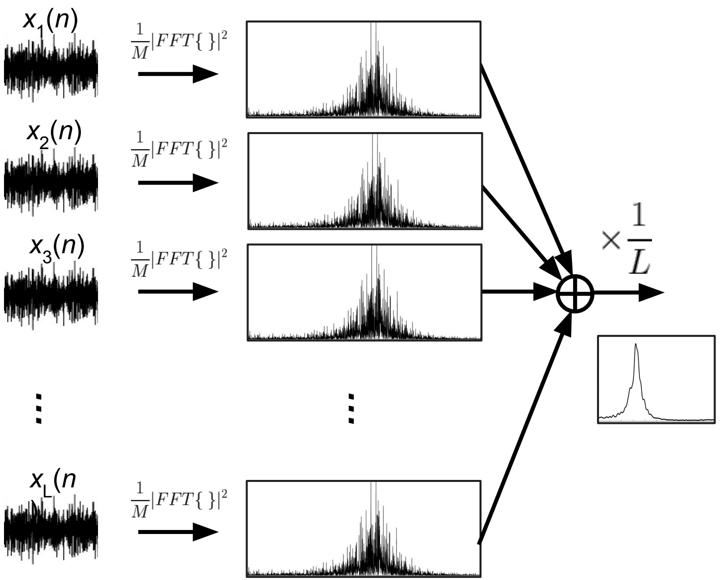
Procesos estocásticos (86.09)

Métodos no paramétricos:

- Bartlett
- Welch
- Blackman-Tukey



Repaso de estimador de la PSD (Periodograma)

Estimador de la PSD – Periodograma

Sea X(n) un proceso ESA de largo N

Formas equivalentes para el periodograma

$$\widehat{S}_X(\omega) = \frac{1}{N}\left|\sum_{n=0}^{N-1} X(n)e^{-j\omega n}\right|^2$$

$$\widehat{S}_X(\omega) = \sum_{-N+1}^{N-1} \widehat{R}_X(k)e^{-j\omega k}$$

$$\widehat{S}_X(\omega) = \frac{1}{N}\left|\mathrm{FFT}\{X(n)\}\right|^2$$

Solución computacional

Media y covarianza del periodograma

Suponiendo un proceso ESA x(n), con densidad espectral de potencia $S_X(\omega)$. Se puede demostrar que la media y covarianza del periodograma resultan:

$$\mathbb{E}\left[\hat{S}_X(\omega)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_X(\omega)V(\omega-\psi)d\psi \quad ; \quad V(\omega) = \frac{1}{N}\frac{\sin^2(\omega N/2)}{\sin^2(\omega/2)}$$

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{C}\mathrm{ov}[\hat{S}_X(\omega_1), \hat{S}_X(\omega_2)] = \sigma_X^4 \delta_{\omega_1,\omega_2}$$

Ej: x(n) blanco proceso gaussiano complejo circularmente simétrico [1]

En general, se cumple que el estimador es:

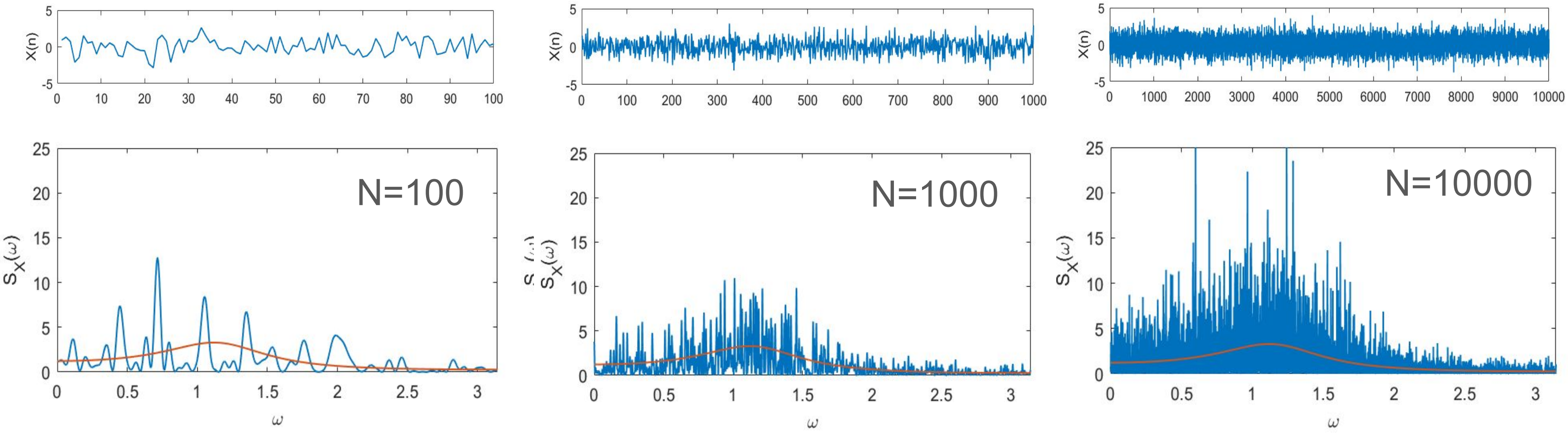
- Asintóticamente insesgado, dado que para N→ ∞, $V(\omega) \to \delta(\omega)$.
- Inconsistente, dado que N→ ∞, su varianza **no se reduce**.

[1] Stoica, Petre, and Randolph L. Moses , 2005. Spectral analysis of signals. Cap 2.

¿Qué significa que no sea consistente?

Supongamos un proceso: ***x(n) = 0.5x(n-1) - 0.4x(n-1)+v(n)***; con ***v(n)~N(0,1)***.

Calculamos el periodograma para realizaciones de largo N: $\widehat{S}_X(\omega) = \frac{1}{N}\left|\mathrm{FFT}\{X(n)\}\right|^2$



Métodos de Estimación espectral

Métodos de Estimación espectral

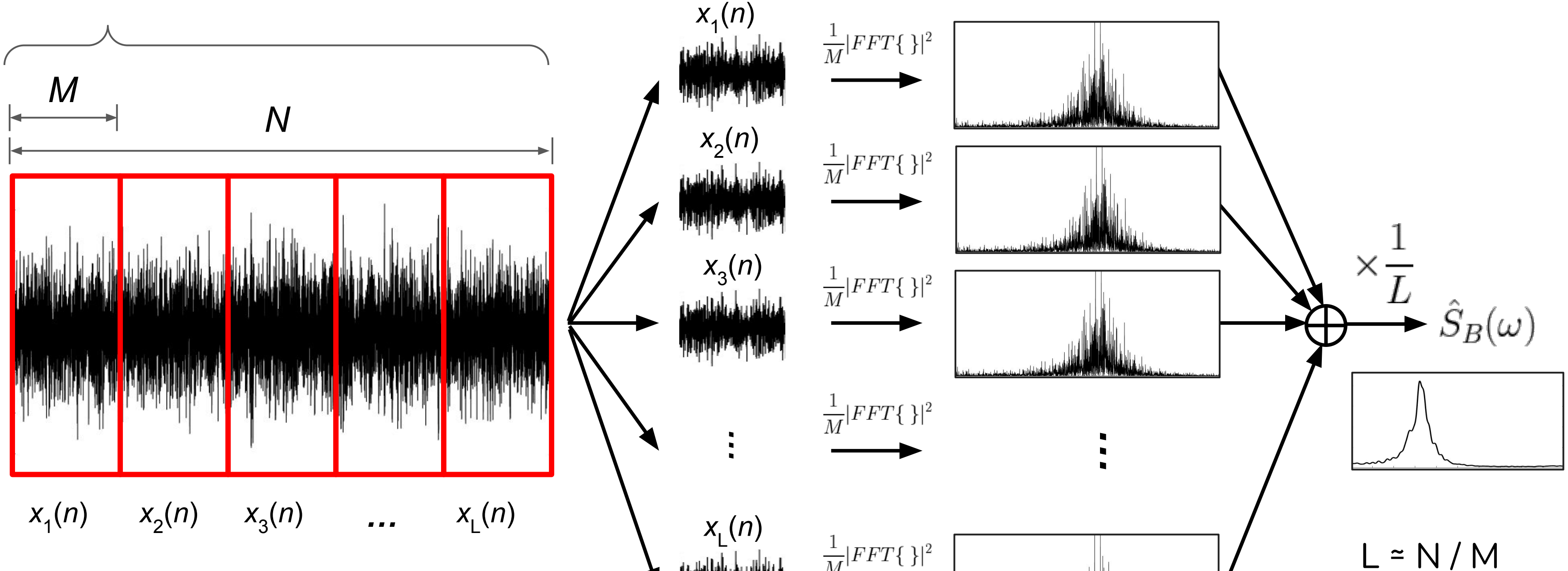
Algunos métodos de estimación espectral

- Métodos no paramétricos → Estiman densidad espectral de potencia
  - **Periodograma**
  - Blackman-Tukey
  - Bartlett
  - Welch
  - ...
- Métodos paramétricos
  - Modelos AR. MA, ARMA (estima coeficientes)
    - Espectros Racionales
  - Modelo de senoides en ruido (estima frecuencias)
    - MUSIC
    - ESPRIT

Método de Bartlett

Estimación de la PSD – Bartlett

Sea x(n) es un proceso ESA



$L \simeq N / M$

Al ser ESA, podemos obtener varias realizaciones de una única realización

Estimación de la PSD – Bartlett

Segmento i-ésimo del proceso x(n)

$$x_i(n) = x((i-1)M + n) \qquad \begin{array}{l} n = 1, \ldots, M \\ i = 1, \ldots, L \end{array}$$

M: largo de la ventana (segmento)
L: cantidad de segmentos, L ≃ N/M
N: largo del proceso x(n)

Periodograma de i-ésimo segmento

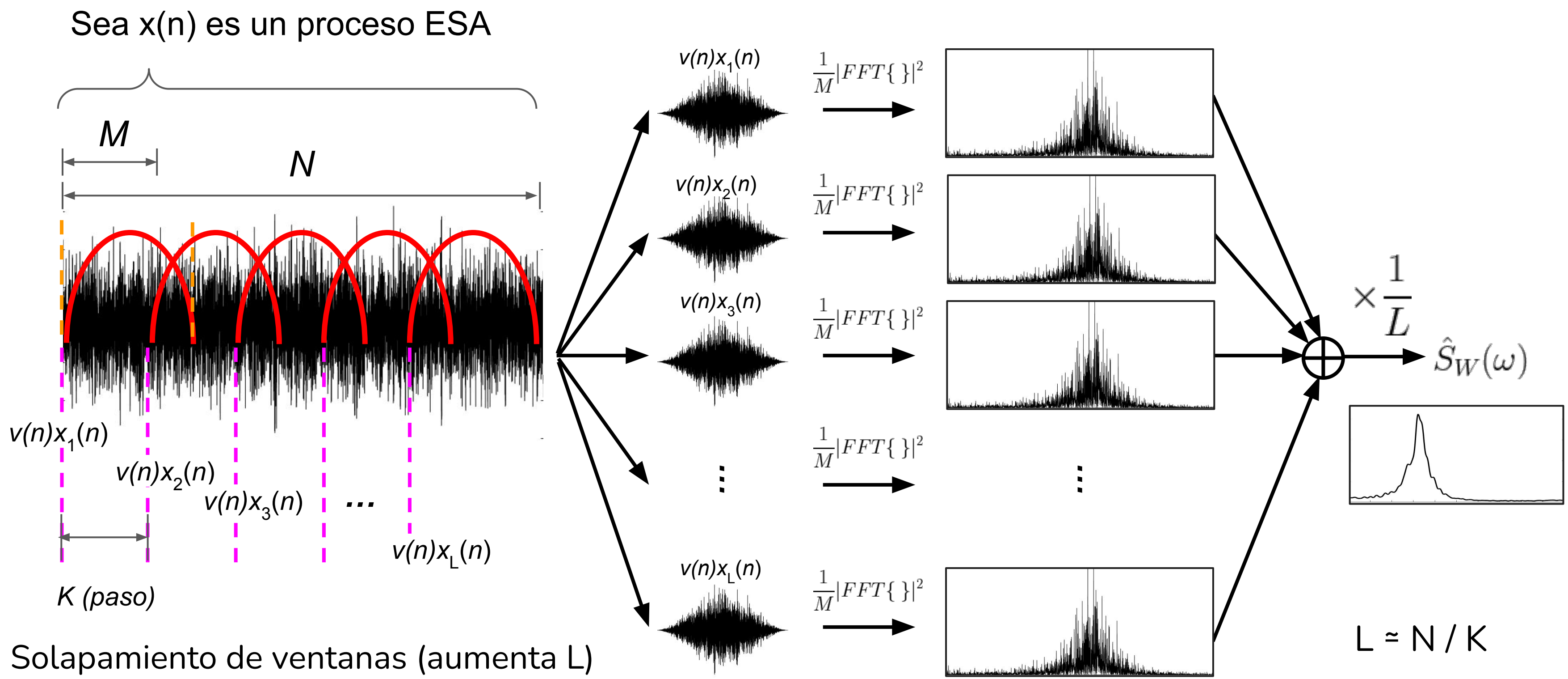
$$\hat{S}_i(\omega) = \frac{1}{M} \left|\mathfrak{F}\{x_i(n)\}\right|^2$$

Estimador mediante método de Bartlett

$$\hat{S}_B(\omega) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^{L} \hat{S}_i(\omega)$$

Método de Welch

Estimación de la PSD – Welch



Solapamiento de ventanas (aumenta L)
Ventanas más suaves (descorrelación entre bordes)

Estimación de la PSD – Welch

Segmento i-ésimo del proceso x(n)

$$x_i(n) = x((i-1)K + n) \qquad n = 1, ..., M \quad i = 1, ..., L$$

$v(n)$ Ventana de largo *M*

M: largo de la ventana (segmento)
L: cantidad de segmentos, L ≈ N/K
N: largo del proceso x(n)
K: paso entre segmentos

Periodograma de i-ésimo segmento

$$P = \frac{1}{M}\sum_{t=1}^{M} |v(t)|^2$$

$$\hat{S}_i(\omega) = \frac{1}{M\,P}\left|\mathfrak{F}\{v(n)x_i(n)\}\right|^2$$

Estimador mediante método de Welch

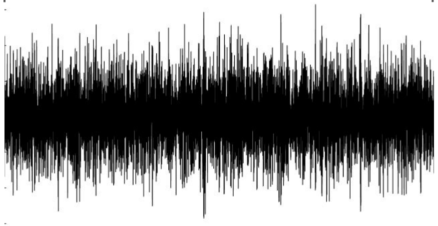
$$\hat{S}_W(\omega) = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L} \hat{S}_i(\omega)$$

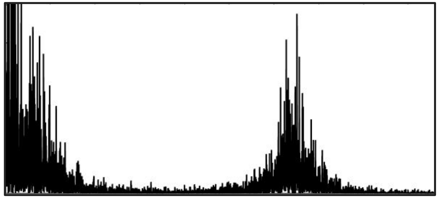
Método de Blackman -Tukey

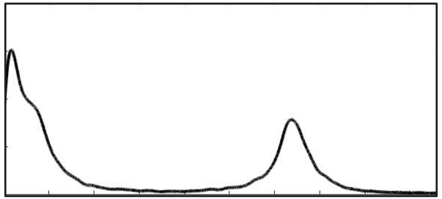
Estimación de la PSD – Blackman-Tukey

Sea x(n) es un proceso ESA

N







$$\frac{1}{M}|FFT\{\ \}|^2 \rightarrow \hat{S}(\omega) \rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \hat{S}(\lambda)W(\omega-\lambda)d\lambda \rightarrow \hat{S}_{BT}(\omega)$$

$$\hat{S}(\omega) * W(\omega)$$

Estimación de la PSD – Blackman-Tukey

Periodograma del proceso x(n)

$$\hat{S}(\omega) = \frac{1}{N} \left|\mathfrak{F}\{x(n)\}\right|^2$$

Se suaviza la PSD con un promedio localmente ponderado del periodograma

Estimación espectral mediante el método de Blackman-Tukey

$$\hat{S}_{BT}(\omega) = \hat{S}(\omega) * W(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{S}(\lambda) W(\omega - \lambda) d\lambda$$

Actividad 1

Actividad 1

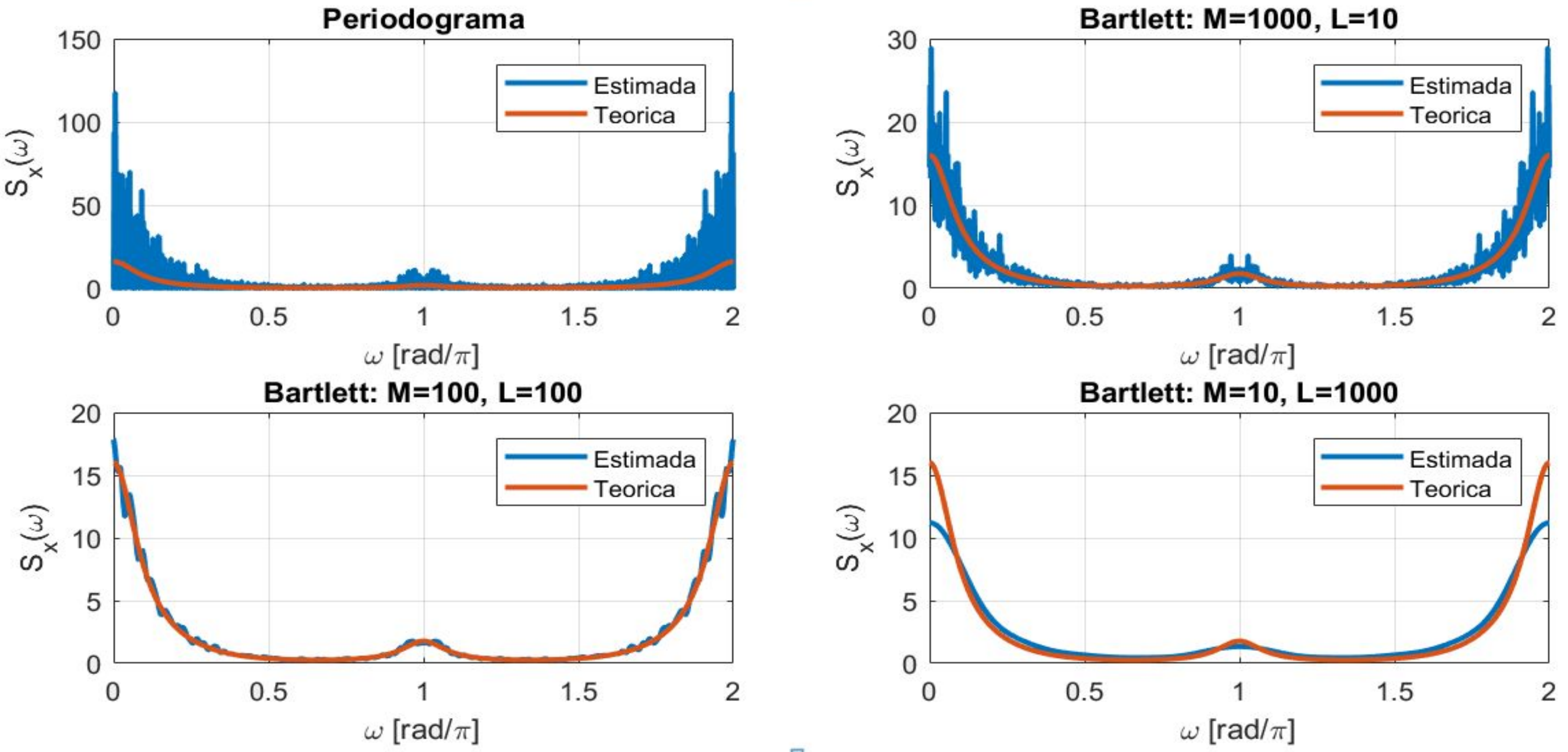
Suponga un proceso AR-4, $x(n)$ de largo $N=10000$, que responde a la siguiente ecuación en diferencias:

$$x(n) = 0.6\, x(n-1) + 0.4\, x(n-2) - 0.35\, x(n-3) + 0.1\, x(n-4) + v(n)$$

Donde $v(n)$ es un proceso blanco $\sim N(0,1)$.

1. Calcule el periodograma del proceso $x(n)$ superpuesto a la PSD teórica.
2. Aplique la técnica de **Bartlett** para la estimación de la PSD considerando distintos tamaños de ventana de: $M = \{10, 100, 1000\}$. Compare cada caso con la PSD teórica.

Actividad 1



Periodograma
Bartlett: M=1000, L=10
Bartlett: M=100, L=100
Bartlett: M=10, L=1000
Estimada
Teorica
$S_x(\omega)$
ω [rad/π]

Actividad 2

Actividad 2

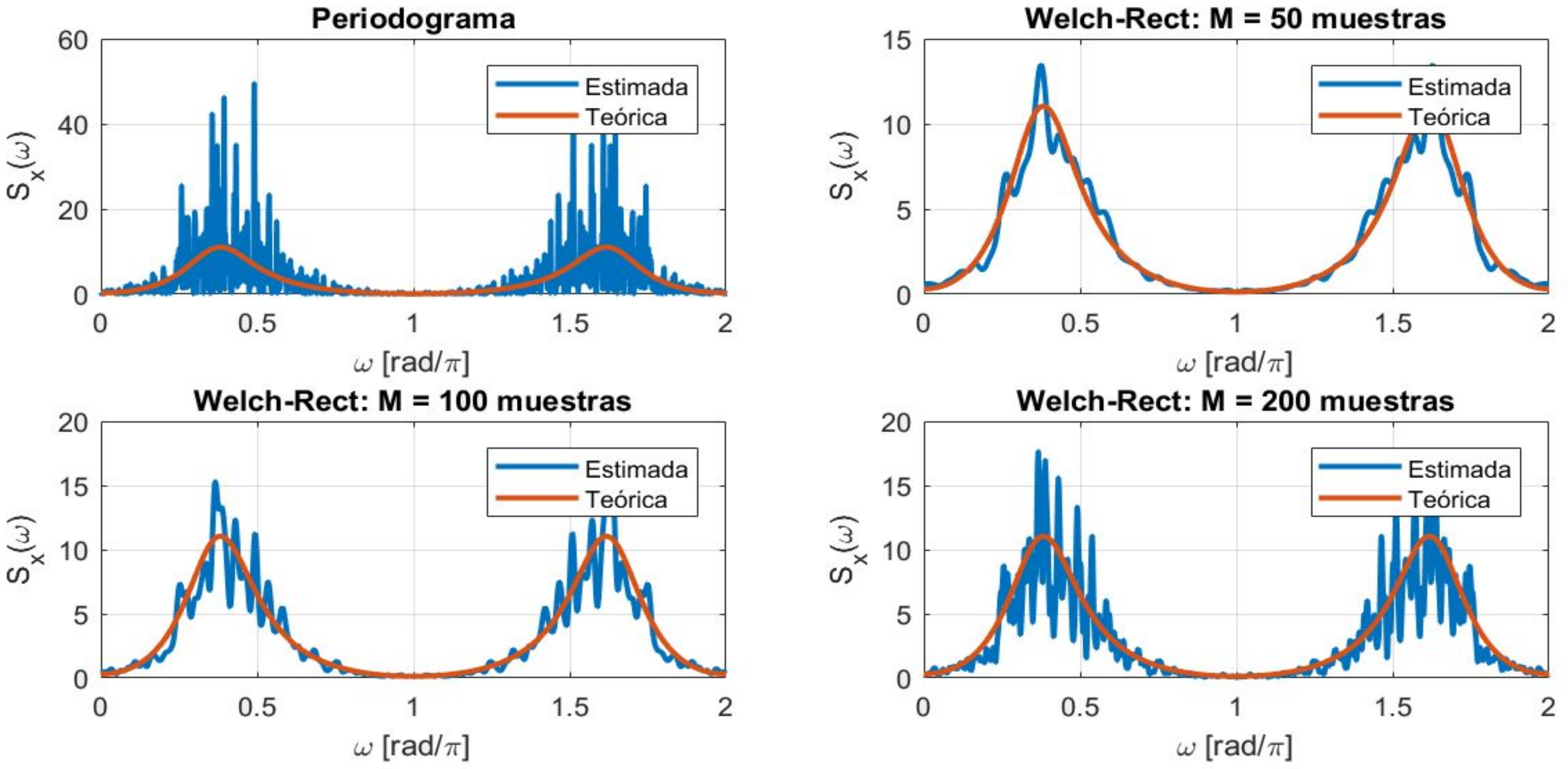
Suponga un proceso ARMA-2.2, $x(n)$ de largo $N=1000$, que responde a la siguiente ecuación en diferencias:

$$x(n) = 0.5\,x(n-1) - 0.4\,x(n-2) + u(n) - 0.6\,u(n-1) - 0.9u(n-2)$$

Donde $u(n)$ es un proceso blanco $\sim N(0,1)$.

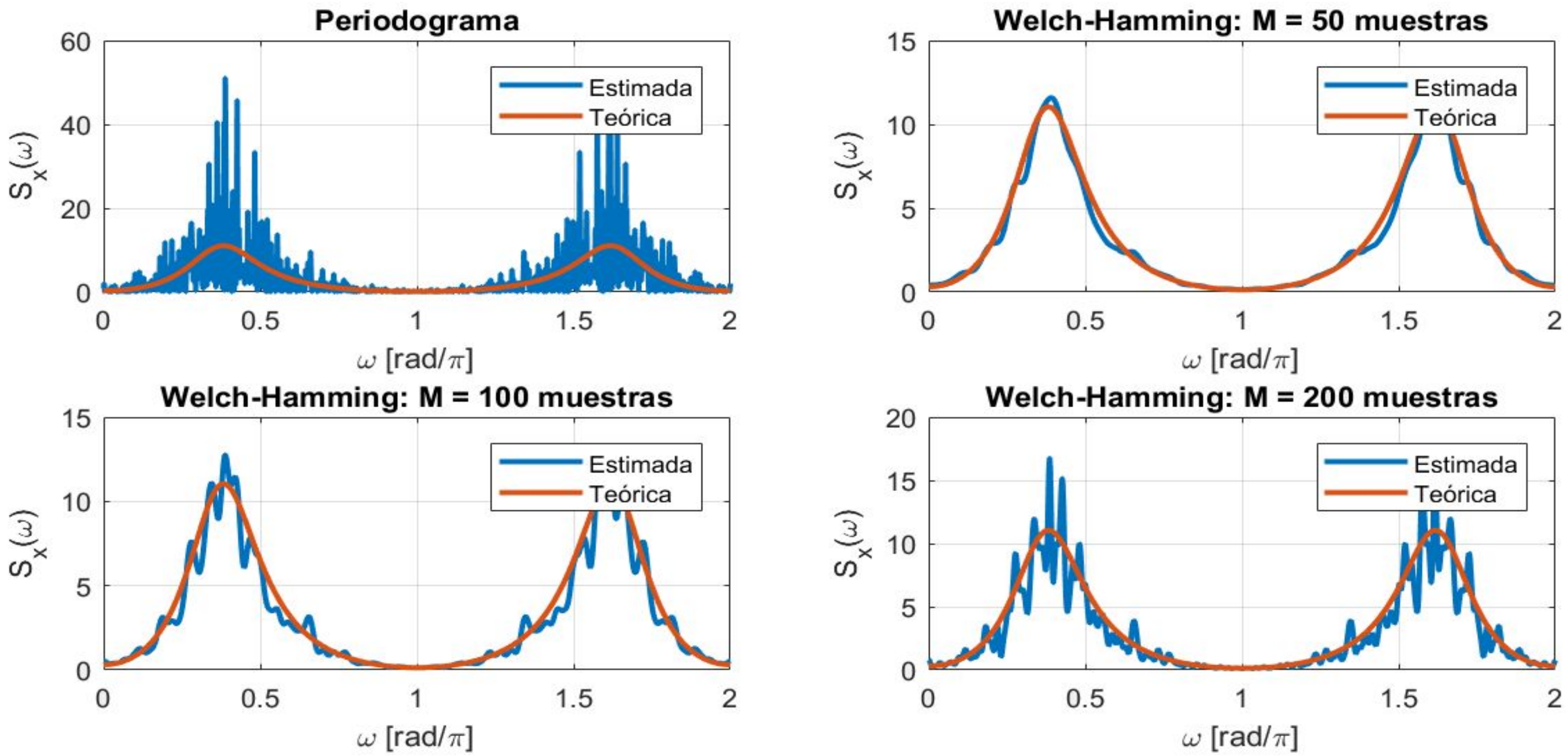
1. Calcule el periodograma del proceso $x(n)$ superpuesto a la PSD teórica.
2. Aplique la técnica de **Welch** para la estimación de la PSD considerando distintos tamaños de ventana $v(n)$ (rectangular) de largo $M = \{50\ 100\ 200\}$ y solapamiento de 50% entre segmentos.
3. Repita el punto anterior pero para una ventana $v(n)$ de Hamming.

Actividad 2



Periodograma
Welch-Rect: M = 50 muestras
Welch-Rect: M = 100 muestras
Welch-Rect: M = 200 muestras
Estimada
Teórica
$S_x(\omega)$
ω [rad/π]

Actividad 2


Periodograma
Welch-Hamming: M = 50 muestras
Welch-Hamming: M = 100 muestras
Welch-Hamming: M = 200 muestras
Estimada
Teórica
$S_x(\omega)$
ω [rad/π]

Actividad 3

Actividad 3

Suponga un proceso x(n) de largo M=1000, que responde a la siguiente ecuación en diferencias:

$$x(n) = 0.2x(n-1) + 0.6x(n-2) + u(n) - 0.4\,u(n-1)$$

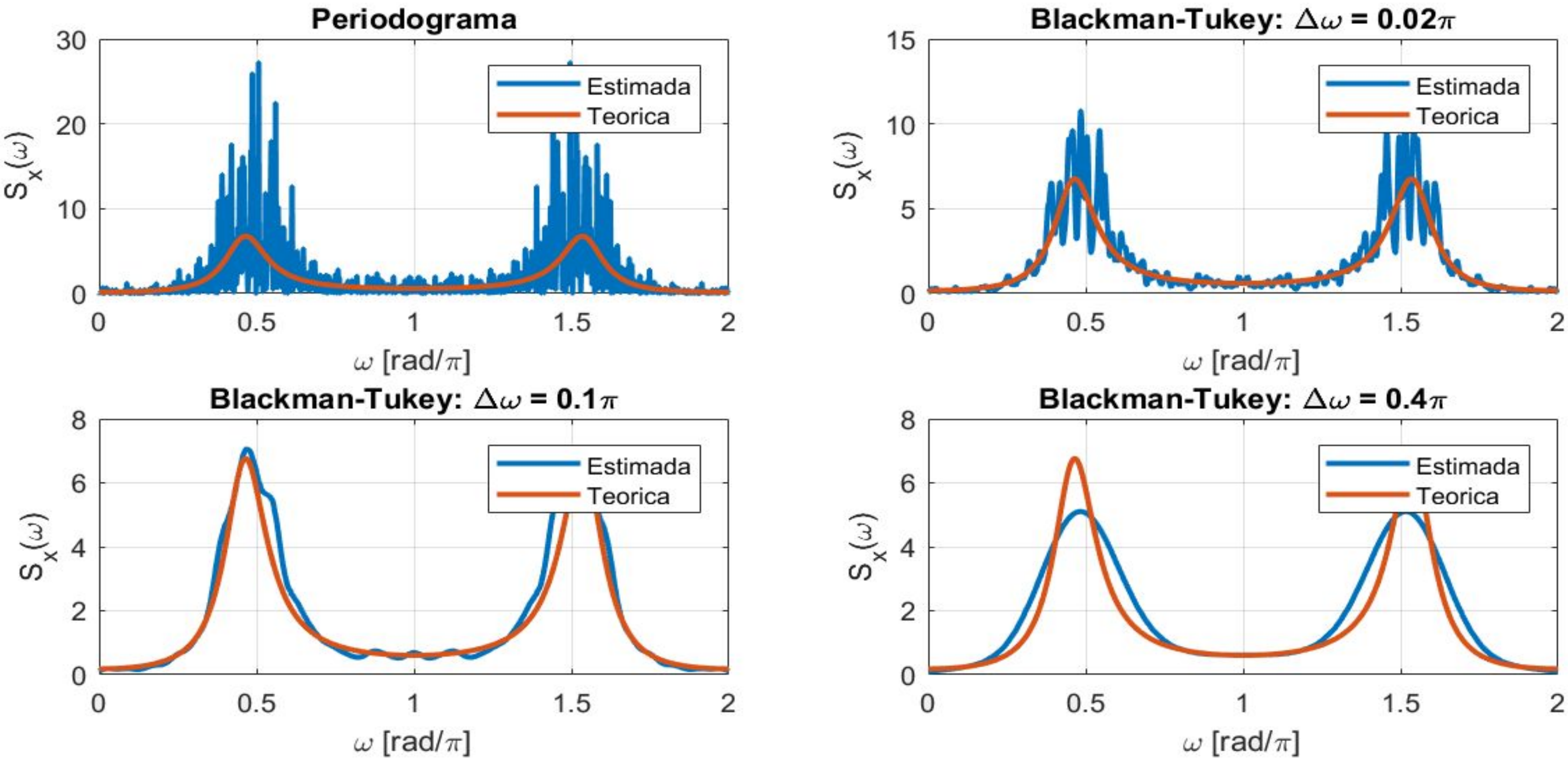
Donde u(n) es un proceso blanco ~ N(0,1).

1. Calcule el periodograma del proceso x(n) superpuesto a la PSD teórica.
2. Aplique la técnica de **Blackman-Tukey** para la estimación de la PSD considerando una ventana espectral $W(\omega)$ de Hamming (normalizada), de largo $M \approx N\,\Delta\omega/2\pi$, para distintos anchos de ventana espectral $\Delta\omega = \{0.02\pi, 0.1\pi, 0.4\pi\}$.

   Ayuda:

   ```
   W = hamming(M)'/sum(hamming(M))
   ```

Actividad 3



Periodograma
Blackman-Tukey: $\Delta\omega$ = 0.02π
Blackman-Tukey: $\Delta\omega$ = 0.1π
Blackman-Tukey: $\Delta\omega$ = 0.4π
Estimada
Teorica
$S_x(\omega)$
ω [rad/π]