אסטרו - פתרון תרגיל 3

1) משו' Saha:

$$\frac{N(H^+)}{N(H)} = \frac{1}{N(e)} \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2}\right)^{3/2} e^{-\frac{1.6\cdot 10^5}{T}}$$

T נתון, אך N(e) נמצא מתוך

$$\bar{P} = N k \bar{T}$$

$$N = P/kT$$

$$\simeq 1\cdot 10^{24}\ cm^{-3}$$

הנחה: כמות החלקיקים בכלל. כמות האלקטרונים היא חצי מזה ~ $5\cdot 10^{23}\ cm^{-3}$

(כי שניהם מיוננים). נציב ונקבל

$$\frac{N(H^+)}{N(H)} \sim 120$$

כלומר פחות מ 1% ניטרלי. אכן ההנחה בקירוב שהכל כמעט מיונן.

2) בצפיפות קבועה $M(r) = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho$

א. ולכן

$$\frac{dP}{dr} = \frac{-GM(r)\rho}{r^2} = -\frac{4\pi}{3} G \rho^2 r$$

נבצע אינטגרציה מ R ל r עם התנאי $P(R)=0$

ונקבל

$$P(r) = \frac{2\pi}{3} G \rho^2 (R^2 - r^2)$$

ב.

$$P = nkT = \frac{\rho}{\mu m_H} kT$$

$$T(r) = \frac{\mu m_H}{k} \frac{2\pi}{3} G \rho (R^2 - r^2)$$

ג.

$$\frac{\varepsilon(r)}{\varepsilon(0)} = \left(\frac{T(r)}{T(0)}\right)^4 = 0.1$$

$$\left(1 - r^2/R^2\right)^4 = 0.1$$

$$r/R = 0.66$$

$$\frac{V(r)}{V(R)} \propto \left(r/R\right)^3 = 0.29$$

3) א)

$$\frac{dM(r')}{dr'} = 4\pi r'^2 \rho = 4\pi \rho_c \left(r'^2 - r'^3/R \right)$$

נבצע אינטגרציה על r' מ 0 עד r עם $M(0)=0$

ונקבל
$$M(r) = 4\pi \rho_c \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4R} \right)$$

ב)
$$M(R) = \frac{\pi \rho_c R^3}{3}$$

ג)
$$\frac{dP}{dr'} = \frac{-GM\rho}{r'^2} = -4\pi G \rho_c^2 \left(\frac{r'}{3} - \frac{7r'^2}{12R} + \frac{r'^3}{4R^2} \right)$$

נבצע אינטגרציה על r' מ R ועד r ונקבל

$P(R) = [redacted]0$ ונקבל

$$P(r) = -4\pi G \rho_c^2 R^2 \cdot \left[\frac{5}{36} - \frac{2}{3}\left(\frac{r}{R}\right)^2 + \frac{7}{9}\left(\frac{r}{R}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{r}{R}\right)^4 \right]$$

4) א. כ n פרוטונים עם מסה $12 m_H$

ו 6n אלקטרונים עם מסה $m_e \to 0$

$$\bar{m} = \frac{n \cdot 12 m_H + 6n \cdot m_e}{7n} = \frac{12}{7} m_H$$

ב. מהמשפט הויריאלי
$$P \propto \frac{E_{gr}}{R^3} \propto \frac{M^2}{R^4}$$

גז אידיאלי
$$P = nkT \propto \frac{\rho}{\bar{m}} T$$

וגם
$$\rho \propto \frac{M}{R^3}$$

אז
$$P \propto \frac{M}{R^3 \bar{m}} T$$

מכאן
$$R \propto \frac{M \bar{m}}{T}$$

מהשמש $T = 1.5 \cdot 10^7 K$, $\bar{m} = \frac{m_H}{2}$, $M_\odot$, $R_\odot$ נקבל

שהפקטור המספרי הוא $6.25 \cdot 10^8$ [redacted]

$$\frac{R}{R_\odot} = \frac{6.25 \cdot 10^8 \cdot 10 M_\odot \cdot \frac{12}{7} m_H}{6 \cdot 10^8 K \cdot R_\odot} = 0.86$$

3/3

ב. $$10^7 L_\odot = L = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

חם... $$T = 350{,}000\ \text{K} \quad (!)$$

ג. $$\frac{24 - 23.985}{24} = 0.06\ \%$$

ד. $$t = \frac{0.1 \cdot \frac{0.06}{100} \cdot 10\, M_\odot \cdot c^2}{10^7\, L_\odot}$$

$$= 2.8 \cdot 10^{10}\ \text{sec} \doteq 900\ \text{yr}$$

זמן קצר מאוד במונחים קוסמולוגיים.