Distribución Gaussiana

Ejercicio 1

Sea $\mathbf{X}$ un vector aleatorio gaussiano cuya media y matriz de covarianza son:

$$\mu_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad C_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Obtenga las curvas de nivel $\mathcal{C}_\alpha = \{(x, y) : f_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{x}) = \alpha\}$.
2. Grafique en el plano (x, y) $N = 10^3$ realizaciones del vector $\mathbf{X}$ junto con las curvas de nivel anteriores.

Ejercicio 2

Sean X e Y dos variables aleatorias Gaussianas. Se necesita caracterizar a $Z = \text{máx}(X, Y)$ en los siguientes casos:

1. X e Y son independientes e idénticamente distribuidas con media nula y varianza unitaria.
2. X e Y tiene ambas media nula, varianza unitaria, y coeficiente de correlación $0{,}1$.
3. X e Y tiene ambas media nula, varianza unitaria, y coeficiente de correlación $0{,}9$. Discuta los resultados obtenidos.

Ejercicio 3

Se tiene un vector aleatorio $\mathbf{X} = [X_1\ X_2]^t$ cuya distribución es Gaussiana con media $\boldsymbol{\mu_X}$ y matriz de covarianza $C_{\mathbf{X}}$.

1. Utilizando un cambio de variables, genere un vector aleatorio $\mathbf{Y} = [Y_1\ Y_2]^t$ de componentes descorrelacionadas y media nula.
2. Demuestre que los autovalores de la matriz $C_{\mathbf{Y}}$ son proporcionales a la longitud de los ejes mayores y menores de la elipse que contiene a los puntos del plano con igual función de densidad de probabilidad, es decir, $f_Y(\mathbf{y}) = \alpha$.

$$\{\mathbf{y} = [y_1, y_2] : \frac{y_1^2}{a_1^2} + \frac{y_2^2}{a_2^2} = 1\},$$

3. ¿Qué sucede si la matriz de correlación $C_{\mathbf{Y}}$ es singular?

Ejercicio 4

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_N$ variables aleatorias conjuntamente Gaussianas con media $\boldsymbol{\mu_X}$ y matriz de covarianza $C_{\mathbf{X}}$.

1. Calcular la varianza de la variable aleatoria $Y = a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_NX_N$ donde a_i son coeficientes reales tales que el vector $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \ldots, a_N]^t$ tiene norma unitaria.
2. Determine la función característica de Y a partir de la función característica conjunta de las X_i.

3. Sea:

$$C_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Determine el máximo y el mínimo valor posible de la varianza de Y cuando el vector $\mathbf{a}$ recorre el círculo unitario.

Ejercicio 5 Transformada de Box Muller

Sean U_1, U_2 dos variables aleatorias independientes en $(0,\ 1)$.

1. Halle la densidad conjunta de las variables:

$$\begin{cases} R = \sqrt{-2\ln(U_1)} \\ \Theta = 2\pi U_2. \end{cases}$$

Verifique que R tiene distribución Rayleigh, que Θ es uniforme y que son independientes (¿por qué?).

2. Halle la densidad conjunta de las variables:

$$\begin{cases} Z_1 = R\cos\Theta \\ Z_2 = R\sin\Theta \end{cases}$$

y demuestre que se trata de variables normales estándar independientes.

Ejercicio 6 Secuencia Gaussiana

Considere una sucesión de variables aleatorias $\{U_1, U_2, U_3, ...\}$ independientes uniformes en $(0, 1)$. A continuación se arma la siguiente secuencia:

$$\begin{cases} X_{2j} & = \sqrt{-\ln(U_{2j})}\cos(2\pi U_{2j-1}) \\ X_{2j-1} & = \sqrt{-\ln(U_{2j})}\sin(2\pi U_{2j-1}) \end{cases} \quad j = 1, 2, 3, ...$$

1. Halle la densidad conjunta del vector $[X_{2j-1}, X_{2j}]$, para $j \in N$.
Sugerencia: considere la transformación Box-Muller.
2. Utilizando las secuencia X se arma una nueva secuencia:

$$\begin{cases} Y_{2j} = X_{2j} + 0{,}5X_{2j-1} \\ Y_{2j-1} = 0{,}5X_{2j} + X_{2j-1} \end{cases} \quad j = 1, 2, 3, ...$$

Halle la densidad conjunta del vector $[Y_1, \ldots, Y_{2j}]$ para $j \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 7 Verdadero o Falso

En cada caso indique verdadero o falso, y si indica falso proponga un contraejemplo.

1. Si de dos variables aleatorias X e Y una es Gaussiana, entonces son independientes si y sólo si están descorrelacionadas.
2. Si dos variables aleatorias X e Y tienen marginales Gaussianas, entonces son independientes si y sólo si están descorrelacionadas.
3. Si dos variables aleatorias X e Y son conjuntamente Gaussianas, entonces son independientes si y sólo si están descorrelacionadas.