Ejercicio 1

Asumiendo que $X(n)$ es un proceso ESA binario, con símbolos en $\{-1, 1\}$ i.i.d. y equiprobables, determine analíticamente la función de autocorrelación de los procesos de entrada $R_X(k)$, salida $R_Y(k)$ y ruido aditivo $R_V(k)$. También encuentre la expresión de la correlación cruzada entre $X(n)$ e $Y(n)$, es decir $R_{YX}(k)$.

$$p_{X(n)}(x) = \begin{cases} 1/2 & x = 1 \\ 1/2 & x = -1 \end{cases}$$

$X(n)$ indep de $X(n+k)$ $\forall k \neq 0$

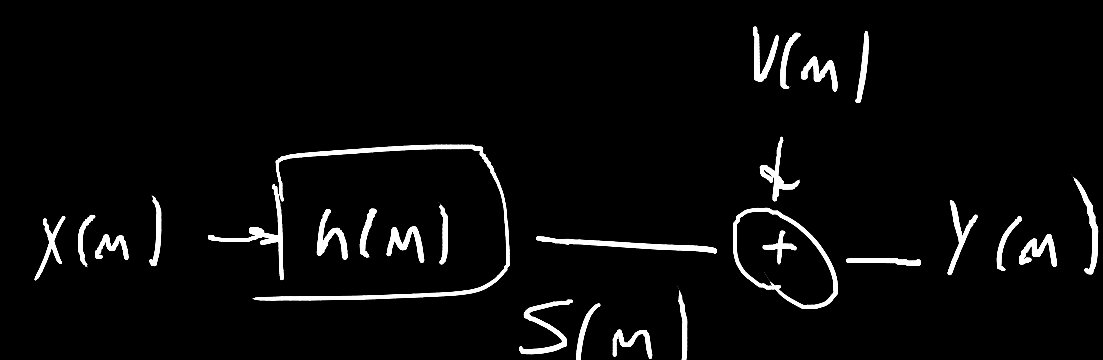
$\mu_X = 0$

$$R_X(k) = 0 \quad \forall k \neq 0, \quad R_X(0) = V[X] = E[X^2] = (-1)^2 \frac{1}{2} + 1^2 \frac{1}{2} = 1$$

$$R_X(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si no} \end{cases} = \delta(k)$$

$$R_V(k) = \sigma_V^2 \delta(n)$$

$$R_{XV}(k) = 0$$



$$y(n) = s(n) + v(n) = x * h + v(n)$$

$$R_{xs}(\tau) = h * R_x = h(\tau) \quad ; \quad R_s(\tau) = h * \tilde{h}$$

$$R_{xy}(\tau) = E\left[x(m)\left(s(m+\tau) + v(m+\tau)\right)\right] = E\left[x(m)\, s(m+\tau)\right] + \cancelto{0}{E\left[x(m)\, v(m+\tau)\right]} =$$

$$= R_{xs}(\tau) = h(\tau)$$

$$\therefore R_{xy}(\tau) = h(\tau)$$

$$R_y(\tau) = E\left\{\left[s(m) + v(m)\right]\left[s(m+\tau) + v(m+\tau)\right]\right\} =$$

$$= R_s(\tau) + R_v(\tau) + R_{sv}(\tau) + R_{vs}(\tau)$$

<u>C.AUX</u>: $R_{sv}(\tau) = E\left[s(m) \cdot v(m+\tau)\right] =$

$$= E\left[\left[\sum_{j=0}^{L-1} h(j)\, x(m-j)\right] \cdot v(m+\tau)\right] = \sum_{j=0}^{L-1} h(j)\, \cancelto{0}{R_{xv}(\tau+j)} = 0$$

$\therefore R_{SV}(\tau) = 0$

$\therefore R_Y(\tau) = R_S(\tau) + R_V(\tau)$

En resumen: $R_X(\tau) = \delta(\tau)$ $\quad R_V(\tau) = \sigma_V^2\,\delta(\tau)$

$R_{XY}(\tau) = R_{XS}(\tau) = h(\tau) \rightarrow$ No afecta el ruido

$R_Y(\tau) = R_S(\tau) + R_V(\tau) = h * \tilde{h} + \sigma_V^2\,\delta(\tau) \rightarrow$ Sí afecta el ruido

OBS: S y V descorr

Ejercicio 2

Teniendo en cuenta el criterio del mínimo error cuadrático medio (MMSE) entre la secuencia de datos transmitidos $X(n)$ y la secuencia ya ecualizada $Z(n)$, la solución óptima para los coeficientes del ecualizador debe cumplir con la ecuación (3).

¿R_{XY}? ¿De dónde sale esto?

$$\mathbf{R}_Y \mathbf{w}_o = \mathbf{R}_{YX} \quad (3)$$

donde $\mathbf{w}_o = [w_0, w_1, \ldots, w_{M-1}]^T$ es un vector con los coeficientes del ecualizador óptimo, $\mathbf{R}_Y = E[\mathbf{Y}(n)\mathbf{Y}(n)^T]$ $(M \times M)$ es la matriz de autocorrelación de $Y(n)$ y $\mathbf{R}_{XY} = E[\mathbf{Y}(n)X(n)]$ $(M \times 1)$ es el vector de correlación cruzada. Notación: $\mathbf{Y}(n) = [Y(n)\ Y(n-1)\ \ldots\ Y(n-M+1)]^T$. En base a los datos del ejercicio anterior, exprese de forma matricial la solución de los coeficientes óptimos.

$$\vec{Y}(n) = \begin{bmatrix} y(n-0) \\ y(n-1) \\ \vdots \\ y(n-(M-1)) \end{bmatrix} \rightarrow$$ Ventana con los últimos M valores de $y(n)$ empezando en n.

Ventana deslizante

$$R_y = E\left[\vec{Y}(n)\,\vec{Y}(n)^T\right] = E\left[\begin{bmatrix} y(n) \\ y(n-1) \\ \vdots \\ y(n-M+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(n) & y(n-1) & \dots & y(n-M+1) \end{bmatrix}\right]$$

$$= E\begin{bmatrix} y(n)^2 & y(n)\,y(n-1) & \dots & y(n)\,y(n-M+1) \\ y(n-1)\,y(n) & y(n-1)\,y(n-1) & \dots & y(n-1)\cdot y(n-M+1) \\ y(n-M+1)\cdot y(n) & y(n-M+1)\cdot y(n-1) & \dots & y(n-M+1)^2 \end{bmatrix} =$$

$$
= \begin{bmatrix} R_y(0) & R_y(-1) & R_y(-2) & \cdots & R_y(-M+1) \\ R_y(1) & R_y(0) & R_y(-1) & \cdots & R_y(-M+2) \\ \vdots & & & & \\ R_y(M-1) & R_y(M-2) & R_y(M-3) & \cdots & R_y(0) \end{bmatrix}
$$

$R_y(-k) = R_y(k)$?

$$
= \begin{bmatrix} R_y(0) & R_y(1) & R_y(2) & \cdots & R_y(M-1) \\ R_y(1) & R_y(0) & R_y(1) & \cdots & R_y(M-2) \\ \vdots & & & & \\ R_y(M-1) & R_y(M-2) & R_y(M-3) & \cdots & R_y(0) \end{bmatrix} \rightarrow \text{Simétrica}
$$

¿Siempre se puede invertir?

$$R_{xy} = E\left[x(n)\ \vec{y}(n)\right] = E\left[\begin{matrix} x(n)\ y(n) \\ x(n)\ y(n-1) \\ \vdots \\ x(n)\cdot y(n-M+1)\end{matrix}\right] = \begin{bmatrix} R_{xy}(0) \\ R_{xy}(-1 \\ R_{xy}(-2) \\ \vdots \\ R_{xy}(-M+1)\end{bmatrix} =$$

$$R_{xy}(-k) = -R_{xy}(k)$$

$$\overset{!}{=} -\begin{bmatrix} R_{xy}(0) \\ R_{xy}(1) \\ R_{xy}(2) \\ \vdots \\ R_{xy}(M-1)\end{bmatrix}$$

$$R_{yx} = E\left[\vec{y}(n)\ x(n)\right] = E\left[\begin{matrix} y(n)\ x(n) \\ y(n-1)\ x(n) \\ \vdots \\ y(n-M+1)\cdot x(n)\end{matrix}\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} R_{yx}(0) \\ R_{yx}(1) \\ \vdots \\ R_{yx}(M-1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(-0) \\ h(-1) \\ \vdots \\ h(-M+1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(0) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0\end{bmatrix}$$

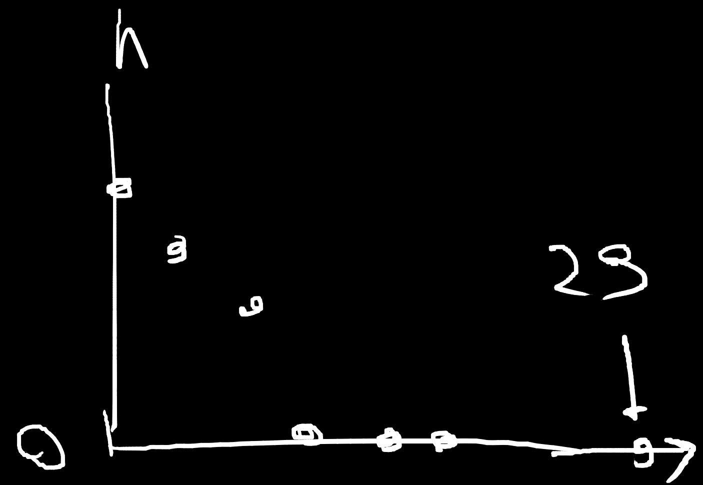
Conclusión:

$$R_y = E\left[\vec{Y}(m)^T \cdot \vec{Y}(m)\right] = \begin{bmatrix} R_y(0) & R_y(1) & \dots & R_y(M-1) \\ R_y(1) & R_y(0) & \cdots & R_y(M-2) \\ \vdots & & & \\ R_y(M-1) & R_y(M-2) & \dots & R_y(0) \end{bmatrix}$$

$$R_{xy} = E\left[x(m) \cdot \vec{Y}(m)\right] = -\begin{bmatrix} R_{xy}(0) \\ R_{xy}(1) \\ \vdots \\ R_{xy}(M-1) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ \vdots \\ h(M-1) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \omega_0 = R_y^{-1} \cdot R_{yx} = h(0) \cdot 1^{er} \text{ col } R_y^{-1}$$

$$R_y(\tau) = h * \tilde{h}(\tau) = \sum_j h(j)\, h(j-\tau)$$



$k_i = 0 \quad k_f = 30$

$k_i = 0 \quad k_f = 29 + (M-1)$

$\text{Len}(h) - 1$