



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE INGENIERÍA
Año 2025 - 1^{er} cuatrimestre

PROCESOS ESTOCÁSTICOS (86.09)

TRABAJO PRÁCTICO N°3, ECUALIZADOR MMSE

ESTUDIANTES:

Leroy, Joaquín	110452
<code>jleroy@fi.uba.ar</code>	
Cabrera, Santiago	110445
<code>smcabrera@fi.uba.ar</code>	
Ruggiero, Valentina Mora	109317
<code>vruggiero@fi.uba.ar</code>	

Índice

1. Introducción	2
2. Ejercicio 1	2
3. Ejercicio 2	3
4. Ejercicio 3	4
5. Ejercicio 4	8
5.1. $M = 2$	9
5.2. $M = 5$	10
5.3. $M = 10$	11
5.4. $M = 30$	12
6. Conclusiones	13
7. Anexo	13

1. Introducción

El objetivo de este trabajo práctico es estudiar cómo un filtro F.I.R. construido a partir del criterio MMSE puede compensar los efectos de distorsión y ruido que un canal de comunicación induce en una secuencia de bits a enviar. El diagrama en bloques del sistema es el siguiente:

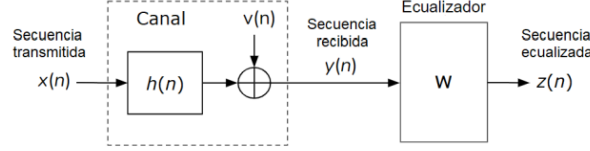


Figura 1: Diagrama en bloques simplificado del sistema

2. Ejercicio 1

Se considera un proceso aleatorio *random step* $X(n)$, cuyas muestras son independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.). Se desea calcular su función de autocorrelación $R_X(k)$:

$$R_X(n, n+k) = \mathbb{E}[X(n) \cdot X(n+k)]$$

Dado que las muestras de $X(n)$ son independientes entre sí, y además se cumple que $\mathbb{E}[X^2(n)] = 1 \forall n$, se concluye que:

$$R_X(k) = \begin{cases} \mathbb{E}[X(n) \cdot X(n+k)] = 0, & \text{si } k \neq 0 \\ \mathbb{E}[X^2(n)] = 1, & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, la función de autocorrelación del proceso $X(n)$ está dada por:

$$R_X(k) = \delta(k) \quad (1)$$

Por otro lado, se considera un ruido aditivo $v(n)$, blanco y de media nula. Esto implica que sus muestras también son independientes entre sí, con varianza:

$$\text{Var}[v(n)] = \mathbb{E}[v^2(n)] = \sigma_V^2$$

De manera análoga, su función de autocorrelación es:

$$R_V(k) = \sigma_V^2 \cdot \delta(k) \quad (2)$$

Por otro lado, la salida del canal $Y(n)$ está dada por

$$Y(n) = X(n) * h(n) + v(n)$$

Se desarrollan los cálculos en el Anexo (7) y se llega a que

$$R_Y(k) = (\tilde{h} * h)(k) + \sigma_V^2 \delta(k) \quad (3)$$

Donde $\tilde{h}(k) = h(-k)$ representa la versión reflejada de $h(k)$.

La correlación cruzada entre $Y(n)$ y $X(n)$ es:

$$R_{YX}(k) = \mathbb{E}[(X(n) * h(n) + v(n)) \cdot X(n+k)]$$

Desarrollando en el Anexo (7) se concluye en que:

$$R_{YX} = (\tilde{h} * R_X)(k) = \tilde{h}(k) \quad (4)$$

3. Ejercicio 2

Se sabe que a partir del criterio del error cuadrático medio la solución óptima para los coeficientes del ecualizador debe cumplir con la ecuación:

$$\mathbf{R}_Y \mathbf{w}_o = \mathbf{R}_{YX}$$

En esta ecuación, $\mathbf{w}_o = [w_0, w_1, \dots, w_{M-1}]^T$ es el vector con los coeficientes del ecualizador óptimo. Para llegar al valor de estos coeficientes, utilizamos las matrices de autocorrelación R_Y y R_{YX} , y los despejamos de la relación:

$$\mathbf{w}_o = \mathbf{R}_{YX} \mathbf{R}_Y^{-1} \mathbf{1} \quad (5)$$

La matriz R_Y se define como

$$\mathbf{R}_Y = \mathbb{E} [\mathbf{Y}(n) \mathbf{Y}(n)^T] \quad (M \times M)$$

Por lo tanto, esta matriz se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_Y &= \mathbb{E} [\vec{\mathbf{Y}}(m) \vec{\mathbf{Y}}(m)^T] \\ &= \mathbb{E} \left[\begin{bmatrix} Y(m) \\ Y(m-1) \\ \vdots \\ Y(m-M+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y(m) & Y(m-1) & \cdots & Y(m-M+1) \end{bmatrix} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\begin{bmatrix} Y(m)^2 & Y(m)Y(m-1) & \cdots & Y(m)Y(m-M+1) \\ Y(m-1)Y(m) & Y(m-1)^2 & \cdots & Y(m-1)Y(m-M+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y(m-M+1)Y(m) & Y(m-M+1)Y(m-1) & \cdots & Y(m-M+1)^2 \end{bmatrix} \right] \\ &= \begin{bmatrix} R_Y(0) & R_Y(-1) & R_Y(-2) & \cdots & R_Y(-M+1) \\ R_Y(1) & R_Y(0) & R_Y(-1) & \cdots & R_Y(-M+2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_Y(M-1) & R_Y(M-2) & R_Y(M-3) & \cdots & R_Y(0) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A su vez, se sabe que $R_Y(k) = R_Y(-k)$ ya que el proceso $\mathbf{Y}(n)$ es ESA. Por lo tanto, la matriz de R_Y se define como:

$$\mathbf{R}_y = \begin{bmatrix} R_Y(0) & R_Y(1) & R_Y(2) & \cdots & R_Y(M-1) \\ R_Y(1) & R_Y(0) & R_Y(1) & \cdots & R_Y(M-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_Y(M-1) & R_Y(M-2) & R_Y(M-3) & \cdots & R_Y(0) \end{bmatrix}$$

Por otro lado, R_{XY} es el vector de correlación cruzada de los procesos $\mathbf{Y}(n)$ y $X(n)$ y se define como:

$$\mathbf{R}_{XY} = \mathbb{E}[X(n) \mathbf{Y}(n)] = \mathbb{E} \left[\begin{bmatrix} X(n)Y(n) \\ X(n)Y(n-1) \\ X(n)Y(n-2) \\ \vdots \\ X(n)Y(n-M+1) \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} R_{XY}(0) \\ R_{XY}(-1) \\ R_{XY}(-2) \\ \vdots \\ R_{XY}(-M+1) \end{bmatrix}$$

Si se toma esta expresión y se realiza el cambio de variables para obtener R_{XY} se deduce la relación $R_{XY}(-k) = R_{YX}(k)$, por lo que se obtiene:

$$\mathbf{R}_{YX} = \mathbb{E}[X(n) \mathbf{Y}(n)] = \begin{bmatrix} R_{YX}(0) \\ R_{YX}(1) \\ R_{YX}(2) \\ \vdots \\ R_{YX}(M-1) \end{bmatrix}$$

Considerando los resultados del ejercicio 1, sabemos que $R_{YX}(k) = h(-k)$ y que el filtro $h(k)$ es causal, por lo que finalmente la matriz R_{YX} se define como:

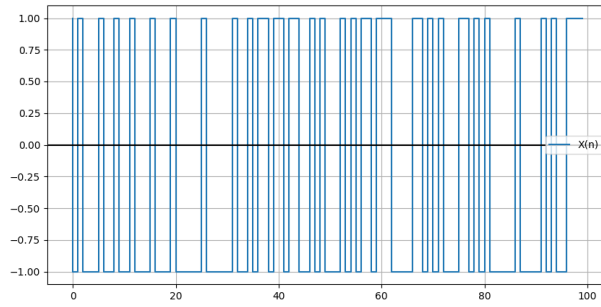
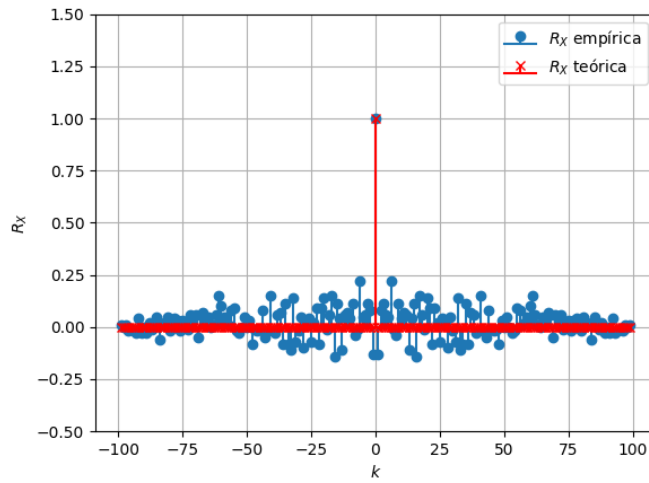
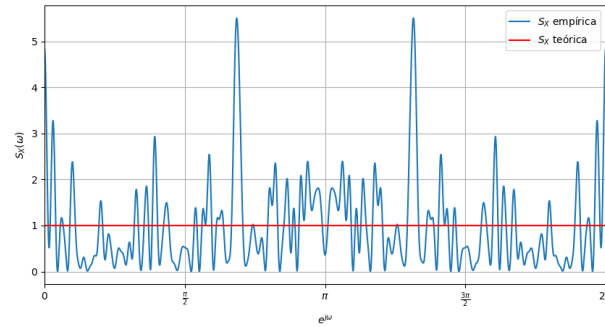
$$\mathbf{R}_{YX} = \mathbb{E}[X(n)\mathbf{Y}(n)] = \begin{bmatrix} R_{YX}(0) \\ R_{YX}(1) \\ R_{YX}(2) \\ \vdots \\ R_{YX}(M-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(0) \\ h(-1) \\ h(-2) \\ \vdots \\ h(-M+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(0) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente, el vector \mathbf{w}_o se define como:

$$\mathbf{w}_o = R_Y^{-1} \begin{bmatrix} h(0) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

4. Ejercicio 3

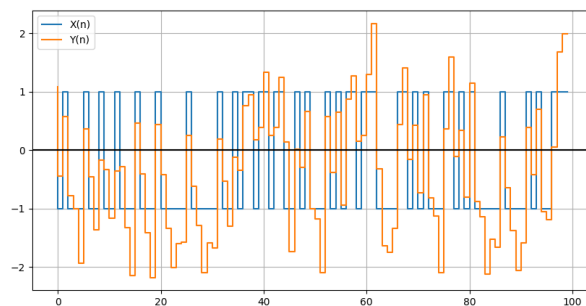
Se simuló una realización del proceso *random step* $X(n)$ de $N = 100$ puntos. Luego se calculó su autocorrelación y periodograma y se graficaron los resultados, comparados a lo calculado teóricamente, y volcados en la Figura 2.

(a) 100 realizaciones del proceso $X(n)$ (b) Autocorrelación de X : teórica y empírica(c) Periodograma de X : teórico y empíricoFigura 2: Análisis del proceso *Random step* $X(n)$

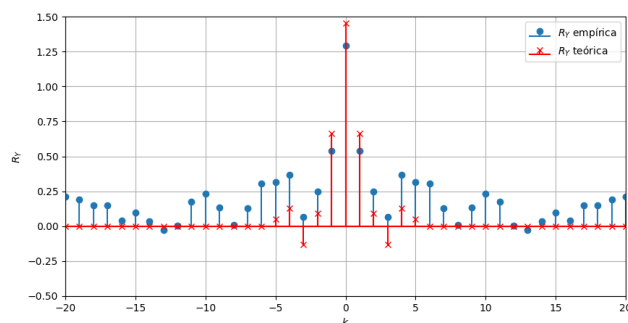
Al comparar los resultados teóricos y empíricos de 100 realizaciones del proceso *random step*, se observa que la autocorrelación empírica, $R_X(k)$, no coincide exactamente con la delta de Dirac teórica debido a la variabilidad en la estimación al solamente simular muestras finitas. Asimismo, el periodograma $S_X(e^{j\omega})$ no es una constante unitaria como debería ser, sino que muestra valores que pueden alcanzar hasta 5, debido a la alta varianza y fluctuaciones del estimador con datos limitados. Además, la autocorrelación calculada en este caso es con un estimador sesgado, lo que significa que al dividir siempre por el mismo número total de muestras sin ajustar para cada retardo, se subestima la autocorrelación en los retardos más grandes. Esto contribuye a que la función empírica se aleje aún más de la forma ideal de una delta, especialmente cuando el número de datos no es muy grande. En resumen, tanto la cantidad limitada de datos como la elección del estimador afectan que los resultados empíricos no sean exactos, pero con más realizaciones o ajustando el cálculo para un estimador no sesgado, las estimaciones

se acercarán mejor a la teoría.

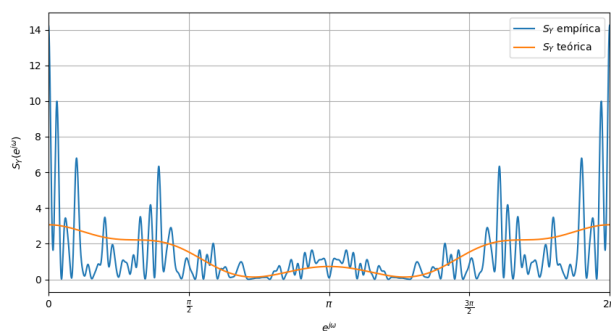
Luego se simuló la salida al sistema luego de pasar por el canal, donde hubo acción de un filtro $h(n)$ y un ruido blanco aditivo $v(n)$, y se obtuvo lo provisto en la Figura 3.



(a) Salida $Y(n)$ frente a entrada $X(n)$



(b) Autocorrelación $R_Y(k)$ teórica vs empírica



(c) Periodograma $S_Y(e^{j\omega})$ teórica vs empírica

Figura 3: Análisis de la salida sin equalizar

Se observa que el canal modificó significativamente la señal transmitida, y que la autocorrelación y el periodograma se asemejan en comportamiento a lo calculado teóricamente, aunque con ciertas fluctuaciones debidas a la longitud finita de las muestras. Esta modificación se debe a la memoria introducida por el canal, que genera correlación entre muestras antes independientes. Conocer la respuesta al impulso del canal resulta fundamental para el diseño de un equalizador basado en el criterio de error cuadrático medio mínimo (MMSE), que es lo que se aborda a continuación. Los coeficientes óptimos del equalizador se obtienen según lo especificado en el inciso anterior. A partir de dicho procedimiento, se obtiene el vector de coeficientes óptimos del equalizador y, con él, la señal equalizada $Z(n) = \mathbf{w}_0(n) * Y(n)$. Los resultados se presentan en la Figura 4 y Figura 5. Al comparar los coeficientes del equalizador óptimo MMSE con los de la respuesta impulsiva del canal, se observa que no coinciden ni se cancelan directamente entre sí. Esto sugiere que el equalizador no actúa simplemente como una inversión directa del canal, sino que incorpora también el efecto del ruido y la correlación entre entrada y salida, e intenta corregirlos con el mínimo error cuadrático. En incisos posteriores se analizará cómo la convolución entre dichos coeficientes

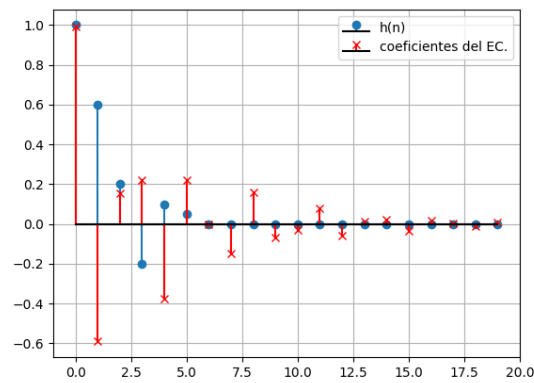
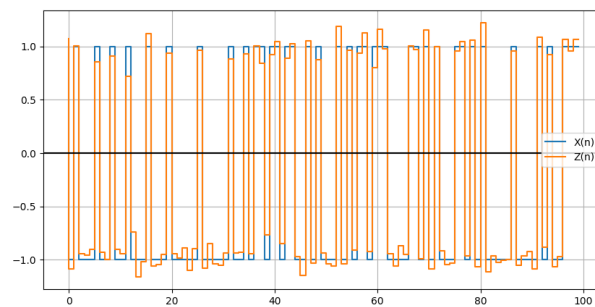
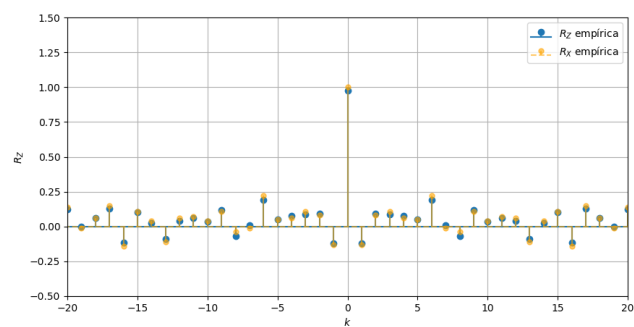


Figura 4: Coeficientes del ecualizador optimo $w_0(n)$ y de la respuesta impulsiva del canal

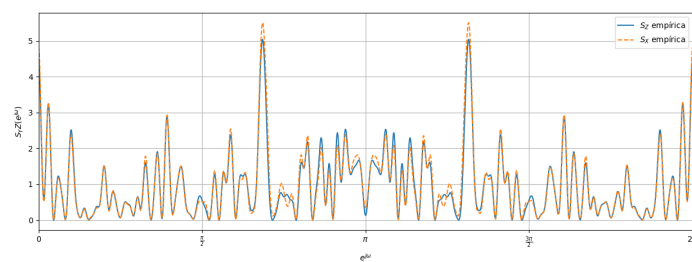
tiende al impulso unitario.



(a) Salida ecualizada $Z(n)$ frente a entrada $X(n)$



(b) Autocorrelación $R_Z(k)$ empírica vs $R_X(k)$ empírica



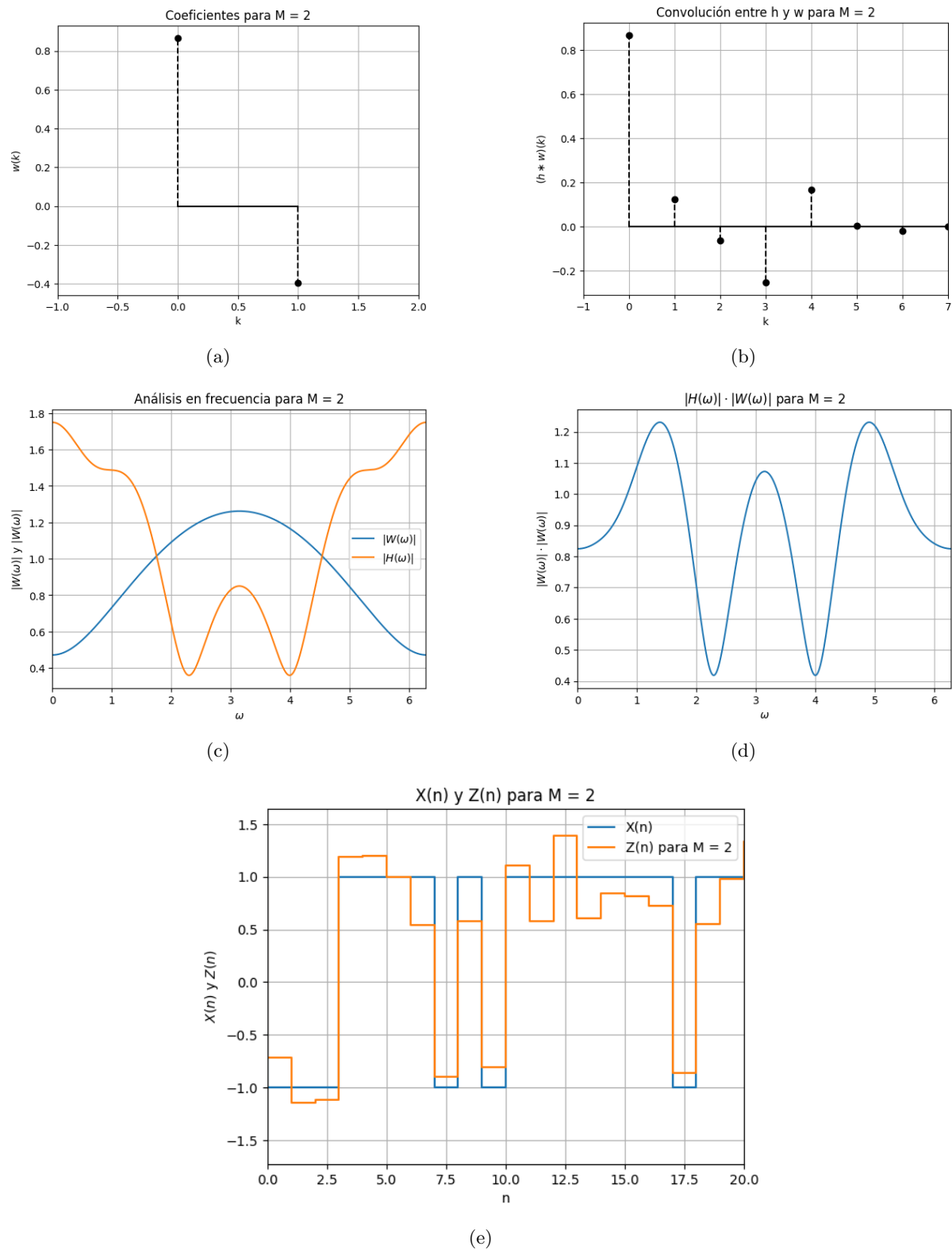
(c) Periodograma $S_Z(e^{j\omega})$ empírica vs $S_X(e^{j\omega})$ empírica

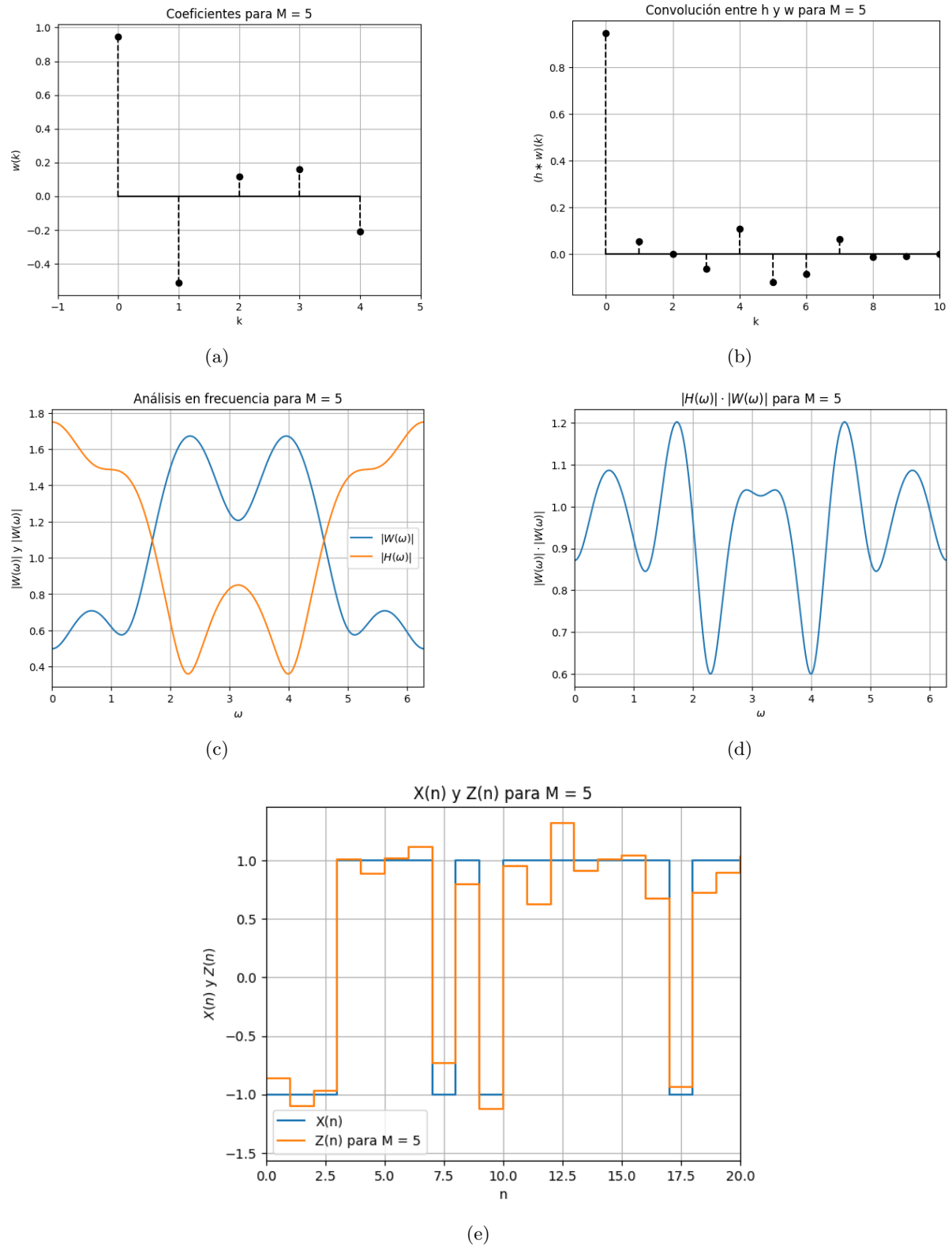
Figura 5: Análisis de la salida ecualizada

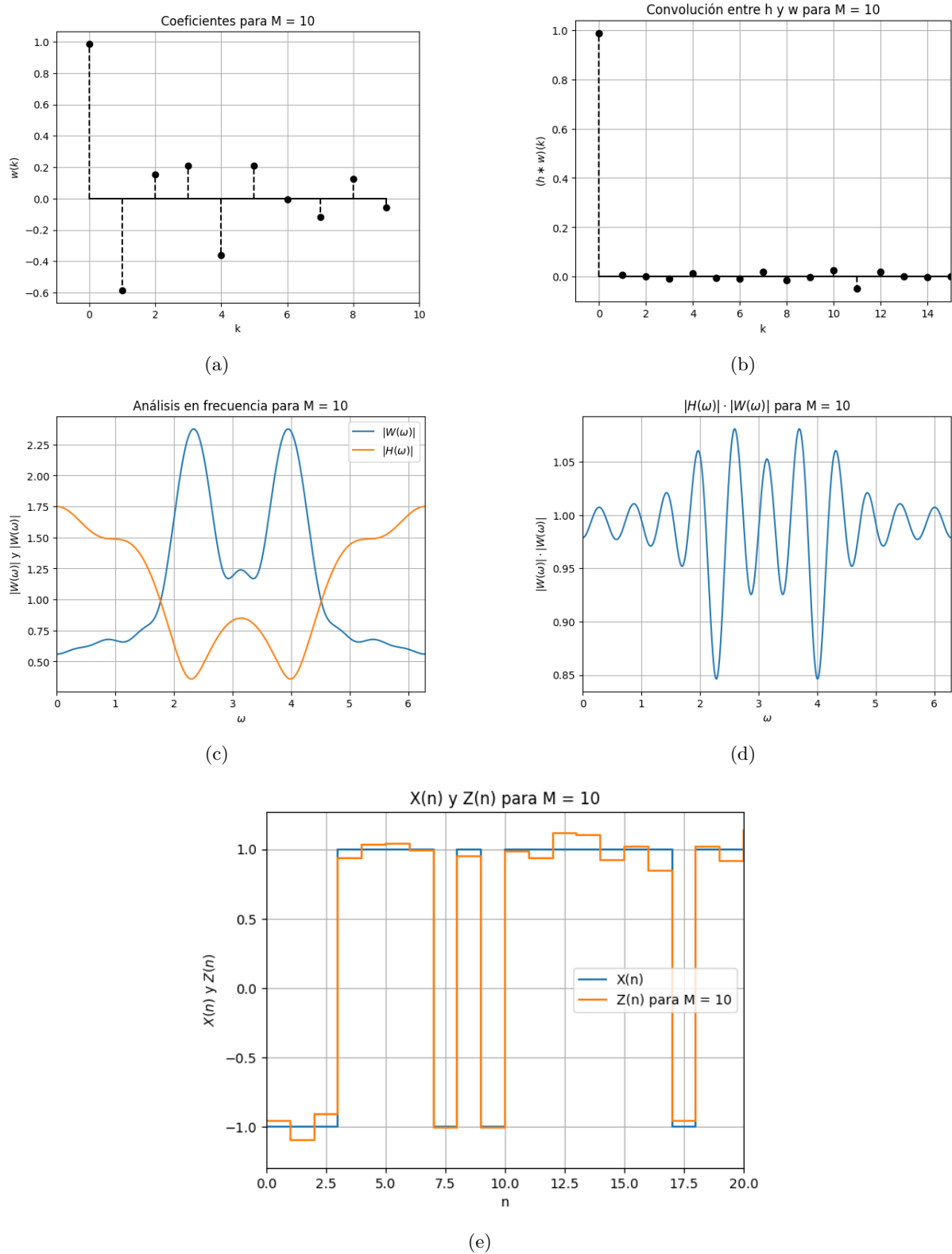
Efectivamente, se verifica que el ecualizador diseñado cumple su objetivo: se reduce significativamente el error a la salida del sistema, y la señal ecualizada presenta un comportamiento muy similar al de la señal original transmitida, tanto en el dominio temporal como en su autocorrelación y periodograma. En particular, la autocorrelación recupera su forma teórica esperada y el periodograma muestra una distribución espectral más uniforme, lo que indica que gran parte de la distorsión introducida por el canal ha sido compensada. Esto evidencia que el ecualizador MMSE fue capaz de revertir, en buena medida, los efectos del eco de la respuesta impulsiva del canal y del ruido, mejorando sustancialmente el desempeño del sistema de comunicación.

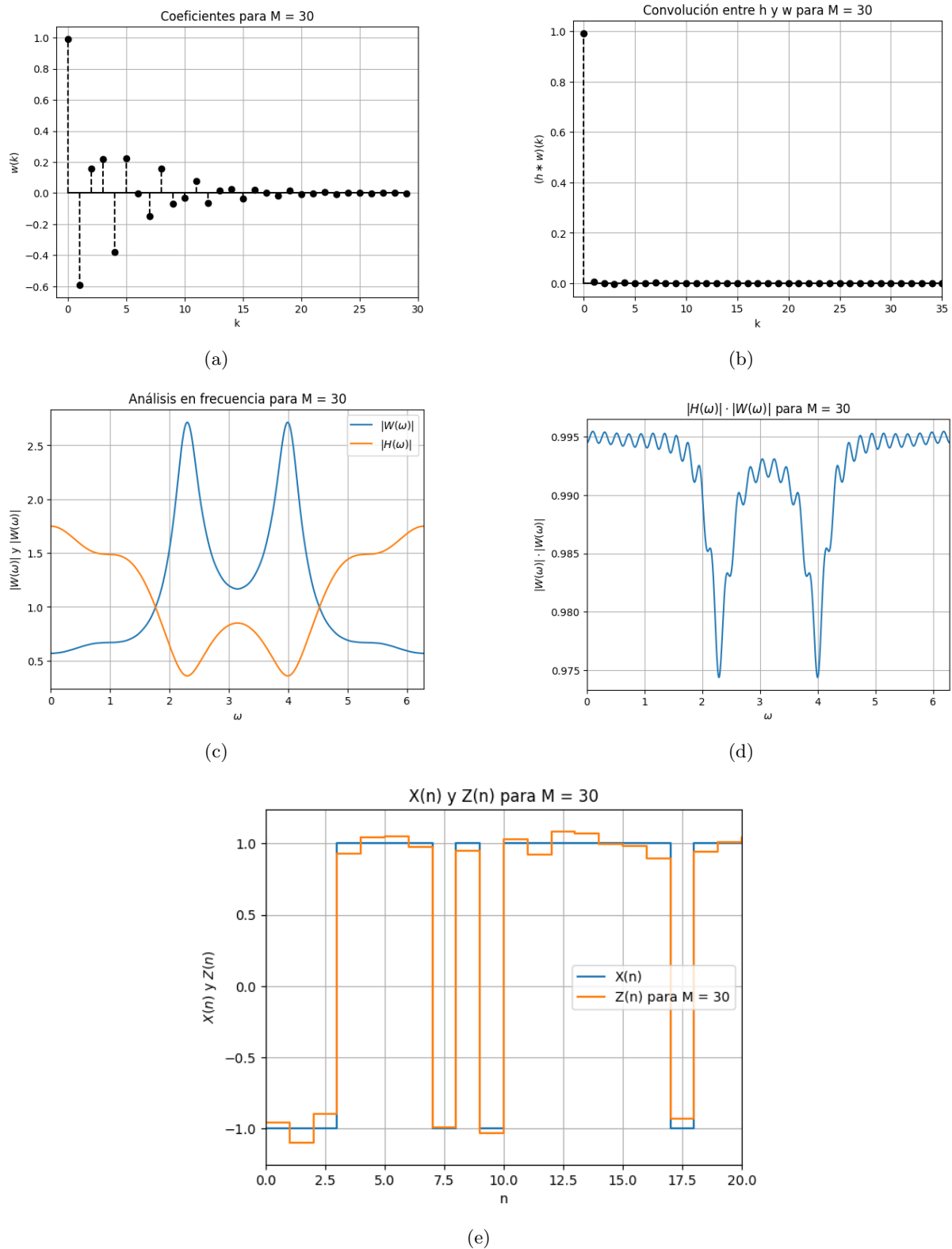
5. Ejercicio 4

En este ejercicio se analizó cómo varían los resultados anteriores para distintos valores de M , la cantidad de coeficientes del ecualizador. Se consideraron los valores $M \in \{2, 5, 10, 30\}$. Para hacer este análisis se graficaron para cada valor de M : los coeficientes w_o , $(h * \mathbf{w}_0)(k)$, $|H(\omega)|$ y $|W(\omega)|$, el producto $|H(\omega)| \cdot |W(\omega)|$ y $X(n)$ junto con $Z(n)$, las señales enviada y ecualizada respectivamente. En total se tienen 5 gráficos para cada valor de M .

5.1. $M = 2$ Figura 6: Gráficos para $M = 2$

5.2. $M = 5$ Figura 7: Gráficos para $M = 5$

5.3. $M = 10$ Figura 8: Gráficos para $M = 10$

5.4. $M = 30$ Figura 9: Gráficos para $M = 30$

La señal $(h * w_0)(k)$ es la respuesta al impulso del sistema que resulta de conectar el canal y el ecualizador en cascada. Se observa que a medida que M crece, esta señal se aproxima más a una delta de altura unitaria, lo que significa que el ecualizador está deshaciendo los efectos del canal. Algo similar se

observa en el producto $|H(\omega)| \cdot |W(\omega)|$, que tiende a 1 a medida que M crece. Este producto representa el módulo de la respuesta en frecuencia de la cascada. Lo mismo vale para $Z(n)$, que se asemeja más y más a $X(n)$ a medida que M aumenta.

6. Conclusiones

Se ha analizado el comportamiento empírico del proceso *random step*, observando cómo sus propiedades teóricas, tales como la autocorrelación tipo delta y el espectro plano, se ven afectadas por el número finito de muestras y la varianza del estimador. La presencia de sesgo en la estimación de autocorrelación y la alta variabilidad del periodograma explican las desviaciones observadas respecto al ideal teórico.

Posteriormente, se estudió la transmisión de este proceso a través de un canal causal con memoria y ruido aditivo. Se verificó que la señal resultante sufre una distorsión significativa, aunque su comportamiento estadístico sigue una tendencia consistente con la teoría, pese a las fluctuaciones.

A través del diseño de un ecualizador MMSE, se logró recuperar en buena medida la forma original de la señal transmitida, tanto en dominio temporal como espectral. La comparación entre los coeficientes del ecualizador y los de la respuesta impulsiva del canal evidenció que el objetivo del MMSE no es simplemente invertir el canal, sino minimizar el error considerando también el efecto del ruido.

En conjunto, los resultados muestran la importancia de considerar las limitaciones prácticas de estimación y el rol de los ecualizadores como herramientas de compensación efectiva en sistemas de comunicación reales.

También se evidenció que para un mayor valor de M (coeficientes del ecualizador), el filtro ecualizador corrige mejor las perturbaciones que el canal de transmisión produce.

7. Anexo

Se plantea la autocorrelación de $Y(n)$:

$$\begin{aligned} R_Y(k) &= \mathbb{E}[(X(n) * h(n) + v(n)) \cdot (X(n+k) * h(n+k) + v(n+k))] \\ &= \mathbb{E}[X(n) * h(n) \cdot X(n+k) * h(n+k) + X(n) * h(n) \cdot v(n+k) \\ &\quad + v(n) \cdot X(n+k) * h(n+k) + v(n) \cdot v(n+k)] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{\ell} h(\ell) X(n-\ell) \cdot \sum_s h(s) X(n-s+k)\right] + \mathbb{E}\left[\sum_{\ell} h(\ell) X(n-\ell) \cdot v(n+k)\right] \\ &\quad + \mathbb{E}\left[\sum_{\ell} v(n) \cdot h(\ell+k) X(n-\ell+k)\right] + \mathbb{E}[v(n) \cdot v(n+k)] \end{aligned}$$

Dado que los coeficientes $h(\cdot)$ son deterministas, pueden extraerse del operador de esperanza:

$$\begin{aligned} &= \sum_{\ell} \sum_s h(\ell) h(s) \mathbb{E}[X(n-\ell) X(n-s+k)] + \sum_{\ell} h(\ell) \mathbb{E}[X(n-\ell) v(n+k)] \\ &\quad + \sum_{\ell} h(\ell+k) \mathbb{E}[v(n) X(n-\ell+k)] + \sigma_V^2 \delta(k) \\ &= \sum_{\ell} h(\ell) \sum_s h(s) \cdot R_X(k+\ell-s) + \sum_{\ell} h(\ell) \cdot R_{XV}(k+\ell) + \sum_{\ell} h(\ell+k) \cdot R_{VX}(k-\ell) + \sigma_V^2 \delta(k) \end{aligned}$$

Como las muestras de $X(n)$ y $v(n)$ están descorrelacionadas, las funciones de correlación cruzada son nulas:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow R_{XV}(k) = R_{VX}(k) = 0 \\ &\Rightarrow R_Y(k) = \sum_{\ell} h(\ell) (h * R_X)(k+\ell) + \sigma_V^2 \delta(k) \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $\ell = -\tau$ se obtiene:

$$R_Y(k) = \left(\tilde{h} * h * R_X\right)(k) + \sigma_V^2 \delta(k)$$

Como $R_X(k) = \delta(k)$, la convolución con un impulso no altera el resultado:

$$R_Y(k) = (\tilde{h} * h)(k) + \sigma_V^2 \delta(k)$$

La correlación cruzada entre $Y(n)$ y $X(n)$ es:

$$\begin{aligned} R_{YX}(k) &= \mathbb{E}[(X(n) * h(n) + v(n)) \cdot X(n+k)] \\ &= \mathbb{E}[X(n) * h(n) \cdot X(n+k) + v(n) \cdot X(n+k)] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{\ell} h(\ell) X(n-\ell) \cdot X(n+k)\right] + \mathbb{E}[v(n) \cdot X(n+k)] \\ &= \sum_{\ell} h(\ell) \mathbb{E}[X(n-\ell) X(n+k)] + \mathbb{E}[v(n) X(n+k)] \\ &= \sum_{\ell} h(\ell) \cdot R_X(k+\ell) + R_{VX}(k) \end{aligned}$$

Haciendo los cambios de variable análogos al cálculo anterior y teniendo en cuenta que X y V están descorrelacionadas se obtiene:

$$R_{YX}(k) = (\tilde{h} * R_X)(k) = \tilde{h}(k)$$