Procesos Estocásticos

Caracterización de Procesos Aleatorios

Ejercicio 1

Sea $g(t)$ un pulso determinístico, definido como

$$g(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{para otro } t \end{cases}$$

Considere el proceso aleatorio $X(t) = Ag(t)$, donde $A \in \{-1, 1\}$ es una variable aleatoria binaria con $\mathbb{P}(A = 1) = p$ y $\mathbb{P}(A = -1) = 1 - p$.

1. Identifique qué tipo de proceso es $X(t)$ y grafique el conjunto de realizaciones $\mathcal{S}$.
2. Halle la función de distribución de primer y segundo orden de $X(t)$.
3. Determine $\mu_X(t) = \mathbb{E}[X(t)]$ y $R_X(t_1, t_2) = \mathbb{E}[X(t_1)X(t_2)]$.
4. Analice si el proceso es estacionario tanto en sentido estricto como en sentido amplio.

Ejercicio 2

Considere el proceso aleatorio $X(t) = e^{At}, t \geq 0$, donde $A \sim \mathcal{U}[-2, -1]$.

1. Identifique qué tipo de proceso es $X(t)$ y grafique el conjunto de realizaciones $\mathcal{S}$.
2. Halle la función de distribución de primer y segundo orden de $X(t)$.
3. Determine $\mu_X(t) = \mathbb{E}[X(t)]$ y $R_X(t_1, t_2) = \mathbb{E}[X(t_1)X(t_2)]$.
4. Analice si el proceso es estacionario tanto en sentido estricto como en sentido amplio.

Ejercicio 3

Sea $X(t)$ un proceso aleatorio tal que

$$\mathbb{E}[X(t)] = 3, \qquad \mathbb{E}[X(t_1)X(t_2)] = 9 + 4e^{-2|t_1 - t_2|}.$$

1. Encuentre la media, la varianza y la covarianza de las variables aleatorias $X(5)$ y $X(8)$.
2. ¿Es $X(t)$ un proceso ESA?

Ejercicio 4

El objetivo de este ejercicio es analizar un proceso aleatorio particular conocido como *random walk*. Sea $U(n)$ un proceso aleatorio en tiempo discreto que a cada instante n puede tomar los valores $\{-1, +1\}$ de modo independiente, con

$$p_U(+1) = p, \qquad p_U(-1) = 1 - p.$$

A cada instante n, definimos $X(n) = X(n-1) + U(n)$, con $X(0) = 0$ para todas las realizaciones del proceso. El proceso $X(n)$ es un *random walk*.

BUÉ, lo hiCE en el Notebook.

1. Identifique qué tipo de proceso es $X(n)$ y grafique dos posibles realizaciones.
2. Encuentre la función de distribución de primer orden de $X(n)$.
3. Calcule la media, la varianza, y la función de autocorrelación de $X(n)$.
4. Genere $N = 10^4$ realizaciones de $X(n)$ para $p = 0,1; 0{,}5; 0{,}9$ y verifique numéricamente los resultados anteriores.

Ejercicio 5

Sea $X(t)$ un proceso aleatorio a partir del cual se construye un nuevo proceso $Y(t) = \text{sign}[X(t)]$, es decir, $Y(t) = 1$ si $X(t) \geq 0$, $Y(t) = -1$ en otro caso.

1. Determine la función de distribución de primer y segundo orden de $Y(t)$.
2. Hallar $\mu_Y(t)$ y $R_Y(t_1, t_2)$.
3. Suponga que $X(t)$ es ESA. ¿Es $Y(t)$ un proceso ESA?

Ejercicio 6

En este ejercicio vamos a considerar la generación de procesos aleaotorios a partir de un proceso Bernoulli con muestras independientes. Sea $B(n)$ un proceso Bernoulli de parámetro λ, es decir, $\mathbb{P}(B(n) = 1) = \lambda$, $\mathbb{P}[B(n) = 0] = 1 - \lambda$, i.i.d.

1. Considere $X(n) = B(n)^2$. ¿Es éste un proceso estacionario? Calcule $\mathbb{E}[X(n)]$.
2. Ahora $X(n) = (-1)^n B(n)$.¿ Es éste un proceso estacionario? Calcule $\mathbb{E}[X(n)]$.
3. Considere ahora 2 procesos Bernoulli independientes, $B_1(n)$, con parámetro λ_1 y $B_2(n)$, con parámetro λ_2. Forme ahora el siguiente proceso

$$X(n) = \begin{cases} B_1(n) & \text{si } X(n-1) = 0 \\ B_2(n) & \text{si } X(n-1) = 1 \end{cases} \qquad n = 1, 2, \cdots$$

   con $\mathbb{P}[X(0) = 1] = p$. Grafique distintas realizaciones de dicho proceso para $\lambda_1 = 0{,}5$ y $\lambda_2 = 0{,}1$. Determine si $X(n)$ es estacionario o no y analice el comportamiento asintótico, es decir, cuando $n \to \infty$.

Ejercicio 7

Un módem transmite una secuencia de datos del siguiente modo: transmite un 1 enviando un pulso de duración T segundos y amplitud 1; transmite un 0 enviando el mismo pulso con amplitud -1. En la figura se muestra como ejemplo la transmisión de la secuencia de datos 1011. La señal transmitida $X(t)$ responde a la ecuación siguiente

$$X(t) = \sum_n A_n p(t - nT - T_0),$$

donde $p(t)$ es un pulso de amplitud unitaria y duración T, A_n son variables aleatorias i.i.d. que toman el valor 1 o -1 según los datos a transmitir, y T_0 es una variable aleatoria uniforme en el intervalo $[0, T]$ que representa la fase de la señal transmitida. Se asume que T_0 y A_n son variables aleatorias independientes entre sí. Éste es un ejemplo de una señal binaria aleatoria.

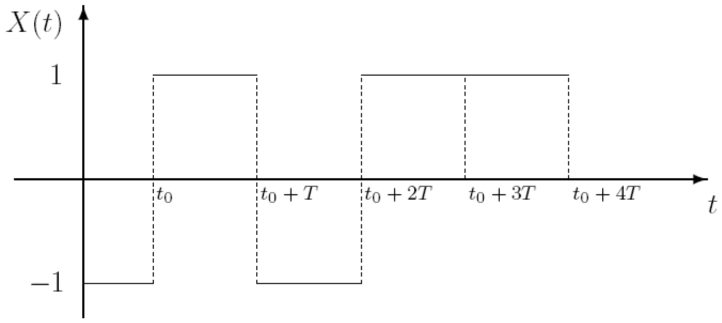

Figura 1: Ejemplo de transmisión de la secuencia de datos 1011

1. Calcular $\mathbb{E}[X(t)]$.
2. Calcular la función de autocorrelación de $X(t)$. Para ello, suponga que $\mu_P = 0$.
3. Determinar si $X(t)$ es ESA o no.
4. ¿Varían los resultados si siempre $T_0 = 0$?
5. Simular una trayectoria de N períodos independientes, de la señal $X(t)$ binaria aleatoria, con fase inicial T_0 uniforme en el intervalo $[0, T]$. Estimar la media y la función de autocorrelación de la misma. Comparar los resultados en un mismo gráfico con los resultados teóricos.
6. Halle la media y la autocorrelación si no se incluye la variable aleatoria T_0, y analice si el proceso es ESA en ese caso.

Ejercicio 8

Este ejercicio tiene mayor dificultad y trabaja las habilidades analíticas. En particular, recurre a las observaciones que se utilizaron al demostrar el teorema de Wiener-Kintchin.

Sea $X(t)$ un proceso ESA gaussiano de media nula y autocorrelación

$$R_X(\tau) = (1 - |\tau|)\mathbb{1}\{|\tau| \leq 1\}.$$

Suponga que se genera el siguiente proceso en tiempo discreto:

$$Z(n) = \int_{n-1}^{n} X(s)ds, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

1. Halle la media y la autocorrelación R_Z del proceso $Z(n)$, y demuestre que el proceso es ESA.
   Ayuda: Recuerde la demostración del teorema de WK.
2. Halle la función de distribución conjunta del vector $\mathbf{Z}(n) = [Z(n), Z(n-1), Z(n-2)]^T$.

Ejercicio 9

Un PLL es un dispositivo utilizado en los receptores de comunicaciones para estimar la fase de la "portadora"$\sin(w_c t + \Theta_i(t))$, donde w_c es su frecuencia angular y $\Theta_i(t)$ es su fase en medidas en el receptor. En la Fig. 2 se muestra un modelo lineal del PLL, donde K_d y K_0 son constantes y $F(s)$ es la transferencia del *filtro de lazo*. En este problema consideraremos $F(s) = \alpha$. Por último, $N(t)$ es un proceso estocástico blanco Gaussiano con densidad espectral de potencia (PSD) $N_0/2$.

De este modo, el PLL resulta un sistema con dos entradas, $N(t)$ y Θ_i y una salida, Θ_o.

1. Obtenga las dos transferencias a lazo cerrado del PLL $H(s) = \frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)}$ y $G(s) = \frac{\theta_o(s)}{n(s)}$.
2. Obtenga la PSD y varianza de la componente de ruido a la salida del PLL cuando sólo se considera el ruido a la entrada.
3. Calcule $R_o(k)$, la función de autocorrelación del ruido a la salida del PLL cuando se considera sólo el ruido. Verifique el cálculo de la varianza del punto anterior evaluando $R_o(0)$.—

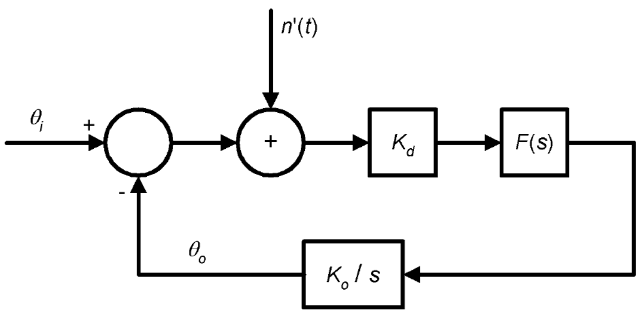

Figura 2: Modelo lineal de un PLL.

Ejercicio 10

Un amplificador operacional (OPAMP) presenta fundamentalmente dos fuentes de ruido: ruido térmico (ó ruido Johnson-Nyquist) y ruido *flicker* (ó ruido $1/f$). Ambos son modelados a través de la fuente de tensión $e_n(t)$ en la Fig. 3, cuyo valor cuadrático medio es $\bar{e_n^2} = \bar{e_w^2}(f_h - f_l + f_{nc} \log \frac{f_h}{f_l})$, donde $\bar{e_w^2}$ es el valor cuadrático medio del ruido blanco, f_h y f_l especifican el ancho de banda de funcionamiento del circuito y f_{nc} es la frecuencia de corte del ruido $1/f$. $\bar{e_w^2}$ y f_{nc} son datos del fabricante.

Por otro lado, un resistor de resistencia R presenta ruido térmico que puede ser modelado por ruido blanco Gaussiano con densidad espectral de potencia unilateral $N_0 = 4kTR$ $[V^2/Hz]$, donde k e sla constante de Boltzmann y T es la temperatura en el circuito . Todas las fuentes de ruido pueden ser consideradas independientes.

1. Determine la ganancia del circuito inversor A.
2. Usando el principio de superposición, determine la varianza de ruido a la salida del OPAMP en términos de A. ¿Cómo influyen los resistores, el ancho de banda, la ganancia del circuito y la frecuencia de corte de ruido del OPAMP en dicha varianza?

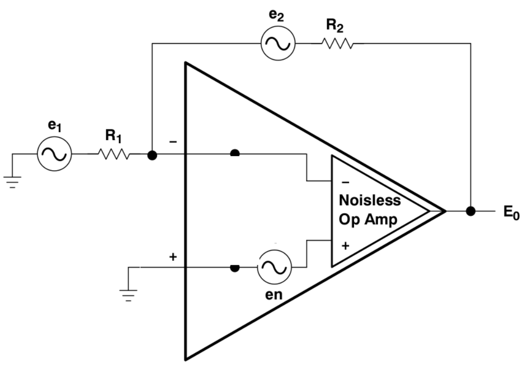

Figura 3: Fuentes de ruido en el OPAMP y los resistores.

Ejercicio 11

Un transmisor de comunicaciones (Tx) se mueve hacia el receptor (Rx) a una velocidad v. En ciertas condiciones, el canal inalámbrico se puede modelar como una variable aleatoria compleja circular con distribución Gaussiana $h[n]$. En el caso de la Fig. 4, los reflectores ubicados alrededor del Rx reflejan la señal, con lo cual se asume que la señal llega al Rx desde todos los ángulos. Sea $\tau_\theta[n]$ el retardo asociado a la señal que proviene del ángulo θ correspondiente al instante de tiempo n y a_θ su correspondiente ganancia, $h[n]$ puede ser expresada de la siguiente manera:

$$h[n] = \int_0^{2\pi} a_\theta e^{-\jmath w_c \tau_\theta[n]} d\theta,$$

donde w_c es la frecuencia angular de la portadora, y $\tau_\theta[n] = \tau_\theta[0] - \frac{v\cos\theta}{cW} n$, con c la velocidad de la luz y W el ancho de banda de la señal. Todos los parámetros son determinísticos salvo a_θ y $\tau_\theta[0]$. a_θ tiene varianza A^2 y $w_c\tau_\theta[0](\mathrm{mod} 2\pi) \sim U(0, 2\pi)$. Además, los distintos retardos son independientes si corresponden a distintos ángulos de arribo.

1. Demuestre que $h[n]$ es estacionario y que su función de autocorrelación es $R(k) = A^2\pi J_0(\frac{\pi D_s}{W} k)$, donde $J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{\jmath x\cos\theta} d\theta$ es la función de Bessel de primera clase de orden 0 y $D_s = \frac{w_c v}{c}$.
2. Demuestre que la PSD es $S(f) = \frac{2A^2}{D_s\sqrt{1-(2f/D_s)^2}} \mathbb{1}(|f| < D_s/2)$.

   Ayuda: Puede partir de $S(f)$ usando la fórmula de la transformada de Fourier.

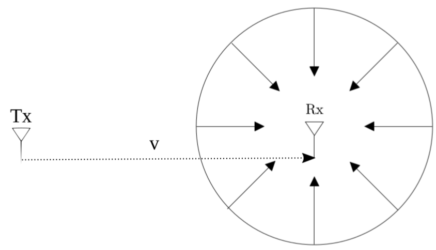

Figura 4: Modelo de canal de Clark.