Estimación lineal

Ejercicio 1

Considere un proceso ESA en tiempo continuo $Y(t)$ de media nula y autocorrelación $R_Y(\tau) = e^{-|\tau|}$.

1. Halle el mejor estimador lineal en el sentido MSE de $X = \int_0^1 Y(t)dt$ utilizando las muestras $Y(0), Y(1)$ de Y.
2. Halle la varianza del error de estimación.

Ejercicio 2

Considere la medicion ruidosa $Y = (1+V)X$ donde X y V son variables independientes y de media nula. Suponga que sólo conoce la varianza del ruido σ^2. Halle el mejor estimador lineal en sentido MSE de X dada Y. Demuestre que la varianza del error es menor a la varianza de X.

Ejercicio 3

Se desea estimar una variable aleatoria X, para lo cual se utilizan 2 sensores que arrojan mediciones Y_1 e Y_2.

$$Y_i = X + W_i, \quad i = 1, 2,$$

donde W_i son ruidos de los sensores. Se sabe que $\begin{bmatrix} X & W_1 & W_2 \end{bmatrix}^T$ es un vector Gaussiano de media nula y covarianza:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

Halle el mejor estimador de X basado en Y, la matriz de covarianza del error y su varianza.

Ejercicio 4

Suponga que se tienen muestras de una señal

$$Y(n) = X(n) + W(n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Dicha señal tiene dos componentes: una señal de interés X, modelada como un proceso ESA, y una componente de ruido W, también modelada como un proceso ESA, descorrelacionado de X. Suponga que tiene acceso a muestras de un proceso ESA $U(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, tal que dicha señal está descorrelacionada de W pero correlacionada con X. Asuma que todas las variables tienen media nula para simplificar el problema.

El objetivo del problema es eliminar la componente de ruido de $Y(n)$ utilizando las muestras de la señal $U(n)$. Para ello se propone estimar la señal Y mediante un estimador lineal de la forma:

$$\hat{Y}(n) = \mathbf{w}(n)^T \mathbf{u}(n),$$

donde $\mathbf{u}(n) = [U(n), \ldots, U(n-N+1)]^T$ y $\mathbf{w}(n)$ es un vector (a determinar) de N elementos.

1. Analice la implementacion del cancelador de ruido y realice un diagrama en bloques donde se vean las entradas del sistema y la señal de error:

$$e(n) = Y(n) - \hat{Y}(n).$$

2. Escriba la expresión $\mathbf{w}(n)$ óptimo para estimar Y en el sentido MSE y la varianza del error de estimación, mostrando que ninguno de los dos depende de n.
3. Determine por qué al estimar Y en realidad estamos obteniendo el mejor estimador MSE de X, lo que determina que el sistema funcione como un cancelador de ruido.
4. ¿Cómo implementaría el sistema en la práctica si tuviera acceso a las muestras de Y y de U?

Ejercicio 5

Se desea estimar un vector aleatorio gaussiano $\mathbf{X} = [X_1, ..., X_n]^T$ con media nula y matriz de correlación R_X. Para eso se realizan n mediciones $Y_1, ..., Y_n$ del siguiente modo:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = H\mathbf{X} + \mathbf{W},$$

donde H es una matriz de $n \times n$ determinística, conocida e inversible, y $\mathbf{W}$ es un vector de ruido blanco gaussiano de media nula y varianza unitaria, descorrelacionado de $\mathbf{X}$.

1. Halle la función de densidad conjunta entre $\mathbf{X}$ y $\mathbf{Y}$ en términos de R_X y H.
2. Demuestre que el mejor estimador lineal en el sentido del ECM de $\mathbf{X}$ en función de la observación $\mathbf{Y}$ es:
$$\hat{\mathbf{X}} = R_X H^T (H R_X H^T + I)^{-1} \mathbf{Y}.$$

Ejercicio 6

Se desea estimar la temperatura instantánea de una batería, para lo cual se dispone de un sensor que arroja muestras

$$Y(n) = T(n) + W(n), \tag{1}$$

donde $T(n)$ es la verdadera temperatura, un proceso Gaussiano ESA de media nula y autocovarianza $C_T(k) = \sigma_T^2 10^{-|k|}$, y W es ruido Gaussiano ESA de media nula y autocovarianza $C_W(k) = \sigma_W^2 10^{-|k|}$, descorrelacionado de T.

1. Indique qué clase de proceso es Y, si es ESA o no, y halle sus distribuciones finito-dimensionales.
2. Halle la distribución conjunta del vector $[T(n), Y(n)]$.
3. Suponga que se desea estimar la temperatura del siguiente modo:
$$\hat{T}(n) = aY^3(n) + bY(n) + c, \quad n \in \mathbb{Z}.$$
Halle los coeficientes a, b y c de modo de que $\hat{T}(n)$ sea el mejor estimador de $T(n)$ en el sentido del ECM. ¿Tiene sentido usar Y^3 en el estimador de T? ¿Por qué?
4. Halle el ECM mínimo cuando $\sigma_W = \sigma_T = 1$.