



Badania Operacyjne

Badania Operacyjne – Ćwiczenia tablicowe I st. II rok AiR
Katedra Automatyki i Robotyki
Laboratorium Badań Operacyjnych i Systemowych

Ćwiczenia nr 3

Temat 3

- Metoda ścieżki krytycznej CPM
- Harmonogram Gantt
- Metoda PERT
- Zadania

Metoda Ścieżki Krytycznej – CPM [1]

Podstawą CPM jest stworzenie modelu projektu, który zawiera:

- listę wszystkich zadań wymaganych do realizacji projektu,
- czas trwania każdego z zadań,
- powiązania pomiędzy poszczególnymi czynnościami.

CPM pozwala wyznaczyć:

- ścieżkę krytyczną - najdłuższą ścieżkę działań do zakończenia projektu - ciąg czynności łączących zdarzenia o najmniejszych lub zerowych rezerwach czasu.
- najwcześniejszy i najpóźniejszy termin wystąpienia zdarzenia bez wpływu na długość realizowanego projektu oraz rezerwy czasowe.

Technika ta pozwala na priorytetyzację zadań projektowych poprzez:

- dodanie / podział zadań, które mogą być realizowane równolegle,
- skrócenie czasu trwania zadań ścieżki krytycznej poprzez użycie dodatkowych zasobów.

Metoda Ścieżki Krytycznej – fazy ^[1]

FAZA I:

- podział projektu na zadania niezbędne do realizacji,
- wyznaczenie powiązań pomiędzy czynnościami.

FAZA II:

- oszacowanie czasu trwania każdego z zadań,
- wyznaczenie najwcześniejszego i najpóźniejszego terminu wystąpienia zdarzenia oraz rezerw czasu,
- wyznaczenie ścieżki krytycznej,
- przedstawienie struktury projektu w postaci wykresu sieciowego.

FAZA III:

- przedstawienie przebiegu projektu w postaci harmonogramu
- z uwzględnieniem kamieni milowych,
- planowanie zasobów projektu wraz z wyrównaniem zapotrzebowania na zasoby,
- działania korygujące, które uwzględniają skrócenie czasu trwania projektu.

Metoda Ścieżki Krytycznej [1]

Zdarzenia:

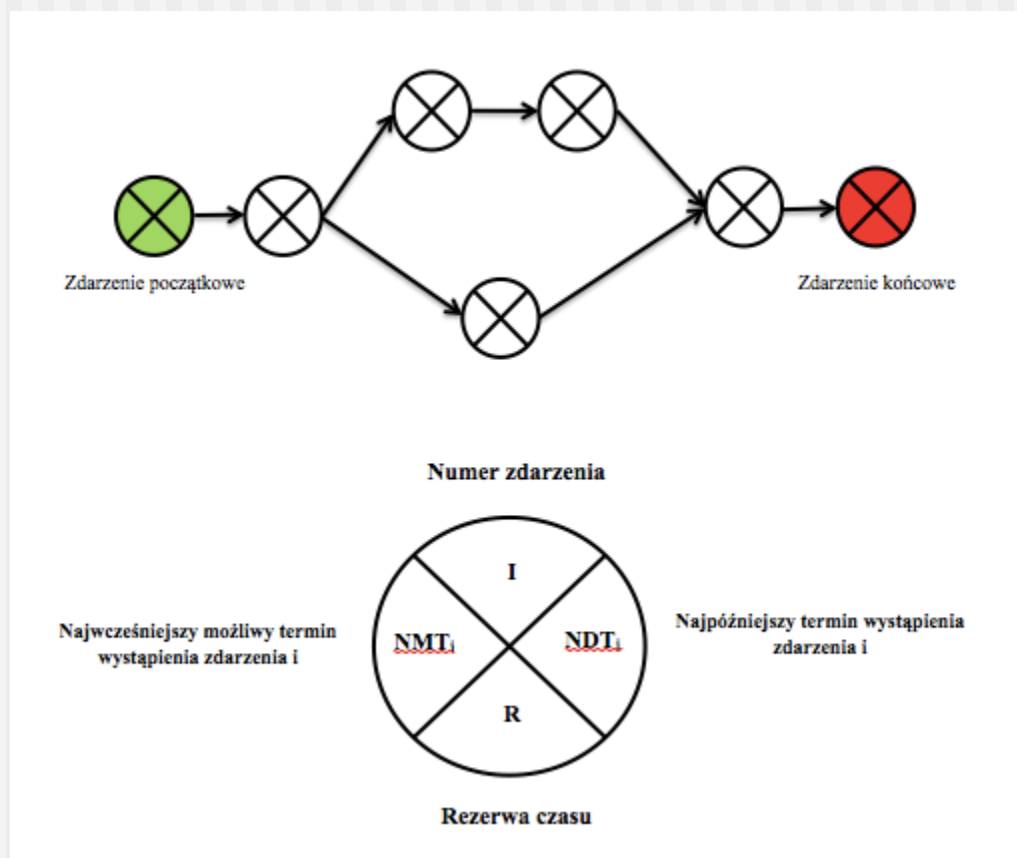
- początkowe
- końcowe

Terminy:

- Najwcześniejszy
Możliwy – NMT ($\underline{t_i}$)
- Najpóźniejszy
Dopuszczalny – NDT ($\overline{t_i}$)

Rezerwa czasu:

- dla zdarzenia
(nazywana **luz**)
- dla czynności
(**rezerwa**, zapas)



Algorytm CPM -1

Procedura 1 : Numerowanie wierzchołków grafu.

CEL: Ponumerować wierzchołki tak, aby zdarzenie poprzedzające miało numer mniejszy niż następujące.

Krok 1: Przydziel wierzchołkowi swobodnemu (nie dochodzą do niego żadne łuki) nr **$i = 1$**

Krok 2: Usuwamy łuki o początku w wierzchołkach ponumerowanych

Krok 3: Wierzchołkom swobodnym przydzielamy kolejne numery **$i+1, i+2 \dots$**

Krok 4: Jeśli nie ponumerowano wszystkich wierzchołków to wykonuj **Krok 2**

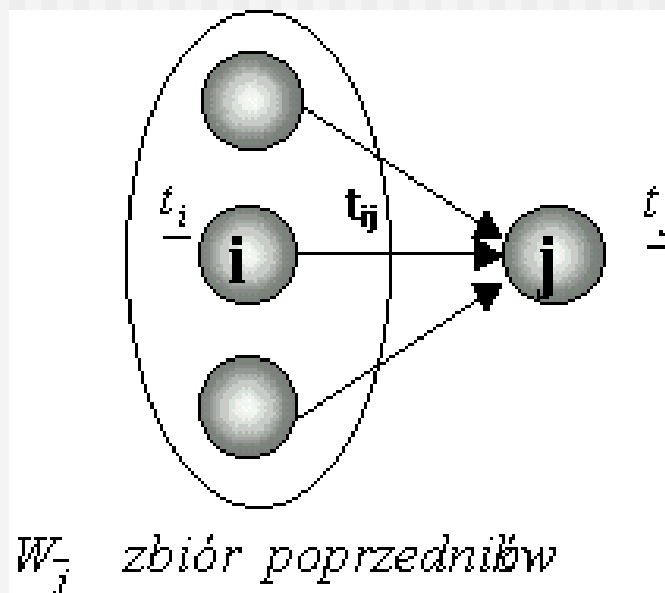
Algorytm CPM -2

Procedura 2 : Obliczanie najwcześniejszych terminów zdarzeń.

Krok 1: Podstaw dla zdarzenia początkowego przedsięwzięcia

$$\underline{t}_1 := 0$$

Krok 2: Dla $j=2,\dots,n$ wykonaj $\underline{t}_j := \max_{i \in W_j^-} \{ \underline{t}_i + t_{ij} \}$



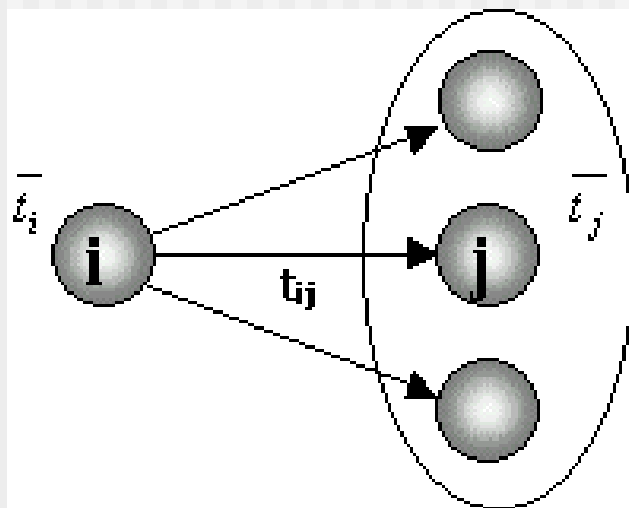
Algorytm CPM -3

Procedura 3 : Obliczanie najpóźniejszych terminów zdarzeń.

Krok 1: Podstaw dla zdarzenia końcowego przedsięwzięcia

$$\bar{t}_n := \underline{t}_n$$

Krok 2: Dla $i=n-1, \dots, 1$ wykonaj $\bar{t}_i := \min_{j \in W_i^+} \{ \bar{t}_j - t_{ij} \}$



W_{i+} zbiór następników

Algorytm CPM -4

Procedura 4 : Obliczanie rezerw i luzów, wyznaczenie ścieżki krytycznej.

Krok 1: Rezerwa czasu dla czynności (i,j) :

$$\forall_{(i,j) \in E} r_{ij} := \bar{t}_j - \underline{t}_i - t_{ij}$$

Jeżeli rezerwa wynosi 0 to czynność leży na ścieżce krytycznej

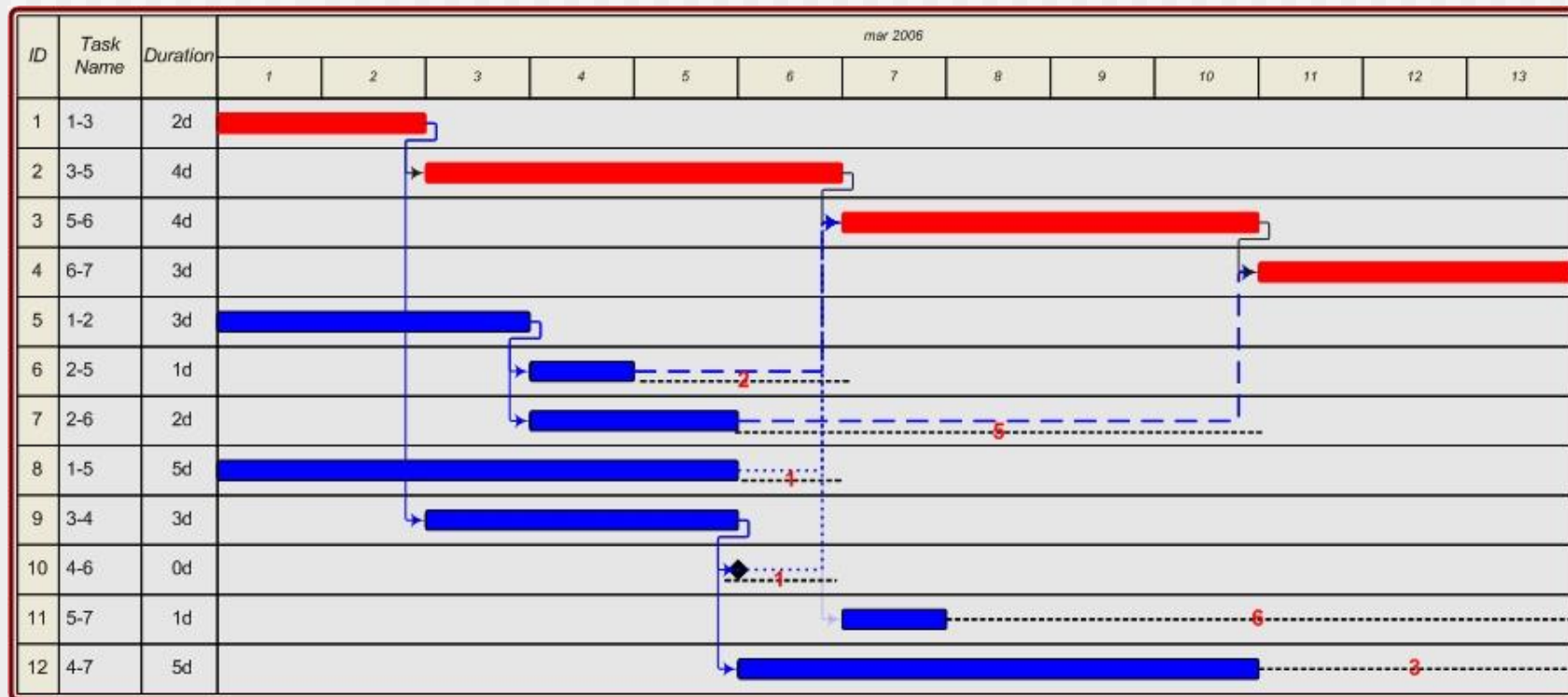
Krok 2: Luz dla zdarzenia j : $\forall_{j \in V} l_j := \bar{t}_j - \underline{t}_j$

Jeżeli luz wynosi 0 to zdarzenie leży na ścieżce krytycznej.

Warunek zakończenia przedsięwzięcia w terminie:

$$\forall_{j \in V} t_j \in [\underline{t}_j, \bar{t}_j]$$

Harmonogram Gantta - przykład



CPM – przykład 1 [2]

[2] źródło: Anna Grześ WYKRES GANTTA A METODA ŚCIEŻKI KRYTYCZNEJ (CPM)

Tabela – zestaw czynności w ramach projektu

P	Czynności (<i>activities</i>)	Czas trwania czynności w dniach (<i>duration</i>)	Czynności poprzedzające (<i>predecessors</i>)
1	START	0	
2	A	8	-
3	B	6	A
4	C	4	-
5	D	3	B,F
6	E	5	D, H
7	F	8	C
8	G	7	C
9	H	3	C
10	I	10	G
11	J	3	E
12	K	10	G
13	L	12	E
14	M	11	G
15	N	8	I, J
16	O	9	K, M
17	P	6	N

CPM – przykład 2 [2]

CPM – oznaczenia

Kamienie milowe projektu (milestones albo checkpoints) są punktami koordynacyjnymi i kontrolnymi częściowych rezultatów projektów.

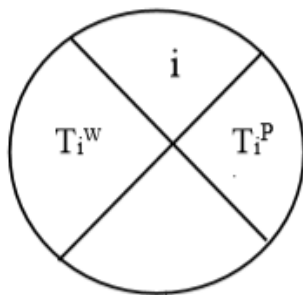
Przy konstrukcji sieci w metodzie CPM obowiązują:




dla czynności prostej, będącej dowolnie wyodrębnioną częścią przedsięwzięcia. W trakcie trwania tej czynności zużywa się czas o określonym czasie trwania t i określonym zużywaniu się zasobów. Kierunek strzałki sygnalizuje kierunek przebiegu czynności w czasie;



dla czynności pozornej, której zadaniem jest jedynie ukazanie zależności między czynnościami (poinformowania o tym, które czynności muszą zakończyć się, aby rozpoczęła się kolejna, po nich następująca). W trakcie trwania czynności pozornej nie zużywa się ani czasu ($t=0$), ani środków;

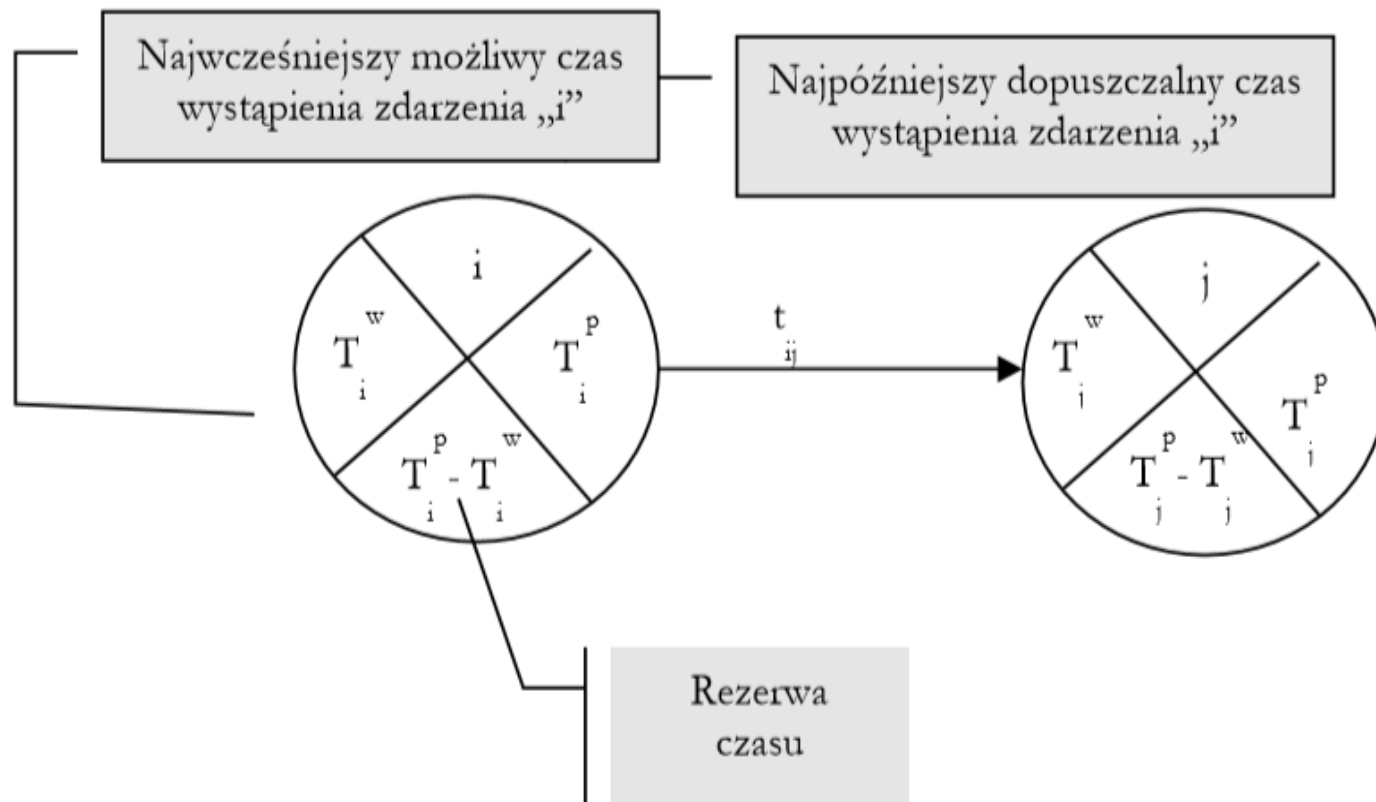


dla zdarzenia, w którym określa się stan zaawansowania prac przez wyznaczenie: najwcześniejszego możliwego (T_i^w) i najpóźniejszego dopuszczalnego momentu (T_i^P) zaistnienia danych czynności oraz rezerwy (zapasu) czasu ($T_i^P - T_i^w$), o jaki możliwe jest opóźnienie bez konieczności przesunięcia terminu zakończenia przedsięwzięcia.


$$L_i = T_i^P - T_i^w$$

CPM – przykład 3 [2]

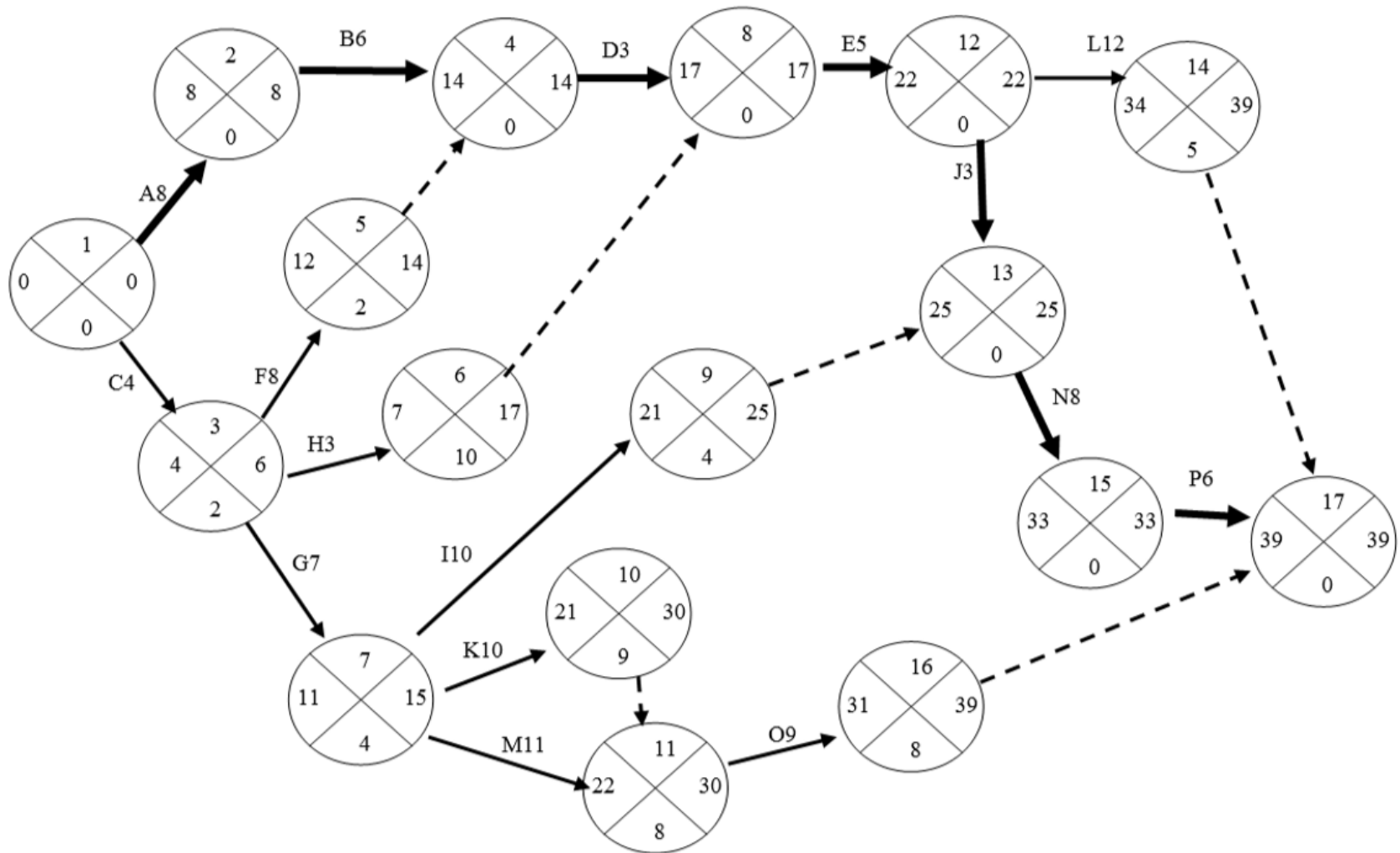
CPM - oznaczenia



Objaśnienia do obliczenia wartości: T_j^w ; T_j^p : $T_j^w = T_i^p + t_{ij}$, a $T_j^p = T_i^p - t_{ij}$.

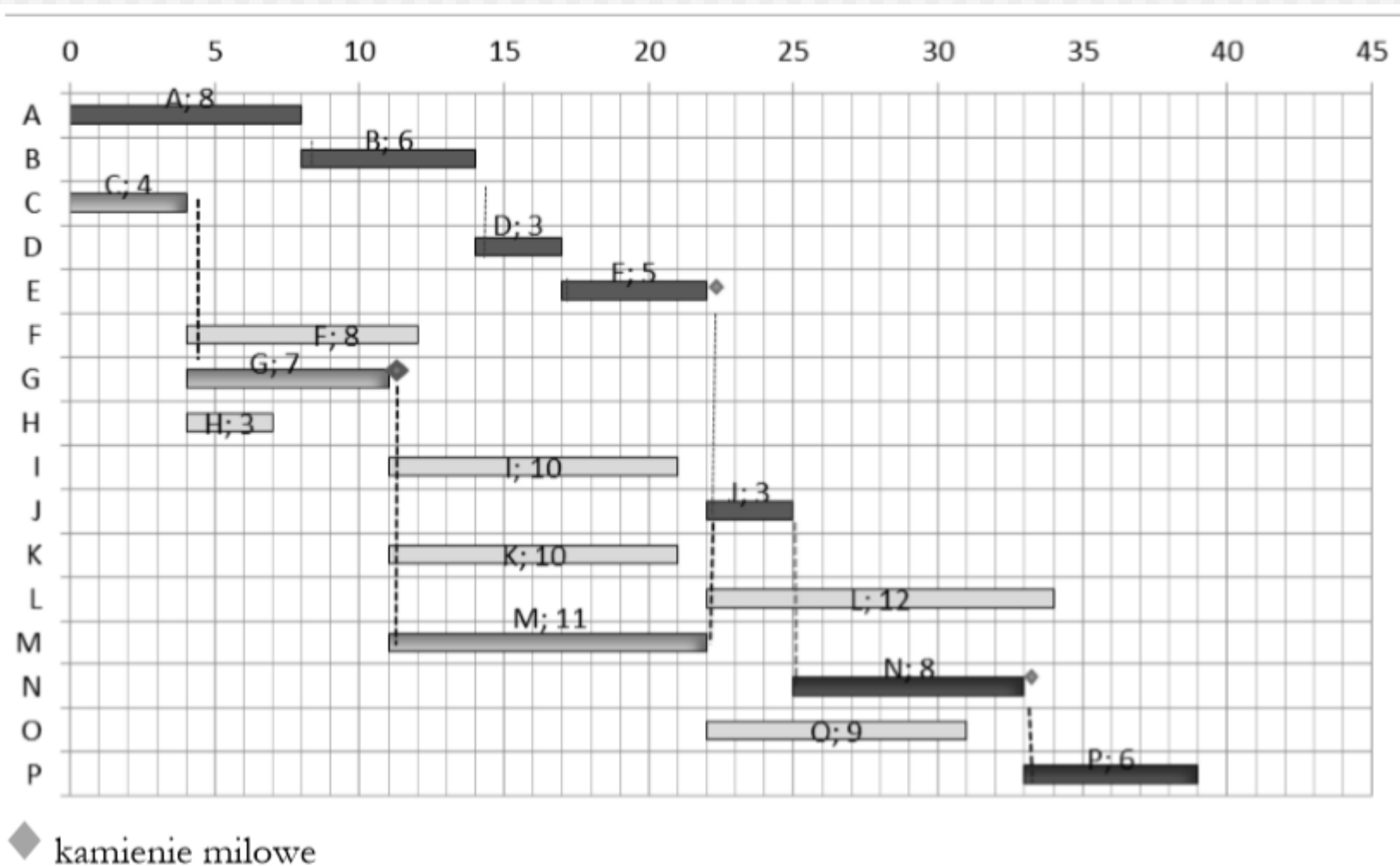
CPM – przykład 4 [2]

Wykres sieciowy CPM dla projektu



CPM – przykład 5 [2]

Wykres Gantta dla projektu



Model przedsięwzięcia w programowaniu sieciowym

Modelowanie przedsięwzięcia w programowaniu sieciowym:

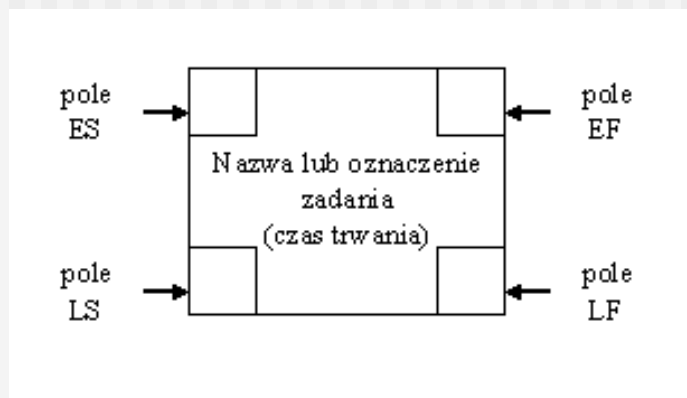
- Metoda amerykańska - wykorzystuje sieć zdarzeń
- Metoda francuska (potencjałów) - wykorzystuje sieć czynności

Typy modeli

- Deterministyczny
- Stochastyczny

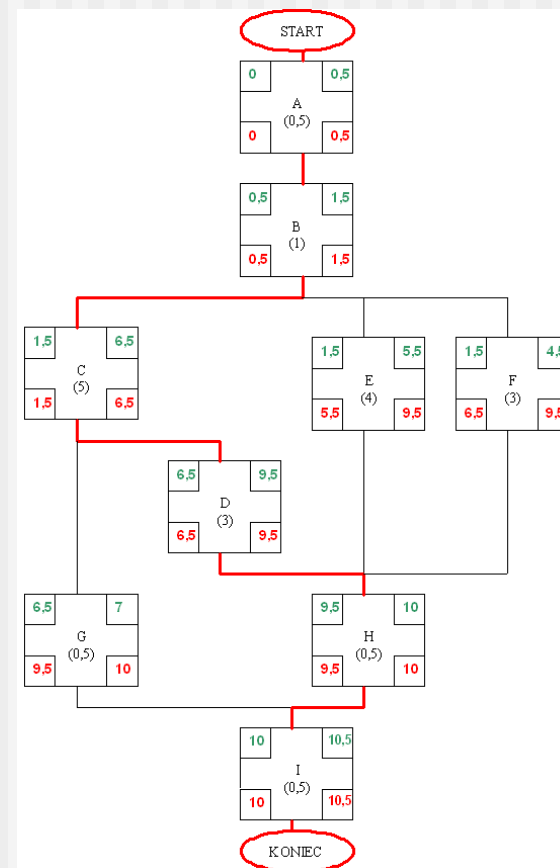
II typ formalizacji [3]

- Wierzchołek reprezentuje czynność:



gdzie:

- ES – early start (lub WS – wczesny start) – w przód: $ES = EF$ zadania poprzedniego.
- EF – early finish (lub WK – wczesny koniec) – w przód: $EF = ES$ zadania następnego.
- LS – late start (lub PS – późny start) – wstecz: $LS = LF$ zadania następnego (planowanie „wstecz” = zadanie następane oznacza chronologicznie wcześniejsze).
- LF – late finish (lub PK – późny koniec) – wstecz: $LF = LS$ zadania poprzedniego (jw.)



Model stochastyczny - PERT ^[4]

PERT (ang. Program Evaluation and Review Technique)

- Sieć o strukturze logicznej zdeterminowanej
- Parametry opisujące poszczególne czynności mają charakter stochastyczny
- Czas trwania każdej czynności jest szacowany:
 - t_c – optymistyczny,
 - t_m - najbardziej prawdopodobny,
 - t_p – pesymistyczny.
- Wyznaczane parametry dla czynności:
 - t_0 – wartość oczekiwana:
$$t_0 = \frac{t_c + 4t_m + t_p}{6}$$
 - σ^2 - wariancja:
$$\sigma^2 = \left(\frac{t_p - t_c}{6} \right)^2$$
 - Prawdopodobieństwo realizacji na podstawie dystrybuanty rozkładu

Modelu stochastyczny - PERT ^[4]

Przykład i przebieg obliczeń dla metody PERT prezentuje:

Maciej Patan, Programowanie sieciowe.

Metody CPM i PERT

file:///C:/Users/Administrator/Documents/dydaktyka/Przedmioty/BO/CPM_PERT/druk_6z.pdf

Literatura:

- [1] OMEC, <https://omec.pl/blog/metoda-sciezki-krytycznej>
- [2] Anna Grześ, Wykres Gantta a Metoda Ścieżki Krytycznej (CPM),
https://repozytorium.uwb.edu.pl/jspui/bitstream/11320/2997/1/14_Grzes.pdf
- [3] https://pl.wikipedia.org/wiki/Ścieżka_krytyczna
- [4] Maciej Patan, Programowanie sieciowe. Metody CPM i PERT
file:///C:/Users/Administrator/Documents/dydaktyka/Przedmioty/BO/CPM PERT/druk_6z.pdf

Zadanie domowe

1. Metoda CPM

- a) Zdefiniuj przedsięwzięcie o minimalnym rozmiarze 10 zdarzeń 15 czynności
- b) Zastosuj algorytm CPM
- c) Wyznacz ścieżkę krytyczną
- d) Narysuj harmonogram Gantt'a

2. Algorytmy zachłanne dla TSP

- a) Zdefiniuj macierz kosztów dla problemu komiwojażera o minimalnym rozmiarze $n=6$
- b) Na podstawie wykładu 3 (udostępnionego na platformie UPEL) zastosuj jeden z wybranych algorytmów zachłannych
- c) Określ jaki układ danych jest „złośliwy” dla wybranego alg
- d) Czym różni się od wybranego idea pozostałych (przedstawionych) algorytmów – opisz jednym zdaniem dla każdego.

Zadanie domowe - uwagi

1. Przyjęte dane (wartości, układ) nie powinny się powtarzać w przesłanych pracach (prawdopodobieństwo niezależnego utworzenia tych samych / podobnych danych jest znikome)
2. Odręczna forma rozwiązywania zadań zajmuje znacznie mniej czasu – więc można przesyłać zdjęcia / skany prac w jakości umożliwiającej odczytanie
3. Terminu przesłania prac na UPEL (22.4.2020) - proszę sukcesywnie realizować kolejne tematy
4. Prace należy przysyłać w formie załączników na UPEL lub adres:
 - pkad.inpg@gmail.com
 - opisując w tytule: **BO Temat3 Imię Nazwisko**