

Ejercicio: Señal del telégrafo

Sea $N(t)$ un proceso Poisson de media $\mathbb{E}[N(t)] = \lambda t$. Se construye un nuevo proceso $X(t)$ tal que

- $X(t) \in \{-1, +1\}$ para todo t
- $\mathbb{P}[X(0) = +1] = \mathbb{P}[X(0) = -1] = \frac{1}{2}$
- $X(t)$ cambia de polaridad si $N(t)$ se incrementa en 1. Es decir, $X(t)$ cambia de polaridad cuando ocurre un evento Poisson

Hallar $\mathbb{P}[X(t) = +1]$ y $\mathbb{P}[X(t) = -1]$.

Ayuda: Recuerde que

$$\mathbb{P}[X(t) = a] =$$

$$\mathbb{P}[X(t) = a | X(0) = +1] \mathbb{P}[X(0) = +1] + \mathbb{P}[X(t) = a | X(0) = -1] \mathbb{P}[X(0) = -1]$$

Ahora podemos calcular la probabilidad de $X(t) = 1$

Buscamos la probabilidad de que $N(t)$ sea par e impar

$$\mathbb{P}(X(t) = 1) = \mathbb{P}(X(t) = 1 | X(0) = 1) + \mathbb{P}(X(t) = 1 | X(0) = -1) = \underbrace{\frac{1}{2} \mathbb{P}(X(t) = 1)}_{\text{que } N(t) \text{ sea par}} + \underbrace{\frac{1}{2} \mathbb{P}(X(t) = -1)}_{\text{que } N(t) \text{ sea impar}} = \frac{\mathbb{P}(N(t) \text{ par}) + \mathbb{P}(N(t) \text{ impar})}{2}$$

$X(t)$ es 1 cuando

$$\left. \begin{array}{l} X(0) = 1 \wedge N(t) \text{ par} \\ X(0) = -1 \wedge N(t) \text{ impar} \end{array} \right\}$$

Si tener un conjunto de números $\in \mathbb{N}$ (infinito)
 ~ se separa en pares e impares se obtienen 2 particiones iguales en tamaño.

$$\text{Planteo } \mathbb{P}(N(t) \in \mathbb{N}) = 1 ; \quad \mathbb{P}(N(t) \text{ par}) = \mathbb{P}(\text{IN par}) \cdot \mathbb{P}(N(t) \in \mathbb{N}) = \frac{\#\text{pares en } \mathbb{N}}{\#\mathbb{N}} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

Entonces por geometría vemos que $\mathbb{P}(N(t) \text{ par}) = \frac{1}{2} \wedge \mathbb{P}(N(t) \text{ impar}) = \frac{1}{2}$ (conjugadas)

$$\therefore \mathbb{P}(X(t) = 1) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{2} = \boxed{\frac{1}{2}} \quad \rightarrow \quad \mathbb{P}(X(t) = -1) = 1 - \mathbb{P}(X(t) \neq -1) = 1 - \mathbb{P}(X(t) = 1) = \boxed{\frac{1}{2}}$$

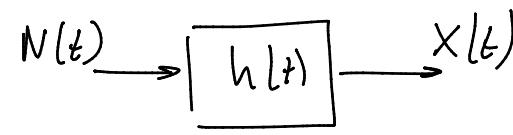
$$f_X(x) = \frac{1}{2} \delta(x-1) + \frac{1}{2} \delta(x+1)$$

$$E(X|t) = 1 \cdot \mathbb{P}(X(t) = 1) + (-1) \mathbb{P}(X(t) = -1) = 0$$

Ejercicio: Shot Noise

Vimos cómo construir el ruido de disparo a partir de un tren de impulsos con ocurrencias aleatorias. Sea $h(t)$ la respuesta impulsiva de un sistema LTI causal, luego

$$X(t) = \sum_k h(t - T_k).$$



Calcular $\mathbb{E}[X(t)]$. Poisson & alternativa $\rightarrow N(t) = \sum_{t=0}^k \mu(t - T_k) ; T_k \sim U(0, T)$

Ayuda: Puede ser útil incorporar el proceso Poisson implícito en $X(t)$. Para ello, recuerde que $\mathbb{E}[X(t)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X(t)|N(t)]]$.

La probabilidad de que llegue un $s(t)$ al sistema está dada por una V.A. Poisson cuya media no es la tasa de arribos T_k^{-1} . La media del proceso de salida del syst. LTI es la media de entrada $\cdot H(0)$.

$$H(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\} = \mathcal{F}\{\sum h(t - T_k)\} \quad \therefore \text{la media a lo salido es } \mathcal{F}\{h(t)\}(0) \cdot \mu_N$$

Ejercicio

Sea H un sistema promediador en tiempo continuo que es alimentado con ruido blanco gaussiano W cuya PSD es $S_W(\omega) = N_0/2$ W/(rad/s):

$$W(t) \xrightarrow{\frac{1}{T} \int_{t-T}^t} Y(t)$$

Hallar $S_Y(\omega)$ y $R_Y(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_Y(\omega) d\omega$.

$N_1(t)$ y $N_2(t)$ son dos procesos de Poisson independientes entre sí con tasas λ_1 y λ_2 respectivamente. Justifique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas

- $N_1(t) + N_2(t)$ es Poisson \rightarrow Verdadero $E[N_1 + N_2] = \mu_1 + \mu_2 = \mu_3$
- $N_1(t) - N_2(t)$ es Poisson \rightarrow Falso
- La tasa de $N_1(t) + N_2(t)$ es $\lambda_1 + \lambda_2$. \swarrow
- La media de $N_1(t) - N_2(t)$ es proporcional a $\lambda_1 - \lambda_2$. Verdadero

5. Sea X un proceso estocástico gaussiano en tiempo continuo con media nula y autocorrelación:

$$C_X = e^{-|t_1 - t_2|} \quad \longleftrightarrow \quad R_X(\tau) = e^{-|\tau|}. \quad \rightarrow \quad \text{Graph of } P(x)$$

Considere la señal modulada en frecuencia:

$$Y(t) = \sin(X(t)t)$$

Halle la media y la autocorrelación del proceso Y y determine si es ESA.

$$E[\gamma] = E[\sin(x \cdot t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x \cdot t) \cdot f_x(x) dx$$

$$f_x(x) \text{ is } \text{fase} \rightarrow x \text{ gausiana } \mu_x = 0 \wedge R_x(0) = C_x(t, t) + \mu_x^2 = \text{Var}(x) = 1$$

$$x \sim \mathcal{W}(0, 1) \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x \cdot t) f_x(x) dx$$

Este es lento, vamos por otro lado.

$$\gamma = \sin(x \cdot t) = \frac{e^{jx(t) \cdot t} - e^{-jx(t) \cdot t}}{2j} \xrightarrow{E[\cdot]} \frac{1}{2j} E[e^{jxt}] - \frac{1}{2j} E[e^{-jxt}]$$

$$\frac{1}{2j} E[e^{jxt}] - \frac{1}{2j} E[e^{-jxt}] = \frac{1}{2j} (\phi_x(t) - \phi_x(-t)) = \frac{1}{2j} \underbrace{\left[e^{-\frac{t^2}{2}} - e^{-\frac{-t^2}{2}} \right]}_{\text{cancelo}} = 0$$

$$\text{Autocorrelación } R_\gamma = E[\gamma(t)\gamma(t+\tau)] = E[\sin(x(t)t) \sin(x(t+\tau)(t+\tau))] =$$

guía "Ejs 6"

1) $g(t)$ es una ventana de 0 a T

$$\begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \rightarrow g(t) = u(t) - u(t-T)$$

A binaria: $P(A=1)=p$; $P(A=-1)=1-p$ $\therefore f_A(a) = p S(a-1) + (1-p) S(a+1)$

$$x(t) = A g(t) = A(u(t) - u(t-T))$$

$$E[A] = \sum_{a=-1}^1 a f_A(a) = -1(1-p) + 1p = 2p-1$$

Por lo que el proceso es x nulo su media \sim autocorrelación.

$$E[x(t)] = E[A g(t)] = \underbrace{g(t)}_{\text{Cte}} E[A] = g(t) \cdot (2p-1) \rightarrow \text{Depende de } t, \text{ no de } a \text{ en ESA.}$$

Autocorrelación

$$R_x = E[x(t)x(t+\tau)] = E[g(t) \cdot A \cdot g(t+\tau) A] = E[A^2 g(t) g(t+\tau)]$$

$\tau = -T$ $\tau = -2T$ $\tau = -3T$

$$\begin{aligned} g(t) &= u(t) - u(t-T) \\ g(t+\tau) &= u(t+\tau) - u(t-T+\tau) \end{aligned}$$

si $\tau > T \rightarrow (u(t) - u(t-T))(u(t+\tau) - u(t-T))$

$\boxed{\int_0^T \boxed{T} \cdot \int_{-\tau}^0 \boxed{0} = 0}$

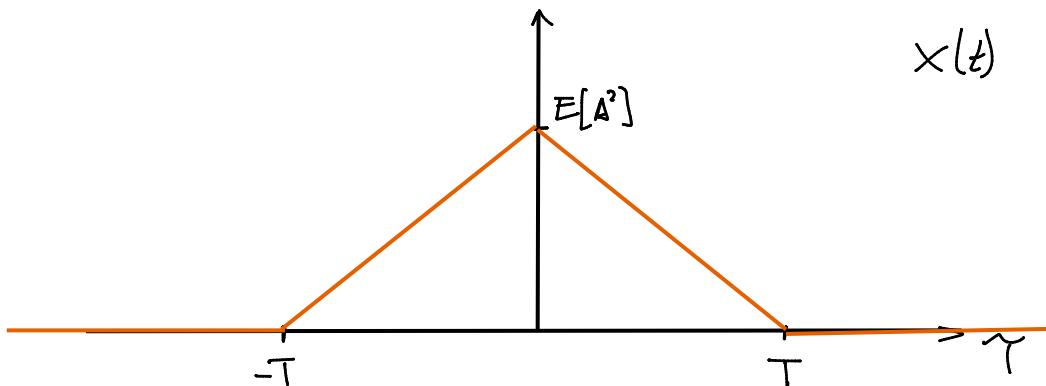
si $\tau < -T \rightarrow 0$, pues lo mismo.

Entonces $R_x = 0$ si $\tau > T$ o $\tau < -T$, o $|T| > \tau$

Además: $\boxed{\tau = 0 \rightarrow g(t)g(t) = 1}$

$$R_x = E[A^2] \text{ si } \tau = 0$$

De ahí basta unicamente hasta zero, es una ventana triangular. (Hay convolución implícita)



2) $X(t) = e^{\Delta t}, t \geq 0, \Delta \sim U[-2, -1]$ 1) Proceso de tiempo continuo de estados continuos

$$2) F_X(x) = P(X \leq x) = P(e^{\Delta t} \leq x) = P(\Delta \leq \frac{\ln(x)}{t}) = F_{\Delta}\left(\frac{\ln(x)}{t}\right)$$

Solo tiene sentido para valores de x entre $0 > 1$.

$$F_X(x) \begin{cases} 0 & \text{si } x > 1 \wedge x < 0 \\ \frac{\ln(x)}{t} & \text{otro caso} \end{cases}$$

Falso do

El tiempo en el que evolvió

$$F_{X_1, X_2}(t_1, t_2) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2)$$

COMO SE HACE?

matlab

Media y autocov

$$\hookrightarrow E[X(t)] = E[e^{\Delta t}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\Delta t} f_{\Delta}(s) ds = \int_{-2}^{-1} e^{\Delta t} \frac{1}{-1-(-2)} ds = \int_{-2}^{-1} e^{\Delta t} ds = \frac{e^{\Delta t}}{\Delta} \Big|_{-2}^{-1} = \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}$$

$$= \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} \rightarrow \text{Depende de } t \quad (\text{tiene sentido, } \overset{\text{son todos}}{\text{exp. decreciente}})$$

$$R_{xx} = E[X(t_1)X(t_2)] = E[e^{\Delta t_1} \cdot e^{\Delta t_2}] = E[e^{\Delta(t_1 + t_2)}] = E[e^{\Delta(t_1 + t_2)}] = \int_{-2}^{-1} e^{\Delta(t_1 + t_2)} ds = \frac{e^{-t_1 - t_2} - e^{-2(t_1 + t_2)}}{t_1 + t_2}$$

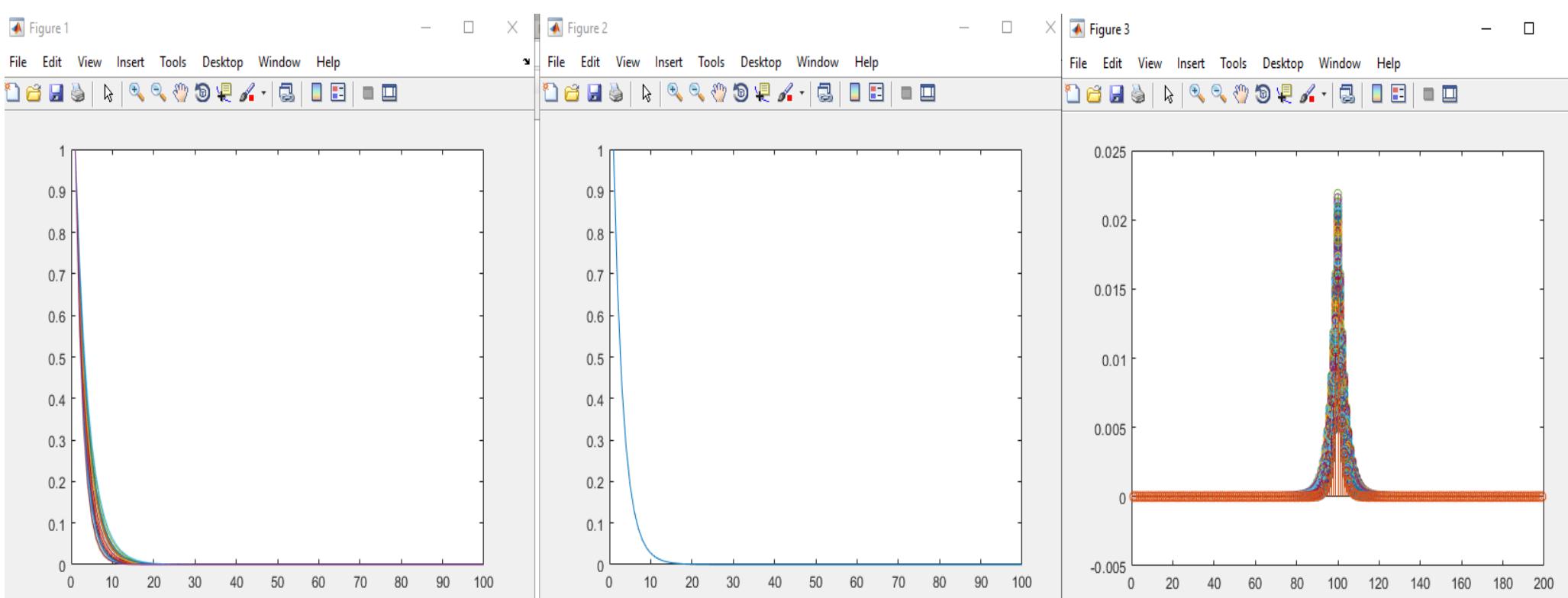
$$\text{si } t_1 = t \wedge t_2 - t_1 = \gamma$$

$$t_1 + t_2 = t + t_2$$

$$t_2 = \gamma + t$$

$$= \frac{e^{-t-\gamma} - e^{-2(t+\gamma)}}{t_1 + t_2}$$

Depende de t , no solo de γ .
No es ESA.



$$3) \text{ Es } C_x(s, t_1) = R_x(s, t_1) = q + 4e^{-2|\gamma|} \quad \text{en el tiempo } s \text{ y } t_1$$

$$E[X(s)] = 3 \quad \text{Var}(X(s)) = C_x(s, s) = R_x(s, s) - q = 4 \quad \gamma=0$$

$$E[X(8)] = 3 \quad \text{Var}(X(8)) = C_x(8, 8) = R_x(8, 8) - q = 4$$

$$R_x(t_1, t_2) = C_x(t_1, t_2) + \mu_x^2 \rightarrow C_x(t_1, t_2) = R_x(t_1, t_2) - q$$

4) Random walk

Es un random step que cumple

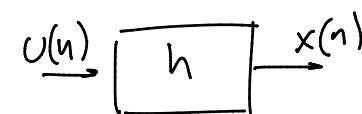
$$x(n) = x(n-1) + u(n)$$

$$\underbrace{P(u=1)=p}_{\gamma=0} \quad \underbrace{P(u=-1)=1-p}_{\gamma=0}$$

$$\text{Si } u(n) \text{ proceso aleatorio del tipo } P_U(u) = p \delta(u-1) + (1-p) \delta(u+1)$$

$$\text{Entonces el sistema que hace } y(n) = x(n) - y(n-1)$$

1. El proceso es de tiempo discreto y estado discreto
en base a lo VA es discreto



$$2. \quad x(n) = u(n) + x(n-1)$$

$$x(n) = \sum_{k=1}^n u(k)$$

$$P(x(n) \leq x) = P\left(\sum_{k=1}^n u(k) \leq x\right)$$

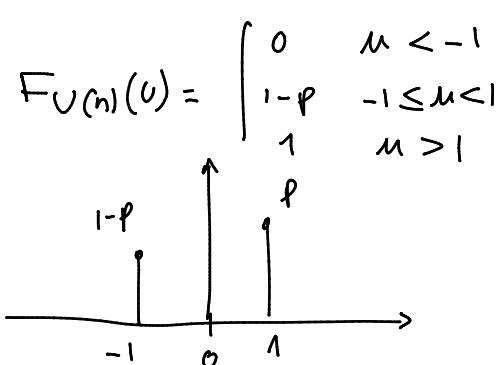
$$x(1) = u(1)$$

$$x(1) = u(2) + x(1)$$

$$x(2) = u(3) + x(2) = u(3) + u(2) + u(1)$$

$$\text{generalizo} \quad x(n) = \sum_{k=1}^n u(k)$$

$$\sum u(n) \text{ iid} \rightarrow F_{x(n)}(x) = F_{\sum u}(x) = \prod_{k=1}^n F_{U(k)}(x)$$



$$2) E[x(n)] = E\left[\sum_{k=1}^n u(k)\right] = n E[u(k)] = n \cdot \sum_{k=1}^1 u(k) P_{U(k)}(u) = n \cdot (1 \cdot p + (-1) \cdot (1-p))$$

$$n \cdot (2p-1) \quad \checkmark$$

autocorrelación:

$$R_x = E[x(n)x(n+\alpha)] = E\left[\sum_{k=1}^n u(k) \sum_{k=1}^{n+\alpha} u(k)\right] \quad \text{los } u(k) \text{ iid} \therefore \text{ las sumas } \& \text{ su producto}$$

$$\text{deben ser independientes} \quad E\left[\sum u(k)\right] E\left[\sum u(k)\right] = n \cdot (n+\alpha) (2p-1)^2$$

Ma es eso

$$R_x(t_1, t_2) = C_x(t_1, t_2) + \mu_x(t_1) \mu_x(t_2)$$

$$n_1 n_2 (2p-1)^2 = C_x(n_1, n_2) + n_1 n_2 (2p-1)^2 \rightarrow C_x(n_1, n_2) = 0, \text{ bueno, asumir que son indp.} \\ \rightarrow \text{la autocorrelación}$$

$$\text{Var}(x(n)) \stackrel{\text{iid}}{=} \text{Var} \left[\sum_{i=1}^n U(i) \right] = n \text{Var}(U(i)) \quad f_U(u) = p \delta(u-1) + (1-p) \delta(u+1)$$

$$\text{Var}(U(i)) = \frac{4np(1-p)}{\text{A partir del orden de step}}$$

$U(i) = 2Z(i) - 1$

$Z(i) \sim \text{Ber}(p)$

Preguntas

$$\text{Var}(x(n)) = n E \left[(U(i) - (2p-1))^2 \right]$$

$$n \left[p \cdot (1-2p+1)^2 + (1-p) \cdot (-1-2p+1)^2 \right]$$

$$n \left[4p(1-p)^2 + 4(1-p)(-p)^2 \right]$$

$$4n \left[p - 2p^2 + p^3 + p^2 - p^3 \right]$$

$$4n \left[p - p^2 \right]$$

$$4n p(1-p) = \text{Var}(x(n))$$

5) $B(n) \rightarrow$ Bernoulli parámetro p

$$P_{B(n)}(b) = \underbrace{\lambda \delta(b-1)}_{\text{IP}(B=1)=\lambda} + \underbrace{(1-\lambda) \delta(b)}_{\text{IP}(B=0)=1-\lambda}$$

$$1. B(n)^2 \rightarrow E[B(n)^2] = \sum_0^1 b^2 P_B(b) = 0 \cdot (1-\lambda) + 1^2 \lambda = \lambda, \text{ es EST. } 1^{\text{er}} \text{ orden}$$

$$\hookrightarrow R_B = E[B(n)B(m)] = E[B(n)]^2 = \lambda^2 \rightarrow \text{no depende } n, \text{ ni } m.$$

son indep no
defunción

Dirás que es ESA.

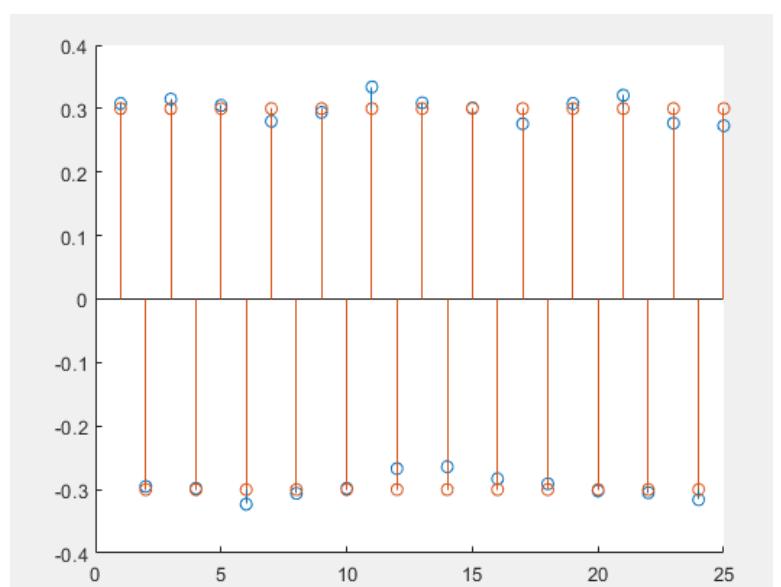
$$2. (-1)^n B(n) \rightarrow E[-(-1)^n B(n)] = (-1)^n E[B] = (-1)^n \lambda \rightarrow \text{depende de } n, \text{ NO } \Leftrightarrow \text{ESA}$$

si, da así, simulado

$$3. X(n) = B_1(n) \delta(x(n-1)) + B_2(n) \delta(x(n-1)-1)$$

la media varia con n .

no veo que sea ESA



$$6) X(n) = \sum_{i=1}^P A_i e^{j\omega_i n}$$

↳ VAs complejas

$$1. E[X(n)] = E\left[\sum_{i=1}^P A_i e^{j\omega_i n}\right] = P E[A_i e^{j\omega_i n}] = P E[A_i] e^{j\omega_i n} \rightarrow \text{depende de } n, \text{ no ESA}$$

No olvides conjugado

$$A_i A_i^* = |A_i|^2 \rightarrow (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$$

$$R_X = E[X(n)X(k)] = E\left[\sum_{i=1}^P A_i e^{j\omega_i n} \sum_{j=1}^P A_j^* e^{-j\omega_j k}\right] = E\left[\sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^P (A_i A_j^* e^{j\omega_i n} e^{-j\omega_j k})\right] =$$

$$\sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^P e^{j(\omega_i n - \omega_j k)} E[A_i A_j^*]$$

acá no es ESA

$$2. \text{ Si } E[A_i] = 0 \rightarrow E[X] = 0$$

acá si es ESA, si $\omega_i = \omega_j$ queda en función de la dif de tiempos

^ A_i iid decor
($\text{Var}(A_i) \neq 0$)

$$R_X = \sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^P e^{j(\omega_i n - \omega_j k)} E[|A_i|^2]$$

$$3. \text{ lo PSD van a ser deltas } \rho_{ij} \quad S_X = \mathcal{F}\{R_X\} = \mathcal{F}\left\{\sum e^{j\omega_i(n-k)}\right\} \cdot \text{Var}(A_i)$$

\sum Exps complejas $\xrightarrow{\neq}$ train de deltas

Predictible? \rightarrow Debe ser porque lo que me es aleatoria, solo la amplitud.

$$X(t) = \sum_{k=1}^P A_k e^{j(\omega_k t + \theta_k)} = \sum_{k=1}^P B_k e^{j\omega_k t}, \quad B_k = A_k e^{j\theta_k} \text{ VAs complejas}$$

- Si $E[B_k] = 0$ (e.g., $\theta_k \sim U[0, 2\pi]$ independiente de A_k),

$$E[X(t)] = E\left[\sum_{k=1}^P B_k e^{j\omega_k t}\right] = \sum_{k=1}^P E[B_k] e^{j\omega_k t}.$$

$$E[X(t)] = \sum_{k=1}^P E[B_k] e^{j\omega_k t} = 0.$$

$$R_X(t, t+\tau) = E[X(t)X^*(t+\tau)] = E\left[\sum_{k=1}^P B_k e^{j\omega_k t} \sum_{l=1}^P B_l^* e^{-j\omega_l(t+\tau)}\right]$$

$$= \sum_{k=1}^P \sum_{l=1}^P E[B_k B_l^*] e^{-j\omega_l(t+\tau)} e^{j\omega_k t}.$$

Si B_k descorrelacionadas entre sí, y $\sigma_k^2 = E[|B_k|^2]$,

$$R_X(t, t+\tau) = \sum_{k=1}^P \sum_{l=1}^P E[B_k B_l^*] e^{-j\omega_l(t+\tau)} e^{j\omega_k t} = \sum_{k=1}^P \sigma_k^2 e^{j\omega_k \tau} = R_X(\tau),$$

Entonces, $X(t)$ es ESA.

X no es necesariamente ESA.

7) $X(t)$ proceso Gaussiano

1. La fdp conjunta es una Gaussiana de orden n . $\left[\frac{n}{2\pi} \sqrt{\det(C_x)} \right] \exp\left[-\frac{1}{2} (x - \mu_x)^T C_x^{-1} (x - \mu_x)\right]$

2. Si es ESA $\rightarrow E[X(n)] = ct e$

$$C_x = C_x(t_1, -t_2)$$

$$C_x = E\left[\left(x - \mu_x\right) \left(x - \mu_x\right)^T\right]$$

para ESE \rightarrow todo dist solo depende de γ . \rightarrow tome los desiderados cito a lo largo

por τ para ver que pasa

de

$$\left[\frac{n}{2\pi} \sqrt{\det(C_x)} \right] \exp\left[-\frac{1}{2} (x - \mu_x)^T C_x^{-1} (x - \mu_x)\right]$$

funciones de γ

Los medios μ_x y C_x definen n -componentes a lo dist normal. Como estos momentos son solo dependientes de γ entonces es ESE y que lo dist. se define segí τ a ms t_1 & t_2 .

$$8) \quad X(t) = \sum_n A_n p(t - nt - T_0)$$

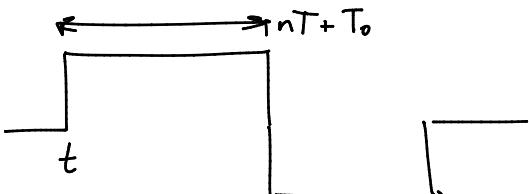
\hookrightarrow pulso

$$E[X(t)] = E\left[\sum_n A_n p(t - nt - T_0)\right]$$

n $E[A_n] E[p(t - nt - T_0)] = 0 \quad ?$

↓
depende de
los datos

→ 0 por consigna



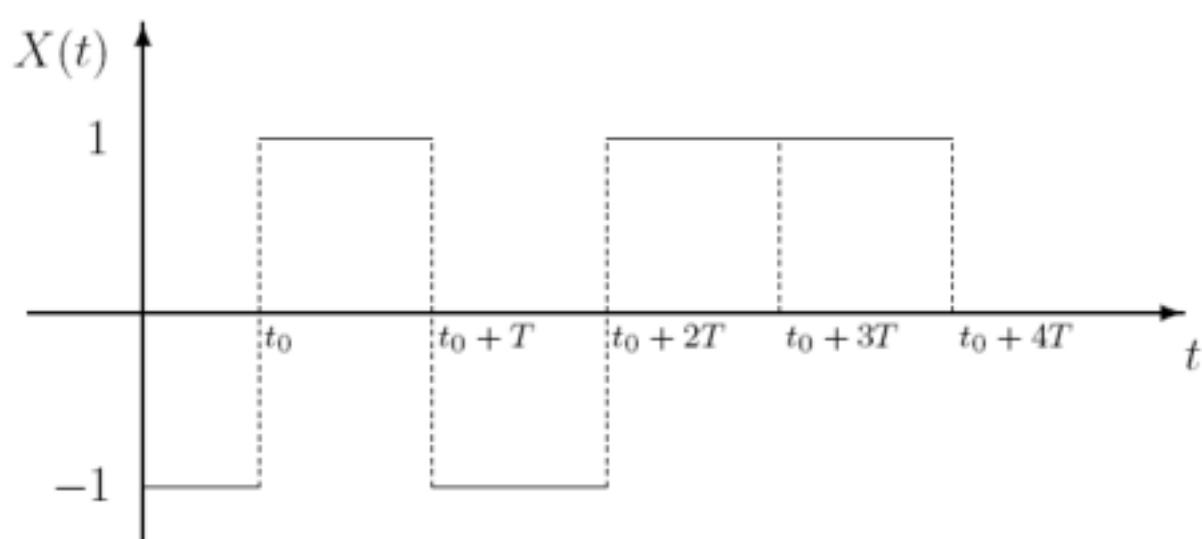
Ejercicio 8 - Modulación PAM

Un módem transmite una secuencia de datos del siguiente modo: transmite un 1 enviando un pulso de duración T segundos y amplitud 1; transmite un 0 enviando el mismo pulso con amplitud -1 . En la figura se muestra como ejemplo la transmisión de la secuencia de datos 1011. La señal transmitida $X(t)$ responde a la ecuación siguiente

$$X(t) = \sum_n A_n p(t - nt - T_0),$$

donde $p(t)$ es un pulso de amplitud unitaria y duración T , A_n son variables aleatorias i.i.d. que toman el valor 1 o -1 según los datos a transmitir, y T_0 es una variable aleatoria uniforme en el intervalo $[0, T]$ que representa la fase de la señal transmitida. Se asume que T_0 y A_n son variables aleatorias independientes entre sí. Éste es un ejemplo de una señal binaria aleatoria.

1. Calcular $E[X(t)]$.
2. Calcular la función de autocorrelación de $X(t)$. Para ello, suponga que $\mu_P = 0$.
3. Determinar si $X(t)$ es ESA o no.
4. ¿Varían los resultados si siempre $T_0 = 0$?
5. Simular una trayectoria de N períodos independientes, de la señal $X(t)$ binaria aleatoria, con fase inicial T_0 uniforme en el intervalo $[0, T]$. Estimar la media y la función de autocorrelación de la misma. Comparar los resultados en un mismo gráfico con los resultados teóricos.
6. Halle la media y la autocorrelación si no se incluye la variable aleatoria T_0 , y analice si el proceso es ESA en ese caso.



Sistemas LTI

Ejercicio 1 - Senoidal ruidosa

Sea $X(n) = A \cos(2\pi\omega_0 n + \Phi) + N(n)$, donde A y ω_0 son constantes, Φ se encuentra uniformemente distribuida en $[0; 2\pi]$ y $N(n)$ es ruido blanco de densidad de potencia σ^2 .

1. Obtenga la media $\mathbb{E}[X(n)]$.
2. Si $X(n)$ es un proceso ESA, obtenga la densidad espectral de potencia del mismo.
3. Suponga que $X(n)$ es la señal de entrada a un filtro pasabanda de respuesta en frecuencia

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega - \omega_0| \leq \frac{W}{2} \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Compare la relación señal a ruido (SNR) a la entrada y a la salida del filtro. Extraiga conclusiones.

$$x(n) = A \cos(2\pi\omega_0 n + \phi) + N(n)$$

Ruido blanco σ^2
 $\phi \sim U[0, 2\pi]$

$$\mathbb{E}[x(n)] = A \mathbb{E}[\cos(2\pi\omega_0 n + \phi)] + \mathbb{E}[N(n)] = \frac{A}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(2\pi\omega_0 n + \phi) d\phi + 0 = 0$$

f_{φ(ϕ)}
Valor medio del cos → 0

$$\begin{aligned} R_x(t, t+\tau) &= \mathbb{E}[A \cos(2\pi\omega_0 t + \phi) A \cos(2\pi\omega_0(t+\tau) + \phi)] \\ &= A^2 \mathbb{E}[\cos(2\pi\omega_0 t + \phi) \cos(2\pi\omega_0(t+\tau) + \phi)] = A^2 \mathbb{E}[\cos(2\pi\omega_0 t + \phi + 2\pi\omega_0 t + 2\pi\omega_0 \tau + \phi) \\ &\quad + \cos(2\pi\omega_0 t + \phi - 2\pi\omega_0 t - 2\pi\omega_0 \tau - \phi)] = \\ \text{prop: } \cos(x)\cos(y) &= \cos(x+y) + i\sin(x)i\sin(y) \\ \cos(x)\cos(y) &= \cos(x-y) - i\sin(x)i\sin(y) \\ \cos(x)\cos(y) &= \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)] \end{aligned}$$

f_{φ(ϕ)}
ϕ, medio de 1 ciclo
cte para lo E[]

$$\begin{aligned} &= \frac{A^2}{2} \mathbb{E}[\cos(4\pi\omega_0 t + 2\pi\omega_0 \tau + \phi) + \cos(2\pi\omega_0 \tau)] \\ &= \frac{A^2}{2} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(4\pi\omega_0 t + 2\pi\omega_0 \tau + 2\phi) d\phi + \mathbb{E}[\cos(2\pi\omega_0 \tau)] \right) \end{aligned}$$

$$\therefore R_x = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi\omega_0 \tau) \text{ Es ESA}$$

$$S_X = \mathcal{F}\{R_X\} = \frac{A^2}{2} \mathcal{F}\left\{\cos\left(\frac{2\pi\omega}{\omega_0}\tau\right)\right\} = \boxed{\frac{A^2}{2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega \pm 2\pi\omega_0 \pm 2\pi l)}$$

2) La RTA $H(\omega)$ del circuito es

$$\omega(t) \left(\frac{R}{i} + \frac{1}{C} \right) v(t) \quad \begin{aligned} \omega(t) &= R_i + V_C \\ i_C &= i = C \dot{v}_C \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} \omega(s) &= RCV_s + V \\ \frac{\omega}{V} &= H(s) = RCs + 1 \end{aligned} \right\} \quad H(s) = \frac{1}{RCs + 1}$$

$$L \xrightarrow{\mathcal{F}} s \quad s \xrightarrow{\mathcal{F}} H(j\omega) = \frac{1}{j\omega RC + 1}$$

(sobre $j\omega$)

LTI
Estable

$$\text{Ruido blanco } \Rightarrow \text{método} \rightarrow R_N = S(n) \frac{N_0}{2} \rightarrow S_N = \frac{N_0}{2}$$

$$\text{Prop. sist. LT: } S_y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_x(\omega) = \left| \frac{1}{j\omega RC + 1} \right|^2 \frac{N_0}{2} = \frac{1}{(j\omega RC)^2 + 1} \frac{N_0}{2} = \frac{1}{1 + \frac{R^2 C^2 \omega^2}{4}} \frac{N_0}{2} = \boxed{\frac{N_0}{2 + 2R^2 C^2 \omega^2}}$$

$$\text{La potencia total es } \int_{-\infty}^{+\infty} S_y(\omega) d\omega$$

$$3) 1. \quad y(t) = \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} x(u) du = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) [u(t+T_0) - u(t-T_0)] du \xrightarrow[V_s \approx \text{don una sinc}]{} \frac{1}{2T} \frac{1}{j\omega} \left[X(j\omega) * \frac{2 \operatorname{sinc}(\omega T)}{\omega} \right] \cdot \frac{1}{2\pi}$$

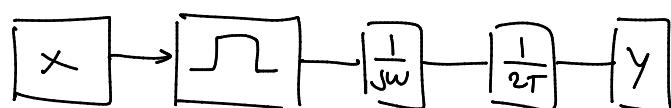
Para obtener $H(j\omega)$ podemos transformar. El sistema integra la ventana de $t-T$ a $t+T$ así que si en tiempo hay una ventana, en frec aparece lo sinc.

$$y(j\omega) = \frac{1}{2T} \frac{1}{j\omega} \left[X(j\omega) * \frac{2 \operatorname{sinc}(\omega T)}{\omega} \right] \cdot \frac{1}{2\pi} \quad ?$$

No tiene idea

$$2. E(y) = H(0) \mu_x \quad S_y(\omega) = |H(j\omega)|^2 S_x(\omega)$$

$$E[y] = \frac{1}{2T} E \left[\int_{t-T}^{t+T} x(u) du \right] \quad \text{Promedio dc es pasa-bajos}$$



s) $E[X] = \sum_{x \in X} p_x x = \frac{1}{4} (-1 - 2 + \cos(t) + \cos(t)) \rightarrow$ depende de t . No es ESA
 Igualdad.

1. $R_X = E[(\cancel{-1-2+\cos(t)+\cos(t)})(\cancel{-1-2+\cos(t+\gamma)+\cos(t+\gamma)})]$ mol, use \sum no es el proceso
 $X(t)$ es mágico

$$E[\cos(t)\cos(t+\gamma)] + E[\cos(t)\cos(t+\gamma)] - 3E[\cos(t)] + E[\cos(t)\cos(t+\gamma)] - 3E[\cos(t)] - 3E[\cos(t+\gamma)]$$
 $\rightarrow E[\cos(t+\gamma)] + a = 2\cos(\gamma)\pi + 18\pi$

$E = \sum_{x_i} p_{x_i} \cdot x_i$

$$R_X = E[X(t)X(t+\gamma)] = E[X(t)Y(t)] = \sum_{x_i y_i} \underbrace{p_{x_i y_i}}_{\text{cjtas}} x_i y_i = \sum_{x_i} \sum_{y_i} p_{x_i y_i} x_i y_i$$

$\frac{1}{16} ((-1 - 2 + \cos(t) + \cos(t))(-1 - 2 + \cos(t+\gamma) + \cos(t+\gamma)))$

$$\frac{1}{16} [\cos(t) \cos(t+\gamma) + \cos(t) \cos(t+\gamma) - 3\cos(t+\gamma) + \cos(t) \cos(t+\gamma) + \cos(t) \cos(t+\gamma) - 3\cos(t+\gamma) - 3\cos(t) + 9]$$

No hay duda

2. $x^2 \rightarrow 1, 4, \cos^2, \cos^2$

$$E[x^2] = \frac{1}{4} (1 + 4 + \underbrace{\cos^2 + \cos^2}_1) = \frac{6}{4}$$

$$R_X = \sum_{x_i} \sum_{y_i} \frac{1}{16} x_i y_i = \underbrace{(1 + 4 + \underbrace{\cos^2 + \cos^2}_1)}_6 \underbrace{(1 + 4 + \underbrace{\cos^2 + \cos^2}_1)}_6 - \frac{36}{16} = \frac{9}{4}$$

ESA

6) $\approx x, w$ decorr $\rightarrow Y(t) = aX(t) + bW(t) \rightarrow Y(t)Y(t+\gamma) = (aX(t) + bW(t))(aX(t+\gamma) + bW(t+\gamma))$

$$R_Y = E[a^2 X(t)X(t+\gamma) + b^2 W(t)W(t+\gamma) + ab(X(t)W(t+\gamma) + W(t)X(t+\gamma))]$$

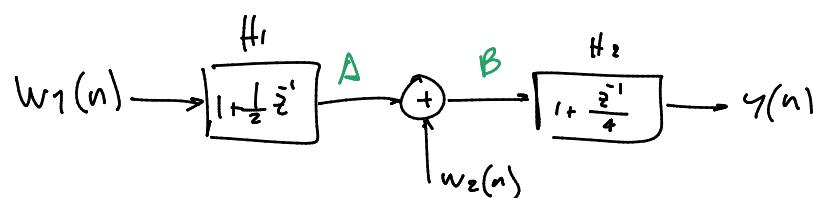
$$R_Y = a^2 R_X + b^2 R_W + 0 + 0$$

Decorr

De ahí $y = ax + bw \leftarrow$ LTI e estable así que

$$S_Y = \cancel{a^2 R_X} + \cancel{b^2 R_W} = a^2 S_X + b^2 S_W$$

⇒ plantearnos:



Podemos trabajar en el dominio transformado y que $S_Y = \mathcal{F}\{R_Y\}$

$$\textcircled{A} \quad S_A = \left| 1 + \frac{1}{2} z^{-1} \right|^2 S_{W_1} \rightarrow (Y(n)) \quad S_Y = \left| 1 + \frac{z^{-1}}{4} \right|^2 S_B$$

$$\textcircled{B} \quad S_B = S_A + S_{W_2}$$

Junto todo:

$$S_Y = \left| 1 + \frac{1}{4} z^{-1} \right|^2 S_{W_2} + \left| 1 + \frac{1}{4} z^{-1} \right|^2 \left| 1 + \frac{1}{2} z^{-1} \right|^2 S_{W_1} = \left| 1 + \frac{1}{4} z^{-1} \right|^2 + \left| 1 + \frac{1}{4} z^{-1} \right|^2 \left| 1 + \frac{1}{2} z^{-1} \right|^2$$

$$S_{W_1} = S_{W_2} = 1 \quad \text{y que } R_{W_1} = R_{W_2} = S(k) \cdot 1$$

$$\text{Finjo demostrar con } || \sim \text{ planteo: } \left(1 + \frac{1}{4} z^{-1} \right)^2 + \left(1 + \frac{1}{4} z^{-1} \right)^2 \left(1 + \frac{1}{2} z^{-1} \right)^2 = \frac{z^{-4}}{64} + \frac{3z^{-3}}{16} + \frac{7z^{-2}}{8} + 2z^{-1} + 2$$

$$= 2 + 2S(k-1) + \frac{7}{8}S(k-2) + \frac{3}{16}S(k-3) + \frac{1}{64}S(k-4)$$

Por prop de autocorrelación $R(k) = R(-k)$ (par)

$$8) Y(t) = \cos(x(t) + U) = \frac{e^{jx(t)+U} + e^{-jx(t)+U}}{2} = \frac{1}{2} \left[e^{jx(t)} e^{jU} + e^{-jx(t)} e^{-jU} \right]$$

$$E[Y] = \frac{1}{2} E \left[\underbrace{e^{jx(t)}}_{\text{indep}} e^{jU} + \underbrace{e^{-jx(t)}}_{\text{indep}} e^{-jU} \right] = \frac{1}{2} E[e^{jx(t)}] E[e^{jU}] + \frac{1}{2} E[e^{-jx(t)}] E[e^{-jU}]$$

$$f_{X+U} = f_X \cdot f_U \therefore E[X+U] = E[X]E[U]$$

$$\text{Si } x(t) \text{ proceso Gaussiano ESA, } R_x = \frac{1}{1+|\tau|}$$

$$\text{A ver: } Y = \frac{1}{2} \left[e^{jx(t)} e^{jU} + e^{-jx(t)} e^{-jU} \right]$$

veamos la función característica de la U

$$E[Y] = \frac{1}{2} \left(E[e^{jx(t)}] E[e^{jU}] + E[e^{-jx(t)}] E[e^{-jU}] \right) \\ = \frac{1}{2} \left(\phi_x(1) \phi_u(1) + \phi_x(-1) \phi_u(-1) \right) = 0$$

$$\phi_u(1) = 0; \phi_u(-1) = 0$$

$$U = \text{Vuelta} \quad \begin{cases} \text{de } 0 \text{ a } 2\pi & \text{escalado } \frac{1}{2\pi} \\ \text{sinc} & \\ \frac{\sin(\pi w)}{w} & \\ \text{distribución de } \pi \text{ a } 1/2\pi & \end{cases}$$

$$R_Y = \frac{E}{4} \left[\left(e^{jx(t)} e^{jU} + e^{-jx(t)} e^{-jU} \right) \left(e^{jx(t+\gamma)} e^{jU} + e^{-jx(t+\gamma)} e^{-jU} \right) \right] \quad \text{Distribución}$$

$\times \sim U$ discute

$$E \left[e^{jx(t)} e^{jU} e^{jx(t+\gamma)} e^{jU} + e^{jx(t)} e^{jU} e^{-jx(t+\gamma)} e^{-jU} - jx(t+\gamma) - jU - jx(t) - jU - jx(t+\gamma) - jU - jx(t) - jU \right]$$

$$\frac{E}{4} \left[e^{2jU} \cdot \delta_{\phi_u(2)} + e^{j(x(t)-x(t+\gamma))} + e^{-j(x(t)-x(t+\gamma))} + e^{-2jU} \cdot \delta_{\phi_u(-2)} \right] \quad \phi_u(-2) = 0$$

$$R_\gamma = \frac{1}{4} \left(\phi_{x(t)-x(t+\gamma)}(1) + \phi_{x(t)-x(t+\gamma)}(-1) \right)$$

$$\beta = x(t) - x(t+\tau) \sim N \rightarrow \beta = [1 \ -1] \begin{vmatrix} x(t) \\ x(t+\tau) \end{vmatrix} \rightarrow E[\beta] = [1 \ -1] \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_\beta = \text{Var}(\beta) = \sigma_\beta^2 = A C_{xx} A^+ = \|A\| \begin{vmatrix} 1 & R_x \\ R_x & 1 \end{vmatrix}^{-1} = \frac{2 - 2R_x(\tau)}{\sigma_x^2}$$

$$\beta \rightarrow \phi_\beta = e^{\frac{j\omega n}{2}} \cdot e^{\frac{(2R_x - 2)\omega^2}{2}} = \exp\left(\omega^2\left(\frac{1}{1+|\tau|} - 1\right)\right)$$

$C_x(0) = \sigma_x^2$ y el medio es nula

$$\phi_\beta = \phi_{x(t) + x(t+\tau)} \rightarrow \phi(\pm i) = \exp\left((\pm i)^2\left(\frac{1}{1+|\tau|} - 1\right)\right)$$

$$R_\gamma = \frac{1}{4} \left(\phi_{x(t) - x(t+\tau)}^{(+1)} + \phi_{x(t) - x(t+\tau)}^{(-1)} \right) \therefore R_\gamma = \frac{1}{2} \exp\left(\frac{1}{1+|\tau|} - 1\right)$$

ESA.

$$q) \quad \gamma(n) = \sum_{i=0}^k a_i x(n-i)$$

1. Lo haga para $k=1, 2, 3, \dots n$

$$\begin{aligned} k=1 & \quad a_0 x(n) + a_1 x(n-1) = \gamma(n) = [a_0 \ a_1] \begin{bmatrix} x(n) & x(n-1) \end{bmatrix}^T \\ k=2 & \quad [a_0 \ a_1 \ a_2]^T \cdot \begin{bmatrix} x(n) & x(n-1) \\ x(n-1) & x(n-2) \end{bmatrix}^T \\ k=3 & \quad [a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3]^T \cdot \begin{bmatrix} x(n) & x(n-1) \\ x(n-1) & x(n-2) \\ x(n-2) & x(n-3) \end{bmatrix}^T \\ k=k & \quad [a_0 \ a_1 \ a_2 \dots a_k]^T \cdot \begin{bmatrix} x(n) & x(n-1) \\ x(n-1) & x(n-2) \\ x(n-2) & x(n-3) \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

$$2. \quad R_\gamma(k) = \sigma_x^2 S(k), \quad M_x=0$$

$$R_\gamma = h * h_b * R_x \rightarrow R_\gamma = \sum a_i \delta(n-i) * \sum b_i \delta(n-i) + \sigma_x^2 S(k) =$$

$$\begin{aligned} \text{Si } \gamma &= \sum_{i=0}^k a_i x(n-i) \rightarrow \gamma = h * x \Big|_{k=S} \quad [a_1 \dots a_n] \times [a_n \dots a_1] \cdot \sigma_x^2 \\ h &= \sum_{i=0}^k a_i \cdot \delta(n-i) \rightarrow \underline{\text{Deltas desplazados}} \end{aligned}$$

$|R_\gamma(k)| = 0 \Leftrightarrow |k| > n$ porque la long. de R_γ depende de la long. de los impulsos del sist. que en el caso de AR-m es m (es FIR).

$$3) E[\gamma] = 0$$

$$\gamma = x(n) + \frac{1}{2}x(n-2) + \frac{1}{3}x(n-3)$$

$$R_{\gamma} = E[(x(n) + \frac{1}{2}x(n-2) + \frac{1}{3}x(n-3))(x(n+\gamma) + \frac{1}{2}x(n+\gamma-2) + \frac{1}{3}x(n-3+\gamma))]$$

$$= R_x(\gamma) + \frac{1}{4} R_x(\gamma) + \frac{1}{9} R_x(\gamma)$$

has igneous domes

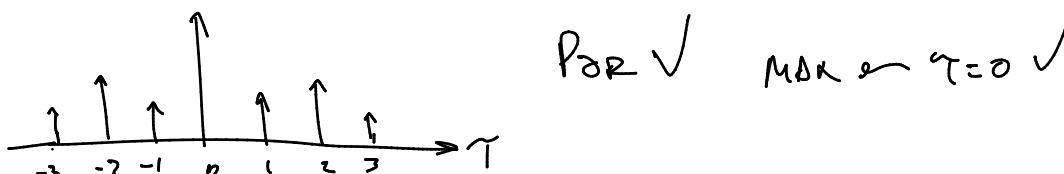
$$\frac{1}{2} \times (n) \times (n+\gamma-2) - \frac{1}{2} \times (n-2) \times (n+\gamma) \longrightarrow \frac{1}{2} R_+ (\gamma \pm 2)$$

$$\frac{n' - n - 2}{r} \times (n') \times \underbrace{(n' + 2 + r)}_{r+3}$$

$$\left(\begin{array}{c} x(n) \\ x(n-3) \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c} n^{-3+\gamma} \\ n^{\gamma} \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} R_x(\tau \pm 3)$$

$$\therefore P_Y = \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right) R_X(r) + \frac{1}{6} R_X(r \pm 1) + \frac{1}{2} R_X(r \pm 2) + \frac{1}{3} R_X(r \pm 3)$$

$$R_7 = \left(1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{9}\right) \sigma_x^2 \delta(\tau) + \frac{\sigma_x^2}{6} \delta(\tau \pm 1) + \frac{1}{2} \sigma_x^2 \delta(\tau \pm 2) + \frac{1}{3} \sigma_x^2 \delta(\tau \pm 3)$$



$$10) \quad g(n) = \alpha g(n-1) + b \quad \xrightarrow{z} \quad y(z) = \alpha y(z) z^{-1} + b$$

$$\gamma(z) \left(1 - \alpha z^{-1}\right) = b$$

$$y(z) = \frac{b}{1-\alpha z^{-1}} \xrightarrow{z^n} \alpha^n \cdot b + c_i$$

$$2. \text{ If } y \text{ has a zero' } \rightarrow \quad x^n \cdot b + y(0)$$

preguntar cuando aparece la C

si $|\lambda| > 1$ el sistema no es estable, su ROC no cumple $|s| > |\lambda|$ entonces

por la parte externa del círculo interno a como me lo incluye me es estable (es causal).

Eye or we a ten onlicousel

$$\begin{aligned}
 1) \quad & x(n) = u(n) + u(n-1) \\
 \times X(n) \rightarrow & x(n)x(n+\tau) = (u(n) + u(n-1))(u(n+\tau) + u(n-1+\tau)) \\
 E[] \left(\right) & R_x(n, n+\tau) = E[u(n)u(n+\tau) + u(n)u(n-1+\tau) + u(n-1)u(n+\tau) + u(n-1)u(n-1+\tau)] \\
 & = R_u(n, n+\tau) + R_u(n, n-1+\tau) + R_u(n-1, n+\tau) + R_u(n-1, n-1+\tau)
 \end{aligned}$$

$$U \sim \mathcal{U}[-\sqrt{3}\sigma, \sqrt{3}\sigma]$$

$$E[U] = 0 \quad ; \quad R_u(n_1, n_2) = C_x(n_1, n_2) + \underbrace{u(n_1)u(n_2)}_0 = R_x(n_1, n_2) = C_x(n_1, n_2)$$

$$C_x = E[(U(n_1) - \mu(n_1))(U(n_2) - \mu(n_2))] = E[U(n_1)U(n_2)] = \frac{1}{2\sqrt{3}\sigma} \int_{-\sqrt{3}\sigma}^{\sqrt{3}\sigma} u^2 du = \frac{\sigma^2}{2} = \text{Var}(U)$$

$$\text{Var}(U) = \frac{(\sqrt{3}\sigma + \sqrt{3}\sigma)^2}{12} = \frac{4 \cdot 3\sigma^2}{12} = \sigma^2 \quad \text{iid}$$

como $C_x = \sigma^2 \rightarrow R_u = \underbrace{\sigma^2 S(\tau)}_{\text{porque son indep}} \rightarrow R_x = 2R_u(\tau) + R_u(\tau \pm 1) = 2\sigma^2$

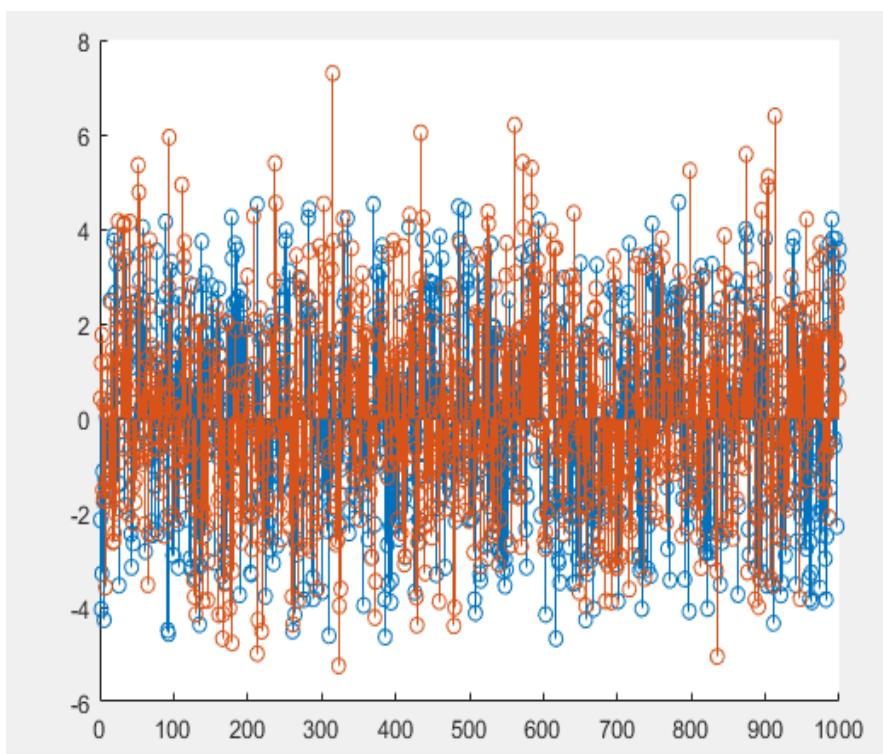
one pass $\tau > 0 \rightarrow R_u = 0$

verificado matlab

Name	Value
MU	5.2703e-04
MX	0.0010
teoricaVX	4
U	1x100000 double
varianza	2.0024
VU	4.0142
VX	1x100000 double
X	

2) No coincide porque lo $R_u = \sigma^2 S(\tau)$ como lo anterior

3) no veo mucha dif



17) Con los datos es suficiente para hacer Yule-Walker
Es AR - 2

$$X(n) + aX(n-1) + bX(n-2) = W(n)$$

$$R_X(p) + \sum_{i=1}^2 a_i R_X(p-i) = \sigma^2 S(p)$$

$$\begin{array}{l} a_1 = a \\ a_2 = b \end{array} \rightarrow R_X(k) = R_X(-k) \quad (\text{es par})$$

$$p=0 \rightarrow R_X(0) + aR_X(-1) + bR_X(-2) = \sigma^2 S(0)$$

$$1 + a \cdot 0 + b \cdot \frac{1}{4} = \sigma^2 \rightarrow 1 + \frac{b}{4} = \sigma^2 \rightarrow 1 + \frac{-1}{16} = \sigma^2$$

$$p=1 \rightarrow R_X(1) + aR_X(0) + bR_X(-1) = 0$$

$$0 + a + 0 = 0$$

$$a = 0$$

$$p=2 \quad R_X(2) + aR_X(1) + bR_X(0) = 0$$

$$\frac{1}{4} + b = 0 \rightarrow b = -\frac{1}{4}$$

para obtener la autocorr entera iteramos por la fórmula de yule walker

$$R_X(p) + \sum_{i=1}^2 a_i R_X(p-i) = \sigma^2 S(p)$$

$$R_X(0) = 1 \quad R_X(1) = 0 \quad R_X(2) = \frac{1}{4}$$

$$R_X(3) + \underbrace{\frac{0}{a} R_X(3-1)}_0 - \underbrace{\frac{1}{4} R_X(3-2)}_0 = \sigma^2 S(3)$$

$$R_X(3) = \frac{1}{4} \cdot R_X(1) = 0$$

$$R_X(4) - \frac{1}{4} R_X(2) = 0 \rightarrow R_X(4) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$$

$$R_X = \begin{cases} \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{|T|}{2}} & \text{si } T \text{ par} \\ 0 & \text{si } T \text{ impar} \end{cases}$$

$$\rightarrow R_X(T) = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{|T|}{2}} \cdot S\left(-1^{\frac{|T|}{2}} - 1\right)$$

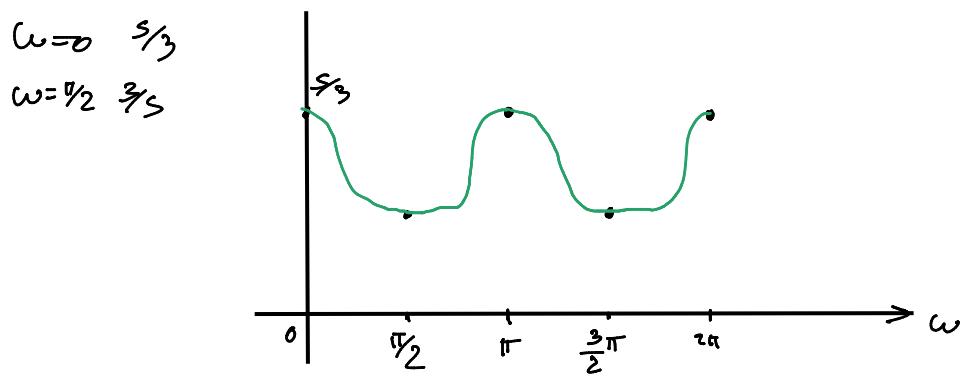
$$\begin{array}{l} |T| \\ 1 = -1 \\ (|T| \text{ par}) \end{array}$$

R_X es \sum de $S(\gamma - k)$ así que su transformado son deltas.

$$\text{Buscamos la H del sist} \rightarrow Y(n) - \frac{1}{4} Y(n-2) = X(n) \rightarrow \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4} z^{-2}}$$

$$S_Y = |H|^2 \cdot S_X = \left| \frac{1}{1 - \frac{1}{4} z^{-2}} \right|^2 \sigma^2 \stackrel{T}{=} \frac{15}{16} \rightarrow z = e^{j\omega} \rightarrow \frac{1}{1 - \frac{1}{4} e^{-2j\omega}} \cdot \frac{15}{16}$$

$$S_1 = \frac{-15}{8 \cos(2\omega) - 17} \quad \omega \in (0, 2\pi) \quad (\text{discreto a periódico})$$



12) 2 filhos

$$\gamma(n) = \frac{1}{2}x(n) + \frac{1}{2}x(n-1) \quad m_d = 2$$

$$z(n) = \gamma(n) - \gamma(n-1) \quad m_d = 2$$

$$\gamma(n-1) = \frac{1}{2}x(n-1) + \frac{1}{2}x(n-2)$$

$$\rightarrow \delta(n) \quad \rightarrow \delta(n-2)$$

$$\therefore z(n) = \frac{1}{2}(x(n) - x(n-2)) \quad \rightarrow \quad z(j\omega) = \frac{1}{2}(x(j\omega) - x(j\omega)e^{-2j\omega})$$

$$\frac{z(j\omega)}{x(j\omega)} = \frac{1}{2}e^{j0} - \frac{1}{2}e^{-2j\omega} = H(j\omega)$$

$$E[z] = \frac{1}{2} \left(\cancel{M_x} - \cancel{M_{x,-2}} \right) = 0$$

$$S_z = \|H(j\omega)\|^2 S_x = \sigma^2 \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2j\omega} \right|^2$$

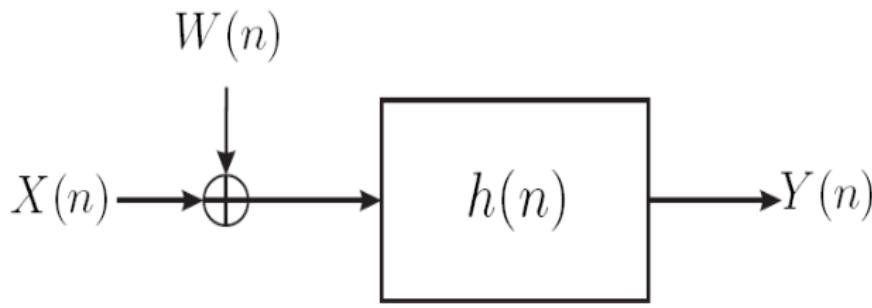
$$R_z = \mathcal{F}^{-1}\{S_z\} = \frac{\sigma^2}{2} \delta(1) - \frac{\sigma^2}{4} \delta(\pm 2)$$

$$S_z = \sigma^2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{e^{2j\omega} + e^{-2j\omega}}{4} \right)$$

$$R_z = C_z - \mu^2 \quad C_z = R_z \quad C_z(n,n) = R_z(0) = \frac{\sigma^2}{2}$$

Ejercicio 4 - Escalamiento de señal ruidosa

Considere el sistema LTI mostrado en la figura, donde $X(n)$ y $W(n)$ son procesos ESA descorrelacionados entre sí. La varianza de $W(n)$ es σ_W^2 y la de $X(n)$ es σ_X^2 .



1. Hallar la función de autocorrelación del proceso $Y(n)$.
2. Definiendo $E(n) = Y(n) - X(n)$, determine su función de autocorrelación.
3. Si $h(n) = \alpha \delta(n)$, elija el valor de α que minimice la varianza de $E(n)$.

$$1) \gamma(n) = h(n) * (w(n) + x(n)) = h(n) * w(n) + x(n) * h(n)$$

indep \rightarrow Descorrelacionados

$$\text{poro: } R_{x+w} = E[(x(n) + w(n))(x(n+\tau) + w(n+\tau))] = E[x(n)x(n+\tau) + w(n)w(n+\tau) + x(n)w(n+\tau) + w(n)x(n+\tau)]$$

$$R_{x+w} = R_x + R_w \quad \underbrace{\text{Brop LT}}_{R_y} \quad R_y = h * h^* (R_x + R_w) = \boxed{h * h^* R_x + h * h^* R_w}$$

$$2. R_E = R_{\gamma-x} = E[(\gamma(n) - x(n))(\gamma(n+\tau) - x(n+\tau))] =$$

$$= E[\gamma(n)\gamma(n+\tau) + x(n)x(n+\tau) - x(n)\gamma(n+\tau) - \gamma(n)x(n+\tau)]$$

$$R_E = R_\gamma + R_x - E[x(n)\gamma(n+\tau)] - E[\gamma(n)x(n+\tau)]$$

$$\gamma = h * x + h * w \rightarrow -E[x(n) \cdot h * x(n+\tau) - \underbrace{x(n) \cdot h * w(n+\tau)}_0] - E[x(n) * h \cdot x(n+\tau) + \underbrace{w(n) * h \cdot x(n+\tau)}_0]$$

$$R_E = R_\gamma + R_x - h * 2R_x$$

$$2. E(n)E(n+\tau) = [\gamma(n) - x(n)][\gamma(n+\tau) - x(n+\tau)]^*$$

$$R_E = E[\gamma(n)\gamma^*(n+\tau) - \gamma(n)x^*(n+\tau) - x(n)\gamma^*(n+\tau) + x(n)x^*(n+\tau)]$$

$$\textcircled{1} \quad R_E = R_\gamma(\tau) + R_x(\tau) - \boxed{E[\gamma(n)x^*(n+\tau)]} - \boxed{E[x(n)\gamma^*(n+\tau)]}$$

$$\textcircled{2} \quad \gamma(t) = h * x(t) + h * w(t) \rightarrow E[\gamma(t)x^*(t+\tau)] = h * E[x(t)x^*(t+\tau)] + h * E[\underbrace{w(t)x^*(t+\tau)}_0] = h * R_x$$

$$\begin{cases} \gamma(t) = h * x(t) + h * w(t) \rightarrow E[\gamma(t)\gamma^*(t+\tau)] = h * E[x(t)\gamma^*(t+\tau)] + h * E[w(t)\gamma^*(t+\tau)] \\ \gamma(t+\tau) = h * x(t+\tau) + h * w(t+\tau) \end{cases}$$

$$\rightarrow R_x * h * h^* + R_w * h * h^* = h * E[x(t)\gamma^*(t+\tau)] + h * E[w(t) \cancel{h^* * x^*(t+\tau) + w(t)} \cdot h^* * w(t+\tau)]$$

$$\cancel{h * E[x(t)\gamma^*(t+\tau)]} = R_x * h * h^* + R_w * h * h^* - \cancel{h * E[h^* * w(t) w(t+\tau)]}$$

$$E[x(t)\gamma^*(t+\tau)] = R_x * h^*$$

$$R_E = R_x(\gamma) + R_x(\gamma) - \underbrace{h * R_x - R_x * h^*}_{-R_x * (h+h^*)} = R_y(\gamma) + R_x(\gamma) - R_x * (h+h^*) \xrightarrow{h+h^* = \alpha \delta(n) + \alpha \delta(n)} h+h^* = \alpha \delta(n) + \alpha \delta(n)$$

α priori de antes

$$\longrightarrow R_y = \alpha^2 (R_x + R_w)$$

$$y = \alpha x + \alpha w$$

$$E = y - x \rightarrow \alpha x + \alpha w - x = E = \alpha w + x(\alpha - 1)$$

$$R_E = E[(\alpha w(n) + (\alpha - 1)x(n))(\alpha w(n+k) + (\alpha - 1)x(n+k))] \\ = \alpha^2 R_w + (\alpha - 1)^2 R_x + E[\cancel{\alpha(\alpha - 1)w(n)x(n+k)} + E[\cancel{\alpha(\alpha - 1)x(n)w(n+k)}]] \\ \alpha^2 R_w + (\alpha - 1)^2 R_x = \boxed{\alpha^2 R_w + (\alpha^2 - 2\alpha + 1) R_x}$$

$$R_E = C_E + \mu_E^2 ; E[E] = E[y - x] = E[\alpha x + \alpha w - x] = \alpha(0 + 0) - 0 = 0$$

$$\therefore R_E(n,n) = R_E(k=0) = C_E(n,n) = \text{Var}(E) = \alpha^2 R_w(0) + (\alpha^2 - 2\alpha + 1) R_x(0)$$

$$R_x(0) = \sigma_x^2 + \mu_x^2 \quad \sim R_w(0) = \sigma_w^2 + \mu_w^2 \longrightarrow \text{Var}(E) = \alpha^2 B + (\alpha^2 - 2\alpha + 1) A$$

\boxed{A} \boxed{B}

$\frac{\partial}{\partial \alpha} \quad 2\alpha B + (2\alpha - 2) A = 0$
 $\frac{\partial}{\partial \alpha} \quad 2B + 2A = 0 > 0 \quad \text{min}$

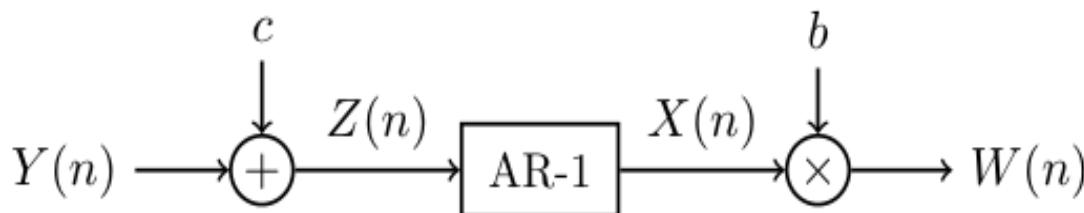
$\alpha(2B + 2A) - 2\alpha^2 = 0$
 $\alpha = \frac{2A}{2B + 2A} \rightarrow \text{min}$

Ejercicio 13 - Sistema blanqueador

Se dispone de muestras de un proceso ESA gaussiano $Y(n)$ con media $\mu_Y = \frac{1}{2}$ y autocovarianza:

$$C_Y(k) = \delta(k) + \frac{1}{4} [\delta(k-1) + \delta(k+1)].$$

Se desea procesar a Y de modo de transformarlo en un proceso blanco $W(n)$ de media nula y varianza $\sigma_W^2 = 1$. Para ello se implementa el siguiente sistema:



La constante c se elige de modo que el proceso $Z(n)$ tenga media nula. El proceso AR-1 es de la forma:

$$X(n) = aX(n-1) + Z(n),$$

es utilizado para eliminar la correlación entre las muestras (a es una constante a determinar tal que $|a| < 1$). Por último, la constante b es utilizada para ajustar la varianza de $X(n)$ al valor deseado.

- Determine la constante c de modo que el proceso $Z(n)$ tenga media nula, y halle la autocorrelación de Z .
- Determine a y b de modo que W cumpla las especificaciones pedidas.
- ¿Qué puede concluir de la relación entre los procesos MA-1 y un proceso AR-1? ¿Y en el caso del MA-m y el AR-m?

1. Buene: $\mu_Z = H(j\omega) \cdot \text{M. entrada}$

Entonces si M. entrada = 0 = μ_Z .

$$E[Z] = E[Y - Z] = 0$$

$$E[Y(n) + C] = 0 = \frac{1}{2} + C = 0 \rightarrow C = -\frac{1}{2}$$

Concluimos que $\mu_Z = -\frac{1}{2}$

Buscamos $R_Z(k) = S_Z(\omega)\sigma^2 \sim R_Z = C_Z = S_Z(k) + \frac{1}{4}S_Z(k \pm 1)$

sist) $X(n) - aX(n-1) = Z(n) \xrightarrow{\mathcal{Z}} X(z)(1-a\bar{z}^{-1}) = Z(z)$

$$H(z) = \frac{\text{Salida}}{\text{Entrada}} = \frac{1}{1-a\bar{z}^{-1}}$$

Planteamos que $S_X(\omega) = |H(j\omega)|^2 S_Z(\omega)$

$$\sigma^2 = \left| \frac{1}{1-a\bar{z}^{-1}} \right|^2 \neq \left\{ S_Z(k) + \frac{1}{4}S_Z(k \pm 1) \right\} \rightarrow \sigma^2 = \frac{1}{|1-a\bar{z}^{-1}|^2} \left(1 + \frac{1}{4}\bar{z} + \frac{1}{4}\bar{z}^2 \right)$$

$$\text{si } z = e^{j\omega} \rightarrow \sigma^2 = \frac{1}{|1-a\bar{e}^{-j\omega}|^2} \left(1 + \frac{1}{4}e^{j\omega} + \frac{1}{4}e^{-j\omega} \right) = \frac{1 + \frac{1}{2}\cos(j\omega)}{-2a\cos(j\omega) + a^2 + 1}$$

$$\text{Si los factores es cte } \frac{d}{dx} = 0 \rightarrow \frac{-(\alpha^2 + 4\alpha + 1) \operatorname{sen}(j\omega)}{\epsilon(2\alpha \cos(j\omega) - \alpha^2 - 1)^2} = 0$$

$$\alpha = \sqrt{3} - 2 \quad (< 1)$$

$$\text{Vemos} \rightarrow \left| \begin{array}{l} \frac{1 + \frac{1}{2} \cos(j\omega)}{-2\alpha \cos(j\omega) + \alpha^2 + 1} \\ \alpha = \sqrt{3} - 2 \end{array} \right| = \frac{\sqrt{3} + 2}{4} = \sigma^2 = S_x$$

Entonces al filtro que sea

$$x(n) - (\sqrt{3} - 2)x(n-1) = z(n)$$

$$R_z = C_1 \quad \wedge \quad R_x = S(k) \left(\frac{\sqrt{3} + 2}{4} \right)$$

$$\text{Sobremos que } W = b \cdot X$$

$$\text{puedo decr } h = b S(k) \quad \therefore R_w = b^2 S(k) * R_x$$

$$R_w = b^2 R_x = b^2 \left(\frac{\sqrt{3} + 2}{4} \right) = 1$$

$$b = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3} + 2}{4} \right)^{-1}} = \sqrt{6} - \sqrt{2}$$

$$\frac{w(n)}{b} - \frac{a}{b} w(n-1) = z(n)$$

$$W(j\omega) \left(\frac{1}{b} - \frac{a}{b} e^{-j\omega} \right) = z(j\omega)$$

$$\frac{W(j\omega)}{z(j\omega)} = H(j\omega) = \frac{1}{\frac{1}{b} - \frac{a}{b} e^{-j\omega}} \quad \left| \begin{array}{l} \sim |H(j\omega)|^2 = \frac{2}{\cos(j\omega) + 2} \\ b = \sqrt{6} - \sqrt{2} \\ a = \sqrt{3} - \sqrt{2} \end{array} \right.$$

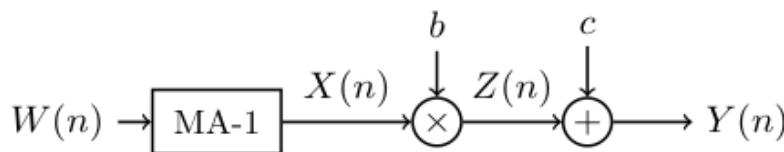
$$S_w(j\omega) = \frac{2}{\cos(j\omega) + 2} \cdot S_z(j\omega) = \frac{2}{\cos(j\omega) + 2} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} e^{j\omega} + \frac{1}{4} e^{-j\omega} \right) = 1 = S_w \quad \therefore R_z = \sigma_w^2 = 1$$

Ejercicio 14 - Generación de muestras de un proceso

Se desea generar muestras de un proceso ESA $Y(n)$ con media $\mu_Y = \frac{1}{2}$ y autocovarianza:

$$C_Y(k) = \delta(k) + \frac{1}{4} [\delta(k-1) + \delta(k+1)].$$

Para ello se tienen muestras de un proceso de ruido blanco $W(n)$ de media nula y varianza unitaria. Para generar las muestras de Y se utiliza el siguiente sistema:



El proceso MA-1 es de la forma:

$$X(n) = aW(n-1) + W(n).$$

Las constantes a , b y c deben determinarse de modo que el proceso Y cumpla lo pedido.

1. Utilice lo aprendido en el ejercicio 9 para justificar que la estructura propuesta tiene sentido.
2. Halle $\mathbb{E}[Z(n)]$ y verifique que no depende de a ni de b . Elija c de modo que $\mathbb{E}[Y(n)] = \mu_Y = \frac{1}{2}$.
3. Determine las constantes a y b de modo que la covarianza de Z sea igual a la de Y , es decir: $C_Z(k) = C_Y(k)$ para todo k . Elija a de modo que $|a| < 1$.

$$2. \quad \mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[Z+c] = \mathbb{E}[Z] + c = b\mathbb{E}[X(n)] + c = b\mathbb{E}[aW(n-1) + W(n)] + c$$

$$\text{como } \mathbb{E}[W(n)] = 0 \xrightarrow{\wedge \text{ESA}} b\mathbb{E}[aW(n-1) + W(n)] + c = (ab + 1)\mathbb{E}[W(n)] + c = \frac{1}{2} = c = \mathbb{E}[Y]$$

$$3. \quad \gamma = \frac{1}{2} + z$$

$$S_w = 1$$

$$S_x = |H(j\omega)|^2 S_w$$

$$x(n) = w(n) + aw(n-1)$$

$$\frac{X(j\omega)}{W(j\omega)} = 1 + ae^{-j\omega}$$

$$\begin{aligned} S_x &= |1 + ae^{-j\omega}|^2 = \\ &= 2a \cos(\omega) + a^2 + 1 \\ &= a e^{j\omega} + a e^{-j\omega} + a^2 + 1 \end{aligned}$$

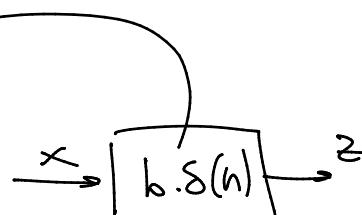
trago que obtener uno R_x que no tiene lo R_y con un factor de escalamiento de diferencia.

Condición de adelante para otros

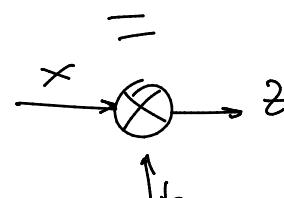
$$R_z = E[(\gamma(t-\frac{1}{2})(\gamma(t+\tau)-\frac{1}{2})] = C_\gamma = S(k) + \frac{1}{4}S(k \pm 1) \xrightarrow{R_z} \left(1 + \frac{\cos(\omega)}{2}\right) S_z$$

$$S_z = |b|^2 S_x$$

Pensando el multiplicador:



$$S_x = \left(1 + \frac{\cos(\omega)}{2}\right) \frac{1}{|b|^2}$$



$$\alpha e^{j\omega} + \alpha e^{-j\omega} + \alpha^2 + 1 = \left(1 + \frac{\cos(\omega)}{2}\right) \frac{1}{|b|^2}$$

$$2\alpha \cos(\omega) + \alpha^2 + 1 = \frac{1}{|b|^2} + \frac{1}{2|b|^2} \cos(\omega)$$

$$\begin{cases} 2\alpha = \frac{1}{2|b|^2} \\ \alpha^2 + 1 = \frac{1}{|b|^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} \alpha &= 2 - \sqrt{3} \\ b &= \frac{(\sqrt{3} + 1)\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$



Problema: $S_x = |1 + \alpha e^{-j\omega}|^2 = -2(\sqrt{3}-2)(\cos(\omega)+2)$

$$S_z = b^2 S_x = \underbrace{\frac{\cos(\omega) + 1}{2}}_{(\text{el multiplicador})} \rightarrow P_z = \underbrace{\frac{1}{4} \delta(\tau \pm 1) + \delta(\gamma)},$$

Como $E[z] = 0$ $R_z = C_z = C_0$ ✓

Shows $z + \frac{1}{2} \rightarrow E[z + \frac{1}{2}] = E[u] = \frac{1}{2}$

Yule-Walker

$$R_y(n) + \sum_{i=1}^m a_i R_y(n-i) = \sigma_n^2 S_{y,0} \quad n \geq 0$$

$$R_y(n) = R_y(-n) \quad n < 0$$

Se proponen una solución de p^k , se construye

$$P^{n-m} (p^m + \sum_{i=1}^m a_i p^{m-i}) = 0 \quad n \geq 0$$

equivalente $q^m + \sum_{i=1}^m a_i p^{m-i} = 0$ polinomio de m raíces.

Cada Raiz p_i da lugar a una solución $s_i(n)$

$$R_y(n) = \sum_i A_i s_i(n) \quad A_i \text{ se determinan}$$

partir de condiciones iniciales.

- Raíces distintas (reales y complejas)

$$R_y(n) = \sum_{i=1}^m A_i p_i^n \quad n \geq 0 \rightarrow R_y(n) = \sum_{i=1}^m A_i p_i^{in}, n \in \mathbb{Z}$$

- Raíces Repetidas

Si p_1 tiene multiplicidad q_1 la solución se escribe a p_1

$$p_1^n (A_1 + A_2 n + A_3 n^2 + \dots + A_{q_1-1} p_1^{q_1-1}).$$

Si hay raíces p_1, \dots, p_ℓ con multiplicidades q_1, \dots, q_ℓ

$$R_y(n) = \sum_{i=1}^\ell p_i^{in} \sum_{j=0}^{q_i-1} A_{i,j} n^j \quad n \in \mathbb{Z}$$

Pero el caso de Reales distintos.

$$R_Y(n) = \sum_{j=1}^m A_j P_j^{(n)} \quad n \in \mathbb{Z}$$

Reemplazando en la ecuación en diferencias.

$$\sum_{j=1}^m A_j P_j^{(n)} + \sum_{i=1}^m a_i \sum_{j=1}^m A_j P_j^{(n-i)} = \sigma_X^2 S_m$$

$$\text{Defino } Q_{k-1} \rightarrow \sum_{j=1}^m A_j \sum_{i=0}^{k-1} a_i P_j^{(n-i)} = \sigma_X^2 S_m$$

Considerando los conocimientos $n=0, \dots, m-1$

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^m a_i P_i^{(0)} & \dots & \sum_{i=0}^m a_i P_m^{(0)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=0}^m a_i P_i^{(m-1)} & \dots & \sum_{i=0}^m a_i P_m^{(m-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_X^2 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Obtenga la matriz de covarianza de V , C_V .

$$V_1 = X_1, \quad V_2 = X_1 + X_2, \quad V_3 = X_2 + X_3.$$

4. Finalmente, se construye $V = [V_1, V_2, V_3]$, donde

densidad de V .

3. Sea la variable aleatoria $Y = a^T \mathbf{X}$ donde $a = [1, 1, 0]^T$. Obtenga la función de

densidad de Y .

1. Hallar la función de densidad conjunta $f_{X_1, X_2, X_3}(x_1, x_2, x_3)$

$$X_1 \sim U[0, 1] \quad X_2 \sim U[1, 2] \quad X_3 \sim U[2, 3]$$

entre si y están distribuidas de acuerdo a

Se desea un vector aleatorio $\mathbf{X} = [X_1, X_2, X_3]^T$ cuyas componentes son independientes

Ejercicio 1

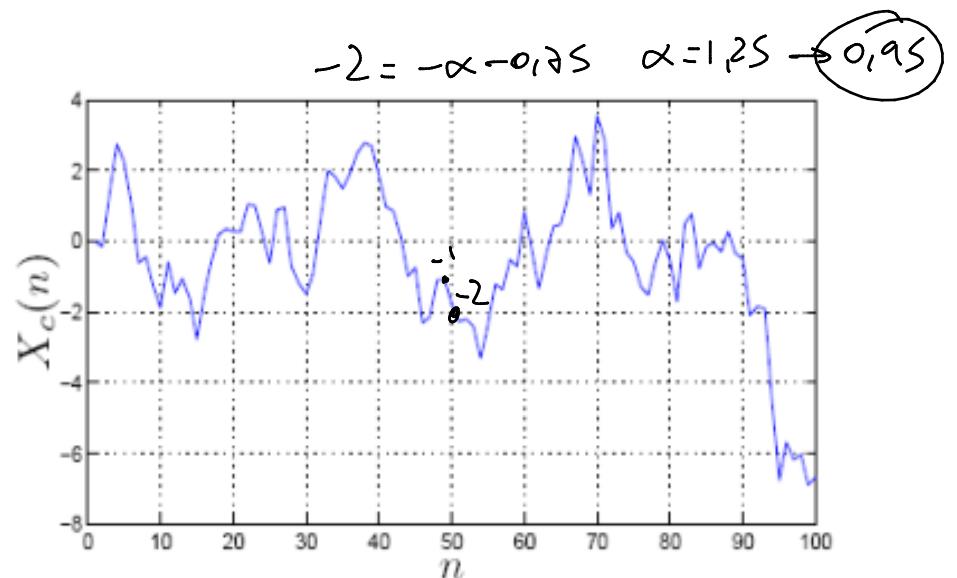
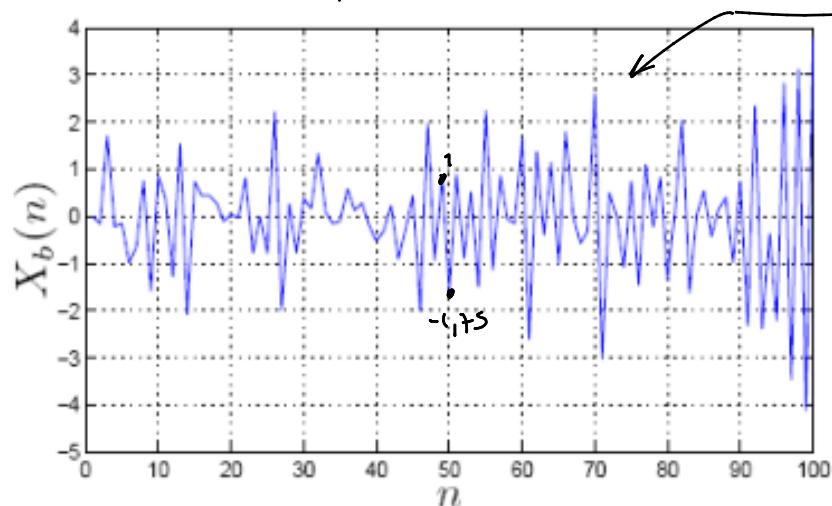
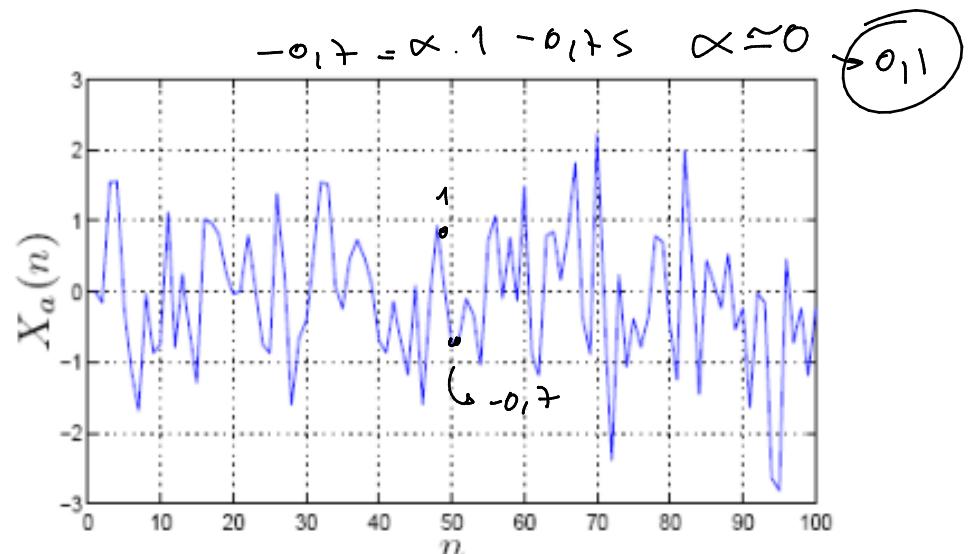
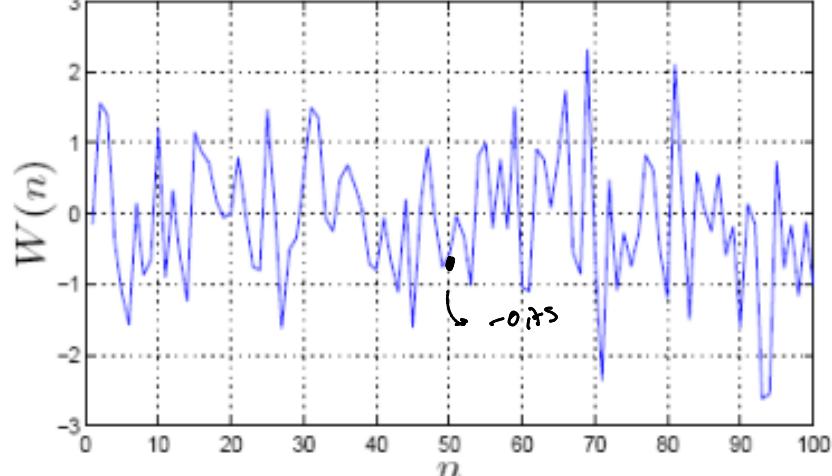
Ejercicio 15 - Realizaciones de procesos AR-1

Se simula numéricamente un proceso autoregresivo de primer orden

$$X(n) = \alpha X(n-1) + W(n)$$

excitado por un ruido blanco de media nula y varianza unitaria. Se realizan tres simulaciones diferentes mostradas en la figura utilizando los siguientes valores del parámetro α :

$$\alpha_1 = 0,95 \quad \alpha_2 = 0,1 \quad \alpha_3 = -0,95$$



1. Asigne el coeficiente α que corresponde a cada uno de los gráficos de la figura.

2. Grafique la autocorrelación del proceso $X(k)$ en cada caso. $\rightarrow ?$

$y-w$

$$R_x(k) + 0,1 R_x(k-1) = \sigma^2 \delta(k)$$

$$\sum_{k=1}^{k=6} R_x(0) + 0,1 R_x(-1) = 1$$

$$R_x(1) + 0,1 R_x(0) = 0$$

$$R_x(0) = 100/99 \quad R_x(1) = -10/99$$

$$R_x(2) = 1/99$$

$$R_x(k) - 0,95 R_x(k-1) = \sigma^2 \delta(k)$$

$$(R_x(0) = 100/99)$$

$$R_x(1) = 10/99$$

$$R_x(2) = 0,95 \cdot R_x(1) = 19/98$$

$$R_x(k) - 0,1 R_x(k-1) = \sigma^2 \delta(k)$$

$$R_x(0) = 100/99$$

$$R_x(1) = 10/99$$

$$R_x(k) = \frac{100}{99}(0,95)^{|k|}; k \in \mathbb{Z}$$

$$R_x(k) = \frac{100}{99}(0,95)^{|k|}; k \in \mathbb{Z}$$

$$R_x(k) = -0,1 R_x(k-1)$$

$$R_x = \frac{100}{99} \cdot (-0,1)^{|k|}, k \in \mathbb{Z}$$

$$R_x(0) = 400/39$$

$$R_x(1) = -\frac{380}{39}$$

$$R_x(k) = \frac{400}{39}(-0,95)^{|k|}; k \in \mathbb{Z}$$

Ejercicio 16 - Procesos AR-2

El modelo del proceso AR2, $X(n)$ es:

$$X(n) = a_1 X(n-1) + a_2 X(n-2) + W(n)$$

donde $W(n)$ es una secuencia de ruido blanco y a_1 y a_2 son coeficientes reales.

1. Expresar la función de transferencia $H(z)$ del sistema lineal que, excitado por la secuencia de ruido blanco, entrega como salida el proceso AR2.
2. Obtener y resolver la ecuación en diferencias que debe satisfacer la secuencia de autocorrelación.
3. Verifique analíticamente las siguientes propiedades:
 - a) En el caso de polos reales y distintos, la secuencia de autocorrelación decrece exponencialmente. Analizar el caso en que ambos polos son positivos, ambos negativos y uno positivo y otro negativo.
 - b) En el caso de polos complejos conjugados, la secuencia de autocorrelación es pseudoperiódica.

$$1. \quad X(j\omega) - a_1 X(j\omega) e^{-j\omega} - a_2 X(j\omega) e^{-2j\omega} = w(j\omega)$$

$$\frac{X(j\omega)}{w(j\omega)} = H(j\omega) = \frac{1}{1 - a_1 e^{-j\omega} - a_2 e^{-2j\omega}} \rightarrow S_X = \left| \frac{1}{1 - a_1 e^{-j\omega} - a_2 e^{-2j\omega}} \right|^2 \sigma^2$$

$$2. \quad x(n) - a_1 x(n-1) - a_2 x(n-2) = w(n)$$

$$\mathbb{E}[(x(n) - a_1 x(n-1) - a_2 x(n-2))(x(n+k) - a_1 x(n+k-1) - a_2 x(n+k-2))] = R_x$$

$$R_x + \sigma^2 R_x + a_2^2 R_x - a_1 R_{x,k-1} - a_2 R_{x,k-2} - a_1 R_{x,k+1} + a_1 a_2 R_{x,k-1} - a_2 R_{x,k+2} + a_1 a_2 R_{x,k+1}$$

$$R_x(1 + a_1^2 + a_2^2) + R_{x,k-1}(a_1 a_2 - a_1) + R_{x,k+1}(a_1 a_2 - a_1) - a_2 R_{x,k+2} - a_2 R_{x,k-2} = \sigma^2 \delta(k)$$

$$x(1 + a_1^2 + a_2^2) + x z^{-1} (a_1 a_2 - a_1) + x z (a_1 a_2 - a_1) - a_2 x z^{-2} - a_2 x z^2 = \sigma^2$$

$$x = \frac{\sigma^2}{(1 + a_1^2 + a_2^2) + (a_1 a_2 - a_1)(z^{-1} + z) - a_2(z^2 + z^{-2})}$$

↳ se transformó de esto es la solución

$$S_X = \left| \frac{1}{1 - a_1 e^{-j\omega} - a_2 e^{-2j\omega}} \right|^2 \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{2 a_2 (a_1 \cos(\omega) - 1) \cos(2\omega) + 2 a_1 a_2 \sin(\omega) \sin(2\omega) - 2 a_1 \cos(\omega) + a_1^2 + a_2^2 + 1}$$

$$y-\omega: R_x(k) - a_1 R_x(k-1) - a_2 R_x(k-2) = \vec{\sigma} \delta(k)$$

$$R_x (1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}) = \sigma^2$$

$$R_x = \frac{\sigma^2}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}$$

$$\frac{z^2 \sigma^2}{z^2 - a_1 z - a_2}$$

$$\text{polos } z = \pm \sqrt{\frac{a^2 + 4b}{2}} \pm \rho$$

$$\frac{z^2 \sigma^2}{z^2 - a_1 z - a_2}$$

polos $\rightarrow \pm \sqrt{\alpha^2 + 4b} \pm i\beta$

Si, son polos reales con raíz

$$\frac{z^2 - \beta^2}{(z - p_1)(z - p_2)}$$

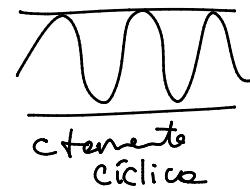
Aprox $= \frac{A}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{B}{1 - p_2 z^{-1}}$

$\sum u(n) + p_2 u(n)$, $\sum u(n)$ decreciente.

Si los polos son CC $\rightarrow \frac{\sigma^2}{z^2 + p}$ $\rightarrow \text{remolde } u(\omega_0 t) u(t)$

↳ si estás en círculo unitario

si $|p| < 1 \rightarrow u(\omega_0 t) e^{-\lambda t} u(t)$ oscila



Autocorrelación del AR-m

Para el caso general, procedemos como para el AR-1, partiendo de la ecuación en diferencias:

$$Y(k) + \sum_{i=1}^m a_i Y(k-i) = X(k),$$

$$\mathbb{E}[Y(k)Y(k-n)] + \sum_{i=1}^m a_i \mathbb{E}[Y(k-i)Y(k-n)] = \mathbb{E}[X(k)Y(k-n)].$$

$$R_Y(n) + \sum_{i=1}^m a_i R_Y(n-i) = \mathbb{E}[X(k)Y(k-n)].$$

Analizando como antes el término $\mathbb{E}[X(k)Y(k-n)]$, obtenemos las ecuaciones de Yule-Walker.

Ejercicio 18 - Modelos AR-m

Suponga que se estima la función de autocorrelación de un proceso ESA $X(n)$ alrededor de $k = 0$ y se obtienen los siguientes valores:

$$R_X(0) = 2, \quad R_X(1) = 0,8 \quad R_X(2) = 0,82 \quad R_X(3) = 0,728 \quad R_X(4) = 0,6562$$

Determine modelos AR de orden 1, 2, 3 y 4 para el proceso $X(n)$ considerando las condiciones anteriores. ¿Qué conclusiones puede extraer?

$$R_X(k) + \sum_{i=1}^n a_i R_X(k-i) = \sigma^2 \delta(k)$$

$$\text{orden 1}) R_X(k) + a_1 R_X(k-1) = \sigma^2 \delta(k)$$

$$k=0 \quad 2 + a_1 0,8 = 1 \rightarrow a_1 = -\cancel{5}/4$$

$$\text{orden 2}) R_X(k) + a_1 R_X(k-1) + a_2 R_X(k-2) = \sigma^2 \delta(k)$$

$$k=0 \quad 2 + a_1 0,8 + a_2 0,8 = 1$$

$$k=1 \quad 0,8 + a_1 2 + a_2 0,8 = 0$$

$$a_1 = \cancel{1}/6$$

$$a_2 = -\cancel{17}/123$$

3) 3 EC

Ejercicio 3. Sean $X(n)$ e $Y(n)$ dos procesos en tiempo discreto independientes entre si. Se forma el procesos multiplicador $z(n) = X(n)Y(n)$. Se sabe que

- $E[X(n)] = \alpha n$, $\alpha \neq 0$ una constante; $\mathbb{E}[Y(n)] = 0$;
- $R_X(n_1, n_2) = f(n_1 - n_2)$, y $f(\cdot)$ es una función determinística; $R_y(n_1, n_2) = \delta(n_1 - n_2)$.

Indique si este nuevo proceso es ESA y obtenga la autocorrelación de $Z(n)$.

$$E[Z] = 0 \cdot \infty = 0 \quad \text{Es } 1^{\text{er}} \text{ orden}$$

$$R_Z = E[(X(n) Y(n))(X(n+k) Y(n+k))] \\ R_X(n, n+k) + R_Y(n, n+k) + E[X(\cdot) \dots] \xrightarrow{\text{ignora}} \text{indp} \rightarrow \text{discr} \therefore 0$$

$$R_Z = f(n-n_k) + \delta(n_1 - n_2) \rightarrow \text{Es } 2^{\text{do}} \text{ orden}$$

\therefore Nuevo proceso Z \leftrightarrow ESA