1) Transformada de Fourier.

$$X(\omega) = \mathscr{F}\{x(t)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t \qquad X(e^{j\omega}) = \mathscr{F}\{x(n)\}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

2) Media de un proceso aleatorio.

$$\mu_X(t) = \mathbb{E}\big[X(t)\big] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X(t)}(x)\mathrm{d}x \qquad \mu_X(n) = \mathbb{E}\big[X(n)\big] = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x p_{X(t)}(x)$$

3) Esperanza de una composición.

$$\mathbb{E}\big[g\big(X(t)\big)\big] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{X(t)}(x)\mathrm{d}x \qquad \mathbb{E}\big[g\big(X(n)\big)\big] = \sum_{x=-\infty}^{\infty} g(x) p_{X(t)}(x)$$

4) Autocorrelación de un proceso aleatorio.

$$R_X(t_1,t_2) = \mathbb{E}\big[X(t_1)X(t_2)\big] \qquad R_X(n_1,n_2) = \mathbb{E}\big[X(n_1)X(n_2)\big]$$

5) Autocovarianza y varianza de un proceso aleatorio.

$$C_X(t_1,t_2) = \mathbb{E}\big[\big(X(t_1)-\mu_X(t_1)\big)\big(X(t_2)-\mu_X(t_2)\big)\big] \qquad C_X(n_1,n_2) = \mathbb{E}\big[\big(X(n_1)-\mu_X(n_1)\big)\big(X(n_2)-\mu_X(n_2)\big)\big]$$

$$R_X(t_1,t_2) = C_X(t_1,t_2) + \mu_X(t_1)\mu_X(t_2) \qquad R_X(n_1,n_2) = C_X(n_1,n_2) + \mu_X(n_1)\mu_X(n_2)$$

$$\sigma_X^2(t) = \mathrm{Var}\big(X(t)\big) = C_X(t,t) \qquad \sigma_X^2(n) = \mathrm{Var}\big(X(n)\big) = C_X(n,n)$$

6) Densidad espectral de potencia de un proceso aleatorio.

$$S_X(\omega) = \lim_{T\to\infty} \mathbb{E}\left[\frac{1}{2T}\left|\int_{-T}^{T} X(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t\right|^2\right]$$

$$S_X(\omega) = \lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\left[\frac{1}{2N+1}\left|\sum_{n=-N}^{N} X(n)e^{-j\omega n}\right|^2\right] \qquad -\pi \leq \omega \leq \pi$$

7) Un proceso aleatorio $X(t)$ o $X(n)$ es estacionario en sentido amplio (**ESA**) si:

$$\begin{cases} \mu_X(t) = \mu_X \\ R_X(t_1,t_2) = R_X(t,t+\tau) = \mathbb{E}\big[X(t)X(t+\tau)\big] \equiv R_X(\tau) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_X(n) = \mu_X \\ R_X(n_1,n_2) = R_X(n,n+k) = \mathbb{E}\big[X(n)X(n+k)\big] \equiv R_X(k) \end{cases}$$

$$R_X(\tau) = R_X(-\tau) \qquad R_X(k) = R_X(-k)$$

8) Varianza y autocovarianza de un proceso ESA.

$$C_X(t_1,t_2) = C_X(t,t+\tau) = \mathbb{E}\big[\big(X(t)-\mu_X\big)\big(X(t+\tau)-\mu_X\big)\big] \equiv C_X(\tau) \quad C_X(n_1,n_2) = C_X(n,n+k) = \mathbb{E}\big[\big(X(n)-\mu_X\big)\big(X(n+k)-\mu_X\big)\big] \equiv C_X(k)$$

$$R_X(\tau) = C_X(\tau) + \mu_X^2 \qquad R_X(k) = C_X(k) + \mu_X^2$$

$$\sigma_X^2 = \mathrm{Var}\big(X(t)\big) = C_X(0) = R_X(0) - \mu_X^2 \qquad \sigma_X^2 = \mathrm{Var}\big(X(n)\big) = C_X(0) = R_X(0) - \mu_X^2$$

9) Densidad espectral de potencia de un proceso ESA (Teorema de Wiener-Kinchin).

$$S_X(\omega) = \mathscr{F}\big\{R_X(\tau)\big\}(\omega) \qquad S_X(e^{j\omega}) = \mathscr{F}\big\{R_X(k)\big\}(e^{j\omega})$$

$$S_X(\omega) = S_X(-\omega) \qquad S_X(e^{j\omega}) = S_X(e^{-j\omega})$$

$$S_{XY}^*(-\omega) = S_{XY}(\omega) \;\Leftrightarrow\; R_{XY}(\tau) \in \mathbb{R} \qquad S_{XY}^*(e^{-j\omega}) = S_{XY}(e^{j\omega}) \;\Leftrightarrow\; R_{XY}(k) \in \mathbb{R}$$

10) Potencia media generada por un proceso $X(t)$ o $X(n)$ ESA.

$$P_X = \mathbb{E}\big[X^2(t)\big] = R_X(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega)\mathrm{d}\omega \qquad P_X = \mathbb{E}\big[X^2(n)\big] = R_X(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_X(e^{j\omega})\mathrm{d}\omega$$

11) Potencia contenida en el rango de frecuencias $[\omega_1, \omega_2]$ de un proceso $X(t)$ o $X(n)$ ESA.

$$P_X(\omega_1,\omega_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega_1}^{\omega_2} S_X(\omega)\mathrm{d}\omega \qquad P_X(\omega_1,\omega_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega_1}^{\omega_2} S_X(e^{j\omega})\mathrm{d}\omega,\ \omega_{1,2} \in [-\pi,\pi]$$

12) Un proceso $X(t)$ o $X(n)$ es blanco si:

$$X(t) \text{ ESA} \qquad X(n) \text{ ESA}$$
$$R_X(\tau) = \sigma_X^2\delta(\tau) \qquad R_X(k) = \sigma_X^2\delta(k)$$
$$S_X(\omega) = \sigma_X^2 \qquad S_X(e^{j\omega}) = \sigma_X^2$$

13) Correlación cruzada de dos procesos aleatorios.

$$R_{XY}(t_1, t_2) = \mathbb{E}\left[X(t_1)Y(t_2)\right] \qquad R_{XY}(n_1, n_2) = \mathbb{E}\left[X(n_1)Y(n_2)\right]$$

14) Covarianza cruzada de dos procesos aleatorios.

$$C_{XY}(t_1, t_2) = \mathbb{E}\left[\left(X(t_1) - \mu_X(t_1)\right)\left(Y(t_2) - \mu_Y(t_2)\right)\right] \qquad C_{XY}(n_1, n_2) = \mathbb{E}\left[\left(X(n_1) - \mu_X(n_1)\right)\left(Y(n_2) - \mu_Y(n_2)\right)\right]$$
$$R_{XY}(t_1, t_2) = C_{XY}(t_1, t_2) + \mu_X(t_1)\mu_Y(t_2) \qquad R_{XY}(n_1, n_2) = C_{XY}(n_1, n_2) + \mu_X(n_1)\mu_Y(n_2)$$

15) Dos procesos aleatorios $X(t)$ o $X(n)$ e $Y(t)$ o $Y(n)$ son conjuntamente estacionarios en sentido amplio (**CESA**) si:

$$R_{XY}(t_1, t_2) = R_{XY}(t, t+\tau) = \mathbb{E}\left[X(t)Y(t+\tau)\right] \equiv R_{XY}(\tau) \quad R_{XY}(n_1, n_2) = R_{XY}(n, n+k) = \mathbb{E}\left[X(n)Y(n+k)\right] \equiv R_{XY}(k)$$
$$R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau) \qquad R_{XY}(k) = R_{YX}(-k)$$

16) Covarianza cruzada de dos procesos CESA.

$$C_{XY}(t_1, t_2) = C_{XY}(t, t+\tau) = \mathbb{E}\left[\left(X(t) - \mu_X\right)\left(Y(t+\tau) - \mu_Y\right)\right] \equiv C_{XY}(\tau) \quad C_{XY}(n_1, n_2) = C_{XY}(n, n+k) = \mathbb{E}\left[\left(X(n) - \mu_X\right)\left(Y(n+k) - \mu_Y\right)\right] \equiv C_{XY}(k)$$
$$R_{XY}(\tau) = C_{XY}(\tau) + \mu_X\mu_Y \qquad R_{XY}(k) = C_{XY}(k) + \mu_X\mu_Y$$

17) Densidad espectral de potencia cruzada de dos procesos CESA.

$$S_{XY}(\omega) = \mathscr{F}\left\{R_{XY}(\tau)\right\}(\omega) \qquad S_{XY}(e^{j\omega}) = \mathscr{F}\left\{R_{XY}(k)\right\}(e^{j\omega})$$
$$S_{XY}^*(\omega) = S_{YX}(\omega) \qquad S_{XY}^*(e^{j\omega}) = S_{YX}(e^{j\omega})$$

18) Sea $\mathscr{H}$ un sistema LTI caracterizado por su respuesta impulsiva $h(t)$ o $h(n)$.

$$H(\omega) = \mathscr{F}\left\{h(t)\right\}(\omega) \qquad H(e^{j\omega}) = \mathscr{F}\left\{h(n)\right\}(e^{j\omega})$$

19) Sea $X(t)$ o $X(n)$ la entrada de un sistema LTI, cuya salida es $Y(t)$ o $Y(n)$.

$$Y(t) = \left(h \circledast X\right)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)X(t-\tau)\mathrm{d}\tau \qquad Y(n) = \left(h \circledast X\right)(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)X(n-k)$$
$$\mu_Y(t) = \mathbb{E}\left[Y(t)\right] = \left(h \circledast \mu_X\right)(t) \qquad \mu_Y(n) = \mathbb{E}\left[Y(n)\right] = \left(h \circledast \mu_X\right)(n)$$

20) Sea $X(t)$ o $X(n)$ ESA la entrada de un sistema LTI, cuya salida es $Y(t)$ o $Y(n)$, y $\tilde{h}(t) = h(-t)$ o $\tilde{h}(n) = h(-n)$.

$$Y(t) \text{ ESA} \qquad Y(n) \text{ ESA}$$
$$X(t), Y(t) \text{ CESA} \qquad X(n), Y(n) \text{ CESA}$$
$$\mu_Y = \mathbb{E}\left[Y(t)\right] = H(0)\mu_X \qquad \mu_Y = \mathbb{E}\left[Y(n)\right] = H(e^{j0})\mu_X$$
$$R_Y(\tau) = \left(h \circledast \tilde{h} \circledast R_X\right)(\tau) \qquad R_Y(k) = \left(h \circledast \tilde{h} \circledast R_X\right)(k)$$
$$R_{XY}(\tau) = \left(h \circledast R_X\right)(\tau) \qquad R_{XY}(k) = \left(h \circledast R_X\right)(k)$$
$$S_Y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_X(\omega) \qquad S_Y(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2 S_X(e^{j\omega})$$
$$S_{XY}(\omega) = H(\omega)S_X(\omega) \qquad S_{XY}(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})S_X(e^{j\omega})$$

21) Ecuaciones de Yule-Walker: sea el sistema $Y(k) + \sum_{i=1}^{N} a_i Y(k-i) = X(k)$.

$$R_Y(p) + \sum_{i=1}^{N} a_i R_Y(p+i) = \sigma_X^2 h(p)$$

Si el objetivo es identificación de modelos, se evalúa la ecuación en diferencias en $p = 0, -1, -2, \cdots, -N$. Notar que $R_Y(p) = R_Y(-p)$.

22) Desplazamiento temporal de la transformada de Fourier.

$$\mathscr{F}\left\{x(t-a)\right\}(\omega) = e^{-ja\omega}X(\omega)$$