28/05/07 (10). התכנון: • Nuclear Reaction Rate

• Energy generation by p-p chain in the sun.

CNO cycle in massive stars

White dwarfs:

* non-relativistic and relativistic degeneration gas.

* Mass-Radius Relation.

* Chandrasekhan Mass.

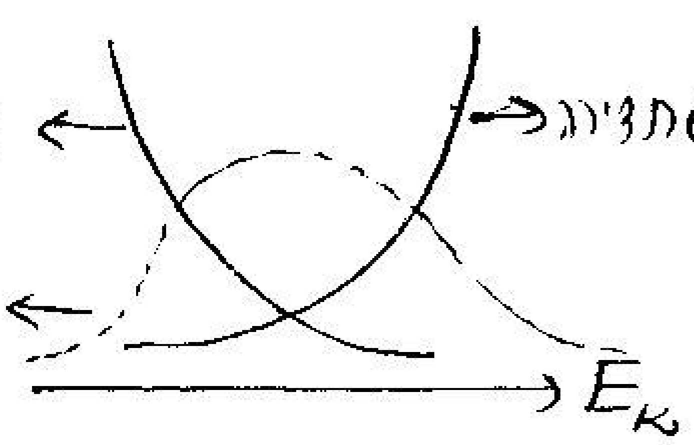
השיעור שעבר הפסקנו בפיתוח נוסחא לקצב האנרגיה בריאקציות גרעיניות p-p בשמש

p-p chain reaction: $4p \to {}^4He$ עם שחרור של $\approx 25\ MeV$.

בחלקיקים יש התפלגות מקסוולאנית של מהירויות/אנרגיות:

התפלגות מקסוולאנית (MB). ← סיכוי לחדירה (Gamow)

מכפלה של שניהם ~ גאוסיאן.



ראינו שחתך הפעולה לאינטראקציה גרעינית הוא:

Cross section for nuclear interaction:

$$* \quad \boxed{\sigma(E) = \frac{S(E)}{E} e^{-\left(\frac{E_G}{E}\right)^{1/2}}}$$

Gamow factor: פקטור המתאר את הסיכוי לחדירה דרך פוטנציאל קולומבי.

$$\boxed{E_G = (\pi \alpha Z_1 Z_2)^2 2 \mu c^2}$$

כאשר: $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, $\alpha = \frac{1}{137}$

למשל: for protons: $E_G = 493\ keV$

יחידות של S: $S \sim keV \sim barn$ ($barn\ 10^{-24} cm^2$)

for: $p + p \to p + n + e^+ + \nu_e$

$$S = 3.8 \cdot 10^{-22}\ keV\text{-}barn$$

for 1 keV proton $\sigma_{pp} = 3.8 \cdot 10^{-46}\ cm^2$

נניח ש- A עובר אינטרקציה עם חלקיקים B ,

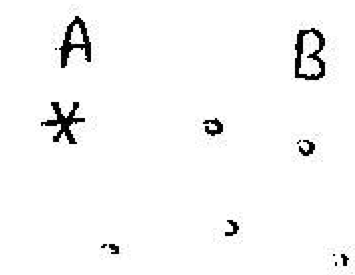
interaction time for particle A interacting with B:

ℓ - mean free path

v - relative speed

n_B = density of B particles

$$\boxed{\tau = \frac{\ell}{v} = \frac{1}{n_B \sigma v}}$$



Interaction rate per particle A is:

$$\frac{1}{\tau} = n_B \sigma v$$

Given particle density n_A

$$\boxed{R_{AB} = n_A n_B \sigma v = \frac{n_A}{\tau}}$$

"rate per unit volume"

(אם A ו- B זהים יש לחלק את R_{AB} ב-2).

אנו מניחים שיש התפלגות מקסווליאנית:

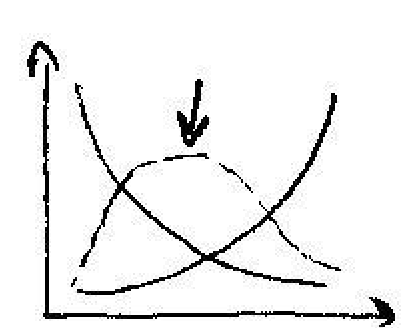
$$<\sigma v> = \int_0^\infty \sigma(v)\, v\, P(v)\, dv$$

for Maxwell distribution:

$$** \qquad P(v)\,dv = \left[\frac{\mu}{2\pi k_B T}\right]^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} \cdot 4\pi v^2 dv$$

ניקח את הביטויים * ו- ** ונציב לאינטגרל של $<\sigma v>$:

$$\boxed{<\sigma v> = \frac{1}{(k_B T)^{3/2}} \left(\frac{8}{\pi \mu}\right)^{1/2} \int_0^\infty S(E)\, \underbrace{e^{-\frac{E}{k_B T} - \left(\frac{E_G}{E}\right)^{\frac{1}{2}}}}_{e^{-f(E)}} dE}$$



Define: $F(E) = \frac{E}{k_B T} + \left(\frac{E_G}{E}\right)^{1/2}$

מהירות הביטוי הנ"ל, (נשאל מהי האנרגיה הטיפוסית של החלקיקים

(כלומר את נק' השיא בעקומה --- , מינימום של $f(E)$):

peaks where $f(E)$ is a minimum

simple calculation... minimum occurs at:

$f(E)$ min: $\boxed{E_0 = \left[\frac{E_G}{4}(k_B T)^2\right]^{1/3}}$

לדוג: for sun at centre: $T = 1.5 \cdot 10^7 K$, $E_G^{pp} = 500\, keV$

השלב הבא הוא לקרב את האקספוננט באינטגרל של $\langle \sigma v \rangle$ ע"י

טיילור כגאוסיאן (נדלג על האלגברה):

Approximate Integrand as a Gaussian expand $f(E)$ around E_0 as a Taylor series to second order:

$$\exp[-F(E)] \cong \exp\left[-3\left(\frac{E_G}{4k_BT}\right)^{1/3}\right] \exp\left[-\frac{(E-E_0)^2}{(\Delta/2)^2}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta = \frac{4}{\sqrt{3}\,2^{1/3}} E_G^{1/6} (k_BT)^{5/6}$$

אחרי הרבה אלגברה מקבלים את התוצאה הבאה!

Use this approximation to integrate analytically:

...some algebra...

$$R_{AB} = \frac{4\sqrt{2}}{2^{1/3}\sqrt{3}} \cdot \frac{E_G^{1/6}\, n_A n_B}{A_r\, m_p} \cdot \frac{E_G}{\pi \alpha Z_A Z_B \sqrt{2}\, c} \, \frac{S(E_0)}{(k_BT)^{2/3}}\, e^{-3\left(\frac{E_G}{4k_BT}\right)^{1/3}}$$

$$\mu \equiv A_r m_p$$

reduced mass in units of proton mass.

for $S(E_0)$ in units of keV-barns:

מקדם הקצב באינטראקציה בין A ל-B. $\Rightarrow$ $$\boxed{R_{AB} = 6.5\cdot 10^{-18} \frac{n_A n_B}{A_r Z_A Z_B} S(E_0) \left(\frac{E_G}{4k_BT}\right)^{\frac{2}{3}} e^{-3\left(\frac{E_G}{4k_BT}\right)^{1/3}}}$$

נרצה לחשב את הנוסחה עבור אינטראקציית p-p בשמש; כלומר נחשב את

קצב יצירת האנרגיה כתלות באינטראקציית p-p:

$$\boxed{\epsilon = \frac{R_{AB} E_{nuc}}{\rho}} \quad [erg\cdot s^{-1} gm^{-1}]$$

E_{nuc} - energy released per interaction.

$$\rho \sim gm \cdot cm^{-3}$$

In centre of the Sun: $T \approx 10^7$, $\rho \approx 100\, gcm^{-3}$

Assume all mass is hydrogen (not really since a lot of helium has already been produced):

for protons: $n_A = n_B = 6\cdot 10^{25}\ cm^{-3}$

$S(E_0) = 4\cdot 10^{-22}$ keV-barn, $\quad \left(\frac{E_G}{4k_BT}\right)^{\frac{2}{3}} = 27.3 \rightarrow e^{\left[-3\left(\frac{E_G}{4k_BT}\right)^{1/3}\right]} = 1.5\cdot 10^{-7}$

for p-p chain : $E_{nuc} = 13.1\ MeV$

so: $R_{pp} = 3.9 \cdot 10^7\ cm^{-3} s^{-1}$, $\epsilon = 8.2\ erg\ g^{-1} s^{-1}$

$$L_{sun} = \epsilon \cdot \underbrace{0.2}_{20\%} \underbrace{M_{sun}}_{2\cdot 10^{33} g} = 3 \cdot 10^{33} erg \cdot s^{-1}$$

that is not enough for fusion

L_{sun} שקיבלנו מאוד קרוב ל- $3.9 \cdot 10^{33} erg \cdot s^{-1}$.

Recall, interaction time:

$$\tau = \frac{n}{2 R_{AB}} = 2.4 \cdot 10^{10}\ yr$$

factor of 2 if A=B

ישנו קשר בין שטף הניוטרינים המגיעים מהשמש ובין ה- R_{AB} שחישבנו פה.

Temperature dependence of p-p chain :

$$L = \epsilon M_{core} \quad (M_{core} \approx 0.2 M_{SUN})$$

$$\epsilon \propto \rho T^{-\frac{2}{3}} \exp\left[-3\left(\frac{E_G}{4 k_B T}\right)^{1/3}\right] \quad [erg^{-1} g^{-1}]$$

$$L \propto T^{-\frac{2}{3}} \exp\left[-3\left(\frac{E_G}{4 k_B T}\right)^{1/3}\right]$$

Let's approximate this as a "power-law" $L \propto T^{\beta}$

near temperature where reactions occur :

$$\ln L = -\frac{2}{3} \ln T - 3\left(\frac{E_G}{4 k_B}\right)^{1/3} T^{-1/3}$$

$$\frac{d \ln L}{d \ln T} = T \frac{d \ln L}{dT} = -\frac{2}{3} + T\left(\frac{E_G}{4 k_B}\right)^{1/3} T^{-\frac{4}{3}} = -\frac{2}{3} + \left(\frac{E_G}{4 k_B T}\right)^{1/3}$$

$E_G^{pp} = 500\ keV$

let's take $T = 10^7 K$

$$\frac{d \ln L}{d \ln T} = -\frac{2}{3} + 5.25 = 4.6$$

$$\ln L = 4.6 \ln T \Rightarrow L \propto T^{4.6} , \beta = 4.6$$

Central temperatures don't change that much in going from

$1 M_\odot$ to $100 M_\odot$ stars,

but $L(100 M_\odot) = 10^6 L_\odot$

$L \propto T^{4.6}$ not enough to give 10^6.

המנגנון שהוצע כדי לפתור בעיה זו: להסתכל על דרך אחרת

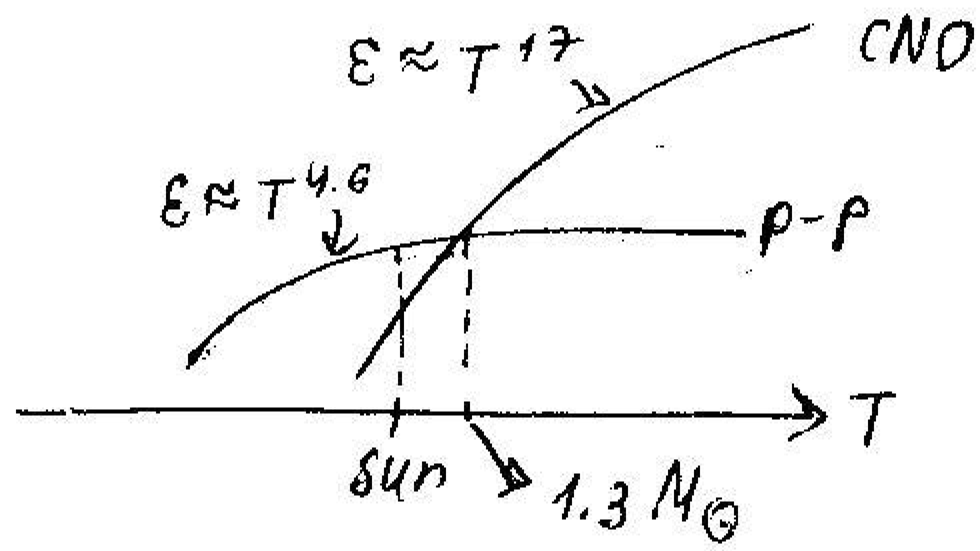
לגמרי להפוך פחמן להליום: בשרשרת תגובה הנקראת [ראה מצגת]

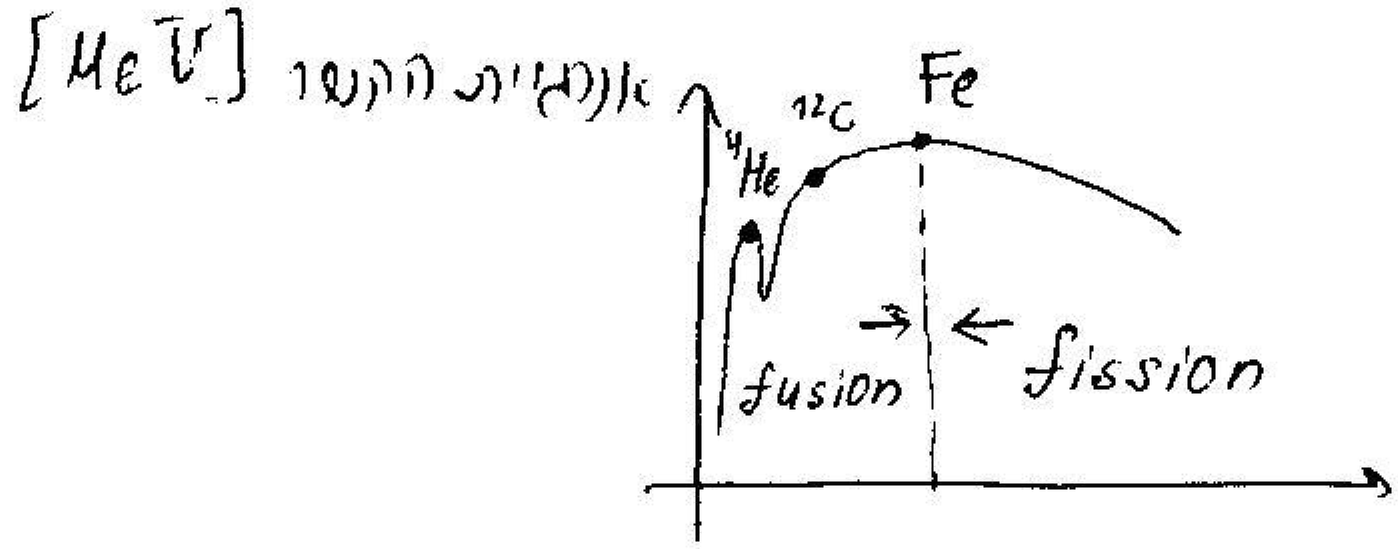
$p + {}^{12}C \rightarrow \ldots \rightarrow {}^{12}C + {}^{4}He$: cycle CNO

תהליך "catalysis"

(הפחמן משתמר).

- במסות גדולות יותר התהליך זה תורם הרבה יותר (עבור מסת השמש התהליך זה תורם כ- 1%), בגלל חתך הפעולה גדל.
- כמות האנרגיה שמשתחררת מתהליך זה היא 25 MeV per cycle.





שיעור אסטרופיזיקה מס' 11

מהרשימות של
הילה בן - דוד

11

White dwarfs:

degenerate gas

mass-radius relation

non-relativistic an relativistic

chandraskhan Mass

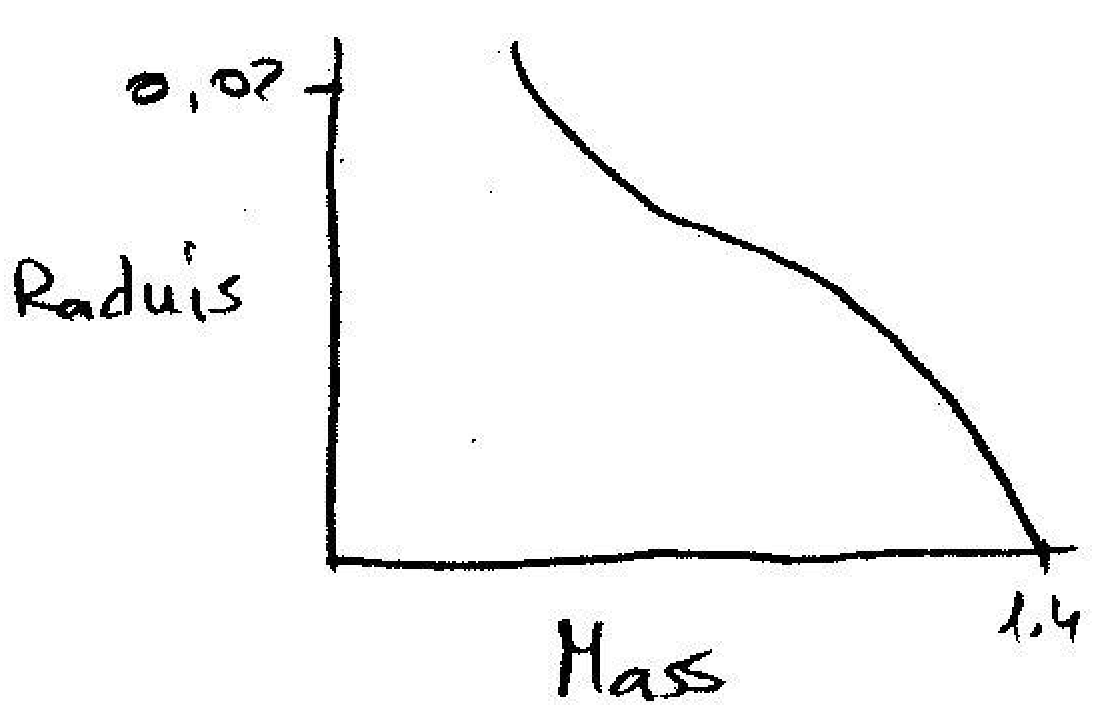
ניזכר בכמה פרטים תצפיתיים: הננס הלבן הראשון שהתגלה היה Sirius B (הכוכב הצמוד ל Sirius A).

ננסים לבנים הם כוכבים הרבה יותר קומפקטיים ודחוסים.

לננסים לבנים מסה עצומה וגודל קטן לכן הצפיפות של הגז בכוכב כזה הרבה יותר גדולה מאשר כוכב רגיל כמו השמש. לכן האלקטרונים מתנהגים כמו בגז-מנוון.

ככל שמגדילים את המסה של ננס לבן הרדיוס שלו קטן יותר! וזה בניגוד לכוכבים של הסדרה הראשית.

ניתן לנסות לשרטט את המסה כפונ' של רדיוס של ננסים לבנים:



ככל שהמסה שואפת ל $1.4M_\odot$ כך הרדיוס שואף לאפס:

$$\boxed{\text{Chandrasekhar Limit: } R \to \infty \text{ as } M \to 1.4M_\odot}$$

המטרה: 1) להבין "לחץ אלקטרונים מנוון" עבור גזים לא-רלטיביסטים ולגז רלטיביסטי.
2) לפתח תיאורטית קשר בין מסה לרדיוס עבור גז מנוון לא רלטיביסטי.

תרמודינמיקה הנחוצה לתיאוריית ננס לבן:

נניח שיש לנו מע' של חלקיקים. אם עבור שינוי אדיאבטי (חום לא נכנס ולא יוצא) שלהגז מתקיים:

$$P \propto n^{\gamma}$$

כאשר: P - לחץ

n - צפיפות חלקיקים

$\gamma \equiv$ אינדקס אדיאבטי

אז ניתן לרשום:

$$\boxed{P = (\gamma - 1)\frac{E_{KE}}{V}}$$

E_{KE} - אנרגיה קינטית פנימית

V - נפח

הוכחה:

החוק הראשון של התרמודינמיקה:

$$dQ = dE_{KE} + PdV$$

עבור טרנספורמציה אדיאבטית:

$$dQ = 0$$

ולכן נקבל:

$$PdV = -dE_{KE}$$

נניח ש: $P \propto n^{\gamma}$ כאשר $n = \frac{N}{V}$ $\left(\frac{\text{מס החלקיקים}}{\text{נפח}}\right)$

אז:

$$PV^{\gamma} = \text{constant}$$

$$d(PV^{\gamma}) = P\gamma V^{\gamma-1}dV + V^{\gamma}dP = 0$$

$$P\gamma dV + VdP = 0$$

$$\Rightarrow VdP = -P\gamma dV = \gamma dE_{KE}$$

$$d(PV) = PdV + VdP = -dE_{KE} + \gamma dE_{KE} = (\gamma - 1)dE_{KE}$$

אזי:

$$PV = (\gamma - 1)\frac{E_{KE}}{V}$$

מ.ש.ל

כמו כן:

$$\Downarrow$$

$$\frac{E_{KE}}{V} \propto n^{\gamma}$$

למשל גז אידיאלי קלאסי לא רלטיביסטי

$$P = nk_BT \quad ; \quad \frac{E_{KE}}{V} = \frac{3}{2}nkT$$

$$(\gamma - 1) = \frac{nkT}{\frac{3}{2}nkT} = \frac{2}{3} \Rightarrow \gamma = \frac{5}{3} \Rightarrow$$

אזי $P \propto n^{\frac{5}{3}}$ עבור שינוי אדיאבטי

• דוגמא נוספת: קרינה

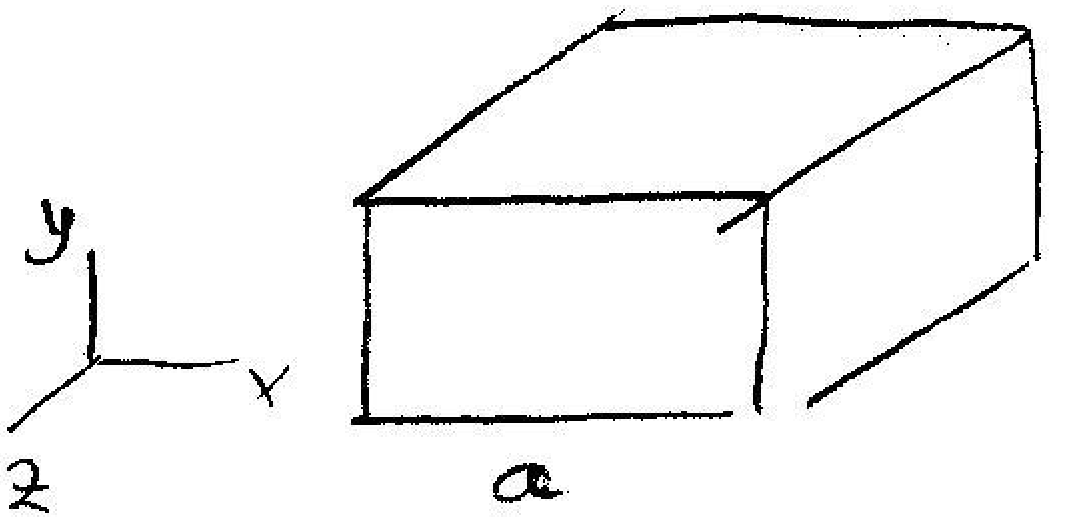
$$\frac{E}{V} = aT^4 \propto T^4$$

$$n \sim T^3 \quad (\text{קל להוכיח})$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{E}{V} \propto n^{4/3} \Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{4}{3}}$$

<u>אלקטרונים מנוונים</u>



$$V = a^3$$

$$\lambda = \frac{h}{|p|}$$

כאשר; λ - אורך גל דה-ברולי

h - קבוע פלאנק

p - תנע החלקיק.

עבור אלקטרון תפוס בקופסא, עבור כל מימד;

$$\psi \sim \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right)$$

תנאי שפה;

$$\frac{2\pi}{\lambda} a = n\pi$$

$$\frac{2ap}{h} = n$$

$$p_x = \frac{n_x h}{2a} \Rightarrow \Delta p = \frac{h}{2a} \quad ; n_x = 1,2,3,\ldots$$

עבור 3 מימדים;

$$\Delta^3 p = \frac{h^3}{8a^3} = \frac{h^3}{8V}$$

נרצה לדעת כמה מצבים יש בקופסא עד ערך מקסימלי של התנע p_{max};

$$\frac{1}{8}\int_0^{p_{max}} 4\pi p^2 \, dp = \frac{1}{8}\frac{4\pi}{3} p_{max}^2$$

$$\#\text{ of states} = \frac{1}{8}\frac{4\pi}{3}\frac{p_{max}^3}{\Delta^3 p} = \frac{\frac{4\pi}{3} p_{max}^3 V}{h^3}$$

נקח למשל מס' גדול של חלקיקים ונרצה להכניס אותם לקופסא רק שיסתדרו במצב האנרגיה הכי נמוך שלהם.

ניתן לשים רק 2 אלקטרונים בכל מצב.

עבור N חלקיקים, מצב האנרגיה המינימלית עבור הקופסא היא שכל המצבים מלאים לאיזשהו P_{max}

$$N = n_e V = 2 \times \frac{4\pi}{3} P_{max} V \frac{1}{h^3}$$

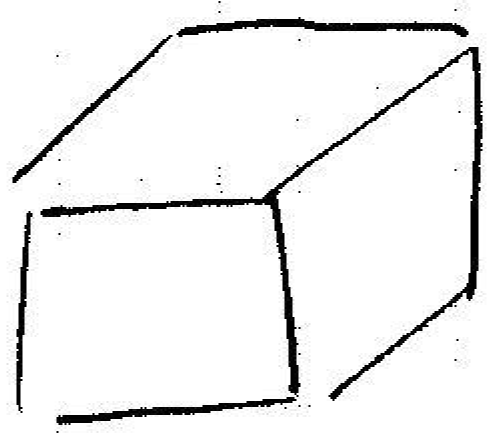
$$P_{max} = P_{\text{"Fermi"}}$$

$$\boxed{n_e = \frac{8\pi}{3}\frac{1}{h^3}P_{Fermi}^3}$$

בהינתן שיש מעט שנמצאות במצב אנרגטי מינימלי ויוצרים את הצפיפות קיים תנע מקסימלי השווה לשם P_{Fermi}. התנע הזה יוצר לחץ, הלחץ הזה הוא זה שבעצם מחזיק את הננסים הלבנים.

<u>לחץ מנוון</u>

נמצא ביטוי עבור צפיפות האנרגיה עבור אלקטרונים בקופסא כאשר הם נמצאים בקונפיגורציה אנרגטית מינימלית.



$$\frac{E_{KE}}{V} = \int_0^{P_{fermi}} \epsilon_{KE}(p)\left(\frac{2}{h^3}\right)4\pi p^2\,dp$$

<u>חלקיק לא-רלטיביסטי</u>:

$$\epsilon_{KE}(p) = \frac{1}{2}\frac{p^2}{2m_e}$$

$$\frac{E_{KE}}{V} = \frac{4\pi}{h^3 m_e}\int_0^{P_F} p^4\,dp = \frac{4\pi}{5}\frac{P_F^5}{h^3 m_e} = \frac{3}{40}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}\frac{h^2}{m_e}n_e^{5/3}$$

אז: $\gamma = \frac{5}{3}$ (רק עבור גז אידיאלי קלאסי)

מכך אנחנו יודעים מטיעונים תרמודינמיים ש:

$$P = (\gamma - 1)\frac{E_{KE}}{V}$$

אז הלחץ במקרה זה הוא

$$\boxed{P_{DNR} = \frac{2}{3}\frac{E_{KE}}{V} = \frac{1}{20}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}\frac{h^2}{m_e}n_e^{5/3}}$$

DNR

Degenerate Non Relativistic

כאשר נעבור לגז אולטרה - רלטיביסטי:

$E_{KE} = pc$ (כמעט עבור כל החלקיקים)

איך בכלל מגיעים למצב כזה? מתחילים להכניס יותר ויותר חלקיקים לקופסא ← תנע פרמי גדל ← מגיעים למצב שהאנרגיות מתחילות להיות רלטיביסטיות ולכן יכולים להשתמש בביטויים הקלאסיים. כאשר מגיעים לצפיפות מספיק גבוהה רב החלקיקים יחסותיים ואז הקירוב $E=pc$ תקף.

$$\frac{E_{KE}}{V} = \int_0^{p_F} pc\,\frac{2}{h^3}\,4\pi p^2 dp = \frac{2\pi c}{h^3} p_F^4 = \frac{3}{8}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} hc\, n_e^{4/3}$$

אזי $\gamma = \frac{4}{3}$; $\gamma - 1 = \frac{1}{3}$

$$\boxed{P_{DUR} = \frac{1}{3}\frac{E_{KE}}{V} = \frac{1}{8}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} hc\, n_e^{4/3}}$$

ננסים לבנים מורכבים בעיקר מפחמן וגרעיני חמצן מיוננים לגמרי בנוסף לכך האלקטרונים החופשיים

$$n_e = Z n_+$$

Z - מטען

n_+ - צפיפות היונים

$$\rho = A m_p n_+ + m_e n_e \simeq A m_p n_e$$

אזי:

$$n_e = \left(\frac{Z}{A}\right)\frac{\rho}{m_p}$$

אז הלחץ במקרה זה הוא:

$$\left[\begin{aligned} P_{DNR}(\rho) &= \frac{2}{3}\frac{E_{KE}}{V} = \frac{1}{20}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}\left(\frac{Z}{A}\right)^{5/3}\left(\frac{\rho}{m_p}\right)^{5/3}\cdot\frac{h^2}{m_e} \\ P_{DUR}(\rho) &= \frac{1}{3}\frac{E_{KE}}{V} = \frac{1}{8}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} hc\left(\frac{Z}{A}\right)^{4/3}\left(\frac{\rho}{m_p}\right)^{4/3}\end{aligned}\right]$$

שיווי משקל הידרוסטטי:

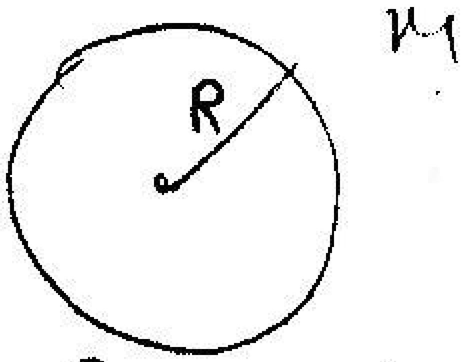
$$\boxed{\frac{dP}{dr} = -\frac{GM}{r^2}\rho}$$

נניח קשר "פוליטרופי"

$$P(\rho) = \rho^{1+\frac{1}{n}}$$

$$P_{central} = \underline{\quad}\cdot\frac{GM^2}{R^4}$$

פקטור נומרי



ניתן גם כן לכתוב ביטוי עבור הצפיפות במרכז

$$\rho_{central} = \underline{\quad}\cdot\frac{M}{R^3}$$

למשל: עבור $n=\frac{3}{2}$ (מקרה לא רלטיביסטי)

מקבלים:

$$\rho_{central} = 1,43\,\frac{M}{R^3}$$

$$P_{central} = 0,770\,\frac{GM^2}{R^4}$$