Trabajo práctico 3
Ecualizador MMSE

1. Introducción

En la vida cotidiana utilizamos servicios como la televisión, la radiodifusión, la telefonía, internet, sistemas de monitoreo y automatización remota, posicionamiento satelital, entre otros. Esto es posible gracias a un conjunto de tecnologías y protocolos que permiten la transmisión fiable de datos. Para ello existen sistemas de comunicaciones capaces de mitigar diversas problemáticas que surgen durante la transmisión a través del medio físico. Entre las dificultades a resolver se pueden mencionar: ruido e interferencias, distorsión del medio, relación entre ancho de banda y potencia, mecanismos de acceso en un medio compartido, etc. En un sistema de comunicación digital se trata de asegurar que cada bit transmitido a través del medio llegue intacto hasta el receptor. Uno de los objetivos principales es la compensación de la distorsión producida por el canal, que altera las señales al punto comprometer la correcta detección de los datos. En la Figura 1 se representa la idea conceptual de este problema.

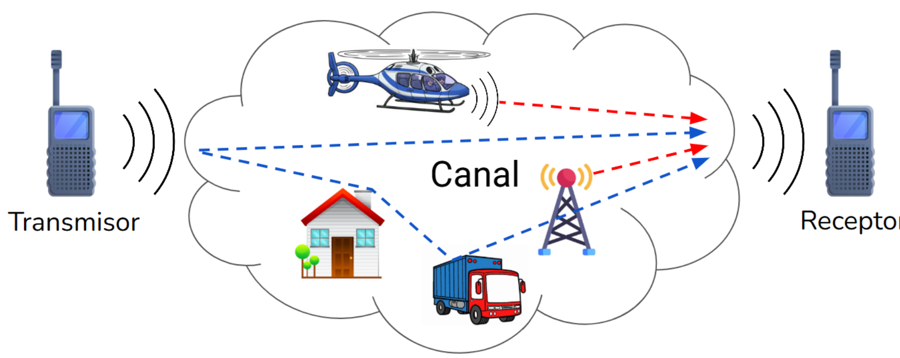

Figura 1: Propagación de señales a través de un medio de comunicación: el dispositivo receptor, capta la señal transmitida superpuesta a múltiples reflexiones, atenuaciones, etc. (distorsión del canal) más ruido aditivo de origen desconocido.

1.1. Modelo propuesto

Supongamos un modelo simplificado del sistema de comunicaciones, omitiendo las etapas analógicas y centrándonos en la secuencia de símbolos $X(n)$ (que transportan la información). En este caso vamos a suponer que esta secuencia se modela como un proceso binario que toma valores $\{-1, 1\}$ de tipo *random step* $X(n) = 2B(n) - 1$, donde $B(n) \sim \text{Ber}(p)$ es un proceso Bernoulli que representa una secuencia de $\mathbf{0}$'s y $\mathbf{1}$'s (bits transmitidos). El sistema de comunicación más elemental, como se ve en la Figura 2, consta de un emisor que transmite la secuencia $X(n)$, un canal (medio) y un receptor que detecta la secuencia recibida $Y(n)$.

Modelo del canal Es el medio físico a través del cual se propaga la señal que tansporta los datos, produciéndose un deterioro de la misma, como el ejemplo de la Figura 1. Un modelo básico para un canal se muestra en la Figura 2. El mismo se puede representar por un sistema LTI con respuesta impulsiva $h(n)$, que modela la deformación que produce en la señal (normalmente asociado a reflexiones, difracción, atenuaciones, etc., que sufre la señal al propagarse) y ruido aditivo $V(n)$ (que modela la mezcla de la señal recibida con otras señales indeseadas de origen aleatorio).

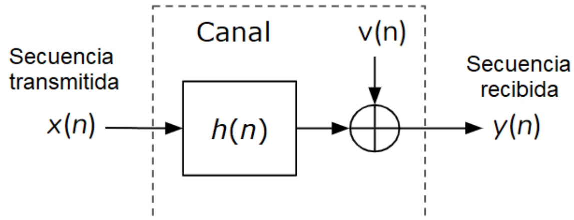

Figura 2: Modelo básico de un canal de comunicaciones.

Ecualización En este trabajo práctico abordaremos el problema de distorsión introducido por el medio. Es decir, la compensación del sistema LTI asociado al canal. Para eso existen una variedad de técnicas de ecualización. En nuestro caso, utilizaremos un ecualizador lineal en base al criterio óptimo MMSE. En la siguiente Figura se observa un esquema del sistema con el agregado de un ecualizador $\mathbf{w}$. Utilizaremos un filtro lineal FIR, cuyos coeficientes deberán obtenerse en base al modelo y propiedades de los procesos involucrados.

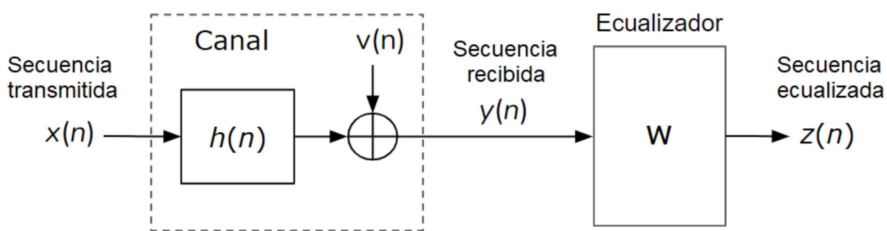

Figura 3: Etapa de ecualización agregada para compensación del canal.

De acuerdo a este modelo, suponiendo que el canal FIR de largo L posee una respuesta impulsiva con coeficientes $h(n) = \{h_0, h_1, ..., h_{L-1}\}$, y el ecualizador como una secuencia finta de largo M, $w(n) = \{w_0, w_1, ..., w_{M-1}\}$, los procesos involucrados quedan definidos en base a las ecuaciones (1) y (2).

$$Y(n) = \sum_{i=0}^{L-1} h(i)X(n-i) + V(n) \tag{1}$$

$$Z(n) = \sum_{j=0}^{M-1} w(i)Y(n-j) \tag{2}$$

2. Desarrollo

Ejercicio 1

Asumiendo que $X(n)$ es un proceso ESA binario, con símbolos en $\{-1, 1\}$ i.i.d. y equiprobables, determine analíticamente la función de autocorrelación de los procesos de entrada $R_X(k)$, salida $R_Y(k)$ y ruido aditivo $R_V(k)$. También encuentre la expresión de la correlación cruzada entre $X(n)$ e $Y(n)$, es decir $R_{YX}(k)$.

Ejercicio 2

Teniendo en cuenta el criterio del mínimo error cuadrático medio (MMSE) entre la secuencia de datos transmitidos $X(n)$ y la secuencia ya ecualizada $Z(n)$, la solución óptima para los coeficientes del ecualizador debe cumplir con la ecuación (3).

$$\mathbf{R}_Y \mathbf{w}_o = \mathbf{R}_{YX}, \tag{3}$$

donde $\mathbf{w}_o = [w_0, w_1, \ldots, w_{M-1}]^T$ es un vector con los coeficientes del ecualizador óptimo, $\mathbf{R}_Y = E[\mathbf{Y}(n)\mathbf{Y}(n)^T]$ $(M \times M)$ es la matriz de autocorrelación de $Y(n)$ y $\mathbf{R}_{XY} = E[\mathbf{Y}(n)X(n)]$ $(M \times 1)$ es el vector de correlación cruzada. Notación: $\mathbf{Y}(n) = [Y(n)\ Y(n-1)\ ...\ Y(n-M+1)]^T$. En base a los datos del ejercicio anterior, exprese de forma matricial la solución de los coeficientes óptimos.

Ejercicio 3

Asumiendo que la respuesta impulsiva del canal es $h(n) = \{1,\ 0.6,\ 0.2,\ -0.2,\ 0.1,\ 0.05\}$, con una varianza de ruido aditivo $\sigma_v^2 = 0{,}005$. Determine los coeficientes óptimos para un largo de $M = 20$, en base a los datos y a los resultados de los Ejercicios 1 y 2. Simule las secuencia $X(n)$ con 100 símbolos binarios equiprobables, la salida del canal $Y(n)$ y la ecualizada $Z(n)$. Luego grafique:

- La secuencia original $X(n)$, $R_X(k)$ y $S_X(\omega)$.
- La secuencia recibida $Y(n)$, $R_Y(k)$ y $S_Y(\omega)$.
- La secuencia ecualizada $Z(n)$, $R_Z(k)$ y $S_Z(\omega)$.
- Los coeficientes del canal $h(n)$ y del ecualizador $w(n)$

Ejercicio 4

Para distintos largos del filtro ecualizador, $M = \{2, 5, 10, 30\}$, repetir la simulación y en cada caso graficar:

- Los coeficientes del filtro $w(n)$.
- La convolución $h(n) * w(n)$.
- Superpuestos en frecuencia: $|H(\omega)|$, $|W(\omega)|$ y $|H(\omega)| \cdot |W(\omega)|$.

Analizar cómo varía la respuesta en frecuencia del sistema combinado en cascada $h(n)*w(n)$ para los distintos valores de M.

3. Conclusiones

Como conclusiones, elabore un resumen breve y conciso comentando características que considere relevantes del método propuesto en este trabajo y los resultados obtenidos, así como dificultades encontradas y cómo fueron abordadas.

4. Normas y material entregable

- **Informe**: debe ser conciso y comentar los resultados solicitados. El informe debe entregarse en formato PDF (**no se aceptarán otros formatos**) y con nombre: `TP3_GXX.PDF` (donde `XX` es el número de grupo). No debe agregarse código en el informe.
- **Código**: Los archivos de código utilizados deben ser en formato `.m` de Matlab/Octave (o alternativamente `.py` si usara lenguaje Python). El código debe incluirse junto al informe en un archivo ZIP (con mismo nombre que el informe) que deberá subirse al campus.

Derivación de $R_{yy}(k)$ y $R_{xy}(k)$ para un canal FIR

Supongamos:

- $X(n)$: secuencia binaria i.i.d. en $\{-1, 1\}$.
- $h(n)$: respuesta al impulso del canal, FIR de longitud N (es decir, $h(n) = 0$ para $n < 0$ o $n \geq N$).
- $V(n)$: ruido blanco con varianza σ_v^2, es decir, $R_{vv}(k) = \sigma_v^2 \delta(k)$.
- $Y(n) = (h * X)(n) + V(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)X(n-m) + V(n)$.

Paso 1: Autocorrelación de entrada $R_{xx}(k)$

Como $X(n)$ es i.i.d. binaria con valores en $\{-1, 1\}$:

$$R_{xx}(k) = \mathbb{E}[X(n)X(n+k)] = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k \neq 0 \end{cases} = \delta(k)$$

Paso 2: Autocorrelación de la salida $R_{yy}(k)$

Definición:

$$R_{yy}(k) = \mathbb{E}[Y(n)Y(n+k)]$$

Expandimos:

$$Y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)X(n-m) + V(n)$$
$$Y(n+k) = \sum_{l=0}^{N-1} h(l)X(n+k-l) + V(n+k)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} R_{yy}(k) &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_m h(m)X(n-m) + V(n)\right)\left(\sum_l h(l)X(n+k-l) + V(n+k)\right)\right] \\ &= \sum_m \sum_l h(m)h(l)\mathbb{E}[X(n-m)X(n+k-l)] + \sigma_v^2\delta(k) \end{aligned}$$

Usamos que $\mathbb{E}[X(n-m)X(n+k-l)] = R_{xx}(k+m-l) = \delta(k+m-l)$:

$$R_{yy}(k) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} h(m)h(l)\delta(k+m-l) + \sigma_v^2\delta(k)$$

Esto selecciona los términos donde $l = k + m$. Como $h(n) = 0$ fuera de $[0, N-1]$, podemos simplificar:

$$\boxed{R_{yy}(k) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)h(m+k) + \sigma_v^2\delta(k)}$$

o bien como convolución:

$$R_{yy}(k) = (h * h^{-})(k) + \sigma_v^2 \delta(k)$$

donde $h^{-}(n) = h(-n)$.

Paso 3: Correlación cruzada $R_{xy}(k)$

Definición:

$$R_{xy}(k) = \mathbb{E}[X(n)Y(n+k)] = \mathbb{E}\left[X(n)\left(\sum_m h(m)X(n+k-m) + V(n+k)\right)\right]$$

Como $X(n)$ y $V(n+k)$ son independientes y $\mathbb{E}[X(n)] = 0$, el término de ruido se anula:

$$R_{xy}(k) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)\mathbb{E}[X(n)X(n+k-m)] = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)R_{xx}(k-m)$$

Dado que $R_{xx}(k) = \delta(k)$, se selecciona el único término donde $k = m$, entonces:

$$\boxed{R_{xy}(k) = h(k)}$$

(para $k \in [0, N-1]$, fuera de eso se anula si $h(n)$ es FIR de largo N).