פתרון תרגיל 5 בחלקיקים אלמנטריים

1. חלקיק π ...

(1) $\quad M_\pi c^2 = 135 \, MeV$

(2) $\quad \Delta t \, \Delta E \lesssim \hbar$

(3) $\quad \Delta t < \dfrac{\hbar}{\Delta E} = \dfrac{\hbar}{2M_\pi c^2}$ (2 חלקיקים של π)

$\quad r = C\Delta t = \dfrac{\hbar C}{2 m_\pi c^2} =$

(4)

$\quad\quad = 0.78 \, 10^{-13} \, cm \sim$

$\quad\quad \sim 10^{-13} \, cm$

$P(uud)$

$n(udd)$

$\pi^-(\bar{u}d)$

(1) $\quad f(\epsilon) = e^{-\frac{\epsilon}{\mu T}} e^{-\sqrt{\frac{\epsilon_G}{\epsilon}}}$ $\overline{f(\epsilon)}$

א. נמצא קיצון של הפונקציה

(2) $\quad \dfrac{df}{d\epsilon} = -\dfrac{1}{\mu T} e^{-\frac{\epsilon}{\mu T}} e^{-\sqrt{\frac{\epsilon_G}{\epsilon}}} + \dfrac{1}{2} \dfrac{\sqrt{\epsilon_G}}{\epsilon^{3/2}} e^{-\sqrt{\frac{\epsilon_G}{\epsilon}}} e^{-\frac{\epsilon}{\mu T}}$ (אה!)

(3) $\quad \dfrac{df}{d\epsilon} = f(\epsilon)\left[-\dfrac{1}{\mu T} + \dfrac{\sqrt{\epsilon_G}}{2\epsilon^{3/2}} \right]$

(4) $\quad \boxed{\epsilon_0 = \left[\dfrac{\mu T}{2}\right]^{2/3} \epsilon_G^{1/3}}$ $\quad$ זהו המקסימום שלנו! $\Rightarrow$ מקסימום!

(5) $\quad f(\epsilon) = e^{-\frac{\epsilon}{\mu}\sqrt{\frac{\epsilon_G}{\epsilon}}} \equiv e^{W(\epsilon)}$ $\quad$ ב. נציב את (1) (פיתוח)

נפתח את $W(\epsilon)$ סביב ϵ_0

(6) $\quad W(\epsilon) = W(\epsilon_0) + \dfrac{dW}{d\epsilon}\Big)_{\epsilon_0} (\epsilon - \epsilon_0) + \dfrac{1}{2}\dfrac{d^2W}{d\epsilon^2}(\epsilon-\epsilon_0)^2 + \Theta((\epsilon-\epsilon_0)^3)$

כיוון שאנחנו סביב מקסימום, אז $\dfrac{dW}{d\epsilon}\Big)_{\epsilon_0} = 0$ וכך נקבל

(7) $\quad \dfrac{dW}{d\epsilon}\Big)_{\epsilon_0} = \left[-\dfrac{1}{\mu T} + \dfrac{\sqrt{\epsilon_G}}{2\epsilon^{3/2}} \right]_{\epsilon_0} = 0 \quad \to (4)$

נחשב את הנגזרת השנייה

(8) $\quad \dfrac{d^2W}{d\epsilon^2} = -\dfrac{3\sqrt{\epsilon_G}}{4} \dfrac{1}{\epsilon^{5/2}}\Big)_{\epsilon_0} = -\dfrac{3}{4}\epsilon_G^{-\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{2} + \frac{1}{2}} \left(\dfrac{\mu T}{2}\right)^{-\frac{5}{3}\cdot\frac{2}{2}} =$

$\quad = -\dfrac{3}{4}\epsilon_G^{-\frac{1}{3}} \left(\dfrac{\mu T}{2}\right)^{-\frac{5}{3}}$

(9) $\quad W(\epsilon) \approx W(\epsilon_0) - \dfrac{3}{8}\epsilon_G^{-\frac{1}{3}} \left(\dfrac{\mu T}{2}\right)^{-\frac{5}{3}} (\epsilon-\epsilon_0)^2 \cdots$ $\quad$ סוף סוף! ונקבל

ל.3.ר ← ל.(5) :

(10) $f(\varepsilon) = e^{W(\varepsilon)} = \underbrace{\exp(W(\varepsilon_0))}_{C} \exp\left[-\frac{3}{8}\varepsilon_G^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{kT}{2}\right)^{-\frac{5}{3}}(\varepsilon-\varepsilon_0)^2\right] \overset{\underset{1}{}}{=}$

$\overset{\cdot}{=} C \cdot \exp\left[-\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)^2}{(\frac{\Delta}{2})^2}\right] \ll 1$ | כלומר

נראה כי

(11) $\left(\frac{1}{2}\Delta\right)^2 = \frac{8}{3}\varepsilon_G^{\frac{1}{3}}\left(\frac{kT}{2}\right)^{+\frac{5}{3}}$

(12) $\frac{\Delta}{2} = \frac{2^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3}}\varepsilon_G^{\frac{1}{6}}\left(\frac{kT}{2}\right)^{\frac{5}{6}} = \frac{2\cdot 2^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3}\,2^{\frac{5}{6}}}\varepsilon_G^{\frac{1}{6}}(kT)^{\frac{5}{6}}$

(13) $\boxed{\Delta = \frac{4}{\sqrt{3}\,2^{\frac{1}{3}}}\varepsilon_G^{\frac{1}{6}}(kT)^{\frac{5}{6}}}$ נמשיך ...

(14) $\int f(\varepsilon)\,d\varepsilon = \sqrt{2\pi}\,f(\varepsilon_0)\,\Delta =$

$= \int f(\varepsilon_0)\cdot e^{-\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)^2}{(\frac{\Delta}{2})^2}}\,d\varepsilon$

(15) $dx = \frac{2}{\Delta}d\varepsilon \Leftarrow \int_{-\infty}^{\infty} x \Leftarrow x = \frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\frac{\Delta}{2}}$

(16) $\int_{-\infty}^{\infty} f(\varepsilon_0)\,e^{-\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)^2}{(\frac{\Delta}{2})^2}}\,d\varepsilon = \int f(\varepsilon_0)\frac{\Delta}{2}\cdot e^{-x^2}\,dx =$

$= f(\varepsilon_0)\frac{\Delta}{2}\int e^{-x^2} = f(\varepsilon_0)\frac{\Delta}{2}\sqrt{\pi}$ $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$

(17) $\int f(\varepsilon)\,d\varepsilon = f(\varepsilon_0)\,\Delta\,\sqrt{\pi}\,\frac{1}{2}$ כלומר

$$\frac{4}{6} \qquad R = n_A n_B \langle \sigma v \rangle =$$

$$= n_A n_B \cdot \frac{1}{(\mu T)^{3/2}} \left(\frac{8}{\pi \mu}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty S(\epsilon) F(\epsilon) \, d\epsilon =$$

(18)
$$\overset{(17)}{=} n_A n_B \frac{1}{(\mu T)^{3/2}} \left(\frac{8}{\pi \mu}\right)^{\frac{1}{2}} F(\epsilon_0) \Delta \sqrt{\pi} \frac{S(\epsilon_0)}{2} =$$

$$\overset{(13)}{=} n_A n_B \frac{1}{(\mu T)^{3/2}} \left(\frac{8}{\pi \mu}\right)^{\frac{1}{2}} F(\epsilon_0) \frac{4}{\sqrt{3} \, 2^{\frac{1}{3}}} \epsilon_G^{\frac{1}{6}} (\mu T)^{\frac{5}{6}} \sqrt{\pi} \frac{S(\epsilon_0)}{2}$$

$$\overline{F(\epsilon_0)} \qquad (\text{6 43N}) \quad \text{לפי}$$

(19)
$$F(\epsilon_0) = e^{-\left[\frac{\epsilon_0}{\mu T} + \sqrt{\frac{\epsilon_G}{\epsilon_0}}\right]} \overset{(14)}{=} \exp\left\{-\left[\frac{1}{\mu T}\left(\frac{\mu T}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \epsilon_G^{\frac{1}{3}} + \right.\right.$$

$$\left. + \epsilon_G^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{\mu T}{2}\right)^{-\frac{2}{3}} \epsilon_G^{-\frac{1}{6}}\right]\right\} = \exp\left\{-\left[(\mu T)^{-\frac{1}{3}} 2^{-\frac{2}{3}} \epsilon_G^{\frac{1}{3}} + \right.\right.$$

$$\left. + \epsilon_G^{\frac{1}{3}} (\mu T)^{-\frac{1}{3}} \cdot 2^{+\frac{1}{3}}\right]\right\} = \exp\left\{-\left[\left(\frac{\epsilon_G}{4 \mu T}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(1 + 2^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{3}}\right)\right]\right\}$$

$$\underset{2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} = 2}{\underbrace{}}$$

$$\overline{ \text{יו}}$$

20
$$\boxed{f(\epsilon_0) = \exp\left[-3\left(\frac{E_G}{4 \mu T}\right)^{\frac{1}{3}}\right]}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} \qquad (7)^{\prime} \quad (18) \qquad 2^{1/3}$$

(21)
$$R = n_A n_B \frac{1}{(\mu T)^{2/3}} \left(\frac{8}{\pi \mu}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-3\left(\frac{\epsilon_G}{4 \mu T}\right)^{\frac{1}{3}}} \frac{4}{\sqrt{3} \, 2^{\frac{1}{3}}} \epsilon_G^{\frac{1}{6}} \sqrt{\pi} \, S(\epsilon_0)$$

(22)
$$R = n_A n_B \frac{2}{(\mu T)^{2/3}} \frac{\sqrt{\mu}}{\mu} \left(\frac{8}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-3\left(\frac{\epsilon_G}{4 \mu T}\right)^{\frac{1}{3}}} \epsilon_G^{\frac{1}{6}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{3} \, 2^{\frac{1}{3}}} S(\epsilon_0)$$

$$\left(\frac{2 \cdot (2 \cdot 4)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3} \cdot 2^{\frac{1}{3}}} = \frac{2 \sqrt{2} \cdot 2}{\sqrt{3} \cdot 2^{\frac{1}{3}}}\right)$$

(23) $R = n_A n_B S(\epsilon_0) \dfrac{4\sqrt{2}}{2^{\frac{3}{2}}\sqrt{3}} \epsilon_0^{\frac{1}{6}} \cdot \dfrac{1}{\mu} \dfrac{\sqrt{\mu}}{(kT)^{\frac{3}{2}}} e^{-3\left(\frac{\epsilon_G}{4kT}\right)^{\frac{1}{3}}}$: ניח

(24) $\sqrt{\mu} = \dfrac{\epsilon_0^{\frac{1}{2}}}{\pi\alpha Z_A Z_B \sqrt{2} c}$ $\Leftarrow$ $\epsilon_0 = \left[\pi\alpha Z_A Z_B c\right]^2 2\mu$: כי

נציב:

(25) $\boxed{R = n_A n_B S(\epsilon_0) \dfrac{1}{(kT)^{\frac{3}{2}}} \dfrac{4\sqrt{2}}{2^{\frac{3}{2}}\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\epsilon_0^{\frac{1}{6}}}{\mu} \cdot \dfrac{\epsilon_0^{\frac{1}{2}}}{\pi\alpha Z_A Z_B \sqrt{2} c} \exp\left[-3\left(\dfrac{\epsilon_G}{4kT}\right)^{\frac{1}{3}}\right]}$

נשאיר!

נשים לב כי μ תלוי ו־ כ $\mu = A_r m_p$

(26) $R = n_A n_B S(\epsilon_0) \dfrac{4^{\frac{2}{3}}}{(4kT)^{\frac{2}{3}}} \dfrac{4\sqrt{2}}{2^{\frac{3}{2}}\sqrt{3}} \dfrac{\epsilon_0^{\frac{2}{3}}}{A_r m_p} \dfrac{1}{\pi\alpha Z_A Z_B \sqrt{2} c} \exp\left[-3\left(\dfrac{\epsilon_G}{4kT}\right)^{\frac{1}{3}}\right]$: נציב

$\underline{2.6}$

(27) $\begin{cases} \alpha = \frac{1}{137} \approx 0.0073 \\ m_p = 1.67\,10^{-24}\,gr \\ c = 2.9\,10^{10}\,\frac{cm}{s} \end{cases}$

$\dfrac{2.6 \cdot 4^{\frac{2}{3}}}{\pi\sqrt{2}\cdot 0.007 \cdot 1.67\,10^{-24}\cdot 2.9\,10^{10}} \approx 4.0\,10^{15}$

(28) $R = n_A n_B S(\epsilon_0)\cdot 4\cdot 10^{15}\left(\dfrac{\epsilon_G}{4kT}\right)^{\frac{2}{3}} \dfrac{1}{A_r m_p \pi\alpha Z_A Z_B c} \exp\left[-3\left(\dfrac{\epsilon_G}{4kT}\right)^{\frac{1}{3}}\right]$ $\frac{cm^3}{sec}$

$1_{barn} = 10^{-24}\,cm^2$

$1_{erg} = 6.24\,10^8\,/kev$

נעביר את היחידות ב־ $S(\epsilon_0)$

$4\cdot 10^{15}/(10^{+24}\cdot 6.2\,10^8) = 6.4\,10^{-18}$

(29) $\boxed{R = 6.4\,10^{-18} \dfrac{n_A n_B}{A_r Z_A Z_B} S(\epsilon_0)\left(\dfrac{\epsilon_G}{4kT}\right)^{\frac{2}{3}} \exp\left(-3\left(\dfrac{\epsilon_G}{4kT}\right)^{\frac{1}{3}}\right)}$

☺ ק׳

(1) $p + {}^{14}_{7}N \rightarrow {}^{15}_{8}O + \gamma$
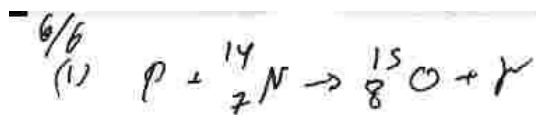
(2) $E_G = (\pi \alpha z_1 z_2)^2 2\mu c$

(3) $z_1 = 1 \; , \; z_2 = 7$

(4) $\mu = \frac{14}{15} m_p$ $\qquad\qquad\qquad \Longleftarrow \qquad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_p \cdot 14 m_p}{m_p + 14 m_p} = \frac{14}{15} m_p$

(5) $\alpha = \frac{1}{137}$

(6) $\boxed{E_G = 44.9 \, MeV}$

(7) $L = \varepsilon M_{core}$ $\qquad\qquad\qquad$ ב. נמצא את ____

(8) $\varepsilon \sim \S T^{-\frac{2}{3}} e^{-3\left(\frac{E_G}{4kT}\right)^{\frac{1}{3}}}$ $\qquad$ נכתוב את קצב שחרור האנרגיה (לעצמנו) כ:

(9) $L \sim T^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-3\left(\frac{E_G}{4kT}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$

(10) $\ln L \sim -\frac{3}{2} \ln T - 3\left(\frac{E_G}{4kT}\right)^{\frac{1}{3}}$

עכשיו ____ הלוגריתמית (נגזרת):

(11) $\frac{d \ln L}{d \ln T} : T\frac{d \ln L}{dT} = -\frac{3}{2} + 3\left(\frac{E_G}{4k}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot T \cdot T^{-\frac{4}{3}}$

$\underbrace{\quad}_{T^{-\frac{1}{3}}}$

(12) $T \sim 2 \cdot 10^7 K°$ ____ נציב ____ $E_G = 44.9 \, MeV$ את

(13) $4kT = 6.9 \, keV.$ ____

(14) $\left(\frac{E_G}{4kT}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{44.9 \cdot 10^3 \, keV}{6.9 \, keV}\right)^{\frac{1}{3}} = 18.7$

(15) $\frac{d \ln L}{d \ln T} = 18.7 - \frac{3}{2} = 17.2$

(16) $\boxed{L \sim T^{17}}$

(1) $\quad P_{DMR} = \frac{1}{20}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{h^2}{m_e}\left(\frac{Z}{A}\right)^{\frac{5}{3}}\left(\frac{\delta}{m_p}\right)^{\frac{5}{3}}$

נתון בשאלה:

(2) $\quad P_{th}^0 = 2n_e kT = 2\frac{Z}{A}\frac{\delta}{m_p}kT$

קבועים ידועים:

(3) $\quad k = 1.4\cdot10^{-16}\frac{erg}{K}, \quad h = 6.6\cdot10^{-27}\frac{erg}{s}$

(4) $\quad m_p = 1.67\cdot10^{-24}g, \quad m_e = 9.109\cdot10^{-28}g$

$\frac{1}{2}$ — עבור השמש נניח כי:

(5) $\quad \delta_0 = 150\frac{g}{cm^3}$

(6) $\quad T_0 = 15\cdot10^6 K$

נציב:

(7) $\quad P_{th} = 2\frac{Z}{A}\frac{150\frac{g}{cm^3}}{1.67\cdot10^{-24}g}\cdot 1.4\cdot10^{-16}\cdot 15\cdot10^6\,erg$

ומכיוון שהחומר מורכב בעיקר מ- $Z\sim A$ נציב:

(8) $\quad \boxed{P_{th(sun)} = 3.8\cdot10^{17}\frac{dynes}{cm^2}}$

שים לב כי: $\Rightarrow P_{DMR} < P_{th}$ כלומר החומר לא מנוון!

(9) $\quad \boxed{P_{DMR(sun)} = 4.16\cdot10^{16}\frac{dynes}{cm^2}}$

עבור ננס לבן נניח:

(10) $\quad \delta_{WD} = 10^6\frac{g}{cm^3}$

(11) $\quad T_{WD} \sim 10^7 K$

$\frac{Z}{A}\sim\frac{1}{2}$

(12) $\quad \boxed{P_{th(WD)} = 2\cdot10^{20}\frac{dynes}{cm^2}}$

(13) $\quad \boxed{P_{DMR(WD)} = 3\cdot10^{22}\frac{dynes}{cm^2}}$

כלומר בננס לבן החומר מנוון ואכן מנוון

נניח שבכוכב נויטרונים ... $m_e \rightarrow m_n$ $m_e \rightarrow m_n$

כל הנויטרונים מנוונים:
(וכו' גם סופר.)

(1) $\quad p_n = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{h^2}{20 m_n m_p^{5/3}} \left(\frac{Z}{A}\right)^{\frac{5}{3}} \rho^{\frac{5}{3}}$

זה המשוואה שאנו צריכים! ←

$\boxed{\dfrac{Z}{A} \sim 1}$ כי לכל נויטרון מתאים ... פרוטון ... אלקטרון.

(2) $\quad \langle \rho \rangle = \frac{M}{\frac{4\pi}{3} r^3}$

נשתמש ב־

(3) $\quad P_c = 0.77 \frac{GM^2}{r^4}$ ←

נחשב חישוב כי:

(4) $\quad \rho_c = 5.99 \langle \rho \rangle = 1.43 \frac{M}{r^3}$ וכו'

$\boxed{\begin{array}{l} \text{נשתמש באותות של ... פוליטרופה} \\[4pt] \dfrac{P}{r} \sim \dfrac{GM\rho}{r^2} \sim \dfrac{GM^2}{r^5} \\[8pt] \qquad P \sim \dfrac{GM^2}{r^4} \end{array}}$

נציב: (4'ל 3) (3) ו־ (4) [~~~~]

(5) $\quad 0.77 \frac{GM^2}{r^4} = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{1}{20} \frac{h^2}{m_n m_p^{5/3}} \left[1.43 \frac{M}{r^3}\right]^{\frac{5}{3}}$

$\underbrace{}_{0.04843}$

(6) $\quad \boxed{r_n = 0.114 \cdot \frac{h^2}{G\, m_n m_p^{5/3}} M^{-\frac{1}{3}}}$

(7) $\quad \boxed{r_n = 0.144 \frac{h^2}{G\, m_p^{8/3}} M^{-\frac{1}{3}}}$ נשתמש ... $m_n \approx m_p$ ...

נציב ... כוכב בעל מסה של $1.4 M_\odot$

$G = 6.7 \cdot 10^{-8} \frac{erg \cdot cm}{g^2}$

(8) $\quad r_n = 1.8 \cdot 10^{17} cm \cdot g^{\frac{1}{3}} M^{-\frac{1}{3}}$

(9) $\quad r_n = 1.39 \cdot 10^{6} cm \left(\frac{M}{1.4 M_\odot}\right)^{-\frac{1}{3}}$

(10) $\quad \boxed{r_n \sim 13.9 \, km}$