Estimación Lineal

Cecilia Galarza

Procesos Estocásticos
Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires

Estimación de Menor Error Cuadrático Medio

Sean $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^n$ e $\mathbf{Y} \in \mathbb{C}^m$ dos vectores aleatorios, cuya estadística conjunta es conocida. Se desea estimar $\mathbf{X}$ a partir de la observación de una realización $\boldsymbol{y}$, es decir, se busca una función

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{y}) \quad &: \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n \text{ tal que} \\ &\hat{\boldsymbol{x}} = g(\boldsymbol{y}) \quad \textit{esté cercano a } \mathbf{X} \end{aligned}$$

Si $\hat{\boldsymbol{x}} = g(\boldsymbol{y})$ es visto como la transformación del VeA $\mathbf{Y}$, entonces $\hat{\mathbf{X}}$ es un VeA. Un posible criterio de *cercanía* es el *Error Cuadrático Medio* (MSE, *Mean Square Error*)

$$MSE(\hat{\mathbf{X}}) = \mathbb{E}\left[\|\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}\|^2\right]$$

Estimador MMSE

Definición (Estimador MMSE)

El estimador MMSE (Minimun Mean Square Error) es el que minimiza $MSE(\hat{\mathbf{X}})$,

$$\hat{\mathbf{X}}_{mmse} = \arg \min_{\hat{\mathbf{X}}=g(\mathbf{Y})} \mathbb{E}\left[\|\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}\|^2\right]$$

Teorema

El estimador MMSE es la esperanza condicional

$$\hat{\mathbf{X}}_{mmse} = \mathbb{E}\left[\mathbf{X}|\mathbf{Y}\right]$$

$\hat{\mathbf{X}}_{mmse}$ es la esperanza condicional: demostración

Para simplificar notación, llamamos:

$$\mu(\mathbf{Y}) = \mathbb{E}[\mathbf{X}|\mathbf{Y}] \qquad \text{y} \qquad \Delta(\mathbf{Y}) = \mu(\mathbf{Y}) - \hat{\mathbf{X}}(\mathbf{Y}).$$

Luego,

$$\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}(\mathbf{Y}) = \mathbf{X} - \mu(\mathbf{Y}) + \mu(\mathbf{Y}) - \hat{\mathbf{X}}(\mathbf{Y}) = \mathbf{X} - \mu(\mathbf{Y}) + \Delta(\mathbf{Y}).$$

Retomando el MSE

$$\begin{aligned} MSE &= \mathbb{E}[\|\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}\|^2] = \mathbb{E}[(\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}(\mathbf{Y}))^*(\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}(\mathbf{Y}))] \\ &= \mathbb{E}\left[(\mathbf{X} - \mu(\mathbf{Y}) + \Delta(\mathbf{Y}))^*(\mathbf{X} - \mu(\mathbf{Y}) + \Delta(\mathbf{Y}))\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\|\mathbf{X} - \mu(\mathbf{Y})\|^2\right] & ① \\ &\quad + \mathbb{E}[(\mathbf{X} - \mu(\mathbf{Y}))^*\Delta(\mathbf{Y})] + \mathbb{E}[\Delta(\mathbf{Y})^*(\mathbf{X} - \mu(\mathbf{Y}))] & ② \\ &\quad + \mathbb{E}[\Delta(\mathbf{Y})^*\Delta(\mathbf{Y})] & ③ \end{aligned}$$

$\hat{\mathbf{X}}_{mmse}$ es la esperanza condicional: demostración

$$① = \mathbb{E}\left[\|\mathbf{X} - \mu(\mathbf{Y})\|^2\right]$$

No depende de $\hat{\mathbf{X}}$, no lo considero para la minimización

$\hat{\mathbf{X}}_{mmse}$ es la esperanza condicional: demostración

②

$$= \mathbb{E}\left[(\mathbf{X}-\mu(\mathbf{Y}))^* \underbrace{\left(\mu(\mathbf{Y})-\hat{\mathbf{X}}(\mathbf{Y})\right)}_{\Delta(\mathbf{Y})}\right] + \mathbb{E}\left[\underbrace{\left(\mu(\mathbf{Y})-\hat{\mathbf{X}}(\mathbf{Y})\right)^*}_{\Delta(\mathbf{Y})^*}(\mathbf{X}-\mu(\mathbf{Y}))\right]$$

Recordemos que $\forall$ $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbb{E}[\mathbf{X}] = \mathbb{E}_{\mathbf{X}}[\mathbb{E}_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}[\mathbf{X}|\mathbf{Y}]]$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(\mathbf{X}-\mu(\mathbf{Y}))^*\Delta(\mathbf{Y})] &= \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}[(\mathbf{X}-\mu(\mathbf{Y}))^*\Delta(\mathbf{Y})|\mathbf{Y}]\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}[\mathbf{X}^*\Delta(\mathbf{Y})-\mu(\mathbf{Y})^*\Delta(\mathbf{Y})|\mathbf{Y}]\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[\underbrace{\mathbb{E}[\mathbf{X}^*|\mathbf{Y}]}_{\mu(\mathbf{Y})^*}\Delta(\mathbf{Y})-\mu(\mathbf{Y})^*\Delta(\mathbf{Y})\Big] = 0
\end{aligned}$$

$\hat{\mathbf{X}}_{mmse}$ es la esperanza condicional: demostración

$$③ = \mathbb{E}[\|\Delta(\mathbf{Y})\|^2] = \mathbb{E}\left[\left\|\mu(\mathbf{Y}) - \hat{\mathbf{X}}\right\|^2\right] = \mathbb{E}\left[\left\|\mathbb{E}[\mathbf{X}|\mathbf{Y}] - \hat{\mathbf{X}}\right\|^2\right]$$

$\hat{\mathbf{X}}_{mmse}$ es la esperanza condicional: demostración

Recapitulando

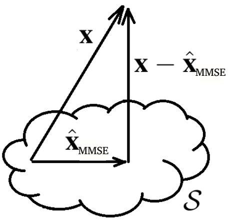
- ①, no depende de $\hat{\mathbf{X}}$
- ② es nulo
- ③ $= \mathbb{E}\left[\left\|\mathbb{E}[\mathbf{X}|\mathbf{Y}] - \hat{\mathbf{X}}\right\|^2\right]$

Minimizar MSE con respecto a $\hat{\mathbf{X}}(\mathbf{Y})$ equivale a minimizar ③. Luego,

$$\hat{\mathbf{X}}_{mmse} = \mathbb{E}[\mathbf{X}|\mathbf{Y}].$$

Principio de ortogonalidad

Recordemos que $\mathbf{X}$ y $\mathbf{Y}$ son ortogonales sii $\mathbb{E}[\mathbf{X}^*\mathbf{Y}] = 0$.



$$\mathbb{E}\left[\hat{\mathbf{X}}^*_{mmse}(\mathbf{Y})\left(\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}_{mmse}(\mathbf{Y})\right)\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\hat{\mathbf{X}}^*_{mmse}\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}^*_{mmse}\hat{\mathbf{X}}_{mmse}|\mathbf{Y}\right]\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[\hat{\mathbf{X}}^*_{mmse}\mathbb{E}[\mathbf{X}|\mathbf{Y}] - \hat{\mathbf{X}}^*_{mmse}\hat{\mathbf{X}}_{mmse}\right] = 0$$

Los vectores $\hat{\mathbf{X}}_{mmse}$ y $(\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}_{mmse})$ son ortogonales entre sí

Ejemplo

Sea la VA $Y = X + W$ donde $X \sim \text{Ber}(p)$ y $W \sim \mathcal{N}(0,1)$, X y W independientes. Halle el estimador MMSE de X al observar Y.

Sabemos que

$$\hat{X}_{mmse} = \mathbb{E}[X|Y].$$

Planteamos

$$\varphi(y) = \mathbb{E}[X|Y = y].$$

Esta función se conoce como función de *regresión*.

Ejemplo (cont.)

Como $X \sim \text{Ber}(p)$,

$$\varphi(y) = 0\,\mathbb{P}(X = 0|Y = y) + 1\,\mathbb{P}(X = 1|Y = y) = \mathbb{P}(X = 1|Y = y).$$

Usando la definición de probabilidad condicional y Bayes:

$$\mathbb{P}(X = 1|Y = y) = \frac{f_{Y|X=1}(y)\mathbb{P}(X = 1)}{f_Y(y)}.$$

Por definición Y es una mezcla de gaussianas:

$$f_Y(y) = (1-p)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}} + p\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-1)^2}{2}}.$$

Por otro lado,

$$f_{Y|X=1}(y) = f_W(y-1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-1)^2}{2}}.$$

Ejemplo (cont.)

Combinando todo se tiene:

$$\varphi(y) = \frac{pe^{-\frac{(y-1)^2}{2}}}{(1-p)e^{-\frac{y^2}{2}} + pe^{-\frac{(y-1)^2}{2}}} = \frac{p}{(1-p)e^{-\frac{1}{2}[y^2-(y-1)^2]} + p}$$
$$= \frac{p}{p + (1-p)e^{\frac{1}{2}-y}}.$$

$$\longrightarrow \hat{X}_{mmse} = \frac{p}{p + (1-p)e^{\frac{1}{2}}e^{-Y}}.$$

Observaciones:

- $X \in \{0,1\}$, pero $\hat{X}_{mmse} \in [0,1]$.
- $\phi(y) = \frac{p}{p+(1-p)e^{\frac{1}{2}}e^{-y}} \longrightarrow$ función no-lineal en y.

Notación

$$\mu_{\mathbf{X}} = \mathbb{E}[\mathbf{X}] \quad , \quad \mathbf{C_X} = \mathbb{E}\left[(\mathbf{X} - \mu_{\mathbf{X}})(\mathbf{X} - \mu_{\mathbf{X}})^*\right]$$

$$\mu_{\mathbf{Y}} = \mathbb{E}[\mathbf{Y}] \quad , \quad \mathbf{C_Y} = \mathbb{E}\left[(\mathbf{Y} - \mu_{\mathbf{Y}})(\mathbf{Y} - \mu_{\mathbf{Y}})^*\right] \quad , \quad \mathbf{R_Y} = \mathbb{E}[\mathbf{Y}\mathbf{Y}^*]$$

$$\mathbf{R_{XY}} = \mathbb{E}[\mathbf{X}\mathbf{Y}^*] \quad , \quad \mathbf{C_{XY}} = \mathbb{E}\left[(\mathbf{X} - \mu_{\mathbf{X}})(\mathbf{Y} - \mu_{\mathbf{Y}})^*\right]$$

Estimador Lineal de Menor Error Cuadrático Medio (LMMSE)

Es interesante limitar la búsqueda de $\hat{\mathbf{X}} = g(\mathbf{Y})$ a estimadores del tipo,

$$g(\mathbf{Y}) = \mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{b}.$$

donde $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ y $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^{n}$ son constantes. Para minimizar el MSE planteamos el principio de ortogonalidad, es decir

$$\mathbb{E}\left[\underbrace{(\mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{b})^*}_{\hat{\mathbf{X}}^*}\underbrace{(\mathbf{X} - \mathbf{A}\mathbf{Y} - \mathbf{b})}_{\mathbf{X}-\hat{\mathbf{X}}}\right] = 0 \qquad (1)$$

LMMSE

Por el principio de ortogonalidad, tenemos

$$\mathbb{E}\left[\underbrace{(\mathbf{AY}+\mathbf{b})^*}_{\hat{\mathbf{X}}^*}\underbrace{(\mathbf{X}-\mathbf{AY}-\mathbf{b})}_{\mathbf{X}-\hat{\mathbf{X}}}\right]=0.$$

Como $\hat{\mathbf{X}}^*(\mathbf{X}-\hat{\mathbf{X}})\in\mathbb{C}\Longrightarrow\hat{\mathbf{X}}^*(\mathbf{X}-\hat{\mathbf{X}})=\operatorname{tr}\left[\hat{\mathbf{X}}^*(\mathbf{X}-\hat{\mathbf{X}})\right]$.

Entonces, buscamos **A** y **b** tal que

$$\mathbb{E}\left\{\operatorname{tr}\left[(\mathbf{AY}+\mathbf{b})^*(\mathbf{X}-\mathbf{AY}-\mathbf{b})\right]\right\}=0$$

LMMSE

Desarrollando,

$$
\begin{aligned}
0 &= \mathbb{E}\Big\{ \operatorname{tr}\left[(\mathbf{AY}+\mathbf{b})^* \left(\mathbf{X}-\mathbf{AY}-\mathbf{b}\right)\right] \Big\} \\
&= \mathbb{E}\Big\{ \operatorname{tr}\left[\mathbf{Y}^*\mathbf{A}^*\mathbf{X}+\mathbf{b}^*\mathbf{X}-\mathbf{Y}^*\mathbf{A}^*\mathbf{AY}-\mathbf{b}^*\mathbf{AY}-\mathbf{Y}^*\mathbf{A}^*\mathbf{b}-\mathbf{b}^*\mathbf{b}\right] \Big\} \\
&= \mathbb{E}\Big\{ \operatorname{tr}\left[\mathbf{Y}^*\mathbf{A}^*\mathbf{X}\right] \Big\} + \mathbb{E}[\mathbf{b}^*\mathbf{X}] - \mathbb{E}\Big\{ \operatorname{tr}[\mathbf{Y}^*\mathbf{A}^*\mathbf{AY}]\Big\} - \mathbb{E}[\mathbf{b}^*\mathbf{AY}] \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \mathbb{E}[\mathbf{Y}^*\mathbf{A}^*\mathbf{b}] - \mathbf{b}^*\mathbf{b} \\
&= \mathbb{E}\Big\{ \operatorname{tr}\left[\mathbf{A}^*\mathbf{XY}^*\right] \Big\} + \mathbf{b}^*\mu_{\mathbf{X}} - \mathbb{E}\Big\{ \operatorname{tr}[\mathbf{A}^*\mathbf{AYY}^*]\Big\} - \mathbf{b}^*\mathbf{A}\mu_{\mathbf{Y}} - \mu_{\mathbf{Y}}^*\mathbf{A}^*\mathbf{b} - \mathbf{b}^*\mathbf{b} \\
&= \operatorname{tr}\Big\{ \mathbb{E}\left[\mathbf{A}^*\mathbf{XY}^*\right] \Big\} + \mathbf{b}^*\mu_{\mathbf{X}} - \operatorname{tr}\Big\{\mathbb{E}[\mathbf{A}^*\mathbf{AYY}^*]\Big\} - \mathbf{b}^*\mathbf{A}\mu_{\mathbf{Y}} - \mu_{\mathbf{Y}}^*\mathbf{A}^*\mathbf{b} - \mathbf{b}^*\mathbf{b} \\
&= \operatorname{tr}\Big\{ \mathbf{A}^*\mathbb{E}\left[\mathbf{XY}^*\right] \Big\} + \mathbf{b}^*\mu_{\mathbf{X}} - \operatorname{tr}\Big\{\mathbf{A}^*\mathbf{A}\mathbb{E}[\mathbf{YY}^*]\Big\} - \mathbf{b}^*\mathbf{A}\mu_{\mathbf{Y}} - \mu_{\mathbf{Y}}^*\mathbf{A}^*\mathbf{b} - \mathbf{b}^*\mathbf{b} \\
&= \operatorname{tr}\Big[\mathbf{A}^*\left(\mathbf{R}_{\mathbf{XY}} - \mathbf{A}\mathbf{R}_{\mathbf{Y}} - \mathbf{b}\mu_{\mathbf{Y}}^*\right)\Big] + \mathbf{b}^*\left[\mu_{\mathbf{X}} - \mathbf{A}\mu_{\mathbf{Y}} - \mathbf{b}\right].
\end{aligned}
$$

LMMSE

La matriz $\mathbf{A}_{lmmse}$ y el vector $\mathbf{b}_{lmmse}$ que corresponden al estimador LMMSE deben cumplir el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{lmmse}\mathbf{R}_{\mathbf{Y}} + \mathbf{b}_{lmmse}\mu_{\mathbf{Y}}^{*} = \mathbf{R}_{\mathbf{XY}} \\ \mathbf{A}_{lmmse}\mu_{\mathbf{Y}} + \mathbf{b}_{lmmse} = \mu_{\mathbf{X}} \end{cases}$$

cuya solución es

$$\mathbf{A}_{lmmse} = \left[\mathbf{R}_{\mathbf{XY}} - \mu_{\mathbf{X}}\mu_{\mathbf{Y}}^{*}\right]\left[\mathbf{R}_{\mathbf{Y}} - \mu_{\mathbf{Y}}\mu_{\mathbf{Y}}^{*}\right]^{-1} = \mathbf{C}_{\mathbf{XY}}\mathbf{C}_{\mathbf{Y}}^{-1}$$

$$\mathbf{b}_{lmmse} = \mu_{\mathbf{X}} - \left[\mathbf{R}_{\mathbf{XY}} - \mu_{\mathbf{X}}\mu_{\mathbf{Y}}^{*}\right]\left[\mathbf{R}_{\mathbf{Y}} - \mu_{\mathbf{Y}}\mu_{\mathbf{Y}}^{*}\right]^{-1}\mu_{\mathbf{Y}} = \mu_{\mathbf{X}} - \mathbf{C}_{\mathbf{XY}}\mathbf{C}_{\mathbf{Y}}^{-1}\mu_{\mathbf{Y}}$$

LMMSE

Estimador Lineal de Menor Error Cuadrático Medio (LMMSE)

$$\hat{\mathbf{X}}_{lmmse} = \mu_{\mathbf{X}} + \mathbf{C}_{\mathbf{XY}}\mathbf{C}_{\mathbf{Y}}^{-1}\left(\mathbf{Y} - \mu_{\mathbf{Y}}\right). \tag{2}$$

Cuando **X** e **Y** son dos vectores conjuntamente gaussianos,

$$\hat{\mathbf{X}}_{lmmse} = \hat{\mathbf{X}}_{mmse}$$

LMMSE: Propiedades

- $\hat{\mathbf{X}}_{lmmse}$ es un estimador *insesgado*. Se lo conoce también como el estimador BLU (Best Linear Unbiased).

$$\mathbb{E}[\hat{\mathbf{X}}_{lmmse}] = \mathbb{E}[\mu_{\mathbf{X}} + \mathbf{C}_{\mathbf{XY}}\mathbf{C}_{\mathbf{Y}}^{-1}(\mathbf{Y} - \mu_{\mathbf{Y}})] = \mu_{\mathbf{X}}$$

LMMSE: Propiedades

El error de estimación es:

$$\mathbf{E}_{lmmse} = \mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}_{lmmse} = \underbrace{(\mathbf{X} - \mu_{\mathbf{X}})}_{\delta_{\mathbf{X}}} - \mathbf{C}_{\mathbf{XY}}\mathbf{C}_{\mathbf{Y}}^{-1} \underbrace{(\mathbf{Y} - \mu_{\mathbf{Y}})}_{\delta_{\mathbf{Y}}}.$$

Su covarianza,

$$\begin{aligned}
\mathbf{Cov}[\mathbf{E}_{lmmse}] &= \mathbf{Cov}[\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}_{lmmse}] = \mathbb{E}[\mathbf{E}_{lmmse}\mathbf{E}_{lmmse}^{*}] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\delta_{\mathbf{X}} - \mathbf{C}_{\mathbf{XY}}\mathbf{C}_{\mathbf{Y}}^{-\mathbf{1}}\delta_{\mathbf{Y}}\right)\left(\delta_{\mathbf{X}} - \mathbf{C}_{\mathbf{XY}}\mathbf{C}_{\mathbf{Y}}^{-\mathbf{1}}\delta_{\mathbf{Y}}\right)^{*}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\delta_{\mathbf{X}}\delta_{\mathbf{X}}^{*}\right] - \mathbb{E}\left[\delta_{\mathbf{X}}\delta_{\mathbf{Y}}^{*}\right]\mathbf{C}_{\mathbf{Y}}^{-1}\mathbf{C}_{\mathbf{XY}}^{*} - \mathbf{C}_{\mathbf{XY}}\mathbf{C}_{\mathbf{Y}}^{-1}\mathbb{E}\left[\delta_{\mathbf{Y}}\delta_{\mathbf{X}}^{*}\right] \\
&\qquad + \mathbf{C}_{\mathbf{XY}}\mathbf{C}_{\mathbf{Y}}^{-1}\mathbb{E}\left[\delta_{\mathbf{Y}}\delta_{\mathbf{Y}}^{*}\right]\mathbf{C}_{\mathbf{Y}}^{-1}\mathbf{C}_{\mathbf{XY}}^{*} \\
&= \mathbf{C}_{\mathbf{X}} - \mathbf{C}_{\mathbf{XY}}\mathbf{C}_{\mathbf{Y}}^{-1}\mathbf{C}_{\mathbf{YX}}
\end{aligned}$$

LMMSE: Propiedades

Finalmente, el error cuadrático medio es

$$\begin{aligned} MMSE &= \mathbb{E}\left[\|\mathbf{E}_{lmmse}\|^2\right] = \mathbb{E}\left[\mathbf{E}^*_{lmmse}\mathbf{E}_{lmmse}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathrm{tr}(\mathbf{E}^*_{lmmse}\mathbf{E}_{lmmse})\right] = \mathbb{E}\left[\mathrm{tr}(\mathbf{E}_{lmmse}\mathbf{E}^*_{lmmse})\right] \\ &= \mathrm{tr}\left\{\mathbb{E}\left[\mathbf{E}_{lmmse}\mathbf{E}^*_{lmmse}\right]\right\} \\ &= \mathrm{tr}\left\{\mathbf{Cov}[\mathbf{E}_{lmmse}]\right\} \end{aligned}$$

LMMSE: resumen

$$\hat{\mathbf{X}}_{lmmse} = \mu_{\mathbf{X}} + \mathbf{C}_{\mathbf{XY}}\mathbf{C}_{\mathbf{Y}}^{-1}\left(\mathbf{Y} - \mu_{\mathbf{Y}}\right).$$

$$\mathbb{E}[\hat{\mathbf{X}}_{lmmse}] = \mu_{\mathbf{X}}.$$

$$\mathbf{Cov}[\mathbf{E}_{lmmse}] = \mathbf{C}_{\mathbf{X}} - \mathbf{C}_{\mathbf{XY}}\mathbf{C}_{\mathbf{Y}}^{-1}\mathbf{C}_{\mathbf{YX}}.$$

$$MMSE = \operatorname{tr}\left\{\mathbf{C}_{\mathbf{X}} - \mathbf{C}_{\mathbf{XY}}\mathbf{C}_{\mathbf{Y}}^{-1}\mathbf{C}_{\mathbf{YX}}\right\}.$$

Estimación lineal de procesos aleatorios

Sean $X(n)$ e $Y(n)$ dos procesos aleatorios.

Problema

A partir de muestras de una realización $y(m)$, recolectadas en el intervalo $m_{init} \leq m \leq m_{fin}$, hallar el estimador

$$\hat{x}(n) = \sum_{m=m_{init}}^{m_{fin}} k_{nm} y(m)$$

que minimice el error cuadrático medio

$$\mathbb{E}\left[\left\|X - \hat{X}_{lmmse}\right\|^2\right] = \mathbb{E}\left[\sum_n \left|X(n) - \hat{X}_{lmmse}(n)\right|^2\right]$$

El problema de estimación es entonces obtener los coeficientes k_{nm}.

Dos posibles esquemas de estimación

1. **Suavizado** (*smoothing*) $m_{init} = m_0$, $m_{fin} = m_0 + M$.

   Dado $\{y(m), m_0 \leq m \leq m_0 + M\}$ *obtener* $\{\hat{x}(n), n_1 \leq n \leq n_2\}$ *donde* $m_0 \leq n_1 \leq n_2 \leq m_0 + M$*.*

   Estimador *no causal* ya que utiliza observaciones futuras.

2. **Filtrado** $m_{init} = n - M$, $m_{fin} = n$.

   Dado $\{y(m), n - M \leq m \leq n\}$ *obtener* $\hat{x}(n)$*.*

   Estimador *causal* que utiliza pasado y presente.

Análisis del problema

- Vamos a trabajar con observaciones en una ventana de duración finita es decir que todas las observaciones se pueden agrupar en un vector

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y(m_{init}) \\ \vdots \\ Y(m_{fin}) \end{bmatrix}$$

- Para cada valor de n, se puede considerar un problema de estimación de una VA, $X_n = X(n)$ a partir de un VeA, $\mathbf{Y}$.
- La solución LMMSE a este problema la conocemos

$$\hat{X}_{lmmse}(n) = \mu_{X_n} + \mathbf{C}_{X_n\mathbf{Y}}\mathbf{C}_{\mathbf{Y}}^{-1}\left(\mathbf{Y} - \mu_{\mathbf{Y}}\right).$$

- El problema es entonces poder implementar esta solución en forma eficiente para cada instante de tiempo n.

Hipótesis

Asumimos lo siguiente:

- $X(n)$ e $Y(n)$ son conjuntamente ESA
- Las correlaciones siguientes son conocidas:

$$R_{XY}(k) = \mathbb{E}[X(n)Y(n+k)^*] \quad \text{y} \quad R_Y(k) = \mathbb{E}[Y(n)Y(n+k)^*].$$

- Como el estimador LMMSE es insesgado, sin falta de generalidad

$$\mathbb{E}[X(n)] = \mathbb{E}[Y(n)] = 0.$$

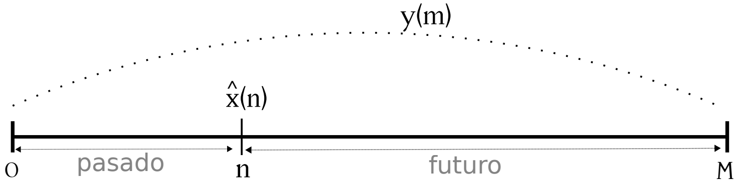
Entonces,

$$\hat{X}_{lmmse}(n) = \mathbf{R}_{X_n\mathbf{Y}}\mathbf{R}_{\mathbf{Y}}^{-1}\mathbf{Y}.$$

Problema de suavizado en una ventana fija

Como los procesos son CESA, sin falta de generalidad $m_0 = 0$.

$$\{y(m), m = 0, \cdots, M\} \quad \longrightarrow \quad \hat{x}(n),\ 0 \leq n \leq M.$$



$$\hat{X}_{lmmse}(n) = \hat{X}(n) = \mathbf{R}_{X_n\mathbf{Y}}\mathbf{R}_{\mathbf{Y}}^{-1}\mathbf{Y}.$$

Problema de suavizado en una ventana fija (cont)

- *Matriz de autocorrelación* : $\mathbf{R_Y} \in \mathbb{C}^{(M+1)\times(M+1)}$

$$\mathbf{R_Y} = \mathbb{E}\left[\mathbf{YY}^*\right] = \mathbb{E}\left\{\begin{bmatrix} Y(0) \\ \vdots \\ Y(M) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y(0)^* & \cdots & Y(M)^* \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \begin{bmatrix} R_Y(0) & \cdots & R_Y(M) \\ & \ddots & \\ R_Y^*(M) & \cdots & R_Y(0) \end{bmatrix}$$

- Matriz Toeplitz simétrica.
- Se forma a partir de $R_Y(k)$, *función de autocorrelación* de $Y(n)$.
- Si $Y(n)$ es ESA, $\mathbf{R_Y}$ no depende de n.

Problema de suavizado en una ventana fija (cont)

- *Vector de correlación cruzada* : $\mathbf{R}_{X_n\mathbf{Y}} \in \mathbb{C}^{1\times(M+1)}$,

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{X_n\mathbf{Y}} &= \mathbb{E}[X(n)\mathbf{Y}^*] \\ &= \mathbb{E}\left\{X(n)\left[Y(0)^*,\ \ Y(1)^*,\ \ \cdots, Y(n)^*,\ \ \cdots, Y(M)^*\right]\right\} \\ &= [R_{XY}(-n),\ \ R_{XY}(-n+1)\ \ \cdots, R_{XY}(0),\ \ \cdots, R_{XY}(M-n)]\end{aligned}$$

  $R_{XY}(k)$: *correlación cruzada* entre los procesos $X(n)$ e $Y(n)$.

- Pese a que $X(n)$ e $Y(n)$ son CESA, el vector $\mathbf{R}_{X_n\mathbf{Y}}$ depende de n.

Suavizado en una ventana fija

- Luego, en cada instante,

$$\hat{X}(n) = \mathbf{k}_n \mathbf{Y} \quad \text{con} \quad \mathbf{k}_n = \mathbf{R}_{X_n \mathbf{Y}} \mathbf{R}_{\mathbf{Y}}^{-1}.$$

- El procesamiento para resolver el problema de suavizado es no-causal y variante en el tiempo

Suavizado en una ventana fija: error de estimación

Sea $E(n) = X(n) - \hat{X}(n)$, el error de estimación.

A priori, antes de realizar observación alguna, $\mathbb{V}[X(n)] = \sigma_X^2$ es una indicación de la incertidumbre que se tiene sobre el proceso $X(n)$. Luego de obtener $\hat{X}(n)$, la incertidumbre en $X(n)$ está dada por $\mathbb{V}[E(n)] = \sigma_E^2(n)$.

Suavizado en una ventana fija: error de estimación

A partir del resultado del estimador LMMSE tenemos para cada valor de n:

- $\mathbb{E}[E(n)] = 0$ por ser un estimador insesgado.
- $\mathbb{V}[E(n)] = \mathbb{E}[|E(n)|^2] = \sigma_X^2 - \mathbf{R}_{X_n\mathbf{Y}}\mathbf{R}_{\mathbf{Y}}^{-1}\mathbf{R}_{X_n\mathbf{Y}}^*$ [1]
- Como $\mathbf{R}_{\mathbf{Y}} > 0$, tenemos que

$$\mathbf{R}_{X_n\mathbf{Y}}\mathbf{R}_{\mathbf{Y}}^{-1}\mathbf{R}_{X_n\mathbf{Y}}^* > 0 \qquad \forall n.$$

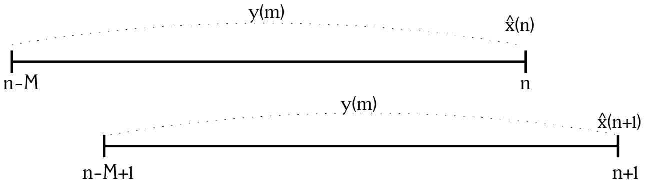
  Luego, $\mathbb{V}[E(n)] < \sigma_X^2$ para todo n. Es decir, la estimación reduce la incertidumbre sobre $X(n)$.

Pregunta: El proceso $E(n)$ es ESA?

[1] Recordemos que en el caso general, $MMSE = \text{tr}\left\{\mathbf{C}_{\mathbf{X}} - \mathbf{C}_{\mathbf{XY}}\mathbf{C}_{\mathbf{Y}}^{-1}\mathbf{C}_{\mathbf{YX}}\right\}$

Filtrado en una ventana fija

$$\{y(m), n - M \leq m \leq n\} \quad \longrightarrow \quad \hat{x}(n).$$



El filtrado tiene una solución *causal* que sólo utiliza observaciones pasadas y presentes.

Filtrado en una ventana fija: solución LMMSE

Para cada valor de n, queremos estimar $\hat{X}(n)$ a partir de la realización

$$y(n-M), y(n-M+1), \cdots y(n).$$

A diferencia del problema de suavizado, la ventana de observación del filtrado se desplaza con n.

Filtrado en una ventana fija: solución LMMSE

Armamos el vector **Y** que contiene las observaciones y calculamos la matriz de correlación

$$\mathbf{R_Y} = \mathbb{E}\left[\mathbf{YY}^*\right] = \mathbb{E}\left\{ \begin{bmatrix} Y(n-M) \\ \vdots \\ Y(n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y(n-M)^* & \cdots & Y(n)^* \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \begin{bmatrix} R_Y(0) & \cdots & R_Y(M) \\ & \ddots & \\ R_Y^*(M) & \cdots & R_Y(0) \end{bmatrix}$$

Filtrado en una ventana fija: solución LMMSE

Como en el caso del suavizado, también armamos el vector de correlación cruzada a partir de $R_{XY}(k)$, la función de correlación cruzada entre los procesos $X(n)$ e $Y(n)$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{X_n\mathbf{Y}} &= \mathbb{E}\left[X(n)\mathbf{Y}^*\right] \\
&= \mathbb{E}\left\{X(n)\left[Y(n-M)^*, \ \cdots \ Y(n-1)^*, \ \ Y(n)^*\right]\right\} \\
&= \left[R_{XY}(M), \ \cdots R_{XY}(1) \ \ , R_{XY}(0)\right] = \mathbf{R}_{X\mathbf{Y}}.
\end{aligned}$$

En este caso, el vector $\mathbf{R}_{X_n\mathbf{Y}} = \mathbf{R}_{X\mathbf{Y}}$ no depende de n.

Filtrado en una ventana fija

Finalmente,

$$\hat{X}(n) = \underbrace{\mathbf{R}_{X\mathbf{Y}}\mathbf{R}_{\mathbf{Y}}^{-1}}_{\mathbf{w}^*}\mathbf{Y}$$

donde

$$\mathbf{w} = \mathbf{R}_{\mathbf{Y}}^{-1}\mathbf{R}_{X\mathbf{Y}}^{*} = \begin{bmatrix} w(M) \\ w(M-1) \\ \vdots \\ w(0) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y(n-M) \\ y(n-M+1) \\ \vdots \\ y(n) \end{bmatrix}$$

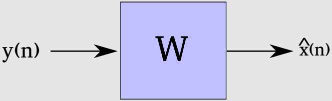
Filtrado en una ventana fija

Luego,

$$\hat{X}(n) = \sum_{m=n-M}^{n} w(n-m)y(m) = \sum_{s=0}^{M} w(s)y(n-s).$$

Asociamos los coeficientes $w(s)$ a la respuesta impulsiva de un filtro FIR de longitud $M+1$ que realiza el filtrado causal. Este filtro se lo conoce como *Filtro de Wiener*.

Filtro de Wiener



$\hat{X}_{lmmse}(n)$ resulta al filtrar linealmente las observaciones $Y(n)$.

- La respuesta impulsiva FIR del filtro W se obtiene como los componentes del vector

$$\mathbf{w} = \mathbf{R}_{\mathbf{Y}}^{-1}\mathbf{R}_{X\mathbf{Y}}^{*}$$

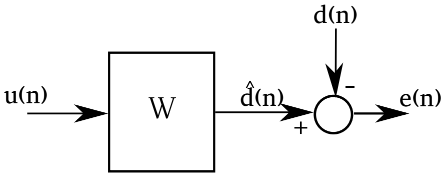
  donde $\mathbf{R}_{\mathbf{Y}}$ y $\mathbf{R}_{X\mathbf{Y}}$ depende del largo del filtro M pero no del instante de filtrado n.

- El *costo de Wiener* es igual a

$$J_{Wiener} = \mathbb{E}[|E(n)|^2] = \sigma_X^2 - \mathbf{R}_{X\mathbf{Y}}\mathbf{R}_{\mathbf{Y}}^{-1}\mathbf{R}_{X\mathbf{Y}}^{*}$$

Notación

En cierta bibliografía del tema, se plantea el problema de filtrado con la siguiente nomenclatura, donde W es un filtro FIR de longitud $M+1$

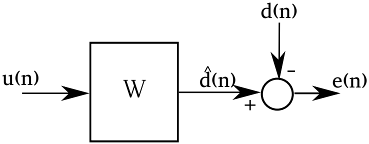


$$\hat{d}(n) = \sum_{s=0}^{M} w(s)u(n-s)$$

Este problema es equivalente al ya visto si se considera que:

- Las observaciones $y(n)$ son las *entradas* del filtro $u(n)$.
- El proceso $x(n)$ es la señal *deseada* $d(n)$.

Notación



Principio de ortogonalidad:

$$\mathbb{E}\left[U^*(n)E(n)\right] = 0$$

Planteando las ecuaciones normales:

$$\begin{bmatrix} w(M) \\ \vdots \\ w(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_u(0) & \cdots & R_u(M) \\ & \ddots & \\ R_u(-M) & \cdots & R_u(0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} R_{du}(M) \\ \vdots \\ R_{du}(0) \end{bmatrix}$$

Retomamos el diseño de W

Hipótesis:

1. $X(n)$ e $Y(n)$ son conjuntamente ESA,
2. $R_Y(k)$ y $R_{XY}(k)$ son funciones conocidas.

Qué sucede si

- Los procesos no son estacionarios?
  - Ejemplo 1: $X(n)$ tiene una deriva en el tiempo y $\mathbb{E}[X(n)] = \mu_X(n)$.
  - Ejemplo 2: $X(n)$ es una constante, pero la fuente del ruido que afecta la observación varía con el tiempo.
- No se conoce la estadística de $X(n)$ o de $Y(n)$?
  - Por ejemplo, se sabe que $Y(n) = X(n) + V(n)$, pero no se tienen observaciones previas que permitan estimar R_Y y/o R_{XY}.

Encaramos estos problemas estimando $X(n)$ a medida que observamos $Y(n)$, es decir, *adaptando* el diseño del filtro.

Volvamos al planteo del LMMSE

Vimos que el filtro de Wiener es un filtro FIR causal que obtiene el estimador LMMSE. Sea $w(l)$ la respuesta impulsiva del filtro,

$$\hat{X}(n) = \sum_{l=0}^{M} w(l)Y(n-l) = \underbrace{\begin{bmatrix} w(M) & \cdots & w(0) \end{bmatrix}}_{\mathbf{w}^*} \underbrace{\begin{bmatrix} Y(n-M) \\ \vdots \\ Y(n) \end{bmatrix}}_{\mathbf{Y}}$$

Volvamos al planteo del LMMSE

Para cada instante n, podemos calcular el error cuadrático medio,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[|X(n)-\mathbf{w}^*\mathbf{Y}|^2\right] &= \mathbb{E}[|X(n)|^2]-\mathbb{E}\left[X(n)\mathbf{Y}^*\mathbf{w}\right] \\ &\quad -\mathbb{E}\left[\mathbf{w}^*\mathbf{Y}X^*(n)\right]+\mathbb{E}\left[\mathbf{w}^*\mathbf{Y}\mathbf{Y}^*\mathbf{w}\right] \\ &= \sigma_X^2-\mathbf{R}_{X\mathbf{Y}}\mathbf{w}-\mathbf{w}^*\mathbf{R}_{\mathbf{Y}X}+\mathbf{w}^*\mathbf{R}_{\mathbf{Y}}\mathbf{w}\end{aligned}$$

Ésta es una función de $\mathbf{w}$ que llamamos $J(\mathbf{w})$. Esta función se la conoce como función costo. Claramente, la solución LMMSE minimiza $J(\mathbf{w})$, es decir,

$$\mathbf{w}_{lmmse}=\arg\min J(\mathbf{w})$$

Volvamos al planteo del LMMSE

Para minimizar $J(\mathbf{w})$ calculamos el gradiente.
Sea $w(l) = w_R(l) + \jmath w_I(l)$. Luego,

$$\nabla J = \begin{bmatrix} \frac{\partial J}{\partial w_R(M)} + \jmath \frac{\partial J}{\partial w_I(M)} \\ \vdots \\ \frac{\partial J}{\partial w_R(0)} + \jmath \frac{\partial J}{\partial w_I(0)} \end{bmatrix} = 2\left(\mathbf{R_Y w} - \mathbf{R}^*_{X\mathbf{Y}}\right).$$

Claramente, $\mathbf{w}_{lmmse}$ coincide con la solución de $\nabla J = 0$.

Pregunta: Es posible calcular $\mathbf{w}$ en forma recursiva?

Algoritmo *steepest descent* para optimización de funciones multivariables

- Sea $f : \mathbb{C}^L \to \mathbb{R}$ y $\bar{w}$ un mínimo local de f. Suponemos que $f(.)$ es diferenciable en todo punto de $B(\bar{w}) \subset \mathbb{C}^L$, un vecindario de $\bar{w}$.
- Para hallar $\bar{w}$ de forma numérica armamos una trayectoria que luego de n pasos resulta

$$w_{n+1} = w_n + p$$

donde p es la dirección de actualización[2].

[2] La referencia clásica para este tema es *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*, ,J. E. Dennis, Jr. and Robert B. Schnabel, Society for Industrial and Applied Mathematics, donde se desarrolla este tema en el contexto general de optimización de funciones.

Algoritmo *steepest descent* para optimización de funciones multivariables

- Si $\nabla f^* p < 0$, y δ pequeño, $f(w_n + \delta p) < f(w_n)$
- La dirección de descenso más rápido es

$$p = -\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$$

- Algoritmo de descenso por la mayor pendiente o *steepest descent*

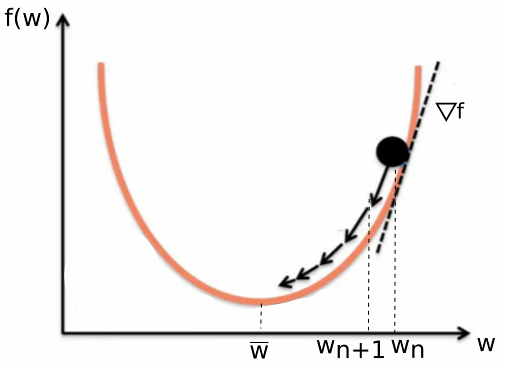
$$w_{n+1} = w_n - \mu \nabla f$$

donde $\mu > 0$ es un parámetro que define el tamaño del paso.

Algoritmo *steepest descent* para optimización de funciones multivariables

Si $\bar{w}$ es un mínimo global, el algoritmo iterativo converge, es decir

$$w_n \to \bar{w} \qquad n \to \infty.$$



Volvamos al filtro de Wiener

Vimos que el filtro de Wiener se obtiene minimizando la función costo

$$J(\mathbf{w}) = \sigma_X^2 - \mathbf{R}_{X\mathbf{Y}}\mathbf{w} - \mathbf{w}^*\mathbf{R}_{\mathbf{Y}X} + \mathbf{w}^*\mathbf{R}_{\mathbf{Y}}\mathbf{w} \qquad \mathbf{w} \in \mathbb{C}^{M+1}.$$

Más aún, vimos que

$$\nabla J \propto \left(\mathbf{R}_{\mathbf{Y}}\mathbf{w} - \mathbf{R}_{X\mathbf{Y}}^*\right).$$

Planteamos el esquema de steepest descent para minimizar $J(\mathbf{w})$.

Planteo iterativo del filtro de Wiener

Filtrado de Wiener utilizando Steepest-descent

A partir de $\mathbf{w}_n$, la siguiente actualización es

$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{w}_n - \mu \underbrace{\left(\mathbf{R}_\mathbf{Y}\mathbf{w}_n - \mathbf{R}^*_{X\mathbf{Y}}\right)}_{\nabla J} \qquad n = 0, 2, \cdots$$

En cada iteración, se obtienen las $M+1$ componentes del vector

$$\mathbf{w}_n = \begin{bmatrix} w_n(M) \\ \vdots \\ w_n(0) \end{bmatrix}$$

El parámetro $\mu > 0$ controla la velocidad de convergencia.
Como $J(\mathbf{w})$ es convexa, $\mathbf{w}_{lmmse}$ es mínimo global y

$$\mathbf{w}_n \to \mathbf{w}_{lmmse}.$$

Steepest descent para obtener el filtro de Wiener

El término de correción luego del paso n es $\mathbf{R}_{\mathbf{Y}}\mathbf{w}_n - \mathbf{R}^*_{X(n)\mathbf{Y}}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\mathbf{Y}}\mathbf{w}_n - \mathbf{R}^*_{X(n)\mathbf{Y}} &= \mathbb{E}\left[\mathbf{Y}\mathbf{Y}^*\right]\mathbf{w}_n - \mathbb{E}\left[\mathbf{Y}X^*(n)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbf{Y}\underbrace{\left(\mathbf{w}_n^*\mathbf{Y} - X(n)\right)^*}_{\mathbf{E}^*(n)}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbf{Y}\mathbf{E}(n)^*\right]. \end{aligned}$$

La correción en el paso n es igual al producto entre el error de estimación $E(n) = \mathbf{w}_n^*\mathbf{Y} - X(n)$ y el vector de observaciones **Y.**

Algoritmo LMS

Para implementar el algoritmo de *steepest descent* se requiere conocer la estadística conjunta de $X(n)$ e $Y(n)$. Esto no siempre es posible, o puede resultar muy complejo. Una alternativa es el algoritmo iterativo conocido como LMS (*Least-Mean-Square*).

Como referencia para este tema, sugiero leer el artículo donde Bernard Widrow cuenta cómo llego a la formulación del algoritmo, "Thinking about thinking: the discovery of the LMS algorithm," B. Widrow, en IEEE Signal Processing Magazine, vol. 22, no. 1, pp. 100-106, Enero 2005

Algoritmo LMS

La idea del algoritmo LMS es aproximar el operador $\mathbb{E}[.]$ por el resultado de una realización del proceso, es decir

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{Y}E(n)^*\right] \quad \text{pasa a ser} \quad \boldsymbol{y}(n)e(n)^*,$$

$$\boldsymbol{y}(n) = \begin{bmatrix} y(n-M) \\ \vdots \\ y(n) \end{bmatrix} \quad y(k) \text{ es la realización del proceso observado.}$$

$$e(n) = x(n) - \hat{x}(n) \quad \text{la realización del error de estimación}$$

Para hacer énfasis en el aspecto adaptativo, incluimos el tiempo n en el vector de observaciones $\boldsymbol{y}(n)$.

Adaptación de acuerdo al algoritmo *Least-Mean-Square*

Algoritmo LMS

Sea $\mathbf{w}_n$ el vector de coeficientes del filtro luego del n-ésimo paso de adaptación. En cada paso, tenemos:

$$\hat{x}(n) = \mathbf{w}_n^* \boldsymbol{y}(n)$$

y la adaptación

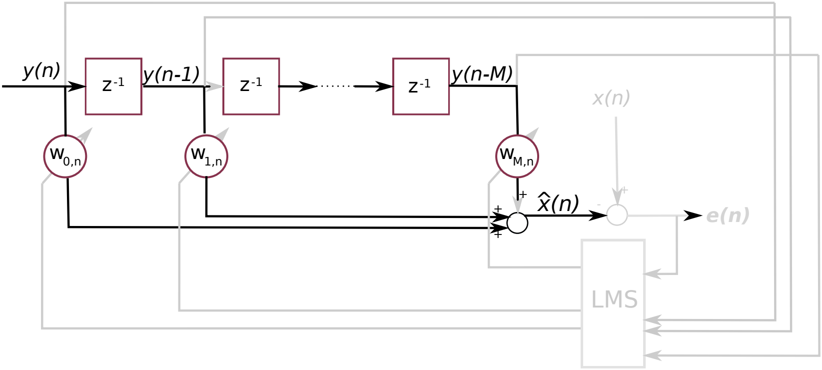
$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{w}_n - \mu \left(\boldsymbol{y}(n) e(n)^* \right)$$

Adaptación de acuerdo al algoritmo *Least-Mean-Square*

Algunas observaciones preliminares

- La dirección de descenso del LMS no es determinística. Este algoritmo pertenece a la clase de algoritmos de *gradiente estocástico*.
- La convergencia del algoritmo no está asegurada, si bien su performance es muy buena bajo ciertas condiciones
- La enorme ventaja (y razón de su popularidad) del algoritmo LMS es su simplicidad.

Implementación del algoritmo



$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{w}_n - \mu \left(\boldsymbol{y}(n) e(n)^* \right)$$

Convergencia del Algoritmo *Least-Mean-Square*

Vamos a analizar si $\mathbf{w}_n$ converge al filtro de Wiener a medida que aumenta n. Sea el vector de diferencias $\varepsilon_n = \mathbf{w}_n - \mathbf{w}_{lmmse}$.

- Como el límite de $\varepsilon_n \neq 0$, entonces $\mathbf{w}_n$ no converge a $\mathbf{w}_{lmmse}$.
- El valor del costo $J_{LMS}(\mathbf{w}_n)$ es superior al costo de Wiener, $J_{Wiener} = \sigma_x^2 - \mathbf{R}_{X\mathbf{Y}}\mathbf{R}_{\mathbf{Y}}^{-1}\mathbf{R}_{X\mathbf{Y}}^*$.
- $J(\mathbf{w}_n) = J_{Wiener} + J_{ex}(n)$ donde

$$\lambda_{min} \leq \frac{J_{ex}(n)}{\mathbb{E}[\|\varepsilon(n)\|^2]} \leq \lambda_{max} \qquad \forall n$$

Convergencia del Algoritmo

- En general, la convergencia del algoritmo LMS es *ruidosa*, ya que depende de una aproximación ruidosa de ∇J.
- El algoritmo converge a un valor mayor al costo de Wiener J_{opt}

Convergencia del Algoritmo

- Para convergencia, necesitamos

$$0 < \mu < \frac{2}{\mathrm{tr}(\mathbf{R_Y})}.$$

Cuando no se conoce $\mathbf{R_Y}$ o sus autovalores, es difícil verificar que se cumpla. Observemos que

$$\mathrm{tr}(\mathbf{R_Y}) = (M+1)R_Y(0) = (M+1)\mathbb{E}[|Y(n)|^2] \simeq \sum_{l=0}^{M} |y(n-l)|^2$$

donde $\sum_{l=0}^{M} |y(n-l)|^2$ es la energía contenida en la señal observada durante la ventana de duración $M+1$. Luego, una indicación para elegir μ puede ser

$$0 < \mu < \frac{2}{\sum_{l=0}^{M} |y(n-l)|^2}$$