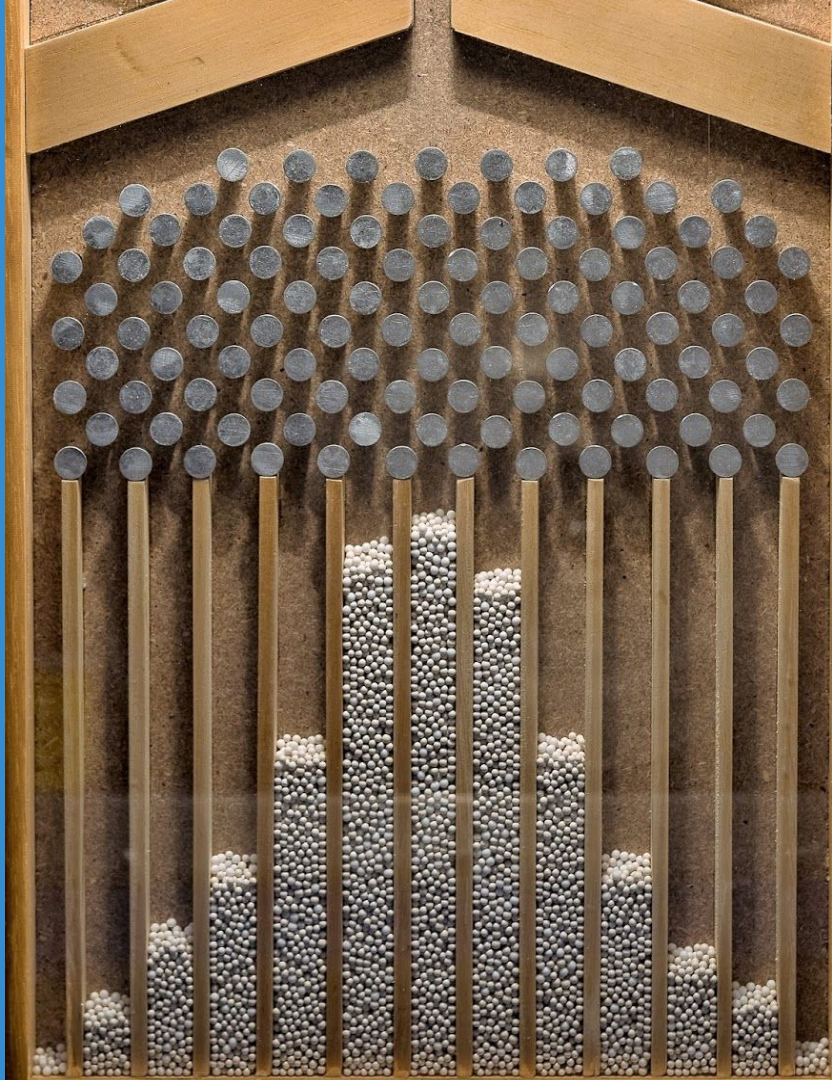
Procesos estocásticos (86.09)

- Variables y vectores aleatorios
- Simulación Monte Carlo



Vectores aleatorios

Vectores Aleatorios

Vector aleatorio

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

VA $\in \mathbb{R}$ (escalar)

VeA $\in \mathbb{R}^M$ (vectorial)

Media de un vector aleatorio *X*

$$\mathbb{E}[\mathbf{X}] = \mu_{\mathbf{X}} = \mathbb{E}\left[\begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix} \mathbb{E}[X_1] \\ \vdots \\ \mathbb{E}[X_n] \end{bmatrix}$$

$$f_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Matriz de autocovarianza

Matriz de Covarianza – Autocovarianza

Vector aleatorio $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$

VA ∈ ℝ (escalar)

VA ∈ ℝ^n (vectorial)

Matriz de autocovarianza de un vector aleatorio ***X***

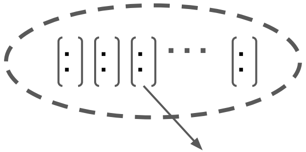
$$C_{\mathbf{X}} = \mathbb{E}\left[(\mathbf{X} - \mu_{\mathbf{X}})(\mathbf{X} - \mu_{\mathbf{X}})^T\right] \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

Matriz de Covarianza – Autocovarianza

$$C_{\mathbf{X}} = \mathbb{E}\left[\begin{bmatrix} X_1 - \mu_{X_1} \\ X_2 - \mu_{X_2} \\ \vdots \\ X_n - \mu_{X_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 - \mu_{X_1} & X_2 - \mu_{X_2} & \dots & X_n - \mu_{X_n} \end{bmatrix}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbb{E}\left[(X_1 - \mu_{X_1})(X_1 - \mu_{X_1})\right] & \mathbb{E}\left[(X_1 - \mu_{X_1})(X_2 - \mu_{X_2})\right] & \dots & \mathbb{E}\left[(X_1 - \mu_{X_1})(X_n - \mu_{X_n})\right] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{E}\left[(X_n - \mu_{X_n})(X_1 - \mu_{X_1})\right] & \mathbb{E}\left[(X_n - \mu_{X_n})(X_2 - \mu_{X_2})\right] & \dots & \mathbb{E}\left[(X_n - \mu_{X_n})(X_n - \mu_{X_n})\right] \end{bmatrix}$$

Vectores aleatorios – Estimadores



$$\mathbf{X}_k = \begin{bmatrix} X_{k1} \\ X_{k2} \\ \vdots \\ X_{kn} \end{bmatrix}$$

k-esima muestra del vector aleatorio

Estimación de la media de un vector aleatorio

$$\boxed{\widehat{\mu}_{\mathbf{X}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{X}_k}$$

Estimación de la matriz de autocovarianza de un vector aleatorio

$$\boxed{\widehat{C}_X = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n} (\mathbf{X}_k - \widehat{\mu}_{\mathbf{X}})(\mathbf{X}_k - \widehat{\mu}_{\mathbf{X}})^T}$$

Actividad 1

Actividad 1
Vectores aleatorios

Genere N = 1000 muestras para definir los siguientes vectores aleatorios.:

1. $\boldsymbol{X} = [X_1\ X_2]^T$, a partir de dos variables Rayleigh independientes, $X_1 \sim$ Rayl(3) y $X_2 \sim$ Rayl(2).
2. $\boldsymbol{V} = [V_1\ V_2]^T$ a partir de una transformación de X, tal que $\boldsymbol{V} = \mathrm{B}\boldsymbol{X}$.
3. $\boldsymbol{U} = [U_1\ U_2]^T$, a partir de una transformación de X, tal que $\boldsymbol{U} = \mathrm{H}\boldsymbol{X}$.

Haga el gráfico de dispersión (ej: `scatter(x1, x2)`) y calcule el coeficiente ϱ de correlación entre las componentes de cada vector.
Defina el límite de los ejes del gráfico con **axis([-2 12 0 14])**.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.2 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.2 \\ 0.4 & 0.2 \end{bmatrix}$$

Actividad 1
Vectores aleatorios

Transformación
del vector **x**

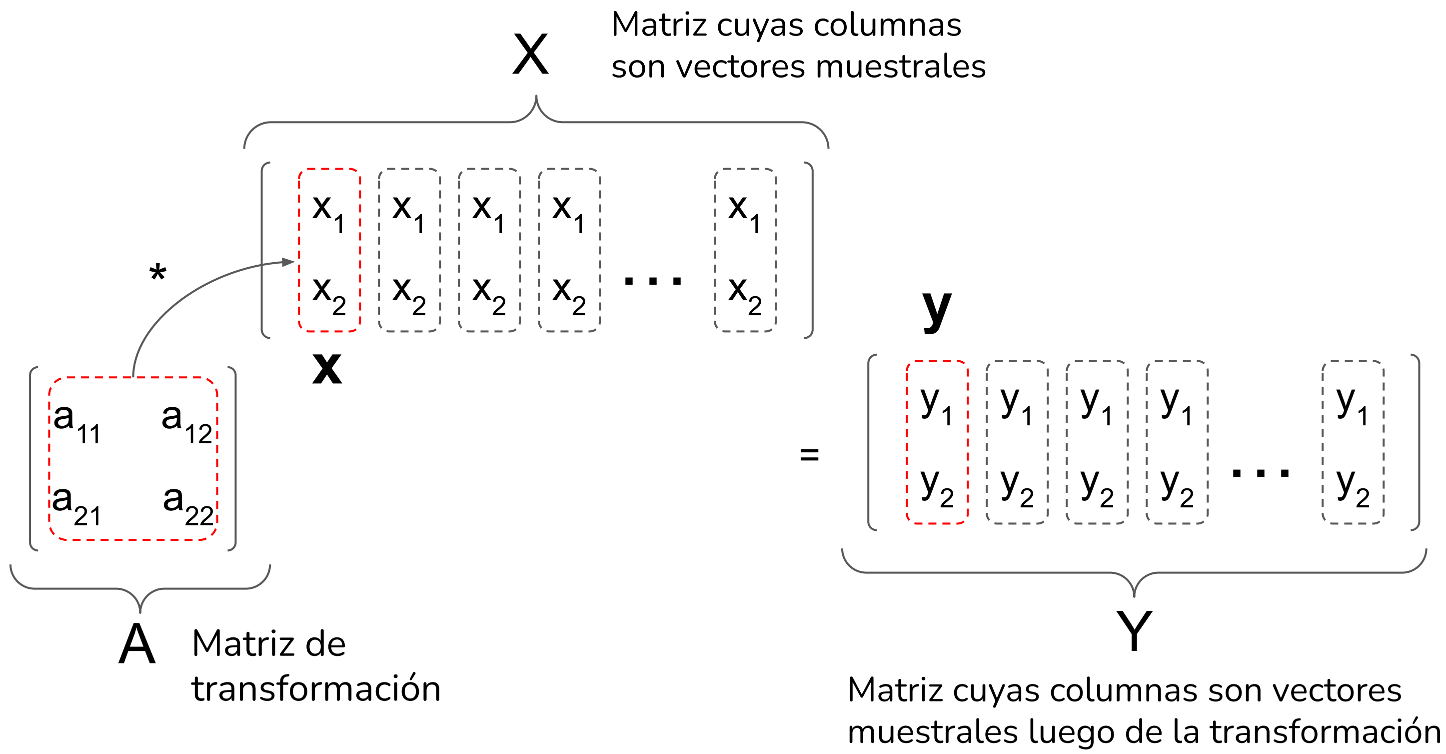
$$\mathbf{y} = A\,\mathbf{x}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{A} * \overbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}^{\mathbf{x}} = \overbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}}^{\mathbf{y}}$$

Actividad 1
Vectores aleatorios

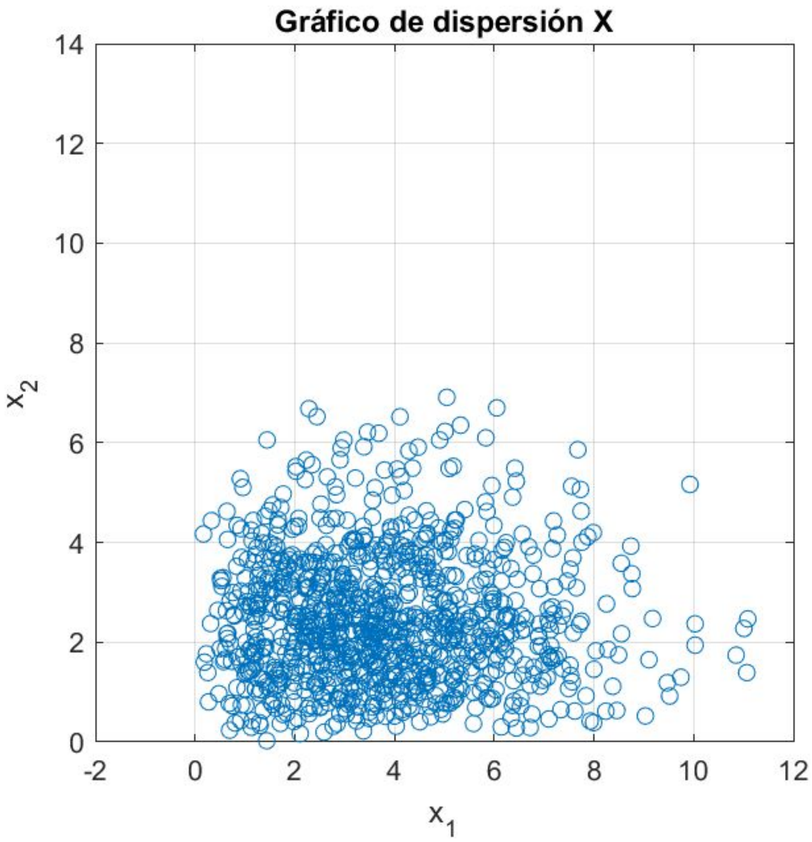
$Y = A\,X$

Transformación de múltiples vectores agrupados como matriz



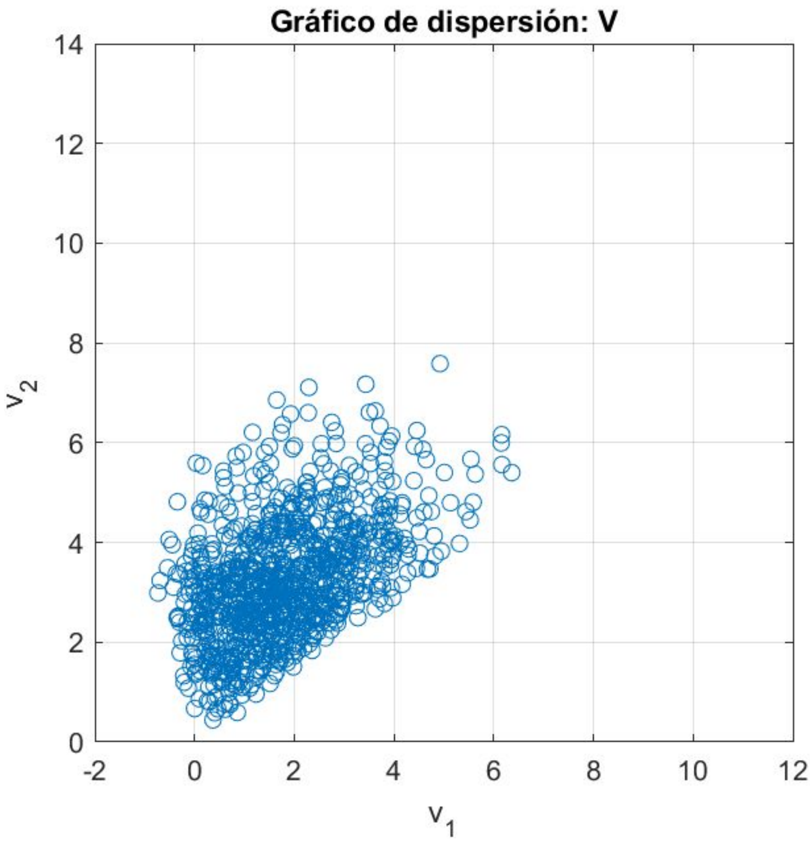
Actividad 1
Vectores aleatorios

$$\varrho(X_1, X_2) = 0.016$$



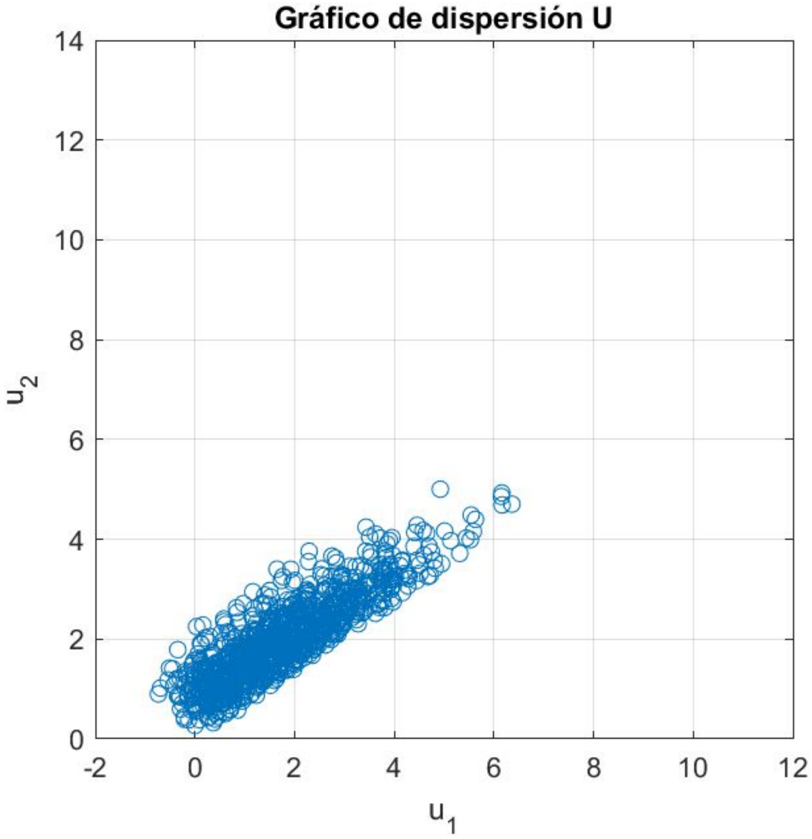
Actividad 1
Vectores aleatorios

$$\varrho(V_1, V_2) = 0.421$$



Actividad 1
Vectores aleatorios

$$\varrho(U_1, U_2) = 0.867$$



Actividad 2

Actividad 2
Matriz de covarianza

Estime la matriz de autocovarianza para los vectores aleatorios del ejercicio anterior: $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{U}$ y $\boldsymbol{V}$.

Analice las propiedades de la matriz y la particularidad de cada una en relación a los resultados del ejercicio anterior (observe la covarianza entre componentes y cómo esto se refleja en las matrices de correlación).

Matriz de Covarianza – Estimadores

Matriz de covarianza **Matlab**:

```
Cx = cov(X);  % Covarianza de X (filas: observaciones, col: componentes)
```

Matriz de covarianza **Python**

```
Cx = np.cov(X);  # Covarianza de X (filas: componentes, col: observaciones)
```

Actividad 2

Matriz de covarianza

```
Cx =

    3.9425   -0.0401
   -0.0401    1.6235
```

```
Cv =

    1.4938    0.7053
    0.7053    1.4039
```

```
Cu =

    1.4938    0.8797
    0.8797    0.6893
```

Actividad 3

Actividad 3
Matriz de covarianza

Dados dos VeA, $X_1 \sim$ U(0,2) y $X_2 \sim$ U(0,3) independientes, con N = 1000 realizaciones.

1. Genere muestras de un vector aleatorio $\boldsymbol{Y} = [Y_1\ Y_2]^T$ a partir del vector $\boldsymbol{X} = [X_1\ X_2]^T$ aplicando una transformación $\boldsymbol{Y} = R\,\boldsymbol{X}$, donde R es una matriz de rotación (definida abajo) considerando un ángulo de rotación $\theta = 0$. Haga un gráfico de dispersión para **X** y para ***Y*****.** Calcule su coeficiente de correlación.
2. Estime la matriz de autocovarianza del vector aleatorio ***Y***.
3. Repita los puntos 1 y 2, pero para un ángulo rotación $\theta = \pi/10$ y $\theta = \pi/4$.

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Sugerencia:

```
axis([-2 3 -1 4]) % Fijar el límite de los ejes
axis square       % Relación de aspecto cuadrada
```

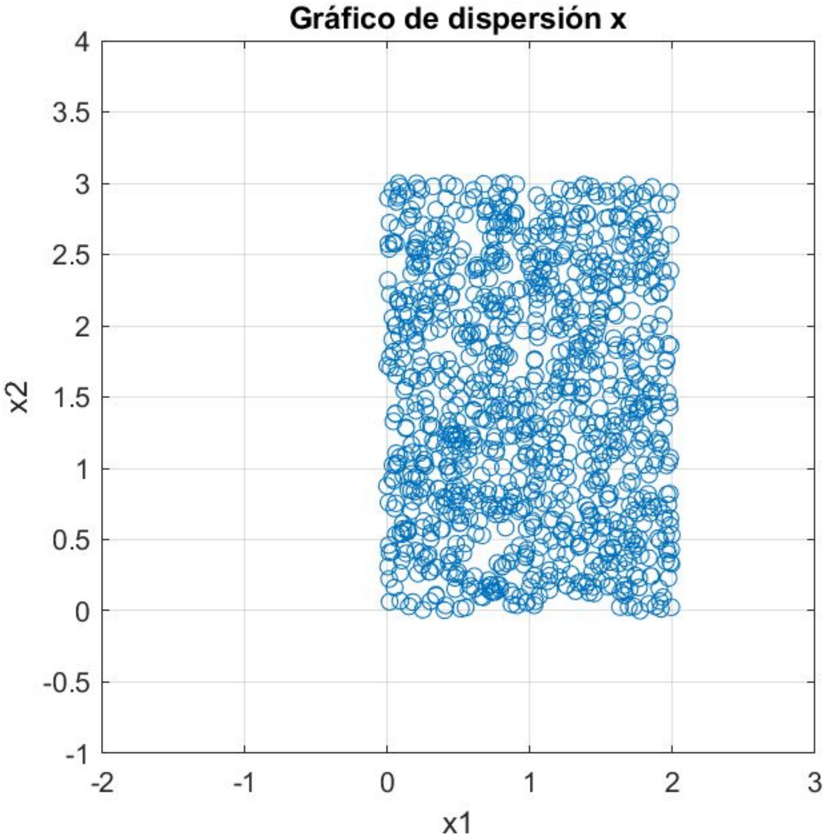
Actividad 3
Matriz de covarianza

```
Cx =

     0.3424   -0.0144
    -0.0144    0.7545
```

```
rho_x =

     0.0118
```



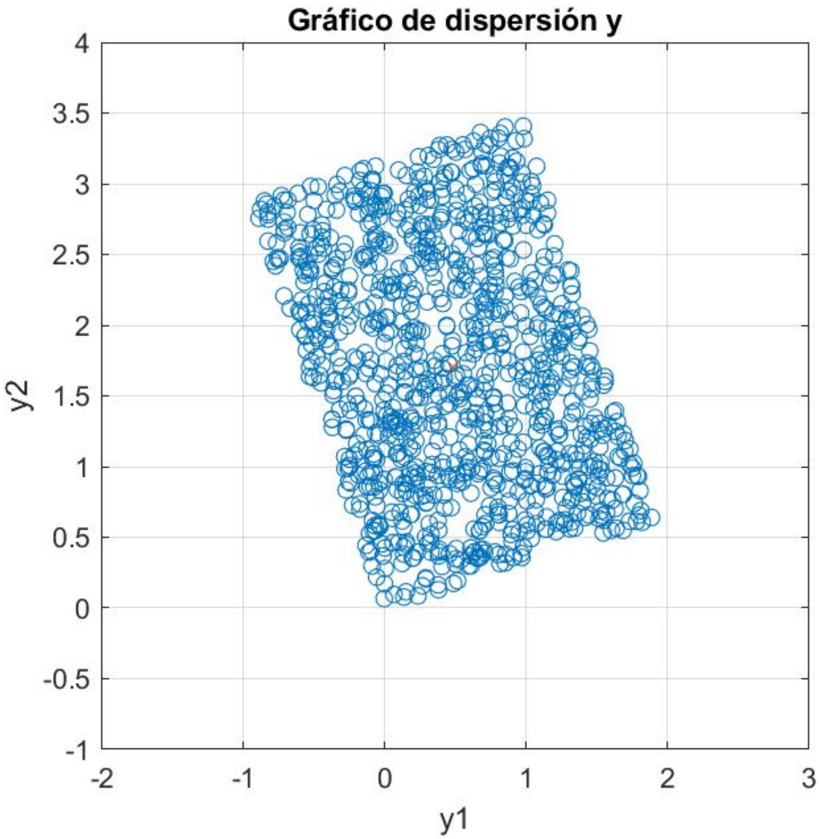
Actividad 3
Matriz de covarianza

```
Cy =

     0.3561   -0.1104
    -0.1104    0.7457
```

```
rho_y =

      -0.2142
```



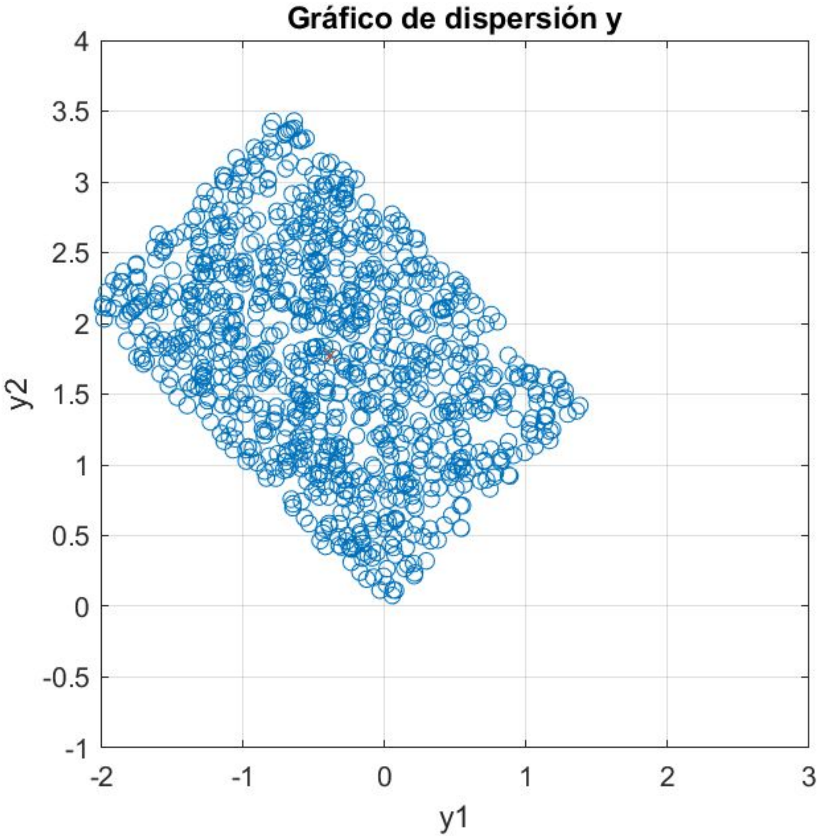
Actividad 3
Matriz de covarianza

```
Cy =

     0.5155    -0.1881
    -0.1881     0.5269
```

```
rho_y =

    -0.3608
```



Simulación Monte Carlo

Simulación Monte carlo

Historia

- El nombre “Monte Carlo” fue acuñado en los años 40 por científicos del Proyecto Manhattan, en particular Stanislaw Ulam y John von Neumann, quienes desarrollaron el método para resolver problemas en física nuclear.
- El término hace referencia al famoso casino de Monte Carlo en Mónaco, debido a que el método se basa en la aleatoriedad y el muestreo estadístico, al igual que los juegos de azar.

John von Neumann

Stanislaw Ulam

Simulación Monte carlo

¿Qué es Monte Carlo?

- Permite aproximar valores de interés mediante **simulación aleatoria**.
- Monte Carlo es una aplicación de la **Ley de los Grandes Números**, ya que conforme se incrementa el número de muestras, los resultados convergen a las cantidades de interés.

Ley (Débil) de los Grandes Números (LGN)

Sean $X_1, \ldots, X_n$ una sucesión de variables aleatorias iid, tal que $\mu = \mathbb{E}[X_i] < \infty$, entonces para

$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ se cumple que $\forall \epsilon > 0, \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[|\bar{X}_n - \mu| > \epsilon\right] = 0.$

En otras palabras, se dice que converge "en probabilidad a μ", $\bar{X}_n \to \mu$

Ejercicio: Demostrar asumiendo varianza finita y aplicando la desigualdad de Tchebychev:

$$\mathbb{P}(|X - \mu_X| \geq a) \leq \frac{\sigma_X^2}{a^2}$$

Propiedad Importante: para toda función $g(.)$ continua,

Si $X_n \to X$, entonces $g(X_n) \to g(X)$

Simulación Monte carlo

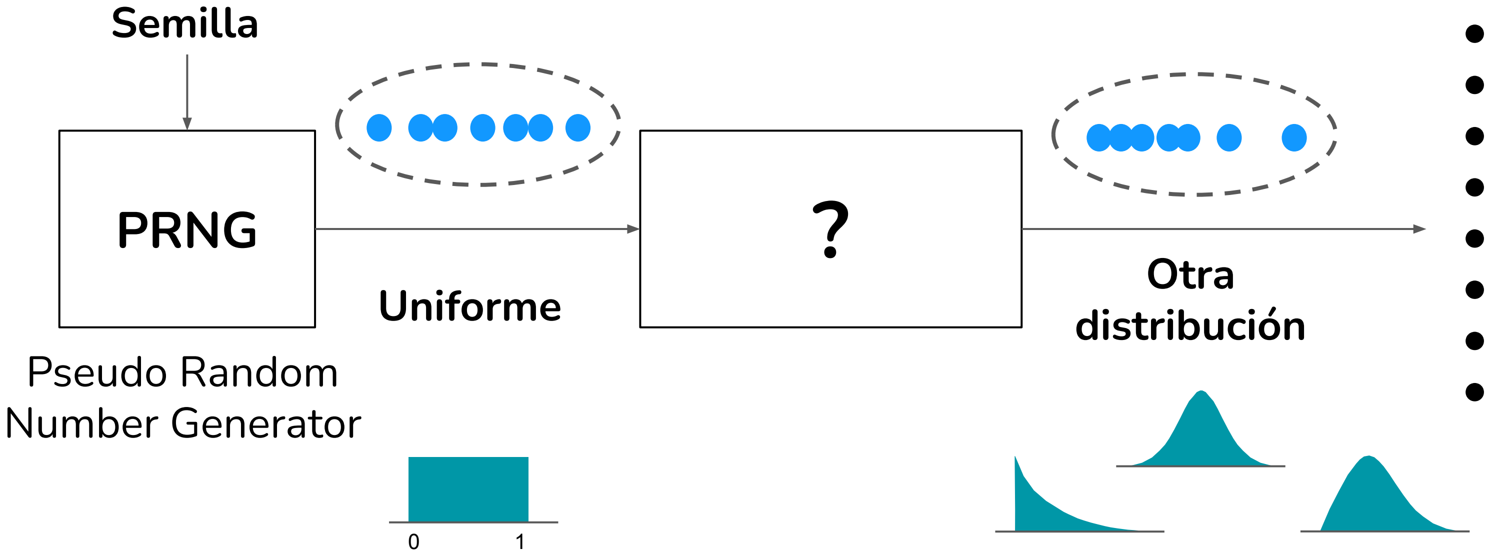
Algunas aplicaciones típicas de Monte Carlo

- Generación de muestras de VA con cierta distribución.
- Generación de procesos aleatorios.
- Estudio de problemas de optimización.
- Estimación de parámetros para eventos complejos.
- Simulación de modelos físicos o biológicos.
- Resolución numérica de integrales.
- Análisis de riesgos.
- Etc

Generación de variables aleatorias

Generación de variables aleatorias

¿Cómo generar muestras de diferentes distribuciones?



- Bernoulli
- Binomial
- Poisson
- Exponencial
- Gaussiana
- Gamma
- Beta
- Etc.

Generación de variables aleatorias

1. Método de la transformación inversa.
2. Método de la transformación de Box-Muller
3. Otros

Método de la transformación inversa

Generación de VA – Método de la Transformación Inversa

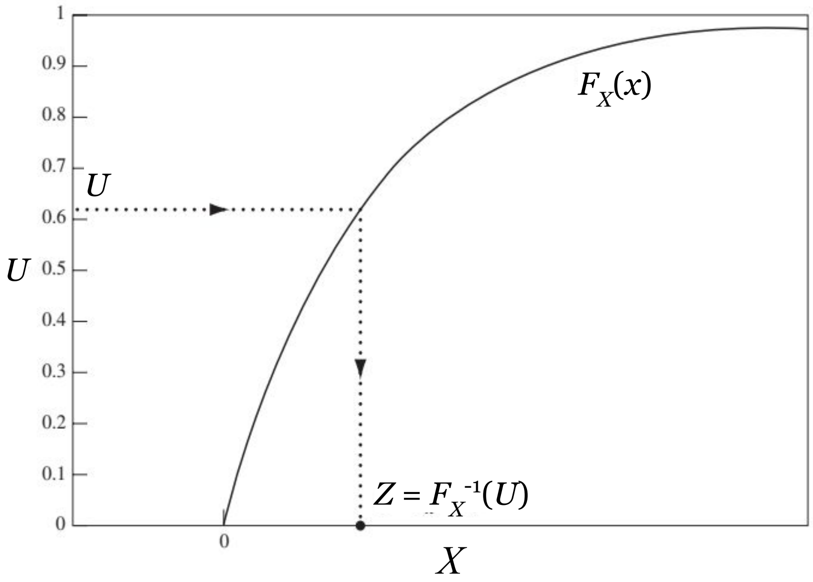
Queremos una transformación g: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ para obtener realizaciones de una VA X (de cierta distribución) a partir de una VA uniforme $U \sim U(0,1)$.

Requerimientos

- $F_X(x)$ debe ser una función continua, monótona creciente e invertible

Procedimiento del método

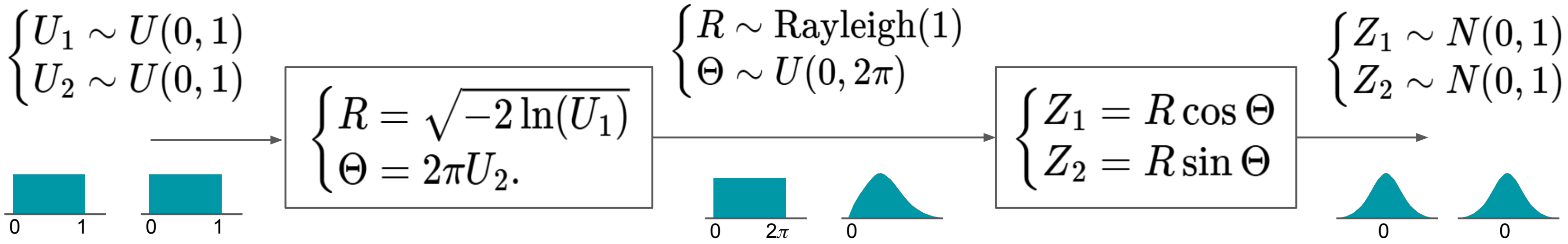
1. Generar un número random $U \sim U(0,1)$
2. Obtener una realización de X como: $Z = g(U) = F_X^{-1}(U)$.



Método de la transformación de Box-Muller

Generación de VA – Método de Box-Muller

El método consiste en generar muestras de dos VAs uniformes iid U_1, U_2, y aplicar dos transformaciones para obtener a dos VAs normales estándar Z_1, Z_2 ~ N(0,1) iid:



$$\boxed{\begin{cases} Z_1 = \sqrt{-2\ln(U_1)}\cos(2\pi U_2) \\ Z_2 = \sqrt{-2\ln(U_1)}\sin(2\pi U_2) \end{cases}}$$

Resolución de integrales

Resolución de integrales

Sea una integral I definida en un intervalo arbitrario [a, b] para de una función conocida $g(x)$:

$$I = \int_a^b g(x)\, dx,$$

Se puede resolver esta integral generando N muestras $X_1, X_2, \ldots, X_N$ iid, de una VA uniforme $X \sim \mathrm{U}(a,b)$ aplicando la siguiente aproximación:

$$\boxed{I \approx \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^{N} g(X_i).}$$

Resolución de integrales

Sea una VA uniforme X ~ U(a, b)

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a \leq x \leq b$$

Se puede expresar la integral de la función g(x) en [a.b] en términos de la E[g(X)]:

$$I = \int_a^b g(x)dx = \int_a^b g(x)(b-a)f_U(x)dx = (b-a)\int_a^b g(x)f_X(x)dx = (b-a)\mathbb{E}[g(X)]$$

Por LGN, se cumple que: $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g(X_i) \xrightarrow[N\to\infty]{} \mathbb{E}[g(X)]$

Por lo tanto, para N suficientemente grande podemos aproximar la integral como:

$$I \approx \frac{b-a}{N}\sum_{i=1}^{N} g(X_i).$$

Resolución de integrales

Para una función g: $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x_1,x_2,\ldots, x_m)$, la integral en un dominio hipercúbico $[a_1, b_1]\times[a_2, b_2]\times\ldots\times[a_m, b_m]$ resulta:

$$I = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\cdots\int_{a_m}^{b_m} g(x_1, x_2, \ldots, x_m)dx_1 dx_2 \ldots dx_m$$

Siguiendo el mismo razonamiento que para una dimensión, aplicando la LGN, la aproximación de la integral a partir de N muestras de m uniformes (cada una en su intervalo $[a_i, b_i]$) resulta:

Trivial, diría Rey Vega ←

$$\boxed{I \approx \frac{\prod_{i=1}^{m}(b_i - a_i)}{N}\sum_{i=1}^{N} g(X_1^{(i)}, X_2^{(i)}, \ldots, X_m^{(i)}).}$$

Donde $X_k^{(i)}$ representa la *i*-ésima realización de la k-ésima VA uniforme

Resolución de integrales

Algoritmo para estimar $I = \int_{A \subset \mathbb{R}^n} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$

1. Generamos muestras $\{\mathbf{X}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ iid con distribución Uniforme sobre cierto recinto $A \subset \mathbb{R}^n$, i.e. $\mathbf{X}_i \sim \mathcal{U}(A)$.
2. Aplicamos la función $g(\mathbf{X}_i)$
3. Calculamos la media muestral y aplicamos la LGN:

$$\bar{\mathbf{X}}_n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} g(\mathbf{X}_i) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[g(\mathbf{X}_1)] = \frac{1}{\int_A d\mathbf{x}} I$$

4. Finalmente:

$$\hat{I} = \left(\int_A d\mathbf{x} \right) \cdot \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} g(\mathbf{X_i}).$$

Estimación de probabilidades

Observar que:

$$\mathbb{P}(\mathbf{X} \in A) = \mathbb{E}\left[\mathbf{1}\{X \in A\}\right]$$

donde $\mathbf{X}$ es una variable (vector aleatorio) y $A \subset \mathbb{R}^n$. Luego utilizando la LGN.

1. Generamos muestras $\{\mathbf{X}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ iid con la distribución de $\mathbf{X}$.
2. Calculamos la media muestral y aplicamos LGN

$$\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N} \mathbf{1}\{\mathbf{X}_i \in A\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}\{\mathbf{X} \in A\}\right] = \mathbb{P}(\mathbf{X} \in A).$$

Actividad 4

Actividad 4
Método Montecarlo – Resolución de integrales

Se requiere resolver la siguiente integral:

$$I = \int_0^1 \cdots \int_0^1 e^{-\sum_{i=1}^{10} x_i^2} \, dx_1 \cdots dx_{10}$$

Utilice el método Monte Carlo para resolver esta integral que comprende una integral múltiple de dimensión 10. Compare el resultado con el analítico para 100000 muestras.

Nota: para este caso se puede usar como referencia la siguiente forma alternativa que requiere el cálculo de solo una integral:

$$I = \left(\int_0^1 e^{-x^2} dx \right)^{10}$$

MATLAB

```
I = (sqrt(pi)/2*erf(1))^10
```

Actividad 5
Método Montecarlo – Resolución de integrales II

Se desea utilizar el método de Monte Carlo para estimar el número π mediante la siguiente integral:

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Se cuenta para ello con un generador de números aleatorios que genera variables aleatorias independientes uniformes en (0, 1).

1. Diseñe un experimento Monte Carlo que permita estimar el número π a partir de la integral I.
2. Simule 1000 realizaciones de las variables iid uniformes en (0,1) $U_1, U_2, \ldots, U_{1000}$. Sea $\hat{I}_n$ el estimador que se obtiene con el experimento desarrollado en (1) usando las 1eras n uniformes. Realice un gráfico del cociente $\hat{I}_n/\pi$ y extraiga conclusiones.