Akademia Górniczo-Hutnicza
im. Stanisława Staszica w Krakowie
AGH University of Science
and Technology

Automatyka Pojazdowa: Przekształcanie układów współrzędnych

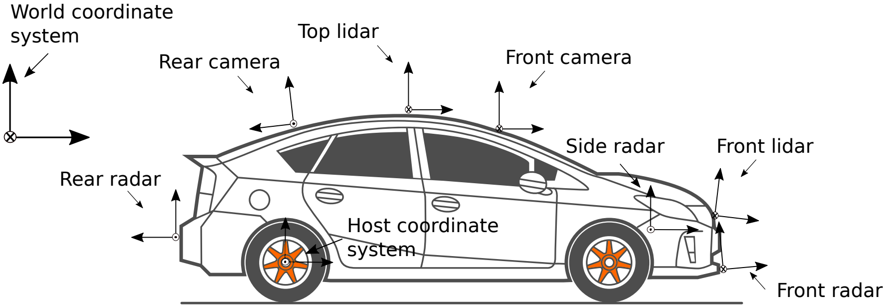
Kamil Lelowicz

1 marca 2020

Agenda

1. Motywacja: Advanced driver-assistance systems
2. Transformacja układu współrzędnych-wstęp
3. Macierz rotacji
4. Kąty Eulera
5. Macierz transformacji
6. Model kamery
7. Kwaterniony

Mnogość układów współrzędnych



Rysunek: Mnogość układów współrzędnych występujących we współczesnych samochodach.

Układy współrzędnych

Sensory

- Kamera - płaszczyzna kamery
- Lidar - układ współrzędnych sferycznych
- Radar - układ współrzędnych sferycznych

Wymagania

Zastosowania

- Fuzja danych z czujników (low level fusion, high level fusion)
- Komunikacja *V2V*
- Komunikacja *V2x*

Transformacja układu współrzędnych

Definicja

Transformacja współrzędnych - zadanie obliczeniowe polegające na przeliczeniu współrzędnych pomiędzy układ współrzędnych.

Transformacja układów kartezjańskich

W naszym przypadku będziemy się zajmować transformacją współrzędnych z jednego układu kartezjańskiego w drugi. Jest to operacja afiniczna i można ją podzielić na dwa etapy:

- rotacja
- translacja

Zapis matematyczny

Transformacja współrzędnych

$$p', p, t \in \mathbb{R}^3, \quad R \in \mathbb{R}^{3x3}$$
$$p' = Rp + t$$

gdzie:

- p - przekształcany punkt.
- p' - przekształcony punkt.

Operacja translacji

Translacja

$$p', p, t \in \mathbb{R}^n$$
$$p' = p + t$$

Rotacja

Definicja Eulera'a (Decouverte d'un nouveau principe de mecanique, 1753)

Niech Q, $Q^{'} \in \mathbb{R}^3$ wtedy istnieje oś $d \in \mathbb{R}^3$ i kąt rotacji $\alpha \in (-\pi, \pi\rangle$ taki, że gdy obrócimy się o kąt α względem osi u z Q otrzymamy Q'.

Reprezentacje obrotów

Sposoby reprezentacji obrotów

- Macierz rotacji
- Kąty Eulera
- Kwaterniony

Niejednoznaczność

Niejednoznaczność w definiowaniu rotacji

- Rotujemy punkty?
- Rotujemy układ współrzędnych?

Macierz rotacji

Właściwości

- reprezentuję automorfizm (endomorfizm i izomorfizm)
- zachowuję długości
- zachowuje kąty
- zostawia przynajmniej jeden punkt nie zmieniony
- pozostawia skrętność układu nie zmienioną

Grupa $SO(3)$

Właściwości grupy

- $R^{-1} = R^T$
- $det(R) = 1$
- Wartości własne:
  - $\{1, 1, 1\}$
  - $\{1, -1, -1\}$
  - $\{1, e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}$

Składanie przekształceń

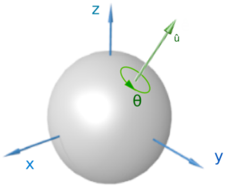
$$R_3 = R_2 R_1$$

Najpierw wykonamy rotację R_1, następnie R_2. Czyli do prawej do lewej.

Związek macierzy rotacji z definicją Eulera

$$\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)^T \in \mathbb{R}^3, \quad ||\mathbf{u}|| = 1$$

$$R = \mathbf{u}\mathbf{u}^T(1 - cos\theta) + Icos\theta + \begin{bmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{bmatrix} \sin\theta$$



Rysunek: Definicja Eulera

Metryka

Funkcja dystansu

$$d_1 : SO(3) \times SO(3) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$
$$d_1(R_1, R_2) = ||I - R_1^T R_2||_F$$

$|| \cdot ||_F$ - norm Frobeniusa

Macierz Rotacji

Normalizacja

Wymaga algorytmu SVD. (Orthogonal Procrustes problem)

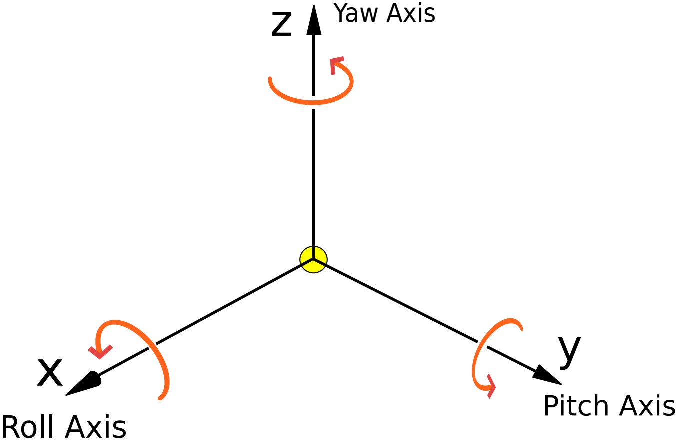
$$R = \arg\min_{\Omega} ||\Omega - M||_F \quad \Omega^T\Omega = I$$
$$M = U\Sigma V^T$$
$$R = UV^T$$

Kąty Eulera (Kąty Tait–Bryana)

Definicja

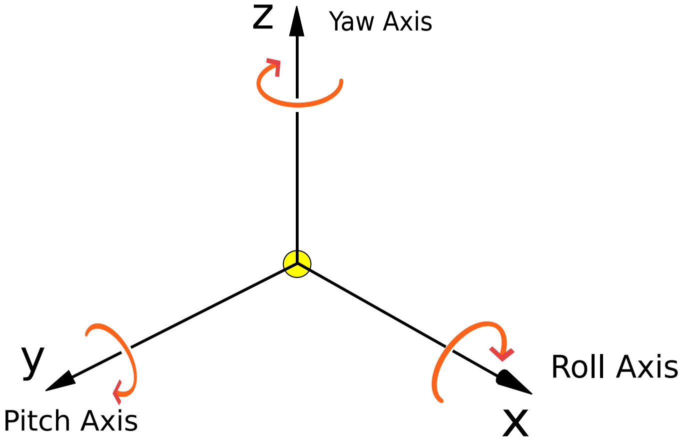
Zbiór trzech kątów, który określa wzajemną orientację dwóch kartezjańskich układów współrzędnych o takiej samej skrętności w trójwymiarowej przestrzeni.

Oznaczenia kątów, układ prawoskrętny



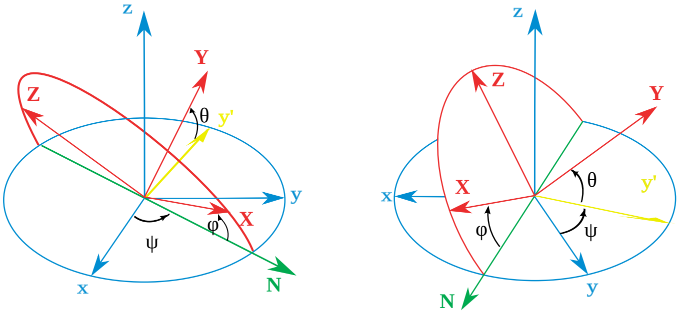
Rysunek: Układ prawoskrętny, oznaczenia osi.

Oznaczenia kątów, układ lewoskrętny



Rysunek: Układ lewoskrętny, oznaczenia osi.

Kąty Tait–Bryana



Rysunek: Kąty Tait–Bryana. Autor: Lionel Brits

Macierze rotacji dla układu prawoskrętnego.

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\ \theta & -\sin\ \theta \\ 0 & \sin\ \theta & \cos\ \theta \end{bmatrix}$$

$$R_y = \begin{bmatrix} \cos\ \gamma & 0 & \sin\ \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\ \gamma & 0 & \cos\ \gamma \end{bmatrix}$$

$$R_z = \begin{bmatrix} \cos\ \psi & -\sin\ \psi & 0 \\ \sin\ \psi & \cos\ \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

W przypadku układu lewoskrętnego bierzemy transpozycję przedstawionych macierzy.

Możliwe kombinacje

Kombinacja	
$R_z R_y R_x$	roll-pitch-yaw
$R_x R_y R_z$	yaw-pitch-roll
$R_y R_z R_x$	roll-yaw-pitch
$R_y R_x R_z$	yaw-roll-pitch
$R_z R_x R_y$	pitch-roll-yaw
$R_x R_z R_y$	pitch-yaw-roll

Dodatkowo każda macierz rotacji może być transponowana oznaczając rotację w przeciwnym kierunku.

Metryka

Funkcja dystansu

Niech $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ and $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ będą kątami Tait–Bryana.

$$d_2 : E \times E \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$
$$d_2((\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)) = \sqrt{d(\alpha_1, \alpha_1)^2 + d(\beta_1, \beta_2)^2 + d(\gamma_1, \gamma_2)^2}$$

gdzie $d(x, y) = \min\{|a-b|, 2\pi - |a-b|\}$ i $E \in \mathbb{R}^3$. **Metryka ta nie jest "bi-invariant".**

Macierz transformacji

Macierz transformacji

$$R \in \mathbb{R}^{3x3}, \quad t \in \mathbb{R}^3$$

$$T = \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

R - macierz rotacji, t - wektor translacji, I - macierz jednostkowa.

Przekształcenie

Przekształcenie za pomocą macierzy transformacji

$$p = (x, y, z, 1)^T$$
$$p' = Tp$$

Odwrotność

Odwrotność macierzy transformacji

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

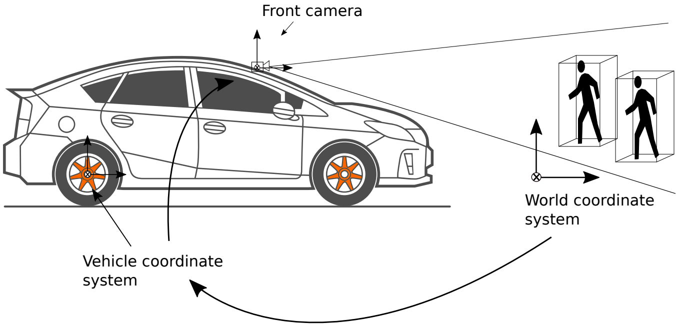
Składanie przekształceń

Składanie przekształceń

$$T_3 = T_2 T_1$$

Najpierw wykonamy przekształcenie T_1, następnie T_2. Czyli do prawej do lewej.

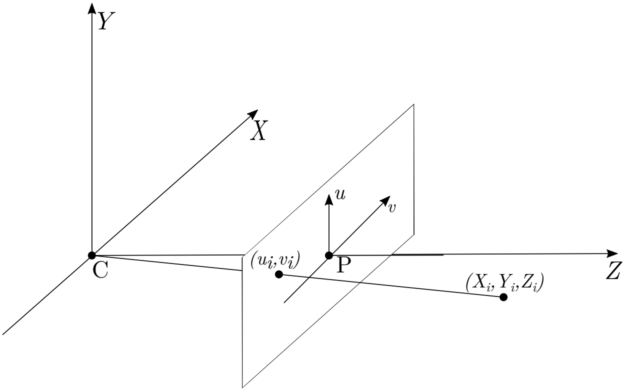
Składanie przekształcań



Rysunek: Transformacja układu współrzednych

S

Rzutowanie punktów na płaszczyznę kamery.



Rysunek: Pinhole model

Rzutowanie punktów na płaszczyznę kamery.

Równanie

Kamera może być rozpatrywana jako funkcja która opisuję relację między trzy-wymiarową przestrzenią a jej rzutem na dwu-wymiarową płaszczyzne obrazu.

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} f_1 & s & v_0 \\ 0 & f_2 & u_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Parametry intrinsic:

f -ogniskowa, s-skośność, (v_0, u_0) - położenia środka obrazu

Parametry extrinic:

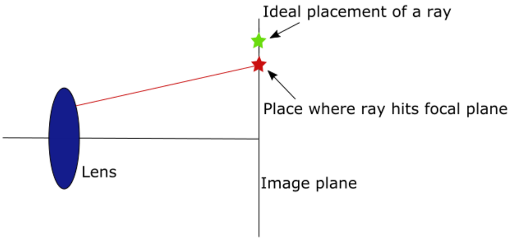
r_i- rotacja, (x, y, z) - translacja

Rodzaje dystorsji

Dystorsja radialna

Dystorsja soczewki jest formą optycznej aberracji. Powoduję że między innymi że proste linie na obrazie kamery stają się wygięte. Wyróżnia się trzy rodzaje dystorsji

- Barrel distortion
- Pincushion distortion
- Moustache distortion



Rysunek: Przykład barrel distortion

Radialny model dystorsji

Opis równań

(u_d, v_d) and (u_u, v_u) odpowiadające sobie punkty po i przed dystorsją. (u_0^d, v_0^d) środek dystorsji. r_d dystans od środka dystorsji do zniekształconego punktu.

$$r_d^2 = \left(u_d - u_0^d\right)^2 + \left(v_d - v_0^d\right)^2$$

Division model

$$u_u = \frac{u_d - u_0^d}{1 + k_1 r_d^2 + k_2 r_d^4 + k_3 r_d^6 + \ldots + k_n r_d^{2n}}$$

$$v_u = \frac{v_d - v_0^d}{1 + k_1 r_d^2 + k_2 r_d^4 + k_3 r_d^6 + \ldots + k_n r_d^{2n}}$$

CARLA-wizualizacja

(Example video)

Kwaterniony

Reprezentacja kwaternionów

Kwaterniony można przedstawić w następującej formie:

$$p = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} = a + \mathbf{v} \quad p \in \mathscr{H} \tag{1}$$

gdzie a, b, c, d są liczbami rzeczywistymi oraz $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ podstawowymi jednostkami kwaternionów.

Definition

Kwaterniony Hamiltona tworzą pierścień z dzieleniem i jedynką.

Rotacja

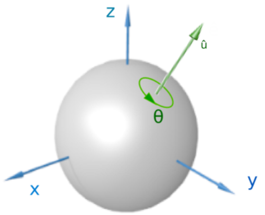
Wykorzystanie kwaternionu jako rotacji

Rotacja o kąt θ wokół osi zdefiniowanej wokół wektora jednostkowego:

$$\mathbf{u} = u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j} + u_z\mathbf{k}$$

Może być wyrażona w następujący sposób:

$$\cos\frac{\theta}{2} + (u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j} + u_z\mathbf{k})\sin\frac{\theta}{2}$$



Rysunek: Rotacja Euler'a.

Macierz rotacji dla kwaternionu

Macierz rotacji [qu_book]

Rotacja kwaternionowa $p' = qpq^{-1}$ (z $q = q_0 + q_i\mathbf{i} + q_j\mathbf{j} + q_k\mathbf{k}$) może być przedstawiona w postaci $p' = Rp$ gdzie R jest następującą macierzą rotacji:

$$R = \begin{bmatrix} 1 - 2s\left(q_j^2 + q_k^2\right) & 2s\left(q_iq_j + q_kq_0\right) & 2s\left(q_iq_k + q_jq_0\right) \\ 2s\left(q_iq_y + q_zq_0\right) & 1 - 2s\left(q_i^2 + q_z^2\right) & 2s\left(q_jq_k + q_iq_0\right) \\ 2s\left(q_iq_k + q_jq_0\right) & 2s\left(q_jq_k + q_iq_0\right) & 1 - 2s\left(q_i^2 + q_j^2\right) \end{bmatrix}$$

Gdzie $s = \|q\|^{-2}$, jeśli q jest kwaternionem jednostkowym $s = 1$

Dodawanie

Przykład

Niech:

$$p_1 = a_1 + b_1\mathbf{i} + c_1\mathbf{j} + d_1\mathbf{k}$$

$$p_2 = a_2 + b_2\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + d_2\mathbf{k}$$

Wtedy:

$$p_3 = p_1 + p_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\mathbf{i} + (c_1 + c_2)\mathbf{j} + (d_1 + d_2)\mathbf{k}$$

Element naturalny: $e = 0$
Element przeciwny do p_1:

$$\tilde{p}_1 = -a_1 - b_1\mathbf{i} - c_1\mathbf{j} - d_1\mathbf{k}$$

Mnożenie

Założenia

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

i

$$ij = k, \quad ji = -k$$

$$jk = i, \quad kj = -i$$

$$ki = j, \quad ik = -j$$

Tabela mnożeń

$\cdot$	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Mnożenie

Przykład

Niech:

$$p_1 = a_1 + b_1\mathbf{i} + c_1\mathbf{j} + d_1\mathbf{k} \qquad p_2 = a_2 + b_2\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + d_2\mathbf{k}$$

Wtedy:

$$\begin{aligned} p_3 = p_1 \cdot p_2 &= a_1a_2 + a_1b_2\mathbf{i} + a_1c_2\mathbf{j} + a_1d_2\mathbf{k} + b_1a_2\mathbf{i} + b_1b_2\mathbf{i}^2 + b_1c_2\mathbf{ij} + b_1d_2\mathbf{ik} \\ &\quad + c_1a_2\mathbf{j} + c_1b_2\mathbf{ji} + c_1c_2\mathbf{j}^2 + c_1d_2\mathbf{jk} + d_1a_2\mathbf{k} + d_1b_2\mathbf{ki} + d_1c_2\mathbf{kj} + d_1d_2\mathbf{k}^2 \\ &= a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)\,\mathbf{i} \\ &\quad + (a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2)\,\mathbf{j} + (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)\,\mathbf{k} \end{aligned}$$

Sprzężenie

Definicja

Niech:

$$p = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$$

Wtedy sprzężenie p wynosi:

$$p^* = a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}$$

Lub w innej postaci:

$$p^* = -\frac{1}{2}(p + \mathbf{i}p\mathbf{i} + \mathbf{j}p\mathbf{j} + \mathbf{k}p\mathbf{k})$$

Sprzężenie

Właściwości

Sprzężenie mnożenia:

$$(pq)^* = q^* p^*$$

Cześć rzeczywista:

$$\frac{p + p^*}{2}$$

Cześć urojona:

$$\frac{p - p^*}{2}$$

Norma

Definicja

$$\|p\| = \sqrt{p^* p} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

Kwaternion jednostkowy

Wersor

Kwaternion o normie równej jeden.

$$\hat{q} = \frac{q}{\|q\|}$$

Dekompozycja do formy polarnej:

$$q = \|q\|\hat{q}$$

Mnożenie:

$$pq = \|p\|\hat{p}\,\|q\|\hat{q} = \|p\|\|q\|\hat{p}\hat{q}$$

Odwrotność

Odwrotność q

$$q^{-1} = \frac{a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

Dowód:

$$q^* q = \|q\|^2$$

$$\frac{q^* q}{\|q\|^2} = 1$$

$$q^{-1} = \frac{q^*}{\|q\|^2} = \frac{a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

Eksponenta

Niech:

$$p = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} = a + \mathbf{v}$$

Wtedy:

$$e^p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n}{n!} = e^a \left(\cos\|v\| + \frac{v}{\|v\|} \sin\|v\| \right)$$

Dodatkowo:

$$\|e^{\mathbf{v}}\| = \left\| \left(\cos\|v\| + \frac{v}{\|v\|} \sin\|v\| \right) \right\| = 1$$

Dekompozycja

$$p = a + \mathbf{v} = \|p\|\hat{p} = \|p\|e^{\hat{v}\theta}$$

gdzie:

- rotacja: $\theta = \arccos \frac{a}{\|p\|}$
- kierunek: $\hat{v} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$

Potęga

Potęga

Potęg kwaternionu jest zdefiniowana w następujący sposób:

$$p^{\alpha} = \|p\|^{\alpha} e^{\hat{v}\alpha\theta} = \|p\|^{\alpha} \left(\cos \alpha\theta + \hat{v} \sin \alpha\theta\right)$$

Rotacja kwaternion

Definicja

Rotacja reprezentowana przez **kwaternion jednostkowy** q może być wykonana dla wektora $r = r_x\mathbf{i} + r_y\mathbf{j} + r_z\mathbf{k}$ w 3 wymiarowej przestrzeni, przyjmując że jest to kwaternion z częścią rzeczywistą równą zero, poprzez wyliczenia sprzężenia r przez q:

$$r' = qrq^{-1}$$

Rotacja

Przeciwna rotacja

$$
\begin{aligned}
q &= e^{-\frac{\theta}{2}(u_x\mathbf{i}+u_y\mathbf{j}+u_z\mathbf{k})} \\
&= \cos\frac{\theta}{2} - (u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j} + u_z\mathbf{k})\sin\frac{\theta}{2}
\end{aligned}
$$

Rotacja

Łączenie rotacji

Dwie lub więcj rotacji może zostać połączona w jedną:

$$q = q_1 q_2$$

Dowód:

$$q_1 q_2 r \left(q_1 q_2\right)^{-1} = q_1 q_2 r q_2^{-1} q_1^{-1} = q_1 \left(q_2 r q_2^{-1}\right) q_1^{-1}$$

Macierz rotacji dla kwaternionu

Macierz rotacji

Rotacja kwaternionowa $p' = qpq^{-1}$ (z $q = q_0 + q_i\mathbf{i} + q_j\mathbf{j} + q_k\mathbf{k}$) może być przedstawiona w postaci $p' = Rp$ gdzie R jest następującą macierzą rotacji:

$$R = \begin{bmatrix} 1 - 2s\left(q_j^2 + q_k^2\right) & 2s\left(q_iq_j + q_kq_0\right) & 2s\left(q_iq_k + q_jq_0\right) \\ 2s\left(q_iq_y + q_zq_0\right) & 1 - 2s\left(q_i^2 + q_z^2\right) & 2s\left(q_jq_k + q_iq_0\right) \\ 2s\left(q_iq_k + q_jq_0\right) & 2s\left(q_jq_k + q_iq_0\right) & 1 - 2s\left(q_i^2 + q_j^2\right) \end{bmatrix}$$

Gdzie $s = \|q\|^{-2}$, jeśli q jest kwaternionem jednostkowym $s = 1$

Interpolacja kwaternionów

Slerp

$$Slerp(q_0, q_1, t) = q_0 \left(q_0^{-1} q_1\right)^t \qquad t \in 0, 1$$

Metryka

Funkcja dystansu

$$S^n = \{q \in \mathbb{R}^{n+1}, ||q|| = 1\}$$
$$d_3 : S^3 \times S^3 \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$
$$d_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = 1 - (\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2)^2$$

Wizualizacja

Animowana wizualizacja

`https://quaternions.online/`

Porównanie reprezentacji obrotów

Kąty Eulera (Kąty Tait–Bryana)

- Kolejność ma znaczenie
- Gimbal lock
- Interpolowanie orientacji jest trudne
- Składanie rotacji jest trudne

Porównanie reprezentacji obrotów

Macierze rotacji

- Brak intuicji
- Składanie orientacji jest proste, niemniej jednak podczas składnia wielu orientacji może być wymagana re-ortomalizacja macierzy
- Operacje macierzowe są efektywnie wykonywane przez CPU i GPU
- Interpolowanie orientacji jest trudne

Porównanie reprezentacji obrotów

Kwaterniony

- Koncept wydaję się matematycznie skomplikowany
- Prosta interpretacja geometryczna
- Interpolowanie orientacji jest proste
- Brak gimbal lock
- Proste składanie rotacji (mniej obliczeń w porwaniu z macierzami), łatwiejsze do normalizacji
- W prosty sposób przekształcana do macierzy rotacji