Ejercicio 1

Sea $\mathbf{X}$ un vector aleatorio gaussiano cuya media y matriz de covarianza son:

$$\mu_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad C_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

det $= 1$

$C_X^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$

1. Obtenga las curvas de nivel $\mathcal{C}_\alpha = \{(x,y) : f_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{x}) = \alpha\}$.
2. Grafique en el plano (x,y) $N = 10^3$ realizaciones del vector $\mathbf{X}$ junto con las curvas de nivel anteriores.

1) Agarramos la $f_{\vec{x}}(\vec{x})$ y la igualamos, va a dar (idealmente) algo elíptico.

forma gral: $f_X(x) = \left[(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det(C_X)}\right]^{-1} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu_X)^T C_X^{-1}(x-\mu_X)} = [2\pi \cdot 1]^{-1} \exp\left[-\frac{1}{2}(x-1 \quad y+2)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y+2 \end{pmatrix}\right]$

$$[2\pi \cdot 1]^{-1} \exp\left[-\frac{1}{2}(x-1 \quad y+2)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y+2 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{x^2}{2} + x(y-3) - y^2 - 5y - \frac{13}{2}\right) = \alpha$$

Curvas de nivel $\rightarrow$ $-\frac{x^2}{2} + x(y-3) - y^2 - 5y - \frac{13}{2} = \beta$

Ejercicio 2

Sean X e Y dos variables aleatorias Gaussianas. Se necesita caracterizar a $Z = \text{máx}(X, Y)$ en los siguientes casos:

1. X e Y son independientes e idénticamente distribuidas con media nula y varianza unitaria.
2. X e Y tiene ambas media nula, varianza unitaria, y coeficiente de correlación $0{,}1$.
3. X e Y tiene ambas media nula, varianza unitaria, y coeficiente de correlación $0{,}9$. Discuta los resultados obtenidos.

1) $\mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}(\text{Max}(x,y) \leq z) = \mathbb{P}(x \leq z \wedge y \leq z) \overset{\text{indep}}{=} \mathbb{P}(x \leq z)\,\mathbb{P}(y \leq z) = F_x(z)\, F_y(z) = F_x(z)^2 = F_y(z)^2$

ya que $x, y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$

2) Buscamos la $f_{x,y}(x,y)$ con la $\mu_{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $C_{\vec{x}} = \begin{vmatrix} 1 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 1 \end{vmatrix}$ y la integral de $\displaystyle\int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{z} f_{\vec{x}}(\vec{x})\, d\vec{x}$

No tiene sentido resolver la integral, es muy largo el proceso.

Mejor sería estimar por montecarlo para un z dado.

$$\mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}(x \leq z,\ y \leq z) = \iint_{(-\infty)}^{(z)} \overbrace{f_x(x)\, f_{y|x}(y|x)}^{f_{xy}(x,y)}\, dy\, dx$$

$x \sim \mathcal{N}(0,1) \wedge Y|X \sim \mathcal{N}(\mu_y + C_{yx} C_x^{-1}(x - \mu_x),\ C_y - C_{yx} C_x^{-1} C_{xy})$

$\sim \mathcal{N}(0 + 0{,}1 \cdot 1(x - 0),\ 1 - 0{,}1^2) = \mathcal{N}\left(\frac{x}{10},\ 0{,}99\right)$

$\begin{vmatrix} 1 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 1 \end{vmatrix}$

$\wedge$ de ahí hay que meter la PDF e integrar

Ejercicio 3

Se tiene un vector aleatorio $\mathbf{X} = [X_1\ X_2]^t$ cuya distribución es Gaussiana con media $\boldsymbol{\mu}_\mathbf{X}$ y matriz de covarianza $C_\mathbf{X}$.

1. Utilizando un cambio de variables, genere un vector aleatorio $\mathbf{Y} = [Y_1\ Y_2]^t$ de componentes descorrelacionadas y media nula.
2. Demuestre que los autovalores de la matriz $C_\mathbf{Y}$ son proporcionales a la longitud de los ejes mayores y menores de la elipse que contiene a los puntos del plano con igual función de densidad de probabilidad, es decir, $f_Y(\mathbf{y}) = \alpha$.

$$\{\mathbf{y} = [y_1, y_2] : \frac{y_1^2}{a_1^2} + \frac{y_2^2}{a_2^2} = 1\},$$

3. ¿Qué sucede si la matriz de correlación $C_\mathbf{Y}$ es singular?

1) $X \sim \mathcal{N}(\mu_x, C_x)$

Buscamos blanqueando tq $Ax + b = y$ si: $C_x = P_x \Lambda_x P_x^t$

$A = \Lambda_x^{-1/2} P_x^t \wedge b = -A\mu_x$

Si $C_y\Big|_{\text{descorr}} = \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{vmatrix}$ dónde $C_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ la blanquea

σ_1^2 va con $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y σ_2^2 con $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ xque están descorr y los ángulos van a ser $//$ a los ejes de $\mathbb{R}^2$.

Escribamos la PDF de $\vec{y} \rightarrow f_y(y) = \dfrac{1}{2\pi\,\sigma_1\sigma_2} \exp\left(-\frac{1}{2}(y_1\ y_2)\begin{vmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{vmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \Longrightarrow$

$$f_y(y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\left(\frac{-y_1^2}{2\sigma_1^2} + \frac{-y_2^2}{2\sigma_2^2}\right) = \alpha$$

$$\boxed{\frac{y_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{y_2^2}{\sigma_2^2} = b}$$ la Ec. de una elipse

Si la C_y es singular (no tiene inversa) podés pensar que el $\sigma^2 = 0$ y el autovector ~~asociado~~ te da la dirección en la que con $\mathbb{P} = 1$ no hay realizaciones.
Como el σ^2 es cero no puede ir en esa dirección. Básicamente, al espacio vectorial le sobra una dirección.

Ejercicio 4

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_N$ variables aleatorias conjuntamente Gaussianas con media $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}}$ y matriz de covarianza $C_{\mathbf{X}}$.

1. Calcular la varianza de la variable aleatoria $Y = a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_NX_N$ donde a_i son coeficientes reales tales que el vector $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \ldots, a_N]^t$ tiene norma unitaria.
2. Determine la función característica de Y a partir de la función característica conjunta de las X_i.
3. Sea:

$$C_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Determine el máximo y el mínimo valor posible de la varianza de Y cuando el vector $\mathbf{a}$ recorre el círculo unitario.

1) $E[Y] = E[\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \cdots \alpha_N x_N] = \sum_{i=1}^{n} E[\alpha_i x_i] = \sum \alpha_i E[x_i] = a^T E[\vec{x}]$

$[\alpha_1 \ \alpha_n]$ $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

$Y = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a x_1 + b x_2$

$\underline{Y = AX}$

$C_Y = A C_X A^t = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a - b & -a + 3b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \operatorname{sen}(\alpha) \end{pmatrix}$

$C_Y = 3a^2 - ab - ab + 3b^2$

$Var(Y) = C_Y = 3 - 2ab \quad ; \quad \sqrt{a^2+b^2} = 1$

$C_Y = 3 - 2a\sqrt{1-a^2}$

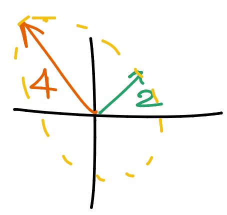
$\frac{\partial}{\partial a} C_Y = 0 = -2\sqrt{1-a^2} - a \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \cdot (-2a)$

$0 = -2\sqrt{1-a^2} + \frac{2a^2}{\sqrt{1-a^2}}$ $\qquad 1 - a^2 = a^2$

$1 = 2a^2$

$\text{Max}(Var(Y)) = 4 \ @ \ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad |a| = 1/\sqrt{2}$

$\text{Min}(Var(Y)) = 2 \ @ \ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad a = \pm 1/\sqrt{2}$



2) $\phi_x = E[e^{j w^T x}]$ $\wedge$ $y = a^T \vec{X}$ $\therefore$ $a\, y = \vec{X}$

$\underset{1\times n}{[\;]}\ \underset{n\times 1}{[\;]}$ $\qquad$ $\underset{n\times 1}{[\;]}\ \underset{1\times 1}{[y]} = \underset{n\times 1}{[\;]}$

$\phi_x = E[e^{j \vec{w}^T \vec{x}}]$

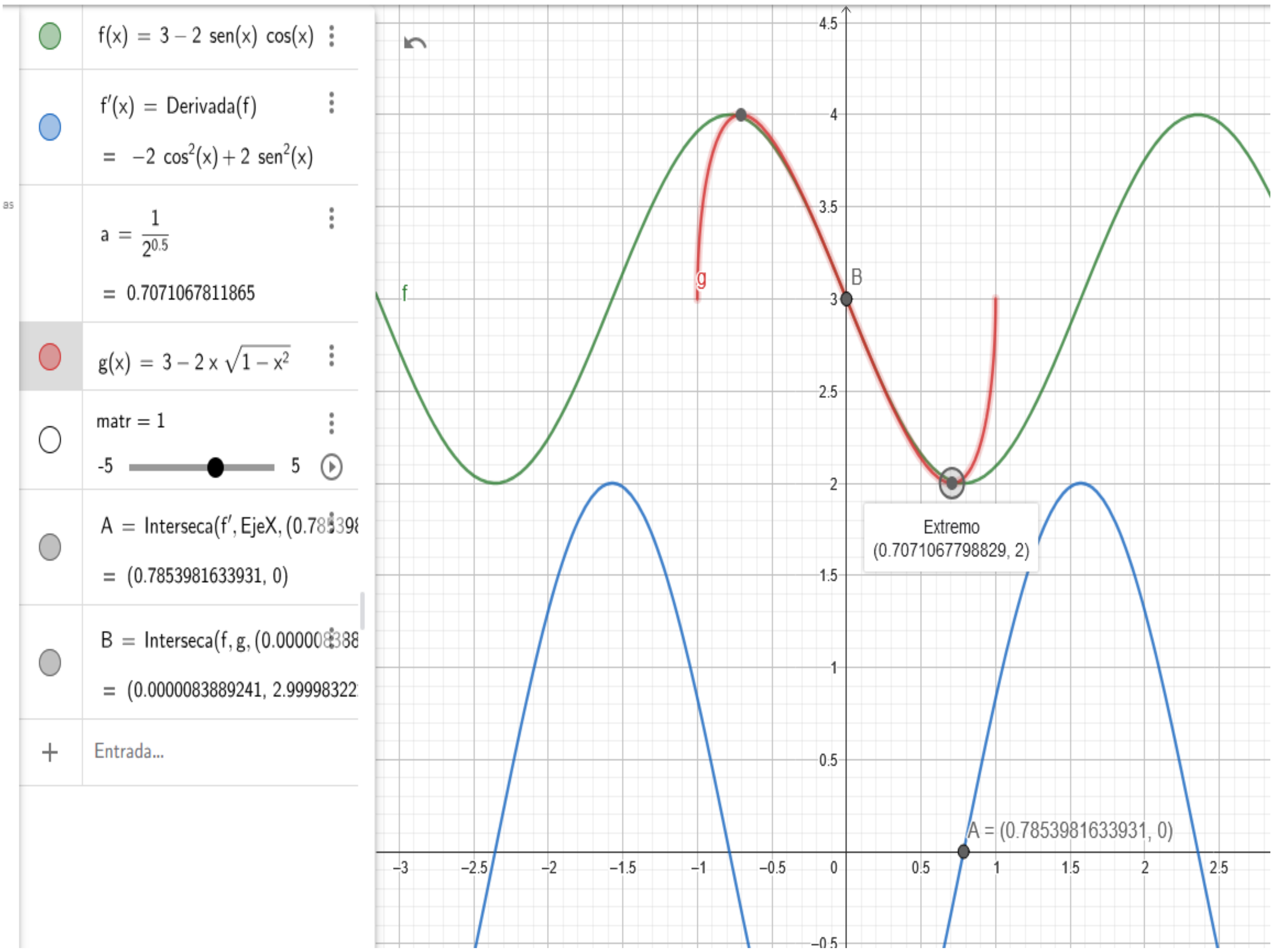
si $y = a^T \vec{x}$ $\rightarrow$ $\phi_y = E[e^{j w^T a^T \vec{x}}]$

$n\times 1$ $\quad$ $1\times n$ $\quad$ $\omega\ [y]^{1\times 1}$

la función característica / es literal eso

si haces $a = \cos(\alpha)$ y buscás min y max te da el $\underline{\alpha}$

$b = \operatorname{sen}(\alpha)$ $\wedge$ tenés que calcular el $\underline{a \text{ y } b}$



Ejercicio 5 Transformada de Box Muller

Sean U_1, U_2 dos variables aleatorias independientes en $(0,\ 1)$.

1. Halle la densidad conjunta de las variables:

$$\begin{cases} R = \sqrt{-2\ln(U_1)} \\ \Theta = 2\pi U_2. \end{cases}$$

   Verifique que R tiene distribución Rayleigh, que Θ es uniforme y que son independientes (¿por qué?).

2. Halle la densidad conjunta de las variables:

$$\begin{cases} Z_1 = R\cos\Theta \\ Z_2 = R\sin\Theta \end{cases}$$

   y demuestre que se trata de variables normales estándar independientes.

$$f(R,\theta) = \frac{f(U_1,U_2)}{|\det(J_U)|} \overset{iid}{=} \frac{\mathbb{1}\{0<u_1<1\}\mathbb{1}\{0<u_2<1\}}{\left|\det\begin{vmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{2u_1\sqrt{-\ln(u_1)}} & 0 \\ 0 & 2\pi \end{vmatrix}\right|} = \frac{\mathbb{1}\{0<R<\infty\}\mathbb{1}\{0<\theta<2\pi\}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}\, 2\pi\, \frac{1}{U_1\sqrt{-\ln(U_1)}}}$$

$R = \sqrt{-2\ln(U_1)}$

$\theta = 2\pi U_2$

$$\sqrt{2}\left(-\ln(U_1)\right)^{1/2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{1}{\sqrt{-\ln(U_1)}}\cdot\frac{-1}{U_1}$$

$$\begin{cases} \frac{\theta}{2\pi} = U_2 \\ \exp\left(-\frac{1}{2}R^2\right) = U_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\theta}{2\pi} = U_2 \\ \exp\left(-\frac{1}{2}R^2\right) = U_1 \end{cases}$$

$$\frac{R}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\mathbb{1}\{0<R<\infty\}\mathbb{1}\{0<\theta<2\pi\}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}\, 2\pi\, \frac{1}{U_1\sqrt{-\ln(U_1)}}} = \frac{1}{2\pi}\mathbb{1}\{0<\theta<2\pi\}\cdot\frac{1}{-\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{2}}\,\frac{\mathbb{1}\{0<R<\infty\}}{\frac{1}{e^{-\frac{1}{2}R^2}}\cdot\cancel{\frac{1}{R/\sqrt{2}}}} = \frac{\mathbb{1}\{0<\theta<2\pi\}}{2\pi}\cdot R\, e^{-\frac{1}{2}R^2}$$

salvo un 2

$R \sim Ray(1)$; $\Theta \sim U(0,2\pi)$

$R\cos\theta$, $R\sin\theta$ $\longrightarrow$ $$f_{Z_1Z_2} = \frac{\frac{1}{2\pi}\cdot r\, e^{-\frac{r^2}{2}}\,\mathbb{1}\{0<\theta<2\pi\}\mathbb{1}\{0<r<\infty\}}{\left|\det\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \partial/\partial r & \partial/\partial\theta \end{array} \\ \begin{vmatrix} \cos\theta & -R\sin\theta \\ \sin\theta & R\cos\theta \end{vmatrix} \end{array}\right|} = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2}}$$

$\longrightarrow R$

$z_1 = R\cos\theta$

$z_2 = R\sin\theta$

$\sqrt{z_1^2+z_2^2}=R$

$$\frac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{1}{2}(z_1^2+z_2^2)} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}z_1^2}}_{\mathcal{N}(0,1)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}z_2^2}}_{\mathcal{N}(0,1)} \quad \mathbb{1}_{\{\infty<z_1<\infty\}}\ \mathbb{1}_{\{-\infty<z_2<\infty\}}$$

indep.

Ejercicio 6 Secuencia Gaussiana

Considere una sucesión de variables aleatorias $\{U_1, U_2, U_3, ...\}$ independientes uniformes en $(0,1)$. A continuación se arma la siguiente secuencia:

$$\begin{cases} X_{2j} &= \sqrt{-\ln(U_{2j})}\cos(2\pi U_{2j-1}) \\ X_{2j-1} &= \sqrt{-\ln(U_{2j})}\sin(2\pi U_{2j-1}) \end{cases} \quad j = 1,2,3,...$$

1. Halle la densidad conjunta del vector $[X_{2j-1}, X_{2j}]$, para $j \in N$.
   Sugerencia: considere la transformación Box-Muller.
2. Utilizando las secuencia X se arma una nueva secuencia:

$$\begin{cases} Y_{2j} = X_{2j} + 0{,}5X_{2j-1} \\ Y_{2j-1} = 0{,}5X_{2j} + X_{2j-1} \end{cases} \quad j = 1,2,3,...$$

Halle la densidad conjunta del vector $[Y_1, \ldots, Y_{2j}]$ para $j \in \mathbb{N}$.

Para un j dado podemos calcular el $\begin{pmatrix} X_{2j} \\ X_{2j-1} \end{pmatrix}$ con un $\begin{pmatrix} U_{2j} \\ U_{2j-1} \end{pmatrix} \overset{iid}{\sim} \mathcal{U}(0,1)$

llamo $\vec{X} = \begin{pmatrix} X_{2j} \\ X_{2j-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y $\vec{U} = \begin{pmatrix} U_{2j} \\ U_{2j-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$

$x = \sqrt{-\ln(A)}\cos(2\pi B)$

$y = \sqrt{-\ln(A)}\,\text{sen}(2\pi B)$

$$f_{\vec{X}}(\vec{x}) = \frac{f_{\vec{U}}(\vec{u})}{\left|\det\left(\text{Jacob}(g(x))\right)\right|}\Bigg|_{g^{-1}(u)}$$

$$\boxed{x^2 + y^2 = -\ln(A)}$$

$$\boxed{\frac{x}{y} = \frac{1}{\text{Tan}(2\pi B)}}$$

Esto no a dar $\mathcal{N}(0,1)$ cree, parece una composición de transfor.

$$f_{\vec{X}}(\vec{x}) = \frac{\mathbb{1}\{0<A<1\}\mathbb{1}\{0<B<1\}}{\left|\det\begin{vmatrix} \frac{\cos(2\pi B)}{2\sqrt{-\ln(A)}}\cdot\frac{1}{-A} & -2\pi\,\text{sen}(2\pi B)\sqrt{-\ln(A)} \\ \frac{\text{sen}(2\pi B)}{-2A\sqrt{-\ln(A)}} & 2\pi\cos(2\pi B)\sqrt{-\ln(A)} \end{vmatrix}\right|}$$

$$\left|-\frac{\pi\cos^2(2\pi B)}{A} - \frac{\pi\,\text{sen}^2(2\pi B)}{A}\right| = \left|\frac{-\pi}{A}\right| = \frac{\pi}{A}$$

$$f_{\vec{X}}(\vec{x}) = \frac{\mathbb{1}\{0<A<1\}\mathbb{1}\{0<B<1\}}{\frac{\pi}{A}}\Bigg|_{g^{-1}}$$

$x^2 + y^2 = -\ln(A)$

$A = e^{-x^2-y^2}$

$\tan(2\pi b) = \frac{y}{x}$

$b = \frac{\text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)}{2\pi}$

$$\rightarrow f_{\vec{X}}(\vec{x}) = \frac{1}{\pi}e^{-x^2-y^2}\,\mathbb{1}\{0<e^{-x^2}e^{-y^2}<1\}\,\mathbb{1}\{0<\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)<2\pi\}$$

$$\mathbb{1}\{0<x.y<\infty\}$$

Separo: $f_{\vec{X}}(\vec{x}) = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{2}\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}} \cdot \dfrac{1}{\frac{\sqrt{2}\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}} e^{\frac{-x^2}{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}} e^{\frac{-y^2}{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}$

$$X, Y \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2}\right)$$

2) Como $X, Y \sim \mathcal{N}(0, 1/2)$ es una Transformación de gaussianas:

$\alpha = X + \frac{1}{2} Y$

$\beta = \frac{1}{2} X + Y$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}}_{\vec{\gamma}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}}_{\vec{X}}$$

Propiedad:

Como $\vec{X} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}\right)$ $\quad \vec{\gamma} \sim \mathcal{N}(\mu_\gamma, C_\gamma)$

$$C_\gamma = A C_{\vec{X}} A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 5/8 & 1/2 \\ 1/2 & 5/8 \end{vmatrix}$$

$$\mu_Y = A \mu_X = \vec{0}$$

$$\vec{\gamma} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 5/8 & 1/2 \\ 1/2 & 5/8 \end{vmatrix}\right)$$

Ejercicio 7 Verdadero o Falso

En cada caso indique verdadero o falso, y si indica falso proponga un contraejemplo.

1. Si de dos variables aleatorias X e Y una es Gaussiana, entonces son independientes si y sólo si están descorrelacionadas.
2. Si dos variables aleatorias X e Y tienen marginales Gaussianas, entonces son independientes si y sólo si están descorrelacionadas.
3. Si dos variables aleatorias X e Y son conjuntamente Gaussianas, entonces son independientes si y sólo si están descorrelacionadas.

F

1. Para no Gaussianas indep $\underset{\times}{\overset{\checkmark}{\rightleftarrows}}$ Descorr. $\therefore$ si son descorr no necesariamente son indep.

V

2. Si todas las marginales son Gaussianas X e Y son gaussianas. En Gauss. Descorr $\longleftrightarrow$ indep $\therefore$ si las componentes son descorr son indep. Descorrelación fuerza independencia.

3. V ¿?

Convergencia y teoremas límite

Ejercicio 1 Convergencia en distribución

Sea $B_i, i = 1, 2, \cdots$ una secuencia de variables aleatorias i.i.d., Bernoulli equiprobables. Considere el número $\xi \in [0,1]$ determinado por la expansión binaria

$$\xi = \sum_{i=1}^{\infty} b_i 2^{-i}$$

donde b_i es una realización de la secuencia B_i. Explique por qué ξ es una v.a distribuida uniformemente en $[0,1]$.

Ayuda:

$$\sin(\omega) = \omega \prod_{i=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\omega}{2^i}\right)$$

Veamos la $\phi_\xi = E_\xi\left[e^{j\omega\xi}\right] = E_{B_i}\left[\exp\left(j\omega \sum_{i=1}^{\infty} b_i 2^{-i}\right)\right] = E_{B_i}\left[\prod_{i=1}^{\infty} \exp\left(j\omega b_i 2^{-i}\right)\right] =$

$$\underbrace{\prod_{i=1}^{\infty} E_{B_i}\left[\exp\left(j\omega b_i 2^{-i}\right)\right]}_{\text{obra } E} = \prod_{i=1}^{\infty}\left(\exp\left(j\omega b_i 2^{-i}\right)\left(\tfrac{1}{2}\delta(B_i) + \tfrac{1}{2}\delta(B_i - 1)\right)\right) = \prod_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\exp\left(j\omega 2^{-i}\right) + 1}{2}\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{\infty} e^{j\frac{\omega}{2}2^{-i}}\left(\frac{e^{j\frac{\omega}{2}2^{-i}} + e^{-j\frac{\omega}{2}2^{-i}}}{2}\right) = \prod_{i=1}^{\infty} e^{j\frac{\omega}{2}2^{-i}} \prod_{i=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\omega}{2}2^{-i}\right) = \prod_{i=1}^{\infty} e^{j\frac{\omega}{2}2^{-i}} \cdot \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\frac{\omega}{2}}$$

$$= \frac{2\operatorname{sen}\left(\omega/2\right)}{\omega} \cdot e^{j\frac{\omega}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^i} \qquad \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 1$$

$$= \frac{2\operatorname{sen}\left(\omega/2\right)}{\omega} e^{j\omega/2} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}(-\omega)} \left(u(t + \tfrac{1}{2}) - u(t - \tfrac{1}{2})\right) \quad \text{con } t = t - \tfrac{1}{2}$$

$$\therefore \quad \phi_\xi = \underbrace{\frac{2\operatorname{sen}(\omega/2)}{\omega} e^{j\omega/2}}_{\text{sinc unitaria movida}} \xleftrightarrow{\mathcal{F}(-\omega)} f_\xi(\xi) = \left[u(\xi) - u(\xi - 1)\right]$$

$$\therefore \quad \underline{\xi \sim \mathcal{U}(0,1)}$$

Ejercicio 2 Ley fuerte de los grandes números

Sea X una variable aleatoria discreta definida sobre un conjunto $\mathcal{X}$ y con función de probabilidad p_X. La entropía de la variable X se define como:

$$H(X) := -\mathbb{E}[\log(p_X(X))] = -\sum_{x\in\mathcal{X}} p_X(x)\log p_X(x).$$

1. Suponga que tiene una secuencia $X_1, X_2, \ldots$ de variables independientes con función de probabilidad p_X. Demuestre que entonces:

$$-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log p_X(X_i) \to H(X),$$

siendo la convergencia en forma casi segura.

2. La entropía es una métrica del contenido de información de una variable aleatoria. Halle la entropía de una variable Bernoulli de parámetro p, y demuestre que la entropía es máxima cuando $p = 1/2$ (máxima información) y nula cuando es 0 o 1 (ninguna información).

1) Por LFGN. $S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\infty} x_i \xrightarrow{a.s.} E[x_n]$

si $S_n = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log p_x(x_i)$

Defino $a = -\frac{1}{n}\log p_x(x_1)$ que por enunciado $E[a] = H(x)$

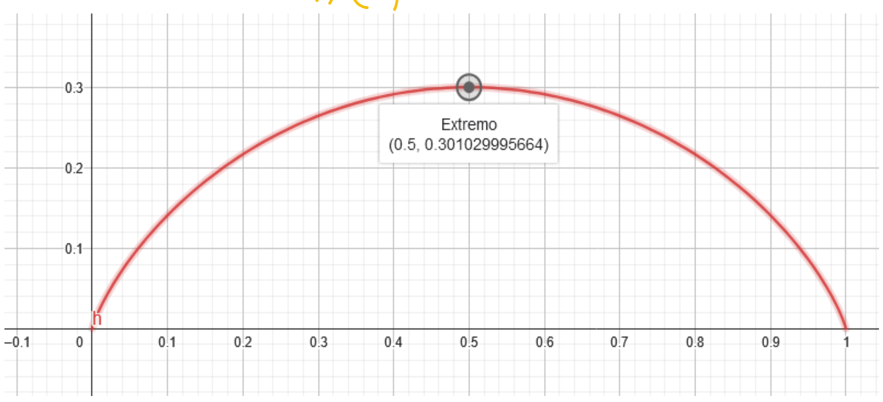
$\therefore$ $S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a \overset{a.s.}{=} H(X)$; cumpliendose la LFGN y la convergencia casi segura de la serie a su media.

2) $H(x) = -\sum_{x=0}^{1} p_x(x)\log p_x(x) = -(1-p)\log(1-p) - p.\log(p)$

$p_x(0)$ $p_x(1)$

$x \sim Ber(p)$

$p_x(x) = \delta(x)(1-p) + \delta(x-1)p$



Ejercicio 3 Convergencia en probabilidad

Sea Y una variable aleatoria, $X_1, X_2, \ldots$ secuencia de variables aleatorias y g una función continua.

1. Demuestre que si $X_n \xrightarrow{P} Y$ entonces $g(X_n) \xrightarrow{P} g(Y)$, es decir, las funciones continuas conservan la convergencia en probabilidad.
   Recordatorio: g es continua si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|x - x_0| < \delta$ implica que $|g(x) - g(x_0)| < \epsilon$.

2. Sea $X_1, X_2, \ldots$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d. de media nula y varianza σ_X^2. Demuestre la ley débil de los grandes números, es decir, que:
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n\to\infty]{P} \mu.$$
   Ayuda: utilice la desigualdad de Tchebycheff.

3. Demuestre que:
$$\frac{1}{\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2\right)^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow[n\to\infty]{P} \frac{1}{\sigma_X}.$$
   Ayuda: use los dos incisos anteriores.

4. Demuestre que:
$$e^{\cos^2\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{P} e^{\cos^2(\sigma_X^2)}.$$
   Sugerencia: use los incisos 1 y 2.

Convergencia en probabilidad:

Una secuencia de VAs X_n converge a la VA X en probabilidad si:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\{\xi : |X_n(\xi) - X(\xi)| > \varepsilon\}) = 0$$

La proba de que haya epsilon mayor a la dif es cero en el infinito

Usando el teorema $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X \iff \lim_{n\to\infty} E\left\{\frac{|X_n - X|}{1 + |X_n - X|}\right\} = 0$

1) Si $X_n \xrightarrow{P} Y$ $\quad g(X_n) \xrightarrow{P} g(Y)$

Se cumple que $\lim_{n\to\infty} E\left\{\frac{|X_n - Y|}{1 + |X_n - Y|}\right\} = 0$

$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\{\xi : |X_n - Y| > \varepsilon\}) = 0 \longrightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\{\xi : |g(X_n) - g(Y)| > \varepsilon) \overset{?}{=} 0$

Analizamos continuidad por límites

Variación chica

$g(x)$ es continua en x_0 si $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \delta > 0 \; / \; |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\{\xi : |g(X_n) - g(Y)| > \varepsilon) = 0$ se cumple si consigue $\longrightarrow \exists \delta$

Sabemos que $|g(X_n) - g(Y)| < \delta$ solo si $\overbrace{|X_n - Y| < \varepsilon}$; δ, ε arbitrariamente chicos.

Se puede plantear que: $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\{\delta : |g(X_n) - g(Y)| < \delta\}) = 0$ ya que $X_n \xrightarrow{P} Y$ significa que $\exists \varepsilon \; / \; |X_n - Y| < \varepsilon$ y si g es continua $\exists \delta \; / \; |g(X_n) - g(Y)| < \delta$, $\varepsilon, \delta \simeq 0$

Más que demostrar lo que pasa es que para g continua uno implica el otro

2) Demostrar la LDGN: Si X_k iid μ_X, σ_X^2

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n\to\infty]{P} \mu_X$$

Chebyshev: X VA no negativa, $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ creciente $\wedge$ $E[f(x)] < +\infty$

$$\mathbb{P}(|X_k - \mu_X| > a\sigma_X) \leq \frac{1}{a^2}$$

$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \longrightarrow$ por prop $E(S_n) = \frac{1}{n}\sum E[X_k] = \frac{n}{n}\mu_X = \mu_X$

$$\mathrm{Var}(S_n) \underset{\text{iid}}{=} \mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}\sum X_k\right) = \frac{1}{n^2}\cdot n\cdot \mathrm{Var}(X_k) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Veamos Chebyshev, que da la cota de $\mathbb{P}$ de que te alejes de la media:

Usamos $\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{E[|X|^k]}{a^k}$ $\quad k=2$

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\mathbb{P}(|S_n - \mu| > \varepsilon_1)}_{\text{conv. (P)}} \leq \frac{\mathrm{Var}(S_n - \overset{\text{cte}}{\mu})}{a^2} \longrightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|S_n - \mu_X| \geq \varepsilon_1) \leq \frac{\sigma_X^2}{n\cdot\varepsilon_1^2} \to 0$$

$\hookrightarrow a$ $\quad \circ \frac{n}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\{\varepsilon_1 : |x_n - y| > \varepsilon_1\}) = 0 \qquad \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}(|S_n - \mu_X| \geq \varepsilon_1) = 0$$

queda demostrado

Definir S_n, $E(S_n) \wedge \mathrm{Var}(S_n)$

plantear $\mathbb{P}(|S_n - \mu| \geq \varepsilon) \wedge$ completar con Chebyshev.

3)
$$\frac{1}{\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2\right)^{1/2}} \xrightarrow[n\to\infty]{P} \frac{1}{\sigma_X} \quad ; \quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2 \xrightarrow[n\to\infty]{P} \sigma_X^2 \qquad E\left[\frac{1}{n}\sum X_k^2\right] = \frac{n}{n}E[X_k^2]$$

$$S_n = \frac{1}{n}\sum X_k^2 \qquad E[S_n] = \frac{1}{n}\cdot n\cdot E[X_k^2]\Big|_{\mu_X=0} \longrightarrow$$

Si $\mu_X = 0$ (nulo) $\quad E(S_n) = \frac{1}{n}\cdot n\cdot \mathrm{Var}(X_k) = \sigma_X^2$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|S_n - \sigma_X^2| \geq \varepsilon_1) \leq \frac{E[|S_n|^1]}{\varepsilon_1} \leq \frac{\sigma_X^2}{\varepsilon_1}$$

$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum A - \mu_A\right| \geq \varepsilon\right) = 0$ ya demostrado. Si $A = X^2$, $A(x)$ es continua $\therefore$ $\exists\, \delta \,/\, \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum A(x) - \mu_{A(x)}\right| \geq \delta\right) = 0$

$\wedge$ $A(x) = x^2$; $\mu_A(x) = E(A) = \mathrm{Var}(x) = \sigma_X^2 \to \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum x^2 - \sigma_X^2\right| \geq \delta\right) = 0$

Demostrado.

4) Aplico log y $\cos^{-1}$ a ambos lados $\wedge$ listo.

$e^{\cos^2(x)}$ es continua? Si, es composición de continuas

lo veo a ojo en la calculadora

Ejercicio 4 Convergencia

El consumo de combustible de un micro durante un viaje es una variable aleatoria de la forma:

$$C(i) = V(i)X(i), \quad \text{[litros]},$$

donde las variables $V(i)$ y $X(i)$ son independientes y se sabe que $\mathbb{E}[V(i)] = 1$ y $\mathbb{E}[V(i)^2] = 2$, y $X(i)$ tiene media μ_X y varianza σ_X^2. Considere el consumo promedio al cabo de n viajes:

$$Y(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} V(i)X(i).$$

1. Halle la distribución aproximada del consumo promedio al cabo de $n = 365$ viajes asumiendo que el consumo entre viajes es independiente.
2. Suponga ahora que los consumos entre viajes son variables descorrelacionadas, analice el valor del límite de $Y(n)$ cuando $n \to \infty$ utilizando dos modos de convergencia.

Queremos ver la convergencia en distribución de la variable.

$$Y(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} V(i)X(i) \longrightarrow A = \frac{V_iX_i}{n} \; ; \; Y = \sum_{i=1}^{n} A_i$$ Cambio de variable

TCL: Sea X_n secuencia de VA iid $\quad Z_n = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu_x}{\sqrt{n}\,\sigma_x} \sim N(0,1)$

$E[X_n] = \mu \;\wedge\; V(X_n) = \sigma^2 < \infty$

Buscamos $E[A] \overset{\text{indep}}{=} \dfrac{E[X]E[V]}{n} = \dfrac{\mu_x}{n}$

$Var(A) = E\left[\dfrac{X^2V^2}{n^2}\right] - \dfrac{Var(X)\,Var(V)}{n^2} = \dfrac{2\sigma^2}{n^2} \; ; \; \sqrt{Var(XV)} = \dfrac{\sqrt{2}\sigma_x}{n}$

$$Z_n = \frac{\sum A - n\mu_A}{\sqrt{n}\,\sqrt{Var(A)}} = \frac{\sum A - \mu_x}{\frac{\sqrt{n}}{n}\sqrt{2}\sigma_x} \rightarrow \sum A = Y = Z_n\frac{\sqrt{2}\sigma_x}{\sqrt{n}} + \mu_x$$

$Y = Ax + b$

$$Y \sim N\left(\mu_x, \frac{2\sigma_x^2}{n}\right)$$

Para $n = 365$, supongamos que es suficiente para que $Y \xrightarrow{P} N\left(\mu_x, \dfrac{2\sigma_x^2}{365}\right)$

2) Veamos las convergencias en media cuadrática

$$\lim_{n\to\infty} E[|X_n - X|^2] = 0 \leftrightarrow X_n \xrightarrow{m.s.} X$$

quiero ver que Y converja a su media en el infinito.

$E[Y] = \mu_x$

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} V_iX_i - \mu_x\right|\right] \leq \lim_{n\to\infty}\left|\left|\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[V]E[X]}_{\text{son iid}}\right| - |\mu_x|\right| = \lim_{n\to\infty}\big||\mu_x| - |\mu_x|\big| \overset{\checkmark}{=} 0$$

$$\boxed{Y \xrightarrow{m.s.} \mu_x}$$

Por LDGN sale lo mismo: Y tq $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum XV \xrightarrow{a.s.} E[XV] = \mu_x$

Entonces las 3 convergencias son en distribución, m.s. y a.s.

Sea $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Definimos el VeA

$$\mathbf{X} = \overset{2\times 1}{\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} Z \\ 2Z+1 \end{bmatrix}.$$

Calcular la pdf conjunta $f_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{x})$.

$x_1 = Z$ $\quad x_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$

$x_2 = 2Z+1$ $\quad x_2 \sim \mathcal{N}(0,4) \longrightarrow C_{\vec{x}} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \wedge \mu_x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow E[x_1] = 0$

$E(x_2) = 1$

$Var(x_1) = 1 \quad Var(x_2) = 4$

$cov(x_1, x_2) = Cov(z, 2z+1) = E[z(2z+1)] = E[2z^2+z) = 2Var(z) = 2$

la $f_{\vec{x}}(x)$ la armo como $\dfrac{1}{2\pi\sqrt{\det C_x}} e^{-\frac{1}{2}(x\ y)C_x^{-1}\binom{x}{y}}$

Sean $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ y $B \sim \text{Ber}(1/2)$, independientes entre sí. Definimos

$$Y = (2B-1)X.$$

Determinar si X e Y son conjuntamente gaussianas o no.

nueva VA:

$$K = 2B-1 \quad f_K = \mathbb{P}(K=k) = \mathbb{P}\left(B = \frac{k+1}{2}\right)$$

$$f_B(b) = \delta(b)\tfrac{1}{2} + \delta(b-1)\tfrac{1}{2} \xrightarrow[f_b\left(\frac{k+1}{2}\right)]{} f_K(k) = \tfrac{1}{2}\delta(k+1) + \tfrac{1}{2}\delta(k-1)$$

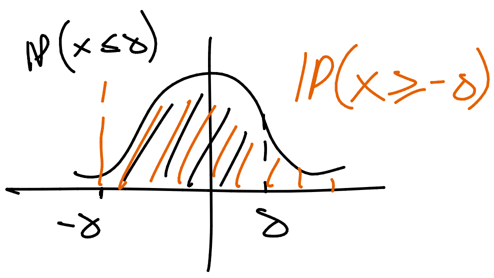
Entonces

$$f_Y = f_X f_K = \left(\tfrac{1}{2}\delta(k+1) + \tfrac{1}{2}\delta(k-1)\right) f_X(x)$$

condiciono a B

Sino $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \le y) = \mathbb{P}((2B-1)X \le y) = \mathbb{P}(B=0)\,\mathbb{P}(-X \le y) + \mathbb{P}(B=1)\,\mathbb{P}(X \le y)$

$$= \tfrac{1}{2}\mathbb{P}(X \le y) + \tfrac{1}{2}\mathbb{P}(X \ge -y) = \underline{\mathbb{P}(X \le y)}$$



las P son iguales xque la Gauss es simétrico $\underline{(\mu_X = 0)}$

$$X + Y \overset{?}{\sim} \mathcal{N}$$

$$W = X+Y = 2BX \longrightarrow \mathbb{P}(2BX \le w) = \underbrace{\overbrace{\tfrac{1}{2}\mathbb{P}\left(X \le \tfrac{w}{2}\right)}^{\mathbb{P}(B=1)\,\mathbb{P}(2BX \le w \mid B=1)}}_{\text{Es gaussiana}} + \underbrace{\overbrace{\tfrac{1}{2}\mathbb{P}(0 \le w)}^{\mathbb{P}(B=0)\,\mathbb{P}(2BX \le w \mid B=0)}}_{\text{hace que no sea normal.}}$$

Un transmisor de radio envía una señal $s > 0$ que es recibida en un receptor utilizando tres caminos. Las señales que llegan al receptor por cada camino son:

$$X_1 = s + N_1 \qquad X_2 = s + N_2 \qquad X_3 = s + N_3$$

donde N_1, N_2, N_3 son variables aleatorias gaussianas independientes con media cero y varianza unitaria.

1. Hallar la pdf conjunta de $\mathbf{X} = [X_1, X_2, X_3]^t$
2. Determine si las componentes de $\mathbf{X}$ son variables aleatorias independientes.
3. Hallar la probabilidad de que el mínimo de las tres señales sea positivo.
4. Hallar la probabilidad de que la mayoría de las señales sean positivas.

Si $s>0$ cte igual para x_1, x_2 y x_3 mueve la media.

Como $x_1, x_2, x_3 \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ el vector $\vec{x} = [x_1\ x_2\ x_3]^t$ va a ser gaussiano

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} s \rightarrow x_1, x_2, x_3 \sim \mathcal{N}(s, 1)$$

ya que si $Y = X + s$

$> E[Y] = \overset{0}{E[X]} + s = s \quad \mu_Y$

$> Var(Y) = E[(Y - E(Y))^2] =$

$= E[(x + s - s)^2] = Var(x) = 1 \quad \sigma^2_Y$

$\therefore \underline{Y \sim \mathcal{N}(s, 1)}$

La PDF de $\vec{x}$ va a ser:

$$C_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow Det = 1$$

las covarianzas cruzadas son 0 porque son indep.

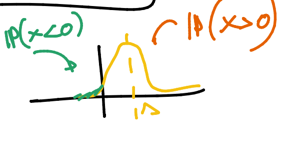
$$\mu_{\vec{x}} = \begin{bmatrix} \mu_{x_1} \\ \mu_{x_2} \\ \mu_{x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ s \\ s \end{bmatrix}$$

$$f_{\vec{x}}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{1}}\, e^{-\frac{1}{2}\underset{1\times 3}{[x_1 - s\ \ x_2 - s\ \ x_3 - s]} \underset{3\times 3}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{3\times 1}{\begin{bmatrix} x_1 - s \\ x_2 - s \\ x_3 - s \end{bmatrix}}} \rightarrow 1\times 1 \checkmark$$

$x_1, x_2, x_3 \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(s, 1)$

3. $P(\min(\vec{x}) > 0) = P(x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0) \overset{indep}{=} P(x_1>0)P(x_2>0)P(x_3>0) = P(x_1>0)^3 = (1 - P(x_1 \leq 0))^3$

$$= (1 - F_{x_1}(0))^3 = \Big[1 - \underbrace{\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_1 - s)^2}{2}}}\Big]$$



Sean X e Y dos V.A conjuntamente gaussianas de media nula.
Demuestre que

$$\mathbb{E}[X^2Y^2] = \mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2] + 2\mathbb{E}^2[XY]$$

Ayuda: Utilice el resultado de gaussiana condicionada por gaussiana y la expresión de los momentos de una gaussiana.

Que dos variables aleatorias sean conjuntamente gaussianas implica que su distribución conjunta es una distribución normal multivariante. Esto significa que cualquier combinación lineal de estas variables también será normalmente distribuida. Aquí hay algunos puntos clave sobre este concepto:

Distribución Conjunta: La función de densidad conjunta de dos variables aleatorias XX e YY tiene la forma de una campana 2D, caracterizada por su media vectorial y su matriz de covarianza.

Dependencia Lineal: Si XX e YY son conjuntamente gaussianas, la correlación entre ellas captura completamente la dependencia lineal. Esto significa que si conoces la correlación, puedes entender cómo se relacionan estas variables.

Marginales Gaussianas: Cada variable, por sí sola, seguirá una distribución normal. Esto es cierto incluso si no se tiene información sobre la otra variable.

Propiedades de Simetría: La distribución conjunta es simétrica respecto a su media, lo que significa que hay un equilibrio en torno a esta.

Proporciones y Transformaciones: Las transformaciones lineales de variables gaussianas también resultan en variables gaussianas.

En resumen, ser conjuntamente gaussianas proporciona una estructura matemática rica que permite realizar inferencias sobre sus comportamientos y relaciones de manera muy efectiva.

Prop de Esp. cond

$$E[X^2Y^2] = E[E[X^2Y^2|Y]] = E[Y^2\,E[X^2|Y]]$$

Prop de $E[g(x)h(y)|x] = g(x)\,E[h(y)|x]$

$$E[X^2|Y] \longrightarrow Var(\alpha) = E[\alpha^2] - E[\alpha]^2$$

$\alpha = X|Y$

Cambio de variable

$$Var(X|Y) = E[X^2|Y] - E[X|Y]^2$$

Resultado de gauss condicionado a gauss

$$E[X^2|Y] = Var(X|Y) + E[X|Y]^2 =$$

$$E[X|Y] = \cancel{\mu_x}_{0} + \frac{C_{xy}}{\sigma_y^2}(y - \cancel{\mu_y}_{0}) = \frac{C_{xy}}{\sigma_y^2}\,y$$

$$cov_{x,x|y} = \underbrace{C_{x_1}}_{\sigma_x^2} - \frac{C_{x_1x_2}}{\underbrace{C_{x_2}}_{\sigma_y^2}} C_{x_2x_1}$$

$$E[X^2|Y] = \sigma_x^2 - \frac{C_{xy}^2}{\sigma_y^2} + \frac{C_{xy}^2}{\sigma_y^4}\,y^2$$

Con lo $\phi_y \longrightarrow \sigma_y^4 = Var(y)^2 = E[y^{2\cdot 2}] = \sigma_y^4\,\frac{1}{4}\,\frac{4!}{2!} = \sigma_y^4\,\frac{2\cdot 3\cdot 4}{2\cdot 4} = 3\sigma_y^4$

ctes

$$E\left[Y^2\left(\sigma_x^2 - \frac{C_{xy}^2}{\sigma_y^2} + \frac{C_{xy}^2}{\sigma_y^4}y^2\right)\right] = \sigma_x^2\,E[Y^2] - \frac{\cancel{E[Y^2]}}{\cancel{\sigma_y^2}}_{1}\,C_{xy}^2 + \frac{C_{xy}^2}{\sigma_y^4}\,E[Y^4]$$

la covarianza

$$E[x^2 y^2) = E(x)\, E(y) - \mathrm{Cov}(x,y)^2 + 3\,\frac{\mathrm{Cov}(x,y)^2\, \cancel{\sigma_y^4}}{\cancel{\sigma_y^4}}$$

$$= E(x)\, E(y) + 2\,\mathrm{Cov}(x,y)^2$$

$$2\,\mathrm{Cov}(x,y)^2 = 2\,E[x y)^2 \qquad \therefore \quad E[x^2 y^2) = E[x)\, E[y) + 2\,E[x y]^2$$

$$\mu_x = \mu_y = 0$$

Sea un vector aleatorio $\boldsymbol{X} = [X_1\ X_2\ \dots\ X_n]^T$, y una transformación lineal $\boldsymbol{Y} = A\,\boldsymbol{X} + \boldsymbol{b}$, donde $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ y $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, Demostrar que para el vector aleatorio resultante $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^m$ se cumple:

1. $E[\boldsymbol{Y}] = A\,E[\boldsymbol{X}] + \boldsymbol{b}$
2. $C_Y = A\,C_X\,A^T$

$$E[Y) = E[AX+b) = \underbrace{E[AX]}_{\text{Propc } E[X)} + b = A\,E[X] + b$$

$$C_Y = E\left[\left(\vec{Y} - E[\vec{Y}]\right)\left(\vec{Y} - E[\vec{Y}]\right)^t\right)$$

$$C_Y = E\left[\left(A\vec{X} + b - AE[X] - b\right)\left(A\vec{X} + b - AE(X) - b\right)^t\right]$$

$$C_Y = E\left[A\left(\vec{X} - E[X]\right)\left(\vec{X} - E(X)\right)^t A^t\right] = \underline{A\,C_X\,A^t}$$

Sea un vector aleatorio $\boldsymbol{X} = [X_1\ X_2\ \dots\ X_n]^T$, de media $\boldsymbol{\mu}_\mathbf{X}$ y covarianza $C_X = P_X \Lambda_X P_X^T$. Para una transformación afín $\boldsymbol{Y} = A\,\boldsymbol{X} + \boldsymbol{b}$, donde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, demostrar que si $A = P_X^T$ y $\mathbf{b} = -A\boldsymbol{\mu}_\mathbf{X}$, el vector aleatorio resultante $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^m$ cumple:

1. $\boldsymbol{\mu}_\mathbf{Y} = \mathbf{0}$
2. $C_Y = \Lambda_X$ (matriz diagonal)

Usando los resultados obtenidos antes

Si $A = P_x^T \wedge b = -A\mu_x$

$E[y] = A E[x] + b = P_x^T \mu_x - P_x^T \mu_x = 0$ ✓

$C_y = A C_x A^t = P_x^t C_x P_x = P_x^t P_x \Lambda_x P_x^t P_x \overset{\checkmark}{=} \Lambda_x$

Se quiere utilizar una transformación lineal **Y** = A **Z** + **b** que permita convertir un vector aleatorio normal estándar con parámetros C_Z y $\boldsymbol{\mu}_Z$ en otro vector con parámetros C_Y = [0.7 0.8 ; 0.8 1.75] y $\boldsymbol{\mu}_Y$= [0.8 1.0]^T.

1. Genere un vector normal estándar de dos componentes **Z** = $[Z_1\ Z_2]^T$ de 2000 realizaciones con media nula $\boldsymbol{\mu}_Z = 0$ y covarianza $C_Z = I$ (identidad). Haga un gráfico de dispersión del vector **Z** (Z_2 vs Z_1) superpuesta a las curvas de nivel de la densidad conjunta $f_Z(\mathbf{z})$. Grafique también los histogramas de cada componente.

2. Suponiendo que la diagonalización de la covarianza de Y es $C_Y = P\Lambda P^T$, utilice la transformación afín para obtener el vector aleatorio **Y** a partir de las muestras generadas de **Z**. Haga un gráfico de dispersión del vector **Y** (Y_2 vs Y_1) superpuesta a las curvas de nivel de la densidad conjunta $f_Y(\mathbf{y})$. Grafique también los histogramas de cada componente.

   Sugerencia: límites $-4 < Z_1 < 4$; $-4 < Z_2 < 4$; $-4 < Y_1 < 4$; $-4 < Y_2 < 6$

$Y = AZ + b$ Nos piden pasar de una $Z \sim N(0,1)$ a la Y. $C_y = P_y \Lambda_y P_y^t$

Es básicamente coloreo. La transformación podría ser: $b = \mu_y$ $A = P_y \Lambda_y^{1/2}$

Planteamos $C_y = P_y \Lambda P_y^t = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 517{,}8 \cdot 10^{-3} & 0 \\ 0 & 1{,}47712 \end{vmatrix}^2 \begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix}$

$a = -0{,}879959$
$b = 0{,}475049$

$\mu_y = \mu_z + b \Big|_{\mu_z = 0} = b = \mu_y$

$C_y = A C_z A^t = P_y \Lambda_y P_y^t = A A^t$

$P_y \Lambda_y^{1/2} \Lambda_y^{1/2} P_y^t = A A^t$

Si $A = P_y \Lambda_y^{1/2}$ $\underline{A A^t = C_y}$

$A^t = \Lambda_y^{1/2} P_y^t$

$\therefore A = P_y \Lambda_y^{1/2} = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 517{,}8 \cdot 10^{-3} & 0 \\ 0 & 1{,}47712 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}455693 & -0{,}701304 \\ 0{,}245981 & -1{,}2998 \end{bmatrix}$

$b = -\mu_y = \begin{vmatrix} -0{,}8 \\ -1 \end{vmatrix}$

Genere un vector aleatorio normal de media $\boldsymbol{\mu}_X$ y covarianza C_X (de acuerdo a las definiciones abajo indicadas). Luego aplique una transformación para generar un nuevo vector **Y** descorrelacionado y de media nula, con N=2000 muestras. Haga los gráficos de dispersión de ambos vectores (**X** e **Y**) superpuestos a las curvas de nivel de la densidad $f_Y(\mathbf{y})$. También grafique los histogramas de cada componente.

$$C_X = \begin{bmatrix} 0.70 & 0.90 \\ 0.90 & 1.75 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\mu}_X = \begin{bmatrix} 0.80 \\ 1.0 \end{bmatrix}$$

Sugerencia: límites $-4 < X_1 < 4$; $-4 < X_2 < 4$; $-4 < Y_1 < 4$; $-4 < Y_2 < 4$

Coloreo: $X = AX + b \xrightarrow[Z \sim N(0,1)]{} X = P_X \Lambda_X^{1/2} Z + \mu_X$

Blanqueo: $Y = \Lambda_X^{-1/2} P_X^t (X - \mu_X)$

1. Para el VeA **X** de la actividad anterior, genere un vector aleatorio normal estándar **W** ~ N(0,I) con N=2000 muestras, aplicando la transformación **W** = A**X**+**b**, eligiendo A y **b** adecuados.

2. Estime la media y la matriz de covarianza de **W** y verifique si se aproximan a lo esperado (~ N(0,I)).

3. Haga los gráficos de dispersión del VeA **W** superpuesto a las curvas de nivel teóricas esperadas. También grafique los histogramas de ambas componentes de **W**.

Sugerencia: límites $-4 < X_1 < 6$; $-4 < X_2 < 6$; $-4 < W_1 < 4$; $-4 < W_2 < 4$

1. Genere un VeA **X** ~ $N(\boldsymbol{\mu}_X, C_X)$ donde C_X = [0.7 0.8 ; 0.8 1.75] y $\boldsymbol{\mu}_X$= $[0.8\ \ 1.0]^T$.

2. Asumiendo que se dispone de un conjunto de N=2000 muestras del vector **X**, encuentre una transformación afín **Y** = A**X**+**b** tal que con las muestras de **X** se pueda generar un vector **Y** ~ $N(\boldsymbol{\mu}_Y, C_Y)$ con C_Y = [0.7 -0.6; -0.6 1.75] y $\boldsymbol{\mu}_Y$= $[-0.5\ \ 1.5]^T$.

3. Haga los gráficos de dispersión del VeA **X** e **Y** superpuestos a las curvas de nivel teóricas esperadas. También grafique los histogramas de ambas componentes para cada vector.

Sugerencia: límites $-4 < X_1 < 6$; $-4 < X_2 < 6$; $-4 < Y_1 < 4$; $-4 < Y_2 < 6$

$$X \xrightarrow[\text{Blanqueo}]{} Z \xrightarrow{\text{Coloreo}} Y \qquad Y = P_Y \Lambda_Y^{1/2} Z + \mu_Y$$

$$Z = \Lambda_X^{-1/2} P_X^t (X - \mu_X)$$

los juntamos

$$Y = P_Y \Lambda_Y^{1/2} \left(\Lambda_X^{-1/2} P_X^t (X - \mu_X)\right) + \mu_Y \qquad \text{Genero } Y \text{ desde } X$$

Ejercicio 1. *Sea U_i, $i = 1, \ldots, n$ variables aleatoria i.i.d, distribuidas de acuerdo a la distribución Gaussiana $\mathcal{N}(\mu, 1)$. A partir de estas variables se construyen las siguientes variables*

$$\begin{cases} X_1 = U_1 \\ X_2 = U_1 + U_2 \\ \vdots \\ X_n = U_1 + \cdots + U_n. \end{cases}$$

1. *Indique si las X_i son conjuntamente Gaussianas y caracterice la función de densidad de probabilidad conjunta.*
2. *Considere la siguiente variable aleatoria,*

$$Z = \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

   a) *Indique si Z es Gaussiana y obtenga su función de densidad de probabilidad;*
   b) *Justifique la utilización de Z como un estimador de μ cuando $n \to \infty$.*

Para que sean cojuntamente gaussianas debemos ver que $\forall$ comb. lineal de X_1 a X_n sea gaussiana, que se da si X_1, X_n son gaussianas

que es decir $\underbrace{\sum_{i=1}^{n} U_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)}$

$$E[X_n] = E\left[\sum_{i=1}^{n} U_i\right] \underset{\text{iid}}{=} \sum_{i=1}^{n} E[U_i] = n \cdot \mu \qquad \underbrace{X_n \sim \mathcal{N}(n\mu, n)}$$

$$Var[X_n] = Var\left(\sum U_i\right) \underset{\text{iid}}{=} \sum_{i=1}^{n} Var(U_i) = 1 \cdot n = n \qquad \begin{array}{l} X_1 \sim \mathcal{N}(\mu, 1) \\ X_2 \sim \mathcal{N}(2\mu, 2) \end{array}$$

$\hookrightarrow Cov(U_j, U_i) = 0 \ \forall j, i \ \mathbb{N} < n$ todos gaussianas

Veamos el vector $\vec{X}$. Es función de $\vec{U} = [U_1 \cdots U_n]^t$

Si

$$\begin{aligned} X_1 &= U_1 \\ X_2 &= U_1 + U_2 \\ X_n &= \sum_{i=1}^{n} U_i \end{aligned} \longrightarrow \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & 1 & \cdots & \cdot & 1 \end{bmatrix}}_{A}{}_{n} \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix}$$

$\hookrightarrow$ Como es del tipo $\vec{X} = A\vec{U} + \vec{0}$ todos unos abajo de la diagonal

$$\vec{X} \sim \mathcal{N}(\mu_X, C_X) \longrightarrow \mu_X = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ n \end{bmatrix} \mu \qquad C_X = A C_U A^t = A A^t$$

$\hookrightarrow I$ porque son iid de $\underline{\sigma^2 = 1}$

2. $Z = \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} x_i$ Como las $x_i \sim N(i\mu, i)$ tenemos combinación lineal de V.A gauss

$\therefore$ Z va a ser gaussiana. $\frac{2}{n^2}$ es cte.

$$E[Z] = \frac{2}{n^2} E\left[\sum x_i\right] = \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} E[x_i] = \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i\mu = \frac{\cancel{2}}{n^{\cancel{2}}}\mu \frac{\cancel{n}(n+1)}{\cancel{2}} = \mu + \frac{\mu}{n}$$

$$Var(Z) = Var\left(\frac{2}{n^2}\sum x_n\right) = \frac{4}{n^4} Var\left[\sum x_n\right] = \frac{4}{n^4} E\left[\left(\sum^{n}(x_i - i\mu)\right)^2\right]$$

Hay que hacer aparecer U

+ fácil si volvemos a las U_i

$$Z = \frac{2}{n^2}\sum x_i = \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\left(nU_1 + (n-1)U_2 \ldots 1 \cdot U_n\right) = \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\left(i\, U_{n+1-i}\right)$$

$$E: \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i \cdot \overbrace{E[U_{n+1-i}]}^{\mu} = \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \mu + \frac{\mu}{n}$$

$$Var: \quad \frac{4}{n^4} Var\left(\sum i\, U_{n+1-i}\right) \underset{iid}{=} \frac{4}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i^2 \overbrace{Var(U_{n+1-i})}^{1} = \frac{4}{n^4}\sum_{i=1}^{n} n^2 = \frac{2(n+1)(2n+1)}{3n^3}$$

Estimador de $\mu \rightarrow \lim_{n\to\infty} E[Z] = \mu + \cancel{\frac{\mu}{n}} = \mu$, estima bien

$\frac{\mu}{n} \to 0$

$$\lim_{n\to\infty} V(Z) = \frac{2(n+1)(2n+1)}{3n^3} \underset{n\to\infty}{\approx} \frac{n^2}{n^3} \approx \frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

Es un buen estimador

Ejercicio 6 Secuencia Gaussiana

Considere una sucesión de variables aleatorias $\{U_1, U_2, U_3, ...\}$ independientes uniformes en $(0,1)$. A continuación se arma la siguiente secuencia:

$$\begin{cases} X_{2j} &= \sqrt{-\ln(U_{2j})}\cos(2\pi U_{2j-1}) \\ X_{2j-1} &= \sqrt{-\ln(U_{2j})}\sin(2\pi U_{2j-1}) \end{cases} \quad j = 1, 2, 3, ...$$

1. Halle la densidad conjunta del vector $[X_{2j-1}, X_{2j}]$, para $j \in N$.
   Sugerencia: considere la transformación Box-Muller.
2. Utilizando las secuencia X se arma una nueva secuencia:

$$\begin{cases} Y_{2j} = X_{2j} + 0{,}5X_{2j-1} \\ Y_{2j-1} = 0{,}5X_{2j} + X_{2j-1} \end{cases} \qquad j = 1, 2, 3, ...$$

   Halle la densidad conjunta del vector $[Y_1, \ldots, Y_{2j}]$ para $j \in \mathbb{N}$.

1) Box-Müller   Si $\vec{X}$ es transformación de $\vec{U}$; $\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ y $\vec{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$

$$f_{\vec{X}}(\vec{x}) = \left.\frac{f_{\vec{U}}(\vec{u})}{|\det J(\vec{g})|}\right|_{\vec{g}^{-1}(\vec{u})}$$

$$\vec{g}(x_1, x_2) = \left((-\ln(U_1))^{1/2}\cos(2\pi U_2) ; (-\ln(U_1))^{1/2}\,\text{sen}(2\pi U_2) \right)$$

$$J(\vec{g}) = \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{-\ln(U_1)}\cos(2\pi U_2) \\ \sqrt{-\ln(U_1)}\,\text{sen}(2\pi U_2) \end{pmatrix}}_{2\times 1} \begin{pmatrix} \partial/\partial U_1 & \partial/\partial U_2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{-\cos(2\pi U_1)}{2\sqrt{-\ln(U_1)}\,U_1} & -\sqrt{-\ln(U_1)}\,\text{sen}(2\pi U_2)\,2\pi \\ \frac{-\text{sen}(2\pi U_1)}{2\sqrt{-\ln(U_1)}\,U_1} & \sqrt{-\ln(U_1)}\cos(2\pi U_2)\,2\pi \end{vmatrix}$$

El determinante es $\left(\frac{-\cos(2\pi U_1)}{2\cancel{\sqrt{-\ln(U_1)}}\,U_1}\right)\left(\cancel{\sqrt{-\ln(U_1)}}\cos(2\pi U_2)\,2\pi\right) - \left(\frac{\cancel{-}\,\text{sen}(2\pi U_1)}{2\cancel{\sqrt{-\ln(U_1)}}\,U_1}\right)\left(\cancel{-\sqrt{-\ln(U_1)}}\,\text{sen}(2\pi U_2)\,2\pi\right)$

$$-\cos^2(2\pi U_1)\cdot\frac{\pi}{U_1} - \left(\text{sen}^2(2\pi U_1)\frac{\pi}{U_1}\right) \quad \frac{-\pi}{U_1}\left(\cos^2 + \text{sen}^2\right) = \frac{-\pi}{U_1} \xrightarrow{\text{abs}} \frac{\pi}{U_1}$$

Ahora buscamos $\vec{g}^{-1}$ → Si $\begin{cases} x_1 = (-\ln(U_1))^{1/2}\cos(2\pi U_2) \\ x_2 = (-\ln(U_1))^{1/2}\,\text{sen}(2\pi U_2) \end{cases}$

$$x_1^2 + x_2^2 = -2\ln(U_1)\left(\cancelto{1}{\cos^2 + \text{sen}^2}\right)$$

$$e^{-x_1^2 - x_2^2} = U_1$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{\cos(2\pi U_2)}{\text{sen}(2\pi U_2)}$$

$$\frac{x_2}{x_1} = \tan(2\pi U_2)$$

$$\frac{\arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}{2\pi} = U_2$$

$$f_{\vec{X}}(\vec{x}) = \left.\frac{f_{\vec{U}}(\vec{u})}{\frac{\pi}{U_1}}\right|_{g^{-1}} ; \quad f_{\vec{U}}(\vec{u}) \underset{U_i \text{ iid}}{=} f_{U_1}(u_1) f_{U_2}(u_2) = 1\{0<U_1<1\} 1\{0<U_2<1\}$$

$$f_{\vec{X}}(\vec{x}) = \frac{1\{0< e^{-x_1^2-x_2^2} <1\} 1\{0<\arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right)<2\pi\}}{\frac{\pi}{e^{-x_1^2-x_2^2}}} = \frac{1}{\pi} e^{-x_1^2-x_2^2} 1\{x_1 \in \mathbb{R}\} 1\{x_2 \in \mathbb{R}\}$$

Vamos a reescribir esto

$$\frac{1}{\pi} e^{-x_1^2-x_2^2} 1\{x_1 \in \mathbb{R}\} 1\{x_2 \in \mathbb{R}\} = \frac{1}{2\pi \cdot \frac{1}{2}} e^{\frac{-x_1^2-x_2^2}{e\frac{1}{2}}} 1\{x_1; x_2 \in \mathbb{R}\}$$

a esto se parece a una normal multivariada.

$$\to \frac{1}{\sqrt{2\pi \underbrace{\tfrac{1}{2}}_{\sigma_x^2}}} e^{\frac{-x_1^2}{2 \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{\sigma_x^2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{1}{2}}} e^{\frac{-x_2^2}{2 \cdot \frac{1}{2}}} 1\{x_1 \in \mathbb{R}\} 1\{x_2 \in \mathbb{R}\}$$

$\mu = 0$

Visto así es obvio que $x_1, x_2 \underset{iid}{\sim} N(0, \frac{1}{2})$

2. Podemos hacer una transformación lineal de $\vec{x}$ ya que es gaussiana.

$$\vec{y} = A\vec{x} + b = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} \vec{x} + \vec{0}$$

$\therefore$

$$\text{cov}(\vec{y}) = A C_x A^t = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} \underbrace{\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}}_{\text{cov}(x_1,x_2)=0} \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{5}{8} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{8} \end{vmatrix}$$

$$E[\vec{y}] = A \underbrace{E[\vec{x}]}_{\binom{0}{0}} + \underbrace{b}_{\binom{0}{0}} = \vec{0}$$

$$\to Y \sim N\left(\binom{0}{0}, \begin{vmatrix} \frac{5}{8} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{8} \end{vmatrix}\right)$$

Ejercicio 4

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_N$ variables aleatorias conjuntamente Gaussianas con media $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}}$ y matriz de covarianza $C_{\mathbf{X}}$.

1. Calcular la varianza de la variable aleatoria $Y = a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_NX_N$ donde a_i son coeficientes reales tales que el vector $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \ldots, a_N]^t$ tiene norma unitaria.
2. Determine la función característica de Y a partir de la función característica conjunta de las X_i.
3. Sea:

$$C_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Determine el máximo y el mínimo valor posible de la varianza de Y cuando el vector $\mathbf{a}$ recorre el círculo unitario.

$y = \vec{a}\vec{x}$

$\phi_y = E[e^{j\omega y}] = E[e^{j\omega \vec{a}^t \vec{x}}] = E[\prod_{i=1}^{N} e^{j\omega a_i x_i}]$

$(a_1 \; a_2 \; \ldots \; a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{N} a_i x_i$

con iid

$\prod_{i=1}^{N} E[e^{j\omega a_i x_i}] = \prod_{i=1}^{N} E[e^{j\omega a_i x_i}]$

Ejercicio 1. *Sea U_i, $i = 1, \ldots, n$ variables aleatoria i.i.d, distribuidas de acuerdo a la distribución Gaussiana $\mathcal{N}(\mu, 1)$. A partir de estas variables se construyen las siguientes variables*

$$\begin{cases} X_1 = U_1 \\ X_2 = U_1 + U_2 \\ \vdots \\ X_n = U_1 + \cdots + U_n. \end{cases}$$

1. *Indique si las X_i son conjuntamente Gaussianas y caracterice la función de densidad de probabilidad conjunta.*
2. *Considere la siguiente variable aleatoria,*

$$Z = \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

   a) *Indique si Z es Gaussiana y obtenga su función de densidad de probabilidad;*
   b) *Justifique la utilización de Z como un estimador de μ cuando $n \to \infty$.*

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} U_N$$

Para que los X_n sean conjuntamente gaussianas debe suceder que los X_1 a X_N sean gaussianas ya que si todas son $\mathcal{N}(\mu_x, C_x)$ $\forall$ combinación lineal va a ser gaussiana.

Podemos pensar que $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$ es combinación lineal de un vector $\vec{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_N \end{pmatrix}$

tal que si $x_n = \sum_{i=1}^{n} U_i \longrightarrow \vec{x} = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{vmatrix} = \overbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}}^{A} \begin{vmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_N \end{vmatrix} + \underbrace{\cancel{b}}_{\vec{0}}$

Tenemos que ver la distribución de $\vec{U} \rightarrow E[\vec{U}] = \begin{vmatrix} E(U_1) \\ \vdots \\ E(U_n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu \\ \vdots \\ \mu \end{vmatrix}$

$\wedge$ $C_{\vec{U}}$ es la I ya que son iid y las $Var(U_i) = 1$

Como es transformación afín: $\mu_X = A\mu_U + \underbrace{\cancel{b}}_{0} = \overbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 \cdots & 1 \end{vmatrix}}^{A} \begin{vmatrix} \mu \\ \mu \\ \mu \\ \vdots \\ \mu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu \\ 2\mu \\ \vdots \\ n\mu \end{vmatrix}$

$$C_X = A C_U A^t = A I A^t = AA^t$$

La gta será $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}^{\,n} \sqrt{C_X}} e^{-(\vec{x} - \mu_x)^t C_x^{-1} (x - \mu_x)}$

2. *Considere la siguiente variable aleatoria,*

$$Z = \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

a) *Indique si Z es Gaussiana y obtenga su función de densidad de probabilidad;*
b) *Justifique la utilización de Z como un estimador de μ cuando n → ∞.*

la Σ es multiplicar por el vector $\mathbb{1}^t$

$$Z = \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{2}{n^2}\cdot \underset{1\times n}{(1\ 1\ 1 \dots 1)}\vec{X} = \frac{2}{n^2}\underset{1\times n}{(1 \dots 1)}A\vec{U}$$

$$\underset{1\times n}{(1\ 1\ \dots\ 1)}\underset{n\times n}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}}\begin{vmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_N \end{vmatrix} = \underset{1\times n}{(1\ 1 \dots 1)}\underset{n\times n}{\begin{vmatrix} U_1 & 0 & \dots & 0 \\ U_1 & U_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ U_1 & U_2 & \dots & U_n \end{vmatrix}} = nU_1 + (n-1)U_2$$

$$X_i = \sum_{k=0}^{i} U_i \longrightarrow \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i} U_i = nU_i + (n-1)U_2 + (n-2)U_3 \dots + U_n$$

la 1ª fila de $A\vec{U}$ tiene nU_1, la 2do $(n-1)U_2$ y así sucesiv.

$$Z = \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i\,U_{n-i+1}$$ Es combinación lineal de Gaussianas iid. ∴ Z es Gaussiana.

$$E[Z] = \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i\,\underbrace{E[U_{n-i+1}]}_{\mu} = \frac{2}{n^2}\mu\sum_{i=1}^{n} i = \mu\frac{(n+1)}{n}$$

iid ∧ prop. E[X]

$$\mathrm{Var}(Z) = \frac{4}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i^2\,\underbrace{\mathrm{Var}(U)}_{1} = \frac{4}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{2(n+1)(2n+1)}{3n^3}$$

props iid

$\mathrm{Cov}(U_i, U_j) = 0 \ \forall i \neq j$

$$\longrightarrow Z \sim \mathcal{N}\Big(\underbrace{\frac{\mu(n+1)}{n}}_{\mu_Z}, \underbrace{\frac{2(n+1)(2n+1)}{3n^3}}_{\sigma_Z^2}\Big)$$

la PDF será $$\frac{1}{\sqrt{2\pi\,\sigma_Z^2}}\,e^{-\frac{(z-\mu_Z)^2}{2\sigma_Z^2}}$$

¿Que tan buen estimador es?

$$\lim_{n\to\infty}\mu_Z = \lim_{n\to\infty}\mu\frac{(n+1)}{n} \approx \mu$$

también podes plantear que

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(|Z-\mu_Z| < \varepsilon_1) \leq \frac{E|(Z-\mu_Z)|^2}{\varepsilon_1^2} \approx \frac{n^2}{n^3}\frac{1}{\varepsilon_1^2}$$

Var(Z)

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_Z^2 \longrightarrow 0$$ $\boxed{\text{Es buen Estimador}}$

Con $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^3} \to 0$ ∴ $\underbrace{\mathbb{P}(|Z-\mu_Z| < \varepsilon_1) = 0}$

Z converge en p. a su media