ es $\lambda t$, la cual nos es útil para estimar el parámetro de la distribución Poisson a partir de la media muestral, ya que este es el estimador de máxima verosimilitud del parámetro.

## 3.1. Estimación de media y varianza

El pseudocódigo de este ejercicio se puede ver en la sección 5.2. Abajo se muestran la media y varianzas calculadas.

$$\boxed{\hat{\mu}_{N(t)} = 2{,}3985 \qquad \hat{\sigma}^2_{N(t)} = 2{,}3012}$$

Como se adelantó las consignas, N(t) es una variable aleatoria Poisson, por lo que su media y varianza deben ser similares. Se observa una diferencia porcentual de 4,228 % entre los parámetros. Además, el cociente entre la media calculada ($\hat{\mu}_{N(t)}$) y el parámetro de la variable exponencial ya tratada ($\hat{\lambda}$) es igual a 2,0004, valor casi idéntico a la duración de intervalo usada para crear las realizaciones del proceso. Esta coincidencia es indicadora de que el proceso de Poisson estudiado y el tiempo entre arribos están correctamente relacionados.

### 3.2. Histograma y función masa de probabilidad teórica

Tal como se pidió en las consignas, se generó el histograma normalizado y se le superpuso la PMF correspondiente. La imagen resultante se puede ver en la figura 2.

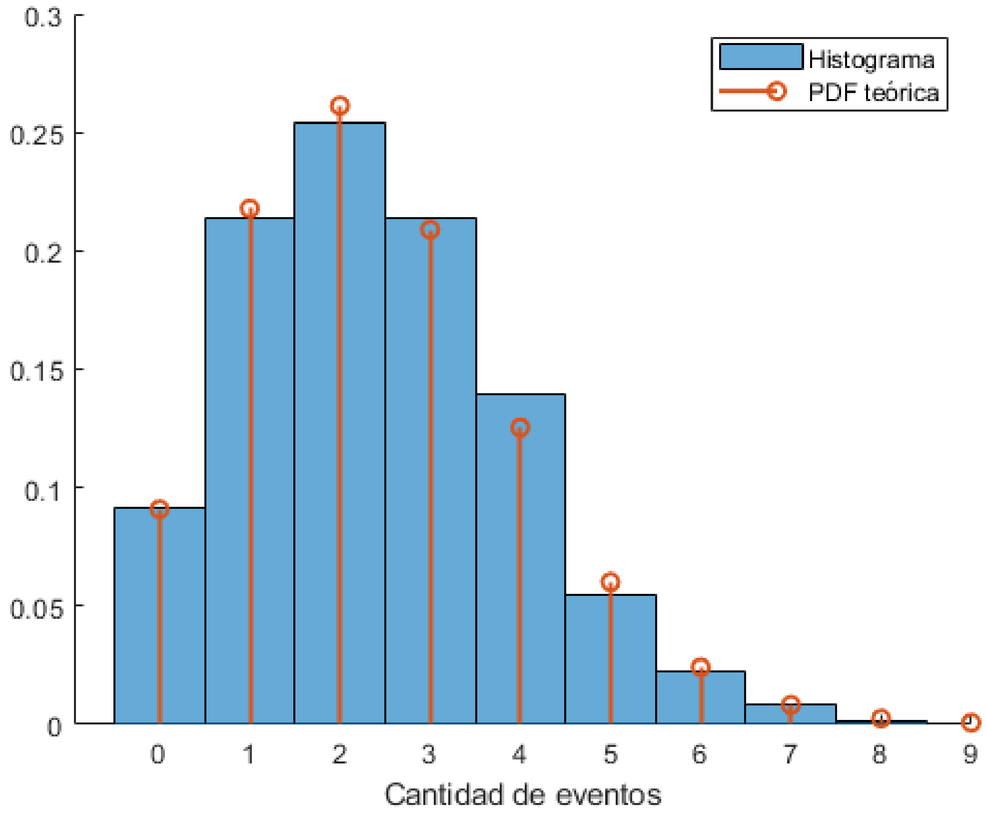


Figura 2: Histograma y función de masa de probabilidad teorica de $N(t)$.

Observando la imagen 2 se nota el histograma obtenido se condice visualmente con la función de probabilidad teórica de $N(t)$. Este resultado demuestra que las estimaciones de $\mu_{N(t)}$ y $\sigma^2_{N(t)}$ describen satisfactoriamente el proceso Poisson asociado al experimento realizado. Considerando el resultado del primer ejercicio, se puede confirmar que el arribo de partículas radioactivas a un contador Geiger se puede modelar por medio de un proceso de Poisson.

# 4. Conclusión

Se estudiaron los tiempos entre arribos y la cantidad de arribos por intervalos de las muestras provistas. Por medio del análisis de estos, se corroboró que el arribo de partículas radioactivas a un contador Geiger se puede describir por medio de un proceso de Poisson. También se pudo ahondar en el conocimiento de la relación de las variables extraibles de un proceso Poisson y en el uso de *Matlab* como herramienta de análisis.

# 5. Apéndice - Pseudocódigo

Abajo se detalla el pseudocódigo de cada ejercicio:

## 5.1. Ejercicio 1

1. Se importan los datos provistos al programa o software de elección. Estos datos toman forma de un vector de tiempos de arribos. En este vector los tiempos están referenciados a un tiempo inicial de valor cero. Los datos son ajustados a segundos.
2. Se genera un vector de tiempos entre arribos a partir del vector de tiempos de arribos. En este nuevo vector cada tiempo está referenciado al anterior, como si se hubiera puesto un temporizador que se reiniciaba en cada arribo. En la implementación entregada este vector se obtuvo por medio de un desplazamiento y una resta.
3. Para caracterizar a la variable aleatoria que sigue los tiempos entre arribos se computan la media y varianza del vector de tiempos entre arribos. Este vector contiene realizaciones de una variable exponencial.
4. Se genera un histograma normalizado de los datos y, usando los momentos calculados, se fabrica y superpone la PDF teórica. Esto permite comparar los datos con el comportamiento teórico.

## 5.2. Ejercicio 2

1. Tal como se hizo para el primer ejercicio, los datos se importan y ajustan a segundos.
2. Se define el intervalo de tiempo en el que se quiere separar el vector de tiempos arribos. En este caso se usaron 2 segundos.
3. Se toma el vector de tiempos de arribos y se separa en intervalos de duración elegida en el paso anterior.
4. Se crea un nuevo vector que contiene la cantidad de arribos por cada intervalo de tiempo. Es decir, se toma el intervalo n-ésimo, se cuenta la cantidad de arribos y se guarda esa cantidad en la posición n del nuevo vector.
5. El vector que cuenta la cantidad de arribos por intervalo se debe caracterizar por medio de su media y varianza. Este vector contiene realizaciones de una variable Poisson.
6. Se genera un histograma normalizado de los datos y, usando los momentos calculados, se fabrica y superpone la PMF teórica. Esto permite comparar los datos con el comportamiento teórico.