photons undergo many scallerings with gas particles in the sun and gradually diffuse out in a "random walk"

$$\boxed{L = \frac{U_{rad}}{t_d} = \frac{\frac{4\pi}{3} R^3 a \langle T \rangle^4}{t_d}}$$

Lets define ℓ as the mean-free path of the photon per scatlering event.

$\frac{\ell}{c}$ is time it takes photon to move one mean free path

# of scatlerings to reach surface $= 3\left(\frac{R}{\ell}\right)^2$

$$t_d = 3\left(\frac{R}{\ell}\right)^2 \frac{\ell}{c} = 3\left(\frac{R}{\ell}\right)\frac{R}{c}$$

$$\Longrightarrow \boxed{L = \frac{4\pi}{9} R a \langle T \rangle^4 \ell c}$$

נציב: $\langle T \rangle = 4 \cdot 10^6 K$, $R = 1 R_\odot$, $L = 1 L_\odot$

$$\Longrightarrow \boxed{\ell = 0{,}7\,cm}$$

$$\Longrightarrow \boxed{t_d = 2.2 \cdot 10^4 \text{ year}}$$

הזמן שלוקח לפוטון להגיע מקו ישר מהשמש (בלי מהלכים חופשיים) : $R/c = 2{,}3$ seconds

$$\ell = \frac{1}{n\sigma} \Rightarrow L = \frac{4\pi}{9} R a \langle T \rangle^4 c \cdot \frac{1}{n\sigma}$$

26/03/07 8

נושאים:

1). sources of opacity.

2). mass-luminosity scaling relations.

3). Heat transfer equation.

4). "Equations of stellar structure."

5). Nuclear energy production "proton-proton chain".

ראינו קודם: $\boxed{L = \frac{U_{rad}}{t_d} \cong \frac{\frac{4\pi}{3} R^3 a \langle T \rangle^4}{t_d} = \frac{4\pi}{9} R a \langle T \rangle^4 \ell c} \Rightarrow$ for sun $\ell = 0{,}7$ cm, $t_d = 2.2 \cdot 10^4$ yr

$\boxed{t_d = 3\left(\frac{R}{\ell}\right)\left(\frac{R}{c}\right)}$ $\boxed{\ell = \frac{1}{n\sigma}}$ - "mean free path"

$[\sigma] = cm^2$

$[n] = cm^{-3}$

$\rho = \bar{m} n \qquad [\rho] = g \cdot cm^{-3}$

$$\boxed{l = \frac{\bar{m}}{\rho \sigma} \equiv \frac{1}{\rho \varkappa}} \qquad \boxed{\varkappa \equiv \frac{\sigma}{\bar{m}}} \qquad [\varkappa] = cm^2 \cdot g^{-1}$$

כעת נתייחס לפיזור תומסון:

Important sources are:

1). Thomson scattering of photons off free electrons:

$$\boxed{\sigma_{Th} = \frac{8\pi}{3} \frac{e^4}{c^4 m_e^2} = \frac{8\pi}{3} r_e^2 = 6.7 \cdot 10^{-25}\ cm^2}$$

classical electron radius: $\boxed{r_e \equiv \frac{e^2}{m_e c^2} = 2.8 \cdot 10^{-13}\ cm}$

$$\boxed{\varkappa_{Th} = \sigma_{Th} \cdot \frac{n_e}{n \bar{m}} = \frac{\sigma_{Th}}{m_H} = 0.4\ cm^2 g^{-1}}$$

$$l = \frac{1}{\rho \varkappa} = 0.7\ cm$$

$\rho = \langle \rho \rangle = 1.6\ g \cdot cm^{-3}$: צפיפות ממוצעת/טיפוסית של השמש

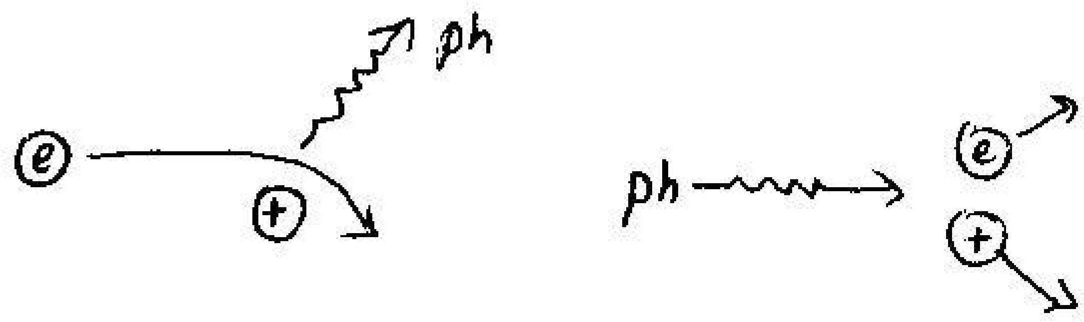
$$\boxed{\varkappa = 0.9\ cm^2 g^{-1}}$$

פיזור תומסון הוא אחד המנגנונים העיקריים לבליעה.

נסתכל על עוד תהליכים שחשובים לבליעה:

- Bound-Bound
- Bound-free [ראה מצגת]
- free-free

דוגמאות ל-free-free:



2). When neutral or partially Ionized atoms are present (heavy elements):

"Bound-Bound"

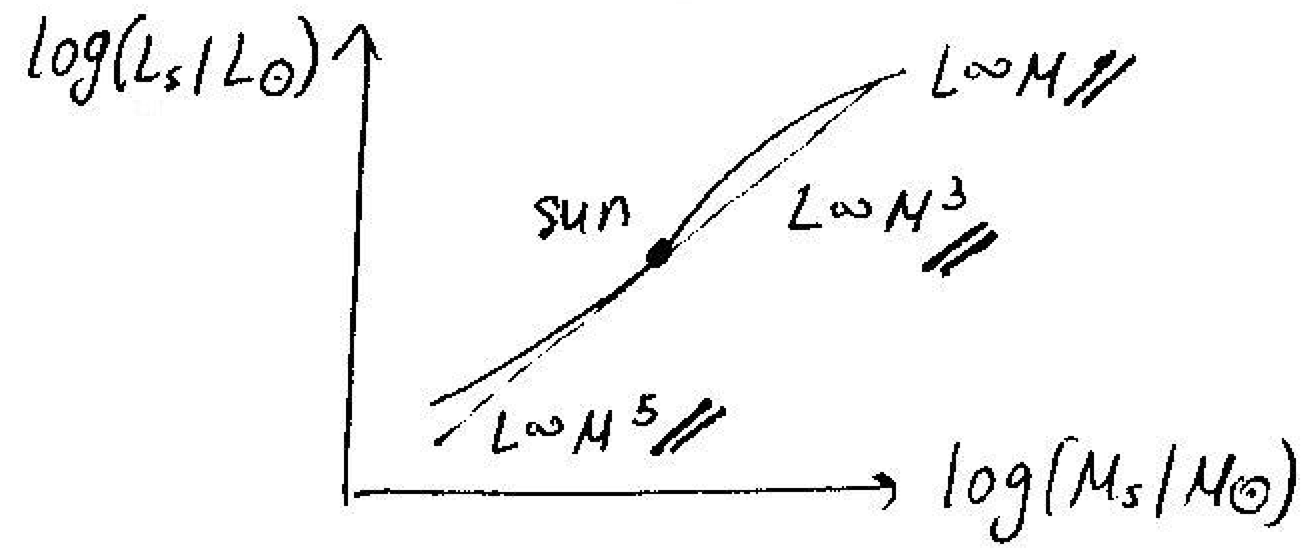
"Bound-free" }
"free-free" } can be described empirically via "Kramers Law":

$$\varkappa \propto \rho T^{-3.5}$$

for chemical composition of sun :   עבור f-f ו b-f :

$$\varkappa \cong 0.01 \left(\frac{\rho}{1\,gm\cdot cm^{-3}}\right)\left(\frac{T}{10^7 K}\right)^{-3.5} \cdot [cm^2 g^{-1}]$$

נזכיר כי עבור כוכבים מסדרה הראשית הבהירות כתלות מאסה נראית כך :



Scaling Relation on the Main-Sequence:

virial theorem : $k_B T = \frac{1}{3} G \frac{M\bar{m}}{R}$ or $T \propto \frac{M}{R}$

Diffusion Equation: $L = \frac{4\pi}{9} \frac{R a T^4 c}{\rho \varkappa}$

$$L \propto \frac{RT^4}{\rho\varkappa} \Rightarrow L \propto \frac{R^4 T^4}{M\varkappa} \quad \left(\rho \propto \frac{M}{R^3}\right)$$

מכאן נרצה למצוא את הקשר בין הבהירות למסה:

1). Assume nuclear reactions turn on at a specific T,

then T may be assumed about constant for all stars,

so from virial theorem : $R \propto M$

2). Intermediate mass stars: Thomson scattering dominates

so $\varkappa$ is a constant :

$$L \propto \frac{R^4 T^4}{M} \propto \frac{M^4}{M} \propto M^3 /\!/$$

3). Low-mass stars: Kramers opacity dominates

$$\varkappa \propto \rho T^{-3.5} \propto M R^{-3} T^{-3.5}$$

$$L \propto \frac{R^4 T^4}{M} \cdot \frac{R^3 T^{3.5}}{M} = \frac{R^7 T^{7.5}}{M^2} = \frac{M^{5.5}}{R^{0.5}} \propto M^5 /\!/$$

4). Massive stars :

Virial theorem : (radiation pressure).

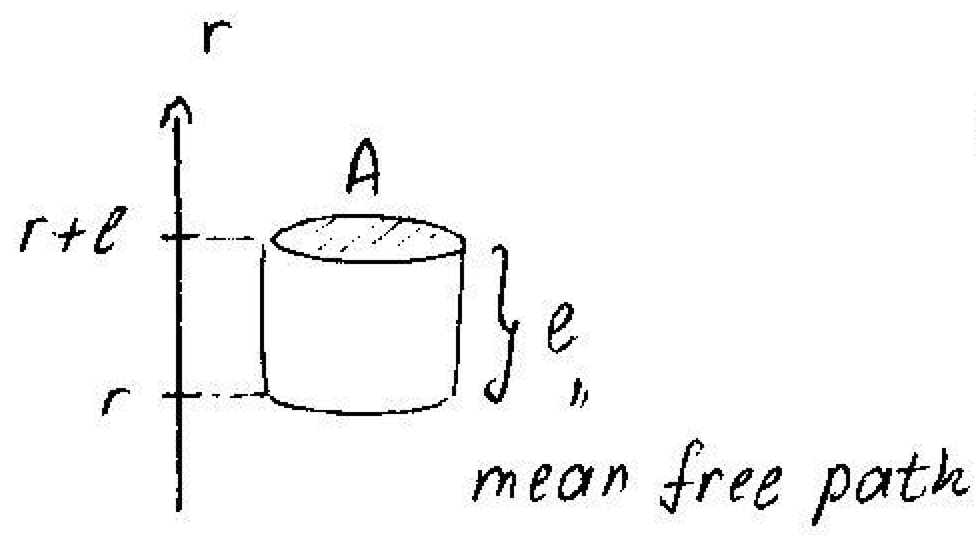
$$V a T^4 = \frac{GM^2}{R}$$

$$\Rightarrow T^4 \propto \frac{M^2}{R^4} \propto \frac{M\rho}{R}$$

$\varkappa = \text{Thomson (constant)}$

$$\Longrightarrow L \propto M$$

Heat Transfer equation:



Go to some location inside a star:

נתייחס לכוח הקרינה שמופעל על הגליל:

The net radiation pressure force on the material is thy cylinder is equal to the rate at which radiation momentum is absorbed:

$$F(r) = \frac{L(r)}{4\pi r^2}$$

$L(R)$, can view L as a function of r : $L(0)=0$

$$\text{momentum flux} = \frac{F(r)}{c}$$

$$\text{momentum flux} \times \text{Area} = \frac{F(r)}{c} \cdot A$$

$\frac{F(r)}{c} A$ must equal

$$\left[P_{rad}(r) - P(r+\ell) \right] A = -\frac{dP_{rad}}{dr} \ell A$$

so: $F(r) = -\frac{dP_{rad}}{dr} \ell c$

אנחנו יודעים ש: $P_{rad} = \frac{1}{3} a T^4$, $\ell = \frac{1}{\varkappa(r)\rho(r)}$

$$\Longrightarrow \boxed{F(r) = -\frac{4}{3} \frac{ac}{\varkappa(r)\rho(r)} T^3 \frac{dT}{dr}} \quad (3).$$

מגדיר ש: $u = aT^4$

$$\frac{c}{\varkappa\rho} = \text{"diffusion coefficient"}$$

$$\Longrightarrow \boxed{F(r) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{c}{\varkappa\rho} \cdot \frac{du}{dr}}$$

הקשר בין שטף האנרגיה לנגזרת האנרגיה.

if approximate: $\frac{dT}{dr} \cong -\frac{T}{R} \rightarrow \boxed{L = \frac{4}{3} 4\pi \frac{ac}{\varkappa\rho} R T^4}$

Two more simple equations:

Mass conservation $M(r)$:

$$\boxed{\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)} \quad (2)$$

Energy equation:

$$L(r) = \int_0^r \varepsilon \cdot 4\pi r'^2 \rho \, dr'$$

$\varepsilon = \varepsilon(r)$ energy generation rate per unit mass $[erg \cdot s^{-1} g^{-1}]$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \varepsilon \rho} \quad (4).$$

In addition we have:

hydrostatic balance: $\boxed{\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2}}$. (1)

$$\boxed{\begin{aligned} P &= P(\rho, T, \text{composition}) \\ \kappa &= \kappa(\rho, T, \text{composition}) \\ \varepsilon &= \varepsilon(\rho, T, \text{composition}) \end{aligned}}$$

Boundary conditions (ת"ש):

$$\boxed{\begin{array}{ll} M(0) = 0 & M(R) = M_* \\ P(R) = 0 & L(0) = 0 \end{array}}$$

"Vogt-Russell Conjecture":

These 4 differential equations,

plus 3 equations $P(..)$, $\kappa(..)$, $\varepsilon(...)$,

plus boundary conditions,

uniquely determine:

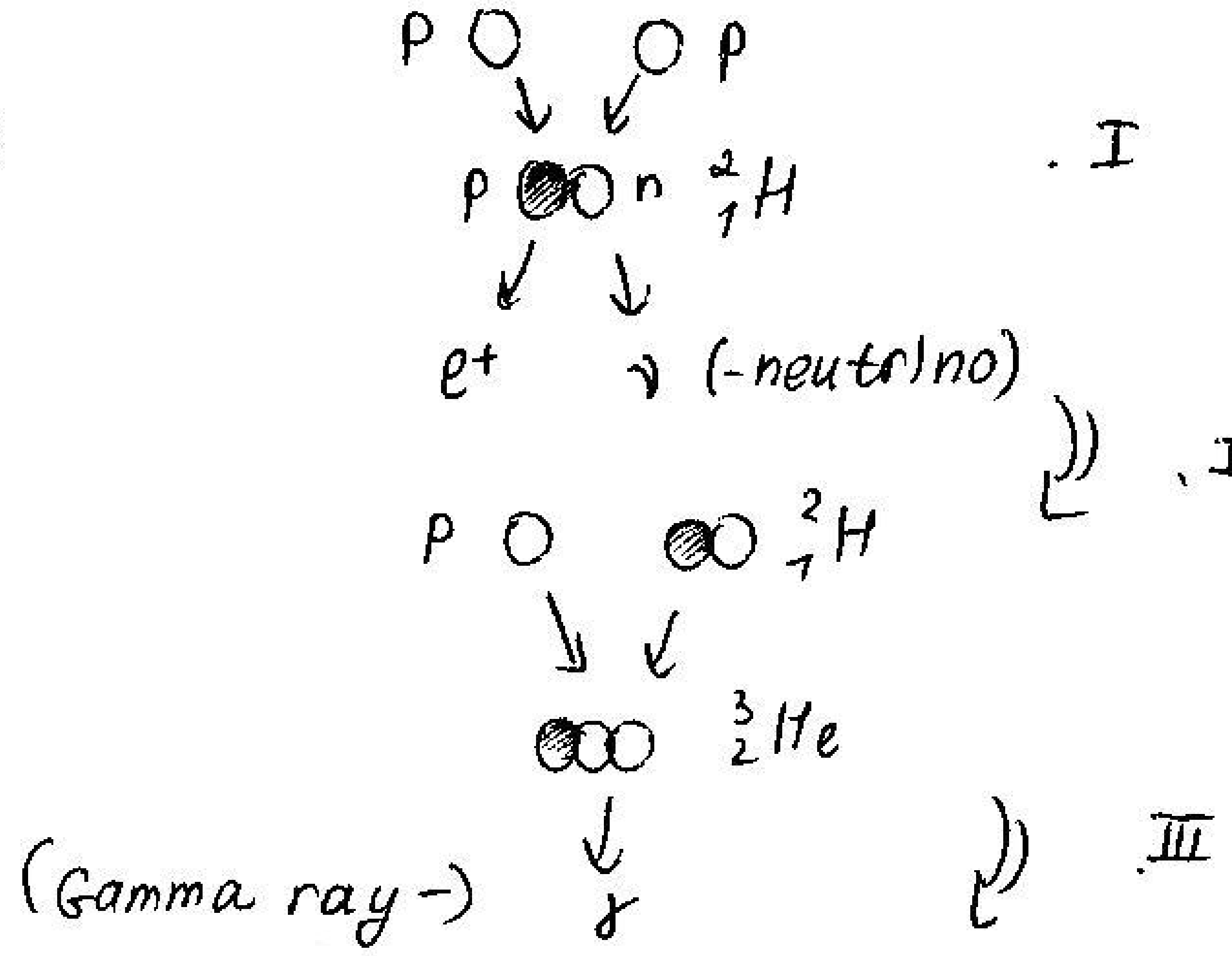
$P(r)$, $M(r)$, $\rho(r)$, $T(r)$, $\kappa(r)$, $L(r)$, $\varepsilon(r)$

קבלנו כוכב תיאורטי !

Proton- Protor Chain:

רוב החלקיקים בשמש הם פרוטונים. כל פעם פרוטונים מתנגשים ויוצרים חלקיק שממנו יוצאו ניוטרון ופוזיטרון אחד:

התנגשות כזו קוראת לעתים רחוקות מאוד. מה שקובע את הקצב הוא תהליך ה-I.



[ראה מצגת] מתפרק למשהו יציב [^4_2He]

Mass ($MeV \to m_0c^2$)

proton-	938.259	$\Delta = 1.29\ MeV$
neutron-	939.553	
electron-	0.511	
positron-	0.511	

A free neutron will beta decay:

$$n \to p + e^- + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{antineutrino}}}{\bar{\nu}_e}$$

time-scale for decay 15 minutes.

$$939.553 \to \underbrace{938.8}_{p+e^-} + \underbrace{\Delta E}_{0.779\ MeV}$$

$$\underbrace{p}_{938.259} \to \underbrace{n + e^+}_{940.1} + \underbrace{\nu_e}_{-1.8\,MeV}$$

So generally won't occur, but it will if have a supply of energy such as binding energy released in a nuclear reactions.

Step #1 in p-p chain:

$$p+p \longrightarrow \underbrace{p+n+e^{+}+\nu_e} \longrightarrow d+e^{+}+\nu_e$$

Binding energy of d is 2.224 MeV.

Converting p to $n+e^{+}+\nu_e$ requires 1.805 MeV,

so 0.419 MeV left over (this is the maximum neutrino energy) + rest mass of positron 0.511 MeV.

Step #2 in p-p chain:

$$p+d \longrightarrow {}^{3}_{2}He+\gamma$$

energy of gamma ray = 5.49 MeV

Step #3 in p-p chain:

$${}^{3}_{2}He+{}^{3}_{2}He \longrightarrow {}^{4}_{2}He+2p$$

KE released = 12.86 MeV

$$\Downarrow$$

energy budget:

$$\left.\begin{array}{r} 0.419 \\ 0.511 \\ 5.49 \end{array}\right\} \times 2$$

$$\begin{array}{r} + \quad 12.86 \\ \hline \end{array}$$

ანუ : 25.70 MeV + 2×0.511 MeV − 2×0.26 MeV = $\boxed{26.2\ MeV}$

- need to add 2·0.511 since the two positrons annihilate with two additional electrons.
- Subtract mean energy of escaping neutrinos 2·0.26 MeV.

ანუ : $4p \longrightarrow {}^{4}_{2}He+2e^{+}+2\nu_e$

nuclear energy released into sun is 26.2 MeV.

$$\frac{26.2\,MeV}{4m_H}=0.007 \text{ per proton}$$

27/03/07 9. nuclear fusion in stars:

1). proton-proton chain.

2). energy generation rate.

3). sensitivity to temperature.

4). neutrino flux.

Energy Bedget (MeV):

0.419

0.511

5.49

12.86

25.70

add $2 \cdot 0.511$ (2 electrons annihlate with 2 positrons)

subtract $2 \cdot 0.26$ (2 escaping neutrinos)

26.2 MeV

$$4p \rightarrow {}^4He + 2e^+ + 2\nu_e$$

26.2 MeV into gas

per proton: $\frac{26.2}{4m_p c^2} = \frac{26.2}{4 \cdot 938} = 0.007 = 0.7\%$

Available nuclear energy in sun via p-p chain is $0.007 M_\odot c^2$

$$t = \frac{0.007 M_\odot c^2}{L_\odot} = 10^{11} yr$$

כמה זמן השמש יכול להרון עם מאגר האנרגיה הנתון.

זהו חסם עליון לזמן שכוכב כשמש יכול להתקיים (עד כדי 10%).

• האם יש סיכוי ששני פרוטונים יתקרבו אחד לשני עד כדי מרחק של פרמי? לא! ⇐ בעיה.

נראה שהסיכוי אפסי ואז נראה כיצד אנו מיישבים זאת עם הבעיה.

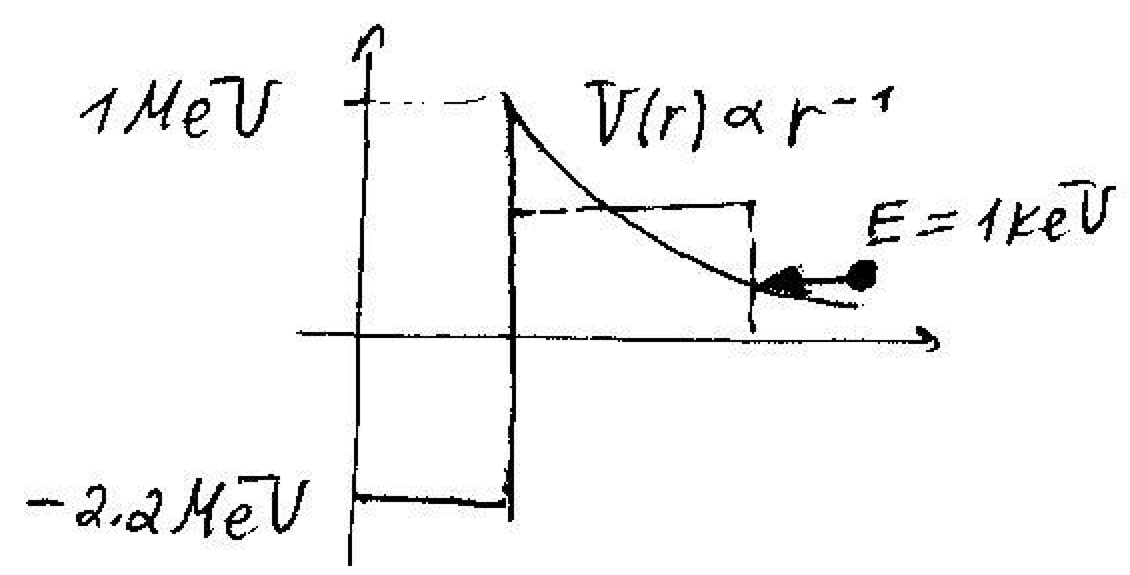
Colomb energy for two nuclei with charges $z_1 e$ and $z_2 e$ at a distance r apart is: $E = z_1 z_2 e^2 / r$

p-p: $z_1 = 1$, $z_2 = 1$, $r = \text{fermy} = 10^{-13}\,cm \Rightarrow E \approx 1.4\,MeV$

But typical proton kinetic energy is only $\frac{3}{2}k_B T$

for $T \sim 10^7 K$

$\frac{3}{2}k_B T \cong 1 keV$



Could the high energy tail of the thermal Maxwell distribution number of such particles :

$$e^{-E/k_B T} = e^{-1.4 MeV/1keV}$$

$$e^{-1000} = 10^{-43X}$$

"only" have 10^{57} proton in the sun.

<= אין שום סיכוי שפרוטון ופרוטון יתקרבו למרחק של fm ויתקרבו.

מה הפתרון? חדירה דרך מחסום פוטנציאל => מכניקת קוונטים.

בדרך זו מקבלים סיכוי קטן (אך אינו אפסי).

Solution : Quantum barrier penetration (tunneling) :

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

m_1 e z_1 $\hbar$

m_2 z_2 $E \rightarrow$ אנרגיה קינטית יחסית

Gamow factor for barrier penetration :

$$g(E) = \exp\left[-\frac{\pi\sqrt{2\mu}}{\hbar} z_1 z_2 e^2 \frac{1}{\sqrt{E}}\right]$$

Define "Gamow Energy" :

$$E_G = (\pi \alpha z_1 z_2)^2 \mu c^2$$

$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$ "fine-structure constant" $= \frac{1}{137}$

(הסיכוי לחדירה: $g(E) = \exp\left[-(E_G/E)^{1/2}\right]$

for two interacting protons:

$$E_G = \left(\pi \frac{1}{137} \times 1 \times 1\right)^2 2 \frac{m_p}{2} c^2 =$$

$$= 493\ MeV \approx 500\ keV$$

so for $E \approx 1\ keV$

$$e^{-\sqrt{500}} \approx e^{-22} \approx 10^{-10}$$

$\hookrightarrow$ hyge compared to classical 10^{-434}!

ממשפט הויריאלי - אם מעלים את האנרגיה של הגוף נפחו גדל והטמפ' שלו קטנה

(ולהיפך). אם השמש משחררת אנרגיה הטמפ' במרכזה גדלה והשמש קטנה,

מצב שני השמש פולטת קרינה ⇐ מאבדת אנרגיה ← הטמפ' תקטן. שני התהליכים

מבטלים אחד את השני ← טרמוסטט טבעי.

Develop an expression for the energy generation rate:

1 step in p-p chain described by the cross-section.

$$\sigma(E) = \frac{S(E)}{E} \underbrace{e^{-\sqrt{E_G/E}}}_{\text{Gamow factor}}$$

$$S \sim keV\text{-}barn \quad [10^{-24} cm^2 = barn]$$

For $p+p \rightarrow p+n+e^+ + \nu_e$: $S \cong 3.8 \cdot 10^{-22}\ keV\text{-}barn$

for keV proton: $\frac{S(E)}{E} \cong 3.8 \cdot 10^{-46}\ cm^2 \ll$ Thomson cross-section.

בפסח: לקרוא את פרק 3 בספר של דן מעוז עד הסוף.