Estos serían los ejercicios para entregar

Hola, tu nariz contra mis bolas

Buá, lo voy a tener q' hacer acá y dsp lo paso en limpio

EJ ~~1~~ 4, guía V.A. ← **Ejercicio 1**

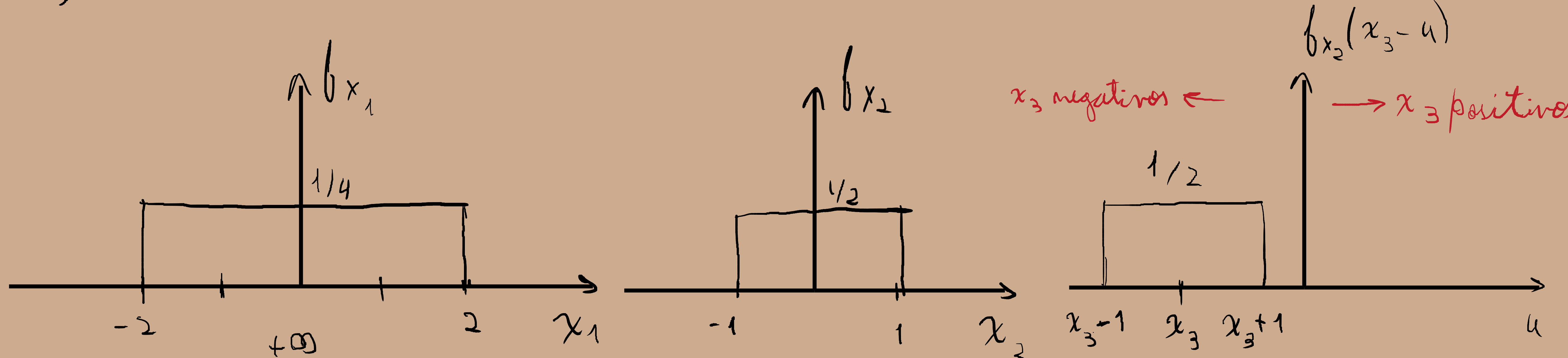
Sean X_1 y X_2 variables aleatorias independientes uniformes en el intervalo $[-2, 2]$.

1. Obtenga las funciones de densidad de probabilidad de las variables $X_3 = X_1 + X_2$ y $X_4 = X_1 + 2X_2$.
2. Repita el ejercicio para $X_1 \sim \mathcal{U}[-2, 2]$ y $X_2 \sim \mathcal{U}[-1, 1]$.

El 1 está hecho, vamos con el 2:

Ya sé que si X_1, X_2 son IND y $X_3 = X_1 + X_2 \Rightarrow f_{X_3}(x_3) = (f_{X_1} * f_{X_2})(x_3)$

Las PDF son:



$\Rightarrow f_{X_3}(x_3) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(u)\, f_{X_2}(x_3-u)\, du$ Hay 5 casos a tener en cuenta

I: Si $x_3 + 1 < -2 \rightarrow$ Si $x_3 < -3 \Rightarrow f_{X_3}(x_3) = 0$

II: Si $x_3 - 1 < -2$ y $x_3 + 1 > -2 \rightarrow$ si $-3 < x_3 < -1$

$$\Rightarrow f_{X_3}(x_3) = \int_{-2}^{x_3+1} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}\, du = \frac{1}{8}\left[x_3 + 1 - (-2)\right] = \frac{x_3+3}{8}$$

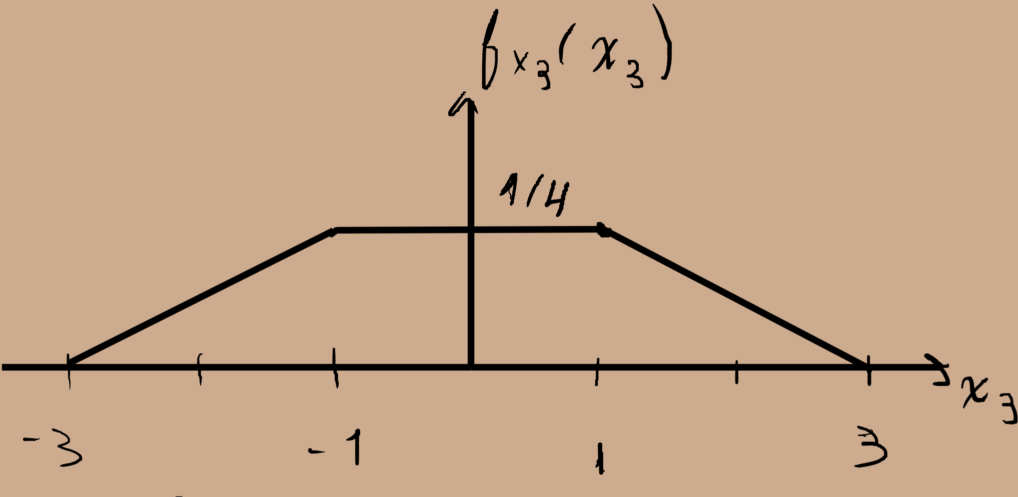
III: Si $x_3 - 1 > -2$ y $x_3 + 1 < 2 \Rightarrow -1 < x_3 < 1$

$$\Rightarrow f_{X_3}(x_3) = \int_{x_3-1}^{x_3+1} 1/8\, du = \frac{1}{8}\left[x_3 + 1 - (x_3 - 1)\right] = 1/4$$

IV: Si $x_3 - 1 < 2$ y $x_3 + 1 < 2 \rightarrow$ Si $1 < x_3 < 3$

$$\Rightarrow f_{X_3}(x_3) = \int_{x_3-1}^{2} 1/8\, du = \frac{1}{8}\left[2 - x_3 + 1\right] = \frac{3 - x_3}{8}$$

(1): Si $x_3 - 1 > 2 \Rightarrow$ Si $x_3 > 3 \Rightarrow f_{X_3}(x_3) = 0$

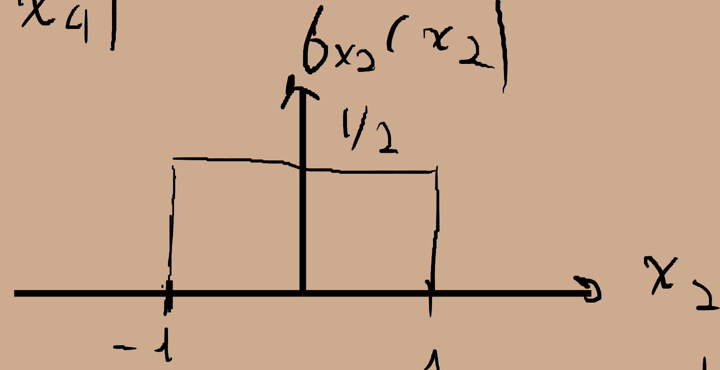


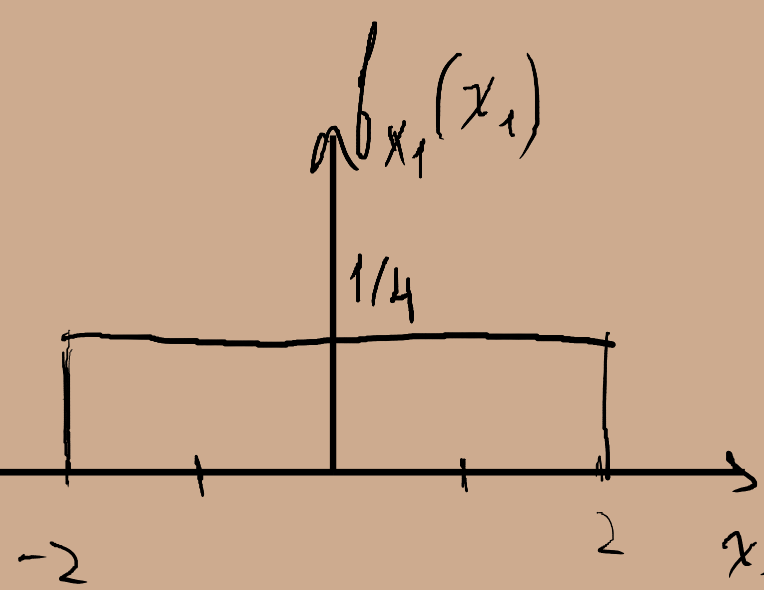
Hubiera sido mucho más fácil decir que sé cuál es la forma que tiene que tener la función (tiene que ser un trapecio), lo único que hay que conocer es la altura, de forma tal que integre 1.

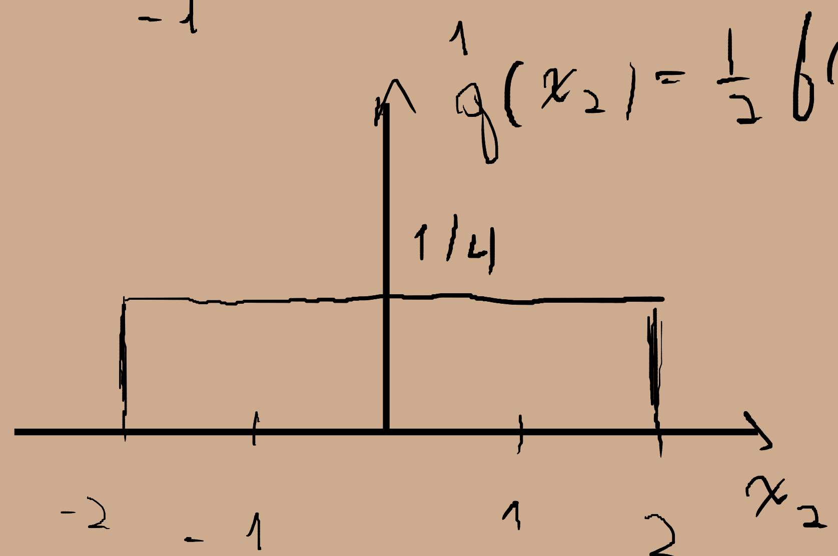
Ahora vamos con $X_4 = X_1 + 2X_2 \Rightarrow f_{X_4}(x_4) = f_{X_1}(x_4) \circledast \frac{1}{2} f_{X_2}\left(\frac{x_4}{2}\right)$

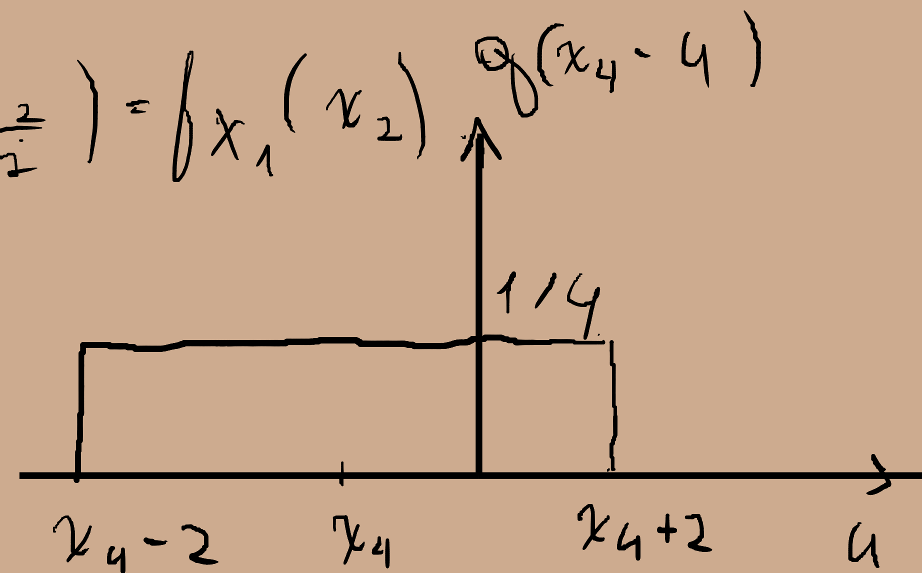
Para ser más claro, sea $g(x_2) = \frac{1}{2} f_{X_2}(x_2/2)$

$\Rightarrow f_{X_4}(x_4) = (f_{X_1} * g)(x_4)$





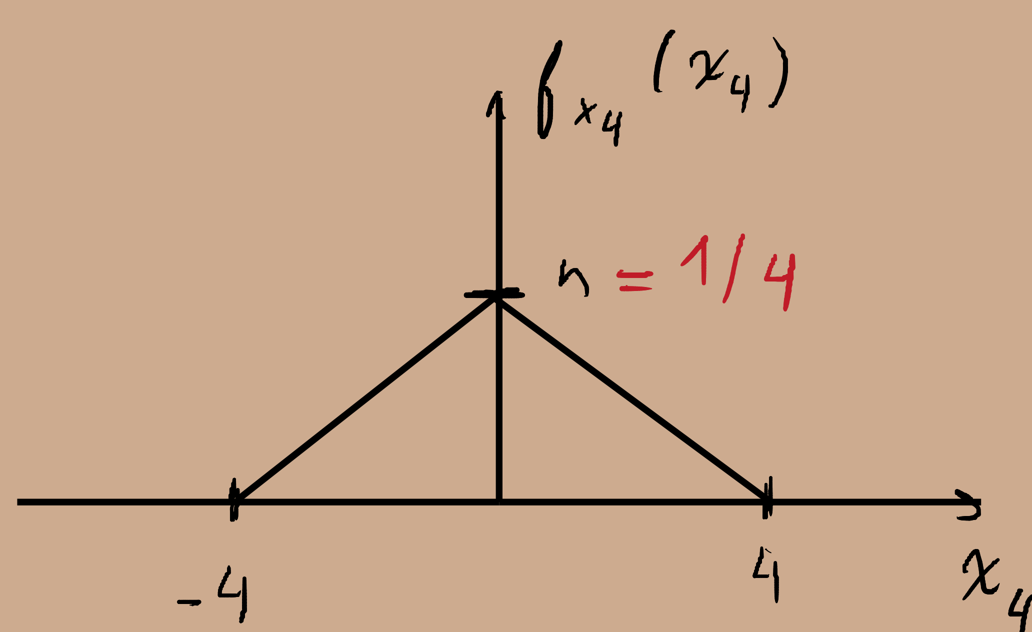




En este caso, el resultado va a ser un triángulo

Lim. inf.: $x_4 + 2 = -2 \Rightarrow x_4 = -4$

Lim. sup: $x_4 - 2 = 2 \Rightarrow x_4 = 4$



$f_{X_4}(x_4)$ debe integrar 1

$\Rightarrow \frac{8 \cdot h}{2} = 1 \Rightarrow h = 1/4$

Cap#6, p. 330 ← **Ejercicio 2**

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_N$ variables aleatorias conjuntamente Gaussianas con media $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}}$ y matriz de covarianza $C_{\mathbf{X}}$.

1. Calcular la varianza de la variable aleatoria $Y = a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_NX_N$ donde a_i son coeficientes reales tales que el vector $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \ldots, a_N]^t$ tiene norma unitaria.
2. (opcional) Sea:

$$C_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Determine el máximo y el mínimo valor posible de la varianza de Y cuando el vector $\mathbf{a}$ recorre el círculo unitario.

$\vec{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix}$ $\quad \vec{A} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \Rightarrow Y = \underbrace{A^T}_{B} \cdot \vec{X} \to$ T. afín

$$\Rightarrow C_Y = B \cdot C_X \cdot B^T = A^T C_X A = [a_1 \dots a_m] \cdot \begin{bmatrix} V(X_1) & Cov(X_1,X_2) & \dots & Cov(X_1,X_m) \\ Cov(X_2,X_1) & V(X_2) & \dots & Cov(X_2,X_m) \\ \vdots & & & \\ Cov(X_m,X_1) & Cov(X_m,X_2) & \dots & V(X_m) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

$$= [a_1 \dots a_m] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m} a_i Cov(X_1, X_i) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{m} a_i Cov(X_m, X_i) \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{m} \left[a_j \cdot \sum_{i=1}^{m} a_i Cov(X_j, X_i) \right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot a_j Cov(X_j, X_i) = V[Y]$$

2) $C_X = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad V[Y] = A^T C_X A \to$ ¿máximo y mínimo?

$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$, $\|A\| = 1 \to V[Y] = a_1 \cdot a_1 V[X_1] + a_1 a_2 Cov(X_1, X_2) + a_2 a_1 Cov(X_2, Y_1) +$

$+ a_2 \cdot a_2 V[X_2] = a_1^2 \cdot 3 + 2a_1a_2(-1) + a_2^2 \cdot 3 =$

$$= 3\underbrace{(a_1^2 + a_2^2)}_{1} - 2a_1a_2 = 3 - 2a_1a_2 = 3 - 2R^2 sen(\theta)cos(\theta) = 3 - 2sen(\theta)cos(\theta)$$

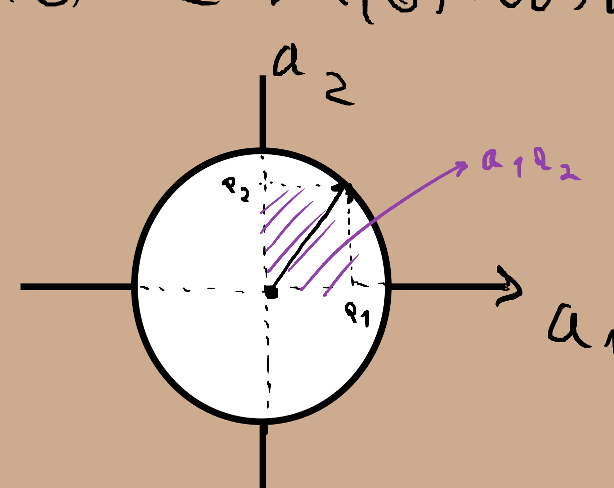
$a_1 = R\cos(\theta)$ $\qquad R = 1$

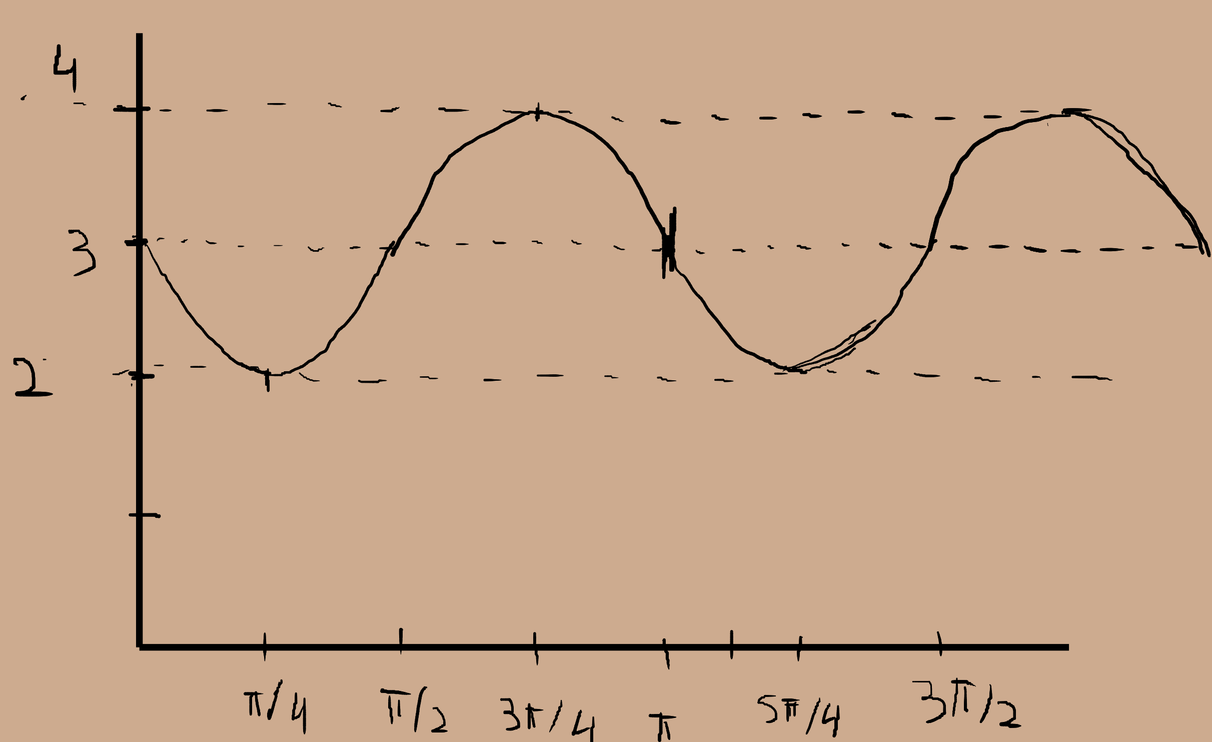
$a_2 = R\,sen(\theta)$

$\Rightarrow V_Y(\theta) = 3 - 2sen(\theta)cos(\theta)$

Además: $Sen(2\theta) = sen(\theta)cos(\theta) + cos(\theta)sen(\theta) = 2sen(\theta) \cdot cos(\theta)$

$\Rightarrow V_Y(\theta) = 3 - sen(2\theta)$





El valor máximo de V[Y] se alcanza en 3pi/4 y es 4
El valor mínimo de V[Y] se alcanza den pi/4 y es 2

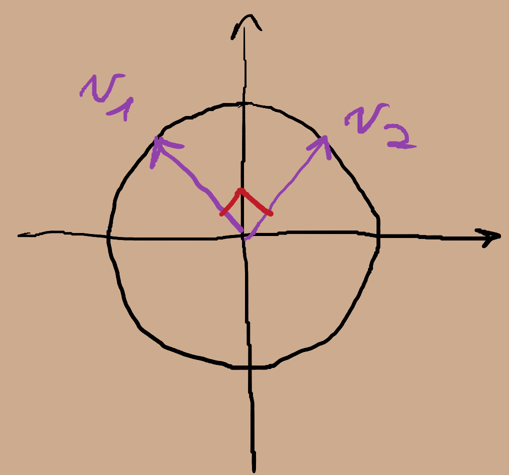
Por curiosidad: ¿Tiene algo q' ver con los aves de C_x?

$$\begin{pmatrix}3&-1\\-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \overset{\lambda_2}{2}\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}_{v_2}$$

$$\begin{pmatrix}3&-1\\-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \overset{\lambda_1}{4}\underbrace{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}}_{v_1}$$

Normalizados serían: $\lambda_1 = 4 \to v_1 = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 2 \to v_2 = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$



Mi problema es hallar los valores mínimo y máximo de $q(\vec{x}) = \vec{x}^t C_x \vec{x}$

Si $\vec{x}$ es ave: $q(\vec{x}) = \vec{x}^t C_x \vec{x} = \vec{x}^t \lambda \vec{x} = \lambda \|\vec{x}\|^2 = \lambda$

Eso es, sé q' la función $q(\vec{x})$ pasa en algún momento por los autovalores

Pero ¿cómo sé que $\lambda_{min} \le q(\vec{x}) \le \lambda_{máx}$?

Digamos q' diagonalizo C_x: $C_x = P \Lambda P^t = \begin{pmatrix}| & | \\ v_1 & v_2 \\ | & |\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}- v_1 - \\ - v_2 -\end{pmatrix}$

Vamos por partes, como quien diría. $q(x) = x^t P \Lambda P^t x$

$$P \cdot \Lambda = \begin{pmatrix}| & | \\ v_1 & v_2 \\ | & |\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}| & | \\ \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 \\ | & |\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x^t P \Lambda = [- x -]\begin{pmatrix}\lambda v_1 & \lambda_2 v_2\end{pmatrix} = [\lambda_1 \langle x, v_1\rangle \quad \lambda_2 \langle x, v_2\rangle]$$

$$P^t x = \begin{pmatrix}- v_1 - \\ - v_2 -\end{pmatrix}\begin{bmatrix}| \\ x \\ |\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\langle x, v_1\rangle \\ \langle x, v_2\rangle\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x^t P \Lambda P^t x = [\lambda_1 \langle x, v_1\rangle \quad \lambda_2 \langle x, v_2\rangle]\begin{bmatrix}\langle x, v_1\rangle \\ \langle x, v_2\rangle\end{bmatrix} = \lambda_1 \langle x, v_1\rangle^2 + \lambda_2 \langle x, v_2\rangle^2$$

OBS: Si lambda 1 y 2 son positivos, q(x) > 0 para todo x, como corresponde

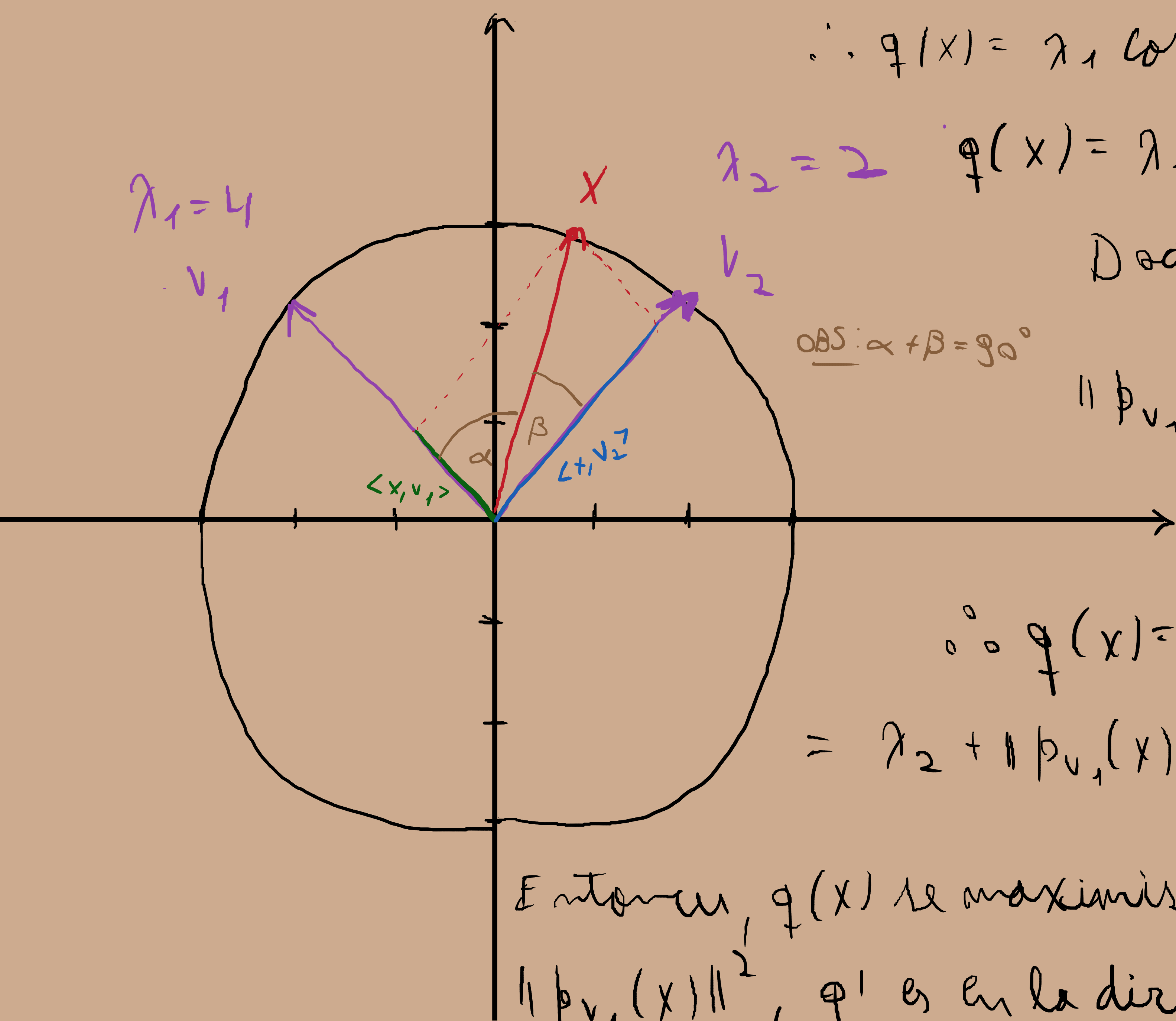
$\text{Proy}_{v_1}(x) = \dfrac{\langle x, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 = \langle x, v_1\rangle v_1$

$\langle x, v_1\rangle = \cos(\alpha)$

$\langle x, v_2\rangle = \cos(\beta) = \cos(90° - \alpha) =$

$= -\operatorname{sen}(\alpha)$

$\therefore q(x) = \lambda_1 \cos^2(\alpha) + \lambda_2 \operatorname{sen}^2(\alpha) =$



$$q(x) = \lambda_1 \|p_{v_1}(x)\|^2 + \lambda_2 \|p_{v_2}(x)\|^2$$

Dado q' los ejes son ortogonales:

$$\|p_{v_1}(x)\|^2 + \|p_{v_2}(x)\|^2 = \|x\|^2 = 1$$

$$\therefore q(x) = \lambda_1 \|p_{v_1}(x)\|^2 + \lambda_2 (1 - \|p_{v_1}(x)\|^2)$$

$$= \lambda_2 + \|p_{v_1}(x)\|^2 (\lambda_1 - \lambda_2)$$

Entonces, $q(x)$ se maximiza en donde se maximice $\|p_{v_1}(x)\|^2$, q' es en la dirección de v_1.

Además, se minimiza en donde $\|p_{v_1}(x)\|^2$ se minimice, que, por ser $v_1 \perp v_2$, es en la dirección de v_2

OBS: En general, vale que $x^T P \Lambda P^T x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i <x, v_i>^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \|p_{v_i}(x)\|^2$

Creo q' se puede generalizar, $q(x)$ se maximiza en la dirección del eje con el mayor ava cuando x se mueve x' la esfera unitaria