12/03/07 (5)

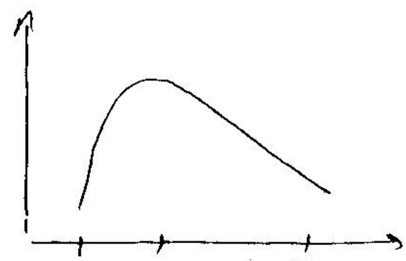
השבוע:

- stars: spectral classifaction (Boltzmann versus Saha)
- Herzprung-Russel Diagram
- Hydrostatic Equilibrium
- Virial Theorem
- pressure: ideal gas, radiation pressure.

בשבוע שעבר הזכרנו את בליעת אטומי המימן בטמפרטורות בינוניות.

מסמנים באותיות גדולות את ההתנהגות הספקטרלית ←

קר ביותר $O \to B \to A \to F \to G \to K \to M$ חם ביותר



בחם ובקר מדי ישנה דעיכה (במצב קר אין הרבה מימן שמעורר לרמה 2 ולכן יש פחות בליעה, בטמפ' גבוהות המימן מתיינן ולכן שוב פעם אין הרבה קווים של בליעת אטומי מימן - בטמפרטורות גבוהות האלקטרונים 'מספיקים' להיות חופשיים). נכתוב את הנוסחאות המתארות תהליכים אלה:

Strength of a Balmer absorption line formed in a stellar photosphere depends on:

1). Relative population of hydrogen atoms in $n=2$ state as given by Boltzmann factor:

$$\boxed{\frac{N_n}{N_1} = \frac{g_n}{g_1} e^{-|E-E_1|/k_B T}} \qquad (g_n = 2n^2 \text{ :נזכיר})$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{N_2}{N_1} = \frac{8}{2} e^{-1.2 \cdot 10^5 / T}}$$

- איזה אחוז מהווה אנרגיה $E-E_1$ מאנרגיית הקשר של המימן? 75%.
- $N_2/N_1 = 1$ for $T = 8.6 \cdot 10^4 K$

2). נסתכל לפוטונים שיכולים לגרום ליינון האטום ושחבור:

$$H+\gamma \rightleftarrows H^{+}+e$$

at any T there is a balance between ionizations and recombinations.

For hydrogen Saha equation is (ללא הוכחה):

$$\boxed{\frac{N(H^{+})}{N(H)}=\frac{1}{N(e)}\left(\frac{2\pi m_e k_B T}{h^{2}}\right)^{3/2} e^{\underbrace{-1.6\cdot 10^{5}/T}_{13.6eV/k_B}}}$$

אנ' יינון 13.6eV/k_B

הערה: מש' Saha מאפשרת לחשב את דרגת העירור של כל אטום במצב ש.מ. תרמודינמי:

Saha gives ionization fraction in thermal equilibrium.

Can assume also that: $N(e)\approx N(H^{+})$

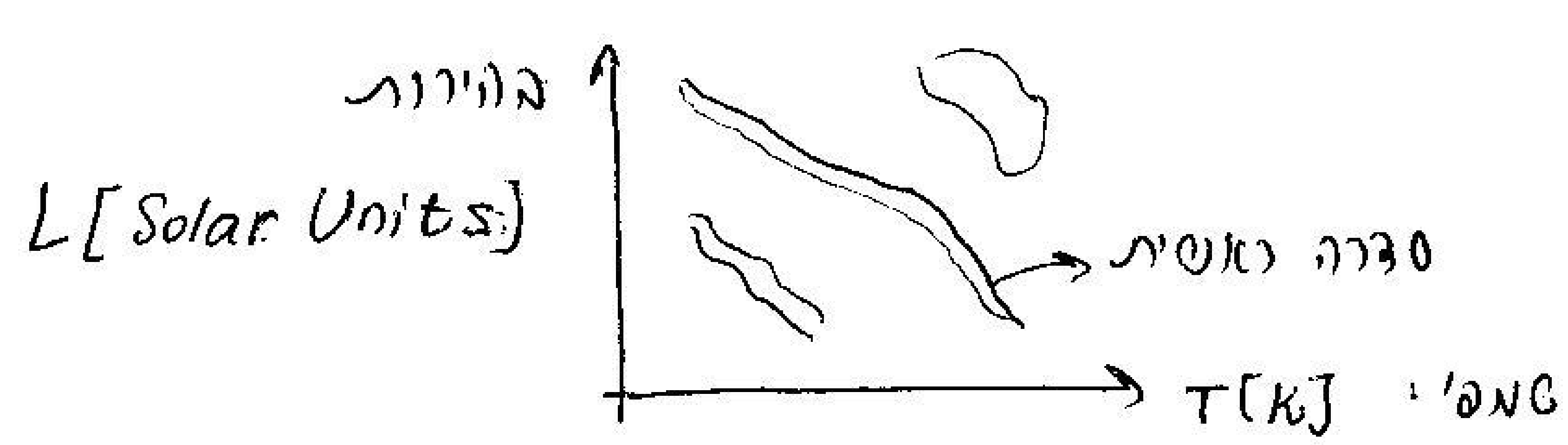
(because gas is mainly hydrogen).

נשים לב כי אם נגדיל את צפיפות האלקטרונים היחס $N(H^{+})/N(H)$ יקטן (כי יהיה יותר שחבורים), ולהיפך עבור הגדלת הטמפרטורה (אז יהיו יותר יינון).

מתי יחס זה שווה ל-1? בסביבות 10000K.

עד כה אנו יודעים למדוד את הבהירות האינטרינזית של הכוכבים וע"י צפייה בספקטרום שהוא פולט מוצאים גם את הטמפ' האפקטיבית שלהם. כיצד נראית דיאגרמה של הבהירות האינטרינזית כתלות בטמפ' האפקטיבית אם מסתכלים על אוכלוסייה גדולה של כוכבים: Hertzprung-Russell Diagram [ראה מצגת]

מה שמעניין בדיאגרמה זאת ש-90% מהכוכבים בטבע נמצאים על פס שנקרא "הסדרה הראשית" והשאר מרוכזים בשני אזורים נוספים בדיאגרמה:

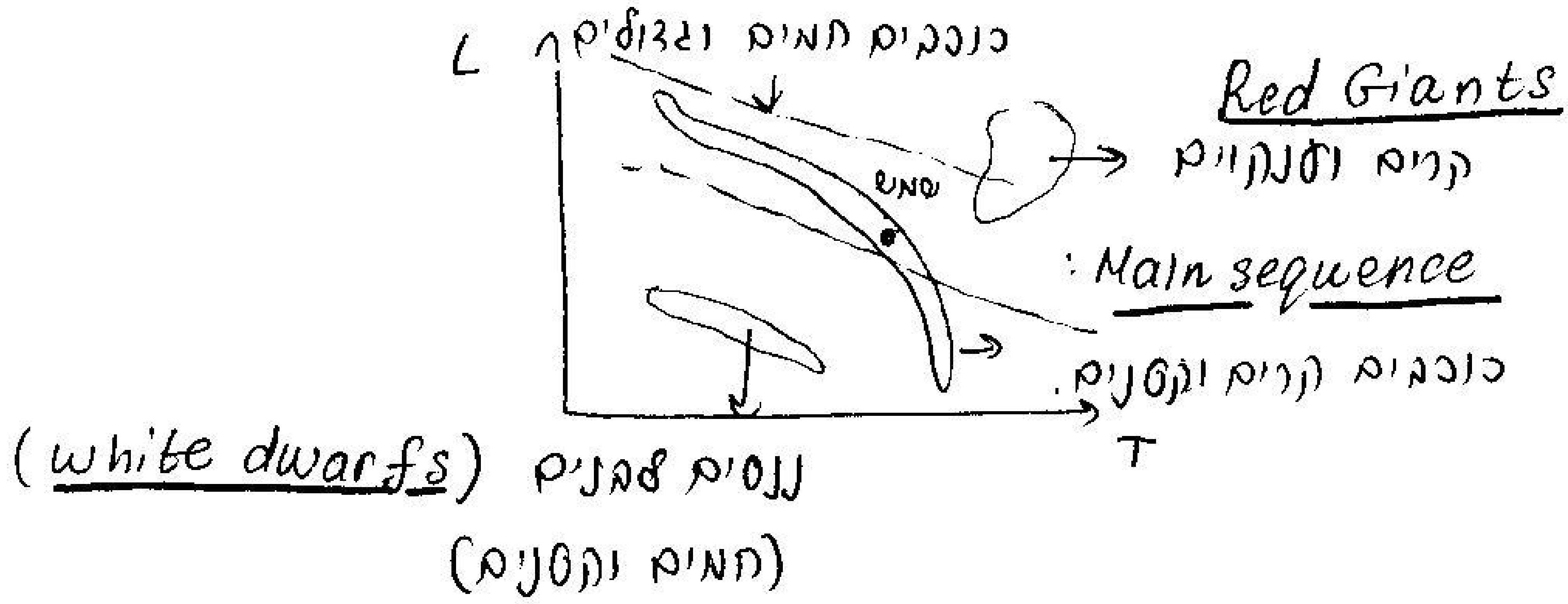


נזכיר את הקשר לבהירות הכוכב:

$$L=4\pi R^{2}\sigma T^{4} \Rightarrow R^{2}\sim\frac{L}{T^{4}}$$

$$\Rightarrow 2\ln R=\ln L-4\ln T.$$

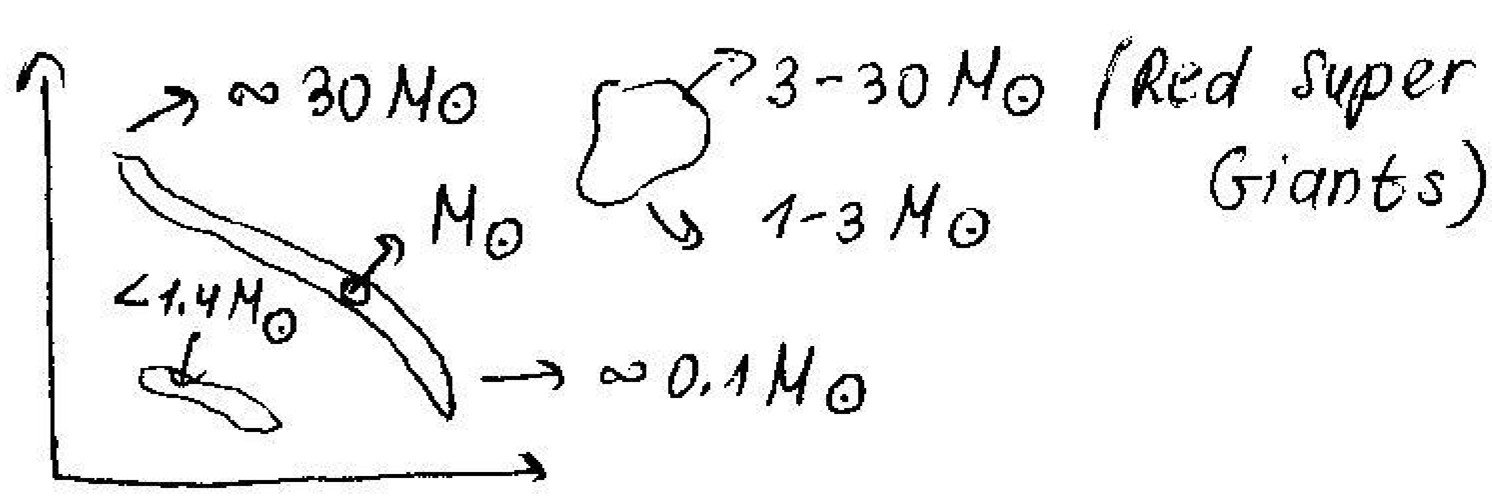
מכאן שעבור כל רדיוס מקבלים קו ישר עבור הבהירות.



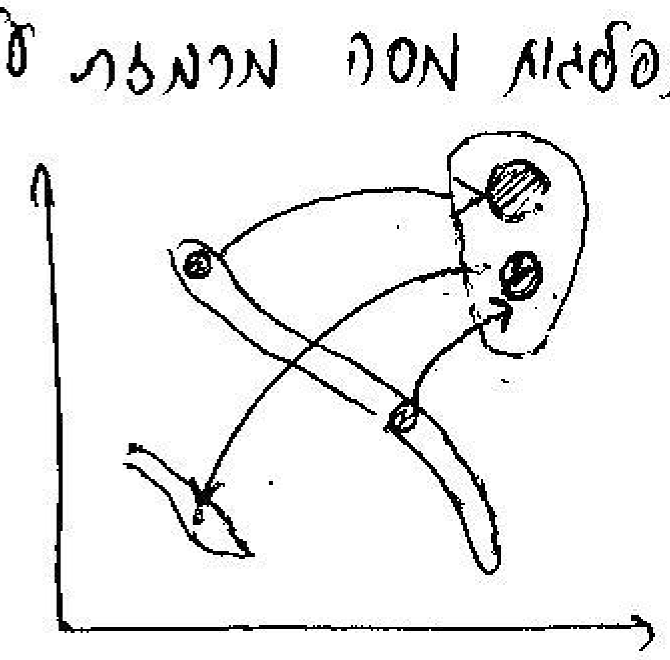
נשים לב כי ישנם כוכבים שנמצאים מחוץ לשלושת התחומים הללו, נדון בכך בהמשך (הסיבה לכך היא בכך שהכוכבים עוברים בין שלושת המצבים ובזמן המעבר הם נמצאים באזורי ביניים ביניהם).

באופן אמפירי קובעים מהדיאגרמה שהבהירות בסדרה הראשית: $L \propto T^8$.

על מנת להבין את הדיאגרמה עלינו לדעת את המסה של הכוכבים: מסתבר כי הפרמטר החשוב שמשתנה בסדרה הראשית היא מסת הכוכב $30 M_\odot \to 0.1 M_\odot$.



אם נסתכל על הענקים האדומים ישנם שני סוגים: עליון: $3-30 M_\odot$, תחתון: $1-3 M_\odot$.
אם נסתכל על הננסים הלבנים מגלים שהמסה שלהם היא תמיד קטנה מ-$1.4 M_\odot$.
מסתבר כי $1.4 M_\odot$ זהו פקטור מאוד דרמטי שההסבר התיאורטי שלו יבוא בהמשך הקורס. לפני כן ננסה להבין בצורה פשוטה יותר את הננסים הלבנים.
העובדה כי ישנה התפלגות מסה מרמזת על כך שישנה התפלגות אבולוציונית:



$\Leftarrow$ כך למשל כוכב שנוצר עם מסת השמש מבלה את רוב זמנו על הסדרה הראשית, אח"כ הוא מתנפח ומתקרר ואח"כ הופך להיות ננס לבן...

[ראה במצגת דוגמאות לכוכבים ידועים]

בסדרה הראשית מגלים כי הבהירות יחסית ל- M^4 : $L \propto M^4$

ניתן גם לשרטט את הרדיוס כפונקציה של המסה; בסדרה הראשית

מגלים כי תחילה $R \sim M$ ואח"כ הרדיוס משתטח: $R \propto M^{0.6}$.

Goal is to develope a "theory of stellar structure".

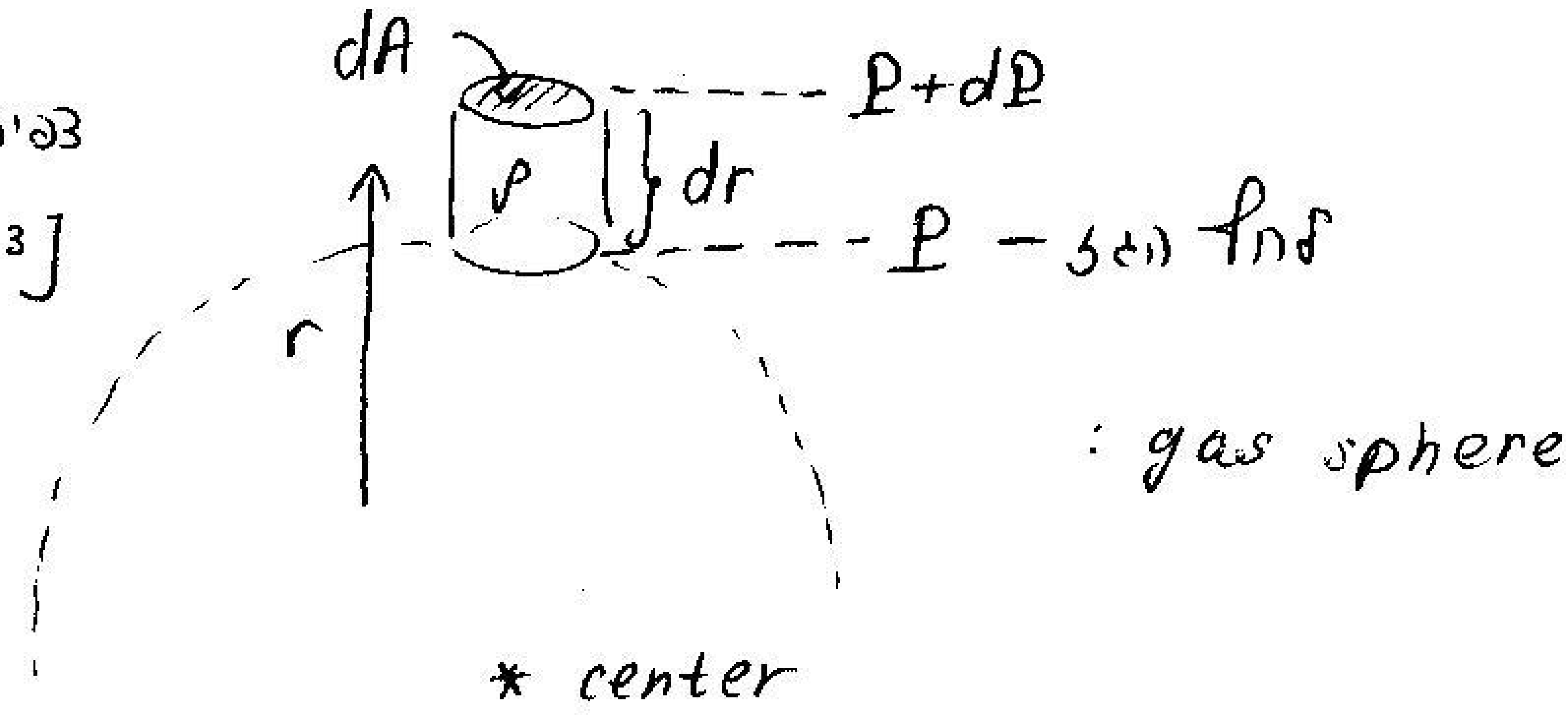
We will develop a set of differential equations.

Hydrostatic Equilibrium (HSE) :

In HSE inward gravitational force is balanced by outward pressure gradient.

Lets look at a small volume element of gas in the star:

$\rho =$ צפיפות הגז $[g \cdot cm^{-3}]$



אם $P+dP < P$ (כלומר $0 > dP$) הכוח פונה כלפי מעלה ויכול לאזן

את כוח הגרביטציה.

$$\text{gravitational force on mass element} = -\frac{GM(r)}{r^2}\rho A\,dr$$

כאשר $M(r)$ - מסה פנימית ל- r.

הערה; $\rho(r)$, $P(r)$, $T(r)$, $M(r)$: $r=R_*$, $M(R_*)=M_*$, $P(R_*)=0$

$$\text{net pressure force on mass element} = PA-(P+dP)A = -dP \cdot A$$

In equilibrium: $-\frac{GM(r)}{r^2}\rho A\,dr - dP \cdot A = 0$

this gives: $\boxed{\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2}}$: "Equation of hydrostatic equilibrium"

לכן התנאי שהמערכת נמצאת במצב ש.מ. הידרוסטטי.

כעת נניח כי אין לחץ פנימי ← יש רק כוח גרביטציוני ולכן הכוכב יקרוס, נרצה לחשב את הזמן שיקח לו לקריסה:

Without the pressure gradien the gas sphere would collapse on a gravitational "free-fall" time-scale.

For any given mass shell, conservation of energy gives:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = -\frac{GM(r_0)}{r_0} + \frac{GM(r_0)}{r}$$

r_0 - רדיוס התחלתי (r-רדיוס סופי)

נשים לב כי המסה הפנימית לא משתנה בזמן $M(r_0)$.

נעשה אינטגרציה בזמן:

so free fall time :

$$t_{ff} \equiv \int_0^{t_{ff}} dt' = -\int_{r_0}^{0} \left\{ 2GM\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right] \right\}^{-\frac{1}{2}} dr =$$

$$= \left[\frac{r_0^3}{2GM(r_0)}\right]^{\frac{1}{2}} \underbrace{\int_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^{1/2} dx}_{=\pi/2}$$

צפיפות ממוצעת

$$\Rightarrow \quad \boxed{t_{ff} = \left(\frac{3\pi}{32 G\bar{\rho}}\right)^{1/2}} \quad \boxed{\bar{\rho} = \frac{M(r_0)}{\frac{4\pi}{3} r_0^3}}$$

דוגמא: נחשב את t_{ff} של השמש:

$r_0 = 7 \cdot 10^{10}\,cm$

$M = 2 \cdot 10^{33}\,g$

$\bar{\rho} = 1.49\,cm^{-3}$

$\Rightarrow t_{ff}^{sun} = 1800\,sec = 0.5\,hour$

נציין כי זהו סדר הגודל שיקח לשמש לחזור למצב הידרוסטטי ממצב של אי-יציבות (אם למשל ננפח את השמש - כעבור כחצי שעה השמש תחזור למצבה הקודם):

t_{ff} is roughly the time to return to HSE after a (small) distarbance.

כעת נשתמש במשוואה ההידרוסטטית כדי לחשב גדלים אחרים (כמו למשל הטמפרטורה בפנים השמש). כמו כן נקבל את המשפט הויריאלי: