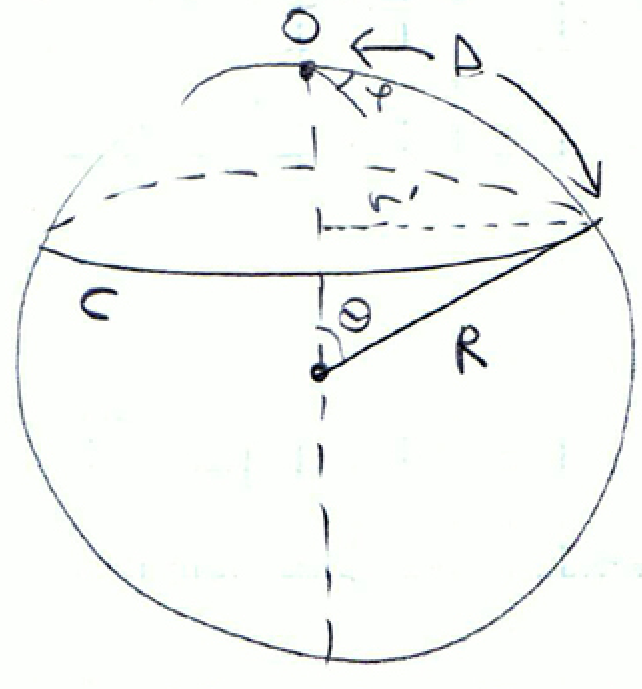
(14)

1. "cartography" geometris
   Robertson - Walker Metric
2. Cosmic red shift
3. Dynamics: Friedman equations
   a) matter-dominated
   b) radiation dominated

העקרון הקוסמולוגי:
כל נקודה שנמצאת במנוחה יחסית למהירות הריק, כל צופה
חופ' כזה ימדוד את אותו זמן קוסמולוגי.

עבור מרחב שהוא סימטרי לחלוטין, יש רק את האפשרויות הבאות:
- מרחב שטוח - גיאומטריה אוקלידית.
- גיאומטריה חיובית / ספרית
- גיאומטריה היפרבולית

ננסה לקבל תיאור תלת מימדי של המרחב בו אנו חיים.



נדמיין שאנחנו חיים על קליפה כדורית.
אפשר לטייל רק על הקליפה.
אפשר למדוד למשל מרחק
מהנק' O למעגל C $\equiv d$
מה הקשר בין היקף C ל-d?
כאן $2\pi d > C$ היקף
כלל ניתן לגלות שאנו חיים על מרחב דו-מימדי עם
בעקמומיות חיובית (ספרית) $C < 2\pi D$
בעקמומיות שלילית $C > 2\pi D$

$$r' = R\sin\theta$$

נמצא ביטוי לסגמנט אורך על הקליפה:

$$dl^2 = R^2 d\theta^2 + R^2\sin^2\theta\, d\varphi^2$$

$$dr' = R\cos\theta\, d\theta$$

$$dl^2 = R^2\frac{dr'^2}{R^2\cos^2\theta} + r'^2 d\varphi^2 = \frac{dr'^2}{1-\left(\frac{r'}{R}\right)^2} + r'^2 d\varphi^2$$

r' הינו הרדיוס של המעגל עם היקף C (כפי שנראה ע"י צופה מבחוץ)

השם הקוסמולוגי של r' הינו "Coordinat distance"

$D \equiv$ "proper distance"

ברור ש: $C < 2\pi D$

$$C = 2\pi r' = 2\pi R \sin\theta = 2\pi R \sin\left(\frac{D}{R}\right)$$

עבור זווית θ קטנות נקבל:

$$C \approx 2\pi R \cdot \frac{D}{R} = 2\pi D$$

נ"ב למדוד מרחק גדולים D על מנת למצוא את הקשר המדויק בין C ל-D.

נגדיר גודל: $K \equiv$ "spatial curvature" $= +\frac{1}{R^2}$

K יכול להקבע ע"י מדידות הנעשות כולן על פני הקליפה.

$$C = 2\pi R \sin\frac{D}{R} = 2\pi R\left(\frac{D}{R} - \frac{1}{6}\left(\frac{D}{R}\right)^2 + \dots\right)$$

$$= 2\pi D\left[1 - \frac{1}{6}\left(\frac{D}{R}\right)^2 + \dots\right] = 2\pi D - \frac{\pi}{3}D^3 K + \dots$$

$$\Rightarrow K = \frac{3}{\pi}\lim_{D\to 0}\left[\frac{2\pi D - C}{D^3}\right]$$

נ"ב אנשים שחיים על הקליפה יכולים למדוד את C, D ולמצוא את K ולהבין באיזה מרחב הם חיים (אוקלידי/ספרי/היפרבולי)

באופן דומה במרחב תלת מימדי אפשר לדמיין סדרה של מדידות שיגידו לנו באיזה מרחב אנו חיים.

$$D = \int_0^{r'} \frac{dr'}{\sqrt{1-\frac{r'^2}{R^2}}} = R\sin^{-1}\left(\frac{r'}{R}\right)$$

נגדיר רדיוס חדש $r = \frac{r'}{R}$ שנקרא "Comoving coordinate"

$$dl^2 = R^2\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2\, d\varphi\right] \quad ; \quad k = +1$$

אנחנו יכולים לדמיין קליפה ספרית

שמתרחבת עם $R = R(t)$, R נקרא "scale factor"

אפשר לנסות להבין איך R משתנה בזמן?

ננסה לחפש משוואה דינמית שתאפשר את R כפונ' של הזמן. משו' אלו נקראות משו' פרידמן.

נגביל תחילה את הקשר עבור מרחב דו מימדי למרחב תלת מימדי ונכניס את גורם הזמן.

אז ניתן להבין ש:

$$\begin{cases} K = +\frac{1}{R^2} \Rightarrow k = 1 & \\ K = 0 \Rightarrow k = 0 & \text{"flat Euclidean"} \\ K = -\frac{1}{R^2} \Rightarrow k = -1 & \text{"hyperbolic negative curvature"} \end{cases}$$

ניתן לכתוב:

$$D = R(t)\int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-Kr^2}} = R\sin^{-1}(r)$$

עבור $k=+1$

נניח התרחבות $R(t)$ גדלה. מהירות של חלקיק במרחק D מהראשית הינה:

$$V = \dot{D} = \dot{R}(t)\int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-Kr^2}} = \frac{\dot{R}}{R}\cdot D$$

נגדיר $H \equiv \frac{\dot{R}}{R}$ ואז;

$V = H\cdot D$ קיבלנו את <u>חוק האבל</u>!

נגביל למרחב 3-D:

$$\boxed{dl^2 = R^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + \underbrace{r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2 + r^2 d\theta^2}_{\text{כמו אורך על הספרה}}\right]}$$

רק <u>שטח</u> השווה ל- $4\pi r^2$

הרדיוס של הספרה לא שווה ל- r סוף $k=\pm1$!

<u>מרחב - זמן</u>:

אינטרוול מרחב זמן בין שתי מאורעות - τ

$$d\tau^2 = dt^2 - \frac{dl^2}{c^2}$$

נשתמש בביטוי שמשמעותו לקבל את "Robertson Walker Metric" עבור אינטרוול מרחב-זמן בין שני מאורעות במרחב המתרחב.

$t =$ "cosmic time" כפי שנמדד ע"י כל צופה בסיסי (Fundamental)

<u>Cosmic redshift</u>: היקום כללית פוטונים מתקדמים לאורך "null geodesics" במרחב-זמן, רק ש $d\tau = 0$.

כעת עבור פוטון שמתקדם רדיאלית ($d\phi = d\theta = 0$)

נקבל:
$$dt = \frac{1}{c} R(t) \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}$$

זמן הפליטה - t_e ; זמן קבלה ע"י צופה - t_0

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{R(t)} = \frac{1}{c} \int_0^{r_e} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}$$

נדמיין שפולטים פוטון נוסף בזמן $t_e + \Delta t_e$

נגדיר Δt_e כך ש: $c\Delta t_e = \lambda_e$

הפוטון יתקבל ב $t_0 + \Delta t_0$ עם: $c\Delta t_0 = \lambda_0$

כמו כן:
$$\int_{t_e+\Delta t_e}^{t_0+\Delta t_0} \frac{dt}{R(t)} = \frac{1}{c} \int_0^{r_e} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}$$

נניח Δt_e כה קטן
כך ש- $R(t)$ קבוע במשך זמן זה

$$\int_{t_e}^{t_e+\Delta t_e} \frac{dt}{R(t)} = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t_0} \frac{dt}{R(t)} \Rightarrow \frac{\Delta t_e}{R(t_e)} = \frac{\Delta t_0}{R(t_0)}$$

$$\frac{\Delta t_0}{\Delta t_e} = \frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{R(t_0)}{R(t_e)}$$

הסחה לאדום:
$$\boxed{z \equiv \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{emt}}{\lambda_{obs}} = \frac{R_0}{R_e} - 1}$$

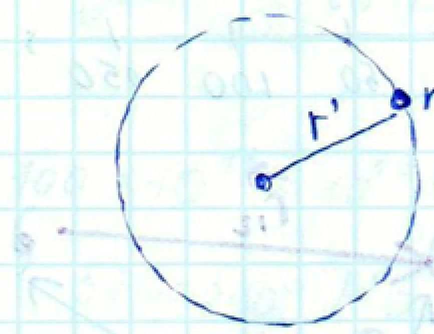
משוואת Lemaitre:
$$\boxed{1 + z = \frac{R_0}{R_e}}$$

19/06/07 15 **Friedman Equations:**

Cosmic Dynamics.

We want a dynamical for scale factor $R(t)$.

נניח שאנו מסתכלים על איזשהו אזור במרחב 3d:



"Energy Equation": $F=\frac{GMm}{(r')^2}=\frac{4\pi G\rho r' m}{3}$

$$M=\frac{4\pi}{3}(r')^3\rho$$

ρ ↳ mass density

Gravitational energy of particle with mass m:

$$E_{gr}=-\frac{GMm}{r'}=-\frac{4\pi G}{3}\rho(r')^3 m$$

kinetic energy of m: $E_{KE}=\frac{1}{2}m(\dot{r}')^2$

total energy is conserved:

$$E_{tot}=E_{KE}+E_{gr}=\frac{1}{2}m(\dot{r}')^2-\frac{4\pi G}{3}\rho(r')^2 m$$

Switch to "comoving coordinates":

$$r\equiv\frac{r'}{R(t)}$$

$$E_{tot}=\frac{1}{2}mr^2\dot{R}^2-\frac{4\pi G}{3}\rho R^2 r^2 m$$

multiply both sides by $\frac{2}{mR^2r^2}$:

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2=\frac{8\pi G}{3}\rho+\frac{2E_{tot}}{mR^2r^2}$$

נגדיר: $k_c^2\equiv-2\frac{E_{tot}}{m}\cdot\frac{1}{r^2}$

$\Downarrow$

משוואת אנרגיה: $\boxed{\left(\underbrace{\frac{\dot{R}}{R}}_{\text{מ"ת ב- } r}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k c^2}{\underbrace{R^2}}}$. (I)

most be independent of r since other terms are.

In General Relativistic derivation of this equation:

(k-עקמומיות) $\frac{k}{R^2}$ is the curvature of 3-D space

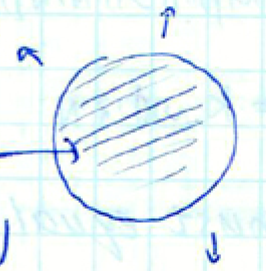
$k=1$: spherical ($E_{tot}<0$)

$k=0$: flat ($E_{tot}=0$)

$k=-1$: hyperbolic ($E_{tot}>0$)

כעת, נפתח את משוואת הגרביטציה. נניח אבק שמשתנה (או אפילו קורס),

אבל נניח שהוא משתנה אדיאבטית:



Within a unit comoving radius ($r=1$), mass-energy contained is:

$$E = \underbrace{\frac{4\pi}{3}R^3\rho}_{M} c^2$$

Thermodynamics: consider adiabatic expansion:

$$dE + P\,dV = 0 \quad \circledast$$

השינוי באנרגיה: $\dot{E} = 4\pi R^2 \rho c^2 \dot{R} + \frac{4\pi}{3}R^3\dot{\rho}c^2$

השינוי בנפח: $\dot{V} = 4\pi R^2 \dot{R}$

$$\circledast \Rightarrow 4\pi R^2 \rho c^2 \dot{R} + \frac{4\pi}{3}R^3 \dot{\rho} c^2 + 4\pi P R^2 \dot{R} = 0$$

אחרי צמצומים וקצת אלגברה:

fluid equation: $\boxed{\dot{\rho} + 3\frac{\dot{R}}{R}\left[\rho + \frac{P}{c^2}\right] = 0}$. (II)

Plugging II into I gives (after some algebra):

$$\boxed{\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right)} \quad . \text{(III)}$$

note: k does not appear.

(לחץ תורם לכיווץ) Pressure contributes to acceleration.

$\Downarrow$

$\Downarrow$

This is relativistic effect!

כאשר נגדיר:

$$\boxed{H = \frac{\dot{R}}{R}}$$

"Hubble parameter"

זה גודל שניתן למדוד, מדדו וקיבלו:

today: $H_0 = 72 \ km \, s^{-1} \, Mpc^{-1}$

את משוואה I ניתן לכתוב כך:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{R^2}$$

$$\Longrightarrow \text{today: } H_0^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 - \frac{kc^2}{R_0^2}$$

Measurements of H_0 and ρ_0 determine:

1). spatial curvature (העקמומיות היקום k) $(k=0,\pm1)$

2). scale factor R_0 <= מידיעת k

למשל: for a flat universe $(k=0)$ ρ_0 must equal ρ_{crit}:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_{crit}$$

$$H_0^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_{crit,0} \Longrightarrow \rho_{crit,0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

<= מהינתן H_0 מדוד נוכל לקבוע את הצפיפות הקריטית ρ_0

ואז נדע האם אנו בעקמומיות שטוחה או לא:

בהינתן H_0 היום: $\rho_{crit,0} = 9.7 \cdot 10^{-30} \, g \cdot cm^{-3} = 5.8 \cdot 10^{-6} \, H \, atoms \cdot cm^{-3}$