05/03/07 (3)　　　　　היום:

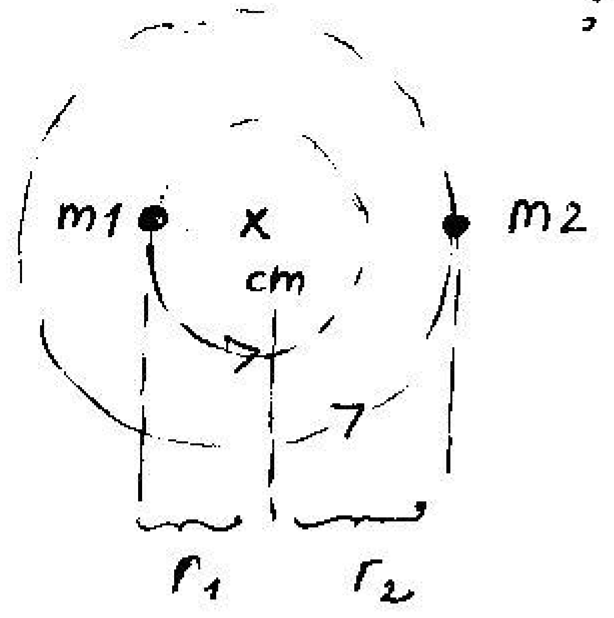
1). stellar mass measurement or constraints via observations of binary stars.

2). stars as black-body radiators, basic of black-body radiation.

3). spectral classification of stars.

ניתוח תנועה בינארית:

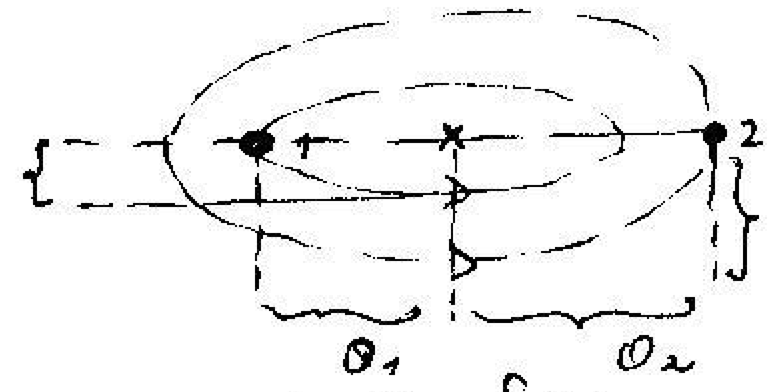
(1).



נניח כי הזווית בין קו הראיה לניצב למישור הסיבוב היא $i=0$.

במקרה שישנה זווית הטיה כלשהי שונה מאפס מקבלים:

($i=$ inclination angle)



$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda}=\frac{v}{c}$$

נזכיר כי בגבול הניוטוני:

אזי אם נמדוד $\Delta\lambda$ ונדע מאיזה קו מדובר λ, אזי

נוכל לעקוב אחרי מהירות של כל כוכב (כמובן יש

לכפול באות ב-$\sin i$)

⇐ בעזרת אפקט דופלר מודדים מהירות רדיאלית שהיא המהירות

הרדיאלית כפול פקטור $\sin i$. מכאן מקבלים את עקומות

המהירות - "radial velocity curves". [ראה עקומה במצגת]

(1) ⇐ מהגדרת מ"מ: $m_1 r_1 = m_2 r_2$

נגדיר: $a = r_1 + r_2$

$$\Rightarrow \quad r_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}\cdot a$$

$$r_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\cdot a$$

Equation of motion: $m_1 \omega^2 r_1 = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{a^2}$ therefore:

<u>Kepler's 3^{rd} law</u>: $\boxed{\omega^2 = \frac{G(m_1+m_2)}{a^3}}$ $\overset{\text{or}}{\leftrightarrow}$ $\boxed{P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)} a^3}$

כיצד אנו מיישמים את מה שקיבלנו?

for a visual binary can in principle measure,

and distance d to system:

$$\frac{\theta_1 d}{\theta_2 d} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

תצפיתית אנו יכולים לקבוע את יחס המסות ואת זמן מחזור p.

<= קיבלנו את סכום המסות וחילוק המסות -> שתי מערכות

משוואות ב-2 נעלמים:

so with 3^{rd} Kepler's law can solve unambiguosly

for m_1 and m_2.

כעת נתבונן במערכת ספקטרוסקופית:

for spectroscopic binary system can measure amplitudes

of radial velocity curves:

$$\begin{cases} |V_{1obs}| = |V_1| \sin i \\ |V_{2obs}| = |V_2| \sin i \end{cases}$$

$$\begin{cases} |V_1| = \frac{2\pi r_1}{P} \\ |V_2| = \frac{2\pi r_2}{P} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{|V_{1obs}|}{|V_{2obs}|} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1}}$$

Can express Kepler's 3^{rd} law:

$$\boxed{(m_1+m_2)\sin^3 i = \frac{P}{2\pi G}\left(|V_{1obs}| + |V_{2obs}|\right)^3}$$

<= ידועים הכל חוץ

מזווית i.

עד כדי פקטור $\sin^3 i$ אנו יכולים לקבוע את המסות!

(במקרה הזה אנו צריכים לדעת/להניח משהו על i כדי לקבל את המסות).

בהרבה מן המקרים הידע שלנו על המערכת עוד יותר מוגבל: לא רק

שלא יודעים את הזווית i, אלא גם יש מדידה של מהירות של כוכב אחד

בלבד (או $|V_{2obs}|$ או $|V_{1obs}|$) (הכוכב שלא רואים חלש מדי בד"כ):

in single-lined spectroscopic binary have information about only one star:

נקרא: הכוכב שרואים - "primary star" - הכוכב העיקרי

הכוכב שלא רואים - "secondary star"

only observe $|V_{1obs}|$:

$$|V_{2obs}| = \frac{m_1}{m_2} |V_{1obs}|$$

$$\Rightarrow \boxed{(m_1+m_2)\sin^3 i = \frac{P}{2\pi G} |V_{1obs}|^3 \left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)^3} \quad \circledast$$

⇐ קיבלנו משוואה אחת עבור 3 נעלמים: m_1, m_2, i. מכאן נוכל לקבל מידע חלקי על המערכת.

A very important case is when $m_2 \ll m_1$:

במקרה הנ"ל ניתן לכתוב את ביטוי $\circledast$ כך (נוותר על האלגברה):

$$\boxed{m_2 \sin i = \left(\frac{P}{2\pi G}\right)^{\frac{1}{3}} |V_{1obs}| \, m_1^{2/3}}$$

amplitude of velocity curve form.

⇐ אם רואים תנודות של m_1 במהירות V_{1obs} ויודעים את זמן המחזור P נוכל לחלץ מידע על המסה m_2 (וזה מה שעושים היום בפועל).

דוגמא: נחשב את הסדר של $|V_{1obs}|$ עבור כוכב בעל מסת השמש ו- m_2 בעל מסת צדק כשהוא נמצא במרחק יחידה אסטרונומית אחת.

(שמש) $m_1 = 1 M_\odot$

(צדק) $m_2 = 10^{-3} M_\odot$

$d = 1AU$ (m_2 from m_1)

assume: $\sin i = 1$

$$|v_{1obs}| = 10^{-3}\,(2\cdot10^{33}g)^{1/3}\left(\frac{3.15\cdot10^{7}}{2\pi\cdot6.7\cdot10^{-8}}\right)^{-\frac{1}{3}} = 30\ ms^{-1}$$

required spectral resolution: $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c} = 10^{-7}$

במכשירים של היום ניתן אכן למדוד מהירויות קטנות כאלה גם במרחקים ממש גדולים. הבעיה היא שכוכבי הלכת הללו בהירים מדי ולא ניתן לראות אותם ⇐ משתמשים ב-Wobble Method [ראה מצגת]:

מסתכלים על תנועת הכוכב הבהיר יותר ומכאן מסיקים כי הוא חג סביב מ"מ משותף שלו עם כוכב אחר ← כך מגלים כוכבי לכת אחרים (חיוורים).

כך גילו גם שכוכב מסיבי כמו צדק מתקיים קרוב לשמש (זה סותר את תורת היווצרות הכוכבים). אחד המחקרים כיום עוסק בלהבין כיצד נוצרות מערכות כאלה.

תצפיות כשמודדים את מסות הכוכבים מקבלים את טווח המסות הבא:

Result of stellar mass measurements: All known stars have masses in range: $\sim 0.1 M_\odot \rightarrow 150 M_\odot$

נשאלת השאלה: למה זה הטווח? נענה על כך בהמשך הקורס.

נציין עוד עובדה: רוב הכוכבים הם בטווח המסות הנמוכות, במסות גבוהות כוכבים מאוד נדירים, למעשה מס' הכוכבים פר אינטרוול מסה בטווח שבין $1M_\odot$ ל-$150M_\odot$:

$$\boxed{dn \propto m^{-2.35}\,dm} \quad [\,m \gtrsim 1M_\odot\,]$$

num. of stars in mass interval dm

"Salpeter Law"

הסבר מדוייק לחוק הזה עוד לא ניתן, ההתפלגות מסות מסדר גודל של השמש (היא מאוד מסובכת.

נחזור לדון על השמש: השמש פולטת פוטונים שנוצרים בה דרך הפוטוספירה. לפוטונים, הנוצרים בתוך השמש קשה לברוח ממנה, אולם לפוטונים הנוצרים על השפה או קרוב לשפה קל לברוח והם נפלטים מיד בקו ישר ← הפוטוספירה מבדילה בין "הפנים" ו"החוץ" של השמש. בעיקרון, הקרינה השמש הינה קרינה של גוף שחור.

[ראה במצגת עקומת הקרינה של פוטוספירה]

נזכר בתכונות של קרינת פלנק:

- נציין כי הפוטוספירה הינה שכבה מאוד דקה (כ-10^{-3} מרדיוס השמש).

נפתח משיקולים בסיסיים את נוסחת פלנק: פוטונים הם בוזונים ולכן התפלגות החלקיקים נתונה ע"י התפלגות בוזה-אינשטיין:

מס' חלקיקים במצב קוונטי E בטמפ' T נתון ע"י: $\frac{1}{e^{E/kT}-1}$

quantum volume of phase space cell is h^3

$$dE = \underbrace{2}_{\text{שני קיטובים}}\cdot \underbrace{h\nu}_{\text{energy}}\, \frac{1}{e^{E/kT}-1}\cdot \frac{d^3x\, 4\pi p^2 dp}{h^3}$$ } volume element in 6D phase space

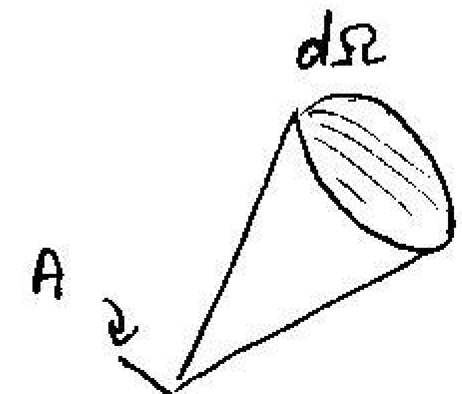
עבור חלקיקים במנוחה $E=pc=\underbrace{h\nu}_{\text{אנרגיית פוטון}}$

בסופו של דבר dE שווה ל:

Planck Formula: $$\boxed{dE = \underbrace{\frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{e^{E/kT}-1}}_{\text{נגדיר: } \equiv u_\nu} d^3x\, d\nu}$$

$$u_\nu(T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{e^{E/kT}-1} \quad \frac{erg}{cm^3\cdot Hz}$$

נסתכל על איבר עם אלמנט שטח וזווית מרחבית $d\Omega$



$$\boxed{B_\nu(T) = \frac{u_\nu}{4\pi}\cdot c} =$$ מס' פוטונים נעים בזווית $d\Omega$ דרך יחידת שטח A.

[ראה במצגת שרטוט]. energy per unit area per unit time per unit frequency.

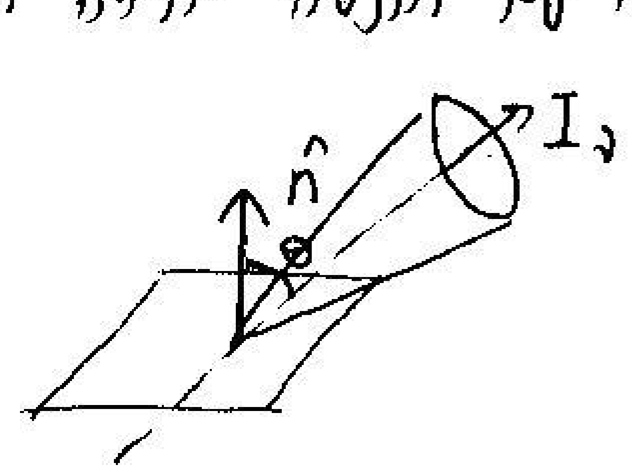
"spetific intensity" of Black body radiation - נקרא B_ν

$$\boxed{B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\cdot\frac{1}{e^{h\nu/kT}-1}}$$

(חילקנו ב-4π כי הנחנו כי התפלגות הקרינה הוא איזוטרופית).

כעת נדבר על השטף: נגדיר את שטף הקרינה: ניקח אלמנט שטח עם וקטור יחידה $\hat{n}$

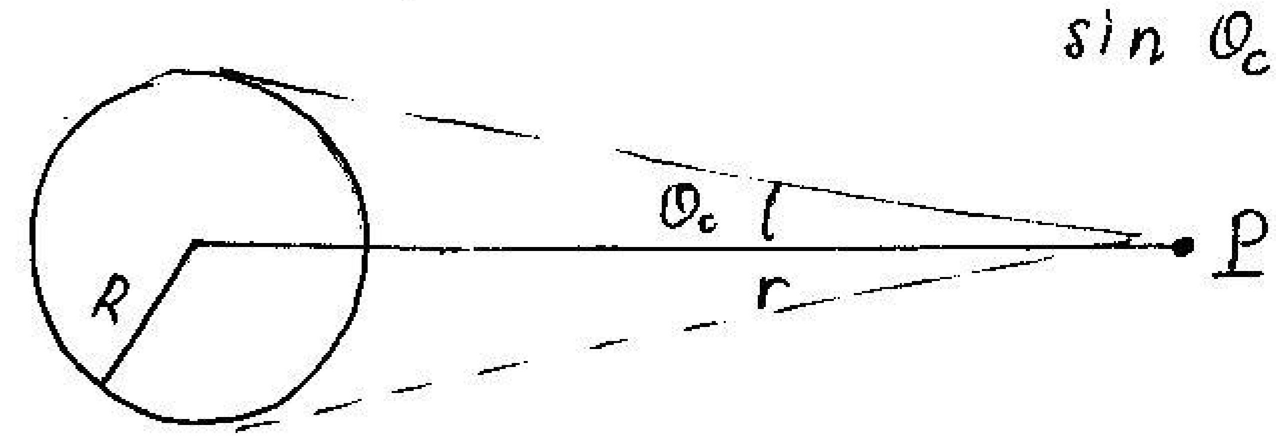
ונסתכל על אלמנט זוויתי הנמצא בזווית θ ביחס לניצב:



דוגמא: יש כדור עם רדיוס R שפולט קרינת גוף שחור:

what is energy flux at point P due to radiation from sphere?

$$\sin\theta_c = \frac{R}{r}$$



$$\left[\frac{erg}{cm^2\cdot s\cdot Hz}\right]$$ יחידות של $\Leftarrow$ $$f_\nu(P)=\int \underbrace{B_\nu}(T)\cos\theta\, d\Omega =$$

assume no angle dependence

$$= B_\nu \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\theta_c} \sin\theta\cos\theta\, d\theta = \pi B_\nu (1-\cos^2\theta_c) =$$

$$= \pi B_\nu \sin^2\theta_c = \boxed{\pi B_\nu \left(\frac{R}{r}\right)^2}$$

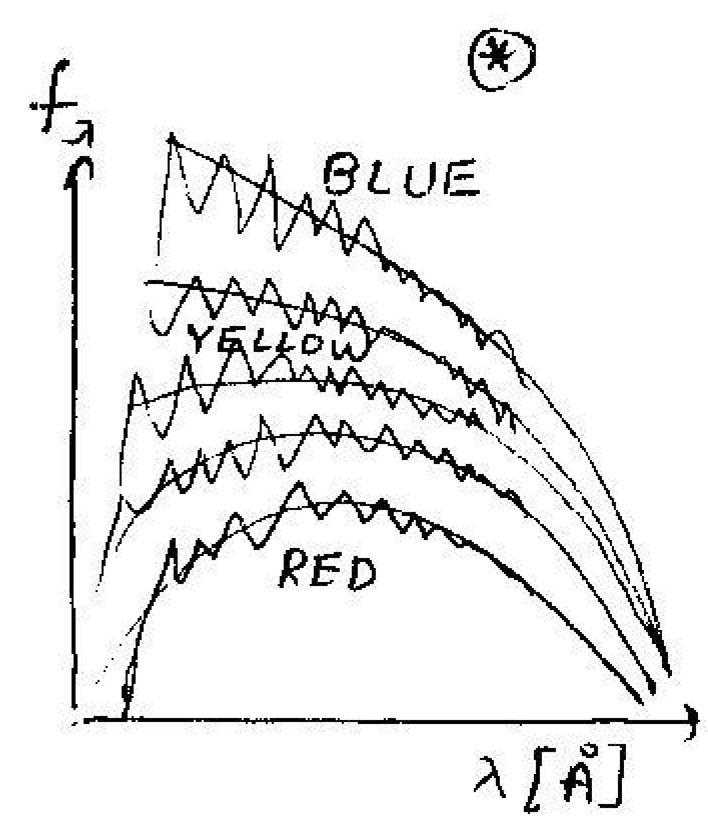
$$\text{for } r=R: \boxed{f_\nu(R)=\pi B_\nu(T)}$$

שטף האנרגיה החוצה אלמנט שטח על פני הכוכב.

ככל שנתרחק מהכוכב, שטף האנרגיה מונמך בפקטור $\sim\frac{1}{r^2}$ כידוע לנו.

06/03/07 (4). המשך - Planck Spectrum:

Wien's Law: $\lambda_{max}T = 0.29\ cm\cdot K$



ככל הטמפ' גבוהה יותר, אורך הגל בו הצפיפות מקסימלית-קטן יותר; מכאן שניתן לאפיין טמפרטורות אלה לצבעים (למשל עבור כוכב חם הצבע יהיה כחול, חם פחות-צהוב ועבור כוכבים קרים יותר נקבל אדום).

$$dE = I_\nu\, dA\, dt\, d\nu\, d\Omega \Rightarrow \text{Specific intensity: } I_\nu = c\cdot\frac{du_\nu}{d\Omega}$$

ניתן להתייחס ל-I_ν כמספר אנרגיה מקרן לאורך הזווית המרחבית Ω.

קרינת פלנק הינה קרינה איזוטרופית (האלקטרונים נעים לכל כיוון באותה הסתברות)

ואז ניתן לקבל: $$B_\nu \equiv I_\nu = \frac{c}{4\pi}u_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2}\left(e^{h\nu/k_BT}-1\right)^{-1}$$

נזכיר: שטף: $f_\nu = \int I_\nu \cos\theta\, d\Omega$ $\Leftarrow$ $f=\int_0^\infty f_\nu\, d\nu$ שטף כולל $\left(\frac{erg}{s\cdot cm^2}\right)$.

נזכיר את התוצאה שקיבלנו בשיעור שעבר עבור כדור שפולט קרינת גוף שחור:

$$f = \pi B\sin^2\theta_c = \pi B\left(\frac{R}{r}\right)^2$$

אם רוצים לדעת מה שטף האנרגיה על קצה הכוכב (פר יחידת שטח):

$$[erg\cdot s^{-1}cm^{-2}Hz^{-1}] \qquad f_\nu(r_*) = \pi B_\nu = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{h\nu/k_BT}-1}$$

כעת אם נרצה לדעת את השטף הכולל משטח מעטפת הכוכב יש לעשות אינטגרציה על שטח הפנים שלו.

Luminosity per frequency interval is: $L_\nu = f_\nu(r_*)4\pi r_*^2 \; [erg\cdot s^{-1}Hz^{-1}]$

$\Rightarrow$ at a distance d from the star: $f_\nu(d) = \frac{L_\nu}{4\pi d^2} = f_\nu(r_*)\frac{r_*^2}{d^2}$

$$u = \int_0^\infty u_\nu d\nu, \quad I = \int_0^\infty I_\nu d\nu, \; f = \int_0^\infty f_\nu d\nu, \; L = \int_0^\infty L_\nu d\nu$$

אחרי ביצוע האינטגרציה מקבלים:

$$u = aT^4 \qquad a = \frac{8\pi^5 k^4}{15c^3h^3} = 7.6\cdot 10^{-15}[erg\cdot cm^{-3}K^{-4}]$$

$$f = \frac{c}{4}aT^4 = \sigma T^4 \qquad \sigma = \frac{c}{4}a = 5.7\cdot 10^{-5}[erg\cdot s^{-1}cm^{-2}K^{-4}]$$

So, for a Black Body star:

כמות האנרגיה ליח' זמן שנפלט מהכוכב: $L = 4\pi r_*^2\cdot\sigma T^4$

מה אפשר למדוד? f_ν ונניח שיודעים את המרחק לכוכב d $\Leftarrow$

מכאן עפ"י נמ' יודעים את L. אבל כיצד ניתן לדעת את T? עפ"י עקרון

Wien $\leftarrow$ אם נדע שהספקטרום מהכוכב מתנהג כמו בשרטוט ⊛, אז אם

נדע את אורך הגל בו העוצמה מקסימלית $\leftarrow$ נדע את T.

$\Leftarrow$ מצאנו דרך למצוא את הגודל של הכוכב (רדיוס שלו r_*).

עד כה אנו יודעים כיצד לקבוע מהירות L של כוכב, טמפ' הפוטוספירה שלו T,

מסת הכוכב M וגודל שלו r_*.

Stellar temperatures:

- Color temperature – T_c of a star is defined such that $B_\nu(T_c)$ gives the best match to the spectral shape of star's radiation spectrum.
- Effective temperature – T_{eff} of a star is defined such that given the star's luminosity L and radious R, then: $L = 4\pi R^2\sigma T_{eff}^4$

בד"כ: $T_c \approx T_{eff}$

[ראה במצגת שרטוט]   Spectral Classification of stars:

אם משווים את ספקטרומי פלאנק לספקטרה המדוד ההתאמה לא מדוייקת.
כיון מסתכלים גם על קווי בליעה שאותם אנו יודעים לזהות. כך ניתן לדעת
ממה עשויים הכוכבים, למשל בשרטוט רואים קווי בליעה של מימן בסביבות
טמפרטורה של K $(H\gamma, H\beta, H\alpha)$:

אנו יודעים כי לאטום המימן יש רמות אנרגיה המתוארות ע"י Bohr:

$$E_n = -13.6\, eV \frac{1}{n^2}$$

כאשר 13.6 -- אנרגיית הקשר של המימן.

מכאן שהפרשי האנרגיה בין הרמות ניתנים ע"י נוסחת Rydberg:

$$E_{n_1 \to n_2} = 13.6\, eV \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$$

אפשר לבטא זאת גם באמצעות אורכי הגל:

$$\lambda_{n_1 \to n_2} = \frac{hc}{E_{n_1 \to n_2}} = \frac{911.5 \mathring{A}}{1/n_1^2 - 1/n_2^2}$$

כך למשל ניתן לחשב את אורך הגל בבליעה של $H\alpha$ וזה בדיוק מה שרואים בשרטוט.
עבור כוכב מאוד חם בקושי רואים את קווי הבליעה, אם מקררים את הכוכב רואים
מאוד חזק את קווי הבליעה, אם מקררים עוד הקווים שוב נעלמים. מה ההסבר לזה?
ישנם כאן 2 תנאים שצריכים להתקיים:

- צריך שיהיה מימן במצב אטומי (אלקטרונים קשורים). $\Leftarrow$ Boltzmann & Saha
- אוכלוסייה מספיק גדולה ברמה $L=2$.

למשל הרכב השמש: • hydrogen – 91.2%   • oxygen – 0.078%
• helium – 8.7%   • carbon – 0.043%

באופן כללי כ-90% מתכולת הכוכב הוא מימן וכ-9% הוא הליום.

את הכוכבים מסמנים באותיות גדולות באנגלית בהתאם להתנהגות הספקטרלית שלהם:

$$O \to B \to A \to F \to G \to K \to M$$

[ראה מצגת]

O ⇓ חם ביותר M ⇓ קר ביותר