Transformaciones Lineales de Procesos Estocásticos

Cecilia Galarza

Procesos Estocásticos
Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires

Respuesta de un sistema LTI a un proceso ESA: recopilación

Sea $X(t)$ un proceso ESA, $\mathcal{H}$ un sistema LTI caracterizado por $h(t)$ y $H(\omega)$. Luego,

- $Y(t) = (h * X)(t)$ es un proceso ESA

$$\mathbb{E}[Y(t)] = H(0)\mu_X = \mu_Y$$

$$R_Y(\tau) = (h * \tilde{h} * R_X)(\tau) \qquad S_Y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_X(\omega)$$

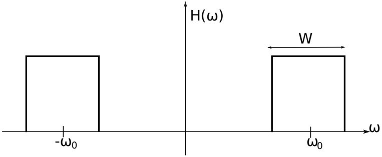
- $X(t)$, $Y)(t)$ son procesos CESA

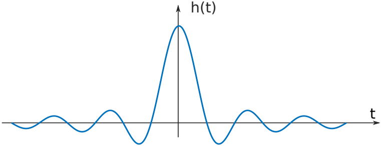
$$R_{X,Y}(\tau) = (h * R_X)(\tau) \qquad S_{X,Y}(\omega) = H(\omega) S_X(\omega)$$

Ejemplo: filtrado pasabanda ideal

$$H(\omega) = \mathbb{1}\left\{|\omega - \omega_0| \leq \frac{W}{2}\right\} + \mathbb{1}\left\{|\omega + \omega_0| \leq \frac{W}{2}\right\}$$

$$h(t) = \frac{W}{\pi}\cos(\omega_0 t)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{W}{2\pi}t\right) \qquad \mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$





Consideramos una entrada X senoidal con ruido blanco aditivo

$$X(t) = S(t) + N(t) = A\cos(\omega_0 t + \Phi) + N(t)$$

$A \sim \mathcal{N}(0,1)$ y $\Phi \sim \mathcal{U}(-\pi,\pi)$ independientes.
N ruido blanco de media nula, varianza σ^2, independiente de S.

Ejemplo: filtrado pasabanda ideal (cont.)

X es un proceso ESA, por ende, Y será ESA, X, Y CESA.

- $\mathbb{E}[X(t)] = \mathbb{E}[S(t)] + \mathbb{E}[N(t)] = 0$. Como S y N son ortogonales,

$$R_X(\tau) = \mathbb{E}[X(t)X(t+\tau)] = R_S(\tau) + R_N(\tau) = \frac{1}{2}\cos(\omega_0\tau) + \sigma^2\delta(\tau).$$

$$S_X(\omega) = \mathcal{F}\{R_X\}(\omega) = S_S(\omega)+S_N(\omega) = \frac{\pi}{2}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]+\sigma^2.$$

- $S_Y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_X(\omega) = \frac{\pi}{2}[\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)] + \sigma^2 H(\omega).$

$$R_Y(\tau) = \mathcal{F}^{-1}(S_Y(\omega)) = \frac{1}{2}\cos(\omega_0\tau) + \frac{\sigma^2 W}{\pi}\cos(\omega_0\tau)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{W}{2\pi}\tau\right).$$

- $S_{X,Y}(\omega) = H(\omega)S_X(\omega) = |H(\omega)|^2 S_X(\omega) = S_Y(\omega).$
  $R_{X,Y}(\tau) = R_Y(\tau).$

Ejemplo: filtrado pasabanda ideal (cont.)

- Usando la linealidad del filtro, descomponemos $Y(n)$ en dos:

$$Y(t) = \underbrace{(h * X)(t)}_{R(t)} + \underbrace{(h * N)(t)}_{V(t)}.$$

- Definimos la relación señal a ruido (SNR) a la entrada del filtro

$$\mathrm{SNR}_{\mathrm{IN}} = \frac{\mathbb{E}[S^2(t)]}{\mathbb{E}[N^2(t)]} = \frac{R_S(0)}{R_N(0)} = \frac{\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} S_S(\omega)d\omega}{\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} S_N(\omega)d\omega} = \frac{1/2}{\sigma^2}.$$

- Por lo tanto, a la salida del filtro la SNR es

$$\mathrm{SNR}_{\mathrm{OUT}} = \frac{\mathbb{E}[R^2(t)]}{\mathbb{E}[V^2(t)]} = \frac{R_R(0)}{R_V(0)} = \frac{\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} S_R(\omega)d\omega}{\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} S_V(\omega)d\omega} = \frac{1/2}{\sigma^2 W/\pi}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{SNR}_{\mathrm{OUT}}}{\mathrm{SNR}_{\mathrm{IN}}} = \frac{\pi}{W}.$$

La atenuación de la SNR depende del ancho de banda del filtro.

Ejemplo: media móvil en tiempo continuo

$$Y(t) = \frac{1}{T}\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} X(s)ds \qquad X(t) \text{ ESA.}$$

- $Y(t)$ es la salida del sistema LTI:

$$h(t) = \frac{1}{T}\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \delta(s)ds = \frac{1}{T}\,\mathbb{1}\left\{|t| < \frac{T}{2}\right\}.$$

$$H(\omega) = \mathcal{F}\{h\}(\omega) = \frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\frac{\omega T}{2}} = \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right).$$

- Luego,

$$\mu_Y = H(0)\mu_X = \mu_X$$

$$S_Y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_X(\omega) = \left[\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)\right]^2 S_X(\omega)$$

$$S_{X,Y}(\omega) = H(\omega)S_X(\omega)\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right) S_X(\omega).$$

Sistemas descriptos por ecuaciones en diferencias

- En tiempo discreto una familia importante de sistemas LTI son los sistemas descriptos por ecuaciones en diferencias.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k Y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k X(n-k).$$

- Supondremos nuevamente que el sistema es causal, estable y con condiciones iniciales de reposo.

- La respuesta en frecuencia de estos sistemas es

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k}}.$$

Procesos MA

$$Y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k X(n-k).$$

- El sistema asociado es FIR

$$h(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k \delta(n-k).$$

$$H(\omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k}.$$

- El proceso $Y(n)$ es un proceso MA (*moving average* o promedio móvil).

Caracterización de procesos MA

- Si X es ruido blanco de media nula y varianza σ^2,

$$S_Y(\omega) = \sigma^2 \left| \sum_{m=0}^{M} b_m e^{-j\omega m} \right|^2 = \sigma^2 \sum_{m=0}^{M} \sum_{n=0}^{M} b_m b_n e^{-j\omega(m-n)}$$

$$= \sigma^2 \sum_{m=0}^{M} c_m \cos(\omega m),$$

donde

$$c_m = \begin{cases} \sum_{n=0}^{M} b_n^2 & \text{si } m = 0, \\ 2\sum_{n=0}^{M-m} b_n b_{n+m} & \text{si } m \neq 0. \end{cases}$$

- Antitransformando, obtenemos

$$R_Y(k) = \sigma^2 \sum_{m=0}^{M} \frac{c_m}{2} [\delta(k-m) + \delta(k+m)].$$

$R_Y(k)$ tiene soporte finito, es decir, $R_Y(k) = 0$ para todo $|k| > M$.

Ejemplo: proceso MA-1

- Supongamos que X es ruido blanco de varianza unitaria y consideremos el proceso MA-1 (MA de primer orden):

$$Y(n) = X(n) + \alpha X(n-1).$$

- En este caso,

$$S_Y(\omega) = |1 + \alpha e^{-j\omega}|^2 = 1 + \alpha^2 + 2\alpha\cos(\omega).$$

$$R_Y(k) = (1 + \alpha^2)\delta(k) + \alpha\delta(k-1) + \alpha\delta(k+1).$$

- Verifiquemos esto por cálculo directo:

$$\begin{aligned}
R_Y(k) &= \mathbb{E}[Y(n)Y(n+k)] \\
&= \mathbb{E}[X(n)X(n+k)] + \alpha\mathbb{E}[X(n)X(n+k-1)] \\
&+ \alpha\mathbb{E}[X(n+k)X(n-1)] + \alpha^2\mathbb{E}[X(n-1)X(n+k-1)] \\
&= \delta(k) + \alpha\delta(k-1) + \alpha\delta(k+1) + \alpha^2\delta(k).
\end{aligned}$$

Ejemplo: proceso MA-2

- Supongamos que X es ruido blanco de varianza unitaria y consideremos el proceso MA-2 (MA de segundo orden):

$$Y(n) = X(n) + \alpha X(n-1) + \beta X(n-2).$$

- En este caso,

$$\begin{aligned} S_Y(\omega) &= |1 + \alpha e^{-j\omega} + \beta e^{-j2\omega}|^2 \\ &= (1 + \alpha^2 + \beta^2) + 2\alpha(1+\beta)\cos(\omega) + 2\beta\cos(2\omega). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_Y(k) = (1 + \alpha^2 + \beta^2)\delta(k) + \alpha(1+\beta)[\delta(k-1) + \delta(k+1)] \\ + \beta[\delta(k-2) + \delta(k+2)]. \end{aligned}$$

Ejemplo: filtro promediador

- X es ruido blanco de media nula y varianza unitaria y consideramos el proceso

$$Y(n) = \frac{1}{M+1} \sum_{k=0}^{M} X(n-k).$$

- En este caso,

$$S_Y(\omega) = \sum_{m=0}^{M} c_m \cos(\omega m) = \frac{1}{M+1} + 2 \sum_{m=1}^{M} \frac{M-m+1}{(M+1)^2} \cos(\omega m).$$

$$R_Y(k) = \frac{1}{M+1}\delta(k) + \sum_{m=1}^{M} \frac{M-m+1}{(M+1)^2} [\delta(k-m) + \delta(k+m)].$$

Procesos AR-n

$$\sum_{i=0}^{n} a_i Y(k-i) = X(k).$$

- El sistema asociado es IIR con respuesta en frecuencia

$$H(\omega) = \frac{1}{\sum_{i=0}^{N} a_i e^{-j\omega i}}.$$

- Los polos son las raices del polinomio

$$D(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^{n-i}.$$

- Decimos que es un proceso AR-n (*autoregressive* o autorregresivo de orden n).

Caracterización de procesos AR-n

Si X es ruido blanco de media nula y varianza σ^2,

$$\mathbb{E}[Y] = 0$$

$$\begin{aligned} S_Y(\omega) &= \frac{\sigma^2}{\left|\sum_{m=0}^{n} a_m e^{-j\omega m}\right|^2} = \frac{\sigma^2}{\sum_{m=0}^{n}\sum_{p=0}^{n} a_m a_p e^{-j\omega(m-p)}} \\ &= \frac{\sigma^2}{\sum_{p=0}^{n} d_p \cos(\omega p)}, \end{aligned}$$

donde $$d_p = \begin{cases} \sum_{m=0}^{n} a_m^2 & \text{si } p = 0, \\ 2\sum_{m=0}^{n-p} a_m a_{m+p} & \text{si } p \neq 0. \end{cases}$$

Caracterización de procesos AR-1

- Proceso AR-1:

$$a_0 Y(n) + a_1 Y(n-1) = X(n)$$

El polo del sistema está en $z = -a_1/a_0$. En forma equivalente, con $\alpha = -a_1/a_0$,

$$Y(n) = \alpha Y(n-1) + X(n), \qquad |\alpha| < 1.$$

- $$S_Y(\omega) = \frac{\sigma^2}{|1-\alpha e^{-j\omega}|^2} = \frac{\sigma^2}{1+\alpha^2-2\alpha\cos(\omega)}.$$

- Vimos que

$$R_Y(k) = \frac{\alpha^{|k|}}{1-\alpha^2}$$

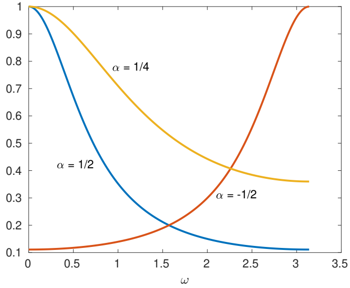
Caracterización de procesos AR-1 (cont.)

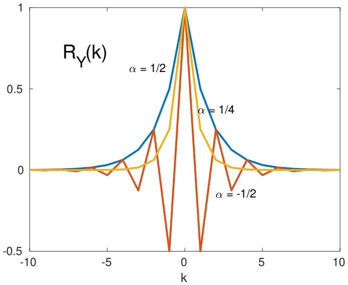
- Si $\alpha > 0$, Y es un proceso de bajas frecuencias.

$$S_Y(0) = \frac{\sigma^2}{(1-\alpha)^2} > \frac{\sigma^2}{(1+\alpha)^2} = S_Y(\pi).$$

- Si $\alpha < 0$, Y es un proceso de altas frecuencias.

$$S_Y(0) = \frac{\sigma^2}{(1-\alpha)^2} < \frac{\sigma^2}{(1+\alpha)^2} = S_Y(\pi).$$





Caracterización de procesos AR-2

- Consideremos un proceso AR-2 general:

$$a_0 Y(n) = -a_1 Y(n-1) - a_2 Y(n-2) + b_0 X(n), \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

- Tomamos $b_0 = 1$. Luego, tomando $\alpha = -a_1/a_0$ y $\beta = -a_2/a_0$,

$$Y(n) = \alpha Y(n-1) + \beta Y(n-2) + X(n), \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

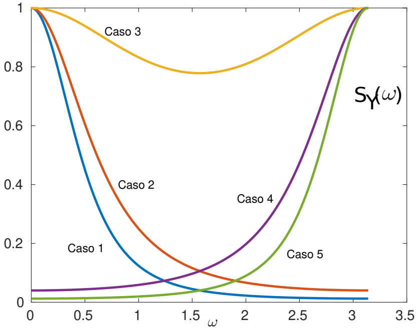
  Los polos z_i son las raíces de $D(z) = z^2 - \alpha z - \beta$. En cualquier caso, α y β deben ser tales que $|z_i| < 1$.

- Utilizando Wiener-Kintchin, tenemos

$$\begin{aligned} S_Y(\omega) &= \frac{\sigma^2}{|1 - \alpha e^{-j\omega} - \beta e^{-j2\omega}|^2} \\ &= \frac{\sigma^2}{(1 + \alpha^2 + \beta^2) + 2\alpha(\beta - 1)\cos(\omega) - 2\beta\cos(2\omega)}. \end{aligned}$$

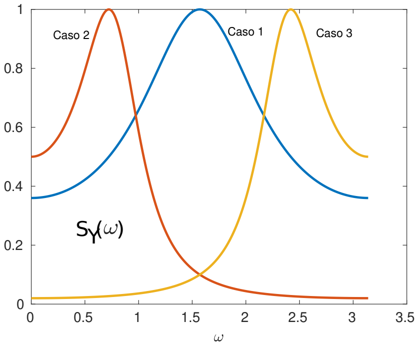
Ejemplo: proceso AR-2 con polos reales

$$\begin{cases} 1: \ 4Y(n) = 4Y(n-1) - Y(n-2) + X(n) & z_1 = z_2 = \frac{1}{2} \\ 2: \ 8Y(n) = 6Y(n-1) - Y(n-2) + 3X(n) & z_1 = \frac{1}{4} \ , \ z_2 = \frac{1}{2} \\ 3: \ 16Y(n) = Y(n-2) + 15X(n) & z_1 = \frac{1}{4} \ , \ z_2 = \frac{-1}{4} \\ 4: \ 8Y(n) = -3Y(n-1) - Y(n-2) + 3X(n) & z_1 = \frac{-1}{4} \ , \ z_2 = \frac{-1}{2} \\ 5: \ 44Y(n) = -Y(n-1) - Y(n-2) + X(n) & z_1 = z_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$



Ejemplo: proceso AR-2 con polos complejos conjugados

$$\begin{cases} 1: \; 4Y(n) = -Y(n-2) + 4X(n) & z_1 = \jmath\frac{1}{2} \quad , \quad z_2 = -\jmath\frac{1}{2} \\ 2: \; 2Y(n) = 2Y(n-1) - Y(n-2) + 2X(n) & z_1 = \frac{1}{2}(1+\jmath) \quad , \quad z_2 = \frac{1}{2}(1-\jmath) \\ 3: \; 2Y(n) = -2Y(n-1) - Y(n-2) + 2X(n) & z_1 = \frac{-1}{2}(1+\jmath) \quad , \quad z_2 = \frac{-1}{2}(1-\jmath) \end{cases}$$



Procesos ARMA

- El caso más general es un proceso ARMA, que se pueden pensar como una cascada de un filtro AR y un filtro MA:

$$H(\omega) = \frac{1}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k}} \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k} = H_{\mathrm{AR}}(\omega) H_{\mathrm{MA}}(\omega).$$

- Si la entrada es blanca,

$$S_Y(\omega) = \sigma^2 \left| \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k}} \right|^2 = \sigma^2 \frac{\sum_{n=0}^{M} c_n \cos(\omega n)}{\sum_{n=0}^{N} d_n \cos(\omega n)},$$

donde los coeficientes c_n y d_n se obtienen como antes.

- El cálculo de la ACF suele más complejo pero es posible plantear una descomposición en fracciones simples a partir de la PSD y luego antitransformar como planteamos para los procesos AR.

Ejemplo: sistema ARMA-(2,2)

$$Y(n) - \frac{1}{4}Y(n-2) = X(n) - X(n-1) - 2X(n-2),$$

$H(\omega) = \frac{1-e^{-j\omega}-2e^{-j2\omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j2\omega}}$. Polos y ceros: $p_1 = \frac{1}{2}, p_2 = -\frac{1}{2}$ y $z_1 = -1, z_2 = 2$.

$$S_Y(\omega) = |H(\omega)|^2 = \left|\frac{1-e^{-j\omega}-2e^{-j2\omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j2\omega}}\right|^2 = 8\frac{\cos(\omega)+1}{\cos(\omega)+\frac{5}{4}}$$