Formelsammlung Asset Pricing

Hedge-Ratio

Hedge-Ratio

$$h^* = \frac{\rho\sigma_S\sigma_F}{\sigma_F^2} = \frac{Cov(\Delta S, \Delta F)}{Var(\Delta F)} = \rho\frac{\sigma_S}{\sigma_F}$$

Optimale Anzahl Aktien mittels Hedge-Ratio

$$N^* = h^*\frac{Q_S}{Q_F}$$

Beta

Beta

$$\beta_P W_S - N_F\beta_F W_F = 0 \rightarrow \beta_F = 1\ wenn\ Index\ (z.B. SMI, etc.)$$

Beta Portfolio

$$\beta_P = \frac{Cov(R_{markt}, R_{Port})}{Var(R_{markt})}$$

Optimale Anzahl Aktien mittels Beta

$$N_F^* = \frac{\beta_P W_P}{W_F}$$

Zielbeta

$$\beta_P W_S - N_F\beta_F W_F = \beta^* W_S \rightarrow \beta^* = Zielbeta$$

Optimale Anzahl Aktien mittels Zielbeta

$$N_F^* = \frac{(\beta_P - \beta^*)W_S}{W_F}; \beta^* < \beta_P \rightarrow Short\ Position$$

Zero-Rate (Diskontsatz finden)

Bootstrap (iteratives Verfahren)

$$P(y_1) = \frac{c(N_1+1)}{1+R_1} \rightarrow R_1 = \frac{c(N_1+1)}{P(y_1)} - 1$$

$$P(y_2) = \frac{cN_1}{1+R_1} + \frac{c(N_2+1)}{(1+R_2)^2} \rightarrow R_2 = \sqrt[2]{\frac{c(N_2+1)}{P(y_2) - \frac{cN_1}{1+R_1}}} - 1$$

$$P(y_3) = \frac{cN_1}{1+R_1} + \frac{cN_2}{(1+R_2)^2} + \frac{c(N_3+1)}{(1+R_3)^3} \rightarrow R_3 = \sqrt[3]{\frac{c(N_3+1)}{P(y_3) - \frac{cN_1}{1+R_1} - \frac{cN_2}{(1+R_2)^2}}} - 1$$

Lineares Gleichungssystem

Laufzeit	1	2	3
Coupon	2%	3%	3.5%
P(y)	100.75	101.5	103

$$C = \begin{bmatrix} 102 & 0 & 0 \\ 3 & 101.5 & 0 \\ 3.5 & 3.5 & 103 \end{bmatrix}; P = \begin{bmatrix} 100.75 \\ 101.5 \\ 103 \end{bmatrix} \to C^{-1} * P = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+R_1} \\ \frac{1}{(1+R_2)^2} \\ \frac{1}{(1+R_3)^3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9877 \\ 0.9567 \\ 0.9294 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{(1+R_3)^3} = 0.9294 \to R_3 = 2.47\%$$

Forward-Sätze

Forward-Satz (Forward-Rate)

$$(1+R_{T_1})(1+R_{FT_1T_2}) = (1+R_{T_2})^{T_2-T_1} bzw. e^{T_1 r_{T_1}} e^{(T_2-T_1) r_{fT_1T_2}} = e^{T_2 r_{T_2}}$$

$$R_{FT_1T_2} = \sqrt[T_2-T_1]{\frac{(1+R_{T_2})^{T_2}}{(1+R_{T_1})^{T_1}}} - 1 \; bzw. r_{fT_1T_2} = \frac{T_2 r_{T_2} - T_1 r_{T_1}}{T_2 - T_1}$$

Forward Rate Agreement (FRA)

Wert FRA

$$V_{FRA} = \frac{L(R_F - R_K)(T_2 - T_1)}{(1+R_{T_2})^{T_2}} \; bzw. \frac{L\left(e^{f_r(l-k)} - e^{r_k(l-k)}\right)}{e^{r_l l}} \; aus\ Sicht\ des\ Schuldners$$

$$V_{FRA} = \frac{L(R_K - R_F)(T_2 - T_1)}{(1+R_{T_2})^{T_2}} \; bzw. \frac{L\left(e^{r_k(l-k)} - e^{f_r(l-k)}\right)}{e^{r_l l}} \; aus\ Sicht\ des\ Gläubigers$$

Zuerst Forward-Satz (=Forward-Rate) ausrechnen, dann Wert FRA ausrechnen
Heute einen Zinssatz für einen künftigen Kredit abmachen R_K und anhand vom «fairen Zins» (R_F) schauen was der Wert eines FRA ist

Forwards

Forward-Preis

$$F_t = (S_t - D)e^{r(T-t)} \; bzw. S_t e^{(r-q)(T-t)}; D = disk. Div., q = stet. Div.$$

Wert Forward-Kontrakt (diskret)

$$f = \left((S_t - D)e^{r(T-t)} - K\right) e^{-r(T-t)}; K = P(Forward_{t_0})$$

Wert Forward-Kontrakt (stetig)

$$f = \left(S_t e^{(r-q)(T-t)} - K\right) e^{-r(T-t)}$$

Futures

Preis Indizes/Aktie mit stetiger Auszahlung q (total return index q=0)

$$F_t = S_t e^{(r-q)(T-t)}$$

Preis für Währungen (r*=ausländischer Zinssatz)

$$F_t = S_t e^{(r-r^*)(T-t)}$$

Preis für Rohstoffe

$$F_t = (S_t + U)e^{r(T-t)}\ bzw.\ S_t e^{(r+u)(T-t)}$$

Cost of Carry

$$F_t = S_t e^{c(T-t)} \rightarrow Investitionsgüter$$
$$F_t = S_t e^{(c-y)(T-t)} \rightarrow Konsumgüter$$

Dividendenlose Aktie c = r, Index (ohne total return indizes) c = r-q
Gut oder Rohstoff mit Lagerkosten c = r+u

Zinsswaps (receiver Swap)

Bewertung als Portfolio von Obligationen

$$V = B_{fix} - B_{var}$$

Bfix

$$B_{fix} = \sum_{i=1}^{n} (ke^{-r_i t_i}) + Le^{-r_n t_n}$$

Bvar (vorausblickend, Libor)

$$B_{var} = (k^* + L)e^{-r_1 t_1}$$

Bvar (rückblickend)

$$B_{var} = Le^{\sum_{i=-N}^{-1} r_i \Delta t_i}$$

Bewertung als Portfolio von FRAs

$$v = \sum_{i=1}^{n} (k - LF_{t_i})e^{-r_i t_i}$$

Vorausblickender Zinssatz (für die 1. Periode)

$$F_{t_i} = R^*$$

Rückblickender Zinssatz (für die 1. Periode)

$$F_{t_i} = e^{\sum_{i=-N}^{-1} r_i \Delta t_i} e^{r_1 t_1} - 1$$

Währungsswaps

Bewertung als Portfolio von Obligationen

$$v = B_D - S_{t_0} B_F\ bzw.\ S_{t_0} B_F - B_D$$
$$B_D = \sum_{i=1}^{n} \left(C_{D,t_i} e^{-r_i t_i}\right), B_F = \sum_{i=1}^{n} \left(C_{F,t_i} e^{-r_i^* t_i}\right)$$

Bewertung als Portfolio von Forward-Kontrakten

$$v = \sum_{i=1}^{n} \left(C_{D,t_i} - F_{t_0,t_i} C_{F,t_i}\right) e^{-r_i t_i}\ bzw.\ \sum_{i=1}^{n} \left(F_{t_0,t_i} C_{F,t_i} - C_{D,t_i}\right) e^{-r_i t_i}$$

Optionen

Preisgrenze europäische Call-Option

$$S_t - Ke^{-r(T-t)} - De^{-r(t^*-t)} \leq C_t \leq S_t - De^{-r(t^*-t)}$$

Preisgrenze europäische Put-Option

$$Ke^{-r(T-t)} - S_t + De^{-r(t^*-t)} \leq P_t \leq Ke^{-r(T-t)} + De^{-r(t^*-t)}$$

Put-Call-Parität (europäische Optionen)

$$P_t - S_t = C_t + Ke^{-r(T-t)} + De^{-r(t^*-t)}\ bzw. P_t - S_t e^{-r^*(t^*-t)} = C_t + Ke^{-r(T-t)}$$

Put-Call-Parität (amerikanische Optionen)

$$S_t - De^{-r(t^*-t)} - K \leq c_t - p_t \leq S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

Wert Option (amerikanisch)

$$C = ZW + IW; IW = \max(S_t - K, 0)\ bzw. P = ZW + IW; \max(K - S_t, 0)$$

Binomialbaum

U (N-stufiger Binomialbaum)

$$u = e^{\sigma\sqrt{Zeitraum\ einer\ Stufe}}$$

D (N-stufiger Binomialbaum)

$$d = e^{-\sigma\sqrt{Zeitraum\ einer\ Stufe}} = \frac{1}{u}$$

Risikoneutrale Wahrscheinlichkeit

$$q = \frac{e^{\frac{r(T-t)}{n}} - d}{u - d}$$

Wert Call (europäisch)

$$C = e^{-r(T-t)}(q * f_u + (1-q) * f_d); f = \max(S_t - K, 0)$$

Wert Put (europäisch)

$$P = e^{-r(T-t)}(q * f_u + (1-q) * f_d); f = \max(K - S_t, 0)$$

Wert Call (amerikanisch, 2 Stufen)

$$C_u = \max\left(S_t - K, e^{-r(t^*-t)}(q * f_{du} + (1-q) * f_{uu})\right)$$

$$C = e^{-r(t^*-t)}(q * C_u + (1-q)C_d)$$

Überprüfen ob vorzeitige Ausübung besser ist als halten!

Wert Put (amerikanisch, 2 Stufen)

$$P_u = \max\left(K - S_t, e^{-r(t^*-t)}(q * f_{du} + (1-q) * f_{uu})\right)$$

$$P = e^{-r(t^*-t)}(q * P_u + (1-q)P_d)$$

Überprüfen ob vorzeitige Ausübung besser ist als halten!

No-Arbitrage-Portfolio (Long Aktie, Short Option europäisch)

Delta

$$\Delta = \frac{\Delta Optionspreis}{\Delta Aktienkurs} = \frac{C_u - C_d}{S_{u,T} - S_{d,T}}$$

$$\Delta = \frac{C_u - C_d}{(u-d) * S_0}$$

Wert Portfolio in t

$$\Pi_t = \Delta S_t - C$$

Wert Portfolio in T (steigender bzw. fallender Kurs)

$$\Pi_{u,T} = \Delta S_{u,T} - C_u \; bzw. \Pi_{d,T} = \Delta S_{d,T} - C_d$$

$$\rightarrow \Pi_{u,T} = \Pi_{d,T} = \Pi_T \rightarrow \Pi_t = \Pi_T e^{-r(T-t)}$$

Wert einer Option (europäisch Call)

$$C = \Delta S_t - \Pi_T e^{-r(T-t)}$$

Mit Put-Call-Parität Wert einer Put-Option herleiten

Black-Scholes-Merton Modell

Wert Call (europäisch)

$$C = S_0 * N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} * N(d_2)$$

Wert Put (europäisch)

$$P = Ke^{-r(T-t)} * N(-d2) - S_0 * N(-d_1)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0 - D}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) * (T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0 - D}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) * (T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

$$N(-z) = 1 - N(z)$$

Optionspreissensitivität

Symbol	Call	Put
Delta (S_t): Δ	$N(d_1)$	$-N(-d_1)$
Gamma: Γ	$\frac{N'(d_1)}{S_0\sigma\sqrt{T}} > 0$	
Vega (Vola): ν	$S_0\sqrt{T}N'(d_1) > 0$	
Theta (Zeit): Θ	$-\frac{S_0N'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T-t}} - rKe^{-r(T-t)}N(d_2)$	$-\frac{S_0N'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T-t}} + rKe^{-r(T-t)}N(-d_2)$
Rho (Zins): ρ	$KTe^{-rT}N(d_2) > 0$	$-KTe^{-rT}N(-d_2) < 0$

$$N'(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_1^2}{2}}$$

Volatilität

$$\sigma = \sqrt{T}\sqrt{\frac{1}{T-1}\sum_{t=2}^{T}(r_t-\mu)^2}\,; \mu = E(Rendite)$$

Volatilität Umrechnung

$$\sigma_y = \sqrt{T} * \sigma_d$$

Implizite Volatilität

Diejenige Volatilität bei der $C = S_0N(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$ gilt.