26/06/07

ראינו שהייקום נשלט חומר, אבל האם הייקום גם
נשלט קרינה?

נזכיר את משוואות פרידמן:

$$(1).\quad \left(\frac{\dot R}{R}\right)^2=\frac{8\pi G\rho}{3}-\frac{Kc^2}{R^2}$$

ומש' הנוזל:

$$(2).\quad 0=\dot\rho+3\frac{\dot R}{R}\left(\rho+\frac{P}{c^2}\right)$$

נשאל האם יש שלב שבו: $\rho_m=\rho_{rad}$ (קרינה-rad)

$$\boxed{\rho_m=\rho_{m_0}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2}$$

$$P_{rad}=\frac{1}{3}\rho_{rad}\cdot c^2$$

נציב במש' הנוזל:

$$0=\dot\rho_{rad}+3\cdot\frac{\dot R}{R}\left(\rho_m+\frac{1}{3}\rho_{rad}\right)$$

$$\dot\rho_{rad}+4\frac{\dot R}{R}\rho_{rad}=0$$

$$\frac{\dot\rho_{rad}}{\rho_{rad}}=-4\frac{\dot R}{R}$$

$$\int\frac{d\rho_{rad}}{\rho_{rad}}=-4\int\frac{dR}{R}\implies\boxed{\rho_{rad}=\rho_{rad_0}\left(\frac{R_0}{R}\right)^4}$$

נשווה בין ρ_{rad} ל- ρ_m ונקבל:

$$\rho_{rad_0}\left(\frac{R_0}{R}\right)^4=\rho_{m_0}\left(\frac{R_0}{R}\right)^3$$

נניח: $R_0=1\implies\rho_{rad_0}=\rho_{m_0}\cdot R$

אבל היחידות של ρ_m ו- ρ_{rad} לא זהות, לכן מה שמעניין היינו
צריכים לעשות זה לזה שווה: $c^2\rho_m=\rho_{rad}$! $\rho_m\to c^2\rho_m$ בכל מקום

$$\implies\rho_{rad_0}=\rho_{m_0}\cdot Rc^2$$

$$\implies\boxed{\frac{1}{R}=\frac{\rho_{m_0}c^2}{\rho_{rad_0}}}$$

$$\rho_{rad_0}=aT_0^4$$

נמדד: $T_0=2.73\,^\circ K$

$$\implies\rho_{rad_0}=7.6\cdot10^{-15}erg\cdot cm^{-3}\cdot K^{-4}(2.73K)^4=$$

$$=4.22\cdot10^{-13}\,erg\cdot cm^{-3}\cdot\underbrace{1.7}_{\text{משפיעי}}=7.17\cdot10^{-13}erg\cdot cm^{-3}$$

הניטרינים (לא נסביר)

מפיטור ראיני : $\Omega_m = \frac{\rho_m}{\rho_c} \sim 0.3$

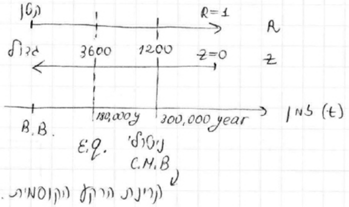
$$\rho_{c_0} = 9.7 \cdot 10^{-30}\, g \cdot cm^{-3}$$

$$\rho_m = 0.3 \cdot 9.7 \cdot 10^{-30} \cdot \underbrace{(2.99 \cdot 10^{10}\, cm \cdot s^{-1})^2}_{=c^2} = 2.6 \cdot 10^{-9}\, erg \cdot cm^{-3}$$

$$1+z = \frac{1}{R} = \frac{2.6 \cdot 10^{-9}\, erg \cdot cm^{-3}}{7.17 \cdot 10^{-13}\, erg \cdot cm^{-3}} \sim 3600$$

איך הייקום מתפשט כשהייקום נשלט קרינה?

<= כלומר, כיצד פקטור הסקאלה משתנה עם הזמן עבור ייקום (נשלט) קרינה?



נשתמש במ"ש פרידמן: $\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_{rad} = \frac{8\pi G}{3}\rho_{rad} \cdot \frac{1}{R^4}$

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_{rad} \cdot \frac{1}{R^2}$$

$$\frac{dR}{dt} = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho_{rad_0}} \cdot \frac{1}{R}$$

$$\int R \cdot dR = \int \sqrt{\ldots}\, dt$$

$$\frac{1}{2}R^2 = \sqrt{\ldots}\, t \Rightarrow \boxed{R = \sqrt{2} \cdot (\ldots)^{\frac{1}{4}}\, t^{1/2}}$$

איך קבוע האבל משתנה עם הזמן עבור ייקום נשלט הקרינה?

נגזור: $\dot{R} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\ldots)^{1/4}\, t^{1/2-1}$

$$H = \frac{\dot{R}}{R} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}(\ldots)^{1/4} \cdot t^{1/2-1}}{\sqrt{2}(\ldots)^{1/4}\, t^{1/2}} = \boxed{\frac{1}{2}t^{-1}}$$

אם נרצה למצוא את H כתלות מ-z (מקרה היפותטי של יקום נשלט קרינה):

$$H^2 = \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \underbrace{\frac{8\pi G}{3}\rho_{rad_0}}_{H_0^2} \cdot \frac{1}{R^4} \Rightarrow H^2 = H_0^2(1+z)^4$$

ראינו: $H^2 = H_0^2(1+z)^4 \overset{!!!}{=} \left(\frac{1}{2t}\right)^2$

שאלה 15.3(c) בתרגילי דוגמא.

problem set-מה: $H^2 = H_0^2(1+z)^3 = \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{t}\right)^2$

שאלה 1: שאלות מהדפים:

(1). $\langle p \rangle = -\frac{1}{3}\frac{E_{gr}}{V}$

(a). (2). $E_{gr} = -2E_k$

(b). (3). $p = nkT$

(4). $nkT = -\frac{1}{3}\frac{E_{gr}}{V}$

(5). $E_{gr} = -\frac{GM^2}{r}$

(6). $nkT = \frac{1}{3}\frac{GM^2}{r}\cdot\frac{1}{V}$

(7). $M = \bar{m}N$

מס' החלקיקים, מסה ממוצעת

(8). $\cancel{n}kT = \frac{1}{3}\frac{GM\bar{m}}{r}\cdot\underbrace{\frac{N}{V}}_{=\cancel{n}} \Rightarrow$ (9). $kT = \frac{1}{3}\cdot\frac{GM\bar{m}}{r}$

צפיפות מספרית

$$\bar{m} = \frac{m_e + m_p}{2} \cong \frac{m_p}{2} \cong \frac{m_H}{2}$$

$$kT = \frac{1}{3}\frac{GM_\odot}{r_\odot}\cdot\frac{m_H}{2}$$

נשים הכל נתון ומציבים ומקבלים טמפרטורה: $T \sim 4\cdot 10^6 K$.

(c). $P_{rad} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{E_{gr}}{V}$

$\Rightarrow E_{gr} = -3P_{rad}\cdot V$ אנרגיה תרמית של פוטונים

נזכיר ש: $P = \frac{1}{3}u_{rad} = \frac{1}{3}\frac{U_{rad}}{V} = \frac{1}{3}\frac{E_k}{V}$

$\Rightarrow U_{rad} = 3P_{rad}V$

$E_{gr} = -U_{rad}$

לא יציב. $E_{tot} = E_{gr} + U_{rad} = 0$

כוכב שכזה קרינה לא יציב יותר ולכן לא יכול להתקיים הרבה.

$$(d).\quad \frac{P_{rad}}{P_{th}} = \frac{\frac{1}{3} a T^4}{n k_B T} \qquad \left(\begin{array}{r} \text{קרינה - } rad \\ \text{תרמי - } th \end{array} \right)$$

$$n = \frac{N}{V} = \frac{M}{\bar{m} V}$$

$$M = N \bar{m}$$

$$1 \overset{!!!}{=} \frac{P_{rad}}{P_{th}} = \frac{1}{3} \frac{1}{k_B} \cdot \frac{\bar{m}}{M} a T^3 V$$

מצב שני ראינו כי: $\quad kT = \frac{1}{3} \frac{G M \bar{m}}{r} \quad .(g)$

$$\Longrightarrow \quad 1 = \frac{1}{3} \frac{1}{k_B} \cdot \frac{\bar{m}}{M} a \left[\frac{1}{3 k_B} \cdot \frac{G M \bar{m}}{r} \right]^3 V$$

$$V = \frac{4\pi}{3} r^3$$

$$r = \left(\frac{3}{4\pi} V \right)^{1/3}$$

$$1 = \frac{1}{3} \frac{1}{k_B} \frac{\bar{m}}{M} a \left[\frac{1}{3 k_B} G \bar{m} M \right]^3 \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{-1}$$

יכול להיות שיש פה טעיה עם פקטורים מספריים, נתעלם מהם כרגע:

$$1 \sim \bar{m}^4 M^2 \frac{1}{k_B^4} a G^3$$

$$a = \frac{8 \pi^5 k_B^4}{15 c^3 h^3}$$

$$1 \sim \bar{m}^4 M^2 \frac{1}{\cancel{k_B^4}} \cdot \frac{\cancel{k_B^4}}{c^3 h^3} G^3$$

$$M^2 \sim \frac{1}{\bar{m}^4} \left(\frac{c h}{G} \right)^3$$

$$\Longrightarrow \quad M \sim \frac{1}{\bar{m}^2} \left(\frac{c h}{G} \right)^{3/2}$$

שאלה מס' 5: שמש $L = \frac{U}{t_d}$

(a). העריכו את המהלך החופשי l :

$$U = \frac{4\pi}{3} R^3 a T^4$$

$$t_d = \text{מספר הפוטונים} \times \text{זמן חופשי בין פיזור לפיזור} = N \cdot \frac{l}{c}$$

חד-מימד: $\langle R^2 \rangle = N l^2$

$$N = \frac{R^2}{l^2}$$

3D: $N = 3\left(\frac{R}{l}\right)^2$

$$t_d = 3\left(\frac{R}{l}\right)^2 \cdot \frac{l}{c} = 3 \cdot \frac{R^2}{lc}$$

$$L = \frac{\frac{4\pi}{3} R^3 a T^4}{3R^2/(lc)} = lc\,\frac{4\pi}{9} R a T^4$$

$$l = \frac{9L_\odot}{4\pi R_\odot a T_\odot^4 c} \qquad l \sim 0{,}7\,cm$$

(b). $t_d = 3 \cdot \frac{R^2}{lc}$

את l כבר יש לנו אז ניתן למצוא:

$$t_d \approx 2\,10^4\,yr$$

שאלה מס' 6:

נזכיר כי: $l = \frac{1}{n\sigma} = \frac{1}{\rho\kappa}$

ראינו מתרגיל הקודם: $L = lc \cdot \frac{4\pi}{9} R a T^4$

$$L = \frac{1}{\rho\kappa} c \cdot \frac{4\pi}{9} R a T^4$$

שוב פעם, נזניח את כל הפקטורים והמספרים: $\rho \sim \frac{M}{R^3}$

$$L \sim \frac{R^3}{M} R T^4$$

$$L \sim \frac{R^3}{M} R T^4 \sim \frac{R^4 T^4}{M}$$

נשתמש במשפט הויריאלי:

$$k_B T \sim \frac{GM\bar{m}}{R}$$

$$T \sim \frac{M}{R}$$

$$L \sim \frac{1}{M} R^4 \left(\frac{M}{R}\right)^4$$

$$\Longrightarrow \quad L \sim M^3$$

שאלה מס' 12: מה הביטוי עבור הלחץ המנוון בכוכב ניוטרונים?

(a). (p - תנע) $\quad \frac{E_k}{V} = \int_0^{p_f} E(p) \left(\frac{2}{h^3}\right) 4\pi p^2 dp$

(b). $E = pc$

$$\frac{E_k}{V} = \int_0^{p_f} pc \, \frac{2}{h^3} \cdot 4\pi p^2 dp = \frac{2\pi c}{h^3} p_f^4$$

$$n_e = \frac{8\pi}{3} \cdot \frac{p_f^3}{h^3} \qquad (p - \text{תנע})$$

(c). $P_{\text{לחץ}} = (\gamma - 1) \frac{E_k}{V}$: עפ"י ויריאלי כאשר γ הוא קבוע אדיאבטי

גז אולטרה-רלטיביסטי

$\gamma = 4/3$

$P_{\text{לחץ}} = \frac{1}{3} \frac{E_k}{V}$

גז לא יחסותי מונו-אטומי

$\gamma = 5/3$

$P_{\text{לחץ}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{E_k}{V}$

שאלה מס' 6: $\quad P_{\text{לחץ}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2\pi c}{h^3} p_f^4$

$$p_f = \left[\frac{3h^3 n_e}{8\pi}\right]^{1/3}$$

$$P_{\text{לחץ}} = \frac{1}{3} \frac{2\pi c}{h^3} \left[\frac{3h^3}{8\pi}\right]^{4/3} n_e^{4/3}$$