smadar@wise... סמדר נאוז (user,password=astro)

24/02/07 (1). קפלון 501, טלפון: 5121

אתר: wise-obs.tau.ac.il/~smadar/astro

חובת הגשה 30% מהתרגילים.

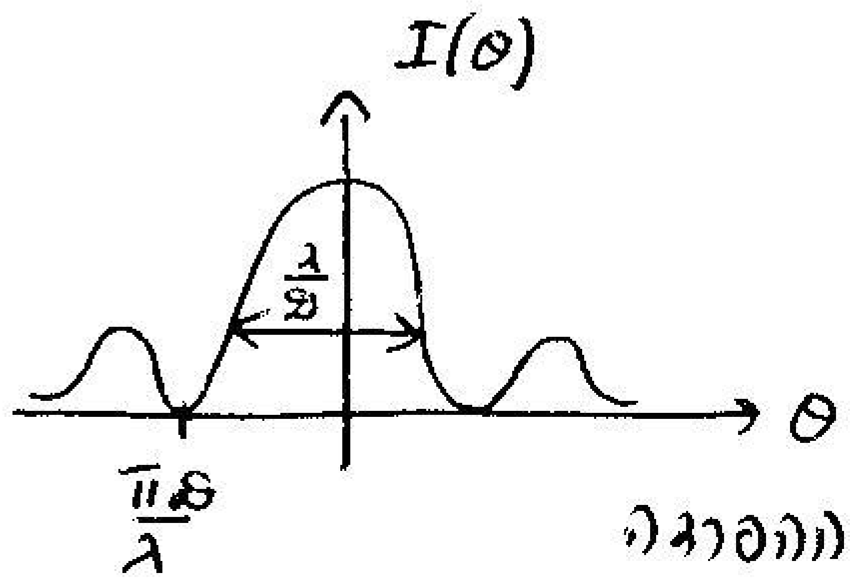
ספר הקורס - הספר של דן מעוז (ניתן לרכוש מספרית גולה):

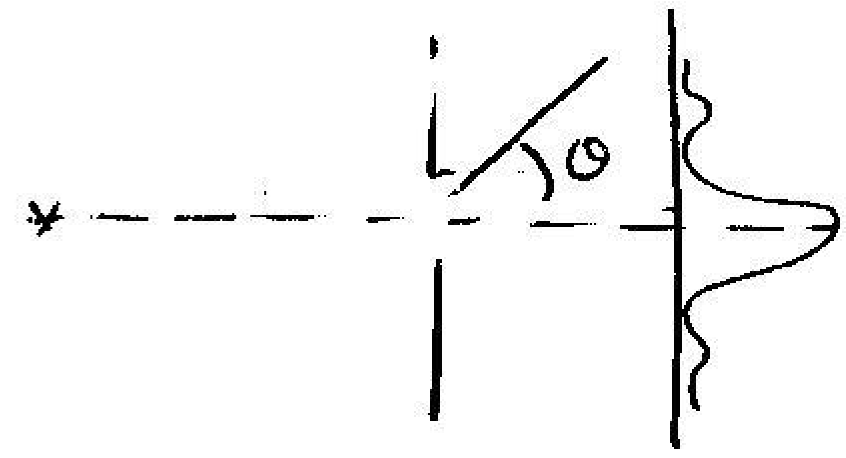
1) Basic Astrophysics

2). The physical universe /Shu.

3). Principles of cosmology and Gravitational Berry.

התאבכות מסדק יחיד - תזכורת:





כושר ההפרדה: $\boxed{\theta = 1.22\,\lambda/D}$

דוגמא: נחשב את כושר ההפרדה המינימלי של העין:

אישון: $D = 0.5\,cm$

אורך גל של האור הנראה: $\lambda = 5000\,Å$ $[1cm = 10^8\,Å]$

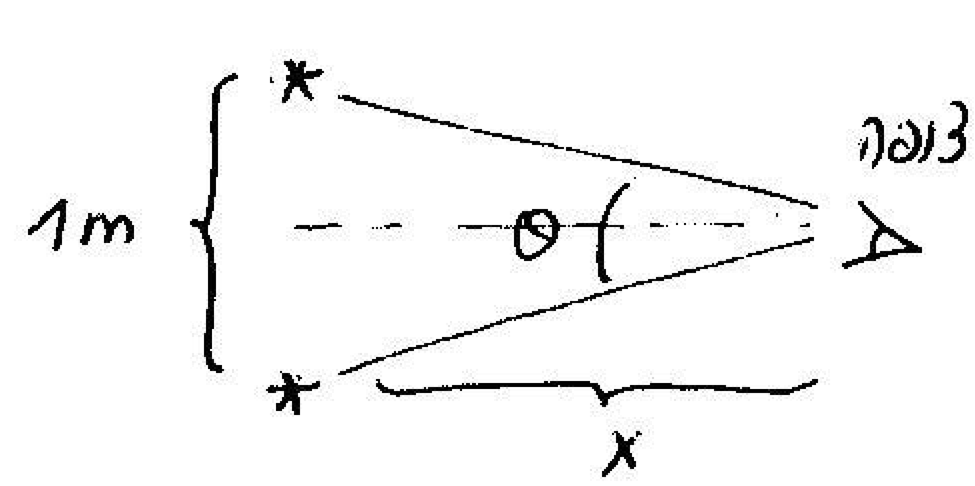
כושר ההפרדה: $\theta = \frac{\lambda}{D} = \frac{5000\,Å}{0.5\cdot 10^8\,Å} = 10^{-4}\,rad = 0.006° = 20''$

$\cdot\frac{180}{\pi}$

דקות קשת: $\boxed{1' = 1/60°}$

שניות קשת: $\boxed{1'' = 1/3600°}$

דוגמא: נניח למשל שהמרחק בין שני פנסי מכונית הוא 1m, נרצה לדעת מאיזה מרחק נוכל לראות את שניהם מופרדים?

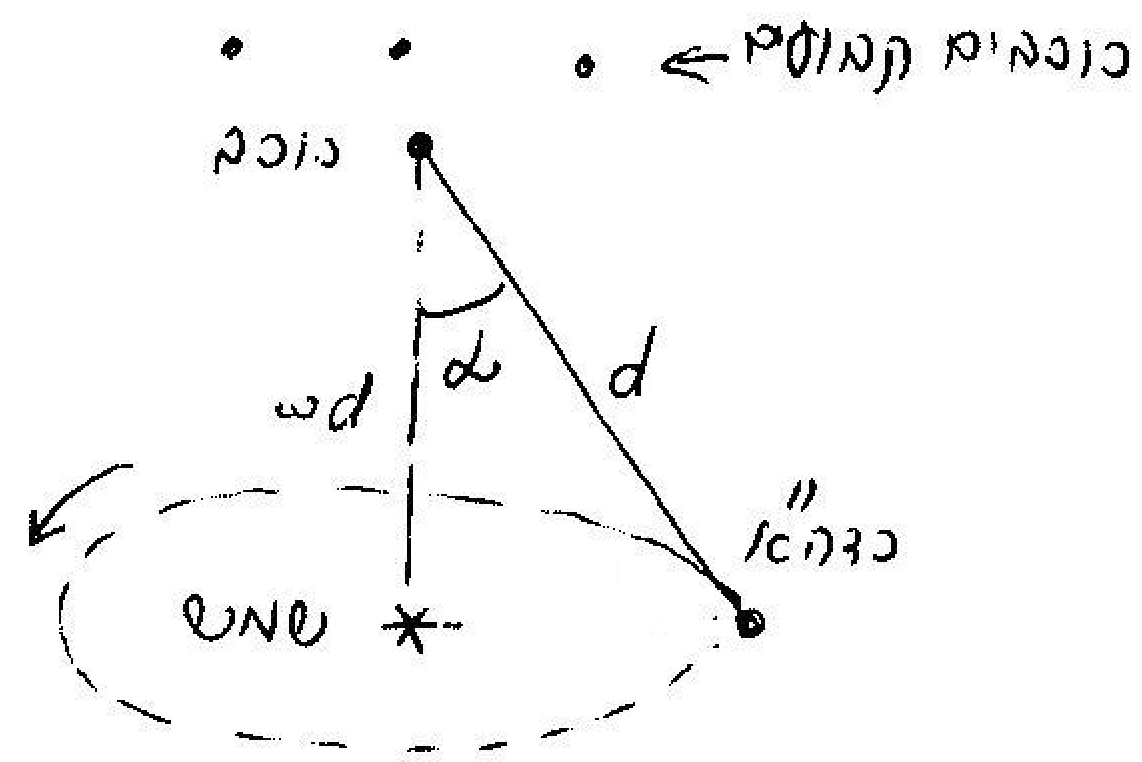


$\frac{1m}{x} = 10^{-4}$

$\Rightarrow x = 10\,km$

אורך קשת $1m = \theta\cdot x$

פרלקסיה:



α - זווית פרלקסיה. $(\tan\alpha \approx \alpha)$

$$\boxed{\alpha d = 1AU}$$

הגדרה: $\boxed{1pc = \frac{1AU}{1''}}$

$$\boxed{1pc = 3.1\cdot 10^{18} cm = 2.1\cdot 10^{5} AU = 3.3 \text{ light years}}$$

דוגמא: נתונה זווית הפרלקסיה של סיריוס $0.377''$, מה המרחק?

$$d = \frac{1Au}{0.377''} = 2.65\, pc$$

$$\boxed{1'' = 4.848\cdot 10^{-16} rad}$$

<u>דוגמא:</u> אם ניתן למדוד זווית פרלקסיה בדיוק של $0.01''$ ובסביבתנו הקרובה צפיפות הכוכבים בקירוב $0.1pc^{-3}$ וקבועה. עבור כמה כוכבים ניתן למדוד מרחק בשיטת הפרלקסיה?

מס' הכוכבים: $N = n\cdot V = 0.1\, pc^{-3} \cdot \frac{4\pi}{3} d_{max}^3$

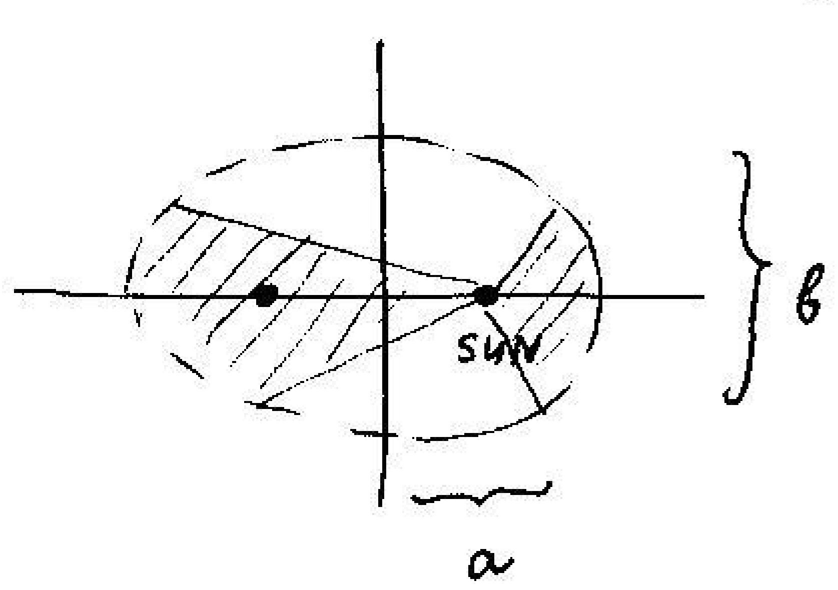
$$d_{max} = \frac{1Au}{\theta} = \frac{1Au}{0.01''} = 100pc$$

$$\frac{4\pi}{3} \sim 4 \; ; \; N \sim 4\cdot 10^{6}\cdot 0.1 \sim 4\cdot 10^{5}$$

<u>06/03/07</u> 2.

<u>חוקי קפלר - חזרה:</u>

<u>חוק 0/1</u> - המסלולים במישור. מסלול של אובייקט סביב השמש הוא אליפטי והשמש באחד ממוקדיו:



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

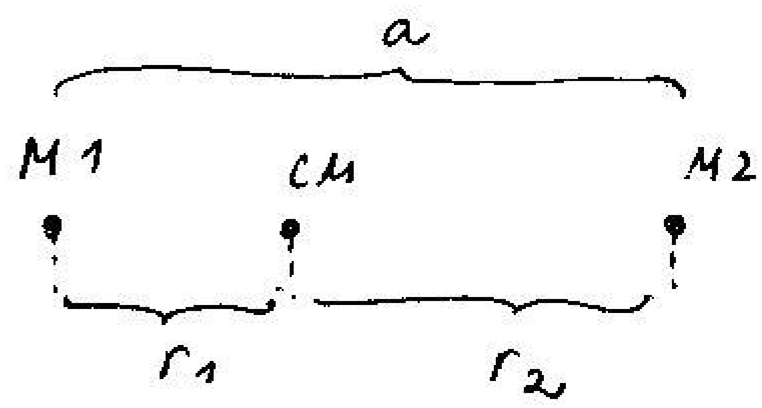
חוק 2 – חוק השטחים השווים - קרוב לשמש <- מהר
רחוק מהשמש <- לאט

חוק 3 – קשר בין זמן מחזור למסלול:

$$\boxed{\left(\frac{P}{2\pi}\right)^2 = \frac{a^3}{G(M+m)}}$$

בתצפיות רואים שרוב הכוכבים באים בזוגות, אם כך נתאר את המערכת הבינארית:

שני כוכבים שנעים סביב מ.מ. משותף:



$$a = r_1 + r_2$$

מהגדרת מ.מ.: $r_1 m_1 = r_2 m_2$

$$\omega^2 = \frac{G(m_1+m_2)}{a^3} = \left(\frac{2\pi}{P}\right)^2$$

$$\omega = V/r$$

$$\begin{cases} V_1 P = 2\pi r_1 \\ V_2 P = 2\pi r_2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

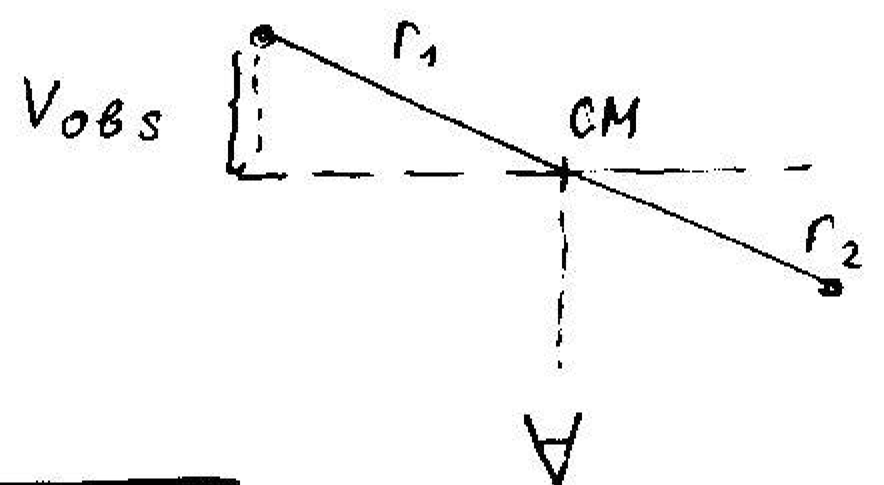
$$(V_1+V_2)P = 2\pi a$$

סה"כ מקבלים את החוק הבא:

$$\boxed{(V_1+V_2)^3 \frac{P}{2\pi G} = m_1 + m_2}$$

מה קורה אם המערכת מסתובבת בזווית הטיה מסויימת יחסית לקו הראיה שלנו:

$$\begin{cases} V_{1obs} = V_1 \sin i \\ V_{2obs} = V_2 \sin i \end{cases}$$



מכאן מקבלים:

$$\boxed{(m_1+m_2)\sin^3 i = \frac{P}{2\pi}\,\frac{1}{G}\left(V_{1obs}+V_{2obs}\right)^3}$$

מה קורה אם רואים רק כוכב אחד:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{V_{2obs}}{V_{1obs}}$$

ואז מקבלים:

$$(m_1+m_2)\sin^3 i = \frac{P}{2\pi G}\left[V_{1obs}+\frac{m_1}{m_2}V_{1obs}\right]^3 = \frac{P}{2\pi G}V_{1obs}^3\left(\frac{m_1+m_2}{m_2}\right)^3$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{m_2^3}{(m_1+m_2)^2}\sin^3 i = \frac{P|V_{1obs}|^3}{2\pi G}}$$

כעת נניח $m_1 \gg m_2$:

$$\text{Taylor:}\quad \frac{1}{m_1^2\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)^2} \approx \frac{1}{m_1^2}\left(1-2\frac{m_2}{m_1}\right)$$

$$m_2^3\sin^3 i = m_1^2\frac{P}{2\pi G}V_{1obs}^3$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{m_2\sin i = \left[\frac{P}{2\pi G}\right]^{\frac{1}{3}} V_{1obs}\, m_1^{\frac{2}{3}}}$$

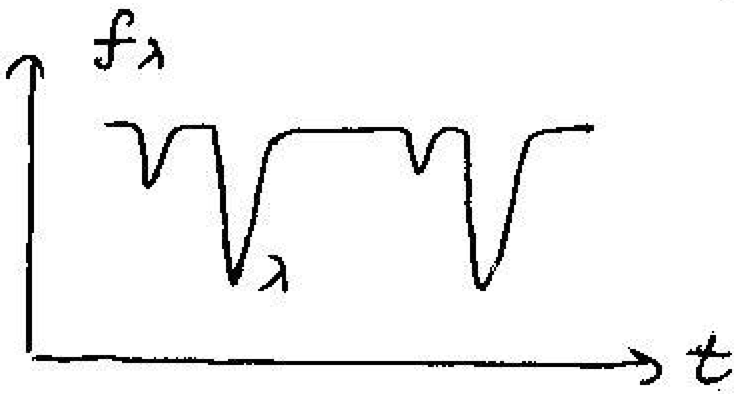
נזכיר את הקשר בין אפקט דופלר למהירות:

$$\lambda=\lambda_0(1-v/c)$$

$$\lambda/\lambda_0 = 1-v/c$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}=\frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda_0}=\frac{v}{c}}$$

דוגמא: כוכב בינארי ספקטרוסקופי לוקה $P=8.6yr$ עבור קו $H\alpha$ ($\lambda=6563\AA$)



הסחות מקסימליות:

$$\Delta\lambda_1 = 0.72\AA$$

$$\Delta\lambda_2 = 0.068\AA$$

א). מהו היחס בין המסות?

מהגדרת מ.מ.: $\frac{m_2}{m_1}=\frac{V_{1obs}}{V_{2obs}}=\frac{\Delta\lambda_1}{\Delta\lambda_2}=10.6$

ב). מה המרחקים?

נתון שהכוכב לוקה ← נניח $i\cong 90^\circ$

מציבים ב: $V=\frac{2\pi r}{P}$ ומקבלים: $r_1\cong 9.6\,Au$, $r_2\cong 0.9\,Au$

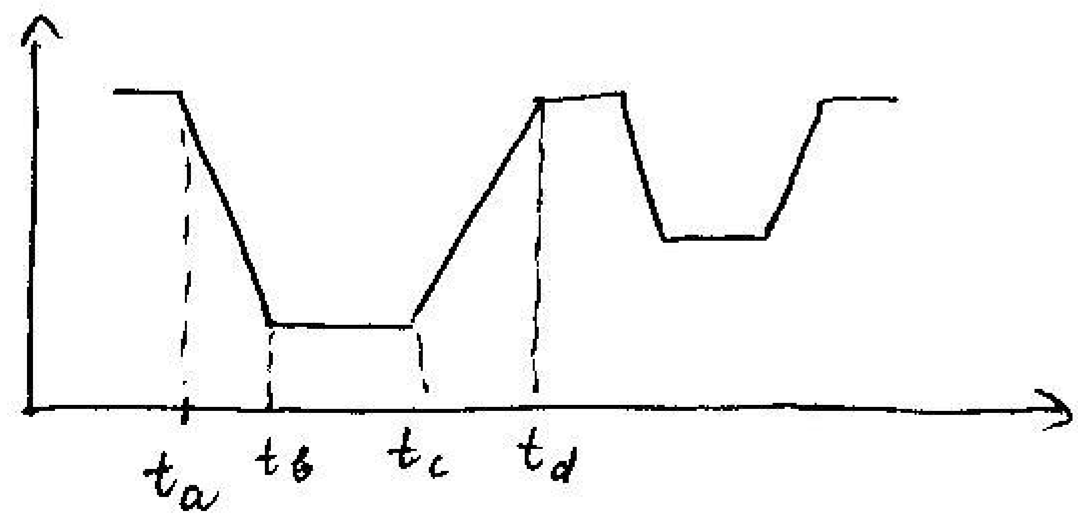
ג). מה הן המסות?

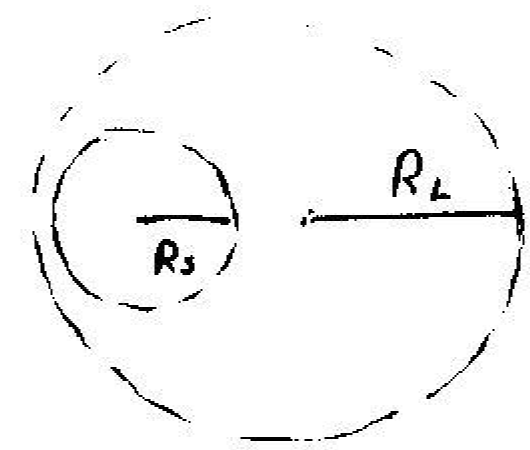
$$m_1+m_2=\frac{a^3}{G}\left(\frac{2\pi}{P}\right)^2 = .. = 15.2\,M_\odot$$

$$\Rightarrow m_1=1.3M_\odot\,,\; m_2=13.9M_\odot$$

דוגמא: כעת נרצה למצוא חסמים לרדיוסים המותרים r_1 ו-r_2.

נתוני הדוגמה של המערכת בזמנים שונים:





$$2R_s=(t_b-t_a)v \qquad v=V_1+V_2$$

$$2(R_L-R_s)=v(t_c-t_b)$$

$$R_L=R_s+\frac{v}{2}(t_c-t_b)$$

קרינת גוף שחור:

$$\boxed{B_\nu=\frac{2h\nu^3}{c^2}\cdot\frac{1}{e^{h\nu/k_BT}-1}=\frac{c}{4\pi}\underset{\substack{\downarrow\\ \text{צפיפות אנרגיה}}}{u_\nu}}$$

$$[B_\nu]=\frac{erg}{s\cdot cm^2\cdot Hz\cdot sterad}$$

$$\boxed{B_\nu\, d\nu=B_\lambda\, d\lambda}$$:רמז לשים.

$h\nu\ll k_BT$: Reyleigh-Jeans: $e^x\approx 1+x+\frac{x^2}{2}$

$$\left(x=\frac{h\nu}{k_BT}\ll 1\right)$$

$$\Rightarrow\boxed{B_\nu\cong\frac{2h\nu^3}{c^2}\cdot\frac{k_BT}{h\nu}=\frac{2\nu^2}{c^2}k_BT}$$

$h\nu\gg k_BT$: Wein: $\frac{1}{e^{h\nu/k_BT}-1}\cong e^{-h\nu/k_BT}$

$$\Rightarrow\boxed{B_\nu\cong e^{-h\nu/k_BT}}$$

$$\boxed{f=\int B_\nu\cos\theta\, d\Omega=\sigma T^4}$$

$$\boxed{L=4\pi f d^2}$$

$$\boxed{L=4\pi R^2\sigma T^4}$$

דוגמא: נתון:

$$L_\odot = 3.8\cdot 10^{31}\ erg/sec$$

$$R_\odot = 7\cdot 10^{10}\ cm$$

$$\sigma = 5.6\cdot 10^{-5}\ kg/(s^3K^4)$$

$$\Rightarrow\ L = 4\pi(7\cdot 10^{10}cm)^2\cdot 5.6\cdot 10^{-5}\cdot T^4 = 3.8\cdot 10^{33}\ erg/sec$$

$$\Rightarrow\ T \cong 5761\,K$$

20/03/07 (3).

חזרה קצרה:

1). משוואת ש"מ הידרוסטטי:

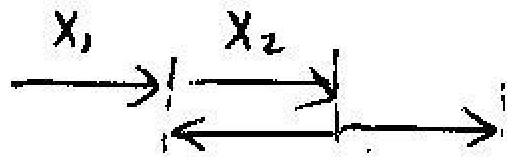
$$\frac{dp(r)}{dr} = -\frac{G\,M(r)\,\rho(r)}{r^2}$$

2). חוק שימור המסה: $dm = 4\pi r^2\rho(r)\,dr$

3). החוק הויריאלי: $E_k = -\frac{1}{2}E_{gr}$

4). משוואות Saha: $\frac{N(H^+)}{N(H)} = \frac{1}{N(e)}\left[\frac{2\pi m_e k_B T}{h^2}\right]^{3/2} e^{-\frac{1.6\cdot 10^5}{T}}$

מהלך שיכור במימד אחד:



ℓ - אורך צעד

$$\boxed{\langle x_i\rangle = 0} \quad (i=1,2,..)$$

כי: $\langle x_i\rangle = \frac{1}{2}\ell - \frac{1}{2}\ell = 0$

נסמן ב- R_N את המרחק שעבר לאחר N צעדים:

$$\boxed{\langle R_1^2\rangle = \langle x_1^2\rangle = \ell^2}$$

כי: $\langle x_1^2\rangle = \frac{1}{2}(\ell)^2 + \frac{1}{2}(-\ell)^2 = \ell^2$

שלב א': שני צעדים: $\langle R_2^2\rangle = \langle (x_1+x_2)^2\rangle =$

$$= \langle x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2\rangle = \langle x_1^2\rangle + 2\underbrace{\cancel{\langle x_1\rangle}}_{0}\underbrace{\cancel{\langle x_2\rangle}}_{0} + \langle x_2^2\rangle = 2\ell^2$$

שלב ב': נניח $\langle x_0^2\rangle = 0$ ונפתור ע"י אינדוקציה:

נניח לגבי N: $\boxed{\langle R_N^2\rangle = N\ell^2}$ ונניח עבור $N+1$.

$$\langle R_{N+1}^2\rangle = \langle (R_N + x_{N+1})^2\rangle = \langle R_N^2 + 2R_N x_{N+1} + x_{N+1}^2\rangle =$$

$$= \underbrace{\langle R_N^2\rangle}_{N\ell^2} + 2\underbrace{\cancel{\langle R_N\rangle}}_{0}\underbrace{\cancel{\langle x_{N+1}\rangle}}_{0} + \underbrace{\langle x_{N+1}^2\rangle}_{\ell^2} = N\ell^2 + \ell^2 = (N+1)\ell^2$$

דוגמא (מתוך א' 2003): השמש מוקפת "הקורונה" (גז מיונן וחם מצפיפות נמוכה).

הניחו שהגז אידיאלי וכולו מיונן בטמפ' קבועה $T=5\cdot10^6 K$ ובשו"מ הידרוסטטי.
(זה מתרחש מעל הצפיפות הנמוכה של הגז). הניחו כי צפיפות הקורונה זניחה
בתרומתה למסה המוכללת מתוך רדיוס r, כלומר: $M(r>r_\odot) = M_\odot$

א). פתרו את המשוואה ההידרוסטטית עבור תש"מ ומצאו את התלות הרדיאלית של צפיפות הקורונה.

נתון גז אידיאלי: $p = \frac{\rho}{\bar{m}} k_B T$

$$M(r) = M_\odot$$

$$\frac{dp}{dr} = \frac{1}{\bar{m}} k_B T \frac{d\rho}{dr}$$

נציב במשוואה ההידרוסטטית:

$$\frac{k_B T}{\bar{m}}\frac{d\rho}{dr} = -\frac{G M(r)\rho(r)}{r^2}$$

$$\Rightarrow \frac{k_B T}{\bar{m}}\int_{\rho(r)}^{\rho(R_\odot)}\frac{d\rho}{\rho} = -GM\int_r^{R_\odot}\frac{dr}{r^2}$$

$$\Rightarrow \frac{k_B T}{\bar{m}}\ln\rho\Big|_{\rho(r)}^{\rho(R_\odot)} = \frac{GM}{r}\Big|_r^{R_\odot}$$

$$\Rightarrow \frac{k_B T}{\bar{m} G M_\odot}\ln\left[\frac{\rho(r)}{\rho(R_\odot)}\right] = \frac{1}{r} - \frac{1}{R_\odot}$$

ב). בהנחה שהקורונה מתחילה על שפת השמש (כלומר ב- $r=R_\odot$), מצאו באיזה רדיוס יורדת צפיפות הקורונה ל- $\frac{1}{e}$ מערכה ההתחלתי. הביעו באמצעות $R_\odot$.

$$\rho(r) = \frac{1}{e}\rho(R_\odot)$$

$$\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$$

$$\Rightarrow \frac{k_B T}{\bar{m} G M_\odot} = \frac{1}{R_\odot} - \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{R_\odot} - \frac{k_B T}{\bar{m} G M_\odot}$$

אחרי הצבה מקבלים: $r = 1.8 R_\odot$

ג). הניחו צפיפות אחידה n לגז בקורונה ורשמו ביטוי לחלק היחסי מהפוטונים היוצאים מהשמש שעוברים פיזור תומסון תוך כדי מעבר בקורונה (אשר גודלה חושב בסעיף ב').

נתון: $\sigma_T = 6.6\cdot10^{-25}\,cm^2$

מהלך חופשי של פוטון: $\boxed{l = \frac{1}{n\sigma_T}}$

$$d = 0.8 R_\odot$$

$$\frac{d}{l} = dn\sigma_T = \begin{cases} l=d & =1 \\ \text{פוטון עובר} & >1 \\ \text{החלק היחסי} & <1 \end{cases}$$

($>1 \Leftarrow$ פוטון עובר בלי התנגשויות).

ד. מתוך ליקוי חמה ניתן לראות את הקורונה ולמצוא ש- $5\cdot10^{-5}$ מאור השמש מפוזר על ידה. חשבו את הצפיפות האופייניות של הקורונה, חשבו גם את ρ.

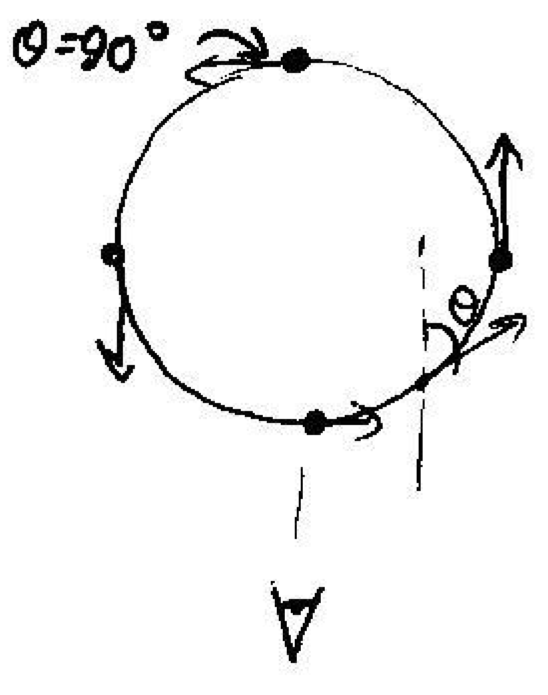
$$dn\sigma_T = 5\cdot10^{-5}$$

מציבים את σ ואת d ומקבלים:

$$n = \frac{5\cdot10^{-5}}{\sigma_T d} \cong 5\cdot10^{8}\,cm^{-3}$$

$$\boxed{\rho = \bar{m} n = \frac{m_H}{2}\cdot n} = 5\cdot10^{-16}\,g/cm^3$$

שאלה מס' 4 מתרגול מס' 2:



$$V=0.5c$$

λ_0 - אורך גל במעבדה.

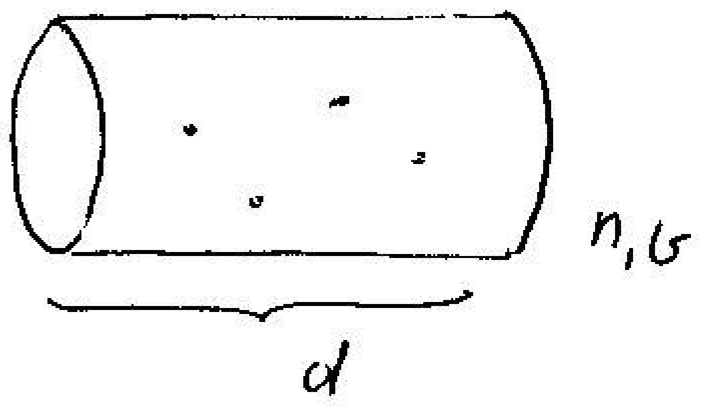
$$\boxed{\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{1+(v/c)\cdot\cos\theta}{\sqrt{1-(v/c)^2}}}$$

$$\frac{1+\frac{v}{c}\cos\theta}{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = \frac{1-\frac{v}{c}\cos\theta}{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = 90^\circ$$

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-1/4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

27/03/07 (4). הערה לגבי התרגיל משיעור שעבר:



$n\times\sigma\times d \begin{cases} >1 \\ <1 \end{cases}$ חלק יחסי

<u>משוואות מבנה של כוכב:</u>

מ"ש הידרוסטטית: $$\boxed{\frac{dP}{dr} = -\frac{GM\rho}{r^2}}$$

$$\boxed{\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2\rho}$$

$$\boxed{\frac{dT}{dr} = -\frac{3L\kappa\rho}{4\pi r^2\cdot 4acT^3}} \qquad \rho\kappa = n\sigma$$

$$\boxed{\frac{dL}{dr} = 4\pi\rho r^2\varepsilon}$$

1. לחץ גז, טמפ' נמוכה: $P = nk_BT$

$\kappa \propto \rho T^{-7/2}$

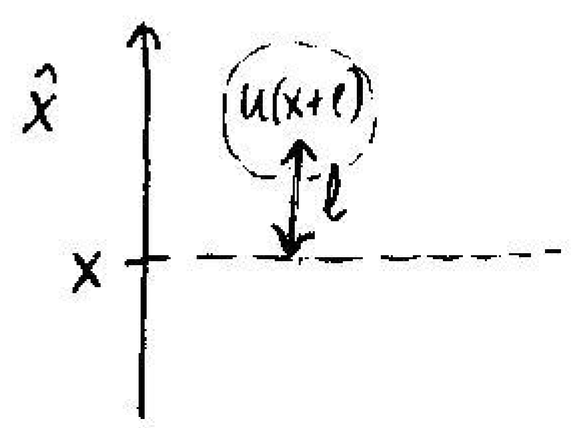
הארה: $L \propto M^5$

בהינתן T קבועה: $M \propto r$

2. לחץ גז, טמפ' גבוהה: מנגנון השולט הוא הפיזור של תומסון:

$\kappa = const \qquad L \propto M^3$

3. לחץ קרינה, טמפ' גבוהה: $L \propto M$



לחלקיק יש מהלך חופשי

$\ell = \frac{1}{n\sigma}$ ומהירות של החלקיק היא מהירות ממוצעת v. נחשב את שטף החום:

שטף = מהירות × צפיפות אנרגיה

שטף: $f_{down} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\, v\, u(x+\ell)\,\hat{x}$

סימטריה 3 מימדים

$$f_{up} = \frac{1}{6}\, v\, u(x-\ell)\,\hat{x}$$

$$f_{tot} = f_{down} + f_{up} = \frac{1}{6} v \left[u(x-\ell) - u(x+\ell)\right]\hat{x}$$

נגזרת סימטרית: $\frac{du}{dx} = \frac{u(x+\ell) - u(x-\ell)}{2\ell}$

$$\left(\frac{du}{dx} = \frac{u(x+h) - u(x)}{h}\right)$$

$$f_{tot} = -\frac{1}{3} v \frac{du}{dx} \ell$$

כעת נניח כי מדובר בפוטונים: $v = c$

$$\ell = \frac{1}{n\sigma} = \frac{1}{\rho\varkappa}$$

$$f = -\frac{1}{3} c \frac{1}{\varkappa\rho} \cdot \frac{d(aT^4)}{dr}$$

נזכיר כי: $L = 4\pi r^2 f$

$$\boxed{\frac{dT}{dr} = -\frac{3\varkappa\rho}{4acT^3} \frac{L}{4\pi r^2}}$$

שאלה: הראו שממעבר חום קרינתי נובע שגרדיאנט לחץ הקרינה פרופורציונלי לשטף החום.
מצאו את השטף שיכול לתמוך לבד באטמוספירה עם תאוצת כובד g.
מהי הבהירות המקסימלית של כוכב נובעת מגבול זה. הניחו פיזור תומסון.

$P_{rad} = \frac{1}{3} aT^4$ (rad - קרינה)

$$\frac{\partial P_{rad}}{\partial T} = \frac{4}{3} aT^3$$

ראינו: $f = \frac{dT}{dr} \cdot \frac{4}{3} \frac{acT^3}{\varkappa\rho}$

$$\frac{\partial P_{rad}}{\partial r} = \frac{\partial P_{rad}}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{\rho\varkappa}{c} \cdot \overbrace{\frac{L}{4\pi r^2}}^{=f}$$

ש״מ הידרוסטטי: $\frac{\partial P_{tot}}{\partial r} = -\rho g$

$$P_{tot} = P_{rad} + P_{gas}$$

$$\frac{\partial P_{tot}}{\partial r} = \frac{\partial P_{rad}}{\partial r} + \frac{\partial P_{gas}}{\partial r} \underset{\ell}{=} -g\rho < \frac{\partial P_{rad}}{\partial r} = -\frac{\rho\varkappa}{c} \frac{L}{4\pi r^2}$$

ש״מ הידרוסטטי

$$L = \frac{4\pi c G M}{\varkappa}$$

$$\varkappa = \frac{n\sigma_T}{\rho} = \frac{n\sigma_T}{m_p n} = \frac{\sigma_T}{m_p}$$

(edd)
הארת אדינגטון: $L = \frac{4\pi c G M m_p}{\sigma_T}$

עבור השמש: $L_{edd} = \frac{4\pi c G M_\odot m_p}{\sigma_T} = 1{,}25 \cdot 10^{38} \left(\frac{M}{M_\odot}\right) \frac{erg}{sec}$

נעבור אל המקרה בו $L \sim M^3$:

באיזו מסה נגיע להארה של אדינגטון?

$$\frac{L_{edd}}{L_\odot} = \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^3$$

$$32{,}723 \left(\frac{M}{M_\odot}\right) = \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^3$$

$$\Rightarrow M \sim 180 M_\odot$$